



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Elettrica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Verifica delle sovratensioni di manovra in cavi AAT
mediante algoritmi innovativi
basati sull'antitrasformata di Laplace**

Laureando:
Davide Pietriabiasi

Relatore:
Ch.mo Prof. Roberto Benato
Dipartimento di Ingegneria Industriale

Anno Accademico 2012-2013

Indice

1	Introduzione: il problema delle sovratensioni nelle linee in cavo	9
2	Propagazione d'onda nelle linee elettriche	11
2.1	Le equazioni di trasmissione	11
2.1.1	Ipotesi fondamentali di lavoro	11
2.1.2	Parametri di linea caratteristici: impedenza d'onda, impedenza caratteristica e costante di propagazione	12
2.1.3	Il regime variabile in una linea di trasmissione	14
2.2	Equazioni per linea in cavo non compensata alimentata da generatore non ideale di tensione	17
2.3	Equazioni per linea in cavo compensata alimentata da generatore non ideale di tensione	18
3	Modello della linea	21
3.1	Dati tecnici	21
3.2	Calcolo delle costanti chilometriche	24
3.2.1	Resistenza chilometrica	25
3.2.2	Induttanze chilometriche	25
3.2.3	Capacità chilometrica	27
3.2.4	Impedenza d'onda, impedenza caratteristica e costante di propagazione	28
3.3	Modello della linea in EMTP-RV	28
3.3.1	Creazione del modello	28
3.3.2	Verifica del modello	34
4	Metodo Ghizzetti - Ossicini	35
4.1	Riassunto del metodo matematico Ghizzetti - Ossicini	35
4.2	Calcolo dei poli	35
4.2.1	Caso ideale - non compensato	35
4.2.2	Caso ideale - compensato	37
4.2.3	Riepilogo	39
4.3	Calcolo dei residui	39
4.3.1	Caso ideale - non compensato	39
4.3.2	Caso ideale - compensato	42
5	Metodo con approssimazione di Taylor	45
5.1	Riassunto del metodo matematico con approssimazione di Taylor	45
5.2	Calcolo dei poli	46
5.2.1	Caso ideale - non compensato	46
5.2.2	Caso ideale - compensato	49
5.3	Calcolo dei residui	50
5.3.1	Caso ideale - non compensato	50
5.3.2	Caso ideale - compensato	50
6	Metodo Benato	51

6.1	Matrici di trasmissione	51
6.1.1	Matrice di trasmissione della linea	51
6.1.2	Matrice di trasmissione dell'impedenza del generatore equivalente	53
6.1.3	Matrice di trasmissione dello shunt reactor	54
6.1.4	Parallelo di doppi bipoli	54
6.2	Antitrasformazione computazionale della matrice di trasmissione	55
7	Verifica dei modelli con EMTP	57
7.1	Verifica del metodo Ghizzetti - Ossicini	57
7.1.1	Linea non compensata	57
7.1.2	Linea compensata	60
7.2	Verifica del metodo con approssimazione di Taylor	63
7.2.1	Linea non compensata	63
7.2.2	Linea compensata	63
7.3	Verifica del metodo Benato	63
7.3.1	Linea non compensata	63
7.3.2	Linea compensata	63
7.4	Prestazioni	73
8	Formula approssimata per il calcolo delle sovratensioni di manovra	77
8.1	Calcolo della formula approssimata	77
8.2	Verifica della formula approssimata	81
8.2.1	Verifica con \mathcal{T} e \mathcal{P} esatti, μ esatta	81
8.2.2	Verifica con \mathcal{T} e \mathcal{P} approssimati, μ esatta	82
8.2.3	Verifica con \mathcal{T} e \mathcal{P} approssimati, μ approssimata	82
9	Conclusioni	85
10	Ringraziamenti	87
	Riferimenti bibliografici	88
	Appendice A: Richiami di analisi complessa	91
A.1	Derivata complessa e rappresentazioni in serie	91
A.2	Classi di funzioni	92
A.3	Punti singolari	92
A.4	Teorema dei residui	93
	Appendice B: Trasformata e antitrasformata di Laplace	95
B.1	Trasformata di Laplace	95
B.2	Antitrasformata di Laplace	95
B.2.1	Antitrasformazione di funzioni razionali	95
B.2.2	Antitrasformazione di funzioni non razionali	97

Elenco delle figure

2.1	Schema monofase equivalente di una linea a costanti distribuite	14
2.2	Schema monofase equivalente di una linea in cavo non compensata	17
2.3	Schema monofase equivalente di una linea in cavo compensata	18
3.1	Geometria del cavo XLPE 2500 mm^2	22
3.2	Posa dei cavi in doppia terna, spaziatura $s = 0.35 m$, profondità $h = 1.45 m$	22
3.3	Circuito in EMTP della linea in cavo senza compensazione reattiva (solo le prime 3 major section)	32
3.4	Circuito in EMTP della linea in cavo con compensazione reattiva (solo le prime 3 major section)	33
4.1	Calcolo grafico dei poli	36
4.2	Diagramma riassuntivo del metodo per il calcolo dei poli	39
5.1	Modulo del denominatore $D(s)$ di $V_a(s)$ in funzione della parte immaginaria di s e parametrizzato per alcuni valori della parte reale di s , nel caso esatto ed approssimato	48
6.1	Rappresentazione di una linea come cascata di due doppi bipoli a parametri concentrati	52
6.2	Impedenza serie equivalente all'impedenza della rete di alimentazione	54
6.3	Ammettenza parallelo equivalente all'ammettenza del reattore di compensazione	54
7.1	Transitorio di chiusura nei primi 20 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm^2 a 400 kV , non compensata, $d = 30 km$, $x_{cc} = 24.143 \Omega$; confronto fra il metodo Ghizzetti - Ossicini e EMTP	58
7.2	Transitorio di chiusura nei primi 5 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm^2 a 400 kV , non compensata, $d = 30 km$, $x_{cc} = 24.143 \Omega$; confronto fra il metodo Ghizzetti - Ossicini e EMTP	59
7.3	Transitorio di chiusura nei primi 20 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm^2 a 400 kV , compensata con $\xi = 0.55$, $d = 30 km$, $x_{cc} = 24.143 \Omega$; confronto fra il metodo Ghizzetti - Ossicini e EMTP	61
7.4	Transitorio di chiusura nei primi 5 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm^2 a 400 kV , compensata con $\xi = 0.55$, $d = 30 km$, $x_{cc} = 24.143 \Omega$; confronto fra il metodo Ghizzetti - Ossicini e EMTP	62
7.5	Transitorio di chiusura nei primi 20 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm^2 a 400 kV , non compensata, $d = 30 km$, $x_{cc} = 24.143 \Omega$; confronto fra il metodo con approssimazione di Taylor e EMTP	64
7.6	Transitorio di chiusura nei primi 5 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm^2 a 400 kV , non compensata, $d = 30 km$, $x_{cc} = 24.143 \Omega$; confronto fra il metodo con approssimazione di Taylor e EMTP	65
7.7	Transitorio di chiusura nei primi 20 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm^2 a 400 kV , compensata con $\xi = 0.55$, $d = 30 km$, $x_{cc} = 24.143 \Omega$; confronto fra il metodo con approssimazione di Taylor e EMTP	66
7.8	Transitorio di chiusura nei primi 5 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm^2 a 400 kV , compensata con $\xi = 0.55$, $d = 30 km$, $x_{cc} = 24.143 \Omega$; confronto fra il metodo con approssimazione di Taylor e EMTP	67

