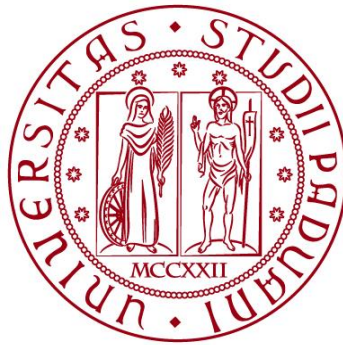


**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, EDILE E AMBIENTALE  
*Department Of Civil, Environmental and Architectural Engineering*

Corso di Laurea in Ingegneria Civile



**TESI DI LAUREA**

**ANALISI DEL COMPORTAMENTO STATICO DI STRUTTURE  
AD ARCO**

**Relatore: Chiar.ma PROF. VALENTINA SALOMONI**  
**Correlatore: ING. PAOLO ZAMPIERI**

**Laureando: MATTEO PIN**  
**Matricola n° 2006890**

**ANNO ACCADEMICO 2023-2024**



*Cosa hanno in comune un corvo e una scrivania ?*  
(Alice nel paese delle meraviglie. Lewis Carrol. 1865)





# Abstract

La tesi si propone come un semplice ed essenziale strumento per la comprensione della statica delle strutture ad arco. Essa si può dividere in due parti: una prima nella quale vengono esposti i principi teorici e le configurazioni tipiche di tali strutture introducendole il più possibile per deduzione pratica, giudicata più efficace nei confronti della comprensione rispetto al puro formalismo matematico. Nella seconda parte invece, saldi di quanto esposto nella prima, viene descritto il funzionamento di una vasto ventaglio di soluzioni progettuali, illustrandone le proprietà e pregi.



# Indice

<b>Abstract</b>	III
<b>1 Introduzione</b>	1
1.1 Introduzione storica . . . . .	1
1.2 Scopo e struttura della tesi . . . . .	7
<b>2 Teoria dell'ellisse di elasticità</b>	9
2.1 Proposizioni fondamentali . . . . .	9
2.2 L'ellisse di elasticità . . . . .	11
2.3 Teoremi di Culmann . . . . .	14
2.4 Corrispondenza con l'ellisse di inerzia e applicazioni . . . . .	17
<b>3 Travi piane a semplice curvatura</b>	19
3.1 Parametri della sollecitazione . . . . .	19
3.2 La deformazione dell'asse geometrico . . . . .	21
3.3 La tensione . . . . .	23
<b>4 La curva delle pressioni</b>	27
4.1 Il poligono funicolare . . . . .	27
4.2 Proprietà . . . . .	28
4.2.1 La funicolare del peso proprio e del carico distribuito . . . . .	30
<b>5 Le strutture ad arco</b>	33
5.1 L'arco a tre cerniere . . . . .	34
5.2 L'arco a due cerniere . . . . .	36
5.2.1 Variazioni termiche . . . . .	38
5.2.2 Cedimenti vincolari . . . . .	39
5.3 L'arco incastrato . . . . .	40

5.3.1	Variazioni termiche . . . . .	43
5.3.2	Cedimenti Vincolari . . . . .	43
5.4	La caduta di spinta . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Applicazioni e osservazioni</b>	<b>49</b>
6.1	Confronto tra schemi statici . . . . .	49
6.1.1	Osservazioni . . . . .	58
6.2	Comportamento della spinta H . . . . .	60
6.2.1	Il rapporto spinta-freccia . . . . .	60
6.2.2	il rapporto spinta-rigidezza . . . . .	61
<b>7</b>	<b>Archi in pietra e muratura</b>	<b>65</b>
7.1	Generalità sugli archi in muratura . . . . .	65
7.2	La stabilità negli archi in pietra e muratura . . . . .	70
7.2.1	La regola del terzo medio ed il metodo di Mèry-Navier . . . . .	70
7.2.2	Il metodo di Mèry-Navier . . . . .	71
7.2.3	Cenni di analisi limite plastica negli archi in muratura . . . . .	77
7.2.4	Il fattore di sicurezza geometrico . . . . .	81
7.2.5	La teoria di Milankovitch . . . . .	84
7.2.6	Altri metodi di analisi . . . . .	89
<b>8</b>	<b>Soluzioni costruttive</b>	<b>93</b>
8.1	L'arco a spinta eliminata . . . . .	93
8.1.1	La trave lenticolare . . . . .	99
8.1.2	La trave Nielsen . . . . .	102
8.1.3	I ponti Network . . . . .	104
8.2	L'arco telaio . . . . .	106
8.3	I ponti tipo Risorgimento . . . . .	107
8.4	L'arco tipo Boussiron . . . . .	110
8.5	Sistemi collaboranti arco-trave: i ponti Millart . . . . .	113
8.5.1	I ponti alla Millart . . . . .	117
<b>9</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>121</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>123</b>
	<b>Appendice</b>	<b>127</b>

# Capitolo 1

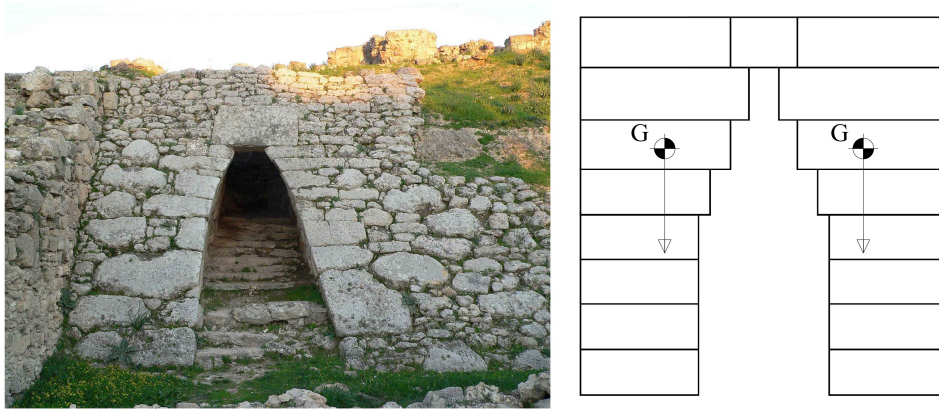
## Introduzione

### 1.1 Introduzione storica

Se si vuol ricercare chi per primo intuì la forma dell'arco, certo la risposta non si troverà nella storia degli uomini; è dalla natura infatti che derivano tutte le forme delle quali ci siamo prima o poi impossessati.

#### **Gli albori**

Anche se non vi è piena certezza sulla datazione, i primi rudimenti embrionali di struttura ad arco sono stati datati intorno al 2000 a.C. in Mesopotamia e in Egitto. Risalenti a queste epoche vi sono infatti numerose strutture dette a "falso arco". La struttura a falso arco non può definirsi ancora arco ma ne è un predecessore, essa nasce dalla necessità di coprire luci le quali non sarebbero state coperte da pietre naturali (è successiva infatti la struttura trilitica greca con travi ottenute per taglio), si tratta infatti di pietre accatastate nelle quali ognuna sporge verso l'esterno più della precedente fino a coprire la distanza desiderata. Tali strutture non si possono ancora definire archi poiché la loro resistenza strutturale non deriva dalla spinta tra i conci, i quali rimangono assieme per attrito, ma dal semplice fatto che il baricentro della parte sporgente cade all'interno della spalla. Questa soluzione si rinviene in quasi ogni civiltà preromana (i Nuraghi in Sardegna ne sono una variante più avanzata con forma a cupola) e in epoche successive in quella precolombiana. Il passo successivo fu quello di far resistere la struttura come contrapposizione di due puntoni adiacenti; forma tipica del cavalletto (tre cerniere non allineate).



**Figura 1.1:** *A sinistra: entrata del palazzo reale di Ugarit (Siria) ca. 1300 a.C.; a destra: schema di disposizione delle pietre per tali strutture, in cui si notano le posizioni dei baricentri delle due metà*

## L'epoca romana

La gloriosa storia dei ponti romani è tale da rendere indegno un solo paragrafo in questo lavoro, ma per ragioni di brevità ne verranno riportate solo le caratteristiche principali. La storia dei ponti romani inizia ben prima della fondazione di Roma, è infatti eredità etrusca la tradizione di costruire ponti, ma è romano il loro perfezionamento ed utilizzo su larga scala. Simbolicamente il primo ponte costruito fu voluto da Anco Marzio, per unire Roma superando il Tevere, esso era di legno in modo da poter essere abbattuto facilmente in caso di invasione. Dopo di che la vera epoca d'oro dei ponti romani si vide nell'Impero prima e nella Repubblica poi; essi erano utilizzati sia come veri e propri ponti e viadotti oppure per altri scopi, dei quali il più significativo è stato quello acquedottistico (fig. 1.2). La tecnica costruttiva era quella dell'arco a tutto sesto in pietra o muratura (discusso estesamente nel capitolo 7); i romani non si limitarono alla comprensione della statica dell'arco, ma ne affinarono le tecniche costruttive a tal punto ad esempio da premettere la costruzione di pile in alveo capaci di resistere alla forza delle piene non solo per peso proprio ma anche per forma con l'uso di rostri. La costruzione dei ponti (*ars pontificia*) era di tale importanza da entrare nell'ambito della sacralità tanto che il più alto grado sacerdotale era quello del *Pontifex maximus*, magistrato che si occupava della costruzione dei ponti. I romani non utilizzarono però la tecnica dell'arco al solo scopo pontificio, ma la sfruttarono in ogni campo possibile: dagli anfiteatri, ai templi (la cupola del Pantheon ne è la maggiore espressione) dalle terme alle opere

di sostegno; l'arco si rivela essere l'elemento chiave dell'intero ambiente costruito romano.



**Figura 1.2:** *Pont du Gard, acquedotto romano formato da tre ordini di archi, lungo 275 metri e alto 49. Remoulins, Francia 19 a.C.*

### **Il medioevo e l'architettura gotica**

Nel Medioevo, i costruttori europei ripresero e migliorarono le tecniche ingegneristiche dei Romani, apportando significative innovazioni nella costruzione dei ponti. Rispetto ai ponti romani, i nuovi ponti medievali presentavano pilastri più snelli e archi più sottili, con rapporti freccia-luce più elevati, rendendo le strutture più leggere e resistenti. Con l'introduzione degli archi a sesto acuto gotici, che riducevano la spinta laterale, fu possibile ampliare ulteriormente le campate.

Nel XIV secolo, la costruzione di ponti toccò nuovi apici, con campate che raggiungevano lunghezze fino a 40 metri (tali luci erano state raggiunte dai romani con strutture ad arco lignee come nel ponte di Traiano sul Danubio, ma erano ancora precluse alla muratura). Per ottenere queste campate eccezionali, vennero impiegati diversi tipi di archi, tra cui: semicirculari, a sesto acuto e policentrici, come nel caso del Ponte di Trezzo sull'Adda, la cui campata di 72 metri non fu superata fino al 1796.



Uno dei ponti più iconici del periodo rinascimentale è il Ponte Vecchio di Firenze (1345) (fig. 1.3), celebre per il suo design ribassato e per il rapporto freccia-luce di 5,3:1, che lo rende particolarmente elegante e snello.



**Figura 1.3:** *Ponte Vecchio a Firenze 1339-1345*



**Figura 1.4:** *Archi rampanti a sostegno della copertura del coro nella cattedrale di Notre Dame a Parigi 1163-1344*



L'arco a sesto acuto ebbe grande diffusione nel Medioevo, in particolare negli edifici sacri, le cattedrali, nelle quali però veniva posto in copertura sostenuto da colonne snelle, pertanto incapaci di contenere la spinta dell'arco; per tale ragione si ricorse all'arco rampante: esso è un'evoluzione del contrafforte: si presenta come un'arco incompleto che addossato all'imposta all'arco da sostenere ne contiene la spinta reindirizzandola a delle spesse colonne che fungono per l'appunto da contrafforte (fig. 1.4).

### Dal '700 all'età contemporanea

Se nel paragrafo precedente si affermava che in epoca medioevale l'arco non aveva subito grandi stravolgimenti rispetto alle strutture romane, nel diciottesimo e diciannovesimo secolo un nuovo elemento entrò in campo e stravolse i modi di costruire con questa forma: il metallo. Primo esempio di ponte ad arco con struttura metallica (ghisa), non che primo ponte metallico della storia si ritrova nell'Iron Bridge a Coalbrookdale in Scozia, progettato da Thomas Farnolls Pritchard e costruito da John Wilkinson e Abraham darby III tra il 1779 e il 1881 (fig. 1.5).



**Figura 1.5:** *Iron Bridge; Gola di Ironbridge, Iron Bridge, Coalbrookdale, Inghilterra, 1779-1781. La colorazione rossa è dovuta al restauro del 2018 che lo ha riportato al colore originario.*

Successivamente ad esso la tecnologia dell'acciaio diede nuovo impulso alla costruzione dei ponti ad arco; si ricordano tra i principali progettisti: Thomas Telford,

Isambard Kingdom Brunel, Squire Whipple, Robert Stephenson e molti altri. Nella seconda metà dell'800 l'arco, unitamente alla struttura reticolare fu nuovamente protagonista grazie a, primo tra tutti, Gustav Eiffel (fig. 1.6). Grandi esempi di archi reticolari si hanno anche nella copertura di grandi luci, si ricordano i lavori di Victor Contamin (galleria delle macchine) in Francia e Ulisse Stacchini (Stazione di Milano Centrale) in Italia.



**Figura 1.6:** *Viadotto Garabit; vallata del Truyère, Ruynes-en-Margeride, Francia, 1880-1884. Il viadotto, progettato da Eiffel si presenta come un arco reticolare metallico con schema statico a due cerniere*

Il '900 vide ancora una volta la presenza dell'arco ma in una nuova veste, quella del calcestruzzo armato (fig. 1.7), con le ottime proprietà meccaniche a compressione esso si prestava eccellentemente alla costruzione di archi, ricordiamo tra i maggiori progettisti Eugène Freyssinet, Robert Millart, Riccardo Morandi, e molti altri. Conseguentemente allo sviluppo di nuovi materiali si evolsero anche le tecniche costruttive: Dalla centina si passò a metodi più complessi ma efficienti come la costruzione a cantilever, quella a sbalzi successivi con tiranti provvisori, la rotazione di semi-archi e varie tecniche ibride. In quest'epoca fu di fondamentale importanza per l'adozione su larga scala di quasi tutte le strutture citate il massiccio sviluppo della ferrovia, la quale, limitata notoriamente limitata dalla pendenza delle livellette costrinse alla costruzione di innumerevoli viadotti; essi si presentavano ancora in pietra per le luci più piccole e metallici per le maggiori.



**Figura 1.7:** *Mike O'Callaghan - Pat Tillman Memorial Bridge; Clark County, Nevada - Mohave County, Arizona USA, 2005-2010. Il ponte in calcestruzzo, supera il fiume Colorado di fronte all Diga Hoover, è stato costruito con la tecnica degli sbalzi successivi con tiranti provvisori*

## 1.2 Scopo e struttura della tesi

Come visto nel paragrafo precedente, nel panorama dell'architettura moderna, con l'avvento delle strutture metalliche e del calcestruzzo, l'arco non rappresenta più l'unica possibilità per coprire una luce anzi, in alcuni casi si rivela inadeguato proprio a causa della sua forma che può risultare ingombrante. Per tutta la seconda metà del ventesimo secolo ad esso sono state preferite altre soluzioni come quella trilitica (particolarmente dovuta all'introduzione del precompresso) e per grandi luci quella strallata, anche se non ne mancano esempi virtuosi di archi di grande luce, tra i quali in Italia si ricordano quelli innumerevoli lungo l'autostrada A1 Milano-Napoli o nelle valli alpine. Con la sua parziale uscita di scena negli studi di progettazione però, è venuta meno anche la sua presenza nei programmi di insegnamento nelle facoltà di Ingegneria, soppiantato dalle soluzioni sopraddette le quali più semplici ed economiche meglio si prestano ad un panorama infrastrutturale in continuo rinnovamento. Nonostante ciò, gli ultimissimi anni stanno vedendo un progressiva riscoperta di tale struttura in quanto il patrimonio infrastrutturale (principalmente ferroviario) conta innumerevoli ponti e viadotti ad arco la cui vetustà ne richiede un sempre maggiore attenzionamento.

La tesi è organizzata nel modo seguente: Nel secondo e nel terzo capitolo sono presenti alcuni rudimenti teorici riguardanti la scienza delle costruzioni, in particolare la teoria dell'ellisse di elasticità: essa, non più trattata nei programmi di scienza delle costruzioni, è necessaria per comprendere la soluzione alla configurazione incastrata dell'arco proposta nel capitolo quinto, nonché il comportamento di

soluzioni costruttive più complesse come l'arco Boussiron nel capitolo ottavo.

Il quarto capitolo si incentra sullo sviluppo di una spiegazione semplice ma il più possibile completa sulla curva della pressione; una volta padroneggiata, essa permette un intendimento pratico e naturale degli archi e delle strutture consimili.

I capitoli quinto e sesto presentano il primo una soluzione analitica per le tre configurazioni strutturali tipi che dell'arco: a tre cerniere, a due cerniere e incastrato; mentre il sesto alcune osservazioni su quanto visto nel precedente con lo scopo di chiarire le forme che più di consueto di incontrano in tali strutture.

Infine i capitoli settimo e ottavo sfruttano in principi presenti nei capitoli precedenti e li vedono applicati agli archi in pietra e muratura (di fondamentale importanza in vista di una necessità di consolidamento e miglioramento dei ponti esistenti) e a configurazioni strutturali più e meno conosciute allo scopo di offrirne una semplice ed essenziale assimilazione.

# Capitolo 2

## Teoria dell'ellisse di elasticità

### Generalità

La teoria dell'ellisse di elasticità, formulata per la prima volta da Culmann e perfezionata in seguito da Ritter è stata un'elegante metodologia di largo utilizzo fino agli anni '60 del secolo scorso che consente la soluzione del problema elastico trasformandolo da un complicato problema matematico (determinazione del campo tensionale, deformativo e degli spostamenti di un solido costituito di materiale elastico-lineare, comunque vincolato e caricato da forze di volume e di superficie) in un più gestibile problema di natura geometrica.

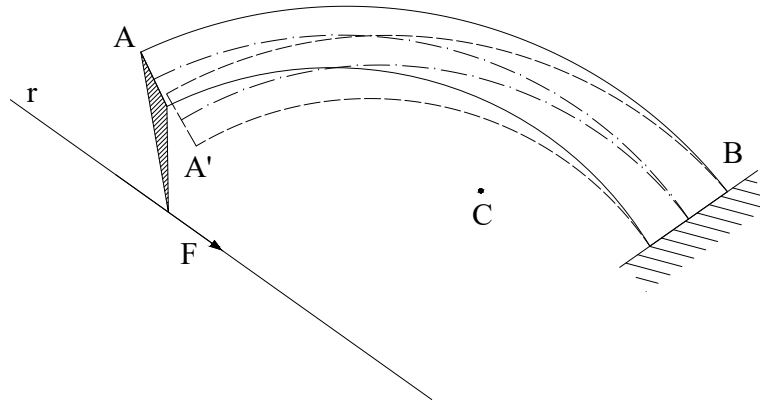
Tale teoria, valida esclusivamente per i sistemi monodimensionali piani, immagina come vedremo, l'esistenza di una proprietà della trave definita "peso elastico" che ne caratterizza le proprietà di deformazione consentendo così una facile deduzione degli spostamenti.

Benché di facile formulazione ed utilizzo, essa è stata abbandonata in favore di metodi di calcolo automatico, in particolare il FEM (Finite Element Method) che consente la soluzione di questo ed altri problemi fornendo soluzioni numeriche con precisione elevata ed in tempi brevi.

### 2.1 Proposizioni fondamentali

La teoria dell'ellisse di elasticità risulta valida per sistemi monodimensionali piani (travi piane) caratterizzati da piccolo grado di curvatura e sezione debolmente variabile. Il modello reologico è elastico-lineare, da cui il principio di sovrapposizione

degli effetti. Le forze esterne non sono influenzate dalla deformazione della trave, siamo nel campo dei piccoli spostamenti e gradienti di spostamento; vale l'ipotesi di Eulero-Bernoulli sulle sezioni piane. Infine il sistema è reale, ovvero i sistemi cinematicamente e staticamente ammissibile sono legati.



**Figura 2.1:** *Retta d'azione della forza e relativo centro di rotazione*

Immaginiamo innanzi una trave che rispetti tutte le caratteristiche sopracitate e soggetta ad una forza  $F$  agente lungo la sua retta di azione  $r$ ; immaginiamo inoltre per semplicità di trattazione che lo schema statico sia del tipo a mensola e che la forza  $F$  sia applicata con un braccio rigido alla sezione terminale  $S$  della trave (fig. 2.1). La sezione  $S$  subisce perciò uno spostamento rigido, e dato che si mantiene ortogonale al piano  $\pi$  esso è piano; vale quindi il teorema di Eulero<sup>1</sup>(caso particolare del teorema di Mozzi-Charles<sup>2</sup>).

Il centro  $C$  di rotazione, dipende soltanto dalla retta di azione della forza, e non dalla sua intensità infatti, se si raddoppia la forza, raddoppierà l'angolo  $\varphi$  di rotazione ma il centro  $C$  sarà il medesimo. Vediamo ora alcune proprietà di tale relazione tra rette e centri di rotazione:

<sup>1</sup>Teorema di Eulero: ogni atto i moto rigido piano di un corpo o di un sistema di corpi rigidi vincolati è riconducibile intorno ad un punto detto centro di rotazione assoluta; esso può essere proprio nel caso di una rotazione oppure improprio nel caso di una traslazione.

<sup>2</sup>Teorema di Mozzi-Charles: ogni atto di moto rigido si può pensare dovuto ad un moto elicoidale.

- Data la validità del principio di sovrapposizione degli effetti, il centro  $C$  di rotazione della sezione  $S$  è univocamente determinato una volta determinata la retta  $r$  di applicazione della forza e viceversa, fissato  $C$  è univocamente determinata la direzione di azione della forza. Si definisce quindi una corrispondenza biunivoca (reciprocità) tra le rette  $r$  di azione ed i centri di rotazione.

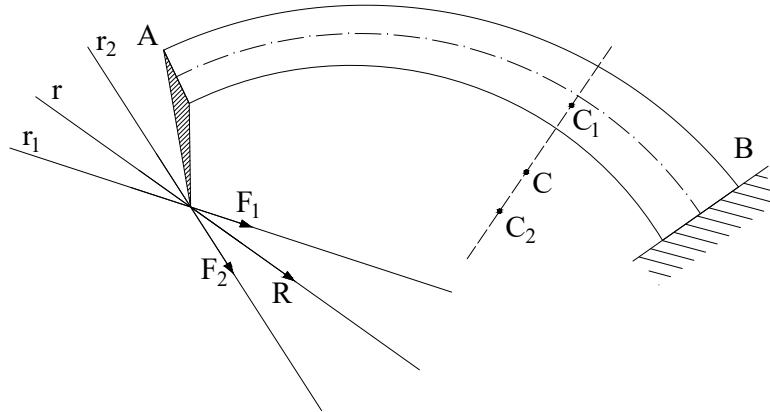
Supponiamo per assurdo che ad uno stesso centro di rotazione  $C$  corrispondano due rette di azione  $r_1$  ed  $r_2$  e ad esse corrispondano due forze  $F_1$  ed  $F_2$  con  $F_1 \neq F_2$  e tali che le rotazioni  $\varphi$  causate dalle forze siano tra loro uguali ed opposte, allora la sezione  $S$  non si muoverebbe benché la risultante di  $F_1 - F_2$  sia non nulla.

- Il centro di rotazione  $C$  non può giacere sulla retta  $r$  di azione della forza poiché questo causerebbe una deformazione della trave ma senza che vi sia lavoro svolto dalla Forza; nella corrispondenza tra  $C$  ed  $r$  non esistono quindi elementi autoconiugati.
- Siano  $r_1$  e  $r_2$  due rette corrispondenti a due forze entrambe applicate alla sezione  $S$  allora, il centro  $C$  riferito alla retta lungo cui giace la risultante di  $F_1 + F_2$  appartiene al segmento di retta per  $C_1$  e  $C_2$  (La posizione di  $C$  nel segmento sarà determinata ovviamente dal modulo di  $F_1$  e  $F_2$ )(fig. 2.2). Possiamo quindi affermare che ad una fascio proprio di rette  $r$  corrisponde una punteggiata di punti  $C$ .
- Sia  $C_1$  il centro di rotazione corrispondente alla retta  $r_1$  della forza  $F_1$  e sia  $r_2$  passante per  $C_1$  la retta d'azione di  $F_2$ , immaginiamo ora di applicare  $F_1$  quando  $F_2$  è già applicata: la forza  $F_2$  non compie lavoro  $L_{12}$  per effetto dello spostamento causato da  $F_1$ , in quanto il suo spostamento è perpendicolare alla retta d'azione  $r_2$ . Per il teorema di Betti quindi, è nullo anche il lavoro  $L_{21}$  causato da  $F_2$  su  $F_1$ ; questo implica che il centro  $C_2$  di  $r_2$  deve trovarsi su  $r_1$  (fig. 2.3). La corrispondenza si dice quindi involutoria.

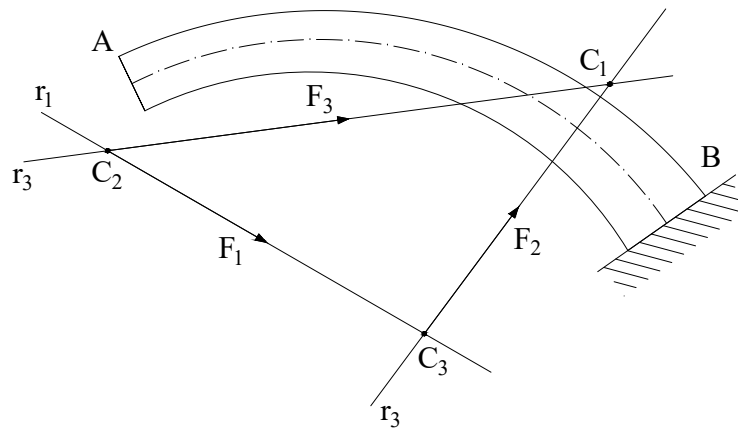
## 2.2 L'ellisse di elasticità

Alla luce delle proprietà viste nel paragrafo precedente tra rette d'azione di una forza e centri di rotazione ovvero: mancanza di elementi autoconiugati, biunivocità





**Figura 2.2:** *Punteggiata di centri generata da un fascio proprio*



**Figura 2.3:** *Rappresentazione dell'involutorietà della corrispondenza tra punti e rette*

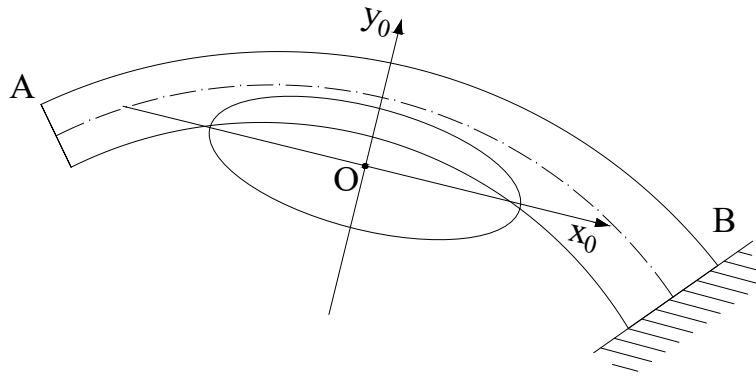
e involutorietà possiamo dire che la loro corrispondenza è una polarità e la conica fondamentale da essa descritta è immaginaria.

Se si applica alla sezione A una coppia, ovvero una retta all'infinito nel piano, essa ha come centro il centro O della polarità che è un punto proprio, poiché se fosse all'infinito starebbe sulla retta della forza il che non può essere dalle osservazioni



fatte in precedenza. Consideriamo ora la polarità tra le rette  $r$  di applicazione delle forze e i centri  $C'$  simmetrici di  $C$  rispetto al centro elastico  $O$ , questa polarità ha conica fondamentale reale, in particolare essa è un'ellisse (fig. 2.4). Questa ellisse, detta di Culmann si chiama in generale "ellisse di elasticità relativa alla sezione A", nel nostro caso dato che A è sezione di estremità, l'ellisse prende il nome di "ellisse terminale di elasticità" e giace nel piano delle forze.

L'ellisse di elasticità è quindi definita come: *"L'ellisse di elasticità è quella conica rispetto alla quale le rette  $r$  d'azione delle forze applicate alla sezione A e i rispettivi centri  $C$  di rotazione della sezione A si corrispondono come rette e antipoli o come punti e antipolari"*.



**Figura 2.4:** *Ellisse di elasticità relativo alla sezione A*

Una volta scelta la sezione è quindi possibile costruire l'ellisse e per ogni forza  $F$  sarà possibile sapere il centro di rotazione come antipolo della retta d'azione; viceversa conoscendo il centro  $C$  si può ottenere la retta d'azione della forza (conoscendo la rotazione  $\varphi$  è anche possibile conoscere il modulo della forza) si dà quindi una soluzione grafico-geometrica al problema elastico.

Si possono quindi ricavare queste semplici osservazioni:

- Il centro di rotazione di A se in essa agisce una coppia è il centro dell'ellisse.
- Se una forza passa per il centro  $O$  dell'ellisse, ovvero secondo un suo diametro, essa genererà una traslazione della sezione A nella direzione del diametro coniugato al primo.

- Se una forza agisce secondo uno dei due assi dell'ellisse, essa genererà una traslazione della sezione A nella direzione della forza.

Queste osservazioni e i teoremi successivi verranno estesamente applicati nel capitolo 4.

## 2.3 Teoremi di Culmann

**Rotazione provocata da una coppia:** Abbiamo visto come se sulla sezione S agisce una coppia, essa ruoti intorno al centro O dell'ellisse di un angolo  $\varphi$  proporzionale all'entità della suddetta coppia quindi, indicando con  $\mathcal{G}$  la costante di proporzionalità otteniamo:

$$\varphi = M\mathcal{G} \implies \mathcal{G} = \frac{\varphi}{M} \quad (2.1)$$

dove  $\mathcal{G}$  è detto "peso elastico" della trave e ha le dimensioni di  $[F^{-1}L^{-1}]$  esso può essere interpretato come la misura dell'attitudine che ha una trave di deformarsi, dipende quindi dalle caratteristiche geometriche (inerzia) e reologiche (modulo di Young).

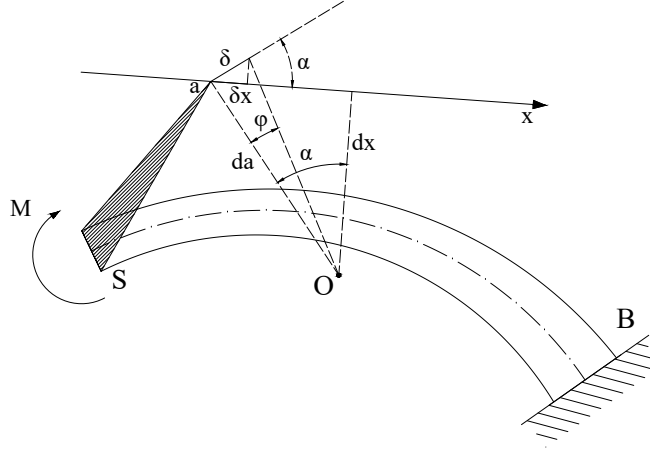
**Spostamento provocato da una coppia:** definiamo  $\delta$  lo spostamento della sezione S o di ogni parte ad essa rigidamente collegata, definiamo  $d_a$  la distanza  $\overline{Oa}$  (fig. 2.5) ed essendo gli spostamenti infinitesimi, ricordando la (2.1) otteniamo:

$$\delta = \varphi \cdot d_a = M\mathcal{G} \cdot d_a \quad (2.2)$$

è poi possibile conoscere la componente  $\delta_x$  una volta conosciuto l'angolo  $\alpha$  (e ricordando che  $d_a \cdot \cos(\alpha) = d_x$ ) come:

$$\delta_x = M\mathcal{G}d_a \cdot \cos(\alpha) = M\mathcal{G}d_x \quad (2.3)$$

**Rotazione e spostamento provocati da una forza:** data una forza F agente secondo la retta di azione r applicata alla sezione S, abbiamo visto come la rotazione avvenga rispetto all'antipolo C della retta r. Per determinare l'angolo  $\varphi$  di rotazione, si sposta la forza F parallelamente a sè stessa facendola passare per il centro O dell'ellisse (fig. 2.6), in questo modo si scompone il



**Figura 2.5:** Componenti di spostamento causate da una coppia  $M$  applicata in  $A$

movimento in una rotazione causata dalla coppia:  $F \cdot d_r$  ed una traslazione; la rotazione risulta quindi:

$$\varphi = F d_r \cdot \mathcal{G} \quad (2.4)$$

Per quanto riguarda lo spostamento di  $S$  o di ogni parte ad essa rigidamente collegata, il procedimento è analogo a quello mostrato nel secondo punto ma questa volta il centro non è più  $O$  ma  $C$ . Chiamiamo  $d'_a$  la distanza  $\overline{Ca}$ , ricordano la (2.1) (2.2) (2.4) otteniamo i seguenti risultati:

$$\delta = \varphi \cdot d'_a = F d_r \mathcal{G} \cdot d'_a \quad (2.5)$$

$$\delta_x = F d_r \mathcal{G} \cdot d'_a \cos(\alpha) \quad (2.6)$$

e notando che  $d'_a \cdot \cos(\alpha) = d'_x$  allora:

$$\delta_x = F d_r \mathcal{G} \cdot d'_x \quad (2.7)$$

Ricordando ora i risultati fondamentali ottenuti per le rotazioni con le equazioni (2.1) (2.4) e per gli spostamenti (2.3) (2.7), facciamo delle semplificazioni: immaginiamo che il peso elastico della trave si ripartito uniformemente su di essa, come si trattasse di una massa, in questo modo, l'ellisse centrale di inerzia coincide con l'ellisse di elasticità e quindi il baricentro del peso elastico corrisponde al centro  $O$  dell'ellisse di elasticità. Il peso elastico sarà quindi così calcolato:

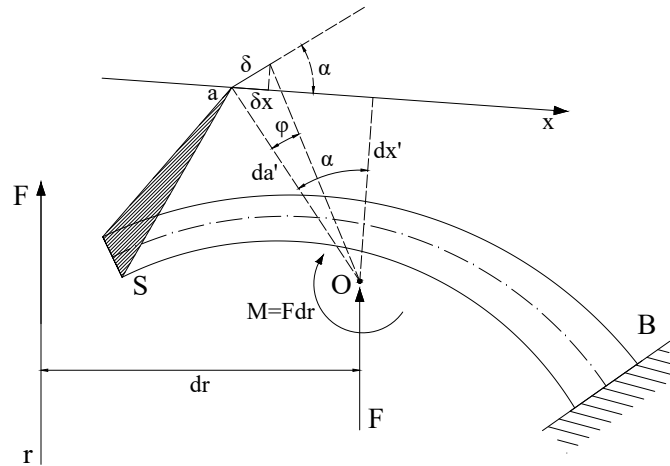


Figura 2.6: Componenti di spostamento causate da una forza  $F$

$$\mathcal{G} = \int_{Area} d\mathcal{G} \quad (2.8)$$

Pertanto nella (2.3)  $\mathcal{G}d_x$  rappresenterà il momento statico del peso elastico rispetto all'asse  $x$ , nella (2.4) rispetto alla retta  $r$ , mentre l'espressione  $d_r\mathcal{G}d'_x$  rappresenterà il momento centrifugo del peso elastico rispetto ad  $r$  ed  $x$ .

Possiamo quindi enunciare i **quattro teoremi fondamentali di Culmann sulla teoria dell'elasticità**:

1. La rotazione della sezione  $S$  e di ogni punto collegato rigidamente ad essa, provocata dalla coppia  $M$  agente in  $S$ , è uguale al prodotto di  $M$  per il peso elastico dell'intera trave:

$$\varphi = M \cdot \mathcal{G} \quad (2.9)$$

2. Lo spostamento secondo una direzione  $x$  di un punto  $a$  collegato rigidamente alla sezione  $S$ , provocato da una coppia  $M$  agente in  $S$ , è uguale al prodotto di  $M$  per il momento statico del peso elastico rispetto alla retta  $x$  passante per  $a$ :

$$\delta_x = M \cdot S_x \quad (2.10)$$

3. La rotazione della sezione S e di ogni punto collegato rigidamente ad essa, provocato dalla forza F agente in S, è uguale al prodotto di F per il momento statico del peso elastico rispetto alla retta r d'azione della forza:

$$\varphi = F \cdot S_r \quad (2.11)$$

4. lo spostamento secondo una direzione x di un punto a collegato rigidamente con la sezione S, provocato da una forza F di retta d'azione r agente in A, è uguale al prodotto di F per il momento centrifugo del peso elastico rispetto alla rette r ed x:

$$\delta_x = F \cdot S_{rx} \quad (2.12)$$

## 2.4 Corrispondenza con l'ellisse di inerzia e applicazioni

Immaginiamo che il peso elastico  $\mathcal{G}$  sia distribuito su una trave come fosse un sistema di masse, in questo modo l'ellisse di elasticità, coincide con l'ellisse principale di inerzia. Possiamo fare dunque alcune osservazioni pratiche sulla distribuzione del peso elastico della trave:

- Se la trave è reticolare, il peso elastico si considera distribuito nelle varie aste in base alla loro rigidezza flessionale EJ quindi  $\mathcal{G} = \Sigma \Delta \mathcal{G}$ .
- Se la trave è costituita da conci tra loro affiancati in serie e con pesi elastici diversi, la deformazione è la somma delle deformazioni dei conci e la deformazione maggiore sarà sperimentata al concio con peso elastico maggiore: la trave si comporta quindi come un sistema con peso elastico equivalente pari alla somma dei pesi elastici dei conci.
- Se la trave è costituita da conci affiancati in parallelo, la deformazione è la somma delle deformazioni dei conci ma essa dipende questa volta dal concio di peso elastico minore che offrirà la maggiore resistenza ovvero: la trave si comporta ome un sistema in cui il peso elastico equivalente è pari alla somma dei reciproci dei pesi elastici dei vari conci.

Si notano quindi analogie con altri fenomeni della fisica.



# Capitolo 3

## Travi piane a semplice curvatura

### Generalità

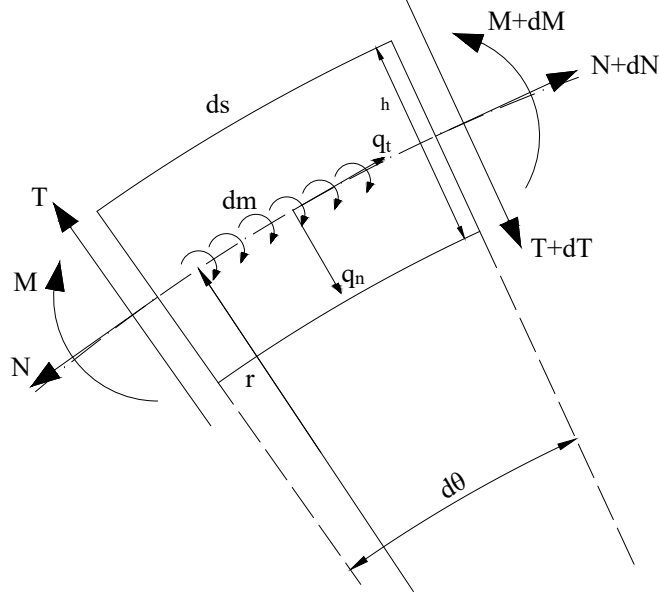
Le travi piane a semplice curvatura sono elementi ricorrenti sia nel campo dell'ingegneria civile, quanto in quello della meccanica. La differenza sostanziale nei due casi è che nel primo la dimensione trasversale dell'elemento è piccola se confrontata con il raggio di curvatura, nel secondo invece si fa più accentuata; si parla quindi di travi a piccola curvatura e grande curvatura. La trattazione che segue è ripresa dai lavori di Odone Belluzzi e Stephen Timoshenko, e non si aspetta di essere esaustiva, si rimanda quindi ai testi degli autori presenti in bibliografia.

### 3.1 Parametri della sollecitazione

Sia adottata la seguente convenzione per i parametri della sollecitazione:

- Il momento  $M$  si intende positivo se tende le fibre dalla parte concava
- Il Taglio si intende positivo se genera una rotazione oraria del concio
- Lo sforzo normale  $N$  si intende positivo se di trazione

Siano inoltre presenti un carico distribuito  $qds$  qualunque di componenti  $q_t ds$  e  $q_n ds$  rispettivamente tangenziale e normale all'asse geometrico della trave ed una coppia distribuita  $mds$  (fig. 3.1).



