



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Estensioni centrali e Anomalie in

Meccanica Quantistica

Relatore

Prof. Luca Martucci

Laureando

Umberto Maria Tomasini

Anno Accademico 2017/2018

Sommario

Le anomalie quantistiche associate a simmetrie classiche sono solitamente discusse nell'ambito della teoria dei campi. In meccanica quantistica le anomalie emergono come estensioni centrali del gruppo di simmetria. La tesi ha l'obiettivo di rivisitare e discutere in modo sistematico la manifestazione delle estensioni centrali in meccanica quantistica non-relativistica. La discussione generale sarà accompagnata da semplici esempi illustrativi. In particolare, la presenza di anomalie sarà utilizzata per caratterizzare i vuoti della teoria e predire la cancellazione di possibili effetti non-perturbativi. Tale cancellazione sarà verificata tramite calcolo istantonico diretto.

Indice

Introduzione	v
1 Quadro generale	1
1.1 Simmetrie e invarianze in meccanica quantistica	1
1.2 Estensioni centrali e secondo gruppo di coomologia	4
1.3 Estensioni centrali e degenerazione degli stati	8
1.4 Anomalie di 't Hooft	9
2 Modelli Quantomeccanici	13
2.1 Modello fermionico	13
2.2 Modello bosonico	20
2.2.1 Particella libera	20
2.2.2 Particella con potenziale periodico	24
3 Calcolo istantonico	29
3.1 Doppia buca di potenziale	29
3.2 Potenziale periodico generico su S^1 : ruolo degli istantoni a priori	30
3.3 Istantoni in un caso particolare π -periodico su S^1	31
3.3.1 Propagatori in tempo euclideo	31
3.3.2 Approssimazione di punto-sella	33
3.3.3 Calcolo dei propagatori fra i massimi del potenziale euclideo	34
Conclusione	45
A Equivalenza fra particella libera senza periodicit� e particella con flusso magnetico di background	47
B Calcolo di R	51
C Istantoni in un potenziale periodico su \mathbb{R}	53

Introduzione

Le teorie che descrivono sistemi fisici classici sono descritte da opportune variabili, la cui dinamica è governata da opportune equazioni del moto. Tali equazioni del moto nascono dall'azione alla quale è associata la teoria. Possono esistere particolari trasformazioni di tali variabili che lasciano invariata l'azione e dunque la dinamica del sistema. L'insieme di queste invarianze costituisce un gruppo, chiamato *gruppo di simmetria*. Ad ogni teoria fisica classica è dunque associato un gruppo di simmetria. Esempi notevoli possono essere il gruppo di Galileo relativo ai sistemi isolati della meccanica classica o il gruppo di Poincaré in relatività speciale.

Data la teoria classica, si può passare alla relativa teoria quantizzata mediante un processo di *quantizzazione*. La teoria quantizzata vive all'interno di un opportuno spazio di Hilbert, in cui gli stati del sistema sono raggi vettore e le osservabili classiche sono operatori autoaggiunti. L'evoluzione temporale dello stato del sistema è descritta da una determinata equazione chiamata equazione di Schroedinger. Anche in questo contesto è possibile definire cos'è un'*invarianza* del sistema fisico. S'intenderà come invarianza del sistema fisico quantistico una trasformazione tale da lasciare invariata l'equazione di Schroedinger, dunque la dinamica del sistema. L'insieme delle invarianze costituirà un gruppo di simmetria della teoria quantizzata.

Ci si chiede ora se il gruppo di simmetria della teoria quantizzata coincida con quello della teoria classica o se vi possano essere differenze. Si vedrà che se i due gruppi sono diversi, allora dovranno per forza differire in una certa maniera, che verrà descritta dal concetto matematico di *estensione centrale di un gruppo*. Quello che accade è che il gruppo classico acquisisce degli elementi in più, che non hanno analogo classico. Un modo diretto per vedere se una teoria può avere un'estensione centrale non banale è andare a vedere il *secondo gruppo di coomologia* della teoria, che si mostrerà essere in corrispondenza biunivoca con le possibili estensioni centrali del gruppo di simmetria classico.

Il fatto che la teoria quantizzata differisca dalla classica non deve sorprendere: la vera teoria fisica è quella quantistica, di cui la classica è solo un'approssimazione per $\hbar \rightarrow 0$. Conoscere la teoria classica non implica quindi conoscere la teoria quantizzata, valida per un valore di \hbar diverso da zero.

In generale, quando s'incorre in particolari problemi quantizzando una teoria, si dice che la teoria è anomala. Vi sono più tipi di anomalie, fra le quali un tipo di anomalia chiamato *anomalia di 't Hooft*, che incorre quando la funzione di partizione della teoria non è invariante, in un certo specifico modo, sotto le trasformazioni di gauge locali della teoria. Le anomalie di 't Hooft si manifestano in meccanica quantistica come estensioni centrali del gruppo di simmetria.

Inoltre si mostrerà che nel caso vi sia un'estensione centrale, gli autostati energetici della teoria quantizzata sono necessariamente non degeneri. Le estensioni centrali del gruppo di simmetria costituiscono dunque un potente strumento, puramente affine alla teoria dei gruppi e alla topologia del sistema, per prevedere la comparsa di un'anomalia di 't Hooft nella teoria e per sapere se gli autostati energetici della teoria quantizzata sono degeneri o meno.

Nel **capitolo 1** si darà prima di tutto una definizione precisa di invarianza del moto in meccanica quantistica, si procederà dando la definizione di estensione centrale di un gruppo di simmetria nell'ambito della quantizzazione di teorie classiche, mostrandone il collegamento con il secondo gruppo di coomologia dei gruppi di simmetria classici. Si mostrerà che se il gruppo di simmetria è centralmente esteso in modo non banale allora gli autostati energetici della teoria quantizzata sono necessariamente degeneri. Verrà inoltre enunciato un teorema che garantisce l'impossibilità di un'eventuale estensione centrale in sistemi a una dimensione non compatta, . Si darà inoltre una nozione di anomalia nel senso di 't Hooft.

Nel **capitolo 2** si mostreranno alcuni modelli quantomeccanici in cui si vede esplicitamente l'estensione centrale del gruppo di simmetria classico. Il primo modello trattato riguarderà il fermione libero $0 + 1$ -dimensionale, che si mostrerà soggetto a un'anomalia di 't Hooft. Il secondo modello sarà un bosone libero su un cerchio S^1 , nella quale azione comparirà un termine topologico dipendente da un parametro θ di flusso magnetico. Sarà mostrata una dualità infrarossa fermione/bosone con il modello fermionico. Il terzo e ultimo modello riguarderà sempre il bosone su S^1 con un generico potenziale periodico.

Nel **capitolo 3** si considererà il modello del bosone su S^1 con un particolare potenziale periodico e si mostrerà la degenerazione degli stati fondamentali con un calcolo istantonico diretto. Questo fatto è in contrasto con la convinzione che gli istantoni eliminino sempre la degenerazione degli stati fondamentali. Si farà notare come tale fatto è strettamente collegato alla topologia non banale del sistema e al suo gruppo di simmetria. In tale sistema avviene infatti un'estensione centrale non banale, e di conseguenza gli autovalori energetici devono essere necessariamente degeneri. Tale calcolo istantonico e i vari collegamenti con i capitoli precedenti costituiscono la parte più originale della tesi.

Capitolo 1

Quadro generale

Nella sezione 1.1 di tale capitolo introdurremo in primo luogo il concetto di trasformazione di simmetria in meccanica quantistica, a cui seguirà la definizione di invarianza del moto in meccanica quantistica, vista come una particolare trasformazione di simmetria, si veda [12] [4]. Nella sezione 1.2, seguendo l'impostazione data da [15], diremo cos'è un'estensione centrale di un gruppo e ne illustreremo l'importanza nel contesto della quantizzazione di una teoria classica, in cui si può incorrere nell'estensione centrale del gruppo di simmetria classico. Mostreremo che le possibili estensioni centrali di un gruppo sono in corrispondenza biunivoca con il suo secondo gruppo di coomologia con coefficienti in $U(1)$. Nella sezione 1.3 mostreremo che, nel caso in cui la teoria quantizzata sia interessata da un'estensione centrale del gruppo di simmetria classico non triviale, allora i suoi autostati energetici sono necessariamente degeneri. Sottolineeremo come ciò non può accadere in un modello con una sola dimensione spaziale non compatta, e che dunque non possono avvenirvi estensioni centrali non banali. Nell'ultima sezione, la 1.4, illustreremo cos'è un'anomalia di 't Hooft tramite un esempio esplicito, ovvero il fermione libero 0+1-dimensionale, che verrà ripreso in maggiore dettaglio nella sezione 2.1, seguendo [6] e [7].

1.1 Simmetrie e invarianze in meccanica quantistica

Definiamo ora le trasformazioni di simmetria in meccanica quantistica. Sia \mathcal{H} lo spazio di Hilbert relativo alla teoria quantizzata. Definiamo la probabilità di transizione da uno stato $|\psi\rangle$ a uno stato $|\phi\rangle$ (entrambi opportunamente normalizzati) come il modulo quadro del loro prodotto scalare:

$$P(|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2 \quad (1.1)$$

\mathcal{H} è inoltre diviso in una serie di settori di superselezione. I settori di superselezione sono sottospazi di \mathcal{H} tali che all'interno di essi vale il principio di sovrapposizione fra stati in maniera incondizionata, ma non vale fra settori diversi. In altre parole, la scrittura $|\psi\rangle = a|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$, con $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ appartenenti a settori diversi, non descrive alcun stato puro di \mathcal{H} . Tale suddivisione è dovuta alla presenza delle cariche di superselezione Q_1, Q_2, \dots , dotate di spettro discreto, ovvero determinate osservabili tali che ogni stato di \mathcal{H} è autostato di tali cariche con autovalore ben definito q_1, q_2, \dots , ma non è possibile fisicamente preparare combinazioni lineari di autostati con autovalori differenti. Ad esempio non è possibile (alle

nostre conoscenze attuali) preparare stati puri descritti da combinazioni lineari di autovalori differenti della carica elettrica. \mathcal{H} è dunque suddiviso in settori di superselezione $\mathcal{H}^{q_1, q_2, \dots}$. Una *trasformazione di simmetria* \mathcal{T} consiste in una corrispondenza biunivoca fra gli stati di \mathcal{H} tale da preservare il modulo quadro dei prodotti scalari (e dunque le probabilità di transizione) e rispettare le regole di superselezione. Si ha dunque che le trasformazioni di simmetria formano un gruppo: l'elemento neutro è la trasformazione identica, l'inverso di una simmetria e la composizione di simmetrie sono ancora simmetrie.

Chiamando G e G' i gruppi di simmetria della teoria classica e quantizzata, supporremo per ora $G = G'$. Si avrà dunque che per ogni elemento $g \in G$, esiste una simmetria $\mathcal{T}(g)$ come descritta sopra. Si nota che la definizione di simmetria quantistica non risente di eventuali fattori di fase moltiplicanti gli stati, per cui una trasformazione di simmetria $\mathcal{T}(g)$ è un automorfismo (con le proprietà sopra specificate) dello spazio proiettivo dei sottospazi unidimensionali di \mathcal{H} , $P\mathcal{H} = \mathcal{H}/\sim$, con $|\psi\rangle \sim c|\psi\rangle$, $c \in \mathbb{C}_*^1$. Si ha dunque l'omomorfismo $\mathcal{T} : G \rightarrow \text{Aut}(P\mathcal{H})$, con $\text{Aut}(P\mathcal{H})$ lo spazio degli automorfismi di $P\mathcal{H}$. Lo spazio di Hilbert proiettivo $P\mathcal{H}$ è lo spazio con significato fisico, dove ogni elemento è uno stato fisico distinto.

Enunciamo ora il Teorema di Wigner, che ci permette di capire come implementare le simmetrie quantistiche sullo spazio di Hilbert. Nell'enunciato sottostante è stato sottintesa la dipendenza dall'elemento g del gruppo di simmetria G .

Teorema di Wigner: ogni trasformazione di simmetria \mathcal{T} in un dato spazio di Hilbert \mathcal{H} è implementabile mediante una isometria lineare o antilineare $U_{\mathcal{T}}$, ovvero da un operatore unitario o antiunitario, che rispetti le regole di superselezione; l'operatore $U_{\mathcal{T}}$ risulta identificato a meno di un fattore di fase unitario ($\in U(1)$).

Le trasformazioni di simmetria sono quindi viste come particolari cambiamenti di base in \mathcal{H} , con l'aggiunta della coniugazione complessa delle coordinate in caso di implementazione antiunitaria. Le trasformazioni che lasciano invariata la dinamica del sistema quantistico sono realizzate da opportune trasformazioni di simmetria. Per capire da cosa è governata l'evoluzione temporale del sistema, occorre a questo punto introdurre il seguente assioma, trovabile per esempio in [4];

Assioma dell'evoluzione temporale L'evoluzione temporale di un sistema quantistico da un istante t_0 a un istante $t > t_0$ (in tale intervallo per ipotesi non vengono fatte misure del sistema) è descritta da un operatore unitario (operatore di evoluzione temporale), nel senso che $|\psi_t\rangle = U(t, t_0)|\psi_{t_0}\rangle$.

Da tale assioma deriva il fatto che, dati tre istanti di tempo $t_0 < t_1 < t_2$, vale la legge di composizione $U(t_2, t_1)U(t_1, t_0) = U(t_2, t_0)$, oltre che $U(t_0, t_0) = 1$, si veda [12]. Si ha dunque $U(t_0, t)U(t, t_0) = 1$. L'operatore di evoluzione temporale evolve nel tempo nella seguente maniera ($\hat{H}(t)$ è l'operatore hamiltoniano autoaggiunto della teoria):

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = \hat{H}(t)U(t, t_0) \quad (1.2)$$

¹ \mathbb{C}_* è \mathbb{C} senza l'origine

Diremo che una trasformazione di simmetria \mathcal{T} è un'invarianza del moto del sistema fisico se l'operatore che implementa la simmetria $U_{\mathcal{T}}$ commuta con l'evoluzione temporale $U(t, t_0)$. Dal punto di vista degli stati, ciò vuol dire che stati corrispondenti sotto \mathcal{T} all'istante t_0 sono ancora corrispondenti sotto \mathcal{T} all'istante t . La condizione di invarianza è la seguente (si noti il fattore di fase $e^{i\Phi}$, che a priori compare):

$$U_{\mathcal{T}}U(t, t_0) = e^{i\Phi}U(t, t_0)U_{\mathcal{T}} \quad (1.3)$$

Riscrivibile come:

$$U(t, t_0)^{\dagger}U_{\mathcal{T}}U(t, t_0) = e^{i\Phi}U_{\mathcal{T}} \quad (1.4)$$

Tale fattore di fase dipende dal tempo $t > t_0$: $\Phi = \Phi(t, t_0)$. Dalle proprietà dell'operatore di evoluzione temporale sopra elencate valgono le proprietà:

$$\Phi(t_0, t_0) = 0, \quad \Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1) + \Phi(t_1, t_0) \quad (1.5)$$

Dunque $\Phi(t, t_0) = \phi(t) - \phi(0)$. Si derivi rispetto al tempo la relazione (1.4) e si usi la relazione (1.2):

$$U_{\mathcal{T}}\hat{H}(t)U(t, t_0) = -\hbar\dot{\phi}(t)U(t, t_0)U_{\mathcal{T}} + e^{i\Phi}\hat{H}(t)U(t, t_0)U_{\mathcal{T}} \quad (1.6)$$

Inglobando \hbar all'interno di ϕ ed effettuando qualche passaggio si arriva a:

$$U_{\mathcal{T}}^{\dagger}\hat{H}(t)U_{\mathcal{T}} = \hat{H}(t) + \dot{\phi} \quad (1.7)$$

Se $\dot{\phi} \neq 0$ si ha che $U_{\mathcal{T}}$ agisce come un operatore di traslazione sull'hamiltoniana, che ha dunque uno spettro illimitato sia inferiormente che superiormente. Ma in ogni sistema fisicamente accettabile l'hamiltoniana deve avere uno spettro limitato in qualsiasi istante di tempo. Ne consegue $\dot{\phi} = 0 \Rightarrow \phi = \text{costante} \Rightarrow \Phi = 0$. La costante di fase è stata riassorbita:

$$U_{\mathcal{T}}U(t, t_0) = U(t, t_0)U_{\mathcal{T}} \quad (1.8)$$

Abbiamo inoltre dimostrato il seguente Teorema delle invarianze;

Teorema delle invarianze La trasformazione di simmetria \mathcal{T} è una invarianza del moto se e solo se $U(\mathcal{T})$ commuta con l'operatore hamiltoniano del sistema in qualsiasi istante di tempo t :

$$[\hat{H}(t), U_{\mathcal{T}}] = 0 \quad (1.9)$$

Ovvero se e solo se $\hat{H}(t)$ è invariante sotto la trasformazione \mathcal{T} : $U(\mathcal{T})^{\dagger}\hat{H}(t)U_{\mathcal{T}} = \hat{H}(t)$.

Inoltre, se due operatori commutano, allora esiste una base di autostati comuni [Cohen]. Dunque ogni operatore implementante l'invarianza \mathcal{T} e l'operatore hamiltoniano $\hat{H}(t)$ hanno una base comune di autostati.

Si noti che se \mathcal{T} è un'invarianza del moto allora l'equazione di Schroedinger $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$ rimane invariata dopo l'applicazione di $U_{\mathcal{T}}$, sfruttando $U(\mathcal{T})^{\dagger}\hat{H}(t)U_{\mathcal{T}} = \hat{H}(t)$:

$$i\hbar\frac{d}{dt}U_{\mathcal{T}}|\psi\rangle = U_{\mathcal{T}}\hat{H}|\psi\rangle \Rightarrow i\hbar\frac{d}{dt}|\psi'\rangle = \hat{H}|\psi'\rangle \quad (1.10)$$

Con $|\psi'\rangle = U_{\mathcal{T}}|\psi\rangle$ un'ulteriore soluzione dell'equazione di Schroedinger. Un'invarianza del moto è dunque tale da lasciare invariata la dinamica del sistema, governata dall'equazione di Schroedinger.

Supponiamo ora che $U_{\mathcal{T}}$ appartenga a un sottogruppo a un parametro continuo λ generato da un generatore autoaggiunto Q : $U_{\mathcal{T}}(\lambda) = e^{-i\lambda Q}$. Si consideri l'azione infinitesima di tali trasformazioni con $\lambda \rightarrow 0$ su un generico operatore lineare X (non si considerano i termini di ordine superiore al primo):

$$(1 + i\lambda Q)X(1 - i\lambda Q) = X + i\lambda[Q, X] \quad (1.11)$$

Dunque si ricava la seguente relazione:

$$[Q, X] = -i \frac{d}{d\lambda} [T(\lambda)X] \Big|_{\lambda=0} \quad (1.12)$$

Grazie a tale relazione, la condizione di invarianza $U_{\mathcal{T}}^\dagger H(t) U_{\mathcal{T}} = H(t)$ equivale allora a

$$0 = -i \frac{\partial}{\partial \lambda} [T(\lambda)H(t)] \Big|_{\lambda=0} = [H(t), Q] = -i \frac{dQ}{dt} \quad (1.13)$$

Dunque a ogni sottogruppo a un parametro continuo di invarianze del tipo $\{e^{-i\lambda Q}\}$ è associata una legge di conservazione, dove la carica conservata è l'operatore Q che genera il sottogruppo. Si mostrerà successivamente nella nota [3] che ogni sottogruppo a un parametro continuo si può scrivere in tal modo; dunque a ogni sottogruppo di invarianze della teoria a un parametro continuo è associata una carica conservata.

Nel corso della trattazione faremo uso esclusivamente di simmetrie che sono invarianze del modo del sistema, per cui quindi vale il sopracitato Teorema delle invarianze.

1.2 Estensioni centrali e secondo gruppo di coomologia

Seguiremo l'impostazione data da [Schottenloher]. Un'estensione di G di un gruppo abeliano A è data dalla sequenza esatta di omomorfismi di gruppi:

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1 \quad (1.14)$$

con E l'estensione di G di A . Dire che la sequenza è esatta vuol dire che il ker di ogni omomorfismo è uguale all'immagine dell'omomorfismo precedente. Occorre dunque che la mappa i sia iniettiva, π sia suriettiva e che $\ker(\pi) = \text{im}(i) \cong A$.

Un'estensione è detta centrale se l'immagine $\text{im}(i)$ è nel centro di E , ovvero se $\forall a \in A, \forall b \in E \Rightarrow i(a) * b = b * i(a)$.

Introduciamo ora gli oggetti che ci saranno utili per trattare le estensioni centrali che compaiono quantizzando i gruppi di simmetria della teoria classica. $U(\mathcal{H})$ è il gruppo² degli operatori unitari a valori in \mathcal{H} . Si definisce il gruppo proiettivo $PU(\mathcal{H})$ degli operatori unitari a valori in \mathcal{H} , ove operatori che differiscono per fattori di fase sono identificati.

²Si tratta di un gruppo perchè esiste l'elemento neutro (l'identità), l'inverso di ogni operatore unitario U è ancora unitario, così come la composizione di due operatori unitari.

Trattando solamente gli operatori unitari per semplicità (è facile passare da operatori unitari ad antiunitari tramite l'operatore di coniugazione complessa), si ha che $U_{\mathcal{T}(g)}$ appartiene a $U(\mathcal{H})$, per qualsiasi g . Il Teorema di Wigner afferma che esiste una mappa suriettiva π tale per ogni trasformazione di simmetria $\mathcal{T}(g)$ (la quale è un particolare automorfismo di P appartenete a $PU(\mathcal{H}) \subset Aut(P)$) esiste un operatore unitario $U_{\mathcal{T}(g)}$ tale che $\pi(U_{\mathcal{T}(g)}) = \mathcal{T}(g)$. Di conseguenza $\pi(U(\mathcal{H})) = PU(\mathcal{H})$. Si noti che la sequenza $g \rightarrow \mathcal{T}(g) \rightarrow U_{\mathcal{T}(g)}$ non è determinata univocamente, ma esiste un'ambiguità di fase sull'operatore $U_{\mathcal{T}(g)}$; tale ambiguità vedremo essere la causa dell'estensione centrale di G . Si può dimostrare (si veda [15]) che $U(\mathcal{H})$ è l'estensione centrale di $PU(\mathcal{H})$, esteso del gruppo delle fasi $U(1)$, altrimenti quotizzato nello spazio proiettivo:

$$1 \rightarrow U(1) \xrightarrow{i} U(\mathcal{H}) \xrightarrow{\pi} PU(\mathcal{H}) \rightarrow 1 \quad (1.15)$$

La mappa i della definizione (2) è la mappa $\lambda \rightarrow \lambda\mathbb{1}, \forall \lambda \in U(1)$.