7.9	Transitorio di chiusura nei primi 20 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm^2 a 400 kV , non compensata, $d = 30 km$, $x_{cc} = 24.143 \Omega$; confronto fra il metodo con approssimazione Benato e EMTP	68
7.10	Transitorio di chiusura nei primi 5 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm^2 a 400 kV , non compensata, $d = 30 km$, $x_{cc} = 24.143 \Omega$; confronto fra il metodo Benato e EMTP	69
7.11	Transitorio di chiusura nei primi 20 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm^2 a 400 kV , compensata con $\xi = 0.55$, $d = 30 km$, $x_{cc} = 24.143 \Omega$; confronto fra il metodo con approssimazione Benato e EMTP	70
7.12	Transitorio di chiusura nei primi 5 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm^2 a 400 kV , compensata con $\xi = 0.55$, $d = 30 km$, $x_{cc} = 24.143 \Omega$; confronto fra il metodo Benato e EMTP	71
8.1	Tensione all'arrivo esatta, somma del termine permanente e transitorio, e tensione all'arrivo approssimata, somma del termine lineare e transitorio	78
8.2	Circonferenza goniometrica in cui sono evidenziati i due punti stazionari t_{min} e t_{max} , di valore diverso ma il cui seno, che annulla la derivata della funzione, coincide	79
8.3	Confronto tra la formula approssimata e il metodo Ghizzetti - Ossicini, utilizzando i termini \mathcal{T} e \mathcal{P} esatti e μ calcolata numericamente	81
8.4	Confronto tra la formula approssimata e il metodo Ghizzetti - Ossicini, utilizzando l'approssimazione a -1 del rapporto tra i termini \mathcal{T} e \mathcal{P} e μ calcolata numericamente	82
8.5	Confronto tra la formula approssimata e il metodo Ghizzetti - Ossicini, utilizzando l'approssimazione a -1 del rapporto tra i termini \mathcal{T} e \mathcal{P} e μ calcolata analiticamente	83
B.1	Poli s_i all'interno del dominio \mathbb{D} , in azzurro; in grassetto, una curva appartenente alla successione \mathbb{C}_n , con estremi in $x_0 \pm iy_n$ e il relativo segmento di ascissa x_0 ed estremi $\pm iy_n$	97

Elenco delle tabelle

1	Dati geometrici del cavo studiato	21
2	Parametri del cavo studiato per posa interrata con spaziature $s = 0.35 m$ a profondità $p = 1.45 m$	23
3	Confronto fra parametri calcolati analiticamente e in EMTP	34
4	Primo elemento A della matrice di trasmissione \mathbf{T} , equivalente alla serie di n matrici \mathbf{T}_Δ , calcolato per diversi valori di n con Matlab.	53
5	Confronto tra le prestazioni dei metodi e EMTP	75
6	Trasformate notevoli di Laplace nei casi più semplici	96

1 Introduzione: il problema delle sovratensioni nelle linee in cavo

Confermando una tendenza ormai consolidata negli anni, molti studi attestano il progressivo abbandono delle realizzazioni di nuove linee aeree [1]. Le cause sono molteplici: impatto visivo, sociale ed ambientale, emissioni elettromagnetiche, occupazione del suolo e relativa svalutazione delle zone circostanti, disturbi radio e sonori.

Una possibile soluzione è potenziare la capacità di trasmissione su linee esistenti, sostituendo i vecchi conduttori alluminio - acciaio (ACSR) con nuovi conduttori a maggior portata in materiale composito High Temperature Low Sag (HTLS; in commercio attualmente si trovano le tipologie ACCC e ACCR [2]). Appare comunque un'alternativa non molto utilizzata, perché applicabile alle sole linee esistenti e soprattutto perché l'aumento di potenza trasmessa oltre alla potenza naturale può avvenire solo per linee relativamente corte. Le criticità che l'evoluzione del sistema elettrico a livello italiano ed europeo sta ponendo (generazione distribuita, integrazione fonti intermittenti, relazione con il mercato liberalizzato della generazione) implicano di fatto l'investimento in nuova capacità di trasmissione, spesso ottenibile solo con la costruzione di linee strategiche ex-novo. Le valutazioni in merito, specie in ambito italiano, possono portare gli investimenti verso le linee in cavo, meno impattanti dal punto di vista ambientale, anche in termini di dequalificazione del territorio circostante, e ad accettazione sociale maggiore, con conseguenti minori tempi autorizzativi e di realizzazione [3]. Appare anche conveniente cominciare a pianificare la realizzazione di opere infrastrutturali congiunte, come nel caso di gallerie ferroviarie, autostradali o della rete gas; diversi studi sono già stati fatti in merito: essi prendono in considerazione oltre ai cavi le ancor poco diffuse Gas Insulated Lines (GIL) [4] [5].