**Figura 3.1:** Concio infinitesimo di trave di lunghezza  $ds$  nel quale sono visibili i parametri della sollecitazione e le azioni sollecitanti

Operando ora l'equilibrio lungo le direzioni parallela all'asse, perpendicolare all'asse e alla rotazione otteniamo:

$$\begin{cases} -N \cos(d\theta/2) + (N + dN) \cos(d\theta/2) - T \sin(d\theta/2) - (T + dT) \sin(d\theta/2) + q_t ds = 0 \\ N \sin(d\theta/2) + (N + dN) \sin(d\theta/2) - T \cos(d\theta/2) + (T + dT) \cos(d\theta/2) + q_n ds = 0 \\ T ds/2 + (T + dT) ds/2 + M - (M + dm) + m ds = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

dalle quali eliminando gli infinitesimi di ordine superiore, il termine riguardante le coppie distribuite sull'asse e ricordando che  $ds = r \cdot d\theta$  otteniamo:

$$\begin{cases} T - r \frac{dN}{ds} = -r q_t \\ N + r \frac{dT}{ds} = -r q_n \\ T = \frac{dM}{ds} \end{cases} \quad (3.2)$$

che sono generalizzazioni delle classiche relazioni delle travi rettilinee.

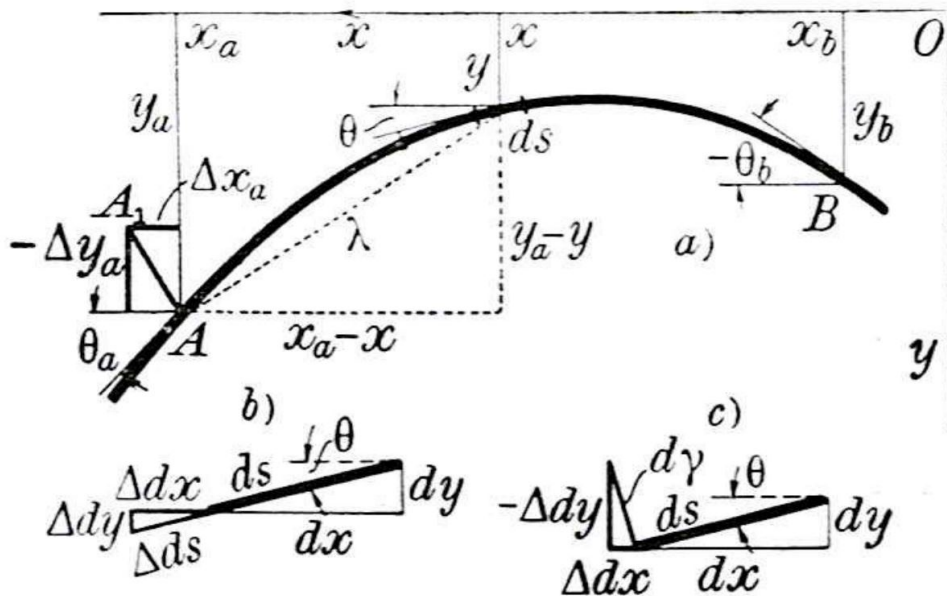


### 3.2 La deformazione dell'asse geometrico

La deformazione nelle travi curve differisce da quella delle travi rettilinee poiché in generale un punto generico C dell'asse della trave non si sposterà perpendicolarmente a sè stesso, ma in diagonale a causa sia della deformabilità assiale che soprattutto per il fatto che la flessione di  $ds$  provoca in C uno spostamento  $d\delta$  nella direzione normale alla congiungente di C con  $ds$ .

Un tronco  $ds$  della trave, può considerarsi prismatico tanto più grande è la disparità tra l'altezza della sezione  $h$  ed il raggio di curvatura  $r$ , per questo motivo possiamo studiare la deformazione con le medesime equazioni che si userebbero se la trave fosse rettilinea. Nel paragrafo successivo verrà proprio indagato il campo di validità di queste relazioni. Le sezioni estreme della figura 3.1 subiscono quindi a causa del momento, del taglio e dello sforzo normale una rotazione relativa pari a  $d\varphi = -\Delta(d\theta) = \frac{Mds}{EJ}$ , uno spostamento trasversale relativo  $\gamma ds = \chi \frac{Tds}{GA}$  ed un allontanamento  $\frac{Nds}{EA}$ .

Consideriamo quindi un tratto qualunque  $\overline{AB}$  di una trave a semplice curvatura (fig. 3.2), considerando fissa la sezione B andiamo a scrivere l'entità degli spostamenti elastici della trave rispetto ad un sistema di riferimento esterno Oxy.



**Figura 3.2:** Tratto di trave  $AB$  in cui  $B$  è fisso nello spazio. Da Odone Belluzzi, *Scienza delle Costruzioni vol.2*

Per effetto della flessione  $d\varphi$ , di un tronco  $ds$  dovuta a  $M$ , l'angolo  $\theta_a$  della sezione A subisce la variazione:

$$d(\Delta\theta_a) = -d\varphi = -\frac{Mds}{EJ} \quad (3.3)$$

Inoltre, il punto A subirà uno spostamento  $\overline{AA_1}$  pari a  $\lambda d\varphi$  di componenti:

$$d(\Delta x_a) = \overline{AA_1} \frac{y_a - y}{\lambda} = d\varphi(y_a - y) = \frac{Mds}{EJ}(y_a - y) \quad (3.4)$$

$$d(\Delta y_a) = \overline{AA_1} \frac{x_a - x}{\lambda} = d\varphi(x_a - x) = \frac{Mds}{EJ}(x_a - x) \quad (3.5)$$

Per effetto della variazione di lunghezza del tronco  $ds$  pari a  $\Delta ds$  dovuto allo sforzo norma le  $N$ , le proiezioni  $dx$  e  $dy$  di un tronco  $ds$  subiscono le variazioni:

$$\Delta dx = \Delta ds \cdot \cos(\theta) = \frac{Nds}{EA} \cos(\theta) = \frac{Ndx}{EA} \quad (3.6)$$

$$\Delta dy = \Delta ds \cdot \sin(\theta) = \frac{Nds}{EA} \sin(\theta) = \frac{Ndy}{EA} \quad (3.7)$$

Allo stesso modo vi saranno delle variazioni per effetto dello spostamento trasversale  $\gamma ds$  dovute al taglio  $T$ :

$$\Delta dx = \gamma ds \cdot \sin(\theta) = \chi \frac{Tds}{GA} \sin(\theta) = \chi \frac{Tdy}{GA} \quad (3.8)$$

$$\Delta dy = -\gamma ds \cdot \cos(\theta) = -\chi \frac{Tds}{GA} \cos(\theta) = -\chi \frac{Tdx}{GA} \quad (3.9)$$

Il moto relativo della sezione A rispetto alla sezione B fissa sarà quindi la sommatoria degli spostamenti di tutti i tronchi  $ds$  tra A e B quindi:

$$\begin{cases} \Delta(\theta_a - \theta_b) = -\varphi_{ab} = -\int_a^b \frac{Mds}{EJ} \\ \Delta(x_a - x_b) = \int_a^b \frac{Mds}{EJ}(y_a - y) + \int_a^b \frac{Ndx}{EA} + \int_a^b \chi \frac{Tdy}{GA} \\ \Delta(y_a - y_b) = -\int_a^b \frac{Mds}{EJ}(x_a - x) + \int_a^b \frac{Ndy}{EA} - \int_a^b \chi \frac{Tdx}{GA} \end{cases} \quad (3.10)$$

## 3.3 La tensione

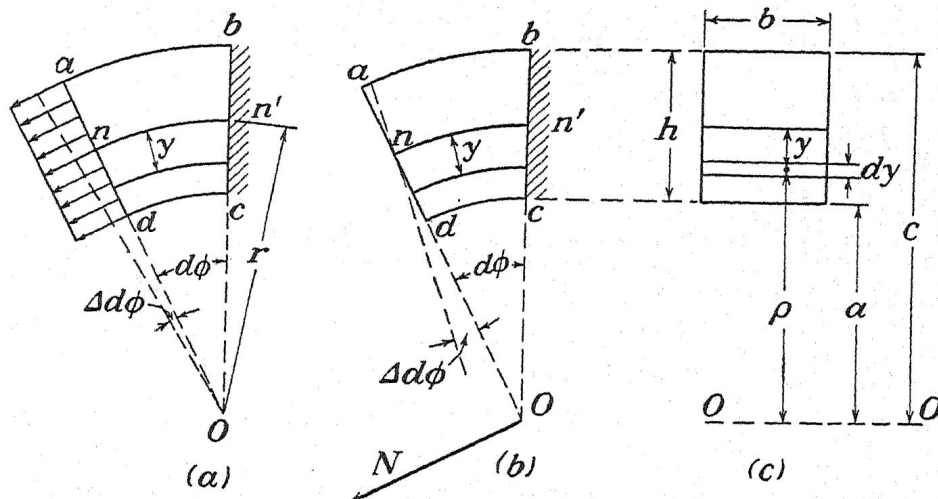


Figura 3.3

Consideriamo una tensione  $\sigma$  uniformemente distribuita sulla sezione trasversale di un concio di arco infinitesimo del quale chiameremo  $\mathcal{S}$  la sezione caricata (ad) e  $\mathcal{S}_1$  la sezione fissa (bc) (fig. 3.3). Chiamando  $nn'$  l'asse baricentrico della sezione, le fibre a distanza  $y$  dall'asse subiranno un allungamento pari a:

$$\frac{\sigma(r-y)d\phi}{E} \quad (3.11)$$

l'allungamento è quindi proporzionale alla distanza  $(r-y)$  dal centro di curvatura  $O$  del concio. Questo implica che una tensione normale uniformemente distribuita sulla sezione  $\mathcal{S}$  causerà non solo l'allungamento delle fibre, ma anche una rotazione della sezione  $\mathcal{S}$  rispetto alla sezione  $\mathcal{S}_1$  supposta fissa di un'angolo:

$$\Delta(d\phi) = \frac{\Delta(ds)}{r} = \frac{\sigma d\phi}{E} = \frac{Nd\phi}{EA} \quad (3.12)$$

nella quale  $N$  è l'integrale della tensione normale  $\sigma$  sulla sezione  $\mathcal{S}$ :  $N = \int_{\mathcal{S}} \sigma d\mathcal{S}$

Un'altro semplice caso di deformazione è quello in cui la sezione  $\mathcal{S}$  ruota rispetto al suo asse  $nn'$  e non rispetto al centro  $O$  di curvatura; chiamando  $\Delta(d\phi)$  l'angolo di rotazione della sezione, possiamo dire che l'allungamento di una fibra qualunque alla distanza  $y$  da  $nn'$  è pari a  $y \cdot \Delta(d\phi)$  e la tensione normale in essa è pari a:

$$\sigma = \frac{y\Delta(d\phi)}{(r-y)d\phi} E = \varepsilon E \quad (3.13)$$

Integrando sulla superficie  $\mathcal{S}$  troviamo lo sforzo normale  $N$  ed il momento flettente  $M$  che devono esservi applicati per ottenere le deformazioni viste:

$$N = \int_{\mathcal{S}} \frac{y \Delta(d\phi)}{(r-y)d\phi} E d\mathcal{S} = \frac{E \Delta(d\phi)}{d\phi} \int_{\mathcal{S}} \frac{y}{r-y} d\mathcal{S} \quad (3.14)$$

$$M = \int_{\mathcal{S}} \frac{y^2 \Delta(d\phi)}{(r-y)d\phi} E d\mathcal{S} = \frac{E \Delta(d\phi)}{d\phi} \int_{\mathcal{S}} \frac{y^2}{r-y} d\mathcal{S} \quad (3.15)$$

Dalla (3.15) ricordando l'identità:

$$\frac{y^2}{r-y} = \frac{ry}{r-y} - y \quad (3.16)$$

e che il momento statico  $S_x$  rispetto all'asse baricentrico è nullo:  $\int_{\mathcal{S}} y d\mathcal{S} = 0$  otteniamo:

$$M = \frac{E \Delta(d\phi)}{d\phi} \int_{\mathcal{S}} \frac{y^2}{r-y} d\mathcal{S} = \frac{E \Delta(d\phi)}{d\phi} \left[ r \int_{\mathcal{S}} \frac{y}{r-y} d\mathcal{S} - \int_{\mathcal{S}} y d\mathcal{S} \right] = rN \quad (3.17)$$

dall'equazione, se raccogliamo il termine  $1/r$ , otteniamo il termine:

$$\int_{\mathcal{S}} \frac{y^2}{1-y/r} d\mathcal{S} = J \quad (3.18)$$

in cui  $J$  è l'inerzia della sezione, il che ci porta a scrivere:

$$\frac{\Delta(d\phi)}{rd\phi} = \frac{\Delta(d\phi)}{ds} = \frac{M}{EJ} \quad (3.19)$$

la quale sostituita della (3.13) ci permette di trovare la tensione normale sulla sezione:

$$\sigma = \frac{M}{J} y \cdot \frac{1}{1-y/r} \quad (3.20)$$

nella quale il secondo termine è dovuto alla curvatura della sezione. Indaghiamo ora l'errore che si ottiene trascurando il termine relativo alla curvatura per diversi rapporti tra altezza della sezione  $h$  e raggio  $r$  nel caso di sezioni rettangolari.

Dall'equazione (3.18) sviluppando il termine  $\frac{1}{1-y/r}$  con McLaurin otteniamo:

$$\frac{1}{1-y/r} = 1 + \frac{y}{r} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{y^3}{r^3} + \frac{y^4}{r^4} + \sigma(5) \quad (3.21)$$

quindi nel caso di una sezione rettangolare l'inerzia risulta:

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 \left[ 1 + \frac{y}{r} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{y^3}{r^3} + \frac{y^4}{r^4} + \sigma(5) \right] dx dy \\
 &= b \left[ \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4r} + \frac{y^5}{5r^2} + \frac{y^6}{6r^3} + \frac{y^7}{7r^4} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \\
 &= b \left[ \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^5}{160r^2} + \frac{bh^7}{1792r^4} \right] \\
 &= \frac{bh^3}{12} \left[ 1 + \frac{3}{5} \left( \frac{h}{2r} \right)^2 + \frac{3}{7} \left( \frac{h}{2r} \right)^4 \right]
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

i termini tra parentesi indicano il contributo della curvatura dell'asse geometrico, a come si può ben vedere diventano trascurabili all'aumentare del rapporto  $h/r$  in particolare: per avere un errore trascurabile nella determinazione della tensione e

**Tabella 3.1:** *Errore di sottostima che si commette nel calcolo di  $J$  al variare del rapporto tra l'altezza della sezione  $h$  ed il raggio di curvatura  $r$*

$h/r$	errore %
2/3	7.195767
1/2	3.917411
1/5	0.604286
1/10	0.150268
1/20	0.037517
1/50	0.006000
1/100	0.001500
1/200	0.000375

della deformazione, sarà quindi necessario avere un rapporto  $h/r > 1/5$  rispettato ampiamente in tutte le strutture ad arco riguardanti il campo infrastrutturale, ove questi valori si attestano solitamente maggiori di  $1/20$ . Potrà quindi da qui in poi essere utilizzata la teoria che di consueto si applica alle travi rettilinee.



# Capitolo 4

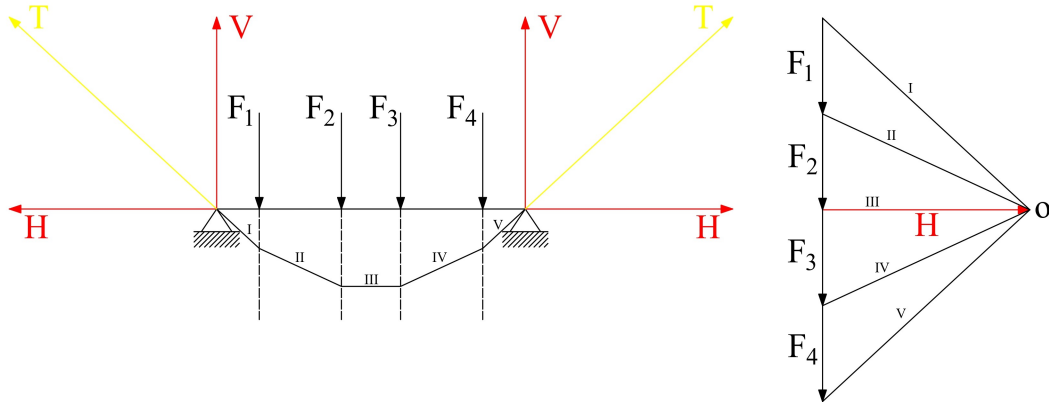
## La curva delle pressioni

### 4.1 Il poligono funicolare

Sia data una trave semplicemente appoggiata soggetta ad una serie di forze  $F_1, F_2, \dots, F_n$  dev'essere perché l'equilibrio sia garantito che alle estremità si esplichino le forze  $V_A$  e  $V_B$  tali che  $\sum_{i=1}^n f_i = V_A + V_B$ . Immaginiamo ora che la trave venga sostituita da una fune inestensibile e senza peso, essa si disporrà, curvandosi in modo tanto più accentuato tanto più lo saranno le forze  $F_i$  su di essa giacenti. Sarà però necessario per mantenere l'equilibrio il presentarsi di una nuova forza orizzontale  $H$  alle imposte in modo da rendere equilibrati anche i momenti. La somma vettoriale delle due reazioni  $V$  ed  $H$ , risulterà quindi pari alla tensione di trazione del filo tra il vincolo in  $A$  e la posizione della prima forza  $F_1$  (sia detta essa  $T_1$ ) e la sua direzione, coinciderà con la direzione di disposizione del filo nello spazio. É quindi possibile iterare questo procedimento per ogni intervallo tra  $F_i$  ed  $F_{i+1}$  fino a  $F_n$ - $B$  dove  $T_n$  sarà pari a  $V_B + H_B$ . La direzione delle trazioni andrà progressivamente diminuendo fino ad invertirsi completamente a causa della somma vettoriale delle forze verticali. Per rendere speditivo il procedimento viene utilizzato il metodo del poligono funicolare, nel quale fissato un punto  $O$ , si possono individuare le risultanti delle forze con il metodo punta-coda.

Immaginiamo ora di "congelare" il filo fino ad ora trattato nella sua configurazione deformata e capovolgerlo: le direzioni di pura trazione diventano quindi di pura compressione; è questo il concetto su cui si basa la curva della pressione: una spezzata (nel caso di carichi discreti) o una curva (nel caso di carico distribuito) che identifichi in ogni punto la direzione tangente alla risultante di tutte le forze

che lo precedono.



**Figura 4.1:** Poligono funicolare per una trave soggetta a carichi verticali

## 4.2 Proprietà

La curva della pressione, presenta alcune proprietà (fig. 4.2) generali di importante interesse le quali consentono di comprenderne in modo semplice le potenzialità ed il funzionamento:

1. In ogni arco, la curva delle pressioni per una determinata configurazione di carico è unica e (anche se può essere indeterminata) ed è il poligono che ha come lato iniziale e finale la risultante della somma dei vettori  $V$  ed  $H$  all'imposta. Essa come abbiamo visto rappresenta in ogni punto la direzione della retta d'azione della risultante di tutte le forze che precedono quel punto.
2. La curva può fornire fondamentali informazioni sulla statica dell'arco infatti: data la risultante  $R$  in una sezione  $S$  dell'arco, la sua proiezione lungo la normale e la parallela alla sezione forniscono rispettivamente il taglio  $T$  e lo sforzo normale  $N$  nella sezione  $S$ ; se è presente un'eccentricità  $e$  tra la curva della pressione e l'asse dell'arco allora il momento flettente in  $S$  è dato da  $R \cdot e$ .
3. Se l'arco è reticolare si possono leggere allo stesso modo del punto precedente i momenti rispetto ai nodi della struttura



4. Se la curva della pressione è interamente contenuta all'interno del nocciolo d'inerzia di ogni sezione, allora l'arco risulta interamente compresso
5. Nel caso in cui i carichi siano esclusivamente verticali allora la risultante delle forze ha in ogni punto della curva la stessa componente orizzontale ed essa è pari alla spinta  $H$  all'imposta. Ma allora la curva della pressione riferita all'asse dell'arco è il diagramma dei momenti a meno del fattore  $H$
6. Una volta compreso il meccanismo del poligono funicolare, è molto semplice intuire l'andamento della curva delle pressioni per ogni condizione di carico: se le forze sono concentrate in una piccola area, allora la curva sarà più incurvata proprio in quel punto; ad esempio: se un arco è caricato in chiave la curva risulterà un una forma pressoché triangolare, con conseguente aumento dei momenti alle reni, se invece sono più caricate la reni la curva presenterà una leggera concavità in chiave, e una più pronunciata in vicinanza delle imposte. In questo modo si può "giocare" con i carichi (permanenti) sulla struttura in modo da ottimizzare la curva delle pressioni e farla coincidere il più possibile con l'asse dell'arco o se in fase di progettazione, viceversa.

### **La curva nell'arco a tre cerniere**

L'arco a tre cerniere presenta tre punti, le cerniere per l'appunto in cui il momento dev'essere per definizione nullo, questo per la proprietà numero 2) obbliga il passaggio della curva per le tre cerniere, essa è quindi univocamente determinata per ogni configurazione di carico. Si può quindi dare forma all'arco in modo che esso presenti momento nullo in tutte le sezioni facendone coincidere l'asse con la curva, questo è sempre possibile data l'unicità della curva per tre punti, la quale, anche in caso di cedimenti vi resta vincolata.

### **La curva negli archi iperstatici**

Nelle strutture iperstatiche la posizione della curva rispetto all'asse dell'arco è indeterminata, infatti, nel caso di archi a due cerniere la proprietà 2) obbliga al passaggio della stessa per le sole imposte, mentre nel caso dell'arco incastrato non vi sono punti di passaggio predeterminati lasciando spazio ad  $\infty^3$  soluzioni. Nelle strutture iperstatiche, non è possibile annullare im momenti facendo coincidere la curva con l'asse geometrico, in quanto anche se non fosse presente il momento, e

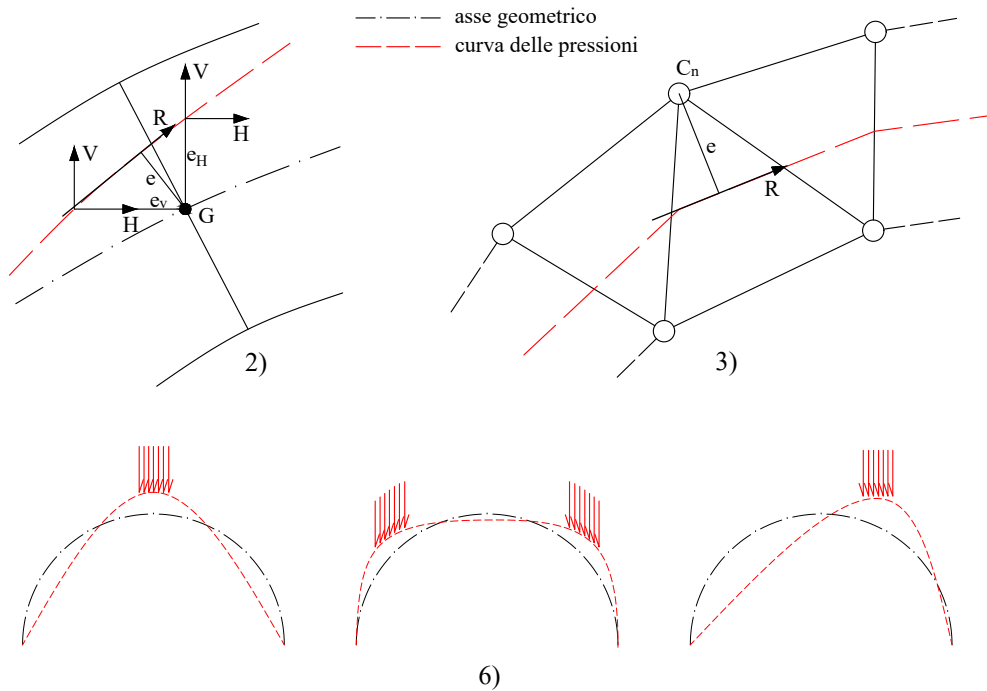


Figura 4.2: *Raffigurazione delle proprietà 2), 3), 6)*

quindi il taglio, sarebbe presente lo sforzo normale che deformando assialmente la struttura, ne produrrebbe uno spostamento spostandola dalla condizione ottimale generando quindi momento e taglio (fenomeno che incontreremo nel capitolo cinque come "caduta di spinta"). È possibile far coincidere le due linee solo attraverso la creazione di un'affetto artificiale di coazione che contrasti l'effetto della caduta.

### 4.2.1 La funicolare del peso proprio e del carico distribuito

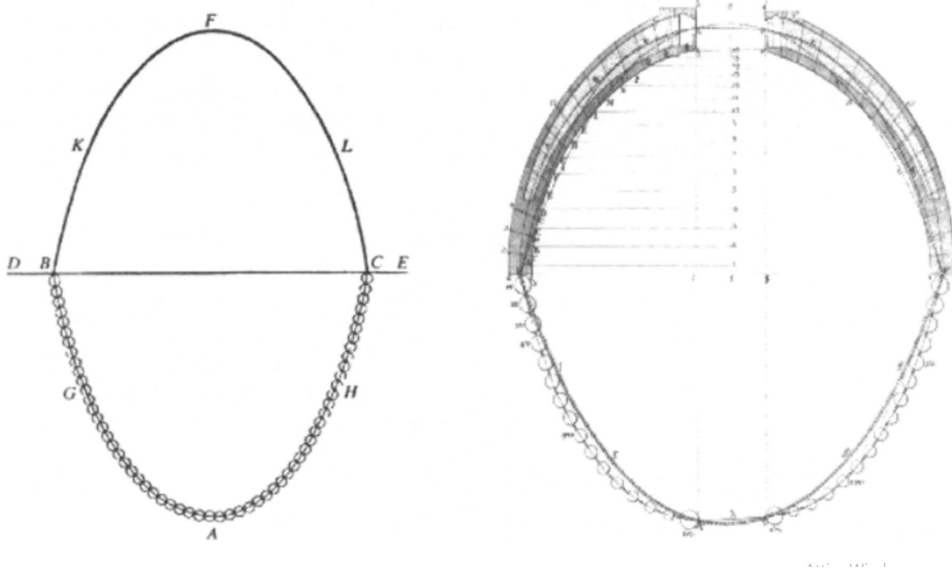
Di tutte le curve della pressione scrivibili per un'arco per ogni configurazione di carico, due sono di particolare interesse applicativo, esse sono rispettivamente la funicolare del peso proprio e quella di un carico uniformemente distribuito su tutta la luce.

Si immagini una fune di sezione costante sospesa ai due lembi, essa si disporrà secondo un preciso disegno che ricorda quello di una parabola, esso è rappresentato

dalla funzione:

$$y(x) = k \cdot \cosh \frac{x}{k} \quad (4.1)$$

in cui  $k$  è la distanza tra il vertice della curva e l'asse  $x$  prescelto; tale funzione prende il nome di "catenaria" (Huygens, 1691). Ripercorrendo quanto visto nei paragrafi precedenti ne deriva che se capovolta, essa rappresenta la curva della pressione per un'arco di spessore costante sottoposto solo al peso proprio; tali tipi di archi sono detti archi catenari o a catenaria invertita. Primo esempio di applicazione si trova nella volta del monumento di Taq-i-Kisra in Iraq risalente al sesto secolo dopo Cristo. In tempi recenti i maggiori esempi di studio di tale costruzione sono

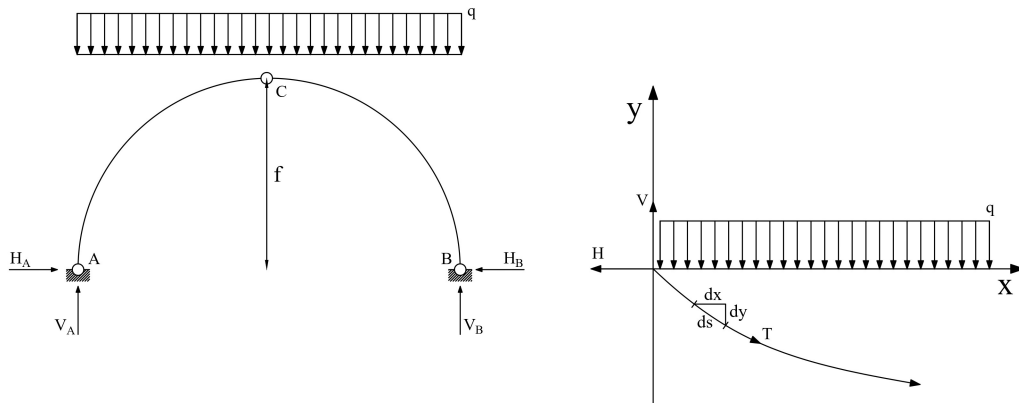


**Figura 4.3:** Schema di Giovanni Poleni per determinare la stabilità della cupola di San Pietro, ad egli fu chiesto di accertare che la cupola fosse ancora stabile dopo che una fessura si era generata parallelamente allo spessore. Poleni quindi divise la cupola in conci e la riprodusse in scala utilizzando il metodo visto del poligono funicolare.

stati compiuti da Hooke per la costruzione della cupola della cattedrale di St Paul e da Giovanni Poleni per la basilica di San Pietro. In particolare di Hooke si ricorda la celebre frase:

*"As hangs the flexible line, so but inverted will stand the rigid arch."*

la quale espone perfettamente in modo sintetico quanto detto. (fig. 4.3).



**Figura 4.4:** a) carico distribuito su arco circolare a tre cerniere, b) curva funicolare di un carico distribuito

Nel caso di carico distribuito costante su tutta la luce, l'equazione della curva della pressione è quella di una parabola; considerando infatti la figura (fig. 4.4) rappresentante la funzione di un carico distribuito e scrivendo l'equilibrio lungo x e y otteniamo:

$$\begin{cases} T \frac{dx}{ds} - H = 0 \\ +V - q \cdot x - T \frac{dy}{ds} = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

dalle quali, sostituendo la prima nella seconda e derivando otteniamo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{H} \quad (4.3)$$

la quale integrata due volte, essendo q costante, fornisce l'equazione di una parabola. Ecco che in ogni arco ad asse parabolico, se si trascurano il peso proprio e la caduta di spinta, i momenti risultano nulli. Allo stesso modo in un'arco a tre cerniere se si trascura il peso proprio (la caduta di spinta non è presente poiché la struttura è isostatica) non importa il ribassamento della struttura, ma dato che la parabola è vincolata al passaggio per le tre cerniere i momenti saranno ovunque nulli.

# Capitolo 5

## Le strutture ad arco

### Generalità

In una trave, la presenza di carichi verticali, rappresenta il generarsi di un momento flettente, equilibrato da una coppia interna formata dalle risultanti di trazione e compressione. Questo tipo di funzionamento, porta ad uno sfruttamento non ottimale del materiale (caso più significativo è quello del calcestruzzo armato), tale inconveniente può essere aggirato variando l'asse geometrico della trave in modo da creare una monta; in tal modo i carichi verticali genereranno nella struttura un'azione di compressione nettamente prevalente rispetto a quella di flessione, ciò porterà ad un pieno sfruttamento delle sezioni resistenti in particolare se composte da materiali con pressoché nulla resistenza a trazione.

Vediamo quindi come il comportamento ad arco sia creato dalla presenza di due fattori:

- Curvatura dell'asse geometrico
- Insorgere di una reazione orizzontale ( $H$ ) all'imposta, variabile con le condizioni di vincolo e l'altezza di monta

questi due fattori, conseguenza involutoria uno dell'altro, determinano il modo in cui la struttura resiste alle sollecitazioni flettenti, infatti, possiamo scrivere per ogni sezione la relazione:

$$M_a = M_t - H \cdot y \quad (5.1)$$

il momento in un arco è quindi pari a quello di una trave rettilinea di egual luce ( $M_t$ ) diminuito della quantità  $H \cdot y$  in cui  $y$  rappresenta la quota della sezione

considerata. Il momento di trave viene quindi supportato dall'arco in parte come momento flettente, ed in parte come coppia dipendente dalla geometria dell'asse.

Benché il comportamento degli archi sia esemplificato nella relazione (5.1), la legge di variazione del momento flettente, l'entità della spinta  $H$ , e altre caratteristiche variano al variare delle condizioni di vincolo, si hanno quindi tipicamente tre configurazioni:

- L'arco a tre cerniere
  
- L'arco a due cerniere
  
- L'arco incastrato

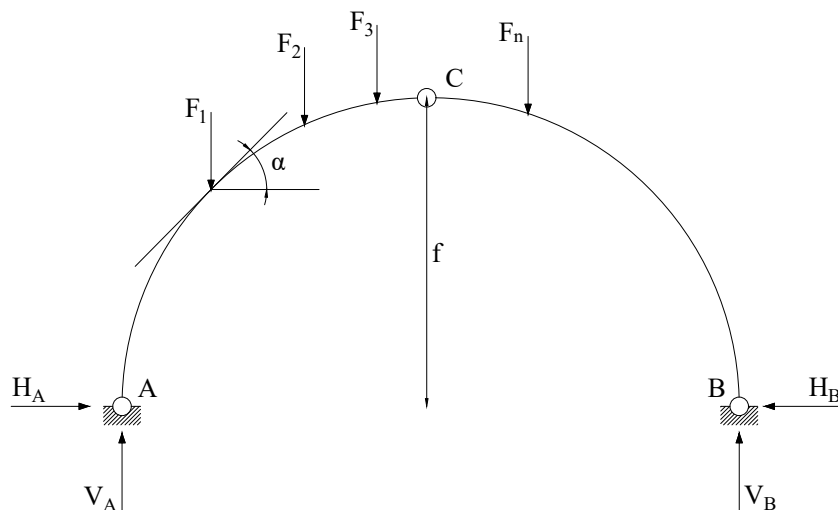
Anche se cronologicamente più giovane, inizieremo la trattazione partendo dalla configurazione a tre cerniere muovendoci verso gradi maggiori di iperstaticità in seguito.

## 5.1 L'arco a tre cerniere

L'arco a tre cerniere (fig. 5.1) presenta tra le possibili soluzioni costruttive quella certamente più semplice, in quanto isostatico è stato a lungo utilizzato nella costruzione di ponti e strutture di varia natura, esso ha il pregio di non risentire dei fenomeni di viscosità, ritiro, variazione di temperatura o cedimenti vincolari oltre ad offrire un'approccio di calcolo molto semplice, caratteristica di primaria importanza prima dell'avvento dei calcolatori automatici.

Data l'isostaticità della struttura, le reazioni vincolari possono essere trovate risolvendo un sistema di equazioni di equilibrio alla traslazione e alla rotazione. Le reazioni vincolari verticali, non essendo influenzate da quelle orizzontali, possono essere calcolate esattamente come nel caso di una trave isostatica di egual luce e soggetta agli stessi carichi; la reazione orizzontale  $H$  viene invece calcolata scrivendo l'equazione ausiliaria di equilibrio alla rotazione a destra o a sinistra della cerniera di sommità. Si ottiene quindi:

$$M_{C,DX} = +V_A \cdot x^* - \sum_{i=1}^n F_i \cdot (x^* - x_i) - H \cdot f = 0 \quad (5.2)$$



**Figura 5.1:** Schema statico di un'arco a tre cerniere

dove i primi due addendi a destra dell'uguaglianza rappresentano il momento nella trave equivalente ( $M_t^*$ ); possiamo quindi scrivere:

$$M_{C,DX} = M_t^* - H \cdot f = 0 \Rightarrow H = \frac{M_t^*}{f} \quad (5.3)$$

ovvero affinché la struttura risulti equilibrata, la spinta orizzontale all'imposta deve essere pari al momento in mezzeria della trave equivalente diviso per l'altezza in chiave dell'arco.

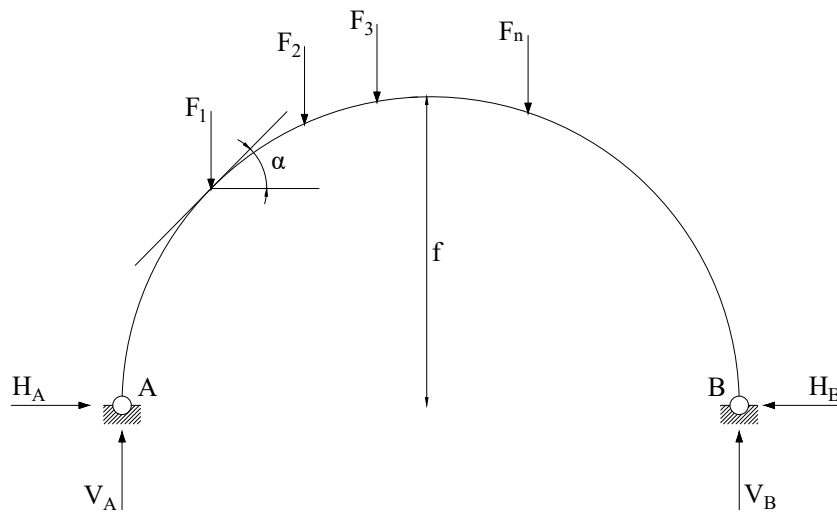
Una volta note le reazioni vincolari, è semplice calcolare i parametri della sollecitazione per una qualsivoglia sezione della struttura con le relazioni:

$$\begin{cases} M_S = +V_A \cdot x_s - \sum_{i=1}^n F_i \cdot (x_S - x_i) - H \cdot y_S \\ T_S = -H \cdot \sin(\alpha_S) + V_A \cdot \cos(\alpha_S) - \sum_{i=1}^n F_i \cdot \cos(\alpha_S) \\ N_S = -H \cdot \cos(\alpha_S) - V_A \cdot \sin(\alpha_S) + \sum_{i=1}^n F_i \cdot \sin(\alpha_S) \end{cases} \quad (5.4)$$

in cui  $\alpha_S$  rappresenta l'inclinazione della tangente all'arco rispetto all'orizzontale nella sezione S.

## 5.2 L'arco a due cerniere

L'arco a due cerniere (fig. 5.2), è una struttura una volta iperstatica, tale caratteristica lo rende più adatto a sopportare i carichi mobili rispetto alla sua controparte isostatica, ma allo stesso tempo gli permette di essere comunque immune a cedimenti vincolari di natura verticale. Esso risulta però soggetto a stati di coazione in caso di cedimenti orizzontali, variazioni termiche, ritiro e viscosità. L'arco a due cerniere è stato in passato utilizzato, e lo è tuttora per superare grandi luci con strutture prevalentemente metalliche; ne sono maggior espressione le opere di Eiffel quali il Maria Pia sul Duero e il Garabit sul Truyère.



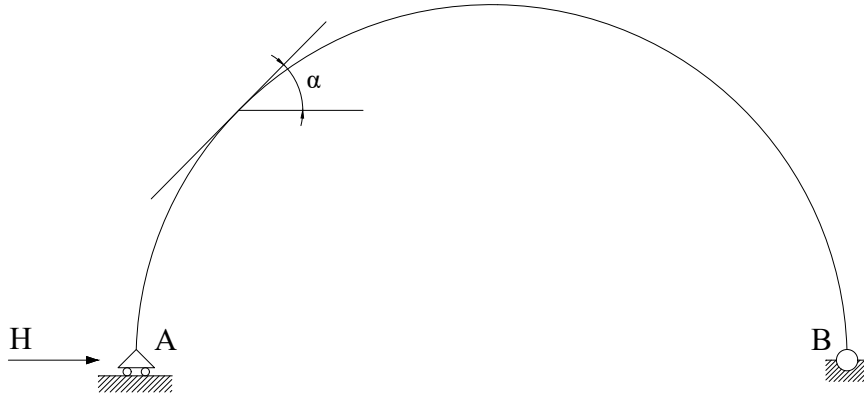
**Figura 5.2:** Schema statico di un'arco a due cerniere

Le reazioni verticali sono le più semplici da determinare, sono infatti le medesime di una trave isostatica di eguale luce e sottoposta agli stessi carichi; per determinare la componente orizzontale  $H$ , dobbiamo invece operare un calcolo elastico della struttura, svincolando ad esempio in  $A$ , sostituendo la cerniera con un'appoggio scorrevole e ristabilendo la congruenza. La spinta sarà quindi la forza che applicata al carrello renderà nullo il suo spostamento orizzontale dovuto ai carichi.