Il nostro fine è capire come il gruppo di simmetria G sia rappresentato sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} , che è quello su cui agiscono gli operatori che rappresentano le variabili classiche. Abbiamo visto come per definizione sia sempre possibile costruire un omomorfismo $\mathcal{T} : G \rightarrow PU(\mathcal{H})$. Gli operatori $\{\mathcal{T}(g)\}$ sono tali che:

$$\mathcal{T}(g_1)\mathcal{T}(g_2) = \mathcal{T}(g_1g_2), \quad \forall g_1, g_2 \quad (1.16)$$

Dagli operatori $\mathcal{T}(g)$ nello spazio proiettivo P si può poi risalire, grazie al Teorema di Wigner, a degli operatori $U_{\mathcal{T}(g)} \equiv U(g)$ sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} . In generale, dati due elementi del gruppo g_1 e g_2 , si ha la seguente legge di composizione degli operatori agenti su \mathcal{H} :

$$U(g_1)U(g_2) = \omega(g_1, g_2)U(g_1g_2), \quad |\omega(g_1, g_2)| = 1 \quad (1.17)$$

La famiglia di operatori $\{U(g)\}$ forma una rappresentazione unitaria *proiettiva* del gruppo G su \mathcal{H} . Il fattore di fase globale è fissato dalla regola che $U(e) = 1$, con e l'elemento neutro di G (ciò implica $\omega(e, e) = 1$). Diventa una rappresentazione *unitaria* se tali fattori di fase sono riassorbibili per ogni g_1 e g_2 , ovvero se e solo se esiste una scelta dei fattori di fase (lasciati ambigui dal Teorema di Wigner), tali che $\omega(g_1, g_2) = 1, \forall g_1, g_2$. I fattori di fase possono essere riassorbiti se e solo se esiste una $f : G \rightarrow U(1)$ tale che omega può essere espresso come $\omega(g_1, g_2) = f(g_1g_2)f^{-1}(g_1)f^{-1}(g_2)$ per ogni $g_1, g_2 \in G$.

Per comprendere se ciò è possibile, occorre passare attraverso le estensioni centrali del gruppo di simmetria G . Enunciamo dunque il seguente teorema di esistenza:

Teorema di esistenza: sia G un gruppo e $\mathcal{T} : G \rightarrow PU(\mathcal{H})$ un omomorfismo (nel nostro caso la simmetria). Allora esiste un'estensione centrale E di G di $U(1)$ e un omomorfismo $S : E \rightarrow U(\mathcal{H})$ tali che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & U(1) & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\pi_2} & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow id & & \downarrow S & & \downarrow \mathcal{T} & & \\ 1 & \rightarrow & U(1) & \rightarrow & U(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\pi_1} & PU(\mathcal{H}) & \rightarrow & 1 \end{array} \quad (1.18)$$

Tale estensione centrale E viene realizzata in maniera unitaria sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} , grazie all'omomorfismo S .

Ci si chiede ora in quali casi si possa affermare che pure G è rappresentata unitariamente su \mathcal{H} . Ci si accorge che se l'estensione centrale E fosse trivialmente il prodotto diretto $U(1) \times G$, allora si avrebbe la relazione:

$$(1, g_1) \times (1, g_2) = (1, g_1 g_2) \quad (1.19)$$

Tale relazione verrebbe realizzata, grazie a S , in maniera unitaria su \mathcal{H} :

$$U(1, g_1)U(1, g_2) = U(1, g_1 g_2) \quad (1.20)$$

Identificando biunivocamente $(1, g) \leftrightarrow g$, si ha che il gruppo G è realizzato in maniera unitaria sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} .

Per capire quando l'estensione centrale E (che sicuramente esiste grazie al Teorema di Esistenza) si può scrivere trivialmente, occorre vedere E in altra maniera.

Consideriamo la legge di composizione operatoriale $U(g_1)U(g_2) = \omega(g_1, g_2)U(g_1 g_2)$. Poichè $U(\mathcal{H})$ è un gruppo, deve valere la proprietà associativa fra i suoi elementi. Si vede che tale proprietà fra tre suoi elementi $U(g_1)$, $U(g_2)$ e $U(g_3)$ è soddisfatta se e solo se vale la seguente identità per i fattori di fase:

$$\omega(g_1, g_2)\omega(g_1 g_2, g_3) = \omega(g_1, g_2 g_3)\omega(g_2, g_3) \quad (1.21)$$

Tale relazione è detta anche identità di cociclo e la mappa $\omega : G \times G \rightarrow U(1)$ è detta 2-cociclo di G a valori in $U(1)$. A causa dell'ambiguità sul fattore di fase lasciata dal Teorema di Wigner, si possono sempre ridefinire gli operatori implementanti il gruppo di simmetria G : $U'(g) = f(g)U(g)$, con $f : G \rightarrow U(1)$. Ciò induce una relazione di equivalenza fra i possibili 2-cocicli.

$$\begin{aligned} \omega'(g_1, g_2)U'(g_1 g_2) &= U'(g_1)U'(g_2) \\ \omega'(g_1, g_2)U'(g_1 g_2) &= f(g_1)f(g_2)U(g_1)U(g_2) \\ \omega'(g_1, g_2)U'(g_1 g_2) &= f(g_1)f(g_2)\omega(g_1, g_2)U(g_1 g_2) \\ \omega'(g_1, g_2)U'(g_1 g_2) &= f(g_1)f(g_2)\omega(g_1, g_2)f(g_1 g_2)^{-1}U'(g_1 g_2) \\ \Rightarrow \omega'(g_1, g_2) &= f(g_1)f(g_2)(f(g_1 g_2))^{-1}\omega(g_1, g_2) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Se esiste una mappa $f : G \rightarrow U(1)$ tale che valga la relazione sopra per ogni g_1 e g_2 , allora i due 2-cocicli ω e ω' sono equivalenti, poichè si può passare da uno all'altro ridefinendo i fattori di fase. Si nota che i fattori di fase $\omega(g_1, g_2)$ sono riassorbibili (e dunque G è rappresentato unitariamente su \mathcal{H}) quando il 2-cociclo ω è equivalente al 2-cociclo banale $\omega' \equiv 1$, ovvero quando esiste una f tale che la relazione seguente è soddisfatta per ogni g_1 e ogni g_2 : $\omega(g_1, g_2) = f(g_1)f(g_2)(f(g_1 g_2))^{-1}$.

Si costruisce così l'insieme delle classi di equivalenza dei 2-cocicli di G a valori in $U(1)$:

$$H^2(G, U(1)) := \{\omega : G \times G \rightarrow U(1) \mid \omega \text{ soddisfa (1.21)}\} / \sim \quad (1.23)$$

$$\omega \sim \omega' \leftrightarrow \exists f : G \rightarrow U(1) \text{ tale che vale (1.22)}$$

Tale insieme è chiamato *secondo gruppo di coomologia* del gruppo G con coefficienti in $U(1)$.

A questo punto, dato un rappresentante ω appartenente a una classe di equivalenza $[\omega]$ di

$H^2(G, U(1))$, si può costruire la seguente estensione centrale (si vede che la sequenza è esatta e che $U(1)$ è nel centro di $U(1) \times_\omega G$):

$$1 \rightarrow U(1) \xrightarrow{i} U(1) \times_\omega G \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1 \quad (1.24)$$

L'omomorfismo i è semplicemente $a \mapsto (a, 1)$, mentre π è la proiezione sul secondo elemento. $U(1) \times_\omega G$ è il prodotto semidiretto di $U(1)$ e G , con moltiplicazione data da:

$$(a, g_1)(b, g_2) = (\omega(g_1, g_2)ab, g_1g_2) \quad (1.25)$$

per ogni a, b in $U(1)$ e per ogni g_1, g_2 in G . Tale moltiplicazione definisce una struttura di gruppo su $U(1) \times_\omega G$ tale per cui i e π sono omomorfismi. L'unica proprietà non banale da controllare è l'associatività della moltiplicazione, garantita dalla proprietà (1.21) del 2-cociclo ω :

$$\begin{aligned} ((a, g_1)(b, g_2))(c, g_3) &= (\omega(g_1, g_2)ab, g_1g_2)(c, g_3) \\ &= (\omega(g_1g_2, g_3)abc, g_1g_2g_3) \\ &= (\omega(g_1g_2, g_3)\omega(g_1, g_2)abc, g_1g_2g_3) \\ &= (\omega(g_1, g_2g_3)\omega(g_2, g_3)abc, g_1g_2g_3) \\ &= (a, g_1)(\omega(g_2, g_3)bc, g_2g_3) \\ &= (a, g_1)((b, g_2)(c, g_3)) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Si ha che due rappresentanti diversi ω e ω' di una stessa classe di equivalenza appartenente a $H^2(G, U(1))$ danno estensioni centrali equivalenti perché si può passare da un'estensione all'altra, ridefinendo gli elementi di una delle due (ad esempio $U(1) \times_\omega G$) tramite la $f : G \rightarrow U(1)$ che rende equivalenti i due rappresentanti. Si consideri infatti la moltiplicazione del prodotto semidiretto $U(1) \times_\omega G$ e si usi (1.22):

$$\begin{aligned} (a, g_1)(b, g_2) &= (\omega(g_1, g_2)ab, g_1g_2) \\ &= (f(g_1)f(g_2)\omega'(g_1, g_2)(f(g_1g_2))^{-1}ab, g_1g_2) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Basta ridefinire gli elementi (a, g) come $(f^{-1}(g)a, g)$ per ottenere la moltiplicazione del prodotto semidiretto $U(1) \times_{\omega'} G$:

$$(f^{-1}(g_1)a, g_1)(f^{-1}(g_2)b, g_2) = (\omega(g_1, g_2)f^{-1}(g_1g_2)ab, g_1g_2) \quad (1.28)$$

Dunque due estensioni centrali dovute a due rappresentanti dello stesso elemento del secondo gruppo di coomologia di G a valori in $U(1)$ sono equivalenti.

L'omomorfismo $S : E \rightarrow U(\mathcal{H})$ del Teorema di esistenza è $S : (a, g) \mapsto aU_g$, che è tale da rispettare la relazione $(a, g_1)(b, g_2) = (\omega(g_1, g_2)ab, g_1g_2)$ dell'estensione centrale, mappandola nella relazione di commutazione degli operatori $U(g_1)U(g_2) = \omega(g_1, g_2)U(g_1g_2)$. Dunque $A \times_\omega G$ è rappresentato in maniera unitaria sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} .

Poichè $H^2(G, U(1))$ è l'insieme delle classi di equivalenza delle possibili ω , si ha che vi è una corrispondenza biunivoca fra gli elementi di $H^2(G, U(1))$ e le estensioni centrali di G di $U(1)$ (più precisamente, le classi di equivalenza di tali estensioni centrali). Occorre enfatizzare che $H^2(G, U(1))$ dipende solo da G , dunque a ogni gruppo di simmetria G è abbinato il suo secondo gruppo di coomologia a coefficienti in $U(1)$.

Se il secondo gruppo di coomologia è banale, ovvero vi è solo $\omega \equiv 1$ (relativa all'estensione

centrale triviale data dal prodotto diretto $U(1) \times G$, ciò è sufficiente per affermare che G deve essere rappresentato unitariamente su \mathcal{H} . Gli eventuali fattori di fase che compaiono nella relazione di commutazione degli operatori sono riassorbibili ridefinendo i fattori di fase degli operatori. Un esempio importante sono i gruppi di simmetria a un parametro continuo. Sono tutti riconducibili a due gruppi: \mathbb{R} , se il parametro non è compatto, o S_1 , se il parametro è compatto. In entrambi i casi il secondo gruppo di coomologia è banale (si veda [3]), e dunque i fattori di fase possono essere riassorbiti.³ Se invece il secondo gruppo di coomologia non è banale, G può essere rappresentato in maniera proiettiva su \mathcal{H} . Esistono rappresentazioni di G su \mathcal{H} tali che i fattori di fase non sono riassorbibili. Se ciò accade, si ha che il gruppo di simmetria della teoria quantizzata non è più G , ma l'estensione centrale $U(1) \times_{\omega} G$, poichè è tale gruppo che ha le sue relazioni rappresentate in maniera unitaria sullo spazio di Hilbert, non G .

Un elenco di coomologie di diversi gruppi lo si può trovare nella referenza [3].

1.3 Estensioni centrali e degenerazione degli stati

Nella teoria quantizzata in cui avviene un'estensione centrale non triviale del gruppo di simmetria esisteranno dei fattori di fase non riassorbibili $\omega(g_1, g_2)$, in generale diversi da uno, nella legge di composizione degli operatori: $U(g_1)U(g_2) = \omega(g_1, g_2)U(g_1g_2)$. Si sottintende che tali simmetrie siano delle invarianze del sistema fisico descritto dalla teoria. Vediamo come ora ciò permette di affermare che gli autovalori energetici dell'hamiltoniana non sono mai degeneri, consistentemente con quanto affermato in [6] e in [8].

Si consideri l'equazione agli autovalori dell'operatore hamiltoniano della teoria:

$$\hat{H}|\psi_E\rangle = E|\psi_E\rangle \quad (1.29)$$

Sfruttando il fatto che $[\hat{H}, U(g)] = 0, \forall g \in G$, si ha:

$$\begin{aligned} U(g)\hat{H}|\psi_E\rangle &= U(g)E|\psi_E\rangle \\ \hat{H}U(g)|\psi_E\rangle &= EU(g)|\psi_E\rangle \end{aligned} \quad (1.30)$$

Se esiste un $\tilde{g} \in G$ tale che $|\psi_E\rangle$ non è un autostato di un qualche $U(\tilde{g})$, allora $U(\tilde{g})|\psi_E\rangle$ è un altro autostato di \hat{H} con autovalore E , diverso da $|\psi_E\rangle$. Dunque se accade ciò E è degenere. Condizione necessaria alla non-degenerazione di un autovalore energetico è dunque che il suo relativo autostato sia anche autostato di ogni $U(g)$.

Nel caso delle teorie quantizzate soggette a estensioni centrali non triviali, questo non può accadere. Ragionando per assurdo, si supponga che in tale contesto esista un autovalore E non degenere, con autostato $|\psi_E\rangle$. Allora $|\psi_E\rangle$ deve essere autostato di $U(g)$ per qualsiasi

³Tale fatto risulta particolarmente utile perchè permette di sapere subito la forma degli operatori implementanti i gruppi di simmetria continui a un parametro $\{\mathcal{T}(\lambda)\}$. Tale sottogruppo è sempre implementabile, grazie al teorema di Wigner da un sottogruppo di operatori unitari $\{V_{\mathcal{T}(\lambda)}\} \equiv \{V(\lambda)\}$, continuo in senso forte. Poichè il secondo gruppo di coomologia è banale in tutti i casi, i fattori di fase presenti nella legge di composizione $V(\lambda)V(\lambda') = \omega(\lambda, \lambda')V(\lambda + \lambda')$ possono essere riassorbiti, ridefinendo le fasi degli operatori (che chiameremo ora $U(\lambda)$). Differenziando la relazione $U(\lambda)U(\lambda') = U(\lambda + \lambda')$ rispetto a λ' e calcolando in $\lambda' = 0$, si ottiene $\frac{dU}{d\lambda} = -iQU(\lambda)$, con $Q = \left. \frac{dU(\lambda')}{d\lambda'} \right|_{\lambda'=0}$. Grazie alla condizione $U(0) = 1$, si ricava $U = e^{-i\lambda Q}$. Un sottogruppo di simmetria continuo a un parametro è sempre implementabile da un sottogruppo di operatori di tale tipo, generato da Q , che è un operatore autoaggiunto su \mathcal{H} .

$g \in G$, con un qualche autovalore $e^{i\theta(g)}$: $U(g)|\psi_E\rangle = e^{i\theta(g)}|\psi_E\rangle$. Applicando due diversi $U(g_1)$ e $U(g_2)$ a $|\psi_E\rangle$ si ha:

$$U(g_2)U(g_1)|\psi_E\rangle = e^{i(\theta(g_2)+\theta(g_1))}|\psi_E\rangle \quad (1.31)$$

Ma poiché $U(g_1)U(g_2) = \omega(g_1, g_2)U(g_1g_2)$, si ha:

$$\omega(g_1, g_2)U(g_1g_2)|\psi_E\rangle = \omega(g_1, g_2)e^{i\theta(g_1g_2)}|\psi_E\rangle \quad (1.32)$$

Uguagliando (1.31) e (1.32) si ottiene:

$$\omega(g_1, g_2) = e^{i\theta(g_1)}e^{i\theta(g_2)}e^{-i\theta(g_1g_2)} \quad (1.33)$$

Dunque esiste una funzione $f(g) = e^{i\theta(g)}$ tale che $\omega(g_1, g_2) = f(g_1)f(g_2)(f(g_1g_2))^{-1}$ per ogni g_1, g_2 . Quindi i fattori di fase $\omega(g_1, g_2)$ sarebbero riassorbibili, ma ciò è assurdo poiché si ha come ipotesi che l'estensione centrale sia non triviale. Ciò mostra che non possono esistere stati non-degeneri in una teoria in cui avviene un'estensione centrale non triviale.

Consideriamo ora i sistemi quantistici a un grado di libertà descritti dall'equazione stazionaria di Schroedinger unidimensionale

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1.34)$$

Se $x \in \mathbb{R}$ valgono i seguenti risultati (derivanti dal fatto che l'equazione sopra è un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine), per la cui dimostrazione si veda [12] e [10]:

- gli autovalori dello spettro discreto sono non-degeneri: a ogni E_n corrisponde una e una sola ψ_n . Questo risultato prende il nome di *Teorema di non degenerazione*.
- la funzione d'onda dell' n -esimo livello energetico presenta $n - 1$ nodi. Tale secondo risultato lo chiameremo *Teorema dei nodi*.

Dunque si può osservare che nei sistemi quantistici a un grado di libertà non compatto non può avvenire alcuna estensione centrale non triviale. Infatti se fosse non triviale, allora gli autovalori energetici sarebbero non-degeneri, il che non può essere a causa del teorema di degenerazione.

1.4 Anomalie di 't Hooft

Con anomalia s'intende genericamente una patologia che incorre quando si quantizza una teoria classica. Il concetto di *anomalia di 't Hooft* è più specifico, ed è quello a cui faremo riferimento nel corso della trattazione.

Si parte da una teoria classica avente una certa azione S , con un gruppo di simmetria globale G , dove per simmetrie s'intendono quelle trasformazioni delle variabili della teoria che lasciano invariata l'azione. Si possono poi considerare delle simmetrie di gauge locali (ovvero dipendenti dal punto dello spazio-tempo) che lasciano invariate l'azione, nella quale

vengono introdotti dei campi di gauge. Tali simmetrie locali agiscono sulle variabili del sistema promuovendo le trasformazioni del gruppo di simmetria globale a una loro forma locale e agiscono anche sui campi di gauge. Un esempio (che andremo a vedere nel dettaglio nella sezione 2.1) è quello del fermione libero in $0 + 1$ -dimensioni, avente azione $S = \int i\psi^\dagger \dot{\psi} dt$. Le trasformazioni di simmetria che formano il gruppo globale di simmetria G sono la simmetria $U(1)$ tale che $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$, $\psi^\dagger \rightarrow e^{-i\alpha}\psi^\dagger$ e la simmetria \mathbb{Z}_2 che scambia ψ e ψ^\dagger . Tale teoria si mostra essere invariante sotto ulteriori trasformazioni di gauge locali, che si notano introducendo la derivata covariante al posto di quella ordinaria rispetto al tempo: $\frac{d}{dt} \rightarrow D_t = \frac{d}{dt} + iA(t)$, dove $A(t)$ è una funzione di qualsiasi del tempo (è il campo di gauge sopracitato). Se vi fossero stati anche dei gradi di libertà spaziali allora si sarebbero dovute considerare anche delle derivate covarianti spaziali. Le trasformazioni di simmetria globali sono state promosse a trasformazioni di gauge locali, che agiscono anche su $A(t)$, tramite delle funzioni del tempo $\Lambda(t)$. La simmetria $U(1)$ diviene:

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow e^{i\Lambda(t)}\psi \\ \psi^\dagger &\rightarrow e^{-i\Lambda(t)}\psi^\dagger \\ A(t) &\rightarrow A(t) + \partial_t\Lambda(t)\end{aligned}\tag{1.35}$$

E quella \mathbb{Z}_2 :

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi^\dagger \\ \psi^\dagger &\rightarrow \psi \\ A(t) &\rightarrow -A(t)\end{aligned}\tag{1.36}$$

Consideriamo ora la funzione di partizione della teoria, definita in generale come segue. La funzione di partizione nel caso di variabili fermioniche $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_N$ è definita come

$$Z(A) = \int_{ABC} \prod_{i=1}^N [d\psi_i d\psi_i^\dagger] e^{iS[A]}\tag{1.37}$$

ABC sta per "antiperiodic boundary condition", ovvero l'integrazione è svolta con condizioni al bordo antiperiodiche: $\psi_i(t_i) = -\psi_i(t_f)$, $\psi_i^\dagger(t_i) = -\psi_i^\dagger(t_f)$, con $(t_f - t_i) = T$ fissato.

La funzione di partizione nel caso di variabili bosoniche $x_1, x_2 \dots x_N$ è definita come:

$$Z(A) = \int_{PBC} \prod_{i=1}^N [dx_i] e^{iS[A]}\tag{1.38}$$

PBC sta per "periodic boundary condition", ovvero l'integrale è svolto con condizioni al bordo periodiche: $x_i(t_i) = x_i(t_f)$, con $(t_f - t_i) = T$ fissato.

Ci si aspetta che la funzione di partizione, dipendente dai campi di gauge, sia invariante sotto le trasformazioni di gauge locali che agiscono sui campi di gauge e sulle variabili della teoria. Può accadere però che l'invarianza della funzione di partizione sotto le trasformazioni di gauge sia rotta da dei fattori di fase non riassorbibili. In tal caso si parla di *anomalia di 't Hooft*. Più in particolare si parla di anomalia di 't Hooft "mista" quando il gruppo di simmetria è scrivibile come prodotto di sottogruppi e accade il seguente fenomeno: se si considerano le trasformazioni di gauge locali relative limitate ai singoli sottogruppi, non si osserva alcuna anomalia, ma se si considera tutto il gruppo di simmetria, allora compare

l'anomalia. In tal caso si riesce a rendere la funzione di partizione invariante sotto le trasformazioni di gauge di ogni sottogruppo, in modo separato, ma non a renderla invariante sotto tutto il gruppo.