Stante la situazione, l'interesse della ricerca si è spostato verso lo studio intensivo delle linee in cavo, dalla loro realizzazione alla messa in esercizio. Riveste particolare importanza l'analisi delle sovratensioni, sia di origine esterna che interna: l'isolamento dei cavi, in quanto solido, non è autoripristinante ed è dunque fondamentale prevedere con sufficiente chiarezza che sollecitazioni si troverà a sopportare in base alle condizioni di funzionamento. Il gruppo padovano di ricerca sui Sistemi Elettrici per l'Energia ha prodotto negli ultimi anni diverse analisi a riguardo, anche nel caso sempre più diffuso di linee miste aerea - cavo [6] [7]. Con il lavoro attuale, si vuole partire da dove questi lavori si erano fermati e cercare di definire nuovi metodi e procedure self - made per analizzare le sovratensioni di origine interna; tra i vari tipi di sovratensione, ci si concentrerà sull'energizzazione di una linea a vuoto, evento sempre importante nella messa in servizio di un sistema elettrico. Non verranno considerati i casi di sovratensioni generate da aperture della linea o di richiuse su linee ancora energizzate. Le procedure saranno realizzate mediante il software Matlab e validate con delle simulazioni condotte con il software commerciale EMTP. Di seguito si descrive brevemente la struttura del lavoro:

- nella prima parte (capitolo 2) verranno richiamate e riassunte le equazioni per la propagazione delle onde nelle linee elettriche, particolarizzandole nel caso specifico in esame;

- nella seconda (capitolo 3) verrà descritto il sistema in esame e se ne ricaverà il modello elettrico, sia da inserire in Matlab che in EMTP;
- nelle successive tre parti (capitoli 4, 5 e 6) verranno dettagliatamente descritti i metodi ideati e implementati, dalla genesi alla formulazione finale;
- nella sesta parte (capitolo 7) si proporrà il confronto tra i tre metodi innovativi e i risultati di EMTP, per valutarne le prestazioni e la correttezza;
- nella settima parte (capitolo 8) verrà infine presentata una formula approssimata per il calcolo della sovratensione massima di chiusura di una linea in cavo, ricavata da uno dei tre metodi;
- nella parte finale (capitolo 9) si concluderà il lavoro descrivendo brevemente quanto scoperto.

2 Propagazione d'onda nelle linee elettriche

2.1 Le equazioni di trasmissione

Nel campo della trasmissione le equazioni di trasmissione o dei telegrafisti sono ben note ed esaurientemente trattate in molti testi, tra cui [8] e [9]. Esse sono solitamente ricavate per linee trifase in regime sinusoidale equilibrato: vogliamo qui dimostrare che si possono ricavare in egual modo per un qualsivoglia regime elettrico ed in particolare per i cavi interrati.

2.1.1 Ipotesi fondamentali di lavoro

Un'analisi che tenga conto della linea trifase nel suo insieme, includendo quindi gli effetti delle disimmetrie e di altri conduttori circostanti (come gli schermi), necessita di un approccio multiconduttore (si veda a tal proposito il lavoro in [10]). La nostra analisi vuole invece esser più semplice e partirà da delle basi che permettano di trascurare questi effetti; in particolare si supporrà che:

1. *la linea sia perfettamente simmetrica,*
2. *non vi siano correnti circolanti negli schermi,*
3. *siano presenti solo componenti di corrente alla sequenza diretta.*

Si vedrà al capitolo 3.2 in quali casi queste semplificazioni siano da ritenersi valide. Solamente sotto queste ipotesi è lecito:

- *attribuire a ogni singola fase un eguale valore dei parametri d'esercizio* (conseguenza dell'ipotesi 1); questo è logico data l'ipotizzata simmetria della linea, che letta in altro modo garantisce un uguale comportamento per ogni fase¹; una trattazione più approfondita si può trovare in [11];
- *trascurare l'accoppiamento magnetico fase - schermo* (conseguenza dell'ipotesi 2); visto che gli schermi non sono percorsi da correnti non esiste nessuna interazione magnetica con altri conduttori e per il calcolo delle grandezze elettriche della linea e dei parametri chilometrici si può procedere come se gli schermi fossero assenti;
- *ricavare i valori fittizi di auto e mutua induzione per l'insieme di fasi* (conseguenza dell'ipotesi 3); una trattazione sintetica, ma chiara e completa, dei coefficienti fittizi di induzione di una linea è presente in [11];
- *trascurare la resistenza degli schermi* (conseguenza dell'ipotesi 2);
- *trascurare la resistenza del ritorno attraverso terra* (conseguenza dell'ipotesi 3).

Ora e solo ora è possibile ricondursi dal circuito trifase ad un circuito monofase equivalente alla sequenza diretta: da questo circuito partiranno tutte le analisi seguenti.

¹Nel caso particolare dei cavi l'induttanza d'esercizio dipende dalla geometria e dal tipo di posa (il campo magnetico esterno agli schermi non è nullo), mentre la capacità d'esercizio solo dalla geometria e non dal tipo di posa (il campo elettrico esterno agli schermi è nullo). Un caso particolare di linea perfettamente simmetrica sono i GIL [12].

2.1.2 Parametri di linea caratteristici: impedenza d'onda, impedenza caratteristica e costante di propagazione

Si vuole prima di tutto mettere in evidenza una differenza importante che intercorre tra due grandezze, l'impedenza caratteristica e l'impedenza d'onda, sia da un punto di vista formale che fisico. Viene poi per completezza presentata anche la costante di propagazione.

Impedenza caratteristica Formalmente l'impedenza caratteristica è definita come

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{z}_{es}}{\underline{y}_{es}}}, \quad (2.1.1)$$

dove \underline{z}_{es} e \underline{y}_{es} sono rispettivamente l'impedenza e l'ammettenza chilometriche d'esercizio della linea, generalmente complesse. Nel caso di linea ideale la (2.1.1) diventa

$$Z_c = \sqrt{\frac{l_{es}}{c_{es}}}, \quad (2.1.2)$$

dove l_{es} e c_{es} sono l'induttanza e la capacità di esercizio della linea. Avendo quindi utilizzato i parametri d'esercizio, si sottintende implicitamente che la linea stia funzionando nel suo normale regime trifase, alimentata da una terna simmetrica di tensioni e percorsa da una terna equilibrata di correnti.

Fisicamente l'impedenza caratteristica è il rapporto tra la tensione e la corrente all'estremità di una linea di lunghezza infinita

$$\underline{Z}_c = \left. \frac{E}{I} \right|_{d=\infty}, \quad (2.1.3)$$

cioè una linea in cui si vede solo l'onda diretta e manca l'onda riflessa. Quindi, se una linea di lunghezza finita venisse chiusa su un'impedenza di valore pari a quello dell'impedenza caratteristica, si avrebbe la stessa situazione di assenza dell'onda riflessa.