Applichiamo quindi il TLV nella forma delle equazioni di Müller-Breslau:

$$\xi_0 = \int_{Arco} \frac{MM'}{EJ} ds + \int_{Arco} \frac{\chi TT'}{GA} ds + \int_{Arco} \frac{NN'}{EA} ds = 0 \quad (5.5)$$





**Figura 5.3**

*Struttura isostatica ausiliaria in cui viene svincolata la reazione orizzontale in A*

Indichiamo con  $M_0$ ,  $T_0$  e  $N_0$  le sollecitazioni dovute ai soli carichi, mentre con  $M'$ ,  $T'$  ed  $N'$  le sollecitazioni della struttura ausiliaria (fig. 5.3) sollecitata dalla sola forza orizzontale  $H$  unitaria. Ricordando che:

$$M = M_0 - Hy \quad T = T_0 - H \sin(\alpha) \quad N = N_0 - H \cos(\alpha) \quad (5.6)$$

allora  $M'$ ,  $T'$  e  $N'$  risultano:

$$M' = -1 \cdot y \quad T' = -1 \cdot \sin(\alpha) \quad N' = -1 \cdot \cos(\alpha) \quad (5.7)$$

Sostituendo nella (5.5) otteniamo:

$$\int_{Arco} \frac{M_0 y}{EJ} ds + \int_{Arco} \frac{\chi T_0 \sin(\alpha)}{GA} ds + \int_{Arco} \frac{N_0 \cos(\alpha)}{EA} ds = \quad (5.8)$$

$$H \int_{Arco} \frac{y^2}{EJ} ds + H \int_{Arco} \frac{\chi \sin(\alpha)^2}{GA} ds + H \int_{Arco} \frac{\cos(\alpha)^2}{EA} ds$$

da cui ricaviamo  $H$ :

$$H = \frac{\int_{Arco} \frac{M_0 y}{EJ} ds + \int_{Arco} \frac{\chi T_0 \sin(\alpha)}{GA} ds + \int_{Arco} \frac{N_0 \cos(\alpha)}{EA} ds}{\int_{Arco} \frac{y^2}{EJ} ds + \int_{Arco} \frac{\chi \sin(\alpha)^2}{GA} ds + \int_{Arco} \frac{\cos(\alpha)^2}{EA} ds} \quad (5.9)$$

La (5.9) benché tenga conto di tutti i parametri deformativi, è molto complicata da risolvere, in particolare manualmente, se però si trascurano le deformazioni dovute all'azione tagliante e si utilizza per la deformazione da sforzo normale la relazione semplificata  $N \cong H/\cos(\alpha)$ , la (5.9) acquista la forma semplificata:

$$H = \frac{\int_{Arco} \frac{M_0 y}{EJ} ds}{\int_{Arco} \frac{y^2}{EJ} ds + \int_{Arco} \frac{1}{EA} ds} \quad (5.10)$$

questa equazione può essere utilizzata per tutte le configurazioni di carico, e offre risultati tanto più accurati tanto la più curva della pressione si avvicina all'asse dell'arco. Infine note le reazioni verticali, e la reazione orizzontale  $H$  è possibile calcolare i parametri della sollecitazione in qualsivoglia sezione  $S$  tramite le (5.4).

### 5.2.1 Variazioni termiche

Nell'arco a due cerniere, come per l'arco incastrato, la variazione termica può portare a considerevoli variazioni delle reazioni vincolari e dei parametri della sollecitazione, creando stati di coazione di entità non trascurabile. Come di consuetudine le strutture più colpite sono quelle metalliche che soprattutto in caso di forti incendi rischiano una considerevolissima perdita della capacità portante che può condurre al collasso dell'intera struttura. Si tratteranno ora le variazioni termiche come applicate direttamente alle reni dell'arco, questo può accadere in uno svariato ventaglio di scenari, ma in particolare in ponti o viadotti i quali siano interessati da un'incendio (ad esempio di un treno o di un natante) al disotto di essi o di strutture a via inferiore o intermedia in cui l'incendio si inneschi all'altezza del piano viario. Nei ponti a via superiore invece l'incendio interesserebbe l'impalcato che solitamente è sorretto sull'estradosso dell'arco tramite stilate; nel caso in cui esse siano incastrate sia al livello dell'impalcato che dell'estradosso, una variazione termica all'impalcato causerebbero all'arco coppie concentrate nei punti di incastro delle stilate; questa evenienza data la rigidità flessionale finita delle stilate, dell'impalcato e dei suoi vincoli, risulta molto meno temibile rispetto alle precedenti.

Data una variazione termica lineare non uniforme di entità  $\Delta t_i$  all'intradosso e  $\Delta t_e$  all'estradosso, possiamo calcolare nel modo seguente le variazioni della spinta  $H$ : come una variazione costante  $\Delta t_0$  più una variazione lineare  $\Delta t_1 = \Delta t_i - \Delta t_e$ . Calcoliamo quindi la variazione di lunghezza del concio infinitesimo dovuta alla

variazione costante come:

$$d\varepsilon = \alpha ds \Delta t_0 \quad (5.11)$$

e nel piano della corda come:

$$dx = \alpha dx \Delta t_0 \quad (5.12)$$

l'allungamento o accorciamento della corda risulterà quindi:

$$\Delta l = \int_{Arco} \alpha dx \Delta t_0 \quad (5.13)$$

la variazione di spinta per un carico termico uniforme varrà quindi:

$$H_{\Delta t_0} = - \frac{\int_{Arco} \alpha dx \Delta t_0}{\int_{Arco} \frac{y^2}{EJ} ds + \int_{Arco} \frac{1}{EA} ds} \quad (5.14)$$

la restante parte di carico termico, essendo triangolare, andrà a creare una rotazione:

$$\varphi = \frac{\alpha ds \Delta t_1}{h} \quad (5.15)$$

la variazione di H risulta quindi:

$$H_{\Delta t_1} = - \frac{\int_{Arco} \frac{\alpha ds \Delta t_1 y}{h}}{\int_{Arco} \frac{y^2}{EJ} ds + \int_{Arco} \frac{1}{EA} ds} \quad (5.16)$$

Una variazione termica non costante è quindi la somma dei due termini  $H_{\Delta t_0} + H_{\Delta t_1}$  e risulta positiva (cioè da sommare ad  $H_{2C}$ ) in caso di aumento di temperatura, e negativa viceversa.

Si stima che l'effetto del ritiro in un'arco in calcestruzzo sia assimilabile ad una variazione di temperatura negativa costante sull'altezza della sezione di 15°C.

### 5.2.2 Cedimenti vincolari

L'arco a due cerniere non risente di cedimenti vincolari verticali, in quanto sarebbero accomodati dalla rotazione delle cerniere alle imposte, ma solamente di cedimenti orizzontali: sia detto  $\Delta l$  l'allungamento della corda

$$H_{ced} = - \frac{\Delta l}{\int_{Arco} \frac{y^2}{EJ} ds + \int_{Arco} \frac{1}{EA} ds} \quad (5.17)$$

La forza  $H_{\text{ced}}$  va sempre sommata ad  $H_{2C}$  in quanto il segno meno aggiusta l'identità; un'allungamento della corda corrisponde ad un contributo negativo, mentre un'accorciamento ad uno positivo.

### 5.3 L'arco incastrato

L'arco incastrato, o inarticolato, è una struttura con tre vincoli sovrabbondanti, quindi tre incognite iperstatiche, che si riducono però a due quando la configurazione di carico risulta simmetrica sulla luce. I metodi di soluzione della struttura sono molteplici, si può infatti iterare il procedimento visto nel caso dell'arco a due cerniere scrivendo tre equazioni di congruenza e risolvendo un sistema di tre equazioni in tre incognite. Possiamo però intraprendere una strada diversa, facendo uso della teoria dell'elasticità vista nel Capitolo 1, e dei teoremi di Culmann sull'ellisse di elasticità per ricondurci a tre equazioni tra loro indipendenti con cui trovare le incognite iperstatiche. Svincoliamo quindi completamente un'estremo (fig. 5.4), la struttura a questo punto diventa una mensola, e troviamo il centro dell'ellisse di elasticità (baricentro dei pesi elastici) relativo alla sezione A che, data la rigidità omogenea della struttura coinciderà con il baricentro della struttura stessa quindi, una volta individuata la funzione  $f(x)$  della linea d'asse possiamo trovare la coordinata  $y_O$  del centro dell'ellisse ( $x_O$  chiaramente è a metà della corda):

$$Y_O = \frac{1}{\|L_\gamma\|} \cdot \int_A^B \gamma_x(t) \|\gamma'(t)\| dt \quad (5.18)$$

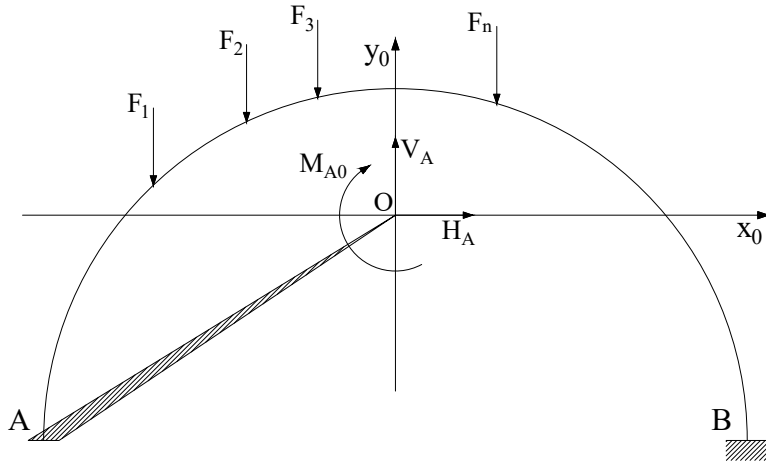
dove  $L_\gamma$  rappresenta la lunghezza dell'asse geometrico e si calcola come:

$$L_\gamma = \int_\gamma f(x) ds = \int_A^B \|\gamma'(t)\| dt \quad (5.19)$$

applichiamo quindi ora le reazioni  $M_A, V_A$  e  $H_A$  al centro O dell'ellisse, colleghiamolo con un braccio rigido alla sezione A d'estremità e annulliamo le rotazioni  $\varphi$  e le traslazioni  $\zeta$  ed  $\eta$  rispettivamente lungo x e y:

$$\varphi = \int_{Arco} \frac{M}{EJ} ds = 0 \quad \zeta = \int_{Arco} \frac{My}{EJ} - H \int_{Arco} \frac{ds}{EA} = 0 \quad \eta = \int_{Arco} \frac{Mx}{EJ} ds = 0 \quad (5.20)$$

nelle relazioni si è trascurato il contributo del taglio, inoltre nel secondo termine della seconda equazione si ricorda che  $N \cdot \cos(\alpha) = H$ , mentre nella terza non viene



**Figura 5.4:** Reazioni incognite applicate al centro elastico  $O$  dell'ellisse

considerato lo sforzo normale, poiché l'accorciamento delle due parti dell'arco è simmetrico e si compensa. Decomponiamo ora l'espressione del momento rispetto al baricentro elastico  $O$  e agli assi  $x_O$  e  $y_O$  in esso centrati:

$$M = M_0 + M_{AO} + V_A x - H_A y \quad (5.21)$$

in questo modo, le (5.20) diventano :

$$\begin{cases} \int_{Arco} \frac{M_0}{EJ} ds + M_{AO} \int_{Arco} \frac{ds}{EJ} + V_A \int_{Arco} \frac{x}{EJ} ds - H_A \int_{Arco} \frac{y}{EJ} ds = 0 \\ \int_{Arco} \frac{M_0 y}{EJ} ds + M_{AO} \int_{Arco} \frac{y}{EJ} ds + V_A \int_{Arco} \frac{xy}{EJ} ds - H_A \int_{Arco} \frac{y^2}{EJ} ds - H_A \int_{Arco} \frac{ds}{EA} = 0 \\ \int_{Arco} \frac{M_0 x}{EJ} ds + M_{AO} \int_{Arco} \frac{x}{EJ} ds + V_A \int_{Arco} \frac{x^2}{EJ} ds - H_A \int_{Arco} \frac{xy}{EJ} ds = 0 \end{cases} \quad (5.22)$$

le quali, ricordando che il momento statico del peso elastico ed i momento centrifugo del peso elastico rispetto agli assi baricentrici è chiaramente nullo e ricordando che

il peso elastico ha la forma (2.9) fanno divenire le (5.22) le (5.23):

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{Arco} \frac{M_0}{EJ} ds + M_{AO} \int_{Arco} \frac{ds}{EJ} \\ \int_{Arco} \frac{M_0 y}{EJ} ds - H_A \int_{Arco} \frac{y^2}{EJ} ds - H_A \int_{Arco} \frac{ds}{EA} = 0 \\ \int_{Arco} \frac{M_0 x}{EJ} ds + V_A \int_{Arco} \frac{x^2}{EJ} ds \end{array} \right. \quad (5.23)$$

Possiamo quindi ricavare il momento  $M_{AO}$  rispetto al baricentro elastico, e le componenti orizzontale e verticale della reazione vincolare in A:

$$M_{AO} = - \frac{\int_{Arco} \frac{M_0}{J} ds}{\int_{Arco} \frac{ds}{J}} \quad (5.24)$$

$$H_A = \frac{\int_{Arco} \frac{M_0 y_0}{J} ds}{\int_{Arco} \frac{y_0^2}{J} ds + \int_{Arco} \frac{ds}{A}} \quad (5.25)$$

$$V_A = - \frac{\int_{Arco} \frac{M_0 x_0}{J} ds}{\int_{Arco} \frac{x_0^2}{J} ds} \quad (5.26)$$

Una volta noti i risultati delle relazioni (5.24) (5.25) (5.26) è possibile calcolare il momento in a  $M_A$  trasportando le forze  $V_A$  ed  $H_A$  dal centro elastico O all'estremo A avendo cura di aggiungere l'opportuna coppia di trasporto:

$$M_A = M_{AO} + H_A \cdot |y_A| - V_A \cdot |x_A| \quad (5.27)$$

dove  $x_A$  e  $y_A$  sono le coordinate di A rispetto ad O. A questo punto è possibile calcolare i parametri della sollecitazione in qualsivoglia sezione S con le seguenti:

$$\begin{cases} M_S = M_A + V_A \cdot x_s - \sum_{i=1}^n F_i \cdot (x_S - x_i) - H_A \cdot y_S \\ T_S = -H_A \cdot \text{sen}(\alpha_S) + V_A \cdot \text{cos}(\alpha_S) - \sum_{i=1}^n F_i \cdot \text{cos}(\alpha_S) \\ N_S = -H_A \cdot \text{cos}(\alpha_S) - V_A \cdot \text{sen}(\alpha_S) + \sum_{i=1}^n F_i \cdot \text{sen}(\alpha_S) \end{cases} \quad (5.28)$$

nelle quali  $x_S$  e  $x_i$  sono calcolate in base ad un sistema di riferimento fisso in A e con asse X orientato verso sinistra, mentre l'angolo  $\alpha$  è l'angolo di inclinazione della tangente all'asse nella sezione S rispetto all'orizzontale.

### 5.3.1 Variazioni termiche

Immaginiamo un'arco simmetrico svincolato nella sezione A d'estremità, una variazione termica uniforme, causerebbe lo spostamento della sezione A nella posizione A' in direzione della corda cioè l'arco derivato sarebbe una proiezione omotetica del primo rispetto all'incastro in B. La forza  $H_{\Delta_{t_0}}$  necessaria a ricomporre la figura, passa per il baricentro elastico e in accordo con il quarto dei Teoremi di Culmann:

$$H_{\Delta_{t_0}} \cdot \int_{Arco} \frac{y_0^2}{EJ} ds = H_{\Delta_{t_0}} \cdot J_{x_0} = \alpha l \Delta_{t_0} \quad (5.29)$$

da cui si ricava  $H_{\Delta_{t_0}}$ . Anche in questo caso il ritiro è assimilabile ad una variazione termica uniforme

### 5.3.2 Cedimenti Vincolari

In un'arco incastrato, a differenza dell'arco incernierato, i cedimenti vincolari possono essere delle rotazioni oltre che degli scorrimenti. Immaginiamo quindi che ad una delle due sezioni terminali siano imposti una rotazione  $\varphi_A$  ed un cedimento  $\delta_A$  con una componente verticale  $\zeta_{\delta_A}$  e una orizzontale  $\eta_{\delta_A}$ . Andiamo quindi a determinare le componenti  $M_{A0}$ ,  $V_A$  e  $H_A$  delle reazioni che se applicate al baricentro elastico genererebbero le distorsioni suddette (il procedimento è pressoché analogo a quello utilizzato per trovare le reazioni vincolari, in quel caso si cercavano le forze che applicate in O annullavano gli spostamenti causati dai carichi). Definiamo

quindi gli spostamenti rispetto ad O:

$$\varphi_O = \varphi_A \quad \eta_O = \eta_{\delta A} + \varphi_A \cdot |x_A| \quad \zeta_O = \zeta_{\delta A} + \varphi_A \cdot |y_A| \quad (5.30)$$

grazie al primo e al quarto teorema di Culmann possiamo quindi determinare le reazioni:

$$M_{AO} = -\frac{\varphi_O}{\mathcal{G}} \quad V_A = -\frac{\eta_O}{J_{yO}} \quad H_A = -\frac{\zeta_O}{J_{xO}} \quad (5.31)$$

per trovare il momento in A il procedimento è il medesimo della (5.27); i segni delle forze sono decisi già all'interno delle relazioni (5.31) come nel caso precedente.

## 5.4 La caduta di spinta

Si consideri un'arco a tre cerniere con asse funicolare del carico, come abbiamo visto, questa condizione porta la struttura ad essere sollecitata da solo sforzo normale  $N = H \cos(\alpha)$ , lo stato deformativo coinciderà quindi con un'accorciamento della linea d'asse e dagli spostamenti che ne derivano. Trascurando quindi la deformazione assiale non si otterrebbero spostamenti. Si supponga ora di rendere iperstatica la struttura appena trattata bloccando prima la cerniera in chiave (arco a due cerniere), e poi anche quelle all'estremità (arco incastrato), in questi casi, le reazioni iperstatiche devono annullare le deformazioni della struttura, ma se essa si supponesse infinitamente rigida allora queste reazioni sarebbero nulle. Quanto detto implica che il regime di sforzo di un'arco iperstatico è lo stesso di quello di un'arco a tre cerniere se si suppone il primo infinitamente rigido assialmente. Nella realtà però questo non può accadere, infatti a causa dello sforzo normale l'arco si accorcerà della quantità:

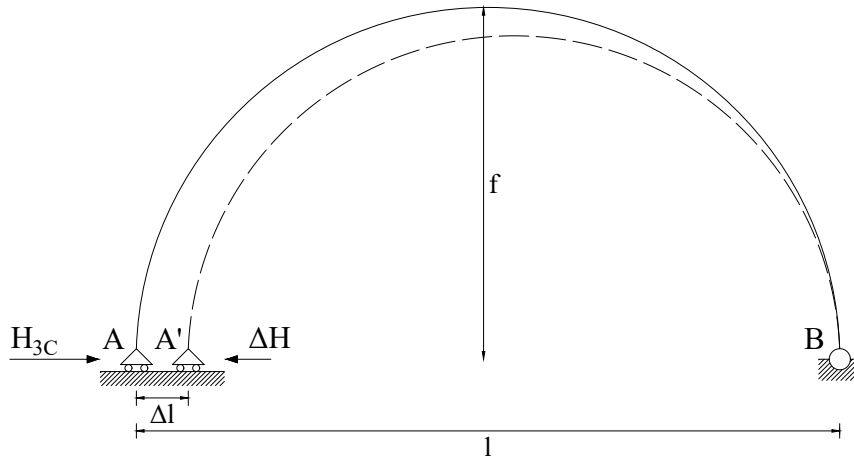
$$d\varepsilon = \frac{N ds}{EA} = -\frac{H_{3C}}{\cos(\alpha)} \frac{ds}{EA} \quad (5.32)$$

nel singolo concio infinitesimo  $ds$ , mentre l'intero arco subirà un'accorciamento (negativo)  $\Delta l$  della corda (fig. 5.5) pari a:

$$\Delta l = -H_{3C} \int_{Arco} \frac{ds}{EA} \quad (5.33)$$

Per ristabilire quindi la congruenza deve essere applicata una forza  $\Delta H$  opposta





**Figura 5.5**

*Accorciamento dell'asse causato dalla deformabilità assiale della struttura e conseguente sforzo  $\Delta H$*

ad H pari a:

$$\Delta H = -H_{3C} \frac{\int_{Arco} \frac{ds}{EA}}{\int_{Arco} \frac{y^2 ds}{EJ} + \int_{Arco} \frac{ds}{EA}} \quad (5.34)$$

Vediamo ora brevemente la dimostrazione della (5.34).

*Dimostrazione.* Partendo dal sistema principale isostatico dell'arco funicolare a due cerniere, possiamo applicare in B la spinta  $H_{3C}$  che si avrebbe se l'arco fosse a tre cerniere e trattarla come fosse un carico, così facendo, applicando nuovamente Müller-Breslau (5.4) e ricordando che l'arco è funicolare otteniamo la seguente forma delle (5.5):

$$M = M_0 - (H_{3c} + \Delta H) \cdot y \Rightarrow M = -\Delta H \cdot y \quad (5.35)$$

$$N = N_0 - (H_{3c} + \Delta H) \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow N = -\frac{H_{3C}}{\cos(\alpha)} - \Delta H \cdot \cos(\alpha) \quad (5.36)$$

da cui

$$\Delta H = -H_{3C} \frac{\int_{Arco} \frac{ds}{EA}}{\int_{Arco} \frac{y^2 ds}{EJ} + \int_{Arco} \cos(\alpha)^2 \frac{ds}{EA}} \quad (5.37)$$

e semplificando come in precedenza il termine relativo allo sforzo normale, otteniamo la (5.34)  $\square$

Nel caso dell'arco incastrato, la caduta di spinta viene calcolata sempre con la (5.37) ma ponendo attenzione al fatto che gli assi hanno origine in  $O^1$ .

Possono essere fornite le seguenti equazioni semplificate se si trascura il secondo termine della (5.34) e chiamando per chiarezza  $J_{x,2C}$  il momento d'inerzia dei pesi elastici dell'arco a due cerniere e  $J_{x,inc}$  il momento d'inerzia dei pesi elastici rispetto agli assi per  $O$ .

$$\Delta H_{2C} = -H_{3C} \frac{\int_{Arco} \frac{ds}{A}}{\int_{Arco} \frac{y^2 ds}{J}} = \frac{\int_{Arco} \frac{ds}{A}}{J_{x,2C}} \quad (5.38)$$

$$\Delta H_{x,inc} = -H_{3C} \frac{\int_{Arco} \frac{ds}{A}}{\int_{Arco} \frac{y_O^2 ds}{J}} = \frac{\int_{Arco} \frac{ds}{A}}{J_{x,inc}} \quad (5.39)$$

chiaramente la caduta di spinta nell'arco a due cerniere sarà inferiore rispetto a quella dell'arco incastrato poiché  $J_{x,2C} > J_{x,inc}$ <sup>2</sup>. Si può quindi affermare che a parità di carico, e di geometria, la spinta all'imposta scende al crescere dell'iperstaticità della struttura:

$$H_{3C} > H_{2C} > H_{inc} \quad (5.40)$$

Indaghiamo ora gli effetti della caduta di spinta nel comportamento statico della struttura. Nell'arco a due cerniere, l'effetto di  $\Delta H$  porta ad un'innalzamento verso l'alto della curva della pressione infatti il primo lato, formato dalla risultante di

<sup>1</sup>Benché nella soluzione dell'arco a due cerniere non sia stato calcolato il baricentro elastico della struttura, il ragionamento resta valido, poiché le cerniere possono essere immaginate come una parte della struttura in cui  $J \rightarrow 0 \Rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \infty$  e quindi il baricentro elastico si trova sulla congiungente delle due cerniere al suolo

<sup>2</sup>Solitamente la caduta di spinta è nell'ordine del 3-4% della spinta orizzontale  $H$ , e nell'arco a due cerniere risulta fino a sei volte inferiore rispetto all'arco incastrato con pari configurazioni geometrica e di carico.

$H_A + V_A$  risulta più verticale tanto maggiore è la caduta, essa porterà quindi alla formazione di momenti positivi su tutta la campata pari a:

$$M_{S_{\Delta H}} = -\Delta H \cdot y \quad (5.41)$$

dove  $y$  rappresenta la quota della sezione  $S$ . Questo incremento dei momenti, non è affatto benevolo per lo stato tensionale dell'arco che è pensato per sforzi prevalenti di compressione. Sono stati quindi nel tempo pensati espedienti costruttivi atti a diminuire questo fenomeno, i più famosi sono:

- innalzare la linea d'asse in modo da creare momenti negativi che compensino quelli da caduta di spinta.
- disporre in chiave martinetti idraulici in modo da restituire artificialmente la forzante  $\Delta H$

entrambe queste soluzioni devono essere calcolate con molta attenzione per non creare squilibri nella struttura, in particolare se l'arco è realizzato in calcestruzzo si dovrà tener conto della deformazione viscosa a breve e lungo termine. Nell'arco incastrato invece la caduta di spinta porta all'insorgere di momenti negativi alle imposte e positivi in campata, essi si annullano in corrispondenza dell'intersezione tra l'asse  $X$  passante per il baricentro elastico e l'asse dell'arco (ricordiamo che la caduta di spinta  $\Delta H$  trovata con la (5.39) è calcolata come agente in  $O$ ).

Alla luce di quanto visto possiamo quindi affermare che anche se in via del tutto teorica un'arco iperstatico può essere costruito secondo la funicolare di una particolare configurazione di carico (solitamente quella di peso proprio), ma, data la caduta di spinta, l'arco non sarà mai del tutto esente dalla sollecitazione flettente.



# Capitolo 6

## Applicazioni e osservazioni

### 6.1 Confronto tra schemi statici

In questo paragrafo vengono presentati alcuni semplici esempi che hanno lo scopo di validare alcune osservazioni già esposte nel capitolo precedente, nonché il metodo solutivo delle equazioni (5.24) (5.25) (5.26) di pagina 42 sugli archi incastrati, non sempre di facile interpretazione. In particolare verrà mostrato come:

- 1) Se non si considera il contributo della deformazione assiale (caduta di spinta) la spinta all'imposta non varia al variare della configurazione di vincolo.
- 2) Gli effetti che la caduta di spinta ha negli archi a 2 cerniere ed incastrati per quanto riguarda l'insorgere di momenti parassiti.
- 3) Come il diagramma del momento sia determinate per la definizione delle forme tipiche degli archi al variare della configurazione di vincolo.

Per fare ciò è necessario risolvere l'arco nelle sue tre configurazioni per il caso di carico uniformemente distribuito e puntuale in chiave; l'arco in questione è parabolico (la forma parabolica è dovuta al fatto che permette di mostrare come nel caso di carico uniformemente distribuito il momento risulti ovunque nullo) di freccia unitaria e rapporto freccia luce ( $f/l$ ) pari a 0.5 caricato con i suddetti carichi unitari, pari quindi a 1 kN e 1 kN/m.

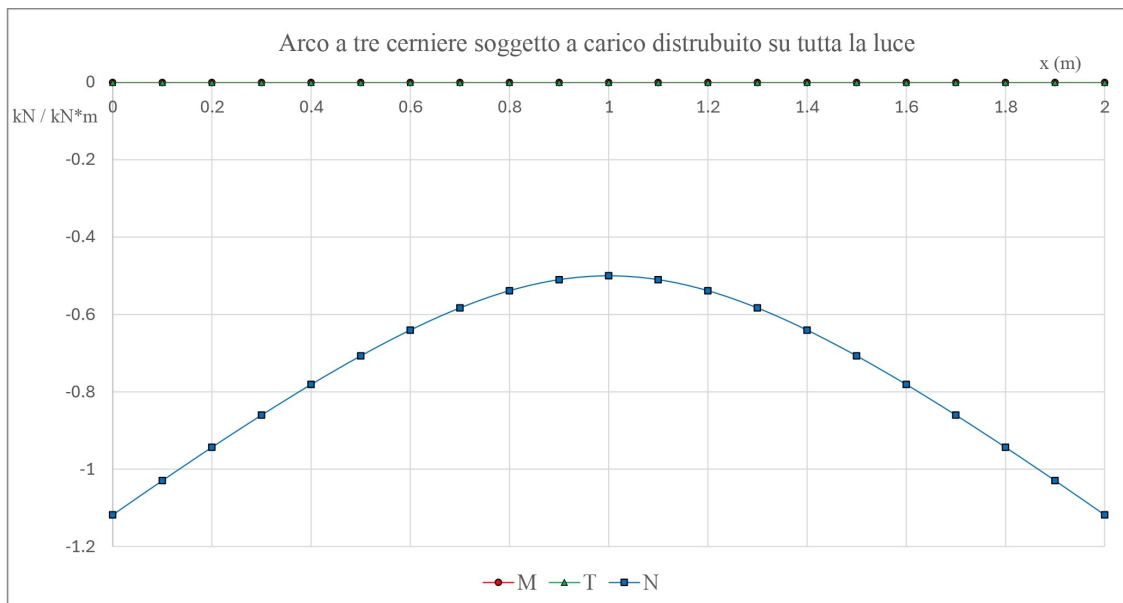
Iniziamo dagli archi a tre cerniere, la loro soluzione come visto nel paragrafo precedente richiede la sola risoluzione delle equazioni di equilibrio indefinite più un'equazione ausiliaria di equilibrio alla rotazione a destra o a sinistra della cerniera in chiave (5.2). Una volta note le reazioni vincolari è possibile calcolare ovunque

i parametri della sollecitazione con le (5.4). Si riportano ora i risultati delle reazioni vincolari nelle due configurazioni di carico e i grafici con i parametri della sollecitazione:

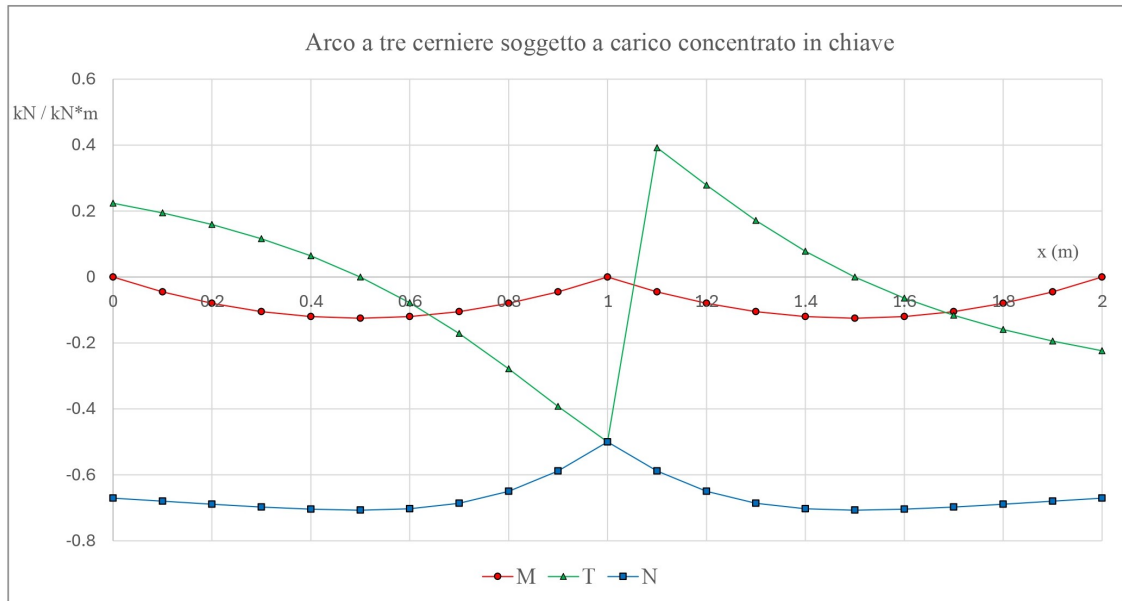
**Tabella 6.1:** Reazioni vincolari per la configurazione di carico distribuito su tutta la luce e di carico concentrato in chiave

Configurazione	$V_A$	$V_B$	$H_A$	$H_B$
Carico distribuito	1	1	0.5	0.5
Carico concentrato	0.5	0.5	0.5	0.5

Dai due grafici fig. 6.1 e fig. 6.2 possiamo notare immediatamente come nell'arco vi sia un'assoluto predominio dello sforzo normale rispetto alla sollecitazione flettente. Inoltre lo sforzo normale ha un massimo (positivo) proprio in chiave dove l'unica sollecitazione è la spinta orizzontale  $H$ . Notiamo inoltre come il momento sia nullo nel caso del carico distribuito in quanto l'arco è funicolare della configurazione di carico (paragrafo 4.2.1 eq. (4.3))



**Figura 6.1:** Diagrammi di Momento  $[M]$ , Taglio  $[T]$  e sforzo Normale  $[N]$  per l'arco a tre cerniere soggetto a carico uniformamene distribuito su tutta la luce



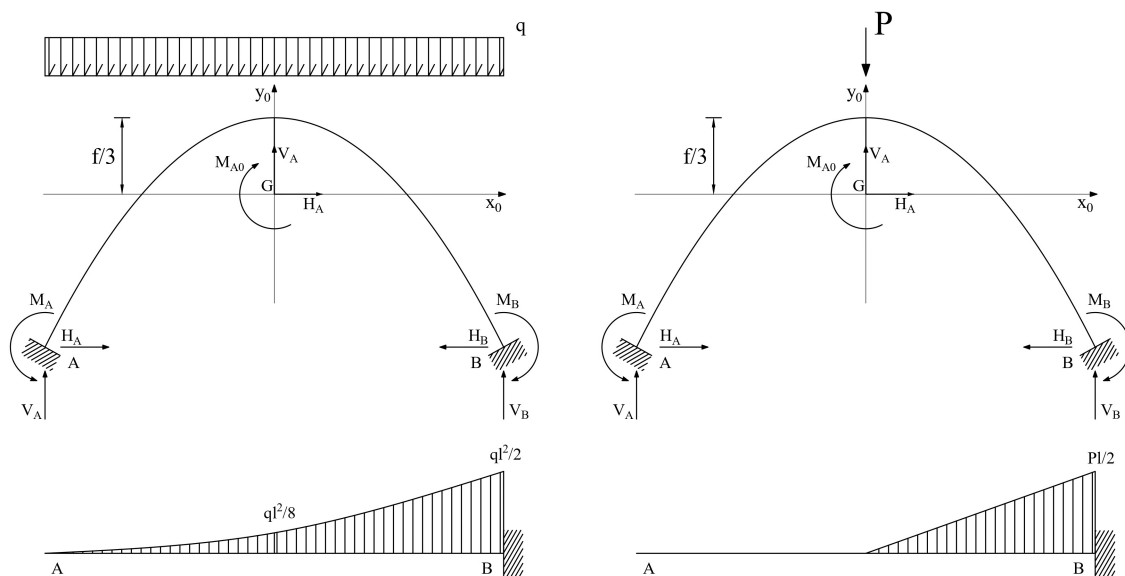
**Figura 6.2:** Diagrammi di Momento  $[M]$ , Taglio  $[T]$  e sforzo Normale  $[N]$  per l'arco a tre cerniere soggetto a carico concentrato in chiave

Vediamo ora la soluzione per gli archi incastrati, essa viene posta prima di quella per le due cerniere poiché in essi la soluzione dell'equazione della spinta  $H$  è la medesima, si preferisce quindi procedere con il caso più complesso.

Ricordiamo come la soluzione sia fornita dalle (5.24) (5.25) (5.26), esse sono fornite in termini di integrale sull'arco, ma l'utilizzo di coordinate curvilinee complicherebbe ulteriormente la soluzione, si utilizzano quindi le coordinate cartesiane poste con origine in corrispondenza del baricentro elastico  $G$  (che in questo caso è anche il baricentro della struttura). Come primo passo deve essere calcolata l'equazione dell'asse rispetto a  $G$ , per fare ciò troviamo l'equazione della parabola passante per tre punti con vertice in  $(0,0)$ , sia essa  $y(x)$  e trasliamo poi verticalmente la funzione fino a portarne l'origine in  $G$  sia essa  $y_0(x)$ .

$$y = \frac{4fx^2}{l^2} \quad y_0 = \frac{f}{3} - \frac{4fx^2}{l^2} \quad (6.1)$$

Come secondo passo è necessario trovare l'equazione del momento dovuto ai carichi per la struttura ausiliaria, essa è sempre una trave rettilinea, svincolata nel polo in cui si vogliono conoscere le reazioni vincolari iperstatiche; nel nostro caso è quindi una mensola incastrata.



**Figura 6.3:** In alto: schemi statici e di carico per gli archi incastrati; in basso: strutture ausiliarie

Anche l'equazione del momento deve essere riferita alla mezzeria della trave, quindi:

$$M_0 = -\frac{q}{2} \left( x + \frac{l}{2} \right)^2 \quad (6.2)$$

si possono quindi risolvere i vari integrali (dei quali viene fornita la soluzione numerica) che compongono le equazioni:

$$\int_{Arco} M_0 ds = \int_{-l/2}^{+l/2} -\frac{q}{2} \left( x + \frac{l}{2} \right)^2 dx_0 = -1.3333kn \cdot m^2 \quad (6.3)$$

$$\int_{Arco} ds = \int_{-l/2}^{+l/2} dx_0 = 2m \quad (6.4)$$

$$\int_{Arco} M_0 x_0 ds = \int_{-l/2}^{+l/2} -\frac{q}{2} \left( x + \frac{l}{2} \right)^2 \cdot x dx_0 = -0.6667kn \cdot m^3 \quad (6.5)$$

$$\int_{Arco} x_0^2 ds = \int_{-l/2}^{+l/2} x^2 dx_0 \quad (6.6)$$

$$\int_{Arco} M_0 y_0 ds = \int_{-l/2}^{+l/2} -\frac{q}{2} \left( x + \frac{l}{2} \right)^2 \left( \frac{f}{3} - \frac{4fx^2}{l^2} \right) = 0.0889kn \cdot m^5 \quad (6.7)$$

$$\int_{Arco} y_0^2 ds = \int_{-l/2}^{+l/2} \left( \frac{f}{3} - \frac{4fx^2}{l^2} \right)^2 = 0.1778m^5 \quad (6.8)$$

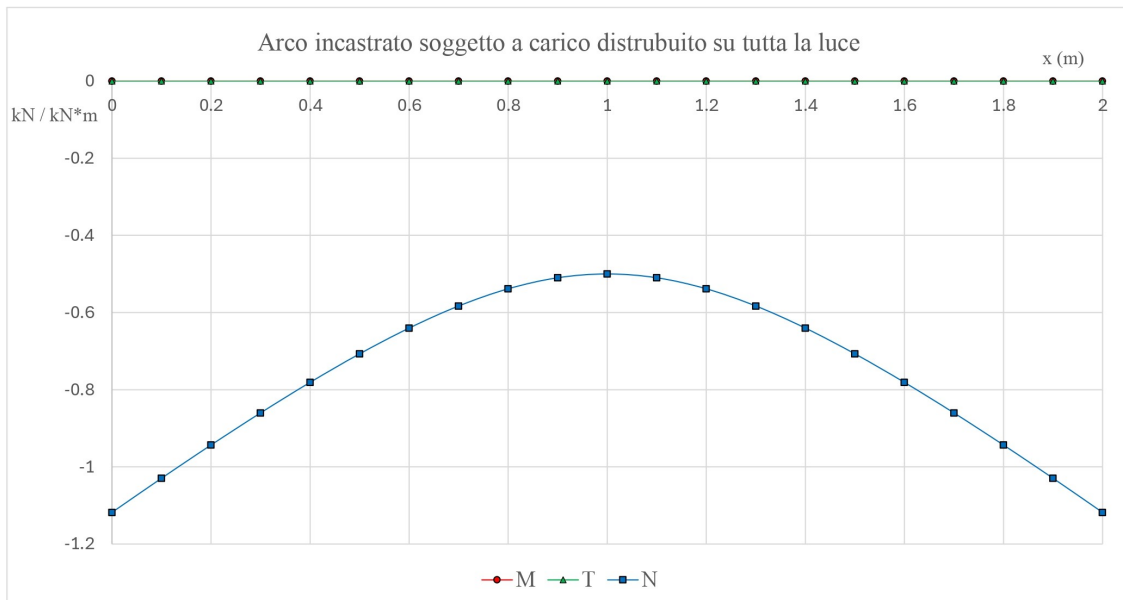


sostituendo nelle precedenti i valori di  $l=2$  m,  $f=1$  m,  $q= 1\text{kN/m}$  e applicando le formule otteniamo valori di  $M_{A0}$ ,  $V_A$  e  $H_A$  riferiti al baricentro elastico: Infine è

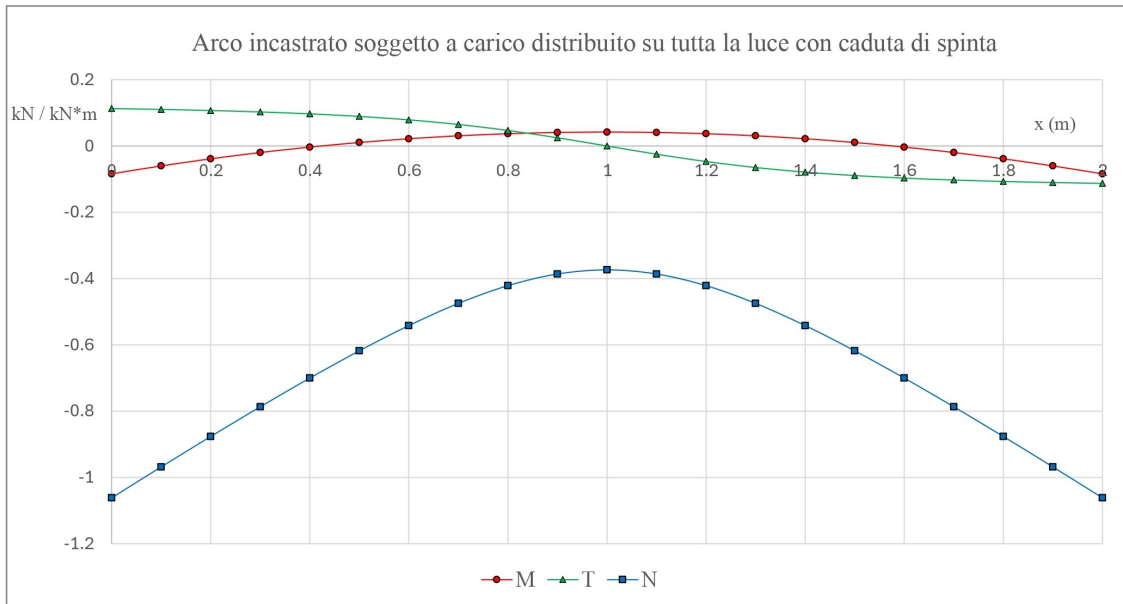
**Tabella 6.2:** Incognite iperstatiche riferite al baricentro elastico della struttura, con \* è rappresentato il valore della spinta considerando la caduta nella (5.25)

$M_{A0}(\text{kN} \cdot \text{m})$	$V_A(\text{kN})$	$H_A(\text{kN})$
0.6667	1	0.5 (0.3738)*

necessario trasportare le forze dal baricentro G all'incastro in A, avendo cura di considerare i momenti di trasporto: risulta quindi  $M_A = 0\text{kN} \cdot \text{m}$



**Figura 6.4:** Diagrammi di Momento  $[M]$ , Taglio  $[T]$  e sforzo Normale  $[N]$  per l'arco incastrato soggetto a carico uniformemente distribuito su tutta la luce



**Figura 6.5:** *Diagrammi di Momento [M], Taglio [T] e sforzo Normale [N] per l'arco incastrato soggetto a carico uniformemente distribuito su tutta la luce considerando l'effetto della caduta di spinta*

Per il caso di carico concentrato in chiave, la procedura è la medesima, ma dev'essere considerata la seguente equazione di  $M_0$ :

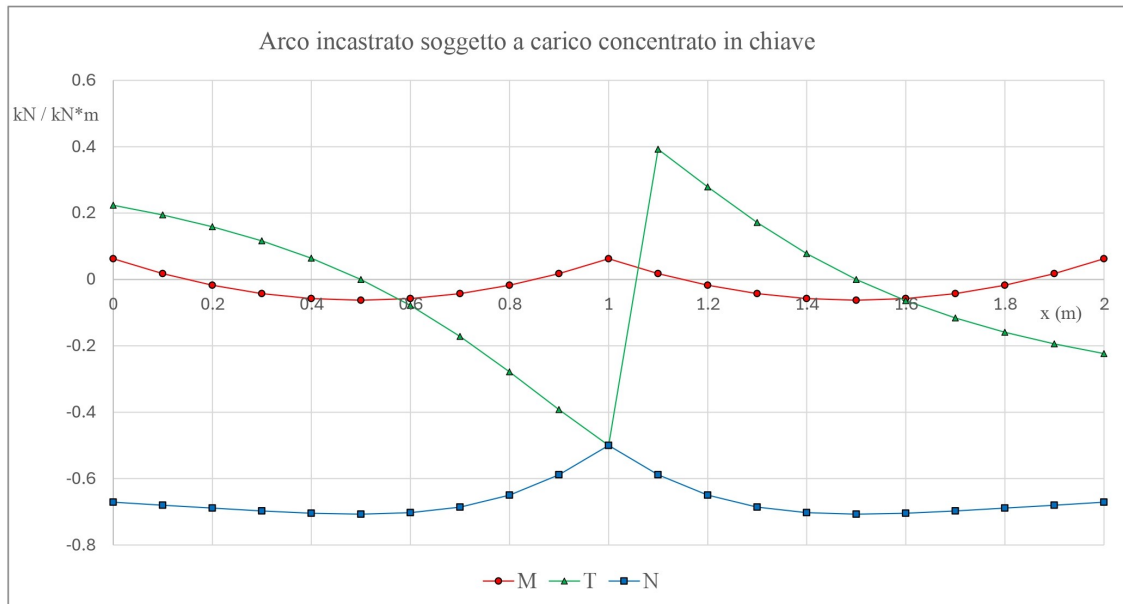
$$-P \cdot x \quad (6.9)$$

ricordando di integrare i numeratori delle relazioni precedenti solo tra 0 e  $+l/2$ . Si ottengono i seguenti risultati: Infine è necessario trasportare le forze dal baricentro

**Tabella 6.3:** *Incognite iperstatiche riferite al baricentro elastico della struttura*

$M_{A0}(kN \cdot m)$	$V_A(kN)$	$H_A(kN)$
0.2500	0.5	0.5

G all'incastro in A, avendo cura di considerare i momenti di trasporto: risulta quindi  $M_A = 0.0625kn \cdot m$ . Negli archi caricati di punta non ha senso calcolare la caduta di spinta, con quanto visto nel capitolo 3, la curva della pressione è quasi una bilatera, il che la fa scostare molto dall'asse causando deformazioni da momento molto superiori a quelle da sforzo normale.