Un modo alternativo per accorgersi di tale fenomeno è passare alla descrizione operatoriale. Si cerca uno spazio di Hilbert \mathcal{H} ove le variabili classiche sono operatori in \mathcal{H} ⁴ con opportune relazioni di commutazione o anticommutazione fra di loro (a seconda che siano bosoniche o fermioniche). Individuato l'operatore hamiltoniano $\hat{H}(A)$ della teoria, anch'esso dipendente dai campi di gauge, la funzione di partizione può essere riformulata come la traccia dell'operatore $e^{-iT\hat{H}}$ sullo spazio di Hilbert della teoria. Se lo spettro energetico è discreto, tale traccia viene calcolata sugli autostati dell'hamiltoniana nel seguente modo:

$$Z(A) = \text{Tr}_{\mathcal{H}}[e^{-iT\hat{H}}] = \sum_n e^{-iTE_n} \quad (1.39)$$

A questo punto si guarda come le simmetrie locali di gauge agiscono su tale traccia, diagnosticando l'eventuale anomalia di 't Hooft.

Nel caso sopra introdotto del fermione libero $0 + 1$ -dimensionale si scopre un'anomalia di 't Hooft mista, seguendo quest'ultima strada. Mostriamo ciò senza entrare nei dettagli, che verranno discussi nella sezione 2.1. Si trova che il campo di gauge $A(t)$ può essere portato, tramite un'opportuna trasformazione di gauge, in una forma indipendente dal tempo \tilde{A} . Ponendo che $t \in [0, T]$, con questa scelta di gauge rimane una simmetria $U(1)$ di gauge residua $\tilde{A}T \rightarrow \tilde{A}T + k2\pi$. L'hamiltoniana quantistica è $H = \tilde{A}(\hat{\psi}\hat{\psi}^\dagger - \beta)$, con β l'ambiguità di ordinamento degli operatori $\hat{\psi}$ e $\hat{\psi}^\dagger$ che realizzano i gradi di libertà classici sullo spazio di Hilbert. A questo punto, si possono scegliere dei valori di β tali per cui la funzione di partizione è invariante sotto solo una delle due simmetrie di gauge, ma non esiste alcun valore di β che la renda invariante sotto entrambe. Per $\beta \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} Z(-\tilde{A}) = e^{i\tilde{A}T(-2\beta+1)} Z(\tilde{A}) \\ Z(\tilde{A} + \frac{k2\pi}{T}) = Z(\tilde{A}) \end{cases} \quad (1.40)$$

Invece per $\beta = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} Z(-\tilde{A}) = Z(\tilde{A}) \\ Z(\tilde{A} + \frac{k2\pi}{T}) = -Z(\tilde{A}) \end{cases} \quad (1.41)$$

Quantizzando compare in tale teoria un'estensione centrale non triviale del gruppo di simmetria classico $O(2) = \mathbb{Z}_2 \times U(1)$, come verrà mostrato successivamente. L'anomalia di 't Hooft e l'estensione centrale della teoria sono quindi coesistenti in tale modello, e si evidenzieranno i loro tratti in comune. Si vedrà così in un esempio esplicito che le anomalie di 't Hooft nei sistemi quantomeccanici si manifestano come estensioni centrali non triviali del gruppo di simmetria classico, come affermato in [6] e in [7]. Di conseguenza, quando in un sistema quantizzato compare un'estensione centrale non triviale, ciò è segnale di un'anomalia di 't Hooft.

⁴In particolare le osservabili classiche divengono operatori autoaggiunti.

Capitolo 2

Modelli Quantomeccanici

Nella sezione 2.1 mostreremo in dettaglio il modello del fermione libero 0+1-dimensionale dal punto di vista operatoriale, che si può trovare in [6], in cui verrà evidenziata l'estensione centrale del gruppo di simmetria classico. Successivamente ne mostreremo le simmetrie di gauge e mostreremo che la funzione di partizione della teoria non è invariante sotto tali simmetrie, ma che l'invarianza è rotta da dei fattori di fase non riassorbibili, come si vede in [7]. Dunque la teoria è soggetta a un'anomalia di 't Hooft. Nella sezione 2.2 prenderemo in esame il modello di una particella di massa unitaria su una circonferenza, nella sezione 2.2.1 senza potenziale e nella sezione 2.2.2 con un generico potenziale periodico, si veda [8] e [1]. Ne mostreremo il gruppo di simmetria classico e il gruppo di simmetria quantistico, mostrando che compare un'estensione centrale non banale. Verrà sottolineato che in tutti i casi in esame il secondo gruppo di coomologia è non banale, condizione necessaria al fine della comparsa di un'estensione centrale non riassorbibile. Verrà sempre posto l'accento sul fatto che gli autovalori energetici sono degeneri, come previsto nella sezione 1.3. Si noti che tali sistemi sono unidimensionali, ma la dimensione è compatta: non vale dunque il Teorema di non-degenerazione, che si applica a sistemi a una dimensione non compatta.

2.1 Modello fermionico

Consideriamo il modello 0 + 1 dimensionale di un fermione quantistico libero. Lo spazio di Hilbert è generato da due soli stati ortonormali che chiameremo $|1\rangle$ e $|2\rangle$ (in gergo: un qu-bit), con relativi operatori di creazione e distruzione:

$$\begin{aligned}\hat{\psi}|1\rangle &= 0 & \hat{\psi}^\dagger|1\rangle &= |2\rangle \\ \hat{\psi}|2\rangle &= |1\rangle & \hat{\psi}^\dagger|2\rangle &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

Valgono dunque le seguenti relazioni di anticommutazione:

$$\{\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger\} = 1, \quad \{\hat{\psi}, \hat{\psi}\} = \{\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}^\dagger\} = 0\tag{2.2}$$

L'analogo classico è descritto da variabili di Grassman, che soddisfano l'algebra di Grassmann:

$$\{\psi, \psi^\dagger\} = \{\psi, \psi\} = \{\psi^\dagger, \psi^\dagger\} = 0\tag{2.3}$$

Anche per le variabili di Grassmann vale un principio variazionale, come affermato in [16], dunque si può scrivere un'azione per il sistema da noi considerato, che è la seguente:

$$S = \int i\psi^\dagger \dot{\psi} dt \quad (2.4)$$

Come lagrangiana è stata dunque presa $L = i\psi^\dagger \dot{\psi}$. Le equazioni di Lagrange relative a ψ e a ψ^\dagger mostrano che quest'ultime sono costanti nel tempo. Considerando il momento coniugato $\Pi_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^\dagger$, si può computare l'Hamiltoniana: $H = \Pi_\psi \dot{\psi} - L = 0$, come previsto per un sistema completamente degenere. Imponendo dunque la condizione di quantizzazione (2.2) si arriva a descrivere il qu-bit in (2.1). Il sistema è dunque degenere (con grado di degenerazione doppio).

Ci chiediamo ora quali siano le simmetrie del nostro sistema, ovvero le simmetrie dell'azione (2.4).

- la simmetria $U(1)$ data da $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$ lascia invariata l'azione. Tale simmetria è implementata quantisticamente dall'operatore V_α , $V_{-\alpha} = V_\alpha^\dagger$, che agisce su $\hat{\psi}$ e $\hat{\psi}^\dagger$ in modo da riprodurre la simmetria classica:

$$V_\alpha \hat{\psi} V_{-\alpha} = e^{i\alpha} \hat{\psi}, \quad V_\alpha \hat{\psi}^\dagger V_{-\alpha} = e^{-i\alpha} \hat{\psi}^\dagger \quad (2.5)$$

La seconda relazione si ottiene dalla prima e viceversa.

- un'altra simmetria è data dallo scambio di ψ e ψ^\dagger nell'azione (2.4):

$$S = \int i\psi^\dagger \dot{\psi} dt = - \int i\dot{\psi}^\dagger \psi dt = \int i\psi \dot{\psi}^\dagger dt \quad (2.6)$$

Il primo passaggio è giustificato da un'integrazione per parti in cui il termine di bordo è nullo. Il secondo è giustificato dalla natura anticommutante delle variabili ψ e ψ^\dagger . Tale simmetria la chiameremo "coniugazione di carica". Il gruppo di simmetria avrà dunque un sottogruppo \mathbb{Z}_2 generato da C , tale che $C^2 = 1$. Gli operatori $\hat{\psi}$ e $\hat{\psi}^\dagger$ trasformano nel seguente modo sotto C :

$$C\hat{\psi}C = \hat{\psi}^\dagger, \quad C\hat{\psi}^\dagger C = \hat{\psi} \quad (2.7)$$

Cerchiamo ora di capire come queste simmetrie si comportino una rispetto all'altra, se agiscano in modo disaccoppiato o meno. Cerchiamo dunque la relazione di commutazione fra i generatori di $U(1)$ e C . Agiamo su $\hat{\psi}$ tramite la simmetria composta $CV_\alpha C$:

$$CV_\alpha C \hat{\psi} CV_{-\alpha} C = CV_\alpha \hat{\psi}^\dagger V_{-\alpha} C = C e^{-i\alpha} \hat{\psi}^\dagger C = e^{-i\alpha} \hat{\psi} = V_{-\alpha} \hat{\psi} \quad (2.8)$$

Ciò mostra che il gruppo di simmetria globale classico non è commutativo, poiché si ha la seguente relazione di commutazione fra C e il generico V_α :

$$CV_\alpha C = V_{-\alpha} \leftrightarrow CV_\alpha = V_{-\alpha} C \quad (2.9)$$

Il gruppo di simmetria è dunque $\mathbb{Z}_2 \times U(1) = O(2)$. Una possibile rappresentazione di tale gruppo sono le simmetrie di un cerchio: le rotazioni rappresentano il sottogruppo $U(1)$ e la

riflessione rispetto a un asse rappresentano il sottogruppo \mathbb{Z}_2 .

Passiamo ora alla descrizione quantistica del sistema, cercando di capire come tali simmetrie, implementate da opportuni operatori unitari \hat{V}_α e \hat{C} (la cui esistenza si ricorda essere garantita dal Teorema di Wigner, enunciato nella sezione 1.1), siano rappresentate sullo spazio di Hilbert, ovvero sul qu-bit.

Da qui in poi, faremo uso della notazione senza il cappuccio per gli operatori (quindi anche per gli operatori di creazione di distruzione).

Le relazioni di commutazione (2.5) le poniamo ancora valide nel sistema quantizzato. Poi, $U(1)$ è un sottogruppo a un parametro continuo α , dunque può essere scritto come $e^{i\alpha Q}$, come dimostrato nella nota [3] del capitolo 1, dove α è il parametro del sottogruppo, mentre Q è il generatore del sottogruppo. Dunque sul qu-bit V_α sarà tale che:

$$\begin{aligned} V_\alpha|1\rangle &= e^{i\alpha q}|1\rangle \\ V_\alpha|2\rangle &= V_\alpha\psi^\dagger|1\rangle = e^{-i\alpha}\psi^\dagger V_\alpha|1\rangle = e^{i\alpha(q-1)}|2\rangle \end{aligned} \quad (2.10)$$

Si è chiamata q la carica di $|1\rangle$ sotto V_α . Nel penultimo passaggio si è fatto uso della seconda delle (2.5) e nell'ultimo della prima delle (2.10). Per far sì che $\alpha \sim \alpha + 2\pi$, occorre che la carica q appartenga a \mathbb{Z} .

La simmetria \mathbb{Z}_2 è discreta. Una possibile realizzazione di C sullo spazio di Hilbert, consistente con la relazione $C^2 = 1$, è la seguente:

$$\begin{aligned} C|1\rangle &= |2\rangle \\ C|2\rangle &= |1\rangle \end{aligned} \quad (2.11)$$

Per mostrarlo, consideriamo l'espressione più generale possibile per $C|1\rangle$, con a e b coefficienti complessi : $C|1\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$. Guardiamo ora come C agisce su $|2\rangle$: $C|2\rangle = C\psi^\dagger|1\rangle = C\psi^\dagger C C|1\rangle = \psi C|1\rangle$. Deve inoltre valere $C^2|2\rangle = |2\rangle$. Applicando due volte C a $|2\rangle$ e uguagliando il risultato a $|2\rangle$ si ottiene che $a = 0$ e $b^2 = 1$. Ora, se $b = -1$ si ha $C|1\rangle = -|2\rangle$ e $C|2\rangle = -|1\rangle$, mentre se $b = 1$ si ottengono le relazioni (2.11). Si può scegliere una o l'altra convenzione senza conseguenze, in quanto il meno presente nelle relazioni per $b = 1$ è riassorbibile ridefinendo gli autostati. Usiamo dunque la convenzione indicata in (2.11).

Ora che abbiamo la rappresentazione del gruppo di simmetria sullo spazio di Hilbert, cerchiamo di capire se le relazioni di $O(2)$ sono soddisfatte:

$$\begin{cases} CV_\alpha C|1\rangle = CV_\alpha|2\rangle = Ce^{i\alpha(q-1)}|2\rangle = e^{i\alpha(q-1)}|1\rangle \\ CV_\alpha C|2\rangle = CV_\alpha|1\rangle = Ce^{i\alpha q}|1\rangle = Ce^{i\alpha q}|2\rangle \end{cases} \quad (2.12)$$

Mentre:

$$\begin{cases} V_{-\alpha}|1\rangle = e^{-i\alpha q}|1\rangle \\ V_{-\alpha}|2\rangle = e^{-i\alpha(q-1)}|2\rangle \end{cases} \quad (2.13)$$

Dunque:

$$\begin{cases} CV_\alpha C|1\rangle = e^{i\alpha(2q-1)}V_{-\alpha}|1\rangle \\ CV_\alpha C|2\rangle = e^{i\alpha(2q-1)}V_{-\alpha}|2\rangle \end{cases} \quad (2.14)$$

Tale relazione di $O(2)$ non è rappresentata unitariamente, ma è rotta da una fase, che notiamo essere la stessa per entrambe le equazioni della (2.14). Si ha allora una rappresentazione

proiettiva di $O(2)$. Si può allora provare a riassorbire i fattori di fase, sfruttando il fatto di non avere specificato la carica q (dunque sfruttando l'ambiguità per la moltiplicazione di una fase lasciata dal Teorema di Wigner nella determinazione degli operatori unitari implementanti le simmetrie). Si cerca dunque di vedere se tali fattori di fase, che sono i 2-cocicli ω che avevamo incontrato nella sezione 1.2, siano equivalenti o meno a fattori di fase triviali, uguali a 1, che renderebbero la rappresentazione unitaria e l'estensione centrale triviale. Per riassorbire il fattore di fase e riottenere le relazioni di $O(2)$ si dovrebbe porre $q = \frac{1}{2}$, dunque l'identificazione $\alpha \sim \alpha + 2\pi$ data dal sottogruppo $U(1)$. Si avrebbe invece $\alpha \sim \alpha + 4\pi$. Inoltre si ha:

$$\begin{cases} V_\alpha|1\rangle = e^{i\frac{\alpha}{2}}|1\rangle \\ V_{\alpha+2\pi}|1\rangle = -e^{i\frac{\alpha}{2}}|1\rangle = V_{2\pi}V_\alpha|1\rangle \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} V_\alpha|2\rangle = e^{-i\frac{\alpha}{2}}|2\rangle \\ V_{\alpha+2\pi}|2\rangle = -e^{-i\frac{\alpha}{2}}|2\rangle = V_{2\pi}V_\alpha|2\rangle \end{cases} \quad (2.16)$$

Dunque anche con questa scelta di q si va incontro all'esplicita rottura delle relazioni di $O(2)$ sullo spazio di Hilbert per mezzo di un operatore centrale, ovvero $V_{2\pi} = -1$. V_α e $V_{\alpha+2\pi}$, identificati nel gruppo di simmetria classico $O(2)$, sono ora distinti, a causa di un operatore proporzionale all'identità $V_{2\pi}$. Invece nella rappresentazione scelta si ha l'identificazione fra V_α e $V_{\alpha+4\pi}$. Dunque si ha che il gruppo di simmetria classico $O(2)$ è esteso centralmente al suo ricoprimento doppio $Pin(2)$, ovvero l'estensione centrale di $O(2)$ con elemento centrale (commutante con il resto dei generatori del gruppo) il sottogruppo $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$. Il vero gruppo di simmetria rappresentato è dunque $Pin(2)$, che viene rappresentato in maniera unitaria. Sfruttando il fatto che $O(2)$ è il gruppo di simmetria di un cerchio, si può vedere $Pin(2)$ come il gruppo di simmetria del cerchio "percorso due volte". In altre parole, dopo una rotazione di 2π non si torna al punto di partenza, come invece accade dopo una rotazione di 4π . Tenendo invece $q \in \mathbb{Z}$, si avrebbe avuto una rappresentazione di $O(2)$ proiettiva, ovvero con dei fattori di fase aggiuntivi rispetto alle relazioni dell'algebra di $O(2)$.

Il fatto che $O(2)$ potesse essere rappresentato proiettivamente sullo spazio di Hilbert lo si poteva dedurre dal suo secondo gruppo di coomologia $\mathcal{H}^2(O(2), U(1))$, che è in corrispondenza biunivoca con le estensioni centrali di $O(2)$ rispetto a $U(1)$. Questo è un caso particolare della trattazione generale presentata nella sezione 1.2, dove il gruppo di simmetria classico G è $O(2)$. Il secondo gruppo di coomologia è non triviale, come si può vedere in [3]:

$$\mathcal{H}^2(O(2), U(1)) = \mathbb{Z}_2 \quad (2.17)$$

Poichè l'unico elemento del secondo gruppo di coomologia è \mathbb{Z}_2 , l'unica possibile estensione centrale non banale è \mathbb{Z}_2 , e ogni altra estensione centrale non banale è equivalente ad essa, nel senso specificato nella sezione 1.2. Se l'estensione centrale è non banale, allora i fattori di fase $\in U(1)$ che rendono non proiettiva la rappresentazione di $O(2)$ sullo spazio di Hilbert sono necessariamente equivalenti a $\{\pm 1\}$. Per ottenere una rappresentazione unitaria, occorre promuovere tali fattori di fase a generatori del gruppo di simmetria globale. Come prima evidenziato, ciò significa che $O(2)$ viene esteso centralmente al suo ricoprimento doppio $Pin(2)$, la cui rappresentazione è realizzata unitariamente (ovvero senza fattori di fase). Quest'ultimo ha un sottogruppo normale \mathbb{Z}_2 aggiuntivo. Il gruppo di simmetria che si pensava essere corretto classicamente non lo è più quantisticamente. Si noti che ciò non

si sarebbe visto se si fossero cercate rappresentazioni di $O(2)$ sullo spazio di Hilbert con le fasi identificate, ovvero H/\mathbb{C}^* .¹

Siamo di fronte a un'anomalia di 't Hooft, in particolare un'anomalia di 't Hooft "mista". Infatti il problema sorge dalle relazioni (2.14), ovvero quando si considera tutto il gruppo di simmetria, e non solo i singoli sottogruppi, per cui invece non ci sono problemi.

Per diagnosticare l'anomalia di 't Hooft, accoppiamo la teoria a un campo di gauge di background e cerchiamo le simmetria di gauge locali presenti nella teoria, riprendendo la trattazione presentata nella sezione 1.4, con maggiore dettaglio. Il modello è $0 + 1$ dimensionale, dunque vi è soltanto una componente del campo di gauge: al posto della derivata temporale in (2.4) usiamo la derivata covariante:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow D_t = \frac{d}{dt} + iA(t) \quad (2.18)$$

Se vi fossero stati anche dei gradi di libertà spaziali allora si sarebbero dovute considerare anche delle derivate covarianti spaziali. L'introduzione di tale derivata covariante porta a scrivere l'azione nel seguente modo:

$$S = \int i\psi^\dagger \left(\frac{d}{dt} + iA(t) \right) \psi dt \quad (2.19)$$

La simmetria $U(1)$ individuata nel caso libero $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$ era "statica", con α era costante nel tempo. Questo era consistente con il fatto che ψ e ψ^\dagger erano costanti nel tempo. Ora però compare un termine di background $A(t)$, che può essere una qualsiasi funzione del tempo. Esplicitiamo gli estremi temporali in (2.19), considerando $t \in [O, T]$. Vi è dunque la seguente simmetria di gauge, con i fattori di fase che cambiano nel tempo:

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow e^{i\Lambda(t)}\psi \\ \psi^\dagger &\rightarrow e^{-i\Lambda(t)}\psi^\dagger \\ A(t) &\rightarrow A(t) + \partial_t\Lambda(t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Vale dunque $\Lambda(t) \sim \Lambda(t) + 2\pi$ per ogni t .

La simmetria discreta \mathbb{Z}_2 che scambia ψ in ψ^\dagger deve ora tenere conto anche del termine $\int i\psi^\dagger A(t)\psi = -\int i\psi A(t)\psi^\dagger$, che cambia di segno a causa della natura anticommutante della variabili di Grassmann. Di conseguenza si deve avere:

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi^\dagger \\ \psi^\dagger &\rightarrow \psi \\ A(t) &\rightarrow -A(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

¹Vi è una situazione simile quando si cercano le rappresentazioni a spin semintero del gruppo $SO(3)$. Si trova che la rappresentazione di tale gruppo è realizzata proiettivamente con dei fattori di fase ± 1 e, per un ragionamento simile a quello illustrato sopra, il vero gruppo di simmetria è $SU(2)$, che è invece rappresentato in maniera unitaria. Si ha inoltre che $SU(2)$ è il ricoprimento universale di $SO(3)$. Nel caso di $O(2)$ invece, $Pin(2)$ non è il suo ricoprimento universale, non essendo $Pin(2)$ semplicemente connesso. Per vederlo, si può notare che $Pin(2) = Spin(2) \times \mathbb{Z}_2$, con $Spin(2) \cong \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}$ il ricoprimento doppio di $SO(2) \cong U(1)$ (si noti che neanche $Spin(2)$ è semplicemente connesso). $Pin(2)$ non è connesso e di conseguenza non può essere semplicemente connesso.