Come evidenziato in [8] e [13], una formulazione semplificata dell'espressione di Z_c è possibile nel caso di linee aeree ideali secondo la

$$Z_c = 138,2 \cdot \log \frac{2D}{d}, \quad (2.1.4)$$

in cui D è la distanza tra le fasi² e d il diametro del conduttore di fase³. Nel caso di cavi non è possibile arrivare ad una formulazione così semplice; per capirlo, è sufficiente ricordare le formule per i parametri d'esercizio [11] riscritte nel caso di linea ideale,

$$l = 0,46 \log \frac{2D}{d}, \quad (2.1.5)$$

$$c = \frac{\epsilon_r}{18 \cdot 2,3 \log \frac{d_s}{d}}, \quad (2.1.6)$$

²Uguale per la supposta simmetria, oppure per linee trasposte pari alla distanza media geometrica $D = D_m = \sqrt{D_{12}D_{23}D_{31}}$.

³Si è trascurato il termine k'' perché, essendo la linea supposta ideale e quindi con $r = 0$, l'effetto pelle è massimo e la corrente non è uniformemente distribuita nel conduttore ma su tutta la sua superficie.

in cui D è la distanza tra le fasi, d il diametro del conduttore di fase e d_s il diametro dello schermo. Se si calcola l'impedenza caratteristica sostituendo le espressioni in (2.1.2) si ottiene

$$Z_c = 105,4 \sqrt{\epsilon_r \log \frac{2D}{d} \log \frac{d_s}{d}}, \quad (2.1.7)$$

che certamente non può dirsi in forma altrettanto semplice di (2.1.4).

Impedenza d'onda Formalmente l'impedenza d'onda è definita come

$$Z_0 = \sqrt{\frac{z_0}{y_0}}, \quad (2.1.8)$$

dove z_0 e y_0 sono rispettivamente l'impedenza e l'ammettenza chilometriche verso terra. Nel caso di linea ideale la (2.1.8) diventa

$$Z_0 = \sqrt{\frac{l_0}{c_0}}, \quad (2.1.9)$$

dove l_0 e c_0 sono l'induttanza e la capacità d'onda o verso terra di un solo conduttore appartenente alla linea. Questi due diversi parametri intervengono quando la linea non è percorsa da una terna equilibrata ma bensì da un sistema di correnti in fase fra loro.

Fisicamente è l'impedenza che interviene per fenomeni come le fulminazioni dirette o le sovratensioni indotte, tipicamente non descrivibili come sistemi di grandezze trifase.

Una formulazione semplificata dell'espressione di Z_0 è ancora possibile nel caso di linee aeree ideali, come evidenziato sempre in [8] e [13],

$$Z_0 = 138,2 \cdot \log \frac{4H}{d_c}, \quad (2.1.10)$$

in cui H è l'altezza dei conduttori rispetto al terreno e d_c il diametro del manicotto ionizzato per effetto Corona attorno al conduttore. Nel caso di cavi è sì ora possibile giungere ad un'espressione simile e semplificata: è sufficiente notare che, dato che l'induttanza e la capacità d'onda che intervengono sono quelle verso terra, esse coincidono con quelle tipiche di una linea coassiale:

$$l = \frac{\mu_0}{2\pi} \log \frac{d_s}{d}, \quad (2.1.11)$$

$$c = \frac{\epsilon_r}{18 \log \frac{d_s}{d}}. \quad (2.1.12)$$

Sostituendo in (2.1.9) si ottiene⁴

$$Z_0 = \frac{138,2}{\sqrt{\epsilon_r}} \log \frac{d_s}{d}. \quad (2.1.13)$$

⁴A margine va fatto notare come l'impedenza d'onda di una terna di cavi coincida con l'impedenza caratteristica di un cavo unipolare, dato che considerare i parametri verso terra del cavo equivale a calcolare i parametri d'esercizio d'un cavo unipolare; a riprova di ciò si veda la forma semplificata dell'impedenza caratteristica di un cavo unipolare in [8]. Questa va più considerata come una curiosità, ed è opportuno tenere ben distinti i due concetti di impedenza caratteristica e d'onda.

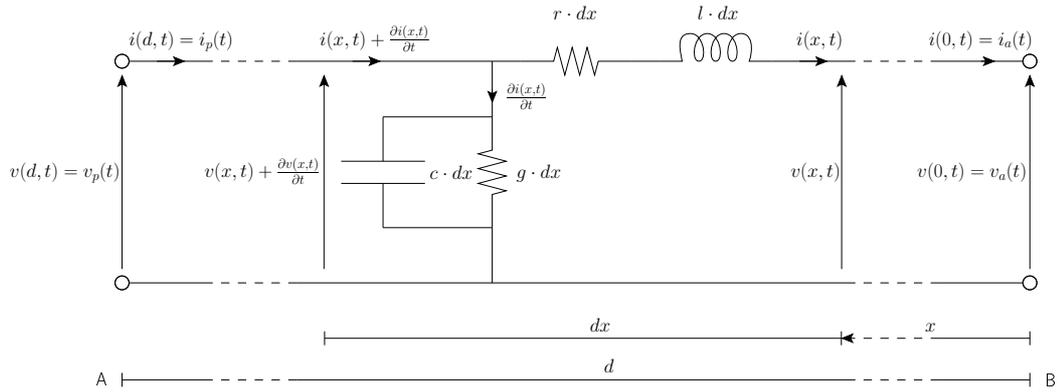


Figura 2.1: Schema monofase equivalente di una linea a costanti distribuite

Costante di propagazione Formalmente la costante di propagazione è definita come

$$\underline{k} = \sqrt{\underline{z} \cdot \underline{y}} ; \quad (2.1.14)$$

\underline{z} e \underline{y} possono riferirsi, come visto ai paragrafi precedenti, ai valori dei parametri di esercizio o verso terra. Non si ripete qui la distinzione dettagliata tra i due casi: va però ribadito che è molto importante tenere presenti le condizioni in cui la linea si trova a funzionare, perché i valori possono cambiare notevolmente.