**Figura 6.6:** Diagrammi di Momento  $[M]$ , Taglio  $[T]$  e sforzo Normale  $[N]$  per l'arco incastrato soggetto a carico concentrato in chiave

L'arco a due cerniere, rappresenta una semplificazione dell'arco incastrato, è infatti necessario risolvere solo le (6.7) e (6.8) nelle quali però va cambiata l'equazione di  $y_0$ , poiché come visto nel capitolo precedente, questa soluzione va trattata come la precedente ma con  $G$  giacente tra le due cerniere, per ciò:

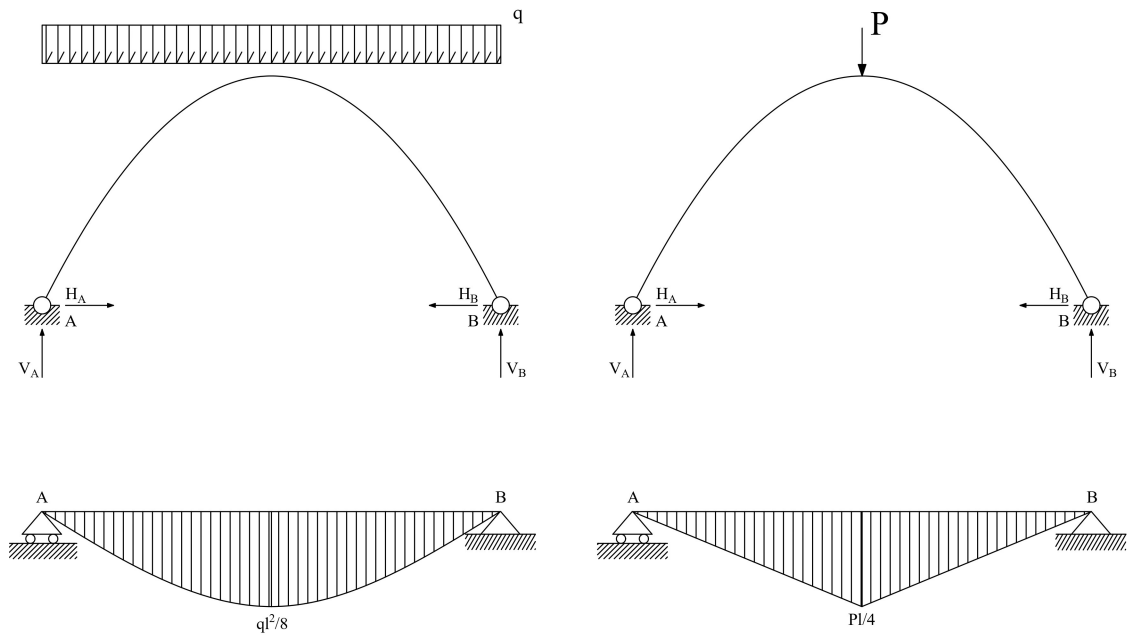
$$y = f - \frac{4fx^2}{l^2} \quad (6.10)$$

da cui si ottiene:

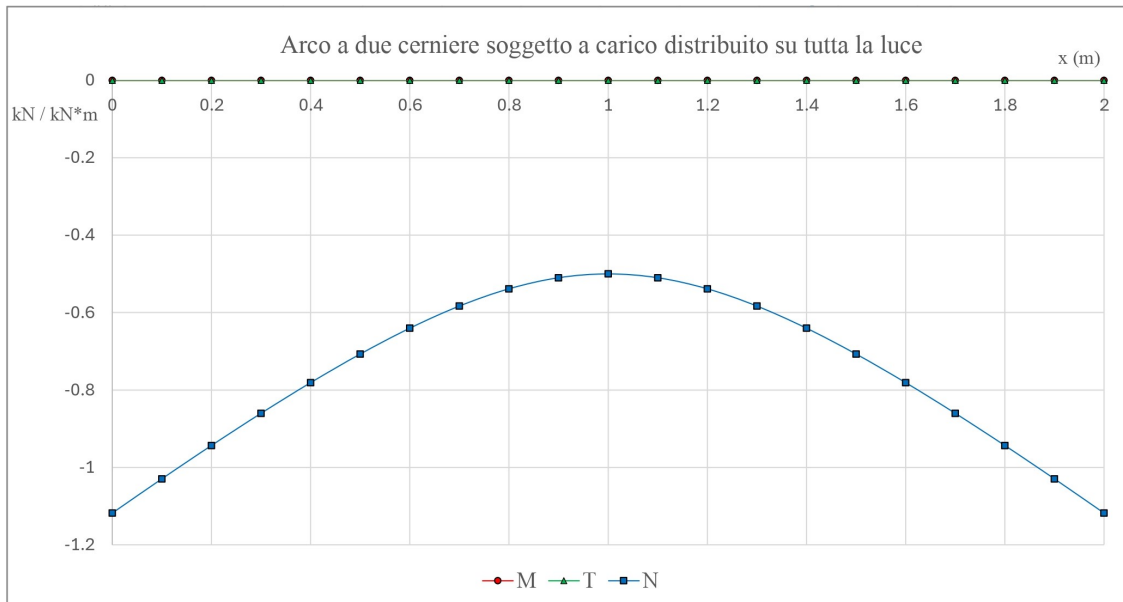
**Tabella 6.4:** Reazioni vincolari per la configurazione di carico distribuito su tutta la luce e di carico concentrato in chiave

Configurazione	$V_A$	$V_B$	$H_A$	$H_B$
Carico distribuito	1	1	$0.5 (0.4688)^*$	$0.5(0.4688)^*$
Carico concentrato	0.5	0.5	0.5	0.5

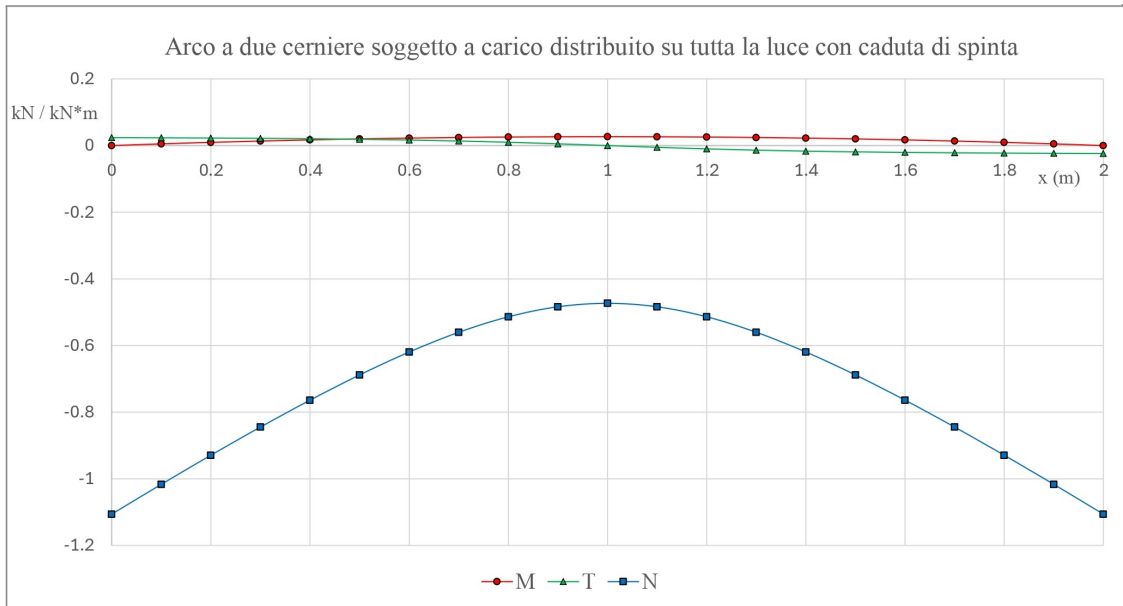
Vengono ora riportati come nel caso precedente i grafici di momento, taglio e sforzo normal per entrambe le configurazioni.



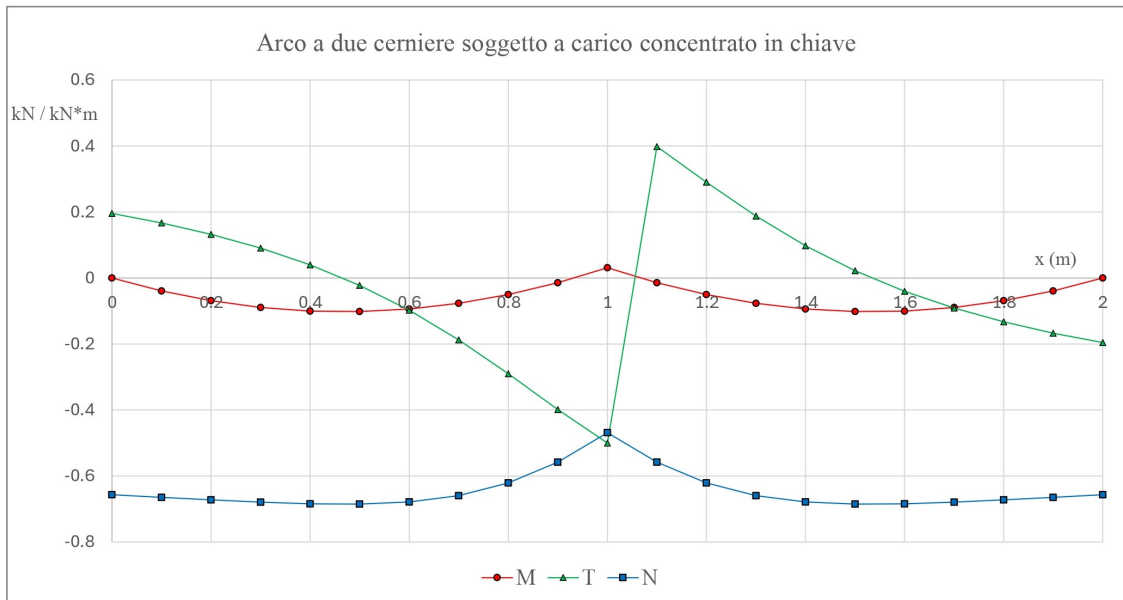
**Figura 6.7:** In alto: schemi statici e di carico per gli archi a due cerniere; in basso: strutture ausiliarie



**Figura 6.8:** Diagrammi di Momento  $[M]$ , Taglio  $[T]$  e sforzo Normale  $[N]$  per l'arco a due cerniere soggetto a carico uniformemente distribuito su tutta la luce



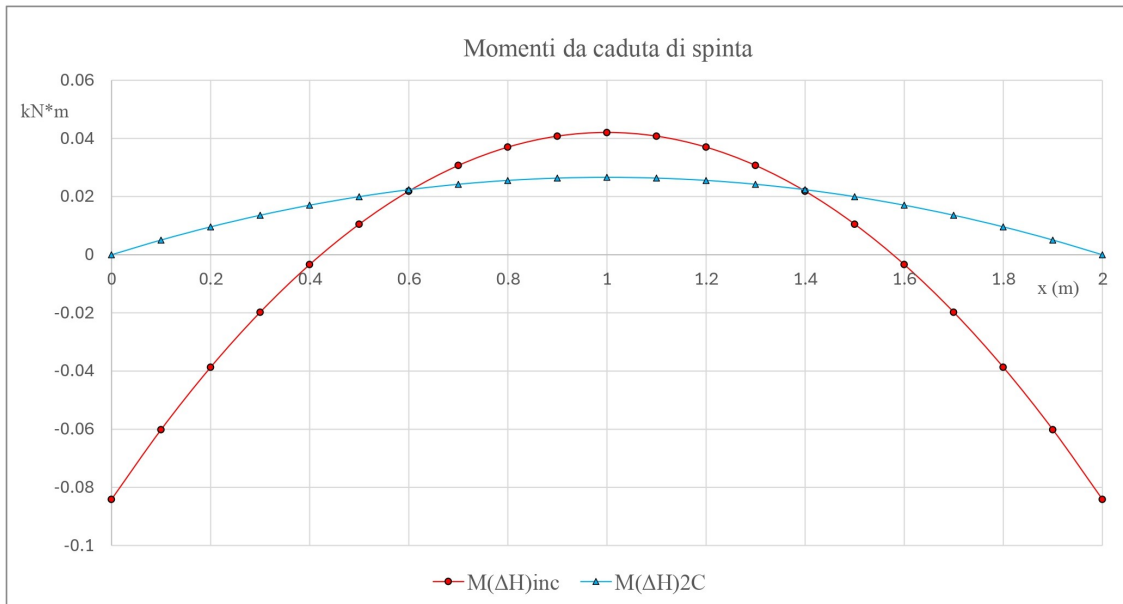
**Figura 6.9:** Diagrammi di Momento [M], Taglio [T] e sforzo Normale [N] per l'arco a due cerniere soggetto a carico uniformemente distribuito su tutta la luce considerando l'effetto della caduta di spinta



**Figura 6.10:** Diagrammi di Momento [M], Taglio [T] e sforzo Normale [N] per l'arco a due cerniere soggetto a carico concentrato in chiave

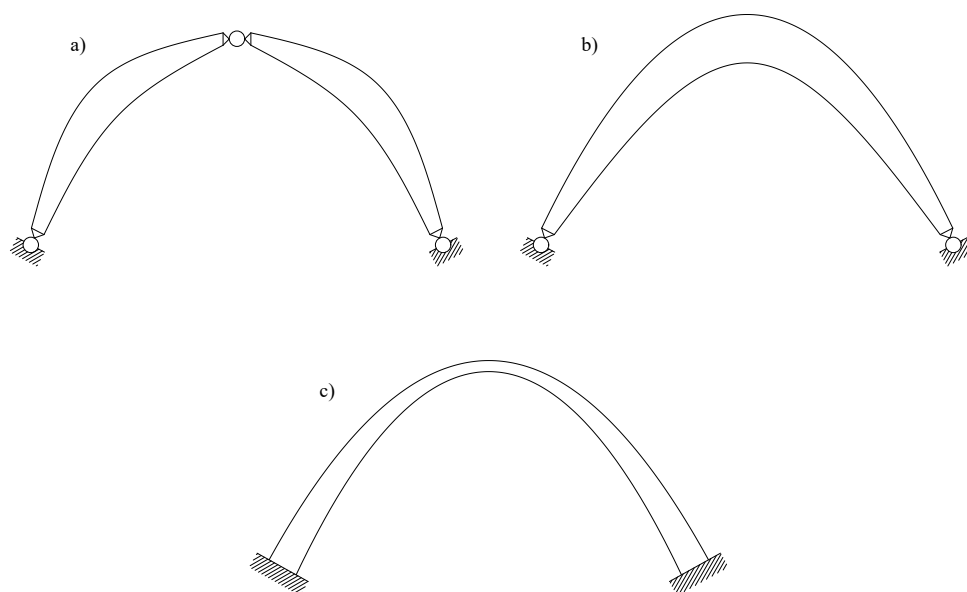
### 6.1.1 Osservazioni

- 1) La prima osservazione presentata nel paragrafo precedente, ha una spiegazione molto semplice: la spinta orizzontale  $H$ , influenzata solo dalla geometria nel caso dell'arco a tre cerniere, lo è anche dalla rigidità assiale e flessionale nelle configurazioni iperstatiche, ma se essa non viene considerata (secondo addendo del denominatore delle (5.10) e (5.25)) il risultato sarà il medesimo, in particolare si noti come gli altri termini delle suddette equazioni dipendano solo dalla geometria dell'asse con  $y$  e  $y_0$  e dai carichi con  $M_0$ . Possiamo quindi affermare che se si considera la struttura infinitamente rigida la spinta  $H$  dipende dalla sola geometria, in particolare dal rapporto  $f/l$ , se si eseguono i calcoli con un'arco circolare infatti, si ottiene lo stesso valore di  $H$  a parità di  $f/l$ .
  
- 2) L'aver scelto archi parabolici con carico distribuito ci permette di apprezzare con cura l'effetto della caduta di spinta; se infatti senza di essa la curva della pressione coincideva con l'asse dell'arco, considerando rigidità finita, ciò non è più possibile (paragrafo 4.2) in particolare si nota come nell'arco incastrato la caduta provochi momento negativo alle imposte e positivo in chiave (l'annullamento si ha nel punto in cui l'asse  $x$  passante per  $G$  interseca l'asse geometrico dell'arco), mentre momento positivo in tutta la struttura nel caso a due cerniere (fig. 6.11). È da apprezzarsi inoltre un fatto molto importante: benché la caduta sia maggiore nell'arco incastrato, e quindi minore la spinta  $H$  (5.40), l'incremento dei momenti è maggiore rispetto alle due cerniere. Con riferimento a questo fenomeno (e ad altri come l'assestamento della centina), molti ponti soprattutto in calcestruzzo vengono inizialmente costruiti a due cerniere, oppure nella loro versione isostatica e solo dopo essere stati scasserati e ad assestamento avvenuto, le cerniere vengono solidarizzate, in tal maniera si diminuiscono i momenti parassiti alle imposte e in minor misura sull'intera struttura. Si è portato l'esempio dell'arco parabolico inoltre perché tale effetto è particolarmente visibile, con altri assi geometrici, esso è minore ma comunque apprezzabile, va inoltre fatto l'appunto che se si confronta la caduta ottenuta nell'arco incastrato con quella dell'arco a due cerniere il loro rapporto è di 1:4.3, in molti testi, tra cui il Belluzzi (vol. 2) si afferma che in questo caso il rapporto sia di 1:6, questo è vero se si utilizzano le (5.38) e (5.39) versioni semplificate delle (5.10) e (5.25).



**Figura 6.11:** *Momenti generati dalla caduta di spinta ( $\Delta H$ ) nell'arco a due cerniere (in blu) e incastrato (in rosso)*

- 3) La forma dell'arco (fig. 6.12) particolarmente influenzata dalla presenza del momento flettente: la configurazione a tre cerniere, presenta un'ingrossamento alle reni laddove il momento si presente non nullo, quella a due esibisce un'ingrossamento in chiave in questa sezione infatti il momento si attesta in valore assoluto sempre maggiore delle altre sezioni (fig. 6.9 e 1.6). La configurazione incastrata, sempre sollecitata nella sua interezza mostra ispessimento all'imposta, qui il momento assume il suo valore massimo, inoltre v'è anche la massima aliquota di sforzo normale, le sezioni vanno poi assottigliandosi verso la chiave. Tale paradigma viene invertito negli archi tipo Boussiron (paragrafo 8.4).



**Figura 6.12:** *Forme tipiche dell'arco al variare della configurazione di vincolo: a) a tre cerniere, b) a due cerniere, c) incastrato*

## 6.2 Comportamento della spinta H

In aggiunta a quanto detto sulla spinta nel capitolo precedente al variare della configurazione strutturale e di vincolo dell'arco, possiamo studiare con maggiore attenzione la funzione di H comprendendone il comportamento al variare dei parametri fondamentali dell'arco quali il rapporto tra la freccia e la luce  $f/l$  e al variare della rigidezza assiale  $EA$  e flessionale  $EJ$ .

### 6.2.1 Il rapporto spinta-freccia

Risulta interessante indagare come varia la spinta al variare della freccia dell'arco. Procedendo per intuizione si direbbe che la spinta aumenta proporzionalmente al decrescere della freccia (o al decrescere del rapporto  $f/l$ ), ciò sarebbe in accordo con quanto affermato nel primo paragrafo del capitolo terzo trattante la funicolare, nella quale la componente orizzontale della risultante all'imposta aumenta al diminuire della freccia creata dalla fune caricata. È altresì vero che in tale esempio però non viene fatto alcun riferimento alla rigidezza della struttura perciò tale ipotesi



potrebbe al limite applicarsi all'arco a tre cerniere. Ci si chiede quindi se quanto vale per la catena vale ancora (ma ruotato) per l'arco qualunque sia la sua configurazione di vincolo. Per valori di ribassamento tipici ( $f/l < 1/10$ ), le osservazioni confermano quanto intuito, ma per valori superiori la logica sembra sciamare. Immaginando di diminuire la monta indefinitamente, l'arco tenderà alla trave, ma essa risulta priva di spinta orizzontale, i carichi vengono sostenuti da essa per la creazione di una coppia interna e non per la formazione di una spinta orizzontale (tranne che in alcuni casi), la spinta deve quindi ad un certo punto diminuire in modo da onorare la nuova condizione di trave. Analizzando la funzione (5.25) ed eseguendo il limite per  $f \rightarrow 0$ , e specializzandola per il caso di carico parabolico incastrato con carico uniformemente distribuito, otteniamo:

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{\int_{Arco} \frac{M_0 y_0}{J} ds}{\int_{Arco} \frac{y_0^2}{J} ds + \int_{Arco} \frac{ds}{A}} = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{ql^2}{8f \cdot \left(1 + \frac{45}{4} \frac{\rho^2}{f^2}\right)} = 0 \quad (6.11)$$

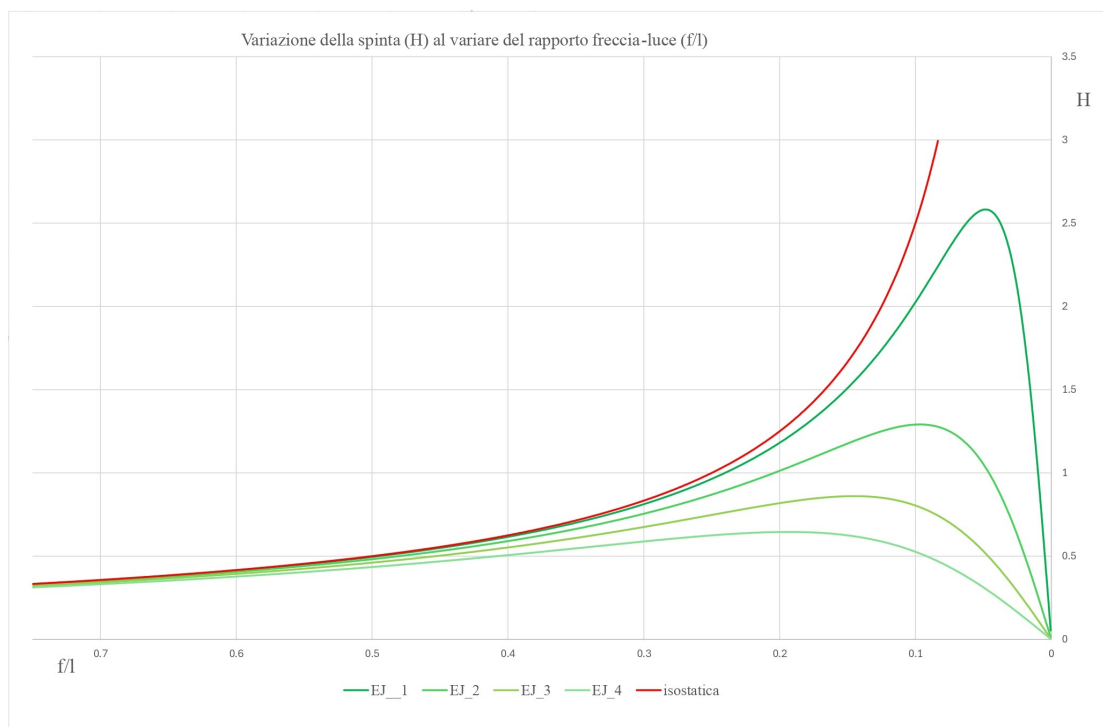
nella quale  $\rho^2 = J/A$ . Eseguendo altresì il limite per  $f \rightarrow \infty$ , il risultato è ovvio.

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\int_{Arco} \frac{M_0 y_0}{J} ds}{\int_{Arco} \frac{y_0^2}{J} ds + \int_{Arco} \frac{ds}{A}} = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{ql^2}{8f \cdot \left(1 + \frac{45}{4} \frac{\rho^2}{f^2}\right)} = 0 \quad (6.12)$$

Nel grafico (fig. 6.13) si considera la spinta in un'arco parabolico al variare del rapporto freccia-luce e della rigidezza: Osserviamo come l'arco con  $EJ_1$  (la minore), aumenta molto la sua spinta prima di decrescerla bruscamente, mentre l'arco  $EJ_4$  si presta di più a trasformarsi in trave, variando la sua spinta in misura minore. Aumentando la sezione, le curve, sempre più orizzontali, presentano comunque un massimo ma a valori sempre crescenti del rapporto  $f/l$ . La struttura isostatica, non essendo interessata dalla rigidezza dell'arco, aumenta la sua spinta virtualmente all'infinito, cosa impossibile nella realtà dato l'insorgere di fenomeni di instabilità (snap-through buckling) e del limite di resistenza a compressione del materiale.

### 6.2.2 il rapporto spinta-rigidezza

Si è visto come nel paragrafo 5.4 il contributo della rigidezza assiale dell'arco entri in gioco nel calcolo della spinta causando la caduta, essa, controversa rispetto



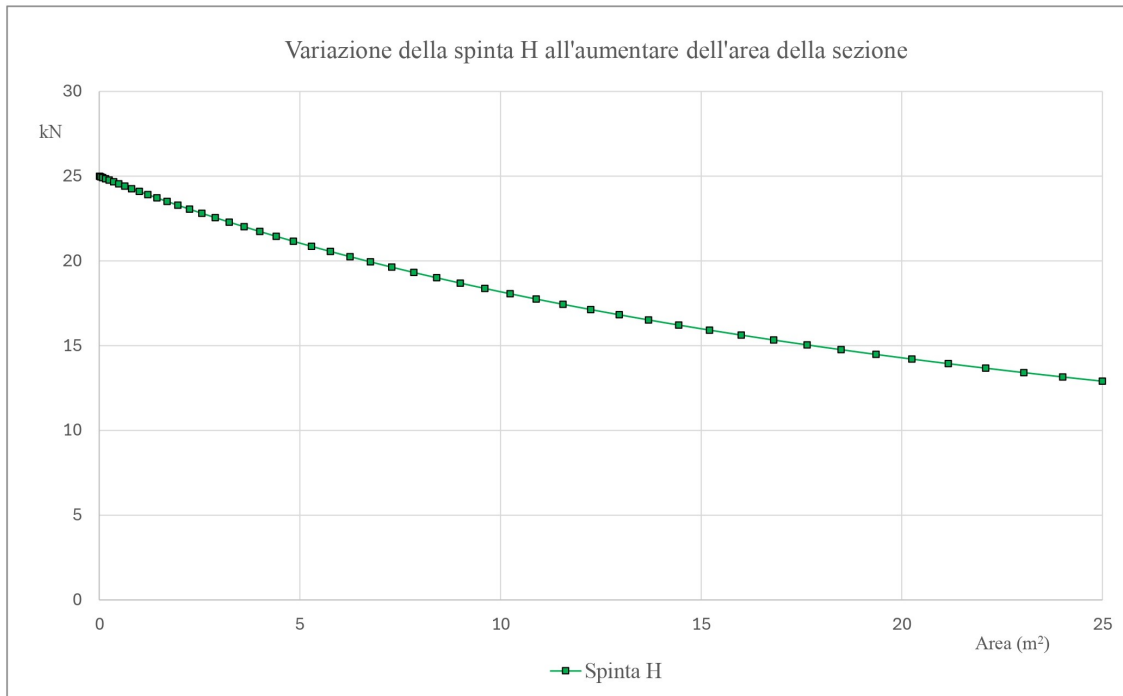
**Figura 6.13:** *Variazione della spinta  $H$  all'imposta al variare del rapporto freccia-luce ( $f/l$ ) e della rigidezza  $EJ$*

alla spinta orizzontale  $H$  ne causa una diminuzione nell'ordine di qualche punto percentuale: al massimo 4-6 %. Indaghiamo ora cosa accadrebbe se si aumentassero indefinitamente le dimensioni della sezione: si potrebbe dedurre che se la caduta è dovuta all'accorciamento della linea d'asse allora un aumento di sezione, porterebbe questo contributo della caduta a scomparire, ma analizzando la formula (5.25) i risultati potrebbero risultare contro intuitivi.

Si consideri una sezione con una base di lunghezza fissata (ad esempio unitaria) e si studi il variare di  $H$  con l'altezza  $h$  di sezione. Un'aumento dell'altezza provoca chiaramente un'aumento dell'area, e quindi della rigidezza assiale  $EA$ , ma allo stesso tempo anche si quella flessionale  $EJ$ , in particolare  $J$  aumenta con il cubo dell'altezza mentre  $A$  solo linearmente quindi per  $h \rightarrow \infty \Rightarrow A \rightarrow \infty, J \rightarrow \infty$  e per la gerarchia degli infiniti:

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \frac{\int_{Arco} \frac{M_0 y_0}{J} ds}{\int_{Arco} \frac{y_0^2}{J} ds + \int_{Arco} \frac{ds}{A}} = \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{\int_{Arco} M_0 y_0 ds}{\int_{Arco} y_0^2 ds + \frac{J}{A} \int_{Arco} ds} = 0 \quad (6.13)$$

Chiaramente non è possibile far tendere ad infinito l'area, ma essa può diventare ragguardevole già prima che la struttura rientri ne campo delle travi a grande curvatura. Per le proporzioni usuali comunque, cioè quelle che si ritrovano nella pratica dei ponti e strutture consimili, le dimensione della sezione rimangono tali da causare i classici effetti della caduta di spinta, con quindi diminuzioni della spinta poco più che trascurabili.



**Figura 6.14:** *Variazione di  $H$  con la dimensione della sezione ( $m^2$ ), la spinta è calcolata per un'arco parabolico di luce di 10 m e monta di 5 caricato con un carico uniformemente distribuito di 10 kN/m. La spinta considerando la struttura infinitamente rigida è di 25 kN, decrescente all'aumentare della sezione*

Nel caso di strutture molto sviluppate in larghezza, ovvero con base  $b$  della sezione molto grande, possono essere calcolate con lunghezza unitaria, poiché nella (5.25) la  $H$  dipende dal rapporto  $J/A$  (anche detto  $\rho^2$ ) e quindi dalla costante (nel caso di sezioni rettangole)  $h^2/12$ . Un'arco molto largo può quindi essere visto come l'affiancamento di infiniti archi infinitesimi di larghezza  $db$  con medesimo spessore  $h$  dell'arcata.



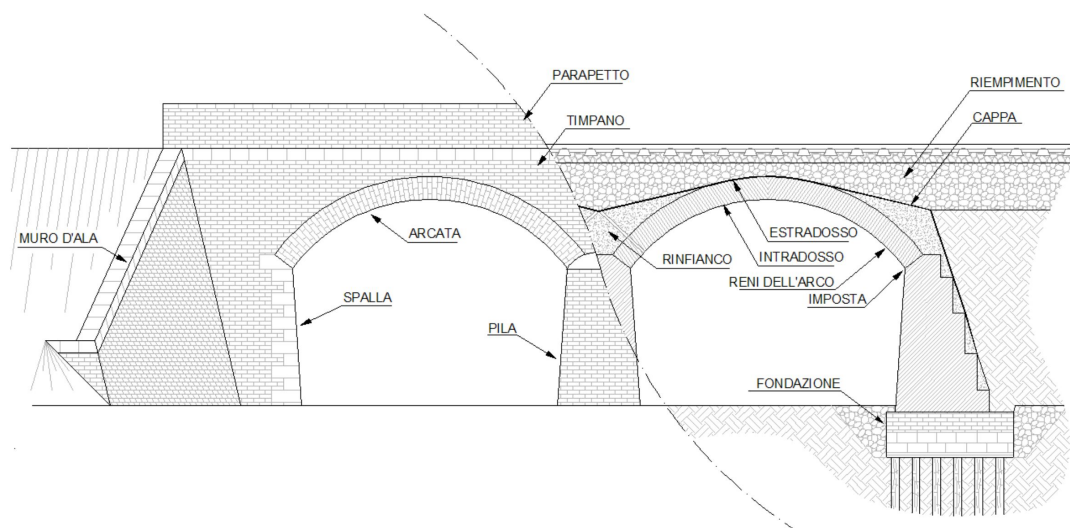
# Capitolo 7

## Archi in pietra e muratura

### 7.1 Generalità sugli archi in muratura

Fino agli anni '30 del ventesimo secolo, la soluzione prediletta per il superamento di luci medie e piccole era quella dell'arco in muratura. All'epoca infatti, la tecnologia del calcestruzzo era ancora agli albori, e la soluzione metallica presentava costi ancora proibitivi; d'altro canto la soluzione in muratura era ben conosciuta e collaudata; ne deriva che ancora oggi gran parte del patrimonio infrastrutturale, è di tale tipologia. In campo ferroviario in particolare (circa 200000 tra ponti e viadotti) in tutta Europa, ovvero oltre il 40 % è in muratura e la maggioranza ha più di 100 anni (costruita tra il 1840 ed il 1930), è quindi di vitale importanza poter determinare se questo tipo di strutture siano adatte a sopportare in nuovi carichi (in particolare dinamici) e se lo sono con che margine di sicurezza, è utile ad esempio la determinazione del moltiplicatore di collasso.

Per comprendere il comportamento della struttura, è utile conoscerne le parti costitutive in particolare in ogni ponte si possono individuare le seguenti componenti: l'arcata, le spalle, le pile, le opere di fondazione, e il riempimento (compreso di rinfianco) indicati nella figura 7.1. L'arcata è la parte principale della struttura, detta anche volta ha il compito di trasferire i carichi soprastanti (statici e dinamici) alle spalle e alle pile, la forma principale che assume è quella cilindrica (molto raramente policentrica o di altra forma) che può presentarsi nella forma a tutto sesto quando il rapporto  $f/l$  sia compreso tra 0.4 e 0.5 oppure a sesto ribassato se  $0.11 < f/l < 0.4$ . L'arcata, in antichità costituita da pietra da taglio, è stata nel tempo



**Figura 7.1**

*Schema delle componenti di un'arco in muratura*

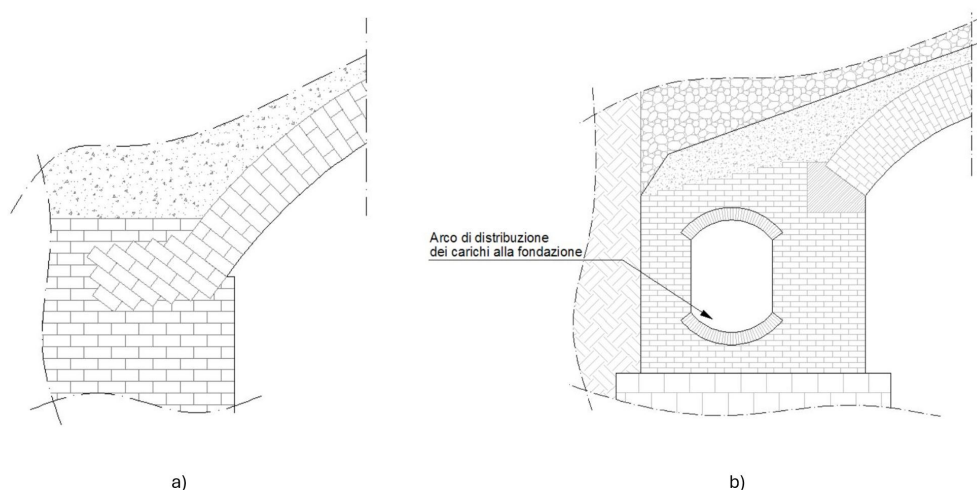
soppiantata dal laterizio, lasciando alla prima solitamente l'arco frontale detto "armilla" ed il rivestimento delle spalle per fini puramente decorativi. Si dice tessitura la disposizione dei blocchi o laterizi a costituire l'arcata, solitamente retta, ovvero con file parallele alle generatrici dell'arco, diventa elicoidale se l'arco ha un'obliquità rilevante. Lo spessore della volta inoltre viene solitamente inspessito dalla chiave verso gli appoggi; è inoltre piuttosto frequente incontrare arcate costituite da più ordini di volte sovrapposte a formarne una più spessa, esse sono frutto di un procedimento costruttivo detto "a rotoli" nel quale per velocizzare la costruzione, la centina viene utilizzata per costruire la volta di intradosso che a sua volta farà da supporto durante la costruzione delle successive in modo da liberare l'utilizzo della centina per le arcate successive.

Al di sopra dell'arcata si trovano, dal basso verso l'alto il rinfianco, la cappa e il riempimento. Il rinfianco è solitamente costituito da un conglomerato di discrete caratteristiche meccaniche (migliori del riempimento ma peggiori della volta) o talvolta da mattoni presentanti difetti e quindi non utilizzabili per la volta. Il Rinfianco assolve ad alla funzione di stabilizzazione dell'arco, evita infatti la formazione di un cinematismo di collasso praticamente "contenendo" con il suo peso la curva della pressione all'interno dell'arcata. Nel caso di archi di grande luce, con riferimento a figura 7.1 la presenza del rinfianco appesantirebbe eccessivamente le

pile, pertanto, molti ponti presentano delle aperture solitamente circolari proprio in questo punto, in modo da alleggerire la pila senza intaccare la stabilità dell'arcata.