Si può mostrare che $A(t)$ può essere portata in una forma indipendente dal tempo, $\tilde{A} = \int_0^T A(t') dt'$ tramite un'opportuna trasformazione di gauge del tipo ²:

$$A(t) \rightarrow \Lambda A \Lambda^{-1} + \Lambda \partial \Lambda^{-1} \quad (2.22)$$

Questa scelta di gauge lascia una libertà di gauge residua. Si consideri un'altra trasformazione di gauge, del tipo indicato in (2.20), con $\Lambda(t) = \frac{2\pi n}{T} t$. Tale trasformazione shifta \tilde{A} di $\frac{2\pi n}{T}$, lasciando solo la parte frazionaria di $\frac{\tilde{A}T}{2\pi}$ gauge invariante. Con questa identificazione il campo di gauge di background \tilde{A} risulta periodico, con periodo $\frac{2\pi}{T}$. Quest'ultima simmetria di gauge è dunque una simmetria $U(1)$.

Consideriamo ora la funzione di partizione:

$$Z(\tilde{A}) = \int_{ABC} [d\psi d\psi^\dagger] e^{iS[\psi, \psi^\dagger]} \quad (2.23)$$

ABC sta per "antiperiodic boundary condition", ovvero l'integrazione è svolta con condizioni al bordo antiperiodiche: $\psi(0) = -\psi(T)$, $\psi^\dagger(0) = -\psi^\dagger(T)$.

La funzione di partizione si può riformulare come la traccia dell'operatore e^{-iTH} sullo spazio di Hilbert, composto solo da due stati:

$$Z(\tilde{A}) = Tr[e^{-iTH}] \quad (2.24)$$

Occorre quindi determinare l'hamiltoniana quantizzata, passando prima per quella classica. La più generale hamiltoniana classica che corrisponde alla lagrangiana presente in (18) $L = i \left(\frac{d}{dt} + iA(t) \right)$, è:

$$H = \tilde{A}(\psi\psi^\dagger - \beta(\psi\psi^\dagger + \psi\psi^\dagger)) = \tilde{A}(\alpha\psi\psi^\dagger - \beta\psi\psi^\dagger), \quad \alpha = 1 - \beta \quad (2.25)$$

Quantizzando, vengono poste le condizioni di anticommutazione:

$$\{\psi, \psi^\dagger\} = 1, \quad \{\psi, \psi\} = \{\psi^\dagger, \psi^\dagger\} = 0 \quad (2.26)$$

Dunque l'hamiltoniana quantizzata è:

$$H = \tilde{A}(\psi\psi^\dagger - \beta(\psi\psi^\dagger + \psi\psi^\dagger)) = \tilde{A}(\psi\psi^\dagger - \beta) \quad (2.27)$$

β dunque "misura" l'ambiguità nell'ordinamento degli operatori. Dunque all'esponente della (2.24) compare l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico fermionico $\psi^\dagger\psi$, con un termine costante in più: $e^{-iT\tilde{A}(\psi\psi^\dagger - \beta)}$. L'hamiltoniana dell'oscillatore armonico ha come autovalori 0 e 1 sugli stati $|1\rangle$ e $|2\rangle$, grazie alle relazioni (1), dunque gli autovalori di H sono $-\beta\tilde{A}$ e $(1 - \beta)\tilde{A}$. Di conseguenza si ha che la funzione di partizione può venir così scritta:

$$Z(\tilde{A}) = Tr[e^{-iTH}] = e^{i\tilde{A}T\beta} [1 + e^{-i\tilde{A}T}] \quad (2.28)$$

²Per operare tale scelta di gauge definiamo $U(t) = \exp\left(\int_0^t -A(t') dt'\right)$. Poi definiamo \tilde{A} (che sarà il nostro campo di background indipendente dal tempo) implicitamente con $U(T) = e^{\tilde{A}T}$. A questo punto consideriamo una trasformazione di gauge del tipo (20) con $\Lambda(t) = e^{-\tilde{A}t} U^\dagger(t)$. Tale traslazione porta A nella forma desiderata $\tilde{A} = \int_0^T A(t') dt'$.

Si noti che l'operatore e^{-iTH} agisce sugli stati $|1\rangle$ e $|2\rangle$ esattamente come l'operatore $V_\alpha = e^{i\alpha Q}$, con Q che definiva la carica di tali stati sotto l'operatore V_α :

$$\begin{cases} V_\alpha|1\rangle = e^{i\alpha q}|1\rangle \\ V_\alpha|2\rangle = e^{i\alpha(q-1)}|2\rangle \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\begin{cases} e^{-iTH}|1\rangle = e^{-iT\tilde{A}(\psi\psi^\dagger - \beta)}|1\rangle = e^{i\tilde{A}T\beta}|1\rangle \\ e^{-iTH}|2\rangle = e^{-iT\tilde{A}(\psi\psi^\dagger - \beta)}|2\rangle = e^{i\tilde{A}T(\beta-1)}|2\rangle \end{cases} \quad (2.30)$$

Poichè i due operatori si comportano allo stesso modo sulla base dello spazio di Hilbert, essi sono uguali operatorialmente. Inoltre si ha che il parametro α è uguale a $\tilde{A}T$ (entrambi dovrebbero essere 2π periodici) e che la carica q è uguale a β , che "misura" l'ambiguità di ordinamento.

Mostriamo ora la non invarianza della funzione di partizione sotto le trasformazioni di gauge, che prende la forma di un'anomalia di 't Hooft mista:

- al fine di avere la funzione di partizione invariante sotto la simmetria $U(1)$ di gauge $\tilde{A}T \rightarrow \tilde{A}T + k2\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, occorre avere $\beta \in \mathbb{Z}$. Con tale scelta di β , la funzione di partizione non è invariante sotto la simmetria \mathbb{Z}_2 (19) che manda \tilde{A} in $-\tilde{A}$:

$$Z(-\tilde{A}) = e^{-i\tilde{A}T\beta}[1 + e^{i\tilde{A}T}] = e^{i\tilde{A}T(-2\beta+1)}Z(\tilde{A}) \quad (2.31)$$

Si ha dunque che la funzione di partizione non è invariante sotto "charge conjugation" a causa di un c-numero, che si nota essere, a meno del segno, lo stesso che ostruiva la rappresentazione unitaria dell'algebra di $O(2)$ in (2.14).

- si può realizzare una funzione di partizione invariante sotto "coniugazione di carica" scegliendo $\beta = \frac{1}{2}$:

$$Z(\tilde{A}) = e^{-\frac{1}{2}i\tilde{A}T} + e^{\frac{1}{2}i\tilde{A}T} \quad (2.32)$$

Si perde però l'invarianza sotto le simmetrie di gauge che traslano $\tilde{A}T$ di $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Compaiono infatti dei fattori di fase.

Si è dunque in presenza di un'anomalia di 't Hooft mista: si può realizzare una funzione di partizione invariante sotto solo una dei due sottogruppi di simmetria, ma non invariante sotto entrambi. Mostriamo che si può scartare la seconda opzione, dove si prende $\beta = q = \frac{1}{2}$. Se in una teoria la gauge è dinamica (ovvero un vero e proprio grado di libertà della teoria, con relative equazioni del moto), non può venire rotta. Se il campo di gauge \tilde{A} è dinamico, si aggiungono due gradi di libertà $\{\tilde{A}, \Pi_{\tilde{A}}\}$, con $\Pi_{\tilde{A}}$ il momento coniugato a \tilde{A} . Tale momento (lungo i moti) si può ricavare dalla lagrangiana: $\Pi_{\tilde{A}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{A}}} = 0$.

Consideriamo ora l'equazione di Hamilton relativa a $\Pi_{\tilde{A}}$:

$$\begin{aligned} \Pi_{\tilde{A}} &= -\frac{\partial H}{\partial \dot{\tilde{A}}} = -(\psi^\dagger\psi - \beta) = 0 \\ \psi^\dagger\psi - \beta &= 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Prima si è fatto notare che l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico fermionico $\psi^\dagger\psi$ ha autovalori interi 0 e 1. Di conseguenza, β non può assumere valori non interi, quindi neanche $\beta = \frac{1}{2}$, altrimenti si romperebbe esplicitamente la gauge dinamica. Si deve dunque abbandonare l'invarianza sotto "coniugazione di carica" a favore dell'invarianza sotto la gauge $U(1)$, accontentandosi di un'invarianza a meno di fattori di fase.

2.2 Modello bosonico

Consideriamo ora una particella di massa unitaria che si muove su una circonferenza S^1 di raggio unitario. Per prima cosa, nella sezione 2.2.1, tratteremo il caso libero, senza potenziali. Successivamente nella sezione 2.2.2 verrà trattato il caso con un potenziale 2π -periodico continuo $V(x)$.

Nell'azione comparirà un termine topologico (in gergo un termine di Aharonov-Bohm, dall'omonimo effetto) dipendente da un parametro θ . Tale termine classicamente non ha effetti sulla dinamica, ma quantisticamente può averli. Fisicamente lo si può pensare come dovuto a un flusso magnetico, originato da un solenoide al centro della circonferenza posto ortogonalmente alla stessa. Si sarebbe potuto non considerare tale termine, considerando funzioni d'onda non periodiche: $\psi(q + 2\pi) = e^{i\theta}\psi(q)$. In Appendice A, seguendo [10], viene mostrato nel caso libero che ciò non avrebbe cambiato la fisica del sistema, risultando semplicemente una scelta di convenzione. Si è scelto di tenere nell'azione tale termine topologico e di considerare funzioni d'onda periodiche.

2.2.1 Particella libera

La lagrangiana del sistema è la seguente:

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{\theta}{2\pi}\dot{q} \quad (2.34)$$

L'azione è dunque:

$$S[q] = \int \frac{1}{2}\dot{q}^2 dt + \frac{\theta}{2\pi} \int dq \quad (2.35)$$

Se la particella fosse stata su una retta, il termine presente nella lagrangiana proporzionale a \dot{q} sarebbe stato ininfluente nella fisica del sistema, essendo una derivata totale. Invece in questo caso, siccome la particella è su uno spazio topologicamente non banale come S^1 , questo termine gioca un ruolo importante nelle considerazioni che verranno fatte sulla fisica del sistema. Si consideri la funzione di partizione del sistema, dove l'integrale è svolto su tutti i cammini periodici:

$$Z(\theta) = \int [dx]_{q,t_i}^{q,t_f} e^{iS[q]} \quad (2.36)$$

Nell'esponentiale $e^{iS[q]}$ compare il fattore $e^{i\frac{\theta}{2\pi} \int dq}$. Se $\int dq \in 2\pi\mathbb{Z}$ si sta integrando su cammini che hanno punto partenza equivalente a quello di arrivo, e dunque la funzione di partizione non deve cambiare. Si nota ora che una variazione del parametro θ di un multiplo intero di 2π non cambia la fisica del sistema, dunque si ha l'identificazione $\theta \sim \theta + 2\pi$.

Ricaviamo dunque l'hamiltoniana a partire dalla lagrangiana tramite la trasformata di Legendre:

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{\theta}{2\pi}\dot{q} \quad (2.37)$$

$$\underline{p = \dot{q} + \frac{\theta}{2\pi}}$$

$$H = p\dot{q} - L = \frac{1}{2} \left(p - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \quad (2.38)$$

Si noti che il termine lineare in \dot{q} presente nella lagrangiana non gioca alcun ruolo nella dinamica classica del problema.

Ricaviamo ora l'operatore hamiltoniano del sistema:

$$H = \frac{1}{2} \left(\hat{p} - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \quad (2.39)$$

L'equazione di Schroendinger del sistema, considerando l'operatore momento nella rappresentazione delle coordinate, è:

$$\frac{1}{2} \left(-i\partial_q - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \psi_n = E_n \psi_n \quad (2.40)$$

Lo spazio di Hilbert è quello delle funzioni L^2 , sul quale viene imposta la condizione al contorno della periodicità delle funzioni d'onda $\psi_n(q + 2\pi) = \psi_n(q)$. Si ricavano le autofunzioni (scritte nella rappresentazione delle coordinate) e i relativi autostati:

$$\psi_n(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inq}, \quad E_n = \frac{1}{2} \left(n - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.41)$$

Studieremo ora il gruppo di simmetria del sistema al variare del parametro θ , mostrando che per $\theta = \pi$ il gruppo di simmetria viene esteso centralmente nel passaggio dalla descrizione classica alla descrizione quantistica, che è il segnale di un'anomalia di 't Hooft.

La prima osservazione è che, classicamente, per ogni θ vi è un sottogruppo di simmetria $U(1)$ per rotazione:

$$q \mapsto q + \alpha, \quad \alpha \sim \alpha + 2\pi \quad (2.42)$$

Tale simmetria $U(1)$ è implementata quantisticamente da operatori $V_\alpha = e^{i\alpha\hat{p}}$. Si ha, come richiesto da un operatore implementante una simmetria quantistica, $V_\alpha H V_\alpha^\dagger = H$ per ogni θ . V_α agisce sugli autostati $|n\rangle$ nella seguente maniera (è facile convincersene usando la rappresentazione delle posizioni (2.40)):

$$V_\alpha |n\rangle = e^{i\alpha n} |n\rangle \quad (2.43)$$

Per $\theta = 0, \pi$ compaiono due simmetrie \mathbb{Z}_2 aggiuntive: l'inversione temporale e la "charge conjugation" (che può essere vista come una riflessione sul cerchio):

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : t &\mapsto -t \\ C : q &\mapsto -q \end{aligned} \quad (2.44)$$

Per $\theta = 0$ il termine topologico in (2.35) non compare e, essendo l'azione puramente quadratica in \dot{q} , le simmetrie si notano subito esistere. Per $\theta \neq 0$, il termine $i\frac{\theta}{2\pi} \int dq$ presente nell'esponentiale del path integral $e^{iS[q]}$, viene trasformato da ognuna di queste due simmetrie nel termine $-i\frac{\theta}{2\pi} \int dq$, riscrivibile come:

$$-i\frac{\theta}{2\pi} \int dq = +i\frac{\theta}{2\pi} \int dq - 2i\frac{\theta}{2\pi} \int dq \quad (2.45)$$

Poiché $\int dq \in 2\pi\mathbb{Z}$ e $\theta \sim \theta + 2\pi$, $e^{iS[q]}$ non cambia solamente per $\theta = \pi$ (oltre che per $\theta = 0$). Dunque per $\theta = 0, \pi$ il gruppo di simmetria classico è il gruppo di simmetrie

del cerchio S_1 più la simmetria per inversione temporale (commutante con tutto), ovvero $O(2) \times \mathbb{Z}_2 = (\mathbb{Z}_2 \times U(1)) \times \mathbb{Z}_2$. Altrimenti, il gruppo di simmetria classico è solo quello delle rotazioni $U(1)$.

Quantisticamente, tali simmetrie verranno implementate dagli operatori T , antiunitario³ e C , unitario, tali che $T^2 = C^2 = 1$. Si ha dunque $C^\dagger = C^{-1} = C$ e $T^{-1} = T$. Affinché T e C siano operatori implementanti delle simmetrie, occorre che commutino con l'operatore hamiltoniano (2.24): $THT^{-1} = H$ e $CHC^{-1} = H$ (per T vi è anche la condizione di antiunitarietà $TiT^{-1} = -i$). Tali condizioni possono essere rispettate da:

$$T\hat{p}T = \begin{cases} -\hat{p}, & \theta = 0 \\ -\hat{p} + 1, & \theta = \pi \end{cases} \quad (2.46)$$

$$C\hat{p}C = \begin{cases} -\hat{p}, & \theta = 0 \\ -\hat{p} + 1, & \theta = \pi \end{cases} \quad (2.47)$$

L'operatore T , usando anche la condizione di antiunitarietà, può essere rappresentato nella rappresentazione delle coordinate⁴ a $\theta = 0$ dall'operatore di coniugazione complessa \mathcal{K} e a $\theta = \pi$ da $e^{i\theta}\mathcal{K}$. Ce ne si può convincere sostituendo nelle relazioni (2.46). La simmetria C può essere rappresentata da un operatore che implementa le simmetrie dello spettro degli autovalori energetici (2.35). Si ha che per $\theta = 0$ ogni autovalore $E_{n \neq 0}$ ha degenerazione doppia ($\psi_{\pm n}$ sono relativi allo stesso autovalore); solo lo stato fondamentale E_0 non è degenere. Per $\theta = \pi$ ogni autovalore E_n è degenere, anche quello relativo allo stato fondamentale (ψ_n e ψ_{-n+1} sono relativi allo stesso autovalore). Si può dunque realizzare C sugli autostati dell'hamiltoniana nella seguente maniera:

$$C|n\rangle = \begin{cases} | -n\rangle, & \theta = 0 \\ | -n + 1\rangle, & \theta = \pi \end{cases} \quad (2.48)$$

Cerchiamo ora di capire come queste simmetrie si comportino una rispetto all'altra. Poiché C e T agiscono allo stesso modo su \hat{p} , si ha che:

$$TC\hat{p}(TC)^{-1} = \begin{cases} \hat{p}, & \theta = 0 \\ \hat{p}, & \theta = \pi \end{cases} \quad CT\hat{p}(CT)^{-1} = \begin{cases} \hat{p}, & \theta = 0 \\ \hat{p}, & \theta = \pi \end{cases} \quad (2.49)$$

$$\Rightarrow TC = CT$$

$$\Rightarrow [T, C] = 0$$

Si ha dunque che tali operatori commutano, come i relativi sottogruppi di simmetria classici, senza fattori di fase aggiuntivi. Guardiamo ora le relazioni di commutazione fra C e $V_\alpha = e^{i\alpha\hat{p}}$ e fra T e V_α :

$$CV_\alpha C^{-1} = Ce^{i\alpha\hat{p}}C^{-1} = \begin{cases} e^{-i\alpha\hat{p}}, & \theta = 0 \\ e^{i\alpha(-\hat{p}+1)}, & \theta = \pi \end{cases} \quad (2.50)$$

³Poiché T manda \hat{q} in \hat{q} e \hat{p} in $-\hat{p}$ (più eventuali operatori proporzionali all'identità), per mantenere le regole di commutazione canoniche invariati sotto \mathcal{T} occorre che $TiT^\dagger = -i$. Occorre quindi che T sia antiunitario

⁴ove $\hat{p} = -i\partial_q$

$$\begin{aligned} \Rightarrow CV_\alpha C &= \begin{cases} V_{-\alpha}, & \theta = 0 \\ e^{i\alpha} V_{-\alpha}, & \theta = \pi \end{cases} \\ TV_\alpha T^{-1} = T e^{i\alpha \hat{p}} T^{-1} &= \begin{cases} e^{i\alpha \hat{p}}, & \theta = 0 \\ e^{-i\alpha(-\hat{p}+1)}, & \theta = \pi \end{cases} \\ \Rightarrow TV_\alpha T &= \begin{cases} V_\alpha, & \theta = 0 \\ e^{-i\alpha} V_\alpha, & \theta = \pi \end{cases} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Si nota dunque che il gruppo di simmetria è rappresentato unitariamente per $\theta = 0$, mentre è rappresentato proiettivamente per $\theta = \pi$, perchè compaiono dei fattori di fase aggiuntivi. Sfruttando l'ambiguità a meno di una fase di V_α , si può provare a riassorbire tale fattore ridefinendo l'operatore implementante il gruppo di simmetria $U(1)$ come $U_\alpha = e^{-i\frac{\alpha}{2}} V_\alpha$. Così facendo, valgono le relazioni di commutazione di $O(2) \times \mathbb{Z}_2$ fra U_α e C e fra U_α e T (ricordando che $TiT^{-1} = -i$):

$$\begin{aligned} CU_\alpha C^{-1} &= U_{-\alpha} \\ TU_\alpha T^{-1} &= U_\alpha \end{aligned} \quad (2.52)$$

Però, in maniera simile a quanto accadeva nel caso del fermione libero trattato nella sezione 2.1, non vale più l'identificazione fra U_α e $U_{\alpha+2\pi}$, ma vale l'identificazione fra U_α e $U_{\alpha+4\pi}$:

$$U_{\alpha+2\pi} = -U_\alpha, \quad U_{\alpha+4\pi} = U_\alpha \quad (2.53)$$

Si ha dunque una rappresentazione unitaria del ricoprimento doppio di $O(2)$, ovvero $Pin(2)$, che si ricorda essere l'estensione centrale di $O(2)$ con elemento centrale il sottogruppo $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$. Il gruppo di simmetria $O(2) \times \mathbb{Z}_2$ viene esteso centralmente a $Pin(2) \times \mathbb{Z}_2$ quantizzando la teoria classica. Questo è il segnale di un'anomalia di 't Hooft, che è anche mista (emerge solo componendo più sottogruppi del gruppo globale di simmetria e non guardando i singoli sottogruppi).

Si vuole ora osservare che per $\theta = \pi$ il bosone considerato nello stato fondamentale è perfettamente analogo al fermione nel caso 0 + 1-dimensionale prima considerato. Si ha dunque una dualità infrarossa bosone-fermione (dove conta solo lo stato fondamentale).

Si considerino infatti gli autostati $|0\rangle$ e $|1\rangle$ relativi all'autovalore energetico fondamentale $E_0 = \frac{1}{8}$. Su di essi gli operatori V_α e C agiscono in maniera totalmente analoga a come agivano gli operatori del caso fermionico V_α e C sul qu-bit:

$$\begin{aligned} V_\alpha|0\rangle &= |0\rangle \\ V_\alpha|1\rangle &= e^{i\alpha}|1\rangle \\ C|0\rangle &= |1\rangle \\ C|1\rangle &= |0\rangle \end{aligned} \quad (2.54)$$

Nel caso fermionico era stata mostrata esplicitamente l'anomalia di 't Hooft mista nella funzione di partizione, che sarà dunque ancora presente nel bosone in cui non vengono considerati gli stati eccitati.