Fisicamente la costante di propagazione assume significati diversi a seconda che se ne consideri la parte reale o immaginaria. La parte reale rappresenta l'attenuazione che subisce l'onda percorrendo il mezzo trasmissivo: per questo viene anche detta costante di attenuazione. La parte immaginaria rappresenta invece lo sfasamento che subisce l'onda nel medesimo tratto di linea: per questo viene anche detta costante di fase. Nel caso di linea ideale si ricava da (2.1.14) che

$$\underline{k} = \omega \sqrt{lc} . \quad (2.1.15)$$

2.1.3 Il regime variabile in una linea di trasmissione

Una linea di trasmissione a costanti distribuite può essere rappresentata come in figura 2.1, per cui è stato scelto un sistema di riferimento lineare nello spazio descritto dalla coordinata x , con origine all'estremo B (detto *arrivo della linea*) e crescente man mano che ci si sposta verso l'estremo A (detto *partenza della linea*).

Si consideri un tratto di linea lungo dx , caratterizzato dai parametri longitudinali di resistenza $r \cdot dx$ e induttanza $l \cdot dx$ e dai parametri trasversali di ammettenza $g \cdot dx$ e capacità $c \cdot dx$.

È possibile scrivere, secondo le convenzioni assunte sempre in figura 2.1, l'equazione alle tensioni⁵

$$\left[v(x, t) + \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} dx \right] - v(x, t) = r dx \cdot i(x, t) + l dx \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} , \quad (2.1.16)$$

⁵Per convenzione, si è scelto di rappresentare le grandezze nel dominio del tempo con una lettera minuscola.

in cui si è messa in evidenza la dipendenza delle grandezze elettriche sia dallo spazio che dal tempo.

Analogamente è possibile, applicando la prima legge di Kirchoff al nodo N e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, scrivere l'equazione alle correnti

$$\left[i(x, t) + \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} dx \right] - i(x, t) = g dx \cdot v(x, t) + c dx \cdot \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} . \quad (2.1.17)$$

Semplificando e sopprimendo il fattore dx si giunge al sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = r \cdot i(x, t) + l \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} , \\ \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = g \cdot v(x, t) + c \cdot \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} . \end{cases} \quad (2.1.18)$$

Si ipotizzi la *linea inizialmente a riposo*, per cui cioè siano valide le condizioni

$$v(x, 0) = 0 \quad , \quad i(x, 0) = 0 , \quad (2.1.19)$$

e si applichi la trasformazione di Laplace secondo la definizione B.1.1 a ciascuna delle due equazioni del sistema (2.1.18). È lecito pensare le grandezze $v(x, t)$ e $i(x, t)$ come funzioni della sola variabile t , prescindendo dal fatto che dipendono anche dalla variabile x . Applicando le condizioni iniziali (2.1.19) per la trasformazione delle grandezze derivate rispetto al tempo $\frac{\partial}{\partial t}$, si ottengono le equazioni nel dominio di Laplace⁶

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x, s)}{\partial x} = (r + sl)I(x, s) , \\ \frac{\partial I(x, s)}{\partial x} = (g + sc)V(x, s) . \end{cases} \quad (2.1.20)$$

Fra le equazioni (2.1.20) si può eliminare $I(x, s)$ derivando la prima rispetto ad x

$$\frac{\partial^2 V(x, s)}{\partial x^2} = (r + sl) \frac{\partial I(x, s)}{\partial x}$$

e sostituendo a $\frac{\partial I(x, s)}{\partial x}$ l'espressione della seconda

$$\frac{\partial^2 V(x, s)}{\partial x^2} - (r + sl)(g + sc)V(x, s) = 0 . \quad (2.1.21)$$

La (2.1.21) è un'equazione lineare omogenea del second'ordine, risolvibile mediante i metodi tradizionali; l'equazione che la soddisfa è notoriamente

$$V(x, s) = A(s)e^{-xk(s)} + B(s)e^{xk(s)} , \quad (2.1.22)$$

in cui $A(s)$ e $B(s)$ sono le costanti da determinare imponendo le opportune condizioni al contorno, indipendenti dalla variabile t ma funzioni dal parametro s .

⁶Per convenzione, si è scelto di rappresentare le grandezze trasformate nel dominio di Laplace con una lettera maiuscola.

La $I(x, s)$ si ottiene invertendo la prima delle (2.1.20)

$$I(x, s) = \frac{1}{(r + sl)} \frac{\partial V(x, s)}{\partial x}$$

e sostituendo la derivata di (2.1.22)

$$\begin{aligned} I(x, s) &= \frac{k(s)}{(r + sl)} \left[B(s)e^{xk(s)} - A(s)e^{-xk(s)} \right] = \\ &= \frac{[B(s)e^{xk(s)} - A(s)e^{-xk(s)}]}{Z_c(s)}. \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

Per ricavare le espressioni parametriche di $A(s)$ e $B(s)$ si utilizzeranno le condizioni al contorno

$$V(0, s) = V_a(s) \quad , \quad I(0, s) = I_a(s) \quad , \quad (2.1.24)$$

poiché si ipotizza di conoscere la tensione all'arrivo e di volerla determinare in un generico punto x della linea. Particolarizzando le (2.1.22) e (2.1.23) con le (2.1.24) si arriva al sistema

$$\begin{cases} V(0, s) = V_a(s) = A(s) + B(s) \quad , \\ I(0, s) = I_a(s) = \frac{B(s) - A(s)}{Z_c(s)} \quad , \end{cases}$$

che risolto porge i risultati

$$\begin{cases} A(s) = \frac{V_a(s) - Z_c(s)I_a(s)}{2} \quad , \\ B(s) = \frac{V_a(s) + Z_c(s)I_a(s)}{2} \quad . \end{cases} \quad (2.1.25)$$

Sostituendo le (2.1.25) nelle (2.1.22) e (2.1.23) si ottengono gli *integrali generali di tensione e corrente nel dominio di Laplace, parametrizzati per la distanza x dal punto di arrivo*

$$\begin{cases} V(x, s) = \frac{V_a(s) - Z_c(s)I_a(s)}{2} e^{-xk(s)} + \frac{V_a(s) + Z_c(s)I_a(s)}{2} e^{xk(s)} \quad , \\ I(x, s) = \frac{V_a(s) - Z_c(s)I_a(s)}{2Z_c(s)} e^{-xk(s)} - \frac{V_a(s) + Z_c(s)I_a(s)}{2Z_c(s)} e^{xk(s)} \quad , \end{cases}$$

che possono essere riscritti in forma più compatta ricordando le espressioni di seno e coseno iperbolico:

$$\begin{cases} V(x, s) = V_a(s) \cosh[xk(s)] + Z_c(s)I_a(s) \sinh[xk(s)] \quad , \\ I(x, s) = V_a(s) \frac{\sinh[xk(s)]}{Z_c} + I_a(s) \cosh[xk(s)] \quad . \end{cases} \quad (2.1.26)$$