La cappa è uno strato di piccolo spessore, circa 10 cm che sovrasta il rinfiango, è costituita da malta idraulica, ricoperta da asfalto bituminoso, presenta nelle zone di compluvio (sopra le pile) degli sfogatoi in modo da consentire l'evacuazione dell'acqua piovana.

Per rendere piano il piano del ferro (o il piano stradale) e ripartire i carichi sull'arcata viene realizzato il riempimento, generalmente costituito di materiale poco legato (anche incoerente). Esso deve garantire oltre le funzioni sopracitate anche il drenaggio dell'acqua, la granulometria dev'essere pertanto grossolana. Lo spessore minimo non dovrebbe mai essere inferiore di 40 cm; se l'arco è di notevoli dimensioni, un riempimento ed un rinfiango propriamente detti sono improponibili per via dei pesi eccessivi allora, il piano viario viene supportato da volte in mattoni secondarie. Infine rinfiango e riempimento sono contenute dai timpani o muri andatori, costituiti solitamente da muratura leggera, tali da non gravare troppo sull'arco frontale, la loro geometria può essere inoltre variabile diminuendo dalla base alla cima per adattarsi alla diminuzione di pressione.



**Figura 7.2**

- a) disposizione dei letti di malta in corrispondenza dell'incastro tra arcata e spalla  
 e b) cavità di alleggerimento con volte superiore di controspinta alla volta principale e inferiore di distribuzione dei carichi in fondazione

L'intera sovrastruttura fin qui trattata è supportata da pile e spalle; in particolare si dice spalla l'elemento che assolvere la funzione di sostegno alla volta, assorbendone la spinta orizzontale, e quella di muro di sostegno al rilevato di accesso al ponte. Nei ponti di maggior luce, in cui la spinta orizzontale diviene di difficile da sostenere, la spalla può essere alleggerita con una volta ribassata interna la cui spinta si contrappone alla spinta orizzontale principale. V'è inoltre da porre attenzione all'attacco dell'arco con la spalla in cui per evitare lo slittamento dei mattoni in corrispondenza dei letti di malta (fig. 7.2), essi vengono realizzati perpendicolarmente alla spinta facendo quindi virtualmente "proseguire" l'arcata all'interno della spalla.

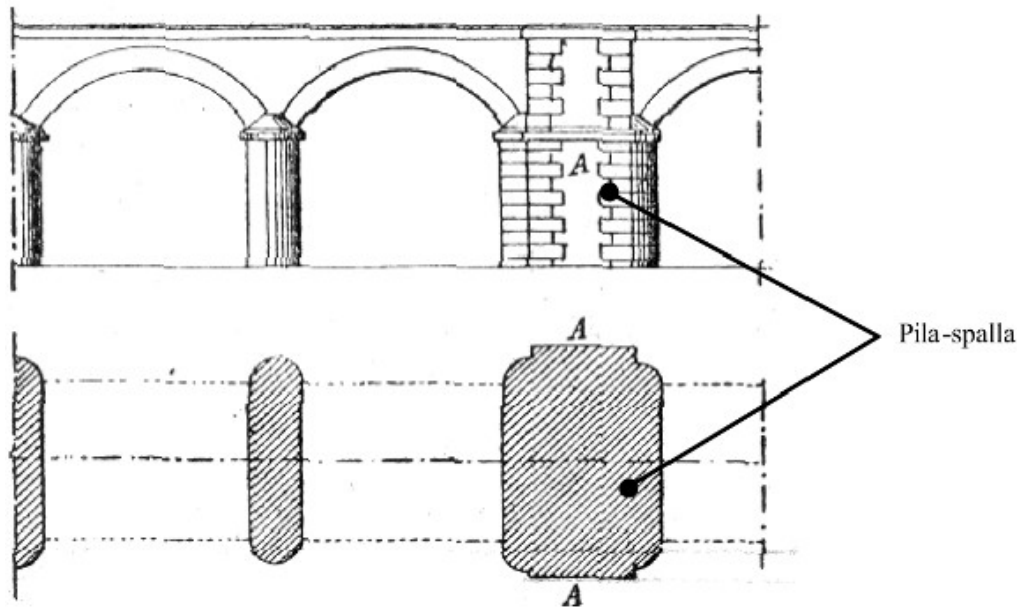


Figura 20. Pila-spalla (Baggi, 1926).

### Figura 7.3

Di continuo alla spalla possono essere presenti dei muri d'ala che aprendosi di un'angolo di 60-80 gradi rispetto all'asse del ponte fungono da muro di sostegno per il rilevato di accesso al ponte, e da contrafforte a sostegno della spalla. La pila è invece un'elemento verticale di sostegno ai carichi provenienti dall'impalcato, ve ne sono di due tipologie: tozze e snelle. Le pile tozze hanno altezze solitamente inferiori ai 12-15 metri, se più alte presentano un'inclinazione delle pareti di 1/10 o 1/20, se il ponte è in curva, allora le scarpe sono diverse, doppia in



quella esterna rispetto all'interna, per agire da contrafforte e opporsi alla forza centrifuga. le pile snelle sono invece di altezza ragguardevole, tanto che in alcuni casi si rende necessario (altezza  $>40$  m) inserire un'arcata intermedia in modo da prevenire fenomeni di instabilità. Questo tipo di pile presenta solitamente dell cavità per alleggerimento. Una diversa tipologia di pila nella quale sovente ci si può imbattere è la pila-spalla, essa è posta in ponti di grande lunghezza ogni 4-5 pile, essa è ben più tozza di una pila normale, in modo da contenere la spinta di un'arcata intera, in tal modo, il cedimento di una pila, interesserà le adiacenti ma non si propagherà a catena sull'intera struttura (fig. 7.3).

Ultimo elemento da disquisire è la fondazione, che nel caso di un ponte in muratura, come in ogni altra struttura può essere profonda (su pali), semi-profonda oppure superficiale; esse non vengono oltre disquisite poiché non rientrano nell'obiettivo dello scritto. Vale però la pena far notare che a differenza delle funzioni che normalmente una fondazione assolve, le pile da ponte devono considerare (nel caso di pile in alveo) i fenomeni di erosione causati dalla corrente che possono portare allo scalzamento delle pile, con conseguente collasso della strutture; per questa ragione è di vitale importanza adottare tutti i crismi necessari per evitare il fenomeno come la protezione dell'alveo in corrispondenza della pila e l'adottare un profilo adeguatamente sagomato (rostri).

## 7.2 La stabilità negli archi in pietra e muratura

### 7.2.1 La regola del terzo medio ed il metodo di Mèry-Navier

Come visto nei paragrafi precedenti, possiamo intuire alcuni rudimenti riguardanti la stabilità degli archi in muratura, prima tra tutte è che essi sono composti da mattoni legati tra loro con malta cementizia (in quelli più recenti) o con malta di calce (in quelli più antichi), o da blocchi di pietra squadrata i quali rimangono assieme solo dagli sforzi di attrito; sembra quindi ragionevole supporre che tal tipo di strutture non presentino alcuna capacità di resistere agli sforzi di trazione (ovviamente la malta ha una resistenza a trazione finita, che viene però trascurata per ragioni di semplicità, inoltre tale ipotesi è chiaramente a favore di sicurezza). La seconda osservazione trae origine dalla proprietà n°2 del paragrafo 3.3 in cui si fa riferimento al momento nella struttura; esso infatti può essere calcolato come  $R \cdot e$ , ma dal DSV si sa che se una forza è applicata eccentricamente rispetto al baricentro della sezione allora possono risultarne tensioni sia di trazione che di compressione. Ma allora unendo le due osservazioni si può giungere ad un'ovvia quanto importante conclusione: "L'arco si può considerare sicuro se la curva della pressione cade in ogni punto all'interno del nocciolo di inerzia della sezione". Questa regola, detta "del terzo medio" è stata per secoli uno degli unici principi di progettazione per questo tipo di strutture, non resistendo a trazione, se la risultante cadesse al di fuori del nocciolo si incorrerebbe in una parzializzazione della sezione, e una redistribuzione (con conseguente aumento) delle tensioni nella parte compressa 7.4.

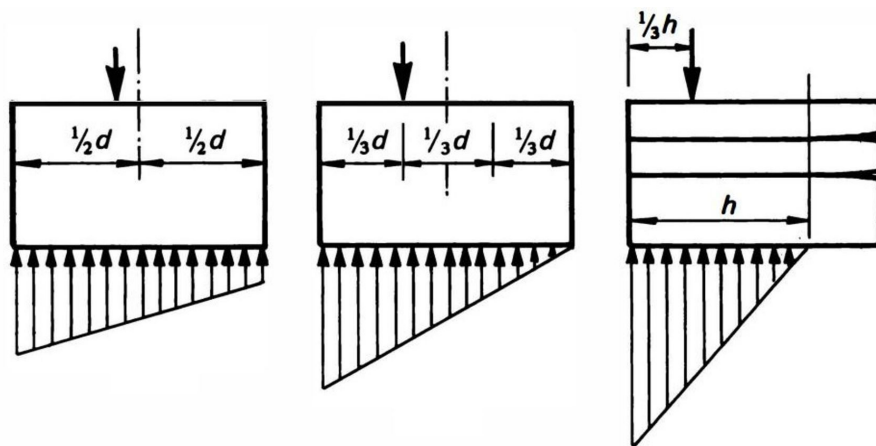


Figura 7.4

*Effetti di una progressiva eccentricità della risultante degli sforzi di compressione*

## 7.2.2 Il metodo di Mèry-Navier

Per definire se la regola del terzo medio viene rispettata deve essere disegnato il poligono funicolare, ma essendo la struttura staticamente indeterminata, è necessario l'utilizzo della proposizione fatta nel paragrafo 7.3 della quale la regola del terzo medio rappresenta un caso particolare: "se si riesce a trovare una curva della pressione contenuta nel terzo medio allora essa è ammissibile per quella configurazione di carico e l'arco è sicuro" questa proposizione viene sviluppata nel metodo di Mèry. Il metodo di Mèry o di Mery-Navier, sviluppato nel 1840 e comparso per la prima volta negli annali dell'università École nationale des Ponts et Chaussées oggi École des Ponts ParisTech (Ponts), in una nota dal titolo "De l'équilibre des voûtes en berceau", rappresenta uno strumento molto semplice a lungo utilizzato per determinare la stabilità degli archi in muratura simmetricamente caricati e simmetricamente vincolati; questa evenienza oggi non ammissibile era ragionevolissima fino all'avvento della ferrovia come la conosciamo oggi, senza il peso dei rotabili infatti, ogni altro carico mobile era di gran lunga trascurabile rispetto alla massa del ponte (lo stesso vale per il traffico pesante su gomma). Esso si basa su quanto visto in precedenza ovvero, trovare una curva in grado di soddisfare l'equilibrio e allo stesso tempo essere contenuta all'interno del terzo medio; è da notare come la soluzione data valga solo per configurazioni simmetriche in quanto, come abbiamo visto nel paragrafo 3.3 per determinare la posizione della funicolare è necessario conoscere tre punti di passaggio obbligato, ma data la simmetria della struttura, essi possono essere ridotti a due consentendo una soluzione intuitiva e celere.

Per intendere a pieno il funzionamento del metodo ne viene proposta una semplicissima applicazione per un viadotto con arcate a tutto sesto di corda pari a 10 m (8.16 se si considera un'apertura di 120°) del quale verrà valutata graficamente la stabilità della volta; inoltre verrà mostrato sempre per via grafica il procedimento per dimostrare (almeno in modo grossolano) la stabilità dell'intera opera anche in caso di collasso di parte di essa.

### Applicazione

Si consideri un viadotto ferroviario rettilineo in muratura composto da otto cam-pate a tutto sesto della corda di 10 metri dimensionato secondo le formule invalse nell'uso all'epoca della progettazione della maggior parte dei ponti oggi disseminati

nel territorio. Le formule riportate nelle norme in uso erano di derivazione empirica, e gli accorgimenti progettuali erano affidati all'esperienza e alla sensibilità del progettista. Si riportano in ordine le assunzioni fatte per dimensionare:

- L'arcata
- Le pile
- Le spalle e le pile-spalla

Per il dimensionamento dell'arcata si parte dallo spessore che essa deve presentare in chiave detto  $s$ , esso è quello più critico poiché è quello minimo ed in assenza di ispessimenti costante su tutta la volta. Per il calcolo sono necessari la conoscenza della luce (o corda)  $l=c=10$  m e della freccia  $f=5$  m. Vengono riportati nella tabella seguente i risultati ottenuti con i diversi approcci.

**Tabella 7.1:** Spessori in chiave forniti dai vari autori per un'arcata a tutto sesto della corda di 10 metri.

Formula	Expression	s (m)
Lesguiller	$0.10 + 0.20 \cdot \sqrt{c}$	0.732
Croizette-Desonyers	$a + b + \sqrt{2R}$	0.738
Genio Civile Italiano	$0.20 + \frac{l}{40} + \frac{20+l}{100} \cdot \frac{l}{f}$	0.510
Kaven	$0.25 + l \cdot \left( 0.025 + 0.0033 \cdot \frac{l}{f} \right)$	0.566
Perronet	$0.325 + 0.035 \cdot 2R$	0.675
Dejardin	$0.3 + 0.1 \cdot R$	0.800
Leveillé	$0.333 \cdot (1 + 0.1 \cdot R)$	0.667
Sèjournè	$(0.15 + 0.15\sqrt{l}) \cdot \frac{4}{3} \cdot \left( 1 - \frac{f}{l} + \frac{f^2}{l^2} \right)$	0.624
Ingegneri russi e tedeschi	$0.43 + 0.05 \cdot l$	0.930

Dai risultati riportati in tabella, si nota come la relazione fornita dal Genio Civile fornisca un risultato di circa il 30 % inferiore alla media, si è però dimostrato statisticamente che nonostante le disposizioni del Genio, il rapporto tra lo spessore in chiave e la luce per volte tra gli 8 e 10 metri sia molto vicino a 0.8 lasciando

intendere che nonostante le disposizioni i progettisti utilizzassero altre relazioni più cautelative come quelle di Lesguiller o quelle invalse nell'uso in Germania. In ragione di ciò nell'applicazione si adotterà uno spessore in chiave di 0.80 m.

Come visto nei paragrafi precedenti, sovente la volta era ispessita dalla chiave (s) verso le imposte ( $s_1$ ); in particolare le relazioni suggeriscono che:

$$s_1 = 1.5 - 2 \cdot s. \quad (7.1)$$

in Italia però tale ispessimento è presente in meno di 1/4 delle strutture, perciò si è deciso di mantenere lo spessore inalterato lungo tutto l'asse.

Con riferimento alle pile, esse avranno un'altezza  $h_p$  pari a 5 metri, lo spessore ( $S_p$ ) viene anche qui determinato con formule diverse, i cui risultati vengono riportati nella tabella :

- L'Eveillé per archi a tutto sesto:

$$S_p = (0.33 + 0.12 \cdot l) \frac{\sqrt{\frac{h_p + 0.25l}{H}}}{\sqrt{\frac{0.25l + s}{l}}} \quad (7.2)$$

- Sejourné per luci > di 8 metri:

$$S_p > l/5 \quad (7.3)$$

- Perronet:

$$S_p = 2 \cdot s \quad (7.4)$$

è noto però che Perronet stesso aumentasse del 25% il risultato della sua relazione.

- Altre formule :

$$S_p = 0.29 + 2 \cdot s \quad S = 2.5 \cdot s \quad (7.5)$$

alla luce di quanto visto si utilizzerà una pila dello spessore  $\xi_s$  di 2 metri, non vengono inoltre fornite scarpe alla pila data la sua altezza.

Infine per quanto riguarda le spalle, anche se non verranno verificate in questa sede, vi sono innumerevoli formulazioni per calcolarne lo spessore  $S_s$  i cui risultati vengono riportati nella tabella:

**Tabella 7.2:** *Spessore delle pile secondo diversi autori*

Autori	S <sub>p</sub> (m)
L'Eveillè	2.14
Sejourné	>2.00
Perronet	2.00
Altre formule	1.89
	2.00

- Lesguiller:

$$S_s = (0.60 + 0.04 * h_1) \cdot \sqrt{l} \quad (7.6)$$

- L'Eveillè:

$$S_s = (0.60 + 0.162 \cdot l) \sqrt{\frac{(h_1 + 0.25l) \cdot 0.865l}{H \cdot (0.25l + s)}} \quad (7.7)$$

- Gli ingegneri russi e tedeschi:

$$S_s = 0.305 + \frac{5}{24}l + \frac{h_1}{6} + \frac{h}{12} \quad (7.8)$$

- Formula del Genio Civile Italiano:

$$S_s = 0.05h_1 + 0.20l + \frac{10 + 0.5l}{100} \cdot \frac{l}{f} \quad (7.9)$$

**Tabella 7.3:** *Spessore delle spalle secondo diversi autori*

Autori	S <sub>s</sub> (m)
Lesguiller	2.53
L'Eveillè	2.89
Ingegneri russi e tedeschi	3.21
Genio Civile Italiano	2.55

da quanto risultato dalle formule precedenti, la spalla avrà uno spessore di 3 metri. Infine le pile-spalla posizionate ogni 4 campate avranno anch'esse uno spessore di 3 metri in modo da contenere in modo adeguato la spinta anche in caso di collasso della volta adiacente.

Una volta stabilite le dimensioni dell'opera si può applicare il metodo di Mèry all'arco, si seguono i seguenti passaggi:

- Si individua la porzione centrale dell'arco su cui si effettuano le operazioni, essa ha un'ampiezza di  $120^\circ$  e se ne isola una metà
- Si divide l'arcata individuata in conci (meglio se di numero pari) e con essi la parte di sovrastruttura afferente e si determinano i baricentri di ognuno di essi.
- Si individua una scala adeguata con cui indicare i vettori rappresentanti il peso di ogni porzione e si determinano le risultanti della somma del peso del concio e della sovrastruttura ad esso afferente e punti di applicazione di quest'ultima
- Si possiedono a questo punto tante risultanti quanti i conci, con il metodo del poligono funicolare si individuano la risultante  $R$  di tutti i carichi e la sua retta di azione  $r$
- Si impone quindi l'equilibrio dell'arco nel rispetto delle ipotesi di Mèry:  $R$  deve essere equilibrata da 2 forze, una delle quali è la spinta orizzontale in chiave,  $Q$  (passante per il limite superiore del terzo medio); l'altra è la spinta alle reni,  $S$ , che passa per il limite inferiore del terzo medio.
- Per equilibrio le tre forze devono incontrarsi in un unico punto,  $Q$ ; in tal modo si determinano le rette d'azione  $q$  e  $s$  di  $Q$  e  $S$ , che possono quindi essere calcolate mediante scomposizione di  $R$ . La scomposizione di  $R$  consente di determinare il polo  $H1$ ; il poligono funicolare individuato da questo è unico (soddisfa tre condizioni) ed è la curva delle pressioni.

Si presenta un'illustrazione allo scopo di chiarire il procedimento.

Viene riportata in Appendice la Tavola 1, nella quale è applicato il metodo all'arco.

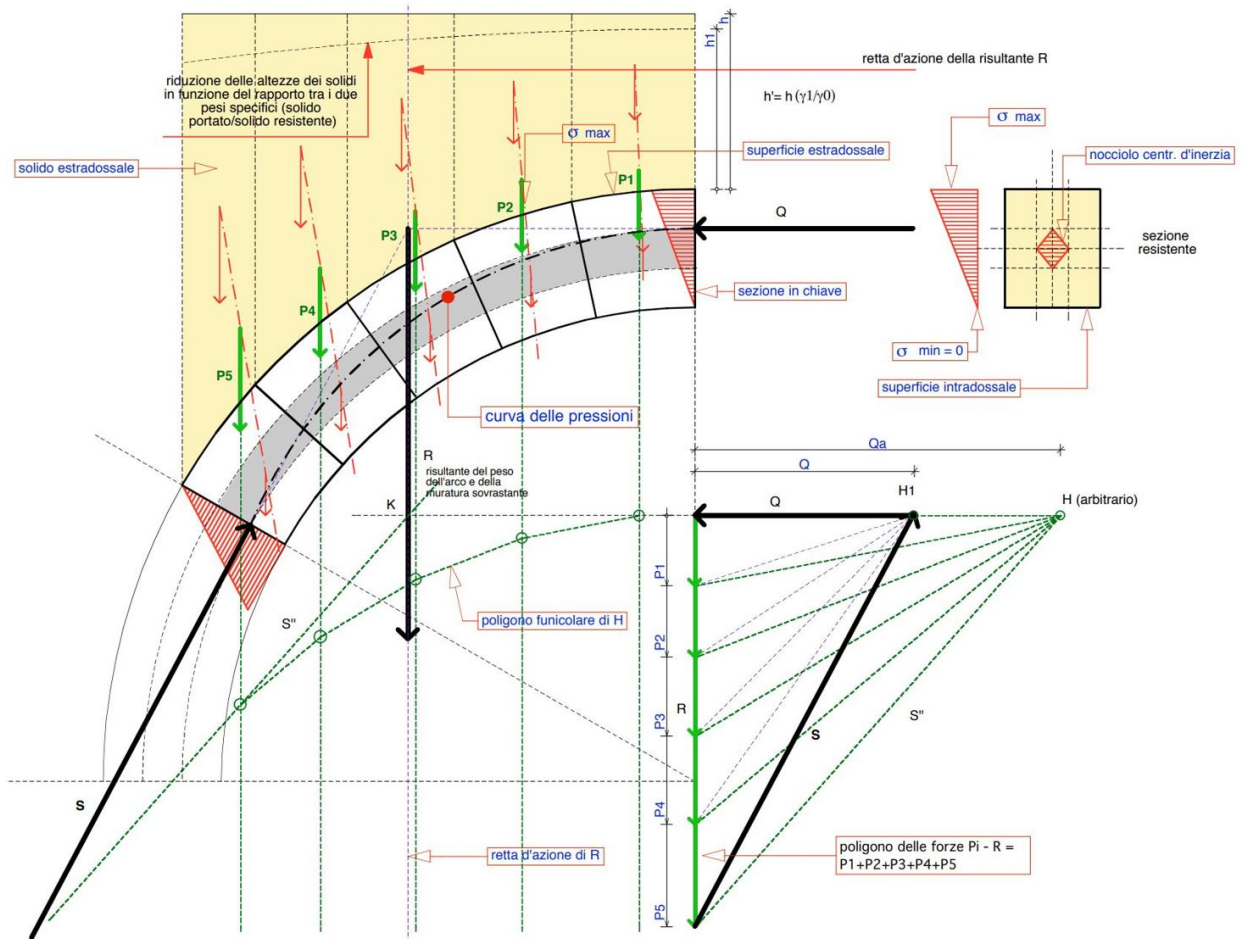


Figura 7.5  
Illustrazione del metodo di Mery

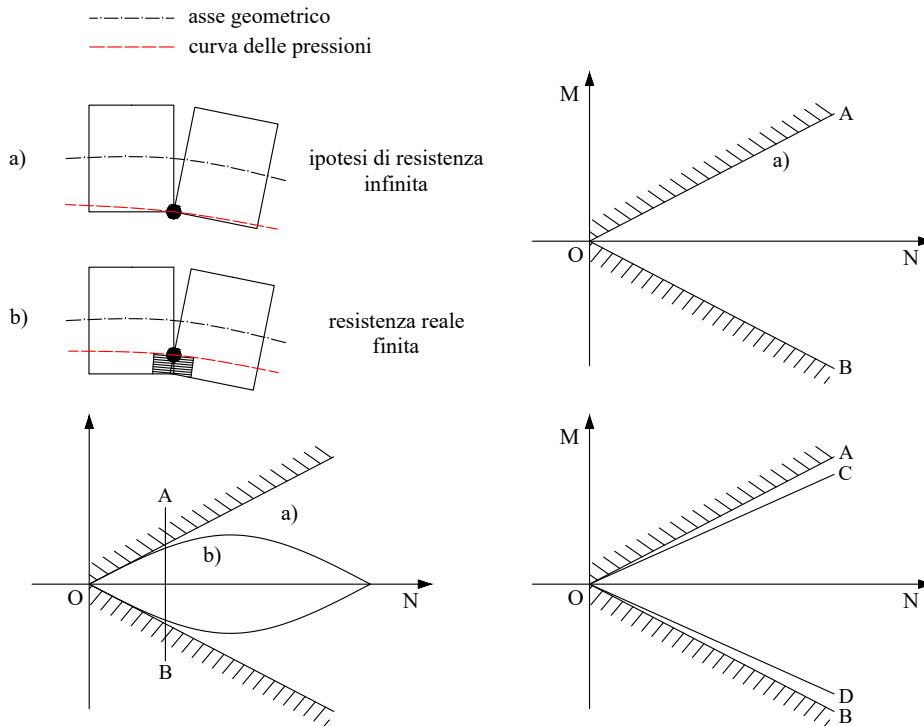


### 7.2.3 Cenni di analisi limite plastica negli archi in muratura

Quanto visto fin ora porta ad intuire che il comportamento statico di un'arco in muratura non è influenzato tanto dalle caratteristiche del materiale quanto più dalla sua geometria. Le basi teoriche per un'analisi limite plastica delle strutture in muratura vennero proposte per la prima volta nel 1966 da Heyman, il quale nel suo scritto "The masonry arch" le riporta:

- ***Non vi può essere scorrimento tra i conci:*** viene assunto che l'attrito tra i conci sia abbastanza elevato da non permetterne il cedimento per scorrimento, tale assunzione, lecita nelle strutture ad arco, cade invece in difetto se la teoria vien utilizzata per discutere i cinematismi di paramenti murari (il coefficiente di attrito oscilla nella muratura tra 0.6 e 0.7).
- ***La muratura presenta nulla resistenza a trazione:*** tale assunzione deriva dai ragionamenti esposti nel paragrafo precedente
- ***La muratura presenta infinita resistenza a compressione:*** anche se a prima vista l'ipotesi si mostra come non favorevole dal punto di vista della sicurezza, essa non è irragionevole in quanto lo sforzo normale a cui sono sottoposti i conci è molto spesso ben lontano dal suo limite a rottura per compressione (solitamente di 1 o 2 ordini di grandezza). Ad esempio dalla soluzione precedente (Méry) benché estremamente semplificata, risulta una tensione di compressione massima di 0.6 MPa contro una resistente caratteristica della muratura piena di circa 4-6 MPa

Con queste ipotesi si può intuire in che modo la struttura possa collassare: assodato che lo sliding tra i blocchi non sia possibile per la 1), consideriamo la 2) e la 3) e consideriamo la componente normale all'interfaccia tra i conci della risultante dei carichi, essa potrà ora giacere al di fuori del terzo medio, per la 2) la sezione risulterà parzializzata, e la tensione si redistribuirà sulla rimanente parte compressa, la quale resisterà indefinitamente. Unico modo possibile cui il possa verificarsi è che la risultante giaccia al di fuori della sezione trasversale dell'arco; si aprirà quindi una cerniera. Il dominio di resistenza di tal comportamento può essere schematizzato nella figura (fig. 7.6) nella quale il momento è pari ad  $M \cdot \frac{h}{2}$  questo dominio ideale (alto a destra) aderente alle ipotesi di Heyman può essere modificato considerando una resistenza della muratura finita, in tal caso il dominio è quello di figura (fig. 7.6



**Figura 7.6:** *Caso a): resistenza a compressione infinita della muratura → la cerniera si forma in corrispondenza del limite esterno dello spessore della muratura. Caso b): la resistenza della muratura è finita → la cerniera si forma all'interno dello spessore una volta raggiunto il limite di resistenza a compressione della muratura.*

(basso a sinistra)) nella quale però dato che la tensione di compressione è solitamente di gran lunga inferiore a quella caratteristica, è possibile ottenerne uno ulteriore (fig. 7.6 (basso a destra)); l'approssimazione della curva con la bilatera è possibile se  $N < N_0/30$  inoltre il momento viene limitato del 10 % cautelativamente. Tal limitazione è dovuta al fatto che una parzializzazione troppo elevata della sezione porterebbe le tensioni di compressione a valori elevatissimi in un'area infinitesima il che farebbe inevitabilmente collassare la muratura. Il punto di applicazione dello sforzo deve quindi giacere all'interno della muratura.

Quanto affermato porta a scrivere la seguente proposizione (detta "di Heyman"):

*"Se si riesce a trovare una curva della pressione per l'arco che sia completamente contenuta nella muratura (per una data configurazione di carico) allora la struttura è sicura"*

Essa permette di aggirare il calcolo delle reazioni all'imposta (in particolare della H). Se viene infatti trovata (anche per tentativi) una curva che soddisfa l'equilibrio e che rimane all'interno del profilo dell'arco la verifica è soddisfatta. È chiaramente buona norma ora come un tempo trovare una curva che sia "ben contenuta" nella muratura ovvero che giaccia per quanto detto nel terzo medio o nelle sue vicinanze in modo da scongiurare che piccoli dissesti possano avere effetti anche catastrofici. Le ipotesi di Heyman unitamente ad un comportamento della muratura schematizzato come perfettamente plastico è quindi congeniale allo svolgersi di un'analisi limite plastica la quale permette di determinare il carico di collasso della struttura direttamente senza eseguire un'analisi incrementale elastoplastica.

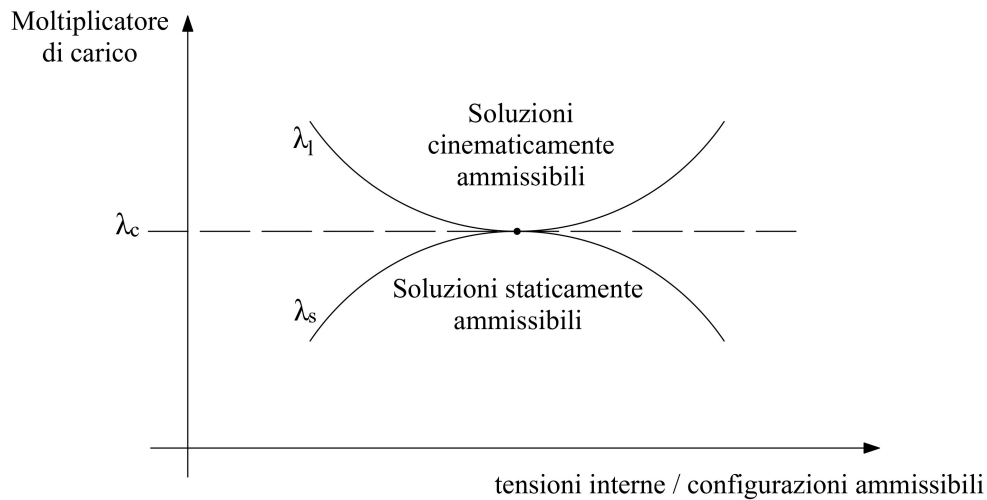
Con l'analisi limite è possibile esprimere l'incremento dei carichi proporzionalmente ad un unico parametro detto  $\lambda$ , il moltiplicatore dei carichi. Lo scopo dell'analisi è trovare un moltiplicatore tale che la struttura al raggiungimento del detto carico collassi; è utile a tale scopo dare un paio di definizioni:

- Una struttura si dice in uno stato *staticamente ammissibile* se le azioni esterne dei carichi sono in equilibrio con le tensioni interne e in nessuna sezione le sollecitazioni interne superano i limiti plastici. Il moltiplicatore dei carichi per il quale questa condizione è soddisfatta e il moltiplicatore statico  $\lambda_s$ .
- Un meccanismo si dice *cinematicamente ammissibile* se il numero di cerniere plastiche sviluppate a partire dalla configurazione originaria è tale da trasformarlo in un meccanismo, ovvero la struttura diventa labile (per esempio l'apertura di tre cerniere su una trave incastrata). Il moltiplicatore dei carichi associato a tale meccanismo è detto moltiplicatore cinematico  $\lambda_1$

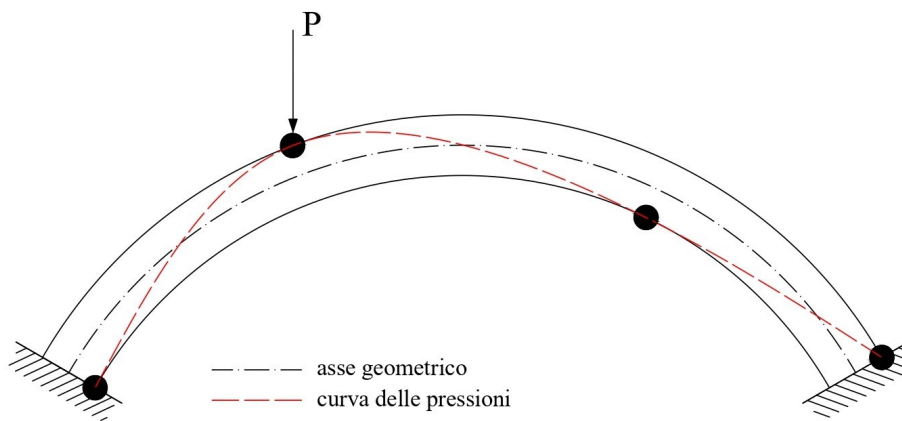
Poiché la condizione di collasso è contemporaneamente staticamente e cinematicamente ammissibile il suo moltiplicatore, detto per l'appunto di collasso sarà contenuto tra quello statico e quello cinematico quindi:  $\lambda_s \leq \lambda_c \leq \lambda_1$ . Vengono ora riportati per letteratura i teoremi dell'analisi limite:

- *Teorema del limite inferiore (statica)*: Il moltiplicatore di collasso è il più grande tra i moltiplicatori staticamente ammissibili:  $\lambda_c = \max(\lambda_s)$
- *Teorema del limite superiore (cinematica)*: Il moltiplicatore di collasso è il più piccolo tra i moltiplicatori cinematicamente ammissibili:  $\lambda_c = \min(\lambda_1)$

- *Teorema di unicità della soluzione (Greenberg-Prager)*: Il moltiplicatore di collasso è contemporaneamente il massimo dei moltiplicatori statici e il minimo di quelli cinematici, esso è quindi unico. Questo vale a dire che se si trova un valore dei carichi per il quale la struttura, ad esempio una trave, raggiunge il momento plastico in un numero di cerniere sufficiente a renderla labile e inoltre, il carico è tale da generare un momento flettente nella cerniera con verso tale da attivarla, allora il moltiplicatore utilizzato per il carico è quello di collasso.



**Figura 7.7:** Schematizzazione delle soluzioni fornite dai teoremi del limite superiore, inferiore e di unicità

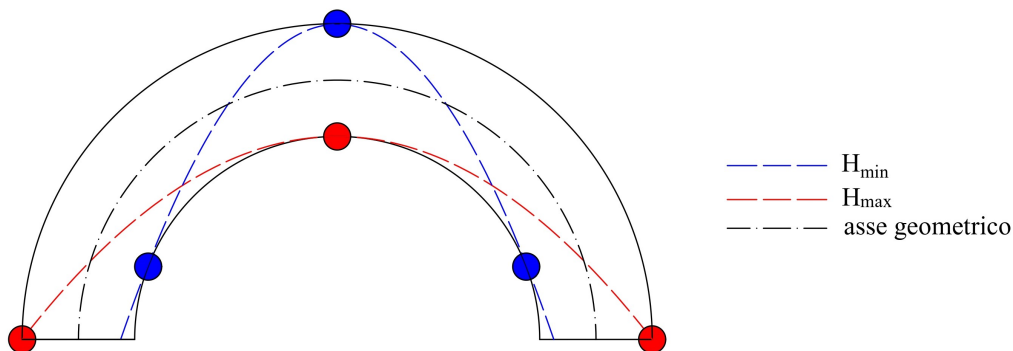


**Figura 7.8:** Schematizzazione del collasso con 4 cerniere disallineate

L'analisi plastica porta quindi ad affermare come il collasso avvenga quando si formino tre cerniere allineate (non verosimile per un'una struttura come quelle trattate) oppure quattro cerniere disallineate le quali si formano esattamente come trattato in precedenza.

### 7.2.4 Il fattore di sicurezza geometrico

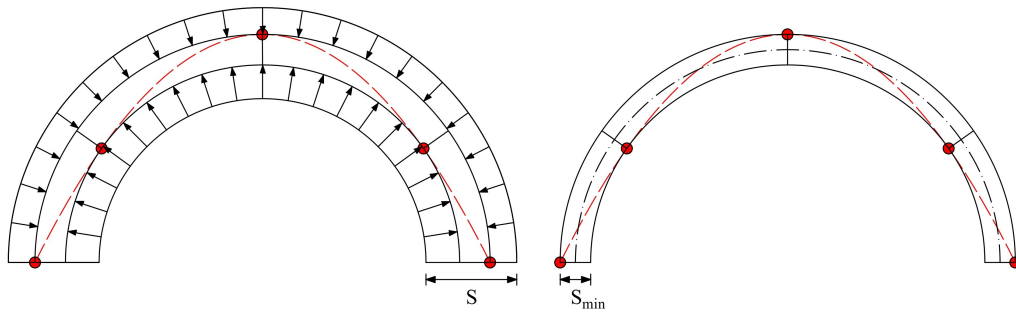
Come si può intuire dalla proposizione di Heyman soprascritta, esistono infinite curve della pressione ammissibili contenute in un'arco ma esse sono limitate superiormente ed inferiormente dal valore che la spinta orizzontale  $H$  all'imposta (o in chiave) può essere espletata dalla struttura. Per garantire la stabilità di un'arco infatti la spinta deve essere contenuta in un'intervallo ben definito: troppa e l'arco collaserebbe verso l'esterno, al contrario verso l'esterno. Si possono tracciare quindi le curve di massima e minima spinta (fig. 7.9).



**Figura 7.9:** Curve della pressione di massima e minima spinta

Tra queste due configurazioni è compresa ogni curva della pressione ammissibile. Ci si può chiedere se il solo aver trovato la posizione della curva della pressione possa dare un'idea quantitativa della sicurezza della struttura come si è fatto per il carico critico  $\lambda_u$  nel caso dell'analisi plastica: la risposta è affermativa. La quantità in esame è detta fattore di sicurezza geometrico ( $K$ ) ed ha rappresentato per molto tempo una buona rappresentazione della riserva di capacità delle strutture. Si immagini un'arco circolare simmetricamente caricato, e se ne individui la curva della pressione, si traslino poi omoteticamente le linee di intradosso ed estradosso in modo da portarle in tangenza con la curva, lo spessore dell'arcata così trovata

è detta "di minimo spessore" e rappresenta la condizione limite di apertura di 5 cerniere (viene riportata la costruzione con carico simmetrico e quindi l'apertura di 5 cerniere, se il carico fosse asimmetrico le cerniere sarebbero 4 ed il procedimento analogo). Per fissare meglio la procedura si veda la figura (fig. 7.10).



**Figura 7.10:** *Traslazione omotetica dell'intradosso e dell'estradosso dell'arco fino alla tangenza con la curva della pressione in modo tale da ottenere l'arco di minimo spessore*

Il fattore di sicurezza geometrico  $K$  può essere quindi trovato dividendo lo spessore originario  $S$  per quello minimo  $S_{\min}$ :

$$K = \frac{S}{S_{\min}} \quad (7.10)$$

ad esempio per un'arco che rispetti la regola del terzo medio avrà un coefficiente di sicurezza geometrico  $K \geq 3$ .

Il fattore di sicurezza geometrico non può però essere utilizzato come unico indicatore della sicurezza di una struttura in quanto lo spessore dell'arco minimo non è linearmente proporzionale al carico, inoltre non vengono considerati i carichi accidentali e mobili in quali fanno variare dinamicamente la curva durante il loro passaggio rendendo dinamico anche il valore di  $S_{\min}$ . Vi è inoltre una categoria di archi nella quale il fattore di sicurezza geometrico non è implementabile, essi sono quelli con asse funicolare del peso proprio: in questo caso infatti  $K$  tenderebbe ad infinito in quanto  $S_{\min}$  tende a 0.