2.2.2 Particella con potenziale periodico

Nei casi considerati fino ad adesso, ovvero il fermione libero 0 + 1 dimensionale e il bosone libero su un cerchio, era possibile sapere in maniera immediata se gli stati energetici erano degeneri o meno. Questo perchè si poteva determinare esplicitamente autovalori e autostati dell'operatore hamiltoniano in maniera esatta e con pochi conti. Nei casi in cui compariva l'estensione centrale e quindi l'anomalia di 't Hooft (per $\theta = \pi$), gli stati energetici erano esplicitamente degeneri, e dunque non si poteva apprezzare i vincoli sulla degenerazione degli stati che un'anomalia di 't Hooft pone. Mostriamo ora che la degenerazione dello stato fondamentale (e non solo) permane applicando un potenziale 2π -periodico $V(nq)$, $n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ al sistema prima considerato del bosone libero su S_1 . Consideriamo dunque l'azione:

$$S[q] = \int \left(\frac{1}{2} \dot{q}^2 + V(nq) \right) dt + \frac{\theta}{2\pi} \int dq \quad (2.55)$$

Possiamo dunque ricavare l'operatore hamiltoniano del sistema, passando per la lagrangiana e sostituendo al momento classico e alla posizione classica gli operatori momento e posizione:

$$H = \frac{1}{2} \left(\hat{p} - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 + V(n\hat{q}) \quad (2.56)$$

Perché il potenziale è 2π -periodico, $V(x)$ può essere scritto in serie di Fourier: $V(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \cos(lx + \alpha_l)$. I parametri del sistema fisico considerato sono quindi $\{\theta, \lambda_l, \alpha_l\}$, con θ il parametro più importante nella nostra trattazione. Cerchiamo ora il gruppo di simmetria del sistema al variare di θ , e guardiamo come viene realizzato a livello quantistico. La simmetria traslazionale $U(1)$ presente nel caso libero viene sostituita da una simmetria traslazionale discreta \mathbb{Z}_n (applicandola n volte si ottiene l'identità):

$$q \mapsto q + \frac{2\pi}{n} \quad (2.57)$$

realizzata quantisticamente dall'operatore $V_n = e^{i\frac{2\pi}{n}\hat{p}}$. Si ha, come richiesto da un operatore implementante una simmetria quantistica, $V_n H V_n^\dagger = H$ per ogni θ . Per $\theta = 0, \pi$ compare la simmetria \mathbb{Z}_2 dell'inversione temporale:

$$\mathcal{T} : t \mapsto -t \quad (2.58)$$

La simmetria \mathcal{T} manda $q(t)$ in $q(-t)$ e dunque la presenza del potenziale non cambia la discussione effettuata nel caso libero che viene comunque brevemente ripresa. Per $\theta = 0$ si vede subito che \mathcal{T} è una simmetria del sistema, essendo l'azione quadratica in \dot{q} . Per $\theta \neq 0$ il termine $i\frac{\theta}{2\pi} \int dq$ presente nell'esponentiale del path integral $e^{iS[q]}$, viene trasformato nel termine $-i\frac{\theta}{2\pi} \int dq = +i\frac{\theta}{2\pi} \int dq - 2i\frac{\theta}{2\pi} \int dq$. Il termine $i\frac{\theta}{\pi} \int dq$, con $\int dq \in 2\pi\mathbb{Z}$, non cambia $e^{iS[q]}$ solo per $\theta = \pi$. Il gruppo di simmetria classico è quindi \mathbb{Z}_n per $\theta \neq \pi$ e $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ per $\theta = \pi$.

La simmetria \mathbb{Z}_2 viene implementata a livello quantistico da un operatore T . Occorre che T soddisfi la relazione di commutazione con l'operatore hamiltoniano $THT^{-1} = H$ e che

sia antiunitario $TiT^{-1} = -i$ (si ricorda che poichè $T^2 = 1$, si ha $T = T^{-1}$). Tali relazioni sono soddisfatte se T si comporta nel seguente modo sull'operatore momento:

$$T\hat{p}T = \begin{cases} -\hat{p}, & \theta = 0 \\ -\hat{p} + 1, & \theta = \pi \end{cases} \quad (2.59)$$

Scegliendo la rappresentazione delle coordinate, si vede che si può prendere come T l'operatore di coniugazione complessa \mathcal{K} per $\theta = 0$ e l'operatore $e^{iq}\mathcal{K}$ per $\theta = \pi$. La simmetria di "coniugazione di carica" $q \mapsto -q$ è qua rotta in generale, a causa della presenza dei parametri α_l .

Guardiamo ora come si comportano fra di loro l'operatore $V_n = e^{i\frac{2\pi}{n}\hat{p}}$ relativo alla simmetria \mathbb{Z}_n e l'operatore T relativo alla simmetria \mathbb{Z}_2 dell'inversione temporale (che classicamente commutano), ricordando che $TiT^{-1} = -i$:

$$\begin{aligned} TV_nT &= Te^{i\frac{2\pi}{n}\hat{p}}T^{-1} = \begin{cases} e^{i\frac{2\pi}{n}\hat{p}}, & \theta = 0 \\ e^{-i\frac{2\pi}{n}(-\hat{p}+1)}, & \theta = \pi \end{cases} \quad (2.60) \\ \Rightarrow TV_nT &= \begin{cases} V_n, & \theta = 0 \\ e^{-i\frac{2\pi}{n}}V_n, & \theta = \pi \end{cases} \end{aligned}$$

Per $\theta = 0$ la traslazione discreta \mathbb{Z}_n e l'inversione temporale \mathbb{Z}_2 commutano, come accade classicamente. Per $\theta = \pi$ compare invece un fattore di fase aggiuntivo rispetto alle relazioni classiche, che ci si chiede se si può riassorbire. Ridefiniamo l'operatore che implementa la simmetria \mathbb{Z}_n : $U_n = e^{-i\frac{2\pi k}{n}}V_n$, per un qualche $k \in \mathbb{Z}$ (occorre $(U_n)^n$). La nuova relazione di commutazione diviene:

$$TU_nT = e^{-i\frac{2\pi}{n}(1-2k)}U_n \quad (2.61)$$

Per riassorbire il fattore di fase occorre che k sia tale che:

$$1 - 2k = 0 \pmod{n} \leftrightarrow k = -k + 1 \pmod{n} \quad (2.62)$$

Si distinguono dunque due casi. Se $n \in 2\mathbb{Z}$, l'equazione (2.62) non può venire soddisfatta per nessun k intero. Se prendiamo invece k semintero, l'equazione (2.62) può venire soddisfatta e la costante di fase può venire riassorbita. Ma se k è semintero, allora vale $(U_n)^n = -1$ e non la relazione di \mathbb{Z}_n , $(V_n)^n = 1$. $(U_n)^n$ e 1, identificati classicamente nel gruppo di simmetria \mathbb{Z}_n , sono ora distinti a causa di un operatore proporzionale all'identità -1 , mentre sono identificati $(U_n)^{2n}$ e 1. In altre parole, con uno shift di 2π non si torna all'identità, ma solo dopo uno shift di 4π . Si ha dunque una rappresentazione unitaria del ricoprimento doppio di $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$, ovvero D_{4n} , dove D_{4n} è il gruppo diedrale di ordine $4n$ (il gruppo delle simmetrie di un poligono regolare di $2n$ lati). $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ viene esteso centralmente a D_{4n} , che è il gruppo di simmetria a livello quantistico per $\theta = \pi$ e n pari. Ciò è segnale di un'anomalia di 't Hooft mista. Si poteva trovare un indizio della possibilità di ciò dal fatto che la seconda coomologia del gruppo di simmetria globale classico $\mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2, U(1))$ (che si ricorda essere in corrispondenza biunivoca con le estensioni centrali di $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$, come evidenziato nella trattazione generale nella sezione 1.2) non è triviale, ma uguale per l'appunto a \mathbb{Z}_2 , come si può vedere in [3]:

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2, U(1)) = \mathbb{Z}_2 \quad (2.63)$$

Guardiamo ora il secondo caso possibile per la ricerca di una soluzione della (2.62). Per $n \in 2\mathbb{Z} + 1$, il fattore di fase può venire riassorbito scegliendo $k = \frac{n+1}{2}$, che è intero. Inoltre la relazione di \mathbb{Z}_n si mantiene: $(U_n)^n = 1$. Non si ha dunque alcuna estensione centrale e nessuna anomalia di 't Hooft mista.

Vediamo ora cosa i ragionamenti sopra sul gruppo di simmetria globale del modello e sulla sua rappresentazione implicano sullo spettro energetico. Nel caso in cui $n \in 2\mathbb{Z}$, mostriamo che per $\theta = \pi$ tutti gli autovalori dell'energia sono degeneri. Procedendo per assurdo, ipotizziamo che vi sia un autovalore non degenero che appartiene allo spettro. Se così fosse, il relativo autostato $|\psi\rangle$ dovrebbe essere autostato anche di tutti gli operatori implementanti i vari sottogruppi di cui è composto il gruppo di simmetria globale, come detto anche nella sezione 1.3, in questo caso T e V_n . L'autostato dell'autovalore energetico in questione è autostato anche di T e di V_n :

$$V_n|\psi\rangle = e^{i\frac{2\pi k}{n}}|\psi\rangle, \quad T|\psi\rangle = \gamma|\psi\rangle \quad (2.64)$$

con $k \in \mathbb{Z}$ (per avere $(V_n)^n = 1$) e $\gamma \neq 0$ l'autovalore di $|\psi\rangle$ rispetto a T . Usiamo la relazione di commutazione (2.60), mostrando che è proprio la comparsa di un nuovo operatore proporzionale all'identità, implementante un sottogruppo normale del gruppo di simmetria, la causa della degenerazione, in quanto agisce in modo non triviale (ovvero non è riassorbibile ridefinendo le costanti di fase) sull'autostato. Infatti:

$$\begin{aligned} TV_n|\psi\rangle &= e^{-i\frac{2\pi}{n}} V_n T|\psi\rangle \\ &\Rightarrow e^{-i\frac{2\pi}{n}k} = e^{i\frac{2\pi}{n}(k-1)} \end{aligned} \quad (2.65)$$

che è equivalente alla (2.62). Tale equazione per n pari non è soddisfatta, dunque l'autostato $|\psi\rangle$ non può esistere.

Mostriamo ora che la degenerazione di ogni autovalore energetico è doppia. Poichè gli operatori V_n commutano con l'hamiltoniano, esiste una base di autostati comuni. Si consideri un autovalore dell'energia qualsiasi, e si consideri il suo autospazio; tale autospazio avrà una base composta di autostati di V_n . Tale base $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_j\rangle, \dots$ la si prenda ortonormalizzata. Tali stati avranno cariche $k_1, k_2, \dots, k_j, \dots$ sotto V_n . L'operatore T porterà autostati relativi al considerato autovalore energetico in altri autostati dello stesso autovalore energetico:

$$V_n|\psi_j\rangle = e^{i\frac{2\pi k_j}{n}}|\psi_j\rangle, \quad T|\psi_j\rangle = \sum_j c_{ji}|\psi_i\rangle \quad (2.66)$$

Ora ripercorriamo il ragionamento precedente, presentato in (2.65), su un generico stato $|\psi_j\rangle$:

$$\begin{aligned} TV_n|\psi_j\rangle &= e^{-i\frac{2\pi}{n}} V_n T|\psi_j\rangle \\ e^{-i\frac{2\pi}{n}k_j} \sum_i c_{ji}|\psi_i\rangle &= e^{-i\frac{2\pi}{n}} \sum_i e^{-i\frac{2\pi}{n}k_i} c_{ji}|\psi_i\rangle \end{aligned} \quad (2.67)$$

Poiché gli stati sono ortonormali fra di loro, si ha:

$$e^{-i\frac{2\pi}{n}k_j} = e^{i\frac{2\pi}{n}(k_i-1)} \quad (2.68)$$

Dunque si ha la condizione:

$$k_j = -k_i + 1 \pmod{n} \quad (2.69)$$

Tale condizione ammette che vi siano solo due autostati, in quanto è una condizione " \mathbb{Z}_2 " ($k_j \rightarrow -k_j + 1 \rightarrow k_j$). Di conseguenza sono solo due gli autostati relativi allo stesso autovalore.

Per $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ non si ha un'anomalia di 't Hooft e difatti può esistere un autostato di H , T e V_n anche a $\theta = \pi$, il cui autovalore energetico è dunque non degenere (il gruppo di simmetria è solo $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$, non vi sono estensioni centrali). La condizione (65) può infatti essere risolta da $k = \frac{n+1}{2} \pmod{n}$. Mostriamo ora che nessun autovalore può essere non degenere sia a $\theta = 0$ che a $\theta = \pi$.

Si consideri un autostato $|\psi_0\rangle$ di H , T e V_n per $\theta = 0$ e un autostato $|\psi_\pi\rangle$ di H , T e V_n per $\theta = \pi$. Ripercorrendo il ragionamento che ha portato alla (2.69) e usando le relazioni di commutazione (2.60) (diverse a seconda del valore di θ), si osserva che per $\theta = 0$, k deve essere obbligatoriamente nullo, mentre per $\theta = \pi$, k deve essere $\frac{n+1}{2} \pmod{n}$, come mostrato prima:

$$V_n |\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle, \quad V_n |\psi_\pi\rangle = e^{i\frac{2\pi}{n}\frac{n+1}{2}} |\psi_\pi\rangle \quad (2.70)$$

Poichè $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_\pi\rangle$ hanno diverso autovalore rispetto a V_n , non sono connessi in modo continuo per θ che va da 0 a π . Gli stati \mathcal{T} -invarianti per $\theta = 0$ non lo sono più per $\theta = \pi$ e viceversa. Di conseguenza se a $\theta = 0$ un tale autovalore è non degenere, a $\theta = \pi$ lo deve essere (analogo discorso per un autovalore degenere).

Riepilogo del capitolo 2

In tale capitolo sono stati presi in esame esempi espliciti di modelli fisici in cui il gruppo di simmetria classico viene esteso centralmente in modo non banale quantizzando la teoria, in quanto compaiono dei fattori di fase non equivalenti a fattori di fase triviali, quindi non riassorbibili. Abbiamo fatto notare che in tutti i casi presentati il secondo gruppo di coomologia del gruppo di simmetria non è triviale, come deve essere necessariamente, per le argomentazioni portati in 1.2. Il secondo gruppo di coomologia è infatti in corrispondenza biunivoca con le estensioni centrali del gruppo di simmetria classico, dunque il secondo gruppo di coomologia deve essere necessariamente non banale se l'estensione centrale è non triviale.

Nel caso del fermione libero 0 + 1-dimensionale abbiamo mostrato esplicitamente la presenza dell'anomalia di 't Hooft, contestuale all'estensione centrale. Abbiamo mostrato la dualità infrarossa fra quest'ultimo modello e il modello bosonico della particella libera su S^1 .

Abbiamo potuto apprezzare che in tutti gli esempi riportati con estensione centrale non banale, gli autostati energetici presentano delle degenerazioni, come visto nella sezione 1.3. Si noti inoltre che alla particella su S^1 non si applica il Teorema di non degenerazione enunciato nella sezione 1.3, valido per sistemi unidimensionali aventi dimensione spaziale non compatta. Di conseguenza vi può essere degenerazione, come si è visto.

Solitamente, in meccanica quantistica, ci si aspetta che gli istantoni, che sono soluzioni classiche non banali, rimuovano la degenerazione degli autovalori energetici. Ma in questi casi non può avvenire, perché se l'estensione centrale è non triviale, allora necessariamente gli autovalori sono degeneri. Ci deve dunque essere una qualche forma di cancellazione

fra questi istantoni, che fa sì che non eliminino la degenerazione. Uno scopo del prossimo capitolo sarà verificare la degenerazione tramite un calcolo istantonico diretto in un caso particolare della particella su S_1 con potenziale periodico, presentato nel paragrafo 2.2.2.

Capitolo 3

Calcolo istantonico

Di solito gli istantoni eliminano la degenerazione degli stati fondamentali in modelli unidimensionali, come nel caso della doppia buca nella sezione 3.1. Mostriamo nella sezione 3.2 come ciò non sia sempre vero, consistentemente con la trattazione svolta nella sezione 2.2.2 della particella su S^1 con potenziale periodico. Verifichiamo nella sezione 3.3 con un calcolo istantonico diretto, per la cui impostazione si veda [14], la degenerazione degli stati energetici fondamentali di un caso particolare della particella sul cerchio, con potenziale $(V(q) = \cos(2q) + 1)$. Il ragionamento eseguito per tale potenziale è replicabile a un generico potenziale π -periodico a due minimi equidistanti. La causa di questa mancata degenerazione è da attribuirsi alla topologia non banale del sistema, che permette l'estensione centrale del gruppo di simmetria classico. Come mostrato alla fine della sezione 3.3., se si fosse compiuto un calcolo di questo tipo su una dimensione non compatta con lo stesso potenziale, si veda [5], la degenerazione degli stati energetici fondamentali sarebbe stata rimossa a favore di un insieme continuo di autovalori energetici. In tale capitolo, a differenza dei precedenti, si è mantenuta \hbar .

3.1 Doppia buca di potenziale

Consideriamo per prima cosa il caso trattato in letteratura, si veda [14] e [5], del potenziale simmetrico "a doppia buca" $V(x) = \frac{\lambda}{4}(x^2 - a^2)^2$, con $x \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

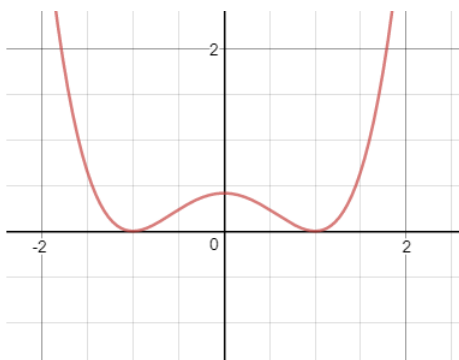


Figura 3.1: Potenziale a doppia buca simmetrica, su \mathbb{R}

A livello perturbativo in \hbar compare un'apparente degenerazione dello stato fondamentale, dovuta alla simmetria del problema. Infatti, essendo le correzioni perturbative in \hbar locali, si possono trovare con metodi perturbativi un set di autostati centrati in un minimo che sono relative agli stessi autovalori di un altro set di autostati centrati in un altro minimo, trattando il potenziale come composto da due buche di potenziale simmetriche separate. Ma, alla luce del Teorema di non-degenerazione riportato nella sezione 1.3, ci si può aspettare fin dal principio che la degenerazione venga rimossa in due livelli separati. Ciò accade a causa di fenomeni non perturbativi, ovvero gli istantoni, che per effetto "tunnel" vanno da un minimo all'altro. Il contributo dato da tali istantoni può essere calcolato con metodi semiclassici, ovvero per $\hbar \rightarrow 0$. Il livello fondamentale trovato con metodi perturbativi viene splittato in due autovalori che differiscono di un termine non perturbativo dell'ordine di $\mathcal{O}(e^{-\frac{cost}{\hbar}})$. Inoltre, grazie al Teorema dei nodi, sempre presentato in 1.3, ci si poteva aspettare anche che l'autofunzione relativa al livello più basso fosse senza nodi (e dunque pari rispetto a $x = 0$, grazie alla forma del potenziale considerato ¹) e l'altra presentasse un nodo (e dunque fosse dispari). Di conseguenza gli autostati relativi ai due livelli più bassi non possono essere gli autostati delle due buche di potenziale, in quanto centrati sui due minimi. Nell'intorno di ognuno dei due minimi (separatamente), si può approssimare il potenziale con un potenziale armonico. L'autostato relativo al livello fondamentale dell'oscillatore armonico è $\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$. L'autostato fondamentale della prima buca è $\psi_0(x+a)$ e quello relativo alla seconda è $\psi_0(x-a)$. In [14] è mostrato che l'autovalore energetico più basso del sistema complessivo ha come autostato la combinazione simmetrica di $\psi_0(x+a)$ e $\psi_0(x-a)$, mentre l'altro ha come autostato la combinazione antisimmetrica (devono infatti avere parità definita, come evidenziato nella nota [1]).

3.2 Potenziale periodico generico su S^1 : ruolo degli istantoni a priori

Le considerazioni fatte nella sezione precedente valgono per una dimensione non compatta \mathbb{R} . Se invece consideriamo il caso bosonico della particella di massa unitaria sulla circonferenza di raggio unitario della sezione 2.2, quest'ultimo presenta un grado di libertà compatto, $q \in S^1$, ove $q \sim q + 2\pi$. Non è dunque detto che valga la tesi del Teorema di non degenerazione, e che dunque gli autovalori energetici siano non-degeneri grazie al contributo degli istantoni. Già nel caso libero presentato in 2.2.1, con lagrangiana $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{\theta}{2\pi}\dot{q}$, i livelli energetici sono degeneri per $\theta = 0, \pi$. Vedremo che ciò persiste anche aggiungendo certi

¹Il sistema (e dunque l'hamiltoniana) è simmetrico rispetto alla riflessione spaziale $\mathcal{P} : x \mapsto -x$. Nella rappresentazione delle coordinate, l'operatore P che implementa \mathcal{P} è tale che $P\psi(x) = \psi(-x)$ (inoltre commuta con l'operatore hamiltoniano). Si consideri l'equazione agli autovalori:

$$H(\hat{x}, \hat{p})|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (3.1)$$

$$PH|\psi\rangle = E(P|\psi\rangle) \Rightarrow HP|\psi\rangle = E(P|\psi\rangle)$$

Di conseguenza, se $\psi(x)$ è autostato di un determinato livello energetico, pure $\psi(-x)$ lo sarà. Ma per il Teorema di non degenerazione, ciò non può accadere. Serve quindi che $\psi(x)$ sia autostato di P , quindi che sia pari o dispari (a seconda del numero di nodi).

tipi di potenziali periodico, per $\theta = \pi$. Traiamo ora delle conclusioni generali considerando un potenziale periodico generico $V(nq)$, $n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Nel paragrafo 2.2.2 si era visto che per $n \in 2\mathbb{Z}$ e $\theta = \pi$ il gruppo di simmetria classico è centralmente esteso, mentre per $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ no, per ogni valore di θ . Dalla sezione 1.3 sappiamo che se quantizzando una teoria il gruppo di simmetria classico si estende centralmente in modo non triviale, allora gli autostati energetici della teoria sono necessariamente degeneri. Di conseguenza gli istantoni devono dare contributo totale nullo per $n \in 2\mathbb{Z}$ e dunque non eliminare la degenerazione, perché quest'ultima deve necessariamente esserci se il gruppo di simmetria è esteso centralmente in maniera non triviale.

3.3 Istantoni in un caso particolare π -periodico su S^1

Nel caso particolare in cui il potenziale è $V(q) = \cos(2q) + 1$, si hanno, come nel caso della doppia buca, due minimi simmetrici in $q = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (la costante additiva è stata posta in maniera tale che nei minimi il potenziale sia nullo).