Le (2.1.26) sono scritte nella stessa forma in cui si trovano solitamente scritte per il regime trifase, con la differenza sostanziale che ora le grandezze elettriche sono liberamente variabili nel tempo. Nel seguito, visto che la linea considerata sarà di lunghezza finita d , si userà la

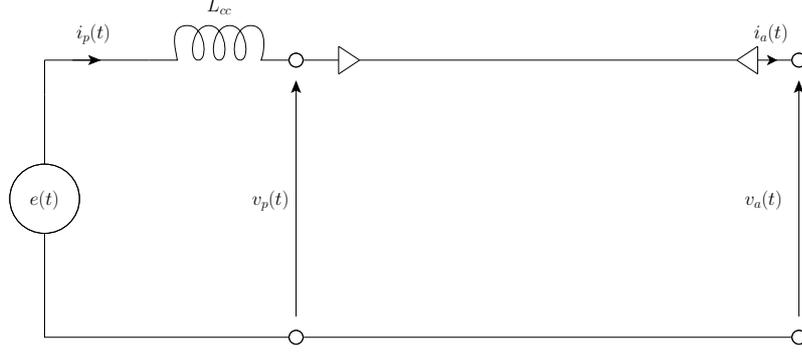


Figura 2.2: Schema monofase equivalente di una linea in cavo non compensata

dicitura semplificata

$$V(d, s) = V_p(s) \quad , \quad I(d, s) = I_p(s) . \quad (2.1.27)$$

2.2 Equazioni per linea in cavo non compensata alimentata da generatore non ideale di tensione

Partendo dal dominio di Laplace, si vuole ora ricavare l'equazione della tensione all'arrivo di una linea alimentata da un generatore equivalente di tensione; il caso è schematizzato dal circuito di figura 2.2. Il generatore equivalente di tensione rappresenta la rete alimentante la linea in cavo con tensione $e(t)$ e impedenza di corto circuito puramente induttiva L_{cc} . Si consideri una linea in cavo ideale e di lunghezza d , nel qual caso sono valide la (2.1.2) e la (2.1.15); le loro trasformate sono

$$Z_c(s) = \sqrt{\frac{l_{es}}{c_{es}}} , \quad (2.2.1)$$

$$k(s) = s\sqrt{l_{es}c_{es}} . \quad (2.2.2)$$

Si definisca per comodità la variabile

$$\tau = d \cdot \sqrt{l_{es}c_{es}} , \quad (2.2.3)$$

che fisicamente identifica il tempo di percorrenza di una linea di un'onda viaggiante. Sostituendo (2.2.1) e (2.2.2) in (2.1.26) e utilizzando le definizioni (2.1.27) e (2.2.3) si giunge a

$$V_p(s) = V_a(s) \cosh(s\tau) + I_a(s)Z_c \sinh(s\tau) , \quad (2.2.4)$$

$$I_p(s) = \frac{V_a(s)}{Z_c} \sinh(s\tau) + I_a(s) \cosh(s\tau) . \quad (2.2.5)$$

Se consideriamo la linea a vuoto le (2.2.4) e (2.2.5) diventano

$$V_p(s) = V_a(s) \cosh(s\tau) , \quad (2.2.6)$$

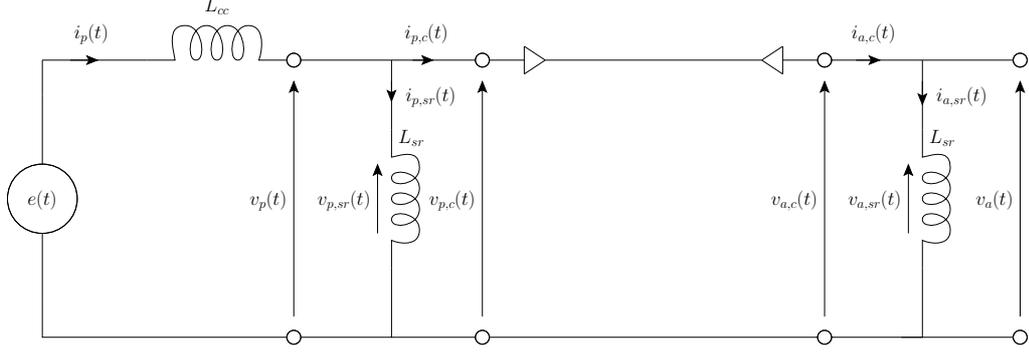


Figura 2.3: Schema monofase equivalente di una linea in cavo compensata

$$I_p(s) = \frac{V_a(s)}{Z_c} \sinh(s\tau) , \quad (2.2.7)$$

essendo $i_a(t) = 0 \forall t \geq 0$. Considerando sempre le Laplace trasformate si può scrivere l'equazione di maglia del circuito

$$E(s) = sL_{cc}I_p(s) + V_p(s) . \quad (2.2.8)$$

Inserendo in (2.2.8) le (2.2.6) e (2.2.7) si ottiene

$$E(s) = sL_{cc} \frac{V_a(s)}{Z_c} \sinh(s\tau) + V_a(s) \cosh(s\tau) . \quad (2.2.9)$$

Questa invertita dà infine la *formula nel dominio di Laplace della tensione d'arrivo in funzione della tensione del generatore*,

$$V_a(s) = \frac{E(s)}{sT_1 \sinh(s\tau) + \cosh(s\tau)} , \quad (2.2.10)$$

avendo introdotto la nuova costante di tempo $T_1 = \frac{L_{cc}}{Z_c}$. L'equazione (2.2.10) è la funzione da antitrasformare per trovare l'andamento $v_a(t)$ nel tempo.