Ciò detto alcuni autori hanno già provveduto a fornire lo spessore dell'arco minimo in rapporto alla luce per carichi simmetrici senza che sia necessario trovare la curva della pressione esatta, pratica come abbiamo visto assai complessa. Come possiamo vedere (tab. 7.4) il rapporto varia dalla molto in base alla teoria utilizzata: nel paragrafo seguente verrà riportato un stralcio della teoria di Milakovitch

**Tabella 7.4:** *Spessore dell'arco minimo in rapporto al suo raggio per archi a tutto sesto per autore*

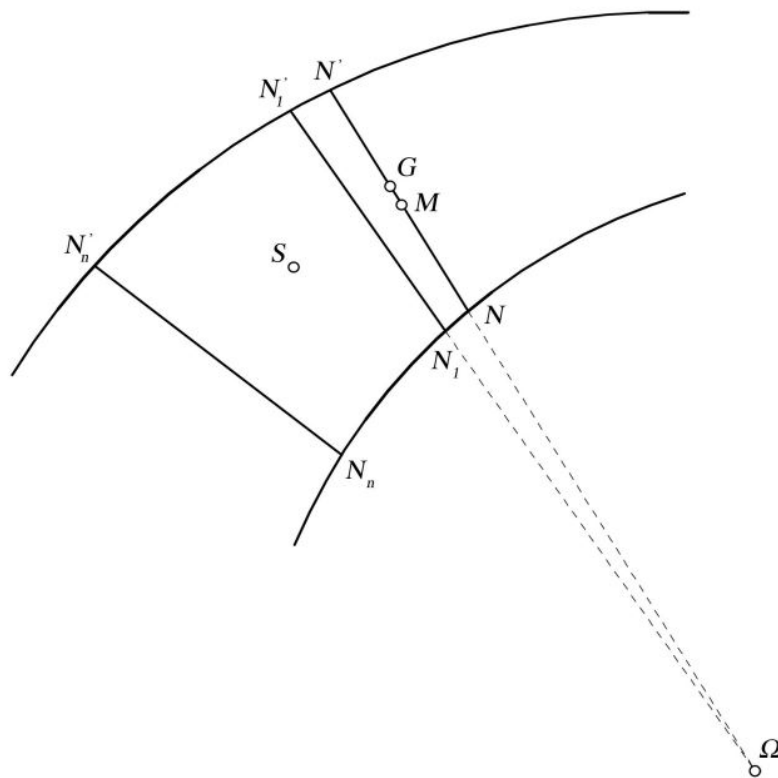
Autori	$S_{\min}/R$
Fabri	0.343
Da Vinci	0.293
Bélidor	0.261
Alberti	0.167
Milankovitch	0.107
Couplet	0.096

(1907) la quale rappresenta il modello matematico più completo in nostro possesso per descrivere la curva della pressione, e con essa verrà dimostrato il quinto valore in tabella.

### 7.2.5 La teoria di Milankovitch

La teoria di Milankovitch sulla curva della pressione, riportata per la prima volta nel 1907 rappresenta il modello matematicamente più accurato per definire la curva nel caso di archi circolari di spessore costante, nelle seguenti righe verrà riportata nei suoi passaggi più importanti in modo da poterne identificare i punti di forza; per una trattazione più accurata si consiglia la lettura dell'opera "Theory and history of the masonry arches, a brief account" nonché dell'opera dello stesso Milankovitch "Theorie der Druckkurven".

Si consideri una struttura ad arco e ne si individui il concio infinitesimo  $N-N'-N_1-N_1'$ , se si fa tendere a zero la distanza tra le due superfici del concio, allora il punto medio dello stesso detta  $M$  e la posizione del baricentro  $G$ , si possono considerare disposte sulla stessa linea, ma divise da una distanza specifica;



**Figura 7.11:** *Concio infinitesimo di dimensioni:  $N-N'-N_1-N_1'$*

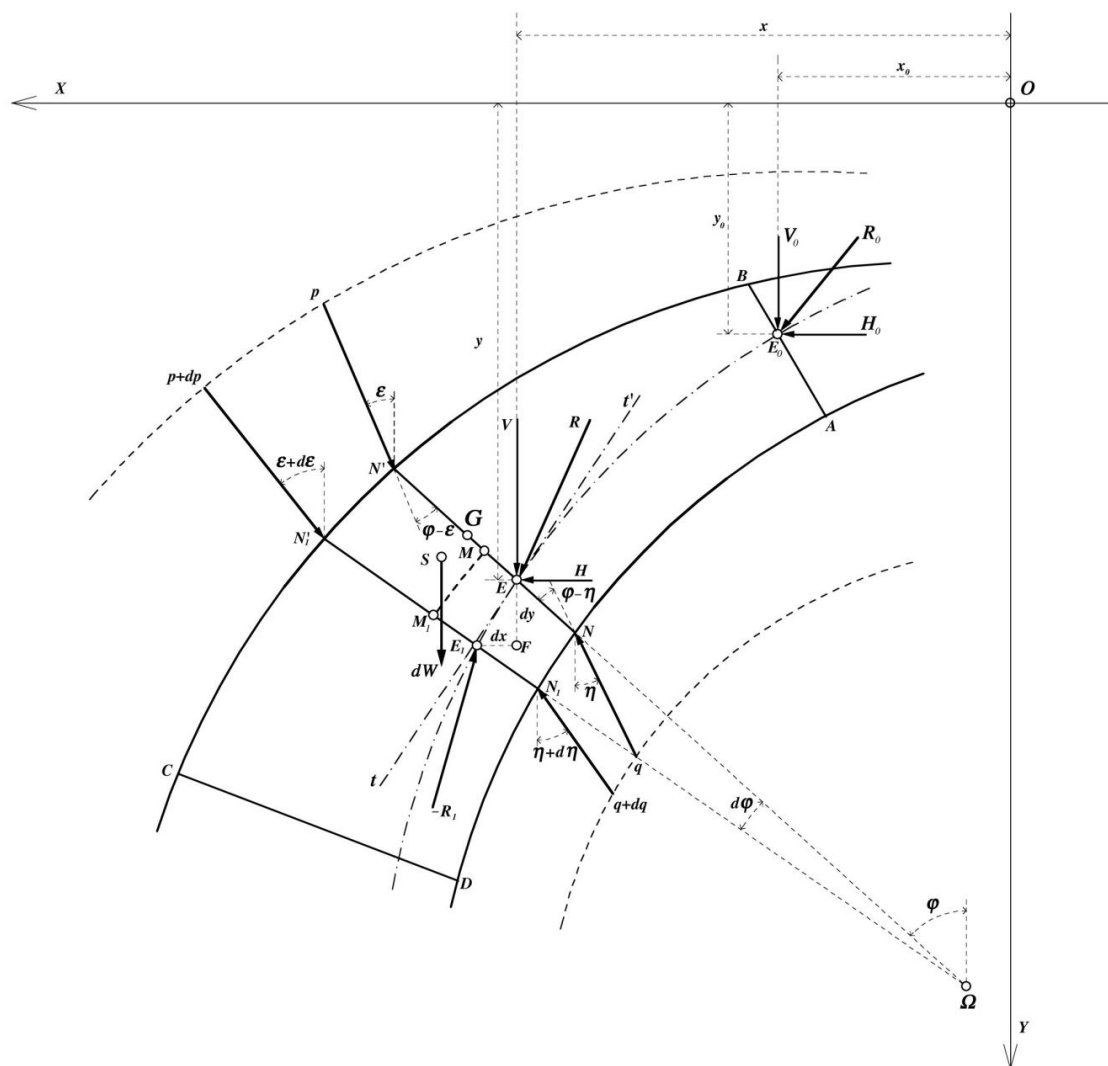
in particolare definendo lo spessore dell'arco con  $\delta$ , la distanza tra il centro ed il punto medio del concio con  $r = \overline{\Omega M}$  e le aree infinitesime  $N'\Omega N_1'$  e  $N\Omega N_1$  con



$df_1$  e  $df_2$ , con riferimento alla figura 7.11 possiamo scrivere le seguenti proporzioni:

$$\begin{cases} (df_1 - df_2)\overline{\Omega G} = \frac{2}{3}((r + \delta/2)df_1 - (r - \delta/2)df_2) \\ \frac{df_1}{df_2} = \frac{(r + \delta/2)^2}{(r - \delta/2)^2} \end{cases} \quad (7.11)$$

e ricavare la distanza tra il punto G ed il punto M pari a:  $\delta^2/12r$  (i due coincidono se  $r = \infty$ ).



**Figura 7.12:**

Con riferimento alla figura 7.12 ricaviamo le seguenti grandezze:

- $\chi = \overline{ME}$  distanza tra il punto E supposto di passaggio della curva della pressione per la faccia NN' del concio, ed il punto medio del concio "M"
- p, q= carichi applicati all'estradosso *de* e all'intradosso *di* dell'arco in corrispondenza del concio
- $\varepsilon, \eta$ = angoli di inclinazione dei carichi p e q rispettivamente rispetto alla verticale
- $E_1$ = punto di passaggio della curva per la faccia  $N_1N_1'$  a distanza infinitesima  $(dx^2 + dy^2)ap1/2$  da E
- $M_1$ = punto medio di  $N_1N_1'$
- $\beta$  = larghezza del concio

Possiamo ora imporre l'equilibrio del concio NN',N<sub>1</sub>N<sub>1</sub>' come:

$$V dx - H dy + M_g + M_e + M_i = 0 \quad (7.12)$$

in cui:

$$\begin{aligned} M_g &= -g\beta\delta r \left[ \left( \frac{\delta^2}{12r} + \xi \right) \sin \phi d\phi \right] \\ M_e &= -pde \left( \frac{\delta}{2} + \xi \right) \sin \phi - \varepsilon \\ M_i &= -qdi \left( \frac{\delta}{2} - \xi \right) \sin \phi - \eta \end{aligned} \quad (7.13)$$

se si conosce il punto di passaggio della curva per un punto specifico E(x<sub>0</sub>,y<sub>0</sub>) sull'interfaccia AB di un concio diverso da quello in esame nel quale la risultante R<sub>0</sub>=V<sub>0</sub>+H<sub>0</sub>. Dato quindi l'equilibrio espresso con la 7.12 e le condizioni al contorno in E<sub>0</sub> possiamo scrivere l'equazione generale della curva della pressione per un'arco di forma qualunque comunque caricato:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{H} \left[ g\beta\delta r \left( \frac{\delta^2}{12r} + \xi \right) \sin \varphi \frac{d\varphi}{dx} \right. \\ &\quad + p \left( \frac{\delta}{2} + \xi \right) \sin(\varphi - \varepsilon) \frac{de}{dx} \\ &\quad \left. + q \left( \frac{\delta}{2} - \xi \right) \sin(\varphi - \eta) \frac{di}{dx} \right] \\ V &= V_0 + g\beta \int_{x_0}^x \delta p d\varphi + \int_{x_0}^x p \cos \varepsilon de - \int_{x_0}^x q \cos \eta di \\ H &= H_0 - \int_{x_0}^x p \sin \varepsilon de + \int_{x_0}^x q \sin \eta di \end{aligned} \right. \quad (7.14)$$

Il Milankovitch specializza la (7.14) per diversi casi:

- Assenza di carichi all'intradosso e interfacce dei conci perpendicolari all'asse geometrico
- Carichi verticali ( $\varepsilon = 0$  e  $\varphi = 0$ ) e giunti verticali ( $\varphi = 0$ ) caso che chiama "Stützlinie"
- Spessore infinitesimo ( $\xi = 0$  e  $\eta = 0$ ) che chiama "kettenlinie" ovvero la catenaria nel caso di carichi verticali

tra esse l'unica degna di nota è la prima Vediamo ora un'applicazione della teoria di milankovitch tratta da [] nella quale viene dimostrato il valore di minimo spessore riportato nel paragrafo 6.2.4. Si consideri un'arco semicircolare di raggio  $\overline{\Omega M} = r$ , di spessore costante  $\delta = a$ , con giunti tra i conci perpendicolari all'asse, soggetto al solo peso proprio ( $q = p = 0$ ), spessore e massa unitaria ovvero  $g = \beta = 1$ ; le (7.14) divengono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \left[ ar \left( \frac{a^2}{12r} + \eta \right) \sin \varphi \frac{d\varphi}{dx} \right] \\ V = ar \int_0^\varphi d\varphi = ar\varphi \\ H = H_0; \end{array} \right. \quad (7.15)$$

passando in coordinate polari la prima delle (7.15) diviene la:

$$\begin{aligned} \rho (ar\varphi \cos \varphi d\varphi + ar \sin \varphi \cdot d\varphi - H_0 \sin \varphi \cdot d\varphi) \\ + (ar\varphi \sin \varphi + H_0 \cos \varphi \cdot d\varphi) = \frac{a}{12}(a^2 + 12r^2) \sin \varphi \cdot \varphi \end{aligned} \quad (7.16)$$

il cui integrale è:

$$\rho (ar\varphi \cos \varphi + H_0 \cos \varphi) = -\frac{a}{12}(a^2 + 12r^2) \cos \varphi + C \quad (7.17)$$

nella quale considerando la condizione al contorno  $\varphi(0) = 0$ , C risulta uguale a:

$$C = \rho_0 H_0 + \frac{1}{12} a(a^2 + 12r^2) \quad (7.18)$$

in questo modo possiamo trovare:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{\rho_0 H_0 + \frac{1}{6}a(a^2 + 12r^2) \sin \frac{\varphi}{2}}{H_0 \cos \varphi + ar\varphi \cdot \sin \varphi} \\ \rho(0) = r + \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho_0 = r + \frac{a}{2} \\ \rho(\pi/2) = r + \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad H_0 = \frac{3\pi ar(a + 2r) - a(a^2 + 12r^2)}{3a + 12r} \end{array} \right. \quad (7.19)$$

Sostituendo nella prima, la seconda e la terza delle (7.19) è possibile ottenere un'equazione in  $\varphi$ :

$$\varphi = \frac{3\pi r(a + 2r)^2 - (a + 2r)(a^2 + 12r^2) \cos \varphi}{6\pi r(a + 2r) \cos \varphi - 2(a^2 + 12r^2) \cos \varphi + 12r(a + 2r)\varphi \cdot \sin \varphi} \quad (7.20)$$

derivando rispetto a  $\varphi$  e ponendo uguale a zero la derivata deve essere che  $\varphi = 0.950914rad$  nel punto in cui  $\rho = r - a/2$  poiché  $r$  è costante e ci troviamo in coordinate polari (questo è il punto in cui si formerà la cerniere lul lato interno per sviluppare il meccanismo a cinque cerniere visto nel paragrafo precedente, l'altra sarà speculare e le restanti si formeranno all'imposta e in chiave). Si può poi fare lo stesso per lo spessore e il risultato ottenuto è  $a_{\min} = 0.1075 \cdot r$ .

## 7.2.6 Altri metodi di analisi

### I metodi FEM e DEM

Oltre all'analisi limite, ormai piuttosto consolidata nella pratica, vi sono altri metodi di analisi per gli archi i quali fanno uso di metodi ad elementi finiti (FEM) e discreti (DEM).

In particolare con il FEM, utilizzato fin dai suoi albori nel campo della muratura si è dimostrato particolarmente utile per eseguire analisi alle tensioni; esso richiede che siano conosciuti i parametri di resistenza del materiale in fase di calcolo in modo tale da poter calcolare le matrici di rigidezza del sistema. Proprio questo fatto è il punto più critico di tale analisi, infatti è molto complesso conoscere le caratteristiche meccaniche dei materiali: essi potrebbero essere soggetti a degrado o lesioni ed inoltre data la vetustà delle opere non vi può essere certezza di una resistenza standardizzata degli elementi costruttivi, inoltre, la struttura si pone in essere come composita di più elementi e materiali; ad esempio il riempimento che potrebbe presentare vuoti e vacanze nonché un comportamento incoerente. Oggi grazie a metodi di analisi non distruttivi come radar GPR e sonde ad ultrasuoni tale incertezza va sempre diminuendo ma rimane un'aspetto di fondamentale importanza per l'uso del FEM.

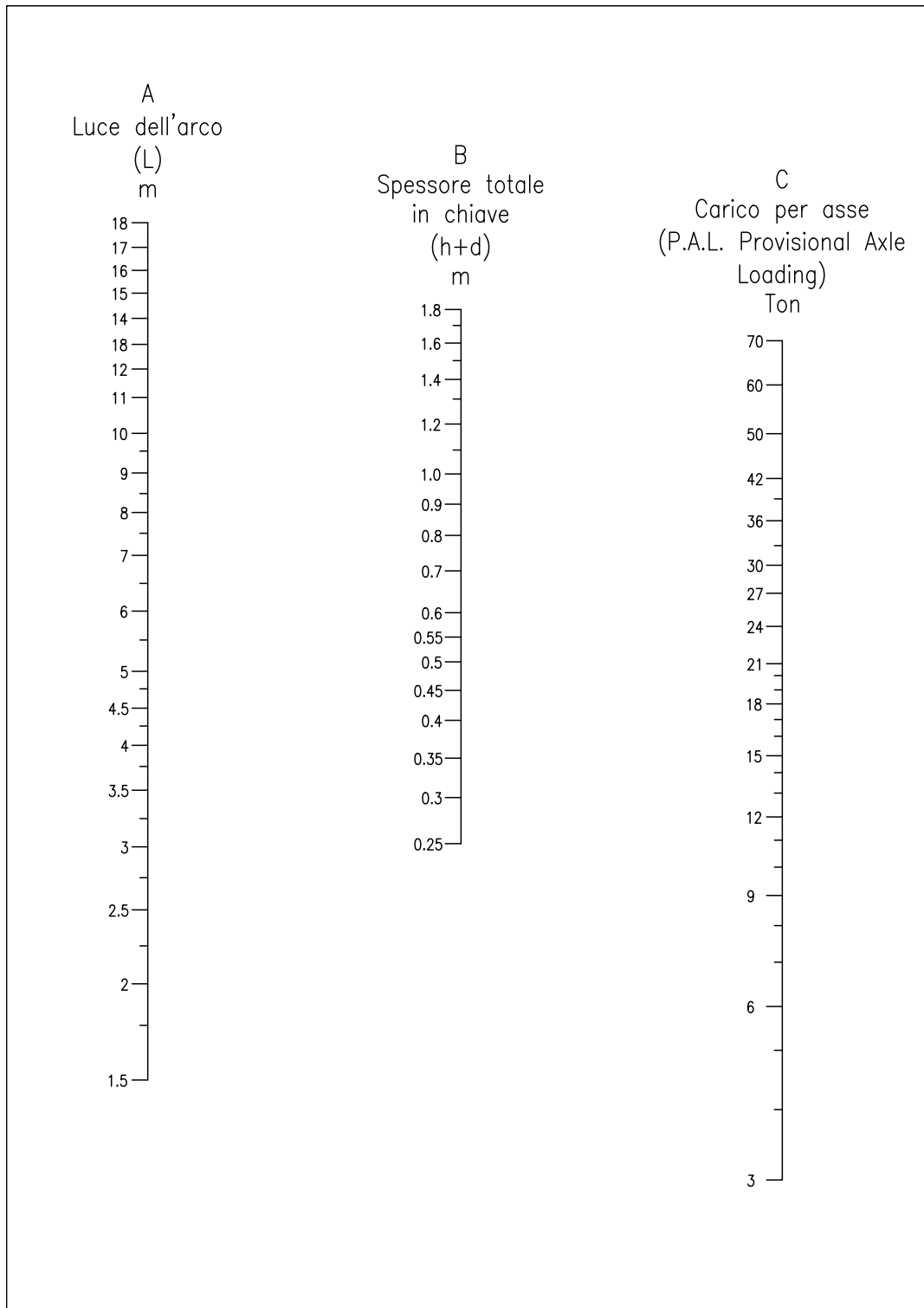
Il metodo agli elementi discreti o DEM risulta particolarmente utile in quanto la muratura ha la particolarità di essere un materiale composito, in cui i giunti tra i mattoni creano piani di debolezza naturali e predefiniti, e in alcuni casi l'ipotesi di un materiale omogeneo e continuo potrebbe non essere valida. Il materiale può essere considerato come un insieme di blocchi rigidi separati, connessi tramite giunti, i quali si possono considerare sia rigidi che deformabili. Nella valutazione delle strutture in muratura, ci sono due aspetti fondamentali da considerare: è necessario permettere ampi spostamenti e rotazioni tra i blocchi, e secondo, il rilevamento di nuovi contatti deve avvenire automaticamente durante il calcolo. Per queste ragioni, il metodo DEM è in grado di simulare il collasso progressivo causato dalla propagazione delle fessure. La procedura di calcolo di base nel metodo DEM utilizza sia la legge forza/spostamento per tutti i contatti, sia la seconda legge di Newton per ogni blocco. Solitamente i blocchi non rappresentano un singolo mattone, ma un raggruppamento di essi, è comune possibile attraverso l'implementazione di modelli in micro-modellazione discretizzare il singolo mattone, la malta e l'interfaccia tra i due in maniera separata.

## Il metodo MEXE/MOT

Il metodo MEXE (Military Engineering eXperimental Establishment) è stato una semplice metodologia per quantificare la capacità portante di ponti storici in muratura, esso fu utilizzato estesamente fin dalla sua introduzione negli anni 30' del secolo scorso e soprattutto durante il secondo conflitto mondiale quando era necessario valutare speditamente la capacità di carico dei ponti in modo da potervi far transitare i convogli militari. Il metodo di basa sugli studi di Pippard [] il quale considerava un'arco a sesto acuto "pointed Arch" con proporzioni  $f/l = 4$  ed un carico posizionato ad un quarto della luce ovvero  $f/r_q = 3/4$  (in cui  $r_q$  rappresenta l'altezza del carico rispetto all'imposta); il carico massimo in chiave stimato da Pippard ( $W_A$ ) per l'arco era pari al doppio di quello ad un quarto della luce ( $W_2$ ):

$$W_2 = \frac{\frac{256\sigma hd}{l} + 128\rho hl \left( \frac{a}{28d} - \frac{1}{21} - \frac{h+d}{4f} \right)}{\frac{25}{f} + \frac{42}{d}} \quad (7.21)$$

nella quale:  $\sigma = 13 \text{ ton/ft}^2$  ovvero  $\approx 1 \text{ MPa}$  ovvero la compressione tra i conci (più che ragionevole),  $\rho = 0.0625 \text{ ton/ft}^3$  è il peso del riempimento ovvero  $\approx 20 \text{ Kn/m}^3$ ; gli altri dati sono  $f$  la freccia,  $d$  lo spessore in chiave ed  $h$  l'altezza tra la chiave e il piano stradale. Inoltre Pippard lavora con l'ipotesi che la struttura lavori sempre in campo elastico. Aggiustando la formula ed i coefficienti, l'U.S. Army Corps of Engineers creò un nomogramma nel quale data la luce  $l$ , e la totale l'altezza in chiave  $h+d$  è possibile sapere il carico per asse al disotto del quale la struttura è considerata sicura. Il metodo fu poi rivisitato e migliorato dal U.K. Ministry of Transport (da cui MEXE/MOT) il quale con memorandum nel 1967 lo annovera tra i metodi da utilizzarsi in caso di verifica di capacità portante nella nazione. Oggi questo metodo è utilizzato solo per fornire valori di massima, per un'analisi più approfondita vengono utilizzati i metodi precedenti, inoltre il metodo ha ricevuto forti critiche in quanto si è registrata una sottostima dei carichi per luci  $> 12$  metri e una sovrastima per piccole luci anche se esse non rappresentano mai valori di estremo disaccordo con gli altri metodi utilizzati. Il metodo è utilizzabile fino a rapporti freccia/luce maggiori di  $1/8$ .



**Figura 7.13:** Metodo MEXE/MOT, nomogramma per l'individuazione del carico ammissibile per asse dei mezzi





# Capitolo 8

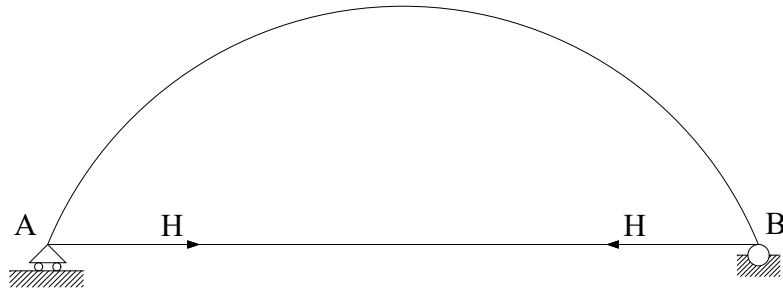
## Soluzioni costruttive

### 8.1 L'arco a spinta eliminata

Può capitare di sovente che nel superamento di una luce ci si trovi in una posizione nella quale la soluzione a travata, per la sua lunghezza obblighi all'adozione di espedienti progettuali tali da renderla complessa e antieconomica. D'altra parte però la stessa luce coperta con un arco a via inferiore risulterebbe ingombrante per via della stottostruttura, rivelandosi poco adatta al mantenimento di altezze libere atte ad esempio, al mantenere la navigabilità di un canale, o permettere l'installazione delle catenarie per l'elettrificazione delle ferrovie. Non va dimenticato altresì che la soluzione classica di un'arco obbliga all'adozione di un'apparato fondale tale da reggerne la spinta orizzontale.

Ne deriva che una nuova forma, oltre a quelle viste, dev'essere accolta. La soluzione a questi inconvenienti arriva nell'anno 1849 con il brevetto "*iron bowstring bridge*" di Squire Whipple, ingegnere civile statunitense considerato uno degli iniziatori della tradizione dei ponti metallici. Ad oggi gli archi di tipo bow-string conosciuti anche come archi a spinta eliminata sono la tipologia di arco in assoluto più utilizzata per coprire luci da piccole a medio-grandi.

L'arco a spinta eliminata può considerarsi una variante dell'arco a due cerniere a via inferiore, in cui la spinta orizzontale non è sorretta dalla fondazione, ma bensì assorbita da un tirante, solitamente costituito dall'impalcato stradale stesso che collegando le imposte funge da reggispinta (fig. 8.1). Le fondazioni devono quindi sostenere solo carichi verticali, esattamente come se si trattasse di uno schema a

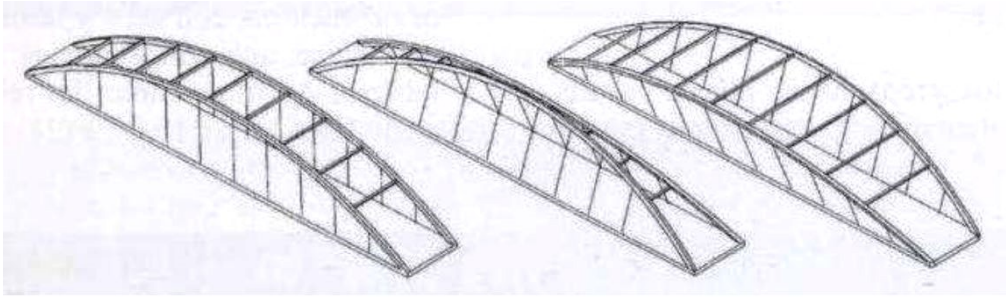


**Figura 8.1:** *Schema statico di un'arco a spinta eliminata*

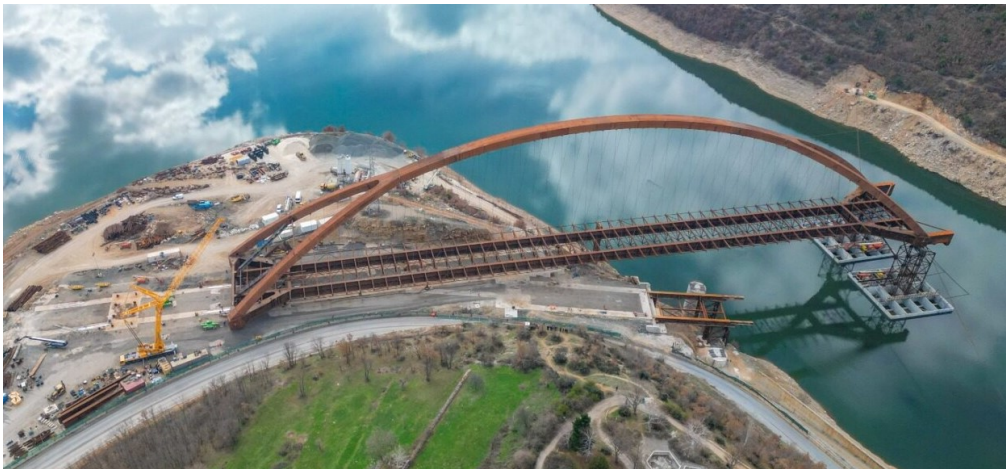
travata. Queste strutture sono generalmente costituite da un'arco in acciaio, calcestruzzo armato o soluzioni ibride in acciaio misto calcestruzzo (sezione cava in acciaio riempita in calcestruzzo) e impalcato metallico con soletta collaborante, più raramente l'impalcato è realizzato interamente in calcestruzzo (chiaramente pre-compresso), questo però obbliga a dare alle travi una precompressione maggiore a quella che si avrebbe se esse fossero semplicemente appoggiate a causa della spinta orizzontale  $H$  dell'arco. Inoltre per assorbire efficacemente la spinta i trefoli di precompressione dovrebbero essere in posizione baricentrica nella sezione, invece sfavorevole per assorbire i momenti flettenti in campata. Nel caso di impalcato metallico con soletta collaborante le travi principali sono anche quelle che fungono da reggispinta (più raramente la funzione è affidata a tiranti metallici a vista) per questo motivo esse sono solitamente lasciate isolate dal conglomerato, in modo da non causare fessurazioni alla soletta.

La configurazione degli archi riveste un punto di particolare importanza nella progettazione di queste strutture, ne influenza infatti oltre che l'estetica anche la capacità statiche. La configurazione con due archi su piani paralleli è la più frequente in assoluto sia per i ponti metallici che per quelli in cemento armato, essi sono solitamente collegati tra loro lungo quasi tutta la lunghezza da traversi che ne evitano l'instabilità fuori dal piano, inoltre, nella zona di collegamento tra arco

ed impalcato di prevede un importante irrigidimento per permettere al ponte di assorbire sforzi trasversali. Alcune varianti di questa configurazione propongono i due archi o inclinati verso l'interno in modo tale da fondersi in un'unico elemento in nella parte sommitale, oppure inclinati verso l'esterno di modo da creare una con i traversi una forma scatolare trapezia (fig. 8.2).



**Figura 8.2:** *Da destra a sinistra si possono notare la configurazione ad archi paralleli, inclinati verso l'interno e verso l'esterno*



**Figura 8.3:** *Varo del Ponte Drini, Kosovo 2024, cortesia Cimolai s.p.a.. Nell'immagine è possibile apprezzare a pieno il funzionamento dell'arco a spinta eliminata, l'arco centrale si apre in corrispondenza del piano viario per poi trasferire la spinta alle due travi di impalcato centrali*

I traversi possono essere eliminati solo se si garantisce la stabilità fuori dal piano dell'arco ma questo è raggiungibile solo aumentando le inerzie e quindi le sezioni con un dispendio di risorse molto maggiore rispetto a quello dei traversi, per questo motivo a meno che le esigenze architettoniche ed estetiche non lo impongano,

quest'ultima soluzione viene preferita nella quasi totalità dei casi. Un'altro possibile schema è quello con arco centrale disposto lungo l'asse del ponte, per assorbire le forze trasversali in questo caso si fa affidamento all'inerzia dell'impalcato, una variante di questo schema è quella in cui l'arco centrale si apre in due portali in corrispondenza del piano viario (fig. 8.3).

Vediamo ora il comportamento del tirante partendo dal momento del disarmo, ovvero il momento in cui il peso dell'arco e dell'impalcato vengono veramente presi in carico dal tirante (solitamente ve ne sono 2), esso si allungherà di una  $\Delta l_t$  pari a:

$$\Delta l_t = \frac{H_{3C}}{E_t A_t} \cdot l \quad (8.1)$$

la caduta di spinta dell'arco (o dei due archi) sarà quindi:

$$\Delta H = -H_{3C} \frac{\frac{l}{E_t A_t} + \int_{Arco} \frac{1}{EA} ds}{\int_{Arco} \frac{y^2 ds}{EJ} + \int_{Arco} \frac{1}{EA} ds} \quad (8.2)$$

Nell'equazione <sup>1</sup>, il termine dovuto all'allungamento del tirante è circa il triplo del termine dovuto alla classica caduta di spinta da accorciamento dell'asse, si intende quindi la gravità di un'allungamento eccessivo del tirante in termini di momenti per la struttura. Per ovviare a ciò si possono frapporre dei martinetti tra l'imposta dell'arco e il tirante che imporranno dall'esterno alla forza  $\Delta H$ ; se la struttura è in calcestruzzo andranno inoltre accuratamente considerate le deformazioni viscoso, molto impattanti soprattutto in questo tipo di struttura.

Il primo esempio al mondo di questo tipo di ponte si ha nel 1849 con il New Level Bridge sul Tyne a Newcastle nel Regno Unito ad opera degli ingegneri Robert Stephenson <sup>2</sup> e Thomas Elliot Harrison, è formato da 6 campate da 38 metri ciascuna poggianti su pile in pietra. Come si può notare dall'immagine (fig. 8.4) il ponte presenta una via superiore per il traffico ferroviario (a doppio binario) ed una inferiore con una corsia per le automobili e due passaggi pedonali. La struttura del ponte presenta tiranti composti da catene, in totale 24, non inglobate nella struttura dell'impalcato ma disposte esternamente.

---

<sup>1</sup>Se l'arco è in calcestruzzo alla (8.2) va aggiunto al numeratore il termine  $\varepsilon_{rit} \int_{Arco} ds$  che tiene conto del ritiro, il termine  $\varepsilon_{rit}$  è il coefficiente di ritiro specifico solitamente pari a 0.0001 o 0.0002.

<sup>2</sup>Nato il 16 ottobre 1803 a Willington Quay — morto il 12 ottobre 1859 a Londra, è stato uno dei più grandi ingegneri civili inglesi del diciannovesimo secolo, specializzato nella realizzazione di ponti ferroviari metallici, fu figlio di George Stephenson l'inventore della locomotiva.

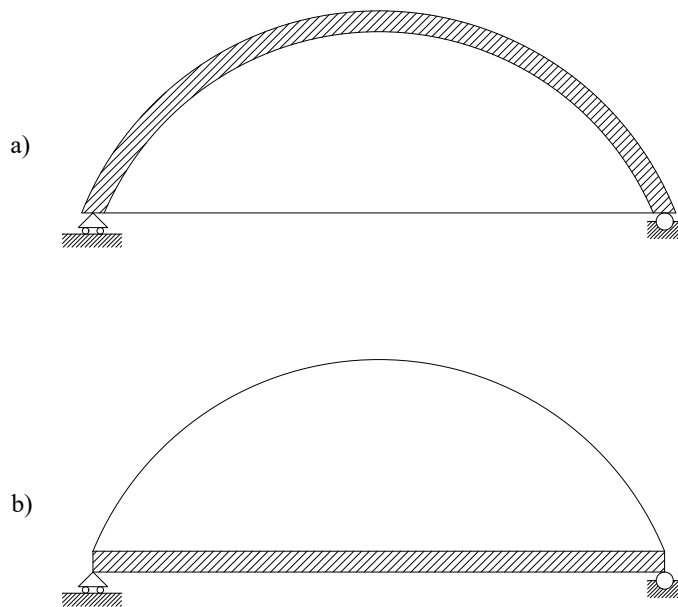


**Figura 8.4:** *Ponte High Level a Newcastle sul Tyne 1847-1849, sullo sfondo il Queen Elizabeth Bridge, foto scattata dallo Swung Bridge*

Successivamente a questo primo esempio l'arco a spinta eliminata ha visto una florida diffusione; inizialmente lo schema prevedeva un arco molto rigido ed un'impalcato a travata sottile, sostenuta da pendini solitamente rigidi, in questo modo le travi di impalcato erano soggette solo alla flessione locale dovuta dai carichi propri e accidentali e dipendente dall'interasse dei pendini.

Nel 1871 però l'ingegnere Tedesco Joseph Langer crea un ponte a Graz in cui le proporzioni sono invertite (fig. 8.5): un impalcato molto rigido è accoppiato ad un'arco molto snello, sollecitato esclusivamente a compressione e con inerzia appena necessaria a scongiurare fenomeni di instabilità, in questi ponti detti "alla Langer" (fig. 8.6) la distribuzione degli sforzi nei pendini è influenzata dalla forma dell'arco al contrario dello schema precedente in cui la trazione nei pendini è governata esclusivamente dalla posizione dei carichi variabili nell'impalcato. Tale struttura fa parte degli archi sottili ad impalcato irrigidente i quali verranno approfonditi nella loro versione a via superiore nel paragrafo 6.4.





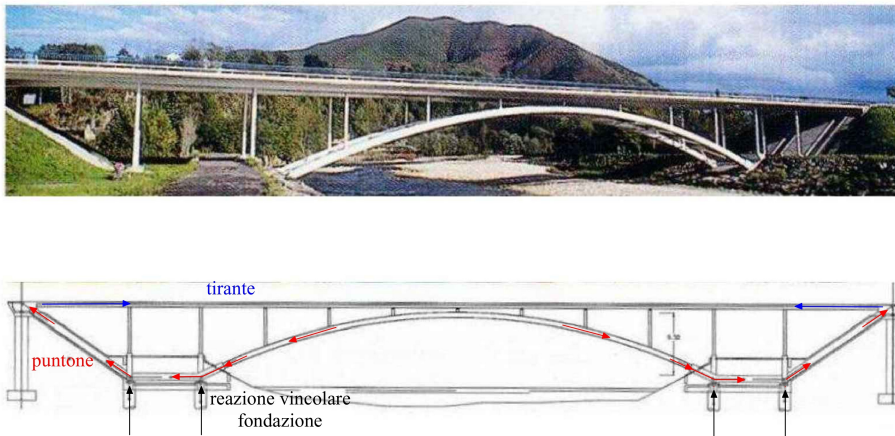
**Figura 8.5:** Arco a spinta eliminata con schema delle rigidezze "storico" a) e Arco di tipo Langer b)



**Figura 8.6:** Tipico ponte con schema Langer in cui è ben visibile la differenza di sezione tra l'arco e la trave di impalcato (Langer bridge, Bratislava, Slovacchia)

## Ponti a spinta eliminata a via superiore

Questo brevissimo paragrafo viene dedicato ad uno sviluppo piuttosto recente dei ponti a spinta eliminata, ovvero quelli a via superiore. Tal tipo di strutture, totalmente indistinguibili a occhio nudo da un ponte a via inferiore classico, nascondono un curioso funzionamento; l'arco viene collegato dalla fondazione alle estremità della travata con dei puntone inclinati, essi quindi trasferiscono la spinta dell'arco all'impalcato superiore che funge da tirante. In questo tipo di ponte è di fondamentale importanza la rigidezza flessionale dell'insieme arco-fondazioni-puntone in quanto una eccessiva deformazione porterebbe a scaricare il tirante e trasferire la spinta alla fondazione, non per essa progettata; devono inoltre essere previsti dei giunti di dilatazione in prossimità degli ancoraggi dei puntone con la travata in modo da attivare correttamente il meccanismo. Si riporta in fig 8.7 il ponte sul fiume Sella ad Arrionads di J. Manterola Armisén, splendido esempio di tale soluzione.

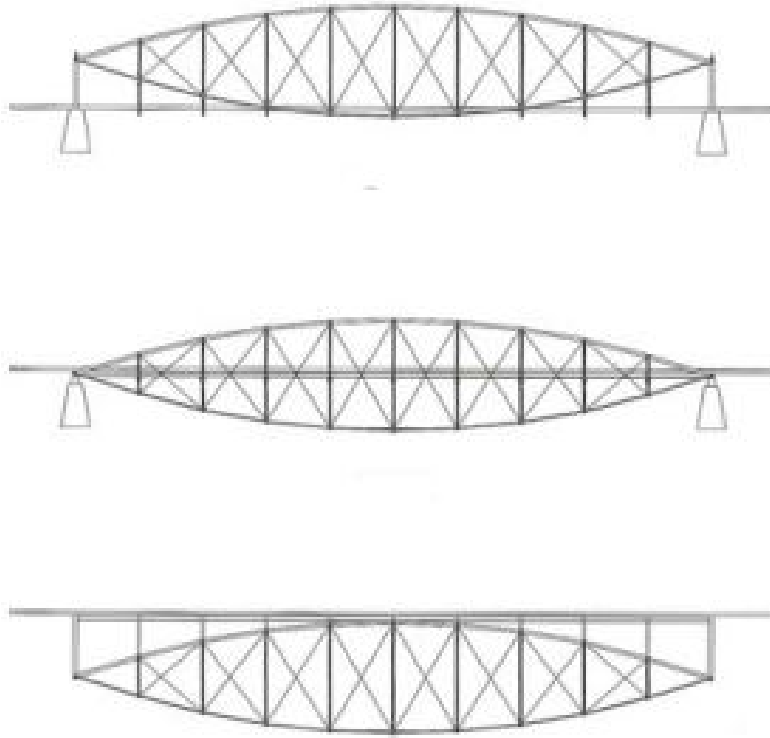


**Figura 8.7:** *ponte sul fiume Sella ad Arrionads (Asturie, Spagna) di J. Manterola Armisén. Sono indicati i percorsi fatti dalla spinta dell'arco: fondazione-diagonale-impalcato (tirante) lasciando alle fondazioni l'assorbimento dei soli carichi verticali*

### 8.1.1 La trave lenticolare

Dalla metà del diciannovesimo secolo, fino ai primissimi anni del ventesimo divenne popolare una variante dell'arco a spinta eliminata che consisteva nel dare una curvatura anche al tirante, in queste strutture, arco e tirante erano collegati da una struttura reticolare, conferendo all'insieme un comportamento limite tra quello

dell'arco e quello della trave. Per questa ragione tali strutture sono note come travi lenticolari (o di Pauli) (fig. 8.8).