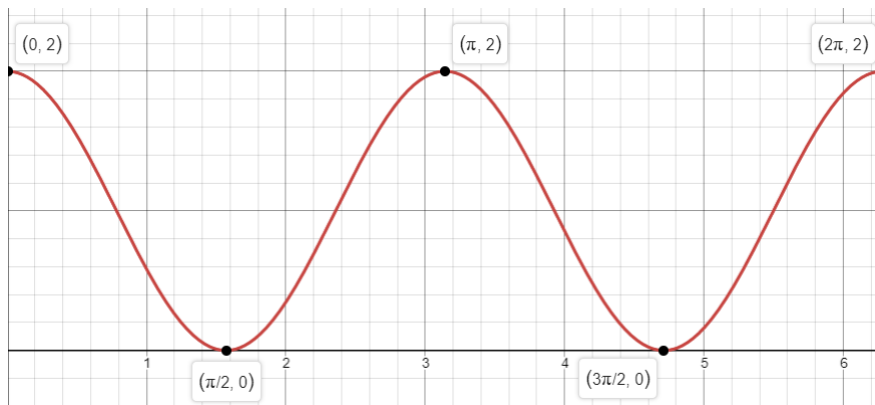


Figura 3.2: Potenziale a tempo ordinario $V(q) = \cos(2q) + 1$

L'autovalore energetico relativo allo stato fondamentale sembra presentare, una doppia degenerazione. I fenomeni di tunneling dovuti agli istantoni, potrebbero però portare alla rimozione di tale degenerazione, come nel caso della doppia buca. Mostriamo che ciò non accade e la degenerazione permane. Ciò è consistente con la discussione presentata nella sezione 3.2, dove si afferma che la degenerazione non può essere eliminata per potenziali $V(nq)$ con n pari.

Introduciamo per prima cosa l'utile strumento del propagatore nel formalismo del path integral (in tempo euclideo). Poi introdurremo un'approssimazione semiclassica utile per calcolare tali propagatori, chiamata approssimazione di punto-sella.

3.3.1 Propagatori in tempo euclideo

Consideriamo il generico propagatore $\langle q_f | e^{-\frac{itH}{\hbar}} | q_i \rangle$, che dà l'ampiezza di probabilità di andare da un punto q_i a un punto q_f nel tempo $t = (t_f - t_i)$. Un modo equivalente di

scriverlo è tramite il formalismo del path integral:

$$\langle q_f | e^{-\frac{itH}{\hbar}} | q_i \rangle = \int [\mathcal{D}q]_{q_i, t_i}^{q_f, t_f} e^{\frac{iS[q]}{\hbar}} \quad (3.2)$$

$[\mathcal{D}q]_{q_i, t_i}^{q_f, t_f}$ è la misura funzionale nello spazio delle funzioni $q(t)$ che sono in q_i al tempo t_i e in q_f al tempo t_f . Iniziamo passando dalla formulazione nel tempo reale del path integral alla formulazione Euclidea, eseguendo la "continuazione analitica" al tempo immaginario $t \mapsto -i\tau$ direttamente all'interno del propagatore :

$$\langle q_f | e^{-\frac{itH}{\hbar}} | q_i \rangle = \int [\mathcal{D}q]_{q_i, t_i}^{q_f, t_f} e^{\frac{iS[q]}{\hbar}} \mapsto \langle q_f | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | q_i \rangle = \int [\mathcal{D}q]_{q_i, \tau_i}^{q_f, \tau_f} e^{-\frac{S_E[q]}{\hbar}} \quad (3.3)$$

β è l'intervallo di tempo Euclideo ($\tau_f - \tau_i$). $S[q]$ è l'azione nella formulazione con il tempo reale e $S_E[q]$ è l'azione nella formulazione euclidea.

Troviamo ora l'azione euclidea nel caso da noi preso in esame. La lagrangiana è $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{\theta}{2\pi}\dot{q} - \cos(2q) - 1$. Si ha $\theta \sim \theta + 2\pi\hbar$. Ci si può accorgere di tal periodicità ripercorrendo il ragionamento eseguito nella sezione 2.2.1, dove si esamina la funzione di partizione (2.36) (in tale sezione si ricorda che si era posto $\hbar = 1$). L'esponenziale che compare in tale funzione di partizione è $e^{\frac{iS[q]}{\hbar}}$, ove compare il fattore $e^{\frac{\theta}{2\pi\hbar} \int dq}$. Se $\int dq \in 2\pi\mathbb{Z}$ si sta integrando su cammini che hanno punto partenza equivalente a quello di arrivo, e dunque la funzione di partizione non deve cambiare. Si nota ora che una variazione del parametro θ di un multiplo intero di $2\pi\hbar$ non cambia la fisica del sistema, dunque si ha l'identificazione $\theta \sim \theta + 2\pi\hbar$.²

Ci porremo in $\theta = \pi\hbar$, ovvero il valore del parametro per il quale si ha l'estensione centrale del gruppo di simmetria. Di conseguenza l'azione in tempo ordinario è $S[q] = \int_{t_i}^{t_f} (\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\dot{q} - \cos(2q) - 1) dt$. Passiamo ora al tempo euclideo:

$$iS[q] = i \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{\hbar}{2}\dot{q} - \cos(2q) - 1 \right) dt \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow[\frac{dq}{dt} = i \frac{dq}{d\tau}]{t = -i\tau} \\ -S_E[q] &= - \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{\hbar}{2}i\dot{q} + \cos(2q) + 1 \right) d\tau \quad (3.7) \end{aligned}$$

²Ci si può accorgere di tale periodicità anche guardando alla teoria quantizzata, esaminando l'operatore che implementa le traslazioni di q , che ha come generatore il momento della teoria $\hat{p} + \frac{\theta}{2\pi}$:

$$e^{\frac{i}{\hbar} \lambda (\hat{p} + \frac{\theta}{2\pi})} \quad (3.4)$$

con λ il parametro della traslazione, che quindi appartiene fra 0 e 2π . Per $\lambda = 2\pi$ tale operatore deve agire sullo spazio di Hilbert come l'identità, in quanto le funzioni d'onda sono periodiche di 2π . Dunque, considerando una funzione d'onda dello spazio di Hilbert associato alla teoria quantizzata:

$$e^{\frac{i}{\hbar} 2\pi (\hat{p} + \frac{\theta}{2\pi})} \psi(q) = e^{i\frac{\theta}{\hbar}} \psi(q + 2\pi) = e^{i\frac{\theta}{\hbar}} \psi(q) \quad (3.5)$$

Affiché l'operatore agisca come l'identità occorre dunque che $\theta \sim \theta + 2\pi\hbar$.

Risulta opportuno far notare che il \dot{q} all'interno della (3.6) è la derivata di q rispetto al tempo reale t , mentre il \dot{q} all'interno della (3.7) è la derivata di q rispetto al tempo immaginario τ . Notiamo che l'azione euclidea può essere riscritta nella seguente maniera:

$$S_E[q] = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^2 + \cos(2q) + 1 \right) d\tau + \frac{\hbar}{2} i (q_f - q_i) \quad (3.8)$$

Si noti che il potenziale $V(q) = \cos(2q) + 1$, presente nella formulazione a tempo reale, nel passaggio alla formulazione Euclidea è stato "ribaltato rispetto all'asse delle q ", nel potenziale $V_E(q) = -\cos(2q) - 1$, presente nella lagrangiana euclidea $L_E = \frac{1}{2} \dot{q}^2 + \frac{\hbar}{2} i \dot{q} + \cos(2q) + 1$. I minimi sono ora dei massimi, di energia potenziale $E = 0$.

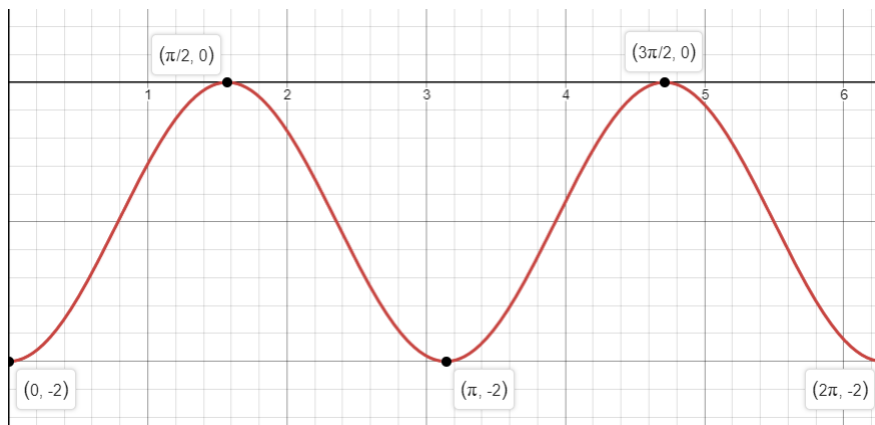


Figura 3.3: Potenziale a tempo euclideo $V(q) = -\cos(2q) - 1$

3.3.2 Approssimazione di punto-sella

Eseguiamo ora un'approssimazione semiclassica, utile al calcolo dei propagatori, chiamata approssimazione di punto-sella. Eseguiamo tale approssimazione in analogia con integrali ordinari aventi forma simile. Consideriamo l'integrale ordinario

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{S(x)}{\hbar}} dx \quad (3.9)$$

Se $S(x)$ ha dei minimi locali in alcuni punti x_i , I può essere calcolato usando il metodo del punto-sella. Per $\hbar \rightarrow 0$, l'integrale è dominato dai minimi locali di $S(x)$, attorno ai quali $S(x)$ può essere espansa in serie. Si può dunque scrivere I come una somma di termini, ognuno relativo a un minimo di $S(x)$, e in ogni termine è effettuata l'espansione in serie attorno a un minimo. Considerando solamente i termini fino al secondo ordine, si possono calcolare tali contributi considerandoli integrali gaussiani.

$$I = I_1 + I_2 + \dots \quad (3.10)$$

$$I_j = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{\hbar}(S(x_j) + \frac{S''(x_j)}{2}x^2 + \dots)} dx = e^{-\frac{S(x_j)}{\hbar}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{S''(x_j)}} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (3.11)$$

I termini anarmonici dell'espansione attorno agli x_j danno un contributo al rispettivo I_j dell'ordine di \hbar .

Consideriamo ora un generico propagatore in tempo euclideo $K_E = \langle q_f | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | q_i \rangle = \int [\mathcal{D}q]_{q_i, \tau_i}^{q_f, \tau_f} e^{-\frac{S_E[q]}{\hbar}}$, notando che ha forma simile rispetto agli integrali ordinari sopra considerati. Si può calcolare il propagatore K usando il metodo di punto-sella sopra descritto per gli integrali ordinari.

$S_E[q]$ è un funzionale a valori nello spazio delle traiettorie che sono in q_i al tempo t_i e in q_f al tempo t_f . K_E per $\hbar \rightarrow 0$ è uguale a una somma di contributi, ognuno relativo a una traiettoria che minimizza l'azione euclidea, ovvero tale che $\frac{\delta S_E}{\delta q(\tau)} = 0$. Tali traiettorie, minimizzanti l'azione, corrispondono alle soluzioni classiche delle equazioni del moto (con le condizioni al contorno che siano in q_i al tempo t_i e in q_f al tempo t_f). Dunque:

$$K_E = K_1 + K_2 + \dots \quad (3.12)$$

Ogni K_j è relativo a una soluzione classica $q_{cl,j}$, ed è calcolabile in approssimazione gaussiana, come mostrato in [Rattazzi]:

$$K_j = e^{-\frac{S_E[q_{cl,j}]}{\hbar}} \mathcal{N} \frac{1}{\sqrt{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_{cl,j})\right)}} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (3.13)$$

Si nota che l'esponente $S(x_j)$ in (3.11) è stata sostituito dal funzionale $S_E[q]$ calcolato sulla j -esima soluzione classica $q_{cl,j}$. Inoltre, la derivata seconda di $S(x)$ all'interno dell'integrale in (3.11) viene sostituita dalla derivata funzionale seconda di $S_N[q]$ calcolata in $q_{cl,i}$, uguale a $\sqrt{\frac{1}{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_{cl,i})\right)}}$ per una costante di normalizzazione \mathcal{N} . Sono presenti anche correzioni anarmoniche dell'ordine di \hbar .

3.3.3 Calcolo dei propagatori fra i massimi del potenziale euclideo

Il nostro scopo sarà quello di calcolare i seguenti propagatori, nel limite $\beta \rightarrow \infty$:

$$\left\langle \frac{\pi}{2} \left| e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} \right| \frac{\pi}{2} \right\rangle, \left\langle \frac{3\pi}{2} \left| e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} \right| \frac{3\pi}{2} \right\rangle, \left\langle \frac{3\pi}{2} \left| e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} \right| \frac{\pi}{2} \right\rangle, \left\langle \frac{\pi}{2} \left| e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} \right| \frac{3\pi}{2} \right\rangle.$$

Per simmetria, i primi due sono uguali fra di loro, così come gli ultimi due (sempre fra di loro). Faremo uso del metodo di punto-sella introdotto nel paragrafo 3.3.2. Si noti che $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ sono i massimi del potenziale euclideo, che corrispondono ai minimi del potenziale nella formulazione a tempo ordinario. Soluzioni istantoniche che passano per effetto tunnel da un minimo del potenziale ordinario all'altro sono ora traiettorie che vanno da un massimo del potenziale euclideo all'altro.

Soluzioni istantoniche

Occorre determinare le soluzioni classiche delle equazioni del moto, per poter implementare il metodo di punto-sella. Per ottenerle, sfrutteremo la conservazione dell'energia. Il

termine lineare in \dot{q} presente nella lagrangiana euclidea $L_E = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{\hbar}{2}i\dot{q} + \cos(2q) + 1$ non gioca alcun ruolo nella dinamica classica del problema. Inoltre il potenziale periodico in formulazione euclidea è $V_E(q) = -\cos(2q) - 1$, come visto alla fine del paragrafo 3.3.1. Di conseguenza l'energia è $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \cos(2q) - 1$. Vogliamo trovare delle soluzioni che partano da un massimo del potenziale euclideo e arrivino a un altro massimo del potenziale euclideo. In tali punti ($\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$) l'energia potenziale è pari a 0. Le soluzioni classiche $q(\tau)$, risolvono dunque la seguente equazione differenziale:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \cos(2q) - 1 = 0 \quad (3.14)$$

Notiamo innanzitutto le due soluzioni triviali, costanti nel tempo:

$$q \equiv \frac{\pi}{2}, q \equiv \frac{3\pi}{2} \quad (3.15)$$

Esplicitiamo ora \dot{q} :

$$\dot{q} = \pm\sqrt{2(1 + \cos(2q))} \quad (3.16)$$

Scegliamo il segno + e risolviamo tale equazione differenziale per parti:

$$\int \frac{dq}{\sqrt{1 + \cos(2q)}} = \sqrt{2}\tau + \text{cost} \quad (3.17)$$

Che porge come soluzione:

$$q_1(\tau) = \arcsen\left(\frac{e^{4(\tau-\tau_0)} - 1}{e^{4(\tau-\tau_0)} + 1}\right) \quad (3.18)$$

Tale soluzione classica non triviale, chiamata istantone, parte da $q = -\frac{\pi}{2}$ a $\tau = -\infty$, passa per $q = 0$ a $\tau = \tau_0$ e arriva a $q = \frac{\pi}{2}$ a $\tau = \infty$.

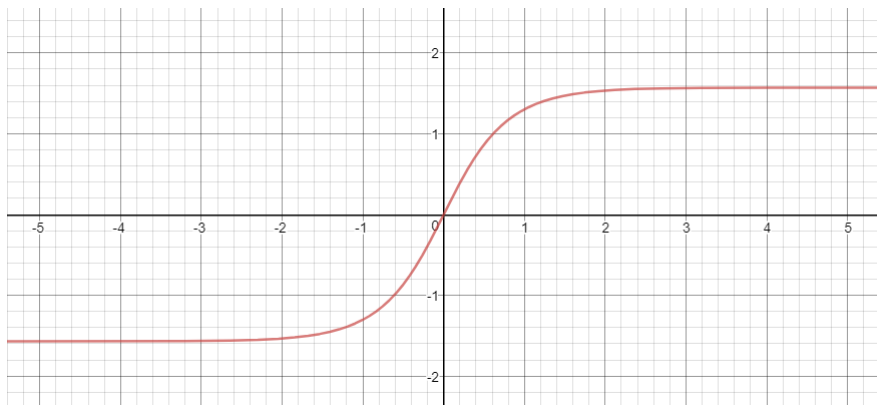


Figura 3.4: Istantone $q_1(\tau)$, centrato in $\tau_0 = 0$.

Notiamo ora che esistono altre tre soluzioni di (3.14) oltre a q_1 :

- la soluzione in (3.16) relativa al segno $-$. Si tratta di q_1 "percorsa in senso temporale opposto". Essa parte da $q = +\frac{\pi}{2}$ a $\tau = -\infty$, passa per $q = 0$ a $\tau = -\tau_0$ e arriva a $q = -\frac{\pi}{2}$ a $\tau = \infty$. Chiameremo q_{1+} la soluzione (17) e q_{1-} la soluzione (17) in cui viene posto $-(\tau - \tau_0)$ al posto di $(\tau - \tau_0)$.

$$q_{1-}(\tau) = \arcsen\left(\frac{e^{-4(\tau-\tau_0)} - 1}{e^{-4(\tau-\tau_0)} + 1}\right) \quad (3.19)$$

- Vi è poi la soluzione $q_{2+} = q_{1+} + \pi$, che parte da $q = +\frac{\pi}{2}$ a $\tau = -\infty$, passa per $q = 0$ a $\tau = \tau_0$ e arriva a $q = \frac{3\pi}{2}$ a $\tau = \infty$.
- Infine vi è la soluzione $q_{2-} = -q_{1+} + \pi$, ottenuta percorrendo in verso temporale opposto la soluzione q_{2+} . Essa parte da $q = +\frac{3\pi}{2}$ a $\tau = -\infty$, passa per $q = 0$ a $\tau = \tau_0$ e arriva a $q = \frac{\pi}{2}$ a $\tau = \infty$.

Notiamo che le soluzioni $q_{1\pm}, q_{2\pm}$, possono essere viste su $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ nel seguente modo:

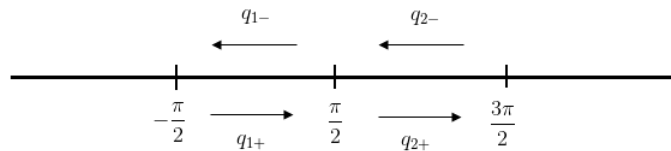


Figura 3.5: Istantoni su $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Equivalentemente, possiamo rappresentare tali soluzioni su S^1 , ricordando che $q \in S^1 \sim \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

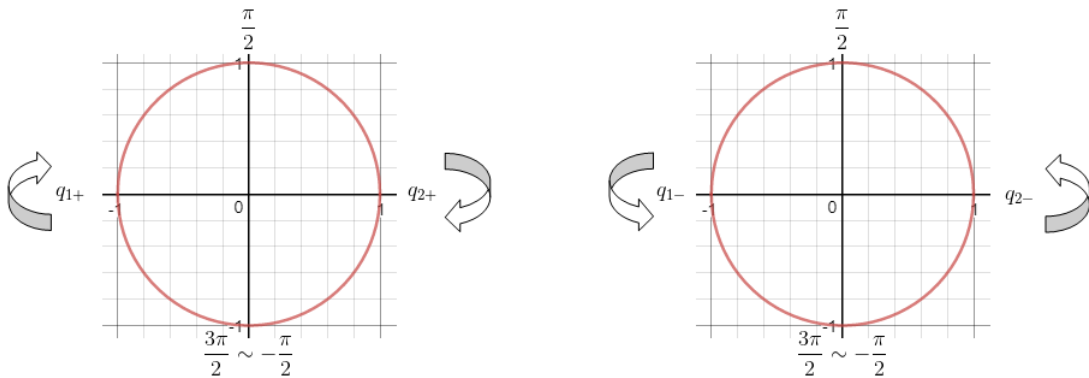


Figura 3.6: Istantoni su S^1 .

Nell'appendice B si dimostrerà che per $|\tau - \tau_0| \rightarrow \infty$, vale

$$\left| q(\tau)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \right| \approx \sqrt{2}e^{-2(\tau-\tau_0)} \ll 1 \quad (3.20)$$

$q(\tau)$ indica un generico istantone fra i quattro menzionati sopra. Di conseguenza, gli istantoni sono ben localizzati nel tempo Euclideo, dove esistono per un breve intervallo $\Delta\tau \sim \frac{1}{2}$, molto minore di $\beta \rightarrow \infty$. Per tale limite si ha dunque che $q(\tau) \approx \pm\frac{\pi}{2}$: gli istantoni sono ben approssimati da funzioni a gradino in tale limite.

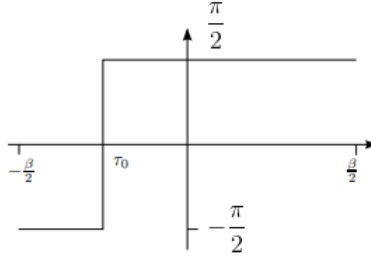


Figura 3.7: Istantone q_{1+} nel limite $\beta \rightarrow \infty$.

Valore dell'azione euclidea sugli istantoni

Calcoliamo il valore dell'azione $S_E[q] = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \cos(2q) + 1\right) d\tau + \frac{\hbar}{2}i(q_f - q_i)$ su tali quattro soluzioni classiche. Vi saranno due contributi: uno uguale per tutte quattro $\int_{\tau_i}^{\tau_f} \left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \cos(2q)\right) d\tau$, con $\tau_f \rightarrow +\infty$ e $\tau_i \rightarrow -\infty$, e un altro contributo che cambia a seconda che la soluzione sia di tipo "+" (ovvero $q_f - q_i = \pi$) o di tipo "-" ($q_f - q_i = -\pi$):

$$\frac{\hbar}{2}i(q_f - q_i) = \begin{cases} i\frac{\hbar}{2}\pi, & \text{soluzione +} \\ -i\frac{\hbar}{2}\pi, & \text{soluzione -} \end{cases} \quad (3.21)$$

Il termine comune alle quattro soluzioni lo si può computare notando che, grazie alla conservazione dell'energia, vale:

$$\cos(2q) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - 1 \quad (3.22)$$

Dunque, si può procedere al calcolo sostituendo $\cos(2q)$ con la (3.22) all'interno dell'integrale e cambiando variabile. Il calcolo è stato eseguito con già $\tau_f = +\infty$ e $\tau_i = -\infty$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \cos(2q)\right) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{q}^2 d\tau = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dot{q}(q) dq = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1 + \cos(2q))} dq = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(q) dq = 4 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Si è fatto uso della (3.16), con il segno + perchè l'integrale è positivo. Si noti che prendendo una soluzione di tipo 2 invece che di tipo 1, si avrebbero avuto gli estremi traslati in avanti di π . Però di conseguenza si sarebbe dovuto prendere $-\cos(q)$ al posto di $\cos(q)$ nell'ultimo passaggio (sempre per ottenere un risultato positivo), ottenendo comunque 4.