La (2.2.10) può essere suddivisa nel prodotto

$$V_a(s) = F(s)E(s) , \quad (2.2.11)$$

in cui compare la trasformata dell'ingresso $E(s)$ e la funzione di trasferimento del sistema $F(s)$ uguale a

$$F(s) = \frac{1}{sT_1 \sinh(s\tau) + \cosh(s\tau)} . \quad (2.2.12)$$

2.3 Equazioni per linea in cavo compensata alimentata da generatore non ideale di tensione

Si vuole ora ricavare la stessa espressione di V_a in funzione di E nel caso di linea in cavo compensata: in particolare ci si riferisce al circuito equivalente di figura 2.3, dove sono indicati

tutti i simboli delle grandezze coinvolte. Sottintendendo temporaneamente, per semplicità di scrittura, la dipendenza da s delle grandezze elettriche, si può scrivere il sistema di equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{p,c} = V_{a,c} \cosh(s\tau) + I_{a,c} Z_c \sinh(s\tau) \\ V_{a,c} = V_a \\ I_{p,c} = \frac{V_{a,c}}{Z_c} \sinh(s\tau) + I_{a,c} \cosh(s\tau) \\ I_{a,c} = \frac{V_{a,c}}{sL_{sr}} \\ V_{p,sr} = V_{p,c} \\ V_{a,sr} = V_{a,c} \\ I_{p,sr} = \frac{V_{p,sr}}{sL_{sr}} \\ I_{a,sr} = \frac{V_{a,sr}}{sL_{sr}} \\ V_p = V_{p,c} \\ I_p = I_{p,sr} + I_{p,c} \end{array} \right. . \quad (2.3.1)$$

Considerando la linea sempre collegata ad un generatore di tensione equivalente, si può ancora scrivere l'equazione (2.2.8) qui riportata per comodità

$$E(s) = sL_{cc}I_p + V_p .$$

Dal sistema (2.3.1) si ricavano le espressioni di $V_p(s)$ e $I_p(s)$:

$$V_p = V_{p,c} = V_a \cosh(s\tau) + \frac{V_a}{sL_{sr}} Z_c \sinh(s\tau) \quad (2.3.2)$$

$$\begin{aligned} I_p &= I_{p,sr} + I_{p,c} = \\ &= \frac{V_p}{sL_{sr}} + \frac{V_a}{Z_c} \sinh(s\tau) + \frac{V_a}{sL_{sr}} \cosh(s\tau) = \\ &= \frac{V_a}{sL_{sr}} \left[\cosh(s\tau) + \frac{Z_c}{sL_{sr}} \sinh(s\tau) \right] + V_a \left[\frac{1}{Z_c} \sinh(s\tau) + \frac{1}{sL_{sr}} \cosh(s\tau) \right] = \\ &= V_a \left[\frac{2}{sL_{sr}} \cosh(s\tau) + \left(\frac{Z_c}{s^2 L_{sr}^2} + \frac{1}{Z_c} \right) \sinh(s\tau) \right] . \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Sostituendo (2.3.2) e (2.3.3) in (2.2.8) si ottiene

$$\begin{aligned} E &= sL_{cc} \left[\frac{V_p}{sL_{sr}} + \frac{V_a}{Z_c} \sinh(s\tau) + \frac{V_a}{sL_{sr}} \cosh(s\tau) \right] + \left[V_a \cosh(s\tau) + \frac{V_a}{sL_{sr}} Z_c \sinh(s\tau) \right] \\ &= V_a \left[\cosh(s\tau) \left(2 \frac{L_{cc}}{L_{sr}} + 1 \right) + \sinh(s\tau) \left(\frac{Z_c L_{cc}}{sL_{sr}^2} + \frac{sL_{cc}}{Z_c} + \frac{Z_c}{sL_{sr}} \right) \right] \\ &= V_a \left[\cosh(s\tau) \left(2 \frac{L_{cc}}{L_{sr}} + 1 \right) + \sinh(s\tau) \left(\frac{Z_c^2 L_{cc} + s^2 L_{sr}^2 L_{cc} + Z_c^2 L_{sr}}{sZ_c L_{sr}^2} \right) \right] , \end{aligned}$$

che invertita dà infine la *formula nel dominio di Laplace della tensione d'arrivo in funzione*

della tensione del generatore (si ritorna ora ad indicare esplicitamente la dipendenza delle grandezze da s),

$$V_a(s) = \frac{E(s)}{\left[\cosh(s\tau) \left(2 \frac{L_{cc}}{L_{sr}} + 1 \right) + \sinh(s\tau) \left(\frac{Z_c^2 L_{cc} + s^2 L_{sr}^2 L_{cc} + Z_c^2 L_{sr}}{s Z_c L_{sr}^2} \right) \right]} . \quad (2.3.4)$$

La (2.3.4) può essere suddivisa nel prodotto

$$V_a(s) = F(s)E(s) , \quad (2.3.5)$$

in cui compare la trasformata dell'ingresso $E(s)$ e la funzione di trasferimento del sistema $F(s)$ uguale a

$$F(s) = \frac{1}{\left[\cosh(s\tau) \left(2 \frac{L_{cc}}{L_{sr}} + 1 \right) + \sinh(s\tau) \left(\frac{Z_c^2 L_{cc} + s^2 L_{sr}^2 L_{cc} + Z_c^2 L_{sr}}{s Z_c L_{sr}^2} \right) \right]} . \quad (2.3.6)$$

Per verifica, si provi a valutare il $\lim_{L_{sr} \rightarrow \infty} F(s)$, cioè il caso in cui l'induttanza di compensazione tenda a un valore infinito. È immediato capire come questa condizione debba portare $F(s)$ del caso compensato a coincidere con quella del caso non compensato, dato che equivale a togliere completamente i reattori. Si vede subito che il termine che moltiplica il coseno tende a 1 e quello che moltiplica il seno tende a $s \frac{L_{cc}}{Z_c} = sT_1$, cioè il denominatore diventa effettivamente lo stesso del caso non compensato: questo prova la bontà dei conti svolti finora.

Data la complessità del denominatore di $F(s)$, in alcuni casi si potrà rivelare opportuno definire delle costanti che aiutino nei calcoli:

$$A = 2 \frac{L_{cc}}{L_{sr}} + 1 \quad B = \frac{Z_c}{L_{sr}^2} (L_{sr} + L_{cc}) \quad C = \frac{L_{cc}}{Z_c} .$$

$F(s)$ potrà essere scritta come

$$F(s) = \frac{1}{\left[A \cosh(s\tau) + \sinh(s\tau) \left(\frac{B}{s} + sC \right) \right]} . \quad (2.3.7)$$

3 Modello della linea

3.1 Dati tecnici

La scelta del cavo su cui si eseguiranno le simulazioni deve riguardare il più possibile casi reali, che abbiano una valenza applicativa oltre che teorica; inoltre, per avere un valido riscontro dei calcoli eseguiti, è opportuno disporre di alcune misure sperimentali e di altre analisi condotte sulla stessa tipologia di cavi.