**Figura 8.8:** nell'immagine si possono notare gli schemi tipici dei ponti a trave lenticolare

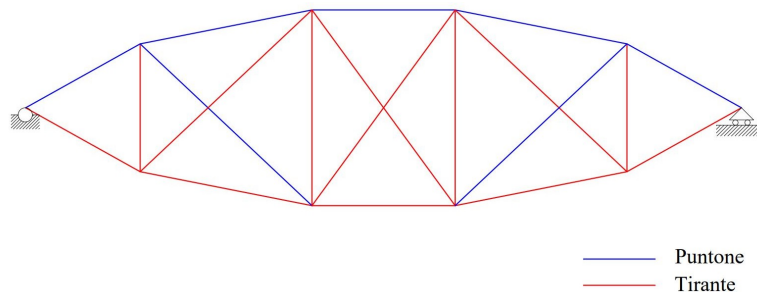
La trave solitamente più volte iperstatica internamente poteva essere posta sopra l'impalcato che ad esso veniva pendinata, al livello dell'impalcato, oppure sotto di esso. Il suo comportamento molto simile alla trave per il fatto di potersi autosostenere, consentiva ai costruttori di svolgere la maggior parte del lavoro in officina, trasportare le parti prefabbricate in cantiere, assemblarle a terra ed infine issare la trave in posizione. Questo sistema scongiurava quindi l'utilizzo di complesse e costosissime centine e diminuiva le lavorazioni da eseguire in quota. Il sistema ebbe un tale successo che negli Stati Uniti con esso vennero costruiti più di 400 ponti (quasi tutti dalla Berlin Iron Bridge Company azienda del Connecticut il cui fondatore William O. Douglas era titolare del brevetto statunitense della trave "elliptical truss") dei quali oggi ne sopravvivono 50. La maggior espressione di tale soluzione è certamente il Royal Albert Bridge (fig. 8.9) sul fiume Tamar, frutto del genio di Isambard Kingdom Brunel; completato nel 1859 il ponte ferroviario con due luci





**Figura 8.9:** *Ponte Royal Albert, è visibile nella pila il nome di Isambard Kingdom Brunel e l'anno di costruzione, si notano inoltre la sezione circolare del corrente compresso superiore, il corrente teso formato da catene e la struttura di connessione reticolare*

lenticolari di 138.70 copriva all'epoca la luce libera più lunga del mondo e ad oggi ancora la più lunga con tale tecnologia. Si può notare nella struttura come l'ingegnere abbia sostituito il corrente superiore compresso con un'unico tubolare in ghisa in modo da scongiurare data la grande l'inerzia della sezione fenomeni di instabilità al corrente compresso (fig. 8.10), il corrente teso è invece ancora una volta realizzato da catene come si soleva fare all'epoca (in particolare risulta interessante sapere, per nota storica che esse sono le stesse del famosissimo ponte di Clifton uno dei primi ponti sospesi della storia sempre progettato da I.K. Brunel).

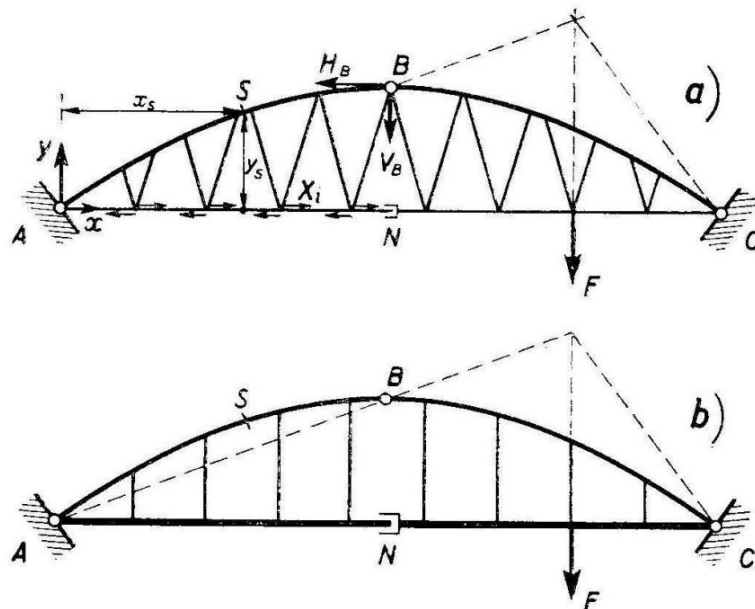


**Figura 8.10:** *Schema semplice di una trave lenticolare nella quale sono visibili le aste tese in rosso e quelle compresse in blu*

La fortuna di queste strutture ebbe però vita breve infatti l'utilizzo di tre distinti elementi: l'arco, il tirante e l'impalcato rese la struttura antieconomica se comparata ai successivi archi a spinta eliminata con impalcato-tirante e ad altre soluzioni per luci anche maggiori quali i ponti sospesi.

### 8.1.2 La trave Nielsen

La struttura Nielsen prende il nome dal suo inventore, lo svedese Octavius Nielsen; egli nel 1926 ebbe l'idea di sospendere l'impalcato non con pendini diritti ma bensì inclinati secondo due direzioni simmetriche rispetto alla verticale, si ottiene quindi uno schema reticolare in cui il corrente superiore ed inferiore sono continui mentre i correnti intermedi sono privi di rigidezza; il comportamento è quindi ibrido tra quello di un'arco e quello della trave. L'inclinazione dei pendini crea infatti una componente orizzontale che riesce a ridurre (a seconda della posizione del carico e dell'inclinazione dei pendini) le sollecitazioni da carichi accidentali da 1/5 a 1/10 rispetto ad una struttura di eguale luce e carichi con sospensione verticale. Possiamo vedere infatti nel seguente esempio (fig. 8.11):



**Figura 8.11:** Schema di una struttura con pendini inclinati incernierati di tipo Nielsen ed una con sospensione classica soggette ad un carico accidentale concentrato  $F$

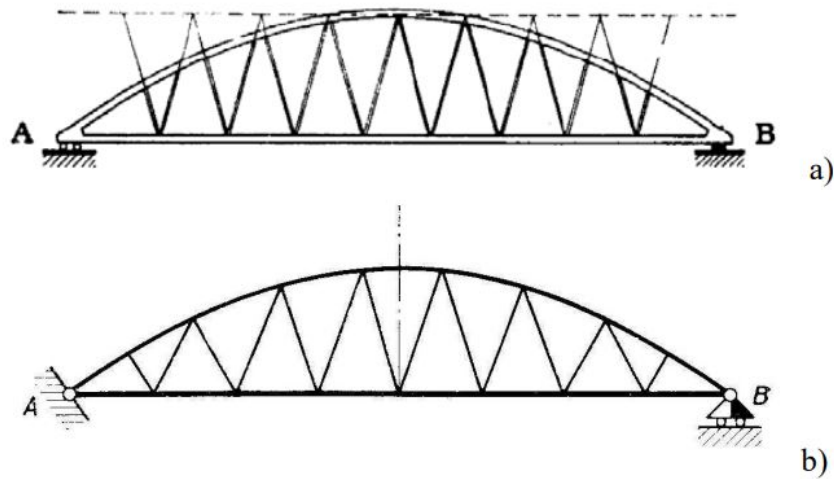
il momento nella sezione S nel caso della Nielsen risulta:

$$M_s = -V_B\left(\frac{l}{2} - x_s\right) + H_B(f - y_s) - y_s \sum_{i=1}^N X_i \quad (8.3)$$

mentre nel caso della sospensione con pendini verticali

$$M_s = -V_B\left(\frac{l}{2} - x_s\right) + H_B(f - y_s) \quad (8.4)$$

Conseguenza immediata della riduzione dei momenti è la possibilità di ridurre le sezioni con conseguente riduzione dei costi. Vale inoltre citare il fatto che la struttura Nielsen risente meno degli errori eseguiti nella realizzazione dell'arco, ad esempio il cedimento delle centine. La disposizione dei pendini nei ponti ad arco con struttura



**Figura 8.12:** Schema di una struttura con pendini inclinati confluenti su una retta passante per la chiave a) pendini concorrenti direttamente sull'arco b)

Nielsen prevede che essi abbiano inclinazione uguale ed opposta rispetto alla verticale, come se confluissero ad una retta speculare al piano dell'impalcato e passante per la sezione di chiave (fig. 8.12a). Un'altra configurazione propone invece che i pendini concorrano direttamente sull'asse curvilineo dell'arco (fig. 8.12b), questa soluzione avvicina molto la struttura ad un trave reticolare (detta infatti "alla Nielsen"<sup>3</sup>) con la differenza che il corrente e superiore e inferiore sono continui mentre

<sup>3</sup>Un utilizzo della trave reticolare Nielsen è quello di stabilizzare i ponti a spinta eliminata durante il varo, essi infatti non potendo sopportare appoggi che non siano quelli della configurazione finale, vengono irrigiditi con diagonali metalliche che rendono la struttura una trave a tutti gli effetti che dopo il varo vengono rimossi.

le diagonali, incernierate, costituite da cavi non sono in grado di trasmettere sforzi compressione e potranno pertanto risultare non collaboranti.

L'ultima osservazione, valida in generale per una struttura a pendini inclinati è particolarmente interessante poiché se per carichi derivanti dal peso proprio ogni pendino risulta in trazione, i carichi accidentali potrebbero generare in alcuni sforzi di compressione. Se la compressione da carico accidentale risulta inferiore alla trazione da peso proprio non è necessario intervenire in alcun modo sulla struttura poiché il pendino risulta sempre teso, se invece la trazione da peso proprio non dovesse bastare potrebbero generarsi stati di crisi; per ovviare a ciò si possono aumentare gli interassi tra i pendini (aumentando però i momenti sull'impalcato e la possibilità di instabilità) oppure operare un precarico dei tiranti più sensibili (solitamente quelli più esterni).

### 8.1.3 I ponti Network

Nati nel 1950 in Norvegia dall'ingegner Per Trevit, si tratta di una configurazione particolare del sistema Nielsen in cui la disposizione dei pendini avviene su più strati sovrapposti, essi infatti potranno incrociarsi sulla lunghezza una più o più volte formando un reticolo, *network* per l'appunto (fig. 8.13). Questo schema nasce per rendere meno sensibile il sistema all'instabilità diminuendo i momenti e creando una forte interconnessione tra arco e impalcato, facendo funzionare il tutto sempre più similmente ad una trave.



**Figura 8.13:** Ponte di tipo *network*, Tessengerlo, Paesi Bassi

I pendini essendo in gran numero, non possono essere troppo verticali per evitare che reagiscano da soli in caso di carico concentrato in corrispondenza del loro

punto di ancoraggio, ma nemmeno troppo inclinati per non favorirne il rilassamento e il formarsi di una catenaria da peso proprio, la loro progettazione va pertanto particolarmente attenzionata.

In un classico arco network, la condizione più gravosa è quella con il massimo carico distribuito sull'intera luce. In tali casi nodi equidistanti lungo l'arco permettono di avere minore instabilità nell'arco e minori momenti. Inoltre, se i pendini hanno la stessa sezione, gli sforzi agenti su di essi sono pressoché uguali. Generalmente in questo tipo di ponti, può essere conveniente realizzare il tirante dell'arco in cemento armato precompresso. In questo modo il peso di questo elemento contribuisce ad evitare il rilassamento dei pendini. Inoltre, data la snellezza degli archi nei ponti network, l'impalcato deve essere necessariamente più rigido per assorbire le flessioni.

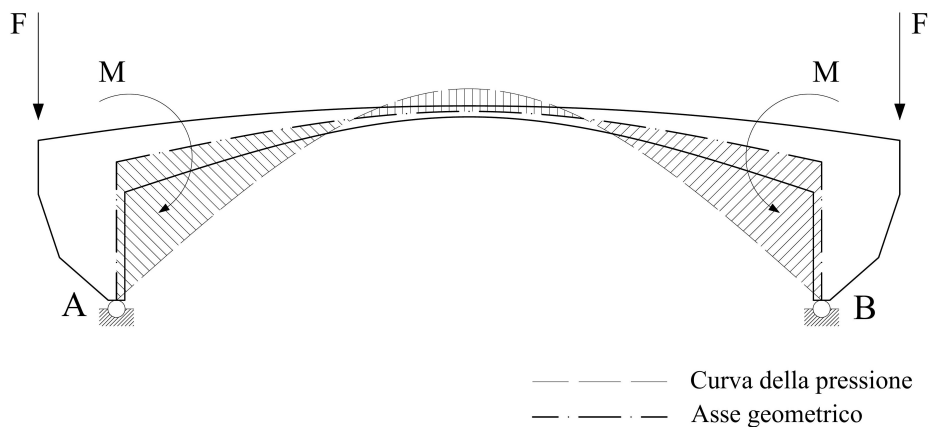
## 8.2 L'arco telaio

Il problema di dover costruire una struttura rispettando una fascia limite per le sovrastrutture così come per le sottostrutture ad esempio l'attraversamento di una canale navigabile all'interno di una zona urbanizzata può essere risolto in maniera assai elegante ma non altrettanto economica da una struttura detta da arco-telaio.

La soluzione è così definita poiché presenta la spinta alle imposte quale caratteristica tipica dell'arco e la presenza di forti momenti flettenti anche solo da peso proprio esattamente come una struttura intelaiata.

La struttura è composta da un arco-trave di sezione molto variabile e due ritti molto corti e massicci (camuffati da spalle) incernierati alla base. L'arco-telaio è quindi un'arco a due cerniere.

La forma dell'arco, così realizzata come abbiamo visto per fini puramente pratici, ha lo sconveniente di non seguire per nulla la curva delle pressioni, e come visto nel capitolo 3 più l'asse si discosta da essa più grandi saranno i momenti flettenti, l'arco è infatti caratterizzato da forti momenti flettenti negativi ( $M$ ) soprattutto in vicinanza dei ritti che tendono a far collassare verso l'interno la struttura facendola ruotare sulle sue cerniere. Per questo motivo solitamente i ritti sono zavorrati in

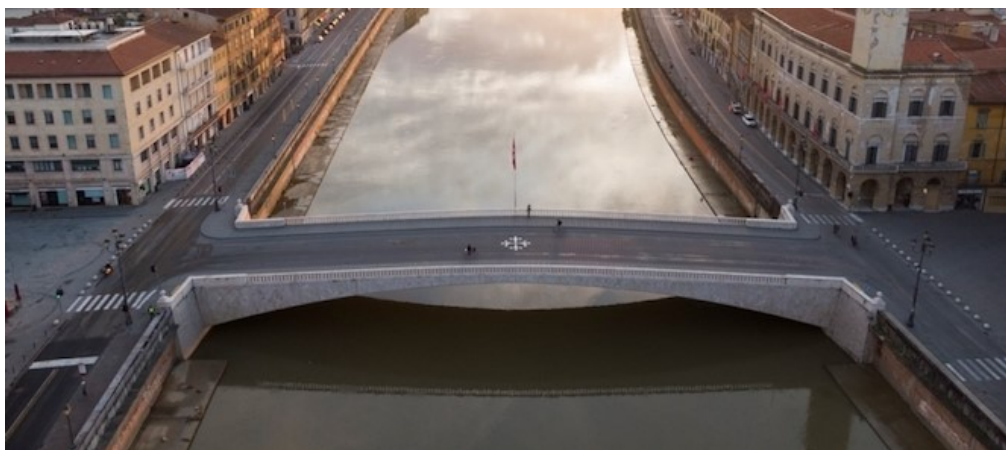


**Figura 8.14:** Schema strutturale di un ponte ad arco-telaio, è visibile la grande differenza tra a curva delle pressioni e l'asse geometrico

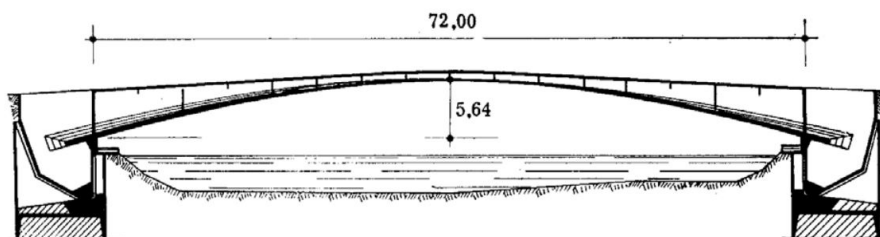
modo da controbilanciare il momento provocato dal peso proprio della campata, e le reni fortemente armate. Particolarmente efficiente risulta il far poggiare le travi degli impalcati di accesso (meglio se in calcestruzzo, nell'immagine indicati con  $F$ ) direttamente sui ritti in modo da fornire con il loro peso un momento

atto a bilanciare quello di peso proprio dell'arco (fig. 8.14). L'arco-telaio è viste le caratteristiche è una soluzione di rado utilizzata ma di pregevolissima finezza estetica, si pone infatti all'osservatore come un'arco molto snello e ribassato.

Il maggior esponente italiano di questo tipo di strutture è stato l'ingegner Giulio Krall di cui si ricorda tra tutti il Ponte di Mezzo sull'Arno a Pisa (edificato da Ferrobeton tra il 1947 e il 1950 della quale il Krall era collaboratore) (fig. 8.16 e 8.15).



**Figura 8.15:** *Ponte di Mezzo sull'Arno, Pisa*



**Figura 8.16:** *Ponte di Mezzo sull'Arno, sono visibili nello schema le due cerniere di vincolo*

### 8.3 I ponti tipo Risorgimento

Una soluzione alle problematiche citate nella sezione precedente è quella di un'arco questa volta propriamente ribassato con un comportamento al limite tra l'arco e la trave. Essi sono realizzati con una sezione scatolare, ma non è questa la caratteristica che ne garantisce resistenza infatti, in corrispondenza dell'attacco tra le reni e



la fondazione, le pareti verticali (costole di irrigidimento) dello scatolare, vengono infatti parzializzate in quasi tutta la loro altezza (tagli alla Hennebique) in modo da abbassare il baricentro della sezione resistente ed aumentare la freccia effettiva (le strutture di questo tipo nelle quali non sono previste, se le sono procurate da sè), inoltre, tale espediente consente lo scaricarsi della massima parte delle sollecitazioni dovute alle deformazioni assiali nei riguardi delle quali una struttura parzializzata si comporta in modo molto prossimo ad una struttura isostatica, potendosi guardare alle sezioni parzializzate come a delle cerniere.



**Figura 8.17:** *Ponte del Risorgimento a Roma visto dal lungo Tevere*



**Figura 8.18:** *Il ponte presenta quattro iscrizioni di questo tipo: due su ogni lato della carreggiata, esse recitano sul lato nord: "Ponte in cemento armato ad un'unica arcata di 100 metri di corda con freccia di 10 metri" e "Costruito con sistema Hennebique dalla società Porcheddu Ing. G.A." mentre sul lato sud: "Inaugurato l'11 maggio del 1911 nel cinquantenario della proclamazione di Roma Capitale d'Italia" e "Dall'amministrazione popolare cittadina al Risorgimento italiano"*



Capostipite di questa tipologia di strutture è il ponte del Risorgimento (fig. 8.17 e 8.18) a Roma la cui ragguardevolissima luce di 100 metri con 10 di freccia rappresentava la maggiore all'epoca (1911) per un'arco. Progettato da Francois Hennebique e realizzato in collaborazione con Giovanni Antonio Porcheddu <sup>4</sup> In questo primo ponte, la tecnica dei tagli non venne propriamente attuata poiché non prevista in fase di progetto ma l'Hennebique intuendo che la viscosità del calcestruzzo giovane avrebbe potuto avere effetti positivi sulla redistribuzione delle tensioni soprattutto alle imposte allentò progressivamente i cunei della centina di nascosto durante la notte. Successivamente a questo esempio questo particolare tipo di struttura venne riproposta poche volte ma sempre con pregevoli risultati, soprattutto da Giulio Krall del quale si ricordano il ponte Testaccio a Roma di 96 m di luce e 10.8 di freccia (al tempo dell'inaugurazione nel 1948 detto "ponte d' Africa") ed il nuovo ponte sul Volturno a Capua, questa volta a più campate.



**Figura 8.19:** *Ponte Testaccio a Roma prima "Ponte d' Africa"*

Questo tipo di struttura, data la sua complessità, e l'obiettivo sintetico dell'opera non viene oltre approfondita, tale atto richiederebbe infatti un'importate

---

<sup>4</sup>All'epoca, l'impresa G.A.Porcheddu era l'unica in Italia con la concessione del brevetto francese di Francois Hennebique sul calcestruzzo armato. È altresì interessante sapere che l'impresario nonostante la complessità dell'opera firmò per un contratto che obbligava la società alla totale ricostruzione del ponte in caso di crollo dello stesso.

disquisizione riguardante i fenomeni lenti del calcestruzzo e dei cedimenti dell'apparato fondale, in caso di interesse si consiglia comunque la lettura del capitolo XI sezione IX dell'opera "Scienza delle costruzioni" di Vincenzo Franciosi.

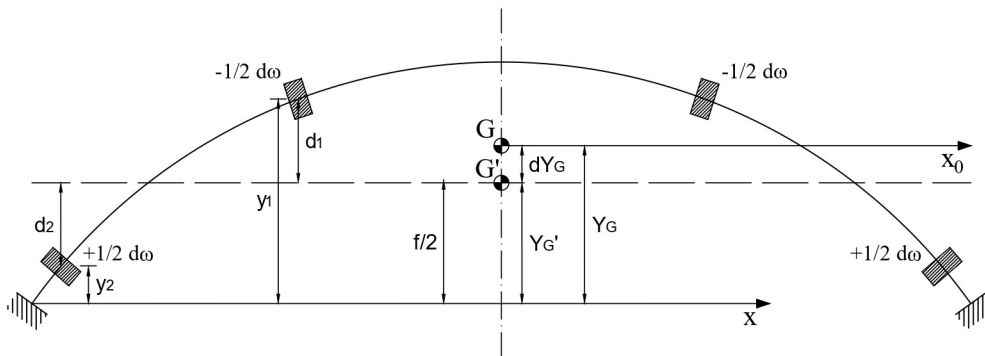
## 8.4 L'arco tipo Boussiron

L'arco di Boussiron è un'arco a configurazione incastrata realizzato in calcestruzzo armato, esso inverte il classico andamento delle inerzie nelle strutture di questo tipo infatti, se solitamente le inerzie crescono dalla chiave alle imposte; in questo caso l'andamento è opposto: le inerzie maggiori si trovano in chiave e le minori all'incastro. Il primo e pressoché unico esempio di tale struttura è il ponte di La Roche Guyon sulla Senna (fig. 8.20) poco fuori Parigi, costruito nel 1934 dagli ingegneri Simon Boussiron e Nicolas Esquillan, si trattava della più grande luce dell'epoca per un ponte a via intermedia il calcestruzzo, il ponte ebbe però vita breve, fu infatti demolito nel 1940 a soli sei anni dall'inaugurazione dall'esercito francese per tentare di rallentare l'invasione tedesca. Dimenticato nella storia tale esempio non è stato pressoché più riproposto.



**Figura 8.20:** Ponte di La Roche Guyon nel 1934 poco dopo l'inaugurazione; si nota come le sezioni dell'arco varino dalla chiave alle imposte

La soluzione costruttiva, deriva dall'osservazione che i momenti derivanti dalle aliquote di spinta legate alle deformazioni da peso proprio, salti termici e ritiro sono tutte proporzionali all'inverso del momento d'inerzia dei pesi elastici  $J_{x,inc}$  come visibile nelle (5.29) (5.39). Si nota quindi come un'opportuno aumento di tale parametro possa portare a vantaggi non trascurabili in termini di sgravio dello stato tensionale. Nella configurazione usuale, la legge di variabilità dell'inerzia delle sezioni porta ad un'aumento dalle stesse dalla chiave verso gli incastri in modo da far fronte più efficacemente ai momenti laddove ve n'è più bisogno; questo fatto porta il baricentro elastico a disporsi ben al disopra di metà della freccia  $f$ , basti pensare che nel caso più semplice di arco a tutto sesto a sezione costante esso si localizza a  $2f/\pi$  ovvero  $0.637 \cdot f$ . Si espone ora come la soluzione del Boussiron comporti ad un'aumento del momento d'inerzia dei pesi elastici  $J_{x,inc}$ , e conseguente aumento del raggio giratore d'inerzia  $\rho$  per mezzo di un'abbassamento della posizione del baricentro elastico.



**Figura 8.21:** Procedura di migrazione dei pesi elastici dalla parte sommitale ad una più bassa simmetrica alla prima secondo i due assi di simmetria

Con riferimento alla figura 8.21, si individuino 2 conci ai quali venga diminuito il peso elastico (aumentata l'inerzia) di  $d\omega/2$ , e che lo stesso venga ricollocato in posizione simmetrica rispetto alla linea tratteggiata, andando quindi ad aumentare (diminuire l'inerzia) quello dei conci disposti al di sotto della linea, la variazione di peso elastico detto esso  $w$  risulterà quindi:

$$d\omega = -2 \cdot \frac{d\omega}{2} d_1^2 + 2 \cdot \frac{d\omega}{2} d_2^2 = d\omega(d_2^2 - d_1^2) \quad (8.5)$$

la variazione risulta positiva in quanto la posizioni di  $Y_G$  è superiore ad  $f/2$  e di conseguenza è sempre  $d_2 > d_1$  La migrazione dei pesi elastici con questa modalità porta ad un'abbassamento del baricentro elastico nella posizione  $Y'_G$  quindi:

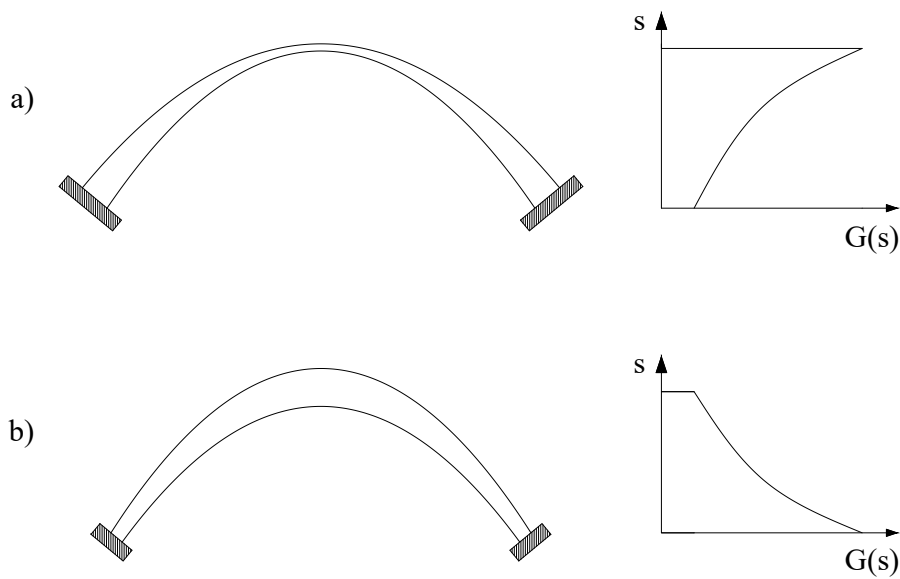
$$Y'_G = \frac{S'_x}{\sum w} = \frac{S_x - d\omega(y_1 - y_2)}{\sum w} = Y_G - \frac{d\omega}{\sum w}(y_1 - y_2) \quad (8.6)$$

da cui:

$$dY_G = Y_G - Y'_G = \frac{d\omega}{\sum w}(y_1 - y_2) \quad (8.7)$$

ma allora per il teorema di Huygens-Steiner:

$$J'_{x,inc} = J_{x,inc} + \left( \frac{d\omega}{\sum w}(y_1 - y_2)^2 \right) \cdot \sum w \quad (8.8)$$



**Figura 8.22:** *Nell'immagine possiamo notare come le inerzie e i conseguenti pesi elastici siano distribuiti in un'arco incastrato con configurazione classica a) e Boussiron b) è evidente come spostando le inerzie maggiori dalle imposte alla chiave il baricentro elastico si sposti verso il basso*

ecco che l'abbassamento dei pesi elastici operato dal Boussiron comporta un innalzamento del peso elastico con le conseguenze già descritte con massima efficienza

nel caso di coincidenza di  $Y_G$  con  $f/2$ . Pur diminuendo gli effetti delle deformazioni assiali, e quindi tra l'altro i momenti delle imposte, la diminuzione dell'altezza delle sezioni proprio in quest'area comporta che esse siano sempre particolarmente critiche in sede di verifica. Dal punto di vista grafico è possibile visualizzare il processo in figura 8.22 in cui è mostrato qualitativamente l'andamento del poso elastico al variare della freccia.

## 8.5 Sistemi collaboranti arco-trave: i ponti Millart

Se nei ponti di grande luce non ha alcun senso considerare le travi di impalcato come partecipanti alla portanza e alla rigidezza del complesso, dato che le loro sezioni non sono paragonabili con quelle dell'arco che le sostiene; nei ponti di luce intermedia invece queste dimensioni sono confrontabili quindi potrebbe risultare significativo un loro computo nella resistenza totale della struttura soprattutto in vista di un'abbassamento dei costi.

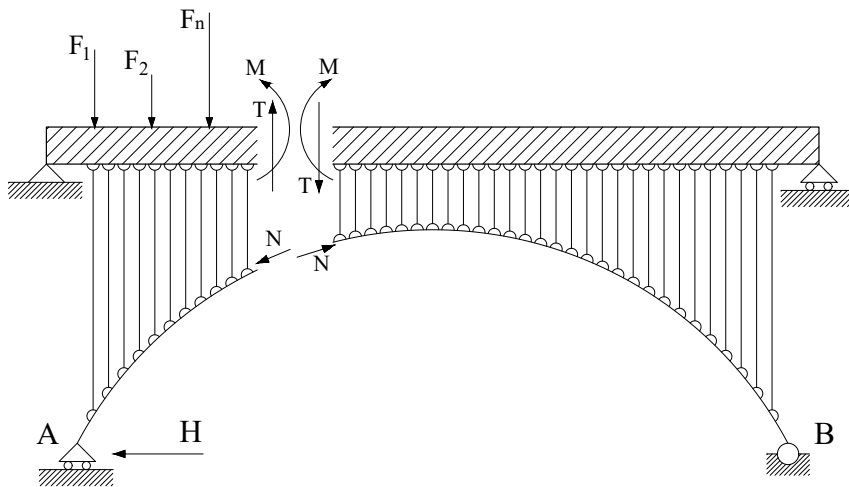
Solitamente questa osservazione viene in favore di sicurezza ignorata in particolare nei ponti a spinta eliminata con impalcato in calcestruzzo in quanto la fessurazione dello stesso sotto trazione potrebbe annullarne la rigidezza.

Nel calcolo (molto semplificato) di tali strutture, si possono seguire due diversi approcci: un primo in cui l'arco è considerato sottile ed infinitamente flessibile, ovvero non capace di trasmettere alcun momento flettente; ed un secondo in cui l'arco viene considerato con rigidezza flessionale finita ma molto piccola. Tali trattazioni son entrambe necessarie per ricavare informazioni utili alla comprensione del comportamento statico dell'insieme infatti la prima consente di trovare agevolmente una buona approssimazione della spinta dell'arco all'imposta, e la seconda di determinare le quote parti di momento che vengono sopportate rispettivamente dall'arco e dalla trave.

Il calcolo può condursi rispettando le seguenti ipotesi:

- La distanza tra i montanti è piccola rispetto alla luce del ponte in modo da poter considerare una distribuzione continua dei montanti stessi. Tale ipotesi detta "di cortina" è tra quelle che vedremo la più distante dalla realtà ma nonostante questo l'errore che si commette è accettabile per un calcolo di

- massima. In particolare l'errore diviene trascurabile per un rapporto tra distanza tra i montanti e luce dell'arco paria a  $1/30$ , rimane accettabile invece fino a valori di  $1/10$
- I montanti sono incernierati alle estremità, ovvero infinitamente flessibili rispetto alla trave così da poter trascurare i momenti flettenti da essi assorbiti.
  - Punti dell'arco e della trave corrispondenti sulla stessa verticale subiscono eguali abbassamenti  $v$ ; ciò equivale a trascurare la deformazione assiale dei montanti nonché gli spostamenti orizzontali dei punti della volta rispetto alle frecce di inflessione.
  - La trave irrigidente ha momento di inerzia costante. qualora tale ipotesi non sia verificata, è lecito assumere nei calcoli un momento di inerzia medio senza che per questo la distribuzione delle sollecitazioni nella struttura venga sensibilmente alterata.



**Figura 8.23:** Schema di volta flessibile e trave irrigidente con montanti disposti "a cortina"

Partendo dal primo approccio di arco infinitamente flessibile, andiamo a determinare la spinta  $H$  all'imposta dell'arco (fig. 8.23). L'arco infatti benché sia in calcestruzzo ed incastrato è di piccolissimo spessore e ciò rende poco rigido l'incastro

in fondazione, per questo motivo esso viene considerato per semplicità incernierato alla base. La struttura è quindi ad una sola iperstatica e può essere risolta con il metodo consueto; stabilendo la condizione di congruenza per l'estremo di sinistra dell'arco, la spinta  $H$  è quella tale da annullare lo spostamento orizzontale del punto A:

$$\int_{Trave} (m(x) - H \cdot y)(-1 \cdot y) \frac{dx}{E_t J_t} + \int_{Arco} \frac{H}{\cos \alpha} \frac{1}{\cos \varphi} \frac{ds}{E_a J_a} = 0 \quad (8.9)$$

nella quale  $m(x)$  è il momento di tutte le forze verticali che precedono la sezione  $x$ , ovvero il momento che si ha in una trave appoggiata di pari luce. Dalla (8.3) possiamo calcolare la spinta  $H$  come:

$$H = \frac{\int_{Trave} \frac{m(x)}{E_t J_t} dx}{\int_{Trave} \frac{y^2}{E_t J_t} dx + \int_{Arco} \frac{ds}{\cos^2 \alpha E_a J_a}} \quad (8.10)$$

Una volta nota la spinta  $H$  si possono calcolare il diagramma del momento che sarà per le ipotesi fatte solo per la trave e pari a:

$$M(x) = m(x) - H \cdot y \quad (8.11)$$

mentre lo sforzo normale sull'arco è al solito pari a  $N = H / \cos \alpha$ . infine dato la schematizzazione a due cerniere della struttura, essa sarà soggetta a caduta di spinta, la relazione per la sua determinazione sarà la stessa della (5.37) con la differenza che il primo termine al denominatore sarà riferito alla trave essendo essa l'unico elemento con rigidezza flessionale, e quindi l'unico con peso elastico finito:

$$\Delta H = -H_{3C} \frac{\int_{Arco} \frac{ds}{E_a A_a}}{\int_{Trave} \frac{y^2 ds}{E_t J_t} + \int_{Arco} \frac{ds}{\cos^2 \alpha E_a A_a}} \quad (8.12)$$

In accordo con i vincoli utilizzati fin ora sulla struttura, abbandonando l'ipotesi di arco infinitamente flessibile ma mantenendo tutte le precedenti, in particolare l'ipotesi di cortina possiamo definire quali sono le quote parti di momento che vengono sostenute rispettivamente per l'arco e per la trave.

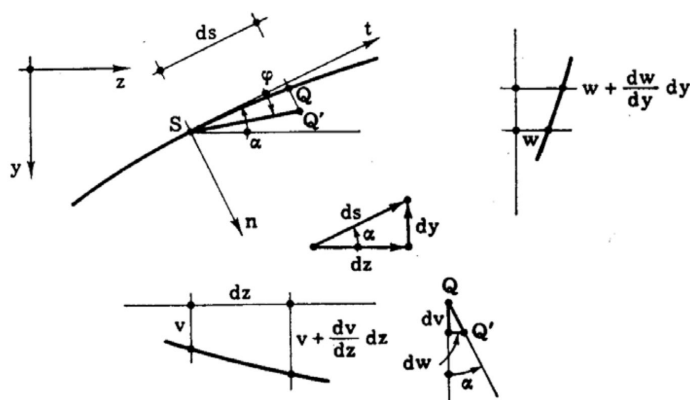


Figura 8.24

Dato un concio d'arco di lunghezza  $ds$  (fig. 8.24), possiamo scrivere l'equazione differenziale della sua deformata, ovvero la sua linea elastica; trascurando l'accorciamento assiale del concio  $ds$ , la rotazione  $\varphi$  si può determinare come:

$$\varphi = -\frac{QQ'}{SQ} = -\frac{QQ'}{ds} \quad (8.13)$$

ma dato che come visibile in (fig. 8.24)

$$QQ' = \frac{dv}{\cos \alpha} \quad e \quad ds = \frac{dz}{\cos \alpha} \quad \longrightarrow \quad \varphi = -\frac{dv}{dz} \quad (8.14)$$

trascurando ora la deformazione da taglio alla Timoshenko e ricordando la relazione fondamentale di Bernoulli della linea elastica otteniamo:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{M}{EJ} \frac{ds}{dz} = -\frac{M}{EJ \cos \alpha} \quad (8.15)$$

Se si trascurano le variazioni di lunghezza delle stilate di collegamento tra trave e impalcato, e si fa l'ipotesi che il collegamento si pressoché continuo, per l'ipotesi di cortina allora gli abbassamenti  $v$  sono gli stessi per l'arco e per la trave; per la stessa ipotesi sono uguali anche  $dv/dz$  e  $d^2v/dz^2$ . Se chiamiamo ora  $M_t$  al quota parte di momento assorbita dalla trave di impalcato e  $M_a$  quella presa in carico dall'arco abbiamo:

$$M = M_t + M_a \quad (8.16)$$

da cui per la (8.15) otteniamo:

$$\frac{M_a}{E_a J_a \cos \alpha} = \frac{M_t}{E_t J_t} \quad (8.17)$$



il momento si ripartisce sulla struttura quindi in ogni sezione secondo i coefficienti  $\lambda_t$  e  $\lambda_a$ :

$$\lambda_t = \frac{E_t J_t}{E_a J_a \cos \alpha + E_t J_t} \quad (8.18)$$

$$\lambda_a = \frac{E_a J_a \cos \alpha}{E_a J_a \cos \alpha + E_t J_t} = 1 - \lambda_t \quad (8.19)$$

Pe ottenere il momento sulla trave di impalcato  $M_t$  e sull'arco  $M_a$  risultano quindi:

$$M_t = M \cdot \lambda_t \quad (8.20)$$

$$M_a = M \cdot \lambda_a \quad (8.21)$$

Nella pratica si parla di sistemi collaboranti arco-trave quando il rapporto tra le inerzie della trave e dell'arco è superiore o uguale a 25:

$$\frac{J_t}{J_a} \geq 25 \quad (8.22)$$

Inoltre vale la pena ricordare che benché si sia esposta la trattazione per sistemi collaboranti arco-trave per ponti a via superiore, è possibile fare lo stesso anche per sistemi collaboranti a via inferiore quali i sistemi di tipo Langer con pochissime modifiche all'apparato matematico in particolare nelle (8.10) e (8.12) andrà inserito il contributo di deformazione assiale del tirante paria a  $1/E_t A_t$ .

### 8.5.1 I ponti alla Millart

In generale, nella ripartizione dei momenti tra l'arco e la l'impalcato, il primo prevale di gran lunga, assorbendone una quantità tale da rendere trascurabile quella sostenuta dal secondo. All'inizio del ventesimo secolo però Robert Millart, ingegnere svizzero inverte questo rapporto utilizzando nei suoi ponti un'arco a volta molto sottile ed un impalcato molto rigido; in questo modo tutti i carichi flettenti venivano sostenuti dall'impalcato mentre l'arco era atto a sostenere solo sforzi di compressione, esattamente come nel primo caso del paragrafo precedente. Solitamente questa scelta può sembrare irragionevole in quanto una struttura compressa, l'arco riesce a sostenere con maggior efficacia i momenti rispetto ad una struttura che non lo è come l'impalcato, inoltre la rigidità flessionale pressoché nulla dell'arco lo porta ad assumere fittiziamente la configurazione a due cerniere il che comporta come visto nella (5.40) una maggiore spinta all'imposta. Nonostante questo però il ponte gode di una serie di pregi di importanza non indifferente:

- Leggerezza della struttura: l'arco snello infatti, l'impalcato rigido ottenuto con profili scatolari di piccolo spessore e i setti di collegamento tra i due molto esili o forati, riducono il peso proprio diminuendo quindi anche le azioni da esso generate
- Il costo delle opere di fondazione risulta notevolmente ridotto rispetto ad archi della stessa luce, fatto dovuto al basso peso proprio e alla configurazione di vincolo che non genera momenti alla base
- Il costo della centina ridotto

Nella realizzazione di questo tipo di ponti deve essere posta particolare attenzione al corretto susseguirsi delle fasi di costruzione infatti se l'impalcato dovesse essere costruito sull'arco disarmato della centina, anche piccoli squilibri di carico potrebbero portare a fenomeni di instabilità della volta data la rigidità esigua, se invece si mantiene l'arco sulla centina fino alla maturazione del calcestruzzo della trave dell'impalcato e solo dopo si procede al disarmo, la struttura inizierà a lavorare da subito nella sua configurazione finale.

Di questa tipologia di ponte ne sono stati costruiti non più di una quindicina, in Svizzera dal loro inventore ed in Italia solitamente da ingegneri che erano stati suoi collaboratori, di questi di citano il Schwandbachbrücke in Svizzera ponte curvo di 37 metri di luce e soli 20 centimetri di spessore dell'arco (fig. 8.25, 8.26) e il ponte di Donath sul Tishiel di 43.2 metri di luce e spessore dell'arco variabile dai 26 ai 29 centimetri.