La parte del propagatore euclideo dovuta agli istantoni è quindi proporzionale a $e^{-\frac{S_E}{\hbar}} = e^{-\frac{4}{\hbar}}$. Di conseguenza gli effetti associati agli istantoni sono non perturbativi in \hbar , quindi non catturabili con tecniche perturbative.

Le sequenze di istantoni sono quasi-soluzioni classiche: gas diluito di istantoni

Date le soluzioni classiche istantoniche, tali che $\frac{\delta S_E}{\delta q}|_{q_{1,2\pm}} = 0$, dimostreremo che le sequenze di istantoni sono quasi-soluzioni. Per esempio consideriamo la sequenza q_{1+2+} data da q_{1+} , centrato in τ_0 e da q_{2+} , centrato in $\tau_1 \gg \tau_0$. Per $|\tau - \tau_0| \rightarrow \infty$ si ha che $q_{2+} \approx \frac{3\pi}{2} f(\tau - \tau_0)$, con $f(\tau - \tau_0) = 1 - e^{-2(\tau - \tau_0)}$, come suggerisce la (3.20). Dunque la sequenza q_{1+2+} nel limite $\tau \gg \tau_1 \gg \tau_0$ (sempre con $|\tau - \tau_0| \rightarrow \infty$) è ben approssimata da:

$$q_{1+2+} \approx \frac{3\pi}{2} f(\tau - \tau_0) f(\tau_1 - \tau) \quad (3.24)$$

Data questa forma della sequenza q_{1+2+} , si può mostrare (si veda [14]), che la derivata funzionale prima dell'azione è:

$$\frac{\delta S_E}{\delta q}|_{q_{1+2+}} \approx e^{-2(\tau_1 - \tau_0)} \quad (3.25)$$

Mostreremo più tardi, nel penultimo paragrafo di questa sezione, che $|\tau_1 - \tau_0| \approx e^{\frac{S_E}{\hbar}}$. Dunque il termine in (3.25) è dell'ordine di $e^{-2\exp(\frac{S_E}{\hbar})}$, molto più piccolo di ogni altro contributo che stiamo considerando, e la sequenza q_{1+2+} la considereremo una quasi-soluzione. Tale ragionamento è valido per ogni sequenza di istantoni ben separati temporalmente. Ovvero, gli istanti su cui sono centrati gli istantoni devono essere a una distanza $\gg 1$. Tale configurazione è detta di "gas diluito di istantoni".

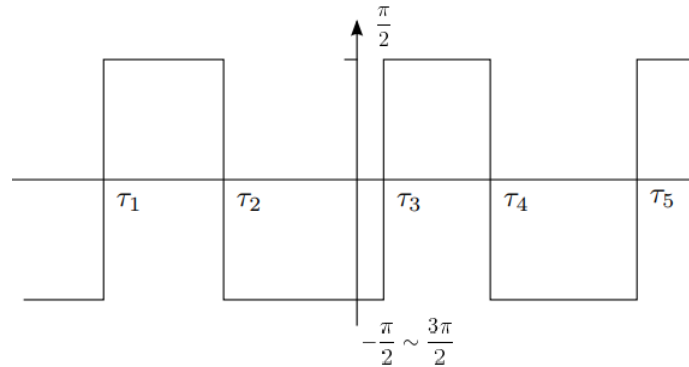


Figura 3.8: Una quasi-soluzione composta da tre istantoni di tipo "+" e da due di tipo "-", in cui non si è fatta distinzione fra soluzioni di tipo 1 e di tipo 2. Vale $\tau_1 \gg \tau_2 \gg \tau_3 \gg \tau_4 \gg \tau_5$.

Contributo del gas diluito di istantoni nell'approssimazione di punto sella dei propagatori

Torniamo all'approssimazione di punto sella (3.12) dei propagatori fra i massimi del potenziale euclideo. Ogni sequenza di istantoni nella configurazione di gas diluito di istantoni contribuirà con un proprio addendo K_j in tale approssimazione. Cerchiamo ora di capire che forma ha questo contributo, guardando uno per uno i vari termini presenti in (B):

- Ogni istantone che fa parte della quasi-soluzione è ben localizzato temporalmente intorno a un istante di tempo Euclideo τ_j . A parte tali istanti, la quasi-soluzione è sostanzialmente sempre in $q = \pm \frac{\pi}{2}$ (a seconda dell'intervallo $\tau_{j+1} - \tau_j$ considerato), dunque l'azione S_E la si può considerare nulla in tali intervalli. Il contributo S_N all'esponente nell'approssimazione gaussiana (B) di una quasi-soluzione composta da N istantoni sarà dunque:

$$S_N = S_1 + \dots + S_j + \dots \rightarrow e^{-\frac{S_N}{\hbar}} = e^{-\frac{S_1 + \dots + S_j + \dots}{\hbar}} \quad (3.26)$$

Dove S_j è l'azione calcolata sull' j -esimo istantone. Risulta opportuno far notare che, alla luce della discussione sull'azione S_E calcolata sulle quattro soluzioni istantoniche, S_N può essere così riscritta (si riveda (3.21)):

$$\begin{aligned} S_N &= N \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^2 + \cos(2q) \right) d\tau + n_+ \left(i \frac{\pi}{2} \right) \hbar + n_- \left(-i \frac{\pi}{2} \right) \hbar = \\ &= 4N + n_+ \left(i \frac{\pi}{2} \right) \hbar + n_- \left(-i \frac{\pi}{2} \right) \hbar \end{aligned} \quad (3.27)$$

Con n_+ il numero di istantoni di tipo "+" presenti all'interno della quasi-soluzione e n_- quello di soluzioni di tipo "-". Quindi e^{S_N} è ora riscrivibile come

$$e^{-\frac{S_N}{\hbar}} = e^{-\frac{4N}{\hbar}} (i)^{n_-} (-i)^{n_+} = i^{(n_- - n_+)} e^{-\frac{4N}{\hbar}} \quad (3.28)$$

- Discutiamo ora del fattore che coinvolge il determinante. Sottolineiamo nuovamente che, a parte brevi intervalli di transizione, la quasi-soluzione è quasi sempre localizzata in uno dei minimi $\pm \frac{\pi}{2}$, ove si ha $V''(\pm \frac{\pi}{2}) = 2$. Se si avesse $V''(q) = 2$ in tutto l'intervallo di tempo Euclideo β , allora si avrebbe il fattore di un oscillatore armonico di massa unitaria e con pulsazione $\omega = 2$, calcolato in [14]:

$$\mathcal{N} \sqrt{\frac{1}{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_{sol}) \right)}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh(\omega\beta)}} \approx \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\omega\beta}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi\hbar}} e^{-\beta} \quad (3.29)$$

L'approssimazione finale è stata eseguita per $\beta \rightarrow \infty$.

Ci aspettiamo che ogni transizione da un minimo all'altro di un istantone corregga il

prefattore dell'oscillatore armonico con un fattore R , che troveremo esplicitamente nell'appendice 2.

$$\mathcal{N} \sqrt{\frac{1}{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_{sol})\right)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi\hbar}} e^{-\beta} R^N \quad (3.30)$$

Tale fattore si vedrà essere uguale per tutte e quattro le soluzioni istantoniche. Per una quasi-soluzione composta da N istantoni, il fattore correttivo sarà pari a R^N .

- In ultima istanza, dobbiamo sommare su tutte le possibili configurazioni date dai possibili istanti $\tau_j \in (-\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2})$ su cui sono centrati gli istantoni. L'approssimazione da noi fatta rimane buona finchè $\tau_1 \ll \tau_2 \ll \tau_N$. Quindi occorre moltiplicare tutto il contributo K_i per il seguente integrale:

$$\int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} d\tau_N \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\tau_N} d\tau_{N-1} \dots \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\tau_2} d\tau_1 = \frac{\beta^N}{N!} \quad (3.31)$$

Considerando tutti i vari punti descritti sopra, il contributo dato da una quasi soluzione composta da N istantoni, con n_+ di tipo $+$ e n_- di tipo $-$ è il seguente:

$$\frac{i^{(n_- - n_+)}}{N!} \sqrt{\frac{2}{\pi\hbar}} e^{-\beta} (\beta R e^{-\frac{4}{\hbar}})^N \quad (3.32)$$

Calcolo dei propagatori

Siamo ora pronti al calcolo dei propagatori $\langle \frac{\pi}{2} | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | \frac{\pi}{2} \rangle$ e $\langle \frac{3\pi}{2} | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | \frac{\pi}{2} \rangle$, tramite il metodo di punto sella. Ci porremo in configurazione di gas diluito di istantoni. Cominciamo dal primo: $\langle \frac{\pi}{2} | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | \frac{\pi}{2} \rangle$.

Consideriamo la rappresentazione degli istantoni su S^1 . Una quasi-soluzione, per poter andare da $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, deve essere composta da un numero pari N di istantoni. Di conseguenza, chiamando K_N^{tot} la somma dei contributi dati dalle quasi-soluzioni composte da N istantoni, il propagatore può essere così computato:

$$\langle \frac{\pi}{2} | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | \frac{\pi}{2} \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi\hbar}} e^{-\beta} \sum_{N=pari} K_N^{tot} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (3.33)$$

I termini in $\mathcal{O}(\hbar)$ sono le correzioni anarmoniche dei contributi dell'ordine di \hbar . Mostriamo ora che $K_N^{tot} = 0, \forall N$ pari $\neq 0$. Concentriamoci sul termine con $N = 2$. Vi sono quattro percorsi per andare da $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$:

- con un istantone q_{2+} seguito da un istantone q_{1+} .
- con un istantone q_{2+} seguito da un istantone q_{2-} .
- con un istantone q_{1-} seguito da un istantone q_{1+} .

- con un istantone q_{1-} seguito da un istantone q_{2-} .

Ogni "percorso" contribuisce a K_2^{tot} con un addendo del tipo:

$$\frac{(Re^{-4}\beta)^2}{2!} i^{(n_+-n_-)} \quad (3.34)$$

L'unica cosa che cambia da un percorso all'altro è il fattore $i^{(n_+-n_-)}$, che per il primo e il quarto è pari a -1 e per il secondo e terzo è pari a 1 . Quindi:

$$K_2^{tot} = \frac{(Re^{-\frac{4}{\hbar}}\beta)^2}{2!} (1 - 1 - 1 + 1) = 0 \quad (3.35)$$

Consideriamo $N = 4$: dopo $N = 2$ istantoni, si è necessariamente tornati a $\frac{\pi}{2}$. Di conseguenza si è tornati alla situazione affrontata per $N = 2$. Non è dunque difficile convincersi che vale:

$$K_4^{tot} = \frac{(2!)^2}{4!} K_2^{tot} K_2^{tot} = \frac{(2!)^2}{4!} (K_2^{tot})^2 = 0 \quad (3.36)$$

Per N pari > 2 si può ragionare in identico modo e ottenere per costruzione:

$$K_N^{tot} = \frac{(2!)^N}{N!} (K_2^{tot})^N = 0 \quad (3.37)$$

L'unico contributo non nullo nella sommatoria in (3.33) è dunque quello con $N = 0$, dovuto alla soluzione classica triviale $q \equiv \frac{\pi}{2}$:

$$\left\langle \frac{\pi}{2} \left| e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} \right| \frac{\pi}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi \hbar}} e^{-\beta} K_0^{tot} = \sqrt{\frac{2}{\pi \hbar}} e^{-\beta} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (3.38)$$

Si è quindi ottenuti lo stesso risultato che si sarebbe ottenuto rimanendo tutto il tempo sul fondo della buca del potenziale nella formulazione atempo ordinario, approssimata a un oscillatore armonico con $m = 1$ e $\omega = 2$. Mostriamo ora che la degenerazione del livello energetico dello stato fondamentale non è stata rimossa. Prendiamo una base completa ortonormale di autovettori dell'hamiltoniana ϕ_n . Il propagatore può essere così scritto:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\pi}{2} \left| e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} \right| \frac{\pi}{2} \right\rangle &= \sum_{n,m} \left\langle \frac{\pi}{2} \left| e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} \right| \phi_n \right\rangle \left\langle \phi_n \left| e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} \right| \psi_m \right\rangle \left\langle \phi_m \left| e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} \right| \frac{\pi}{2} \right\rangle = \\ &= \sum_n \phi_n^* \left(\frac{\pi}{2} \right) \phi_n \left(\frac{\pi}{2} \right) e^{-\frac{\beta E_n}{\hbar}} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Confrontiamo ora, nel limite $\beta \rightarrow \infty$ la (3.39) e la (3.38). Per $\beta \rightarrow \infty$ sopravvivono nella sommatoria (3.39) solo i termini corrispondenti ai livelli energetici più bassi. Con evidenza, essendovi in (3.38) un solo termine, l'autovalore corrispondente allo stato fondamentale è $E_0 = \hbar = \frac{\hbar \omega}{2}$ (si ricorda $\omega = 2$). A rigore si sarebbero dovute considerare le correzioni anarmoniche, che sono che sono però uguali per entrambe le buche e quindi non avrebbero cambiato il discorso. Tale autovalore, a differenza del caso della doppia buca simmetrica, non si è splittato in un doppietto grazie al tunneling degli istantoni, ma ha conservato la doppia degenerazione. Inoltre, sempre dal confronto fra la (3.38) e la (3.39), si ha che

$$\phi_0^* \left(\frac{\pi}{2} \right) \phi_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} \quad (3.40)$$

Se consideriamo $\psi_0(q - \frac{\pi}{2}) = (\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega(q-\frac{\pi}{2})^2}{2\hbar}}$, ovvero l'autostato del livello fondamentale dell'oscillatore armonico centrata in $\frac{\pi}{2}$, notiamo che soddisfa la (3.40). Si ottiene lo stesso risultato che si otterrebbe non considerando la possibilità degli istantoni che passano da una buca all'altra del potenziale ordinario, dunque considerando solo le soluzioni triviali delle equazioni del moto classiche (3.15). Questo perchè il contributo degli istantoni si cancella. Calcolando l'ampiezza di probabilità $\langle \frac{3\pi}{2} | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | \frac{3\pi}{2} \rangle$ si ottengono analoghi risultati.

Si nota che l'autovalore $E_0 = 1$ presenta una doppia degenerazione, e le due autofunzioni degeneri sono entrambe delle ψ_0 , ma una è e l'altra in $\frac{3\pi}{2}$, ovvero $\psi_0(q - \frac{\pi}{2})$ e $\psi_0(q - \frac{3\pi}{2})$.

Consideriamo ora $\langle \frac{3\pi}{2} | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | \frac{\pi}{2} \rangle$. In esso le quasi-soluzioni che danno un contributo al propagatore sono composte da un numero dispari di istantoni. Per ragionamenti analoghi ai precedenti si dimostra che

$$K_1^{tot} = \frac{(Re^{-\frac{4}{\hbar}\beta})}{1!}(i - i) = 0 \quad (3.41)$$

Per N dispari > 1 vale:

$$K_N^{tot} = K_1^{tot} \frac{(2!)^{N-1}}{N!} (K_2^{tot})^{N-1} = 0 \quad (3.42)$$

Dunque è nulla l'ampiezza di probabilità di passare da un minimo all'altro del potenziale ordinario: gli istantoni si cancellano l'un l'altro dando un contributo globale nullo.

$$\langle \frac{3\pi}{2} | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | \frac{\pi}{2} \rangle = 0 \quad (3.43)$$

È lo stesso risultato che si otterrebbe non considerando l'esistenza di istantoni che passano per effetto tunnel da un minimo all'altro.

Validità della configurazione a gas diluito di istantoni

Ci si può chiedere se l'essersi posti in configurazione di gas diluito di istantoni sia un'approssimazione davvero valida ai fini del calcolo del propagatore o se sia solo una soluzione di comodo. Guardiamo la densità di istantoni, ovvero il numero di istantoni nel tempo β . Per far ciò, consideriamo un generico propagatore fra due minimi del potenziale ordinario, del tipo di quelli sopra considerati, e scordiamoci un momento che ci possono essere eventuali cancellazioni. La serie a cui sarà uguale tale propagatore è $\sum \frac{(Re^{-\frac{4}{\hbar}\beta})^n}{n!}$ (rispristiniamo \hbar per renderci conto degli ordini di grandezza). Tale serie (di tipo esponenziale), è dominata dai termini con $n \sim Re^{-\frac{4}{\hbar}\beta}$, che saranno i termini che daranno un contributo maggiore. Quindi una buona approssimazione della densità di istantoni può essere fatta considerando che vi possano essere solo quasi-soluzioni composte da tale numero n di istantoni:

$$\rho = \frac{n}{\beta} = Re^{-\frac{4}{\hbar}\beta} \quad (3.44)$$

che è una densità esponenzialmente piccola. Guardiamo dunque la loro separazione media nel tempo, chiededoci in quale intervallo di tempo $\Delta\tau$ si può osservare solo un istantone:

$$\rho\Delta\tau = 1 \quad (3.45)$$

\Rightarrow

$$\Delta\tau = \frac{1}{\rho} = \frac{e^{\frac{4}{\hbar}}}{R} \quad (3.46)$$

che è indipendente da β . Tale separazione temporale fra istantoni è esponenzialmente grande nell'approssimazione semiclassica $\hbar \rightarrow 0$, giustificando l'approssimazione del gas diluito di istantoni. Inoltre tale separazione temporale $\sim e^{\frac{4}{\hbar}}$ rende la derivata funzionale di $S_E[q]$ in (3.25) molto più che esponenzialmente piccola, giustificando quindi il fatto di prendere le composizioni di istantoni come quasi-soluzioni.

Generalizzazione a un generico potenziale π -periodico a due minimi equidistanti

Il ragionamento sopra eseguito è indipendente dalla forma del potenziale, purché sia π -periodico e con due minimi equidistanti (quindi distanti π uno dall'altro). Si sta dunque parlando del caso $n = 2$ del generico potenziale periodico $V(nq)$, trattato nella sezione 2.2.2. La forma delle soluzioni istantoniche che vanno da un minimo all'altro del potenziale a tempo ordinario varieranno a seconda del potenziale, ma si avranno sempre 4 istantoni, di cui due di tipo $+$ e due di tipo $-$, che percorrono una distanza in modulo pari a π . Tali istantoni, per l'intervallo di tempo euclideo β che va a ∞ , sono ben approssimati da funzioni a gradino.

Il valore dell'azione euclidea su tali istantoni varierà a seconda del caso preso in esame, ma vi sarà sempre un contributo uguale a tutti gli istantoni e un contributo che varia a seconda che l'istantone sia di tipo $+$ o di tipo $-$:

$$\frac{\hbar}{2}i(q_f - q_i) = \begin{cases} i\frac{\hbar}{2}\pi, & \text{soluzione } + \\ -i\frac{\hbar}{2}\pi, & \text{soluzione } - \end{cases} \quad (3.47)$$

Calcolando i propagatori fra i minimi del potenziale ordinario, si farà sempre uso dell'approssimazione semiclassica del punto-sella, nella configurazione a gas diluito di istantoni. Dunque il contributo dato al propagatore una quasi-soluzione composta da N istantoni, con n_+ di tipo $+$ e n_- di tipo $-$ sarà il seguente, con ω , S_0 e R dipendenti dal potenziale preso in esame. :

$$\frac{i^{(n_- - n_+)}}{N!} \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\beta} (\beta R e^{-\frac{S_0}{\hbar}})^N \quad (3.48)$$

Si noti che è sempre presente il fattore oscillante che causa le cancellazioni degli istantoni nel calcolo dei propagatori fra i minimi del potenziale ordinario, come mostrato nel paragrafo "Calcolo dei propagatori".

Si giunge alle stesse conclusioni raggiunte nel caso particolare sopra trattato: l'ampiezza di probabilità di passare da un minimo all'altro del potenziale ordinario è nulla, e l'autostato fondamentale ottenuto con metodi perturbativi in \hbar è doppiamente degenero. Gli istantoni si cancellano, e si ottengono gli stessi risultati che si otterrebbero non considerandoli.

Ruolo della topologia del sistema: confronto con il potenziale periodico su \mathbb{R}

In [5] è mostrato che, nel caso di un potenziale periodico su \mathbb{R} , del tipo della figura sottostante (i minimi sono stati indicati con numeri interi per semplicità), gli istantoni splittano l'infinita degenerazione dello stato fondamentale in un continuo di autostati energetici, dipendenti da un parametro $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$E(\phi) = \frac{1}{2}\hbar\omega + 2Re^{-\frac{S_0}{\hbar}} \cos(\phi) \quad (3.49)$$

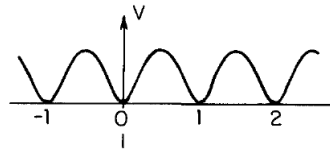


Figura 3.9: Potenziale periodico a tempo ordinario su \mathbb{R} , i minimi sono stati posti su coordinate intere.

Per una trattazione più approfondita si veda l'appendice C. La differenza fra tale caso e il caso sopra trattato del generico potenziale π -periodico a due minimi equidistanti è la topologia non banale di S^1 . Il fatto è che S^1 non è semplicemente connesso, quindi ci sono più percorsi per andare da un punto all'altro di S^1 . Per esempio, per andare da $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$ vi sono due strade: l'istantone q_{2+} e l'istantone q_{1-} , grazie al fatto che $-\frac{\pi}{2} \sim \frac{3\pi}{2}$. La somma dei due contributi si cancella, come si evince dalla (3.41).

Se il grado di libertà fosse stato in \mathbb{R} piuttosto che in $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, vi sarebbe stato un unico percorso (l'istantone q_{2+}) e non vi sarebbe stata alcuna cancellazione. L'altro istantone q_{1-} sarebbe esistito comunque ma non avrebbe avuto un punto di arrivo equivalente a $\frac{\pi}{2}$. Notiamo che quest'ultimo istantone è di tipo "-", che quindi porta, nel caso in S^1 un contributo opposto a quello di tipo "+" dato da q_{2+} . Per ogni istantone collegante due minimi di tipo " \pm ", esiste un istantone di tipo " \mp " che fa lo stesso. Di conseguenza il loro contributo s'annichilisce.

Conclusione

In questa tesi abbiamo esaminato il fenomeno dell'estensione centrale del gruppo di simmetria in cui si può imbattere quantizzando una teoria classica, mostrando nel caso esplicito del fermione libero 0 + 1-dimensionale la sua contestualità con un'anomalia di 't Hooft. Abbiamo inoltre fatto notare che non possono avvenire estensioni centrali in sistemi a una dimensione non compatta.

Si è mostrata l'importanza del secondo gruppo di coomologia del gruppo di simmetria classico, in quanto i suoi elementi sono in corrispondenza biunivoca con le possibili estensioni centrali in cui può incorrere tale gruppo. La non trivialità del secondo gruppo di coomologia assicura la possibilità di un'estensione centrale.

Un altro punto centrale è stata l'osservazione che una teoria interessata da un'estensione centrale non banale possiede necessariamente solo autostati energetici degeneri.

Sono stati analizzati alcuni modelli quantomeccanici, che si sono visti soggetti a estensioni centrali non banali. Il primo modello studiato è stato il fermione 0 + 1-dimensionale, in cui si è mostrato che l'estensione centrale non banale è contestuale a un'anomalia di 't Hooft. Successivamente è stata esaminata la particella su S^1 , prima nel caso libero e poi con un generico potenziale periodico $V(nq)$, con $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Nel caso libero e nel caso con potenziale periodico con n pari compare un'estensione centrale non banale. Nel caso del potenziale periodico con n dispari no. Si è visto come il fermione 0 + 1-dimensionale e la particella libera su S^1 siano legati da una dualità infrarossa. Consistentemente con le osservazioni sopra, il secondo gruppo di coomologia è sempre stato non triviale. Inoltre gli autostati energetici nei casi interessati da un'estensione centrale sono sempre stati degeneri.

Ci si è poi interrogati sul ruolo che rivestono gli istantoni, che sono soliti rimuovere eventuali degenerazioni apparenti degli stati energetici fondamentali. Si deve invece cancellare il loro contributo quando avviene un'estensione centrale non banale, per garantire la degenerazione degli stati energetici. Si è vista in concreto tale cancellazione con un calcolo istantonico diretto nel caso della particella su S^1 con un potenziale π -periodico a due minimi equidistanti. Risulta d'interesse estendere tale calcolo istantonico a un potenziale $V(nq)$ qualsiasi, verificando la cancellazione per n pari, consistentemente con quanto affermato per argomenti di estensioni centrali.

Le estensioni centrali del gruppo di simmetria costituiscono dunque un potente strumento

per prevedere la comparsa di un'anomalia di 't Hooft nella teoria e per sapere se gli autostati energetici della teoria quantizzata sono degeneri o meno.

Appendice A

Equivalenza fra particella libera senza periodicità e particella con flusso magnetico di background

In tale appendice si mostrerà l'equivalenza fra la particella libera su S^1 con funzione d'onda non periodica e la stessa particella su S^1 con un termine di flusso magnetico nell'hamiltoniana. Si considera un approccio leggermente diverso da quello di [10] per dimostare tale equivalenza, con uguali risultati finali.

Come punto di partenza, consideriamo una particella libera con massa unitaria su S^1 , ovvero il cerchio di raggio unitario parametrizzato dall'angolo $\phi \sim \phi + 2\pi$. L'equazione di Schroedinger stazionaria, con $\hbar = 1$ è dunque:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(\phi)}{\partial \phi^2} = E\psi(\phi) \quad (\text{A.1})$$

Richiedendo che la condizione al contorno sia quella di periodicità $\psi(\phi + 2\pi) = \psi(\phi)$, le soluzioni dell'equazione di Schroedinger sono dunque le seguenti:

$$\psi_n(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\phi}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.2})$$

Se invece introduciamo un parametro nascosto θ e richiediamo che la condizione al contorno sia di non periodicità $\psi(\phi + 2\pi) = e^{-i\theta} \psi(\phi)$, allora si ottiene:

$$\psi_n(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(n - \frac{\theta}{2\pi})\phi}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.3})$$

Tale ψ_n sono autostati della componente del momento angolare $L_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi}$, con autovalori shiftati di $\frac{\theta}{2\pi}$ rispetto al caso periodico: $n - \frac{\theta}{2\pi}$. Pure gli autovalori energetici E_n sono modificati:

$$E_n = \frac{1}{2} \left(n - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \quad (\text{A.4})$$

Tali autovalori sono gli stessi della particella su S_1 , ma le autofunzioni sono diverse, essendo infatti non periodiche. Mostriamo che si può passare da tale modello a quello considerato

nella sezione [2.1] con un'opportuna trasformazione di gauge di $L_z = \hat{p}$ (il raggio è preso unitario), riassorbendo la parte in θ presente negli autostati. Si introduce dunque la derivata covariante, in cui il campo di background A è preso costante:

$$\hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial \phi} \rightarrow \hat{p}' = -i \frac{\partial}{\partial \phi} - A \quad (\text{A.5})$$

Dunque l'operatore hamiltoniano è ora (nella rappresentazione delle coordinate):

$$H' = \frac{\hat{p}'^2}{2} = \frac{1}{2} \left(-i \frac{\partial}{\partial \phi} - A \right)^2 \quad (\text{A.6})$$

Tale hamiltoniana è esattamente quella che si ha se si pone un solenoide al centro della circonferenza, ortogonale alla stessa. Il flusso del campo magnetico al di fuori del solenoide è costante e pari a $F = 2\pi A$ (con R generico si avrebbe avuto $F = 2\pi RA$).

Guardiamo ora come questa trasformazione di gauge modifica le autofunzioni (A.3).

Facciamo prima una nota di carattere generale, seguendo [10], ponendoci in uno spazio di coordinate \vec{x} (indicate semplicemente con x) e con A funzione di x con rotore nullo (la A dell'esempio di prima è irrotazionale essendo costante). Se ψ_1 è una soluzione dell'equazione agli autovalori dell'hamiltoniana con $A = 0$, allora

$$\psi(x) = \exp \left(i \int_0^x dx A(x) \right) \psi_1(x) \quad (\text{A.7})$$

soddisfa l'equazione agli autovalori dell'hamiltoniana $H' = \frac{1}{2} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} - A(x) \right)^2$ per lo stesso autovalore con cui ψ_1 soddisfaceva la (A.1) (lo si può verificare per sostituzione). A questo punto, la soluzione ψ acquista un fattore di fase aggiuntivo a seconda che lo spazio sia semplicemente connesso o non lo sia. Per vederlo, si consideri il punto finale di coordinate x coincidente con il punto iniziale di coordinate 0. Se lo spazio in cui ci si è posti è semplicemente connesso, allora l'integrale presente in (A.7) è nullo perchè il cammino è contraibile con continuità a un solo punto, e dunque la funzione $\psi(x)$ è periodica. Si è fatto implicitamente uso del fatto che, poiché $\text{rot}A = 0$, se due cammini chiusi C_1 e C_2 sono deformabili con continuità uno nell'altro allora l'integrale di A è lo stesso lungo i due cammini¹. Se invece lo spazio non è semplicemente connesso, tale integrale è non nullo e la $\psi(x)$ non è periodica.²

Torniamo quindi al caso da noi esaminato, ove la coordinata è solo ϕ . A non dipende da ϕ ,

¹Tale risultato è un corollario del Teorema di Stokes:

$$\oint_{C_1} A(x) dx - \oint_{C_2} A(x) dx = \oint_{C_1 - C_2} A(x) dx = \int_S (\text{rot}(A)) d\Sigma = 0 \quad (\text{A.8})$$

S è la superficie compresa fra C_1 e C_2 e $d\Sigma$ è l'elemento infinitesimo di area.

²Tale differenza di comportamento trova ulteriore giustificazione nel fatto che per uno spazio semplicemente connesso A è una pura gauge sotto le trasformazioni di gauge $A \rightarrow A + \nabla \Lambda$ (pura gauge nel senso che esiste un Λ tale che $A = \nabla \Lambda$), dunque è annullabile con una trasformazione opportuna. Scegliendo un punto base O , si consideri infatti $\Lambda(P) = \int_O^P dx A(x)$. Se lo spazio è semplicemente connesso, allora tale integrale è invariante per deformazione del cammino che va da O a P e quindi $\Lambda(P)$ è una funzione vera e propria del punto P e si può dunque ricavare $A = \nabla \Lambda$

dunque ha rotore nullo. Lo spazio è S^1 , che quindi non è semplicemente connesso. L'integrale presente in (A.7) è dunque $\int_0^\phi d\phi A = \phi A$ e la soluzione dell'equazione agli autovalori di H' è:

$$\psi'_n(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iA\phi} e^{i(n - \frac{\theta}{2\pi})\phi}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.9})$$

Se si sceglie $A = \frac{\theta}{2\pi}$ le ψ_n tornano nuovamente periodiche. Si ottiene allora il sistema descritto nel capitolo [2]:

$$H' = \frac{\hat{p}^2}{2} = \frac{1}{2} \left(-i \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \quad (\text{A.10})$$

$$E_n = \frac{1}{2} \left(n - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2, \quad \psi'_n(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\phi}$$

Come ultima osservazione, poiché si ha anche $A = \frac{F}{2\pi}$, con F il flusso del campo magnetico al di fuori del solenoide, ne consegue $\theta = F$. Per questo θ è detto "termine di flusso magnetico".

Appendice B

Calcolo di R

Calcoliamo ora il fattore R che compare in (3.30), ovvero nel fattore che coinvolge il determinante funzionale di $\frac{\delta^2 S}{\delta q^2}$, calcolato su una soluzione o quasi-soluzione classica q_{cl} . Tale fattore entrava in gioco nel contributo dato da tale soluzione a un propagatore fra i due minimi del potenziale considerato nella sezione 3.3, in approssimazione semiclassica. Come si può vedere in [14], si ha che:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta q^2} \Big|_{q=q_{cl}} = -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_{cl}) \quad (\text{B.1})$$

Lo spettro di tale operatore possiede un autovalore nullo (il che è problematico: il determinante è al denominatore in (B), il cui autostato y_0 può essere ottenuto dalle equazioni del moto derivate rispetto al tempo Euclideo:

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + V'(q_{cl}) \right) q_{cl}(\tau) = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \downarrow \\ \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_{cl}) \right) \dot{q}_{cl}(\tau) = 0 \end{array} \quad (\text{B.3})$$

Ne diamo la corretta normalizzazione, grazie alla (3.16):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{q}_{cl}^2 d\tau = 4 \Rightarrow y_0(\tau) = \frac{1}{2} \dot{q}_{cl} \quad (\text{B.4})$$

La presenza di un autovalore 0, derivante dalle equazioni classiche del moto (a loro volta discendenti dalla conservazione dell'energia) è sensata. Tale autovalore è infatti associato all'invarianza sotto traslazione temporale dell'azione. Ovvero, $q_{cl}(\tau)$ e $q_{cl}(\tau + \Delta\tau) = q_{cl}^{\Delta}(\tau)$ sono tali che $S(q_{cl}(\tau)) = S(q_{cl}^{\Delta}(\tau))$. Di conseguenza $\frac{\delta^2 S}{\delta q^2} = 0$ lungo tale direzione nello spazio delle funzioni.

L'esistenza dell'autovalore nullo porta a prestare attenzione nel calcolo gaussiano, presente in . L'integrazione dalla quale viene la deve essere eseguita in maniera tale da separare l'integrazione nella direzione nello spazio delle funzioni relativa all'autovalore nullo da tutte le altre direzioni. Il determinante è stato privato dell'autovalore zero: $det' = \lambda_1 \lambda_2 \dots$

Il contributo dalla j -esima soluzione istantonica, espandendo la funzione integrata attorno alla soluzione classica, si vede essere uguale a:

$$K_j = e^{-\frac{S_E[q_{cl,j}]}{\hbar}} \mathcal{N} \frac{1}{\sqrt{\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_{cl,j}) \right)}} \left(\int d\tau \sqrt{\frac{4}{\pi\hbar}} \right) \quad (\text{B.5})$$

Non sono state considerate le correzioni anarmoniche. Si noti che compare l'integrazione su τ , che corrisponde all'integrazione sulle possibili posizioni del centro dell'istantonone. Tale contributo era stato calcolato a parte in (3.31). A questo punto, moltiplichiamo sopra e sotto per il determinante dell'oscillatore armonico con $m = 1$ e $\omega = 2$, del quale sappiamo il valore (si veda (3.29), usiamo già la versione approssimata nel limite $\beta \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4}{\pi\hbar}} \frac{\mathcal{N}}{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + m\omega^2 \right)} \sqrt{\frac{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + m\omega^2 \right)}{\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_{cl,i}) \right)}} &\approx \\ &\approx \sqrt{\frac{4}{\pi\hbar}} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\omega\beta}{2}} \sqrt{\frac{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + m\omega^2 \right)}{\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_{cl,i}) \right)}} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Il rapporto $\sqrt{\frac{4}{\pi\hbar}} \sqrt{\frac{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + m\omega^2 \right)}{\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_{cl,i}) \right)}}$ è il nostro fattore R , che si può dimostrare (tramite un metodo trovabile in [5]) essere uguale a:

$$\sqrt{\frac{4}{\pi\hbar}} \sqrt{\frac{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + m\omega^2 \right)}{\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_{cl,i}) \right)}} = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \tilde{v} = \sqrt{\frac{2}{\pi\hbar}} \tilde{v} \equiv R \quad (\text{B.7})$$

La quantità \tilde{v} (che è un numero positivo) si ottiene dall'approssimazione asintotica di \dot{q}_{cl} per $|\tau - \tau_0| \gg 1$:

$$\dot{q}_{cl} = \tilde{v} e^{-\omega(\tau - \tau_0)} \quad (\text{B.8})$$

Nel caso in esame, si fa uso dell'equazione (3.16) presa in valore assoluto, sostituendovi la soluzione istantonica (3.18) (le altre danno lo stesso risultato):

$$\begin{aligned} \dot{q}_{cl} &= \sqrt{2(1 + \cos(2q_{cl}))} = \sqrt{2(2 - 2\text{sen}^2(q_{cl}))} = \\ &= 2\sqrt{1 - \left(\frac{e^{4(\tau - \tau_0)} - 1}{e^{4(\tau - \tau_0)} + 1} \right)^2} \approx 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{e^{4(\tau - \tau_0)} + 1}} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Nell'ultimo passaggio sono stati trascurati i termini del secondo ordine in $e^{-2(\tau - \tau_0)}$. Trascuriamo anche il $+1$ al denominatore, ottenendo la stima che cercavamo:

$$\dot{q}_{cl} \approx 2\sqrt{2} e^{-2(\tau - \tau_0)} \quad (\text{B.10})$$

Si noti che da tale stima proviene il risultato (3.20). Otteniamo dunque

$$R = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{2}{\pi\hbar}} = \frac{4}{\sqrt{\pi\hbar}} \quad (\text{B.11})$$

Appendice C

Istantoni in un potenziale periodico su \mathbb{R}

Consideriamo un potenziale periodico su \mathbb{R} , del tipo della figura (a) sottostante, dove i minimi sono stati presi interi per semplicità. Passando dalla formulazione a tempo ordinario a quella a tempo euclideo il potenziale si inverte rispetto all'asse spaziale, come si vede nella figura (b). Seguiamo la trattazione presentata in [5].

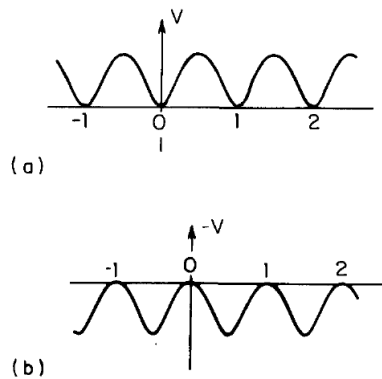


Figura C.1 (a): Potenziale periodico a tempo ordinario su \mathbb{R} , i minimi sono stati posti su coordinate intere. (b) Potenziale a tempo euclideo su \mathbb{R} , ottenuto riflettendo la figura (a) rispetto all'asse delle ascisse.

Se non si considera la possibilità di soluzioni istantoniche che passano per effetto tunnel da un minimo all'altro del potenziale ordinario, allora la degenerazione dello stato fondamentale sarebbe infinita, con infiniti autostati centrati ognuno su un minimo diverso. Mostriamo che gli istantoni rimuovono tale degenerazione a favore di una serie continua di autovalori energetici. Ciò è consistente con il Teorema di non-degenerazione presentato in 1.3, essendo il grado di libertà non compatto.

Calcoliamo ora il propagatore generico fra due minimi del potenziale ordinario j_- e j_+ .

Tale calcolo sarà svolto sempre con il metodo del punto sella (quindi per $\hbar \rightarrow 0$) e in configurazione di gas diluito di istantoni. Il generico contributo a tale propagatore avrà una forma analoga a (3.32), con il fattore R che in questo caso sarà diverso (dipenderà dal potenziale). Anche la pulsazione ω dell'oscillatore armonico che approssima il potenziale attorno ai minimi sarà dipendente dal potenziale, così come anche il valore dell'azione euclidea S_0 calcolata sugli istantoni. Non comparirà neanche il fattore oscillante dato dalle potenze di i , poiché proviene dal termine lineare nelle velocità nella lagrangiana $L_E = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{\hbar}{2}i\dot{q} + \cos(2q) + 1$. Tale termine di derivata totale, poiché ci si è posti su \mathbb{R} , non gioca alcun ruolo nella fisica classica del sistema. Dunque il contributo al calcolo del propagatore dato da una quasi-soluzione composta da N istantoni sarà:

$$\frac{1}{N!} \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\omega\beta/2} (\beta R e^{-\frac{S_0}{\hbar}})^N \quad (\text{C.1})$$

Chiamiamo ora "istantone" una soluzione istantonica fra due minimi vicini tale che la posizione del punto di arrivo sia maggiore della posizione del punto di partenza. Chiamiamo invece "anti-istantone" una soluzione istantonica fra due minimi vicini tale che la posizione del punto di arrivo sia minore della posizione del punto di partenza. Poiché le posizioni degli estremali sono intere, nel calcolo del propagatore fra j_- e j_+ la differenza fra il numero di istantoni n e il numero di anti-istantoni \bar{n} deve uguagliare $j_+ - j_-$. Dunque si ha:

$$\langle j_+ | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | j_- \rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\omega\beta/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \frac{1}{n!\bar{n}!} (\beta R e^{-\frac{S_0}{\hbar}})^{n+\bar{n}} \delta_{(n-\bar{n})-(j_+-j_-)} \quad (\text{C.2})$$

Usiamo l'identità della delta $\delta_{a-b} = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{i\phi(a-b)}$ per riscrivere tale sommatoria:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \frac{1}{n!\bar{n}!} (\beta R e^{-\frac{S_0}{\hbar}})^{n+\bar{n}} \delta_{(n-\bar{n})-(j_+-j_-)} = \\ \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{i\phi(j_+-j_-)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \frac{e^{i\phi(n-\bar{n})}}{n!\bar{n}!} (\beta R e^{-\frac{S_0}{\hbar}})^{n+\bar{n}} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

A questo punto si ottengono due serie esponenziali indipendenti, una in n e l'altra in \bar{n} , che danno alla fine:

$$\langle j_+ | e^{-\frac{\beta H}{\hbar}} | j_- \rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\omega\beta/2} \int_0^{2\pi} e^{i\phi(j_+-j_-)} \frac{d\phi}{2\pi} \exp(2R\beta e^{-\frac{S_0}{\hbar}} \cos(\phi)) \quad (\text{C.4})$$

Ripercorrendo il ragionamento presentato in (3.39), si ha che il livello fondamentale è stato splittato in una serie continua di autovalori energetici, dipendenti da un parametro $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$E(\phi) = \frac{1}{2}\hbar\omega + 2R\beta e^{-\frac{S_0}{\hbar}} \cos(\phi) \quad (\text{C.5})$$

Nel caso del potenziale presentato in 3.3, si avrebbe avuto $\omega = 2$, $S_0 = 4$ e $R = 4$ (come mostrato nell'appendice B):

$$E(\phi) = \hbar + 8e^{-\frac{4}{\hbar}} \cos(\phi) \quad (\text{C.6})$$

Bibliografia

- [1] K. Aitken, A. Cherman e M. Ünsal: *Dihedral symmetry in $SU(N)$ Yang-Mills theory*. [arXiv:1804.05845], 2018.
- [2] A.O. Barut, R. Raczyk: *Theory of Group Representations and Applications*. PWN-Polish Scientific Publishers, 1980.
- [3] X. Chen, Z.-C. Gu, Z.-X. Liu e X.-G. Wen: *Symmetry Protected Topological Orders and the Group Cohomology of their Symmetry Group*. Phys. Rev. **B87** (2013) 155114.
- [4] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë: *Quantum Mechanics, vol. I*. Wiley-Vch, 1991.
- [5] S. Coleman: *Aspects of symmetry: Selected Erice Lectures*. Cambridge University Press, 1985.
- [6] D. Gaiotto, A. Kapustin, Z. Komargodski and N. Seiberg: *Theta, Time Reversal, and Temperature*. JHEP **05** (2017) 091.
- [7] S. Elitzur, E. Rabinovici, Y. Frishman e A. Schwimmer: *Origins of Global Anomalies*. Nucl. Phys., **B273** (1986) 93-108.
- [8] Y. Kikuchi e Y. Tanizaki: *Global inconsistency, 't Hooft anomaly, and level crossing in quantum mechanics*. PTEP (2017) **113B05**.
- [9] A.A. Kirillov: *Elements of the Theory of Representations*. Springer-Verlag, 1976.
- [10] K. Konishi e G. Paffuti: *Meccanica Quantistica: Nuova Introduzione*. Pisa University Press, 2012.
- [11] V. Moretti: *Teoria Spettrale e Meccanica Quantistica*. Springer-Verlag, 2010.
- [12] E. Onofri e C. Destri: *Istituzioni di Fisica Teorica*. Carocci, 1996.
- [13] J. Polchinski: *String Theory Volume I*. Cambridge University Press 2001, 2005.
- [14] R. Rattazzi: *The Path Integral approach to Quantum Mechanics. Lecture Notes for Quantum Mechanics IV*, 2009.
- [15] M. Schottenloher: *A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory, Lect. Notes Phys. 759*. Springer Verlag, 2008.
- [16] K. Sundermeyer: *Constrained Dynamics: With Applications to Yang-Mills theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model*. Springer-Verlag, 1982.