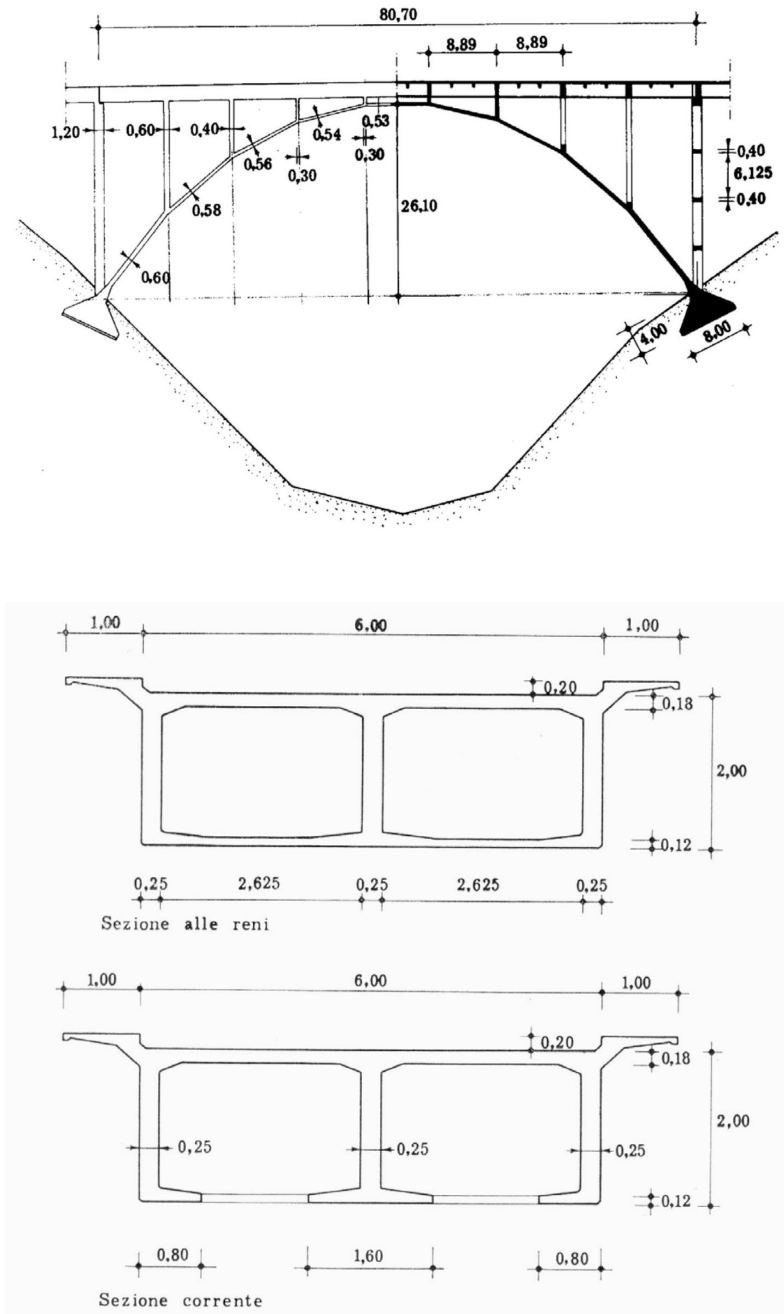


**Figura 8.25:** *Ponte Schwandbachbrücke, Robert Millart, 1933*



**Figura 8.26:** *Veduta della centina lignea del ponte Schwandbachbrücke*

In Italia virtuoso esempio di questa tecnica è il ponte su Corace di Vincenzo Franciosi e Adriano Galli di 80.70 metri di luce e spessori dell'arco variabili da 53 a 60 centimetri (fig. 8.27).



**Figura 8.27:** In alto: prospetto sezione del ponte sul Corace; in basso: sezioni dell'impalcato a cassone

# Capitolo 9

## Conclusioni

Nel momento delle conclusioni è inevitabile domandarsi se gli obiettivi prefissati siano stati raggiunti; in questo caso ci si proponeva di predisporre più che una tesi una dispensa la quale raccogliesse e unisse in modo semplice e sintetico le nozioni di teoria a quelle di tecnica delle strutture per quanto riguarda le strutture ad arco. L'autore ha fatto del suo meglio per rispettare quanto detto inserendo nel testo esempi e applicazioni di molte soluzioni costruttive invalse nell'uso. Nonostante ciò anche un occhio inesperto noterà la mancanza di alcuni argomenti fondamentali quali una trattazione (anche sintetica) degli apparati fondali superficiali e profondi, nonché del problema delle pile in alveo ed un capitolo sulle metodologie costruttive e i transitori di costruzione, i quali nel caso del ponte ad arco rappresentano talvolta la vara peculiarità nonché fase di maggior complessità dell'intero progetto.

Lo sviluppo di questa tesi ha inoltre certamente aiutato nell'ampliamento del mio bagaglio di competenze, tra le quali quelle di redazione di documenti ad alto contenuto matematico con linguaggio  $\text{\LaTeX}$ .



# Bibliografia

- [1] Odone Belluzzi. *Scienza delle costruzioni*. Vol. 2. Bologna: Nicola Zanichelli Editore, 1955.
- [2] Vincenzo Franciosi. *Scienza delle costruzioni*. Vol. 3 tomo 1. Napoli: Editore Liguori, 1970.
- [3] Vincenzo Franciosi. *Scienza delle costruzioni*. Vol. 3 tomo 2. Napoli: Editore Liguori, 1971.
- [4] Valentina Salomoni Carmelo Maiorana. *Scienza delle costruzioni*. Torino: CittàStudi, 2022.
- [5] V. Kumar. *The theorems of Euler and Charles*. University of Pennsylvania, 2018.
- [6] Giuseppe Maria Pugno, cur. *Teoria della ellisse di elasticità ed elettrologia: Analogie elementari*. Vol. n°12. Atti e rassegna tecnica della società degli ingegneri e degli architetti di Torino. 1971.
- [7] Stephen Timoshenko e D. H. Young. *Theory of structures*. Pennsylvania: McGraw-Hill Book Company, The maple press company, 1945.
- [8] Mario Paolo Petrangeli. *Costruzione di Ponti; appunti delle lezioni*. Milano: Editoriale ESA, 1991.
- [9] Giuseppe Rinaldi. *La costruzione dei ponti*. Vol. 2. Roma: Editrice Eredi V. Veschi, 1974.
- [10] Piercarlo Margiotta. «I ponti ad arco in calcestruzzo sostenuti da cavi nelle fasi di costruzione ed esercizio». Tesi di dott. Università degli Studi di Palermo, 2011.
- [11] Aldo Reithel. *Costruzione di ponti*. Napoli: Editore Liguori, 1992.

- [12] Alice Bertocelli. «Verifiche a fatica di un ponte ad arco in acciaio». Tesi di laurea mag. Alma Mater Studiorum - Università di Bologna, 2017.
- [13] Jacques Heyman. *The Masonry Arch*. Chichester: Ellis Horwood Limited, 1982.
- [14] Paolo Zampieri. «Simplified seismic vulnerability assesment of masonry arch bridges». Tesi di dott. Università di Trento - Università degli Studi di Padova, 2014.
- [15] Tri Tran-Cao. «Collapse analysis of block structures in frictional contact». Tesi di laurea mag. School of Civil e Environmental Engineering - The University of New South Wales, 2009.
- [16] Agustín Orduña Bustamante. «Seismic Assessment of Ancient Masonry Structures by Rigid Blocks Limit Analysis». Tesi di laurea mag. Universidade do Minho, 2003.
- [17] Francesca da Porto. *Convegno CIFI (Sezione di Venezia) "Vulnerabilità sismica dei ponti ferroviari"*. 24 Maggio 2013.
- [18] Giovanni Tecchio. *Convegno CIFI (Sezione di Venezia) "Vulnerabilità sismica dei ponti ferroviari"*. 24 Maggio 2013.
- [19] Alberto Cecchi. «The curve of pressure in vertically loaded arches». In: *Journal of Heritage Conservation* 34 (2013).
- [20] John Ochsendorf Philippe Block Matt DeJong. «As Hngs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches». In: *Nexus Network Journal* 8.2 (2006).
- [21] Alberto Cecchi. «The "arch of equilibration" of Charles Hutton». In: *Meccanica* (2010).
- [22] Veronica Bartolomeo Lucio Nobile. *RECENT ADVANCES in CIVIL ENGINEERING and MECHANICS; Method for the Assesment of Historical Masonry Arches*. A cura di Claudio Guarnaccia M. V. Shitikova Luige Vladareanu. Firenze: WSEAS Press, 2014.
- [23] N. Esquillan S. Boussiron. *Bidge of 528 ft. 3 ins. span over the Seine at La Roche Guyon*. The Structural Engineer, Aprile 1935.
- [24] Furiozzi Biagio; Messina Claudio; Paolini Leonardo. *Prontuario per il calcolo degli elementi strutturali*. 2016.



- [25] Luigi Gasparelli. *Manuale del Geometra*. Milano: Ulrico Hoepli, 1943.
- [26] Alessio Ageno; Andrea Barnabò; Federico Foce; Anna Sinopoli. «Theory and history of the thrust line for masonry arches, a brief account». In: *Arch Bridges, ARCH 04'*. 2004.
- [27] Paolo Zampieri; Carlo Pellegrino. *Corso di progetto di ponti: I ponti in muratura*. 2022.
- [28] CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE; COMMISSIONE DI STUDIO PER LA PREDISPOSIZIONE E L' ANALISI DI NORME TECNICHE RELATIVE ALLE COSTRUZIONI. *Istruzioni per la Valutazione della Sicurezza Strutturale di Ponti Stradali in Muratura*. Rapp. tecn. CNR-DT 213/2015. Roma: Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR), 16 Ottobre 2015.
- [29] Jean-François Rondeaux, Aurélie Deschuyteneer e Denis Zastavni. «Assessing geometrically the structural safety of masonry arches». In: *Building Knowledge, Constructing Histories*. A cura di Wouters, Van de Voorde e Bertels. Brussels, Belgium: Routledge, 2018.
- [30] Niamh Gibbons e Paul J. Fanning. *Ten stone masonry arch bridges and five different assessment approaches*. Rapp. tecn. Dublin, Ireland: School of Architecture, Landscape & Civil Engineering, University College Dublin.
- [31] S. Huerta, cur. *The masonry arch between «limit» and «elastic» analysis. A critical re-examination of Durand-Claye's method*. Proceedings of the First International Congress on Construction History. Gennaio 2003.
- [32] Marcello Arici, Michele F. Granata e Piercarlo Margiotta. «Ponti ad arco a spinta eliminata tramite l'impiego di passerelle a banda tesa». In: *XVII Congresso CTE*. 2007.
- [33] Michele M. Leopre. *Verifica dell'arco, verifica della curva delle pressioni con il metodo di Mèry*. Lezione tratta dal Corso di Progettazione dei Sistemi Costruttivi.
- [34] Heino Engel. *Atlante delle Strutture*. Milano: UTET, 2002.
- [35] Fritz Leonhardt e E. Mönning. *Casi speciali di dimensionamento delle strutture in c.a. e c.a.p.* Vol. 2. Pisa: ETS Edizioni di Scienza e Tecnica, 1973.
- [36] Wikipedia. *Arch Bridge*. Ultimo accesso: ore 21:51, 27 Ottobre, 2024. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Arch\\_bridge](https://en.wikipedia.org/wiki/Arch_bridge).

- [37] RomanoImpero. *I Ponti Romani*. Ultimo accesso: ore 21:51, 27 Ottobre, 2024. URL: <https://www.romanoimpero.com/2010/11/i-ponti-romani.html>.
- [38] Wikipedia. *Network Arch Bridges*. Ultimo accesso: ore 18:00, 8 Agosto, 2024. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Network\\_arch\\_bridge](https://en.wikipedia.org/wiki/Network_arch_bridge).
- [39] orthoslogos. *schwandbachbruecke*. Ultimo accesso: ore 22:30, 9 Agosto, 2024. URL: <https://orthoslogos.fr/architecture/schwandbachbruecke/>.
- [40] Wikipedia. *Ponte Testaccio*. Ultimo accesso: ore 16:19, 13 Agosto, 2024. URL: [https://it.wikipedia.org/wiki/Ponte\\_Testaccio](https://it.wikipedia.org/wiki/Ponte_Testaccio).
- [41] Wikipedia. *Ponte Risorgimento (Roma)*. Ultimo accesso: ore 17:39, 16 Ottobre, 2024. URL: [https://it.wikipedia.org/wiki/Ponte\\_del\\_Risorgimento\\_\(Roma\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Ponte_del_Risorgimento_(Roma)).

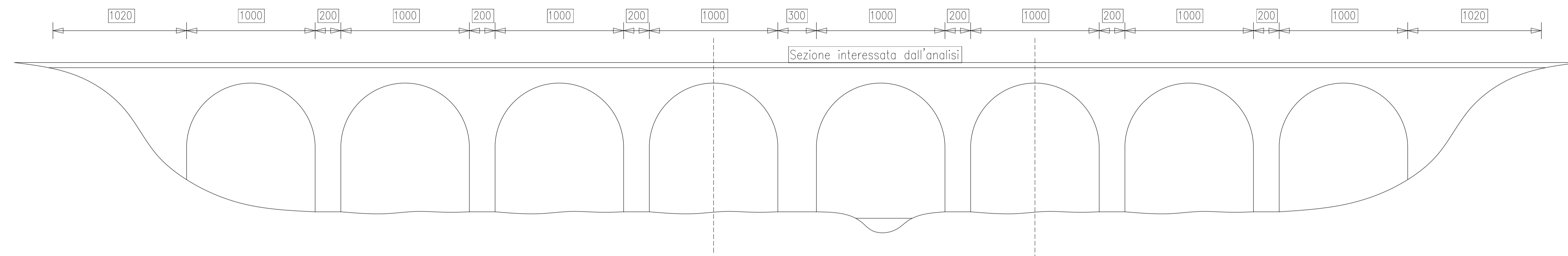
# Appendice

Tavola 1: Verifica della stabilità della volta con il Metodo di Mèry

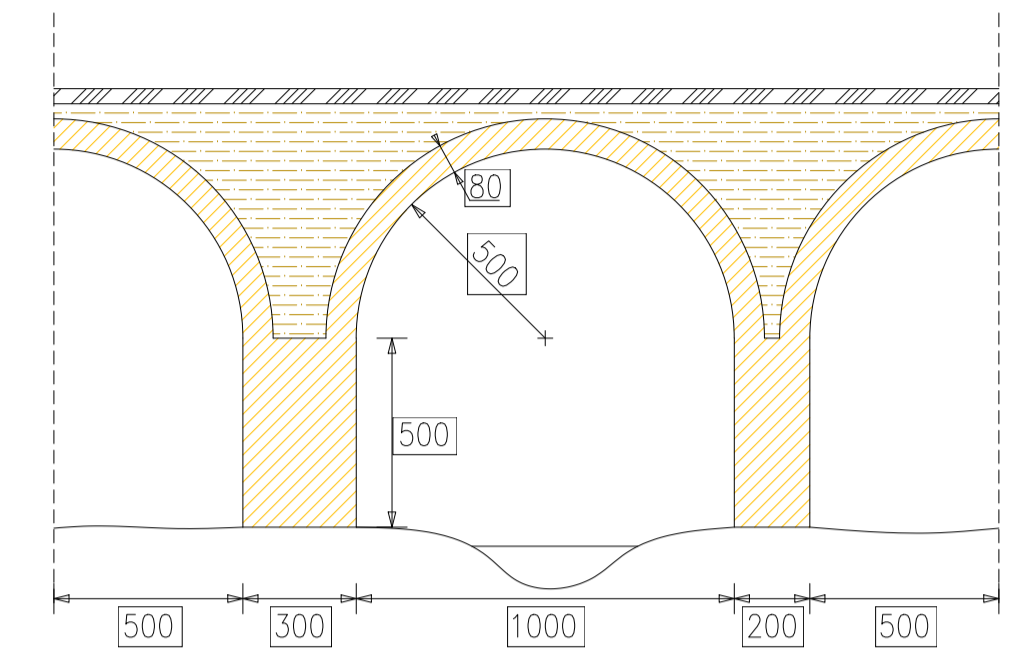
# VERIFICA DI UN ARCO CON IL METODO DI MERY

## e verifica della stabilità globale dell'opera a seguito di un collasso parziale

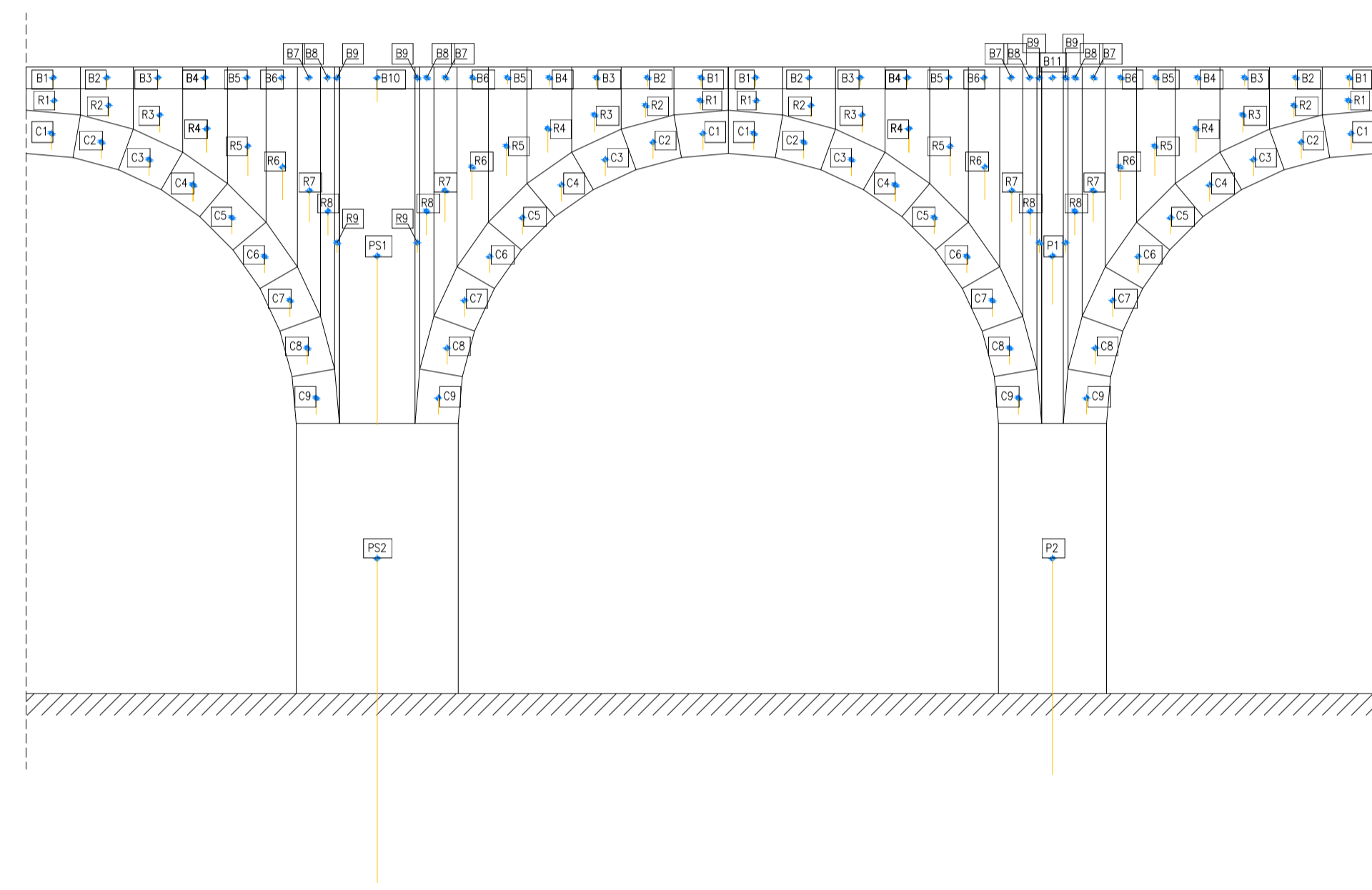
Prospetto del viadotto  
scala 1:200



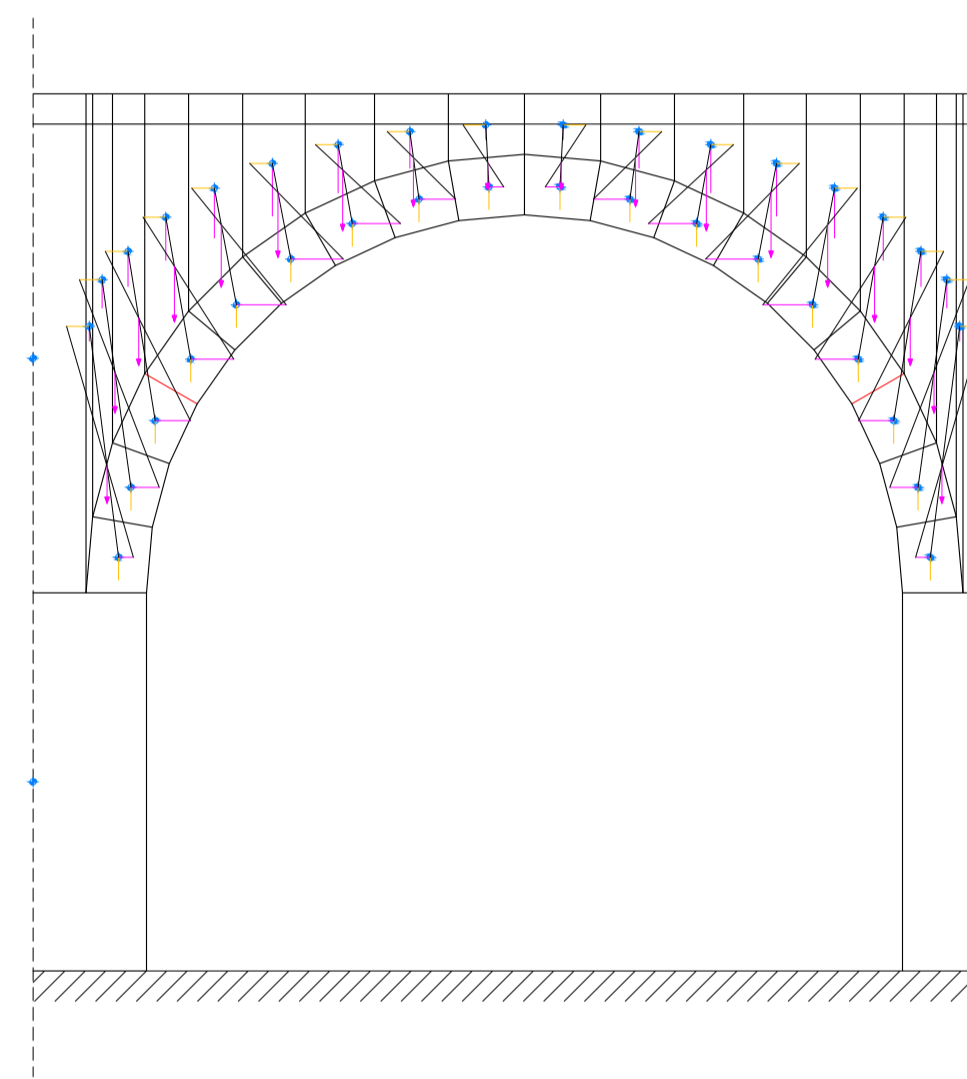
- Muratura: 20 kN/m<sup>3</sup>
- Rinfianco e Riempimento (in chiave sp. cm 20): 18 kN/m<sup>3</sup>
- Massiccata e Armamento (sp. cm 20): 20 kN/m<sup>3</sup>



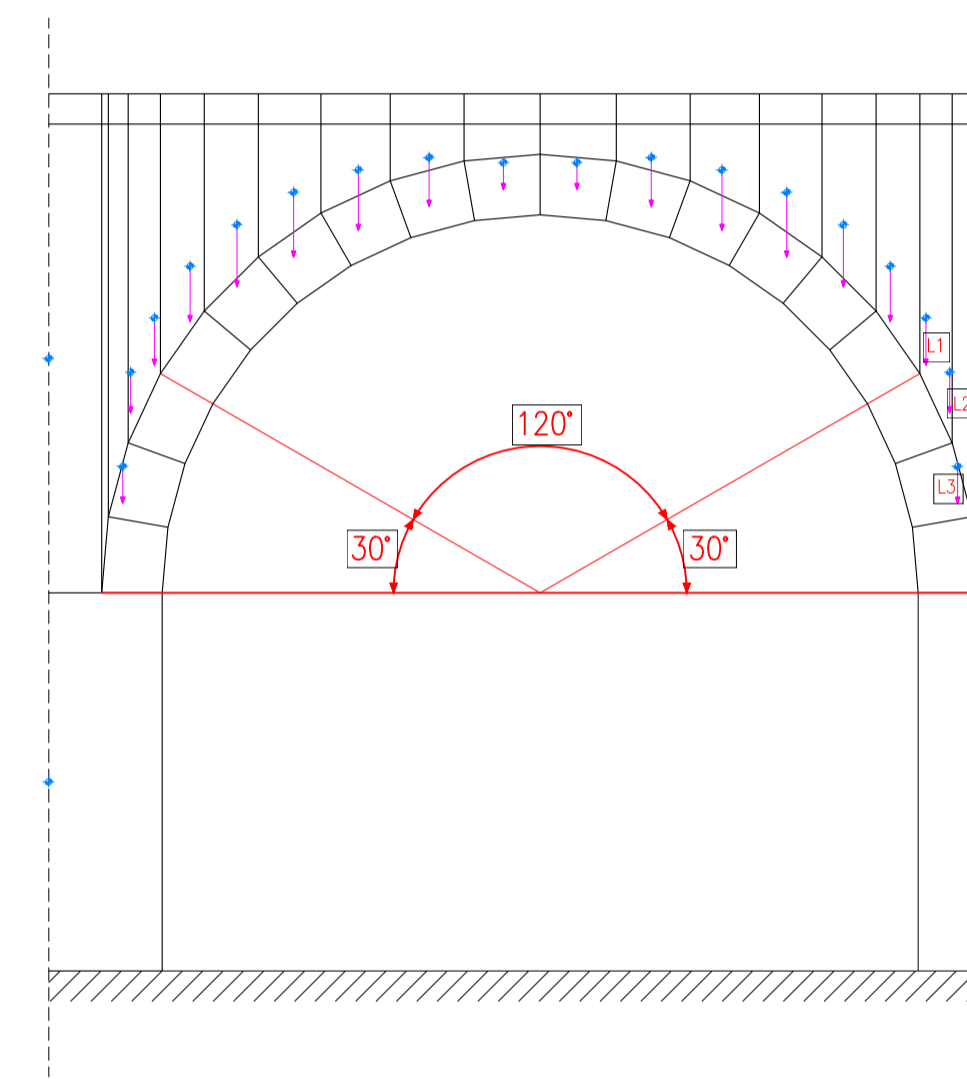
Fase 1: suddivisione dell'arco in conci (18 nel nostro caso), individuazione dei baricentri e assegnazione del carico sotto forma di forza applicata al baricentro  
scala 1:100



Fase 2: Esecuzione della somma dei pesi relativi ad ogni conio con metodo grafico



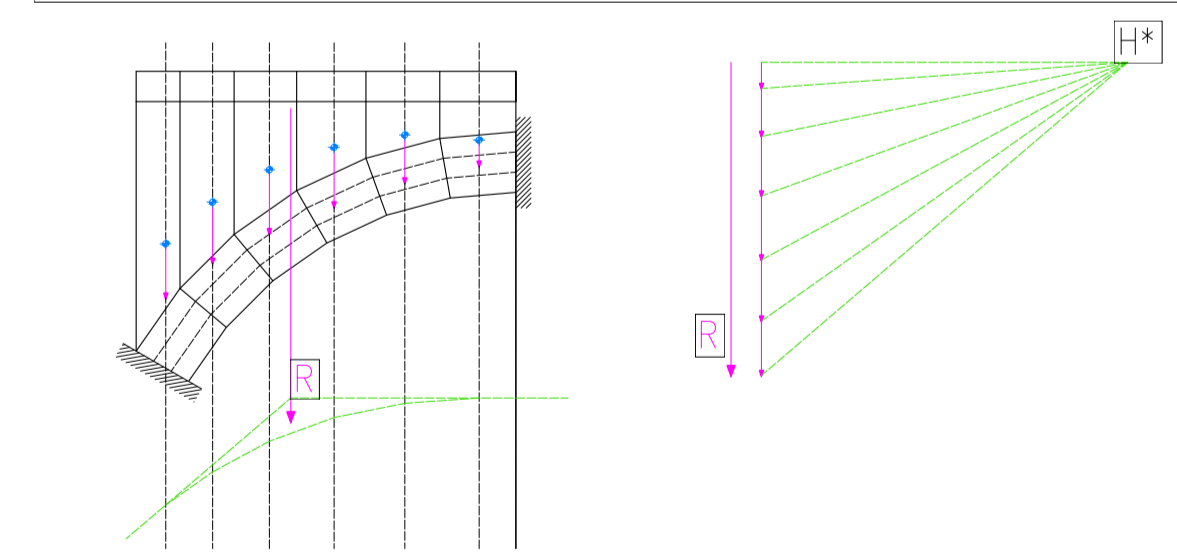
Fase 3: Individuazione della porzione centrale dell'arco di ampiezza di 120° interessata dall'applicazione del metodo di Mery



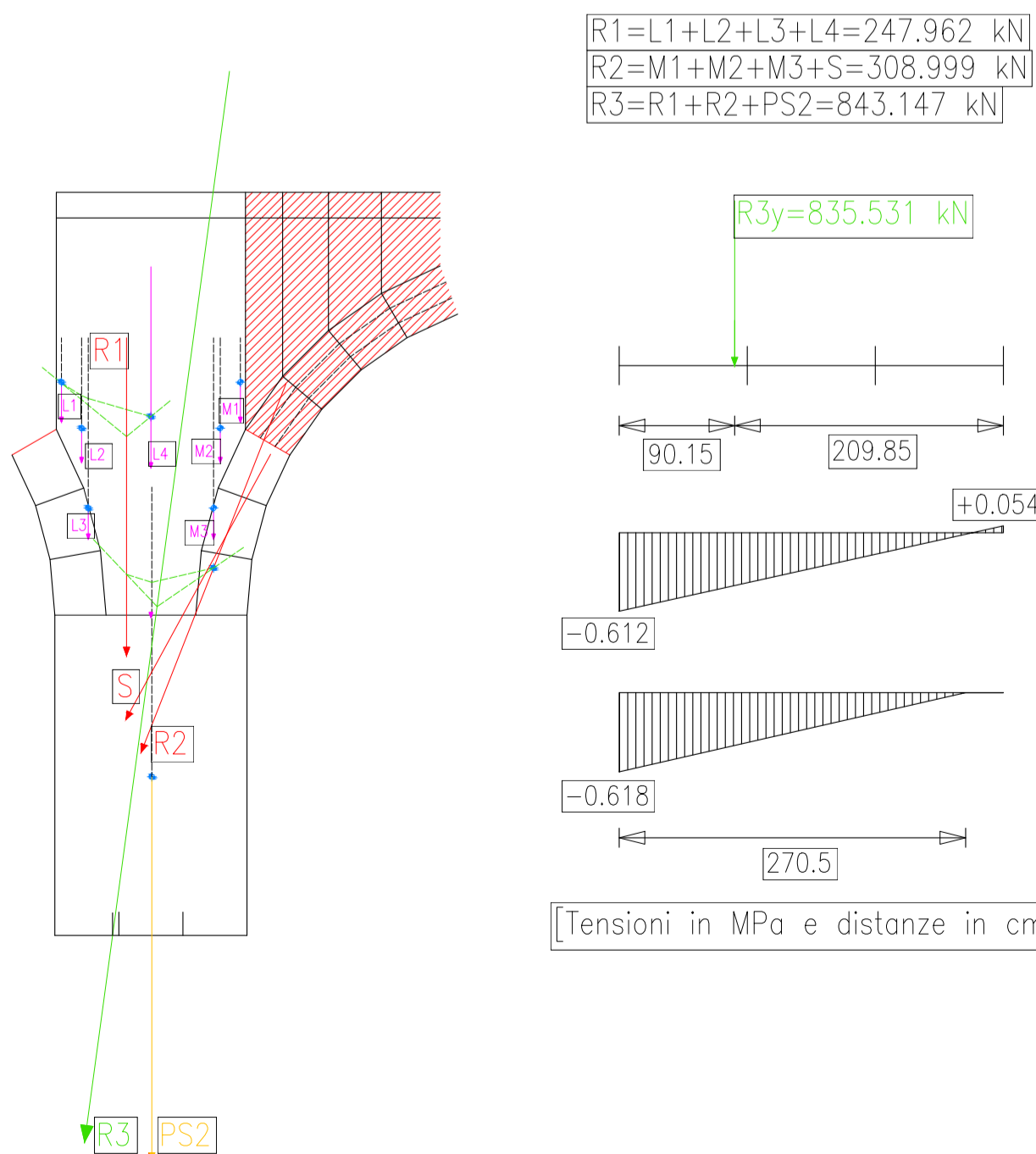
Riempimento		Conci		Ballast		Pile	
id	Peso (kN)	id	Peso (kN)	id	Peso (kN)	id	Peso (kN)
R1	8.050	C1	15.002	B1	8.058	P1	44.640
R2	10.879	C2	15.002	B2	7.812	P2	200.000
R3	15.890	C3	15.002	B3	7.330	PS1	156.240
R4	21.868	C4	15.002	B4	6.626	PS2	300.000
R5	27.207	C5	15.002	B5	5.720		
R6	30.123	C6	15.002	B6	4.640		
R7	28.903	C7	15.002	B7	3.418		
R8	22.158	C8	15.002	B8	2.094		
R9	9.034	C9	15.002	B9	0.704		
				B10	11.200		
				B11	3.200		

Scala grafica  
100 kN  
2 cm

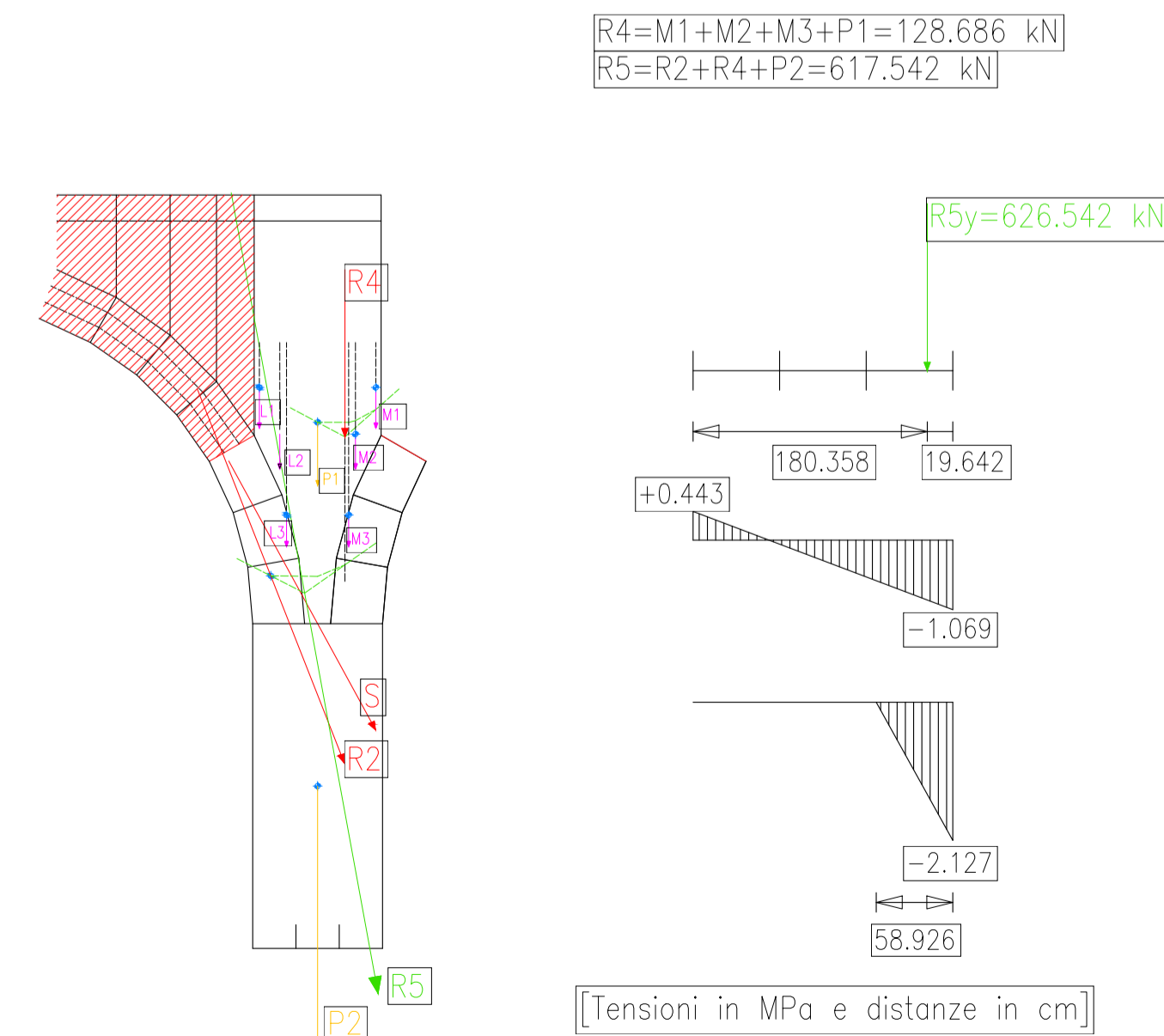
Fase 4: Una volta individuata la porzione centrale dell'arco, si procede ad analizzarne una sola metà, data la simmetria della struttura e dei carichi. Con il metodo del poligono funicolare si individua la risultante di tutti i carichi e la sua retta d'azione



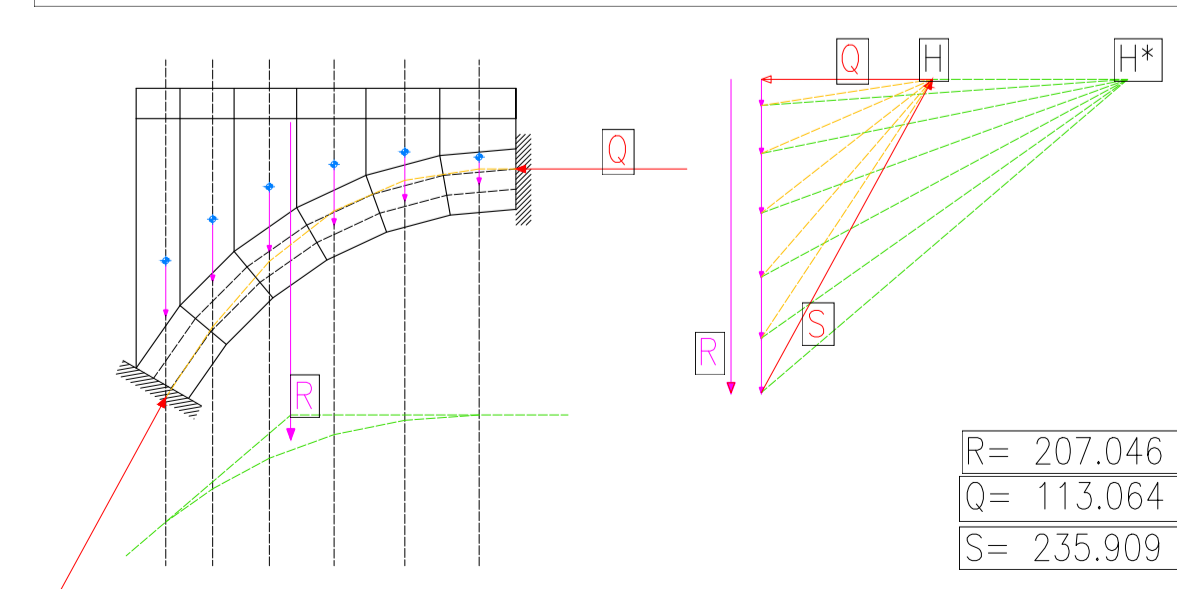
Verifica di stabilità della struttura a seguito del collasso di dell'arcata adiacente alla pila-spalla



Verifica di stabilità della struttura a seguito del collasso di dell'arcata adiacente alla pila



Fase 5: Individuata la risultante, è noto che le forze equilibranti l'arcata sono passanti per il limite superiore del terzo medio in chiave, e per il limite inferiore all'imposta: si individua quindi il punto H e si taccia la curva della pressione



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA  
-DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, EDILE E AMBIENTALE-

TESI DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE  
AA. 2023/2024

LAUREANDO: Matteo Pin      N° MATRICOLA: 2006890

---

TITOLO: Analisi del comportamento statico di strutture ad arco

OGGETTO: Verifica di un arco con il metodo di Mery e verifica della stabilità dell'opera a seguito di un collasso parziale

RELATORE: Chairissima Prof. Valentina Salomoni      VISTO: Prof. Valentina Salomoni  
CORRELATORE: Ing. Paolo Zampieri      Ing. Paolo Zampieri

Tavola n° 1/71      SCALA: varie      DATA: 08/11/2024