Per questi motivi, la scelta è ricaduta su un cavo XLPE 2500 mm^2 , già descritto e utilizzato nei precedenti lavori [14] e [7]; per esso sono infatti disponibili le caratteristiche geometriche riportate in tabella 1 e riassunte in figura 3.1. Per comodità si sono numerati progressivamente i raggi di interesse.

Tabella 1: Dati geometrici del cavo studiato

dato geometrico	simbolo	unità di misura	valore
<i>Sezione nominale del conduttore di fase</i>	S_n	$[\text{mm}^2]$	2500
<i>Materiale del conduttore di fase</i>			Cu
<i>Diametro foro di raffreddamento</i>	$r_{hole} = r_0$	$[\text{mm}]$	10.0
<i>Diametro sul conduttore (Milliken)</i>	r_c	$[\text{mm}]$	63.4
<i>Diametro sullo schermo semiconduttivo</i>	$r_{c,scl} = r_1$	$[\text{mm}]$	69.5
<i>Diametro sull'isolante XLPE</i>	$r_{iso} = r_2$	$[\text{mm}]$	119.9
<i>Diametro sullo schermo semiconduttivo</i>	$r_{iso,scl}$	$[\text{mm}]$	127.7
<i>Diametro sullo schermo metallico</i>	$r_s = r_3$	$[\text{mm}]$	130.1
<i>Materiale dello schermo metallico</i>			Al
<i>Diametro sulla guaina PE</i>	$r_g = r_4$	$[\text{mm}]$	141.7

Inoltre si hanno a disposizione anche le misure riportate in tabella 2, valide nel caso di posa direttamente interrata in piano con spaziature da 0.35 m a profondità 1.45 m , come riassunto schematicamente in figura 3.2.

Si considera un sistema a doppia terna alimentato alla frequenza di 50 Hz e in un terreno con resistività $\rho_{terreno}$ pari a $100 \frac{\Omega}{\text{m}}$. La distanza fra le due terne è di 5 m , valore tale da poter considerare disaccoppiate le due linee. Si sono presi inoltre dei valori di riferimento di corrente di corto circuito relativi all'impianto Cagliari Sud di Terna della rete a 380 kV dell'area di Cagliari, resi disponibili nel documento [15],

$$\begin{aligned} \underline{I''}_{cc,3f} &= 10.552 \text{ kA} , \\ \underline{I''}_{cc,3f} &= 11.156 \text{ kA} , \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

che si riferiscono ad una situazione di rete debole.

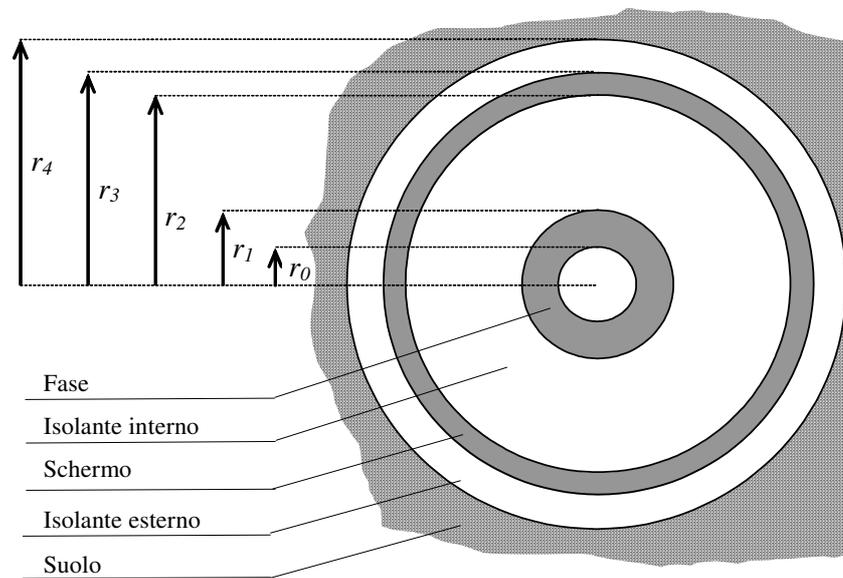


Figura 3.1: Geometria del cavo XLPE 2500 mm^2

*(230/400) 400 kV
 Doppia terna 2500 mm^2 UGC; $L=30 \text{ km}$
 frequenza = 50 Hz*

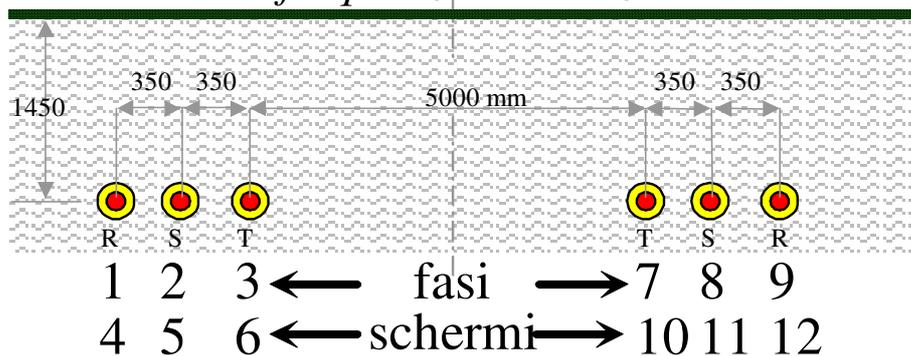


Figura 3.2: Posa dei cavi in doppia terna, spaziatura $s = 0.35 \text{ m}$, profondità $h = 1.45 \text{ m}$

Tabella 2: Parametri del cavo studiato per posa interrata con spaziature $s = 0.35 \text{ m}$ a profondità $p = 1.45 \text{ m}$

parametro	simbolo	unità di misura	valore
<i>resistenza di fase a $90^\circ C$</i>	$r_{ac,90^\circ}$	$[\frac{m\Omega}{km}]$	13.3
<i>induttanza riferita a s_m geometrica</i>	l_{es}	$[\frac{mH}{km}]$	0.576
<i>conduttanza con $\tan \delta = 0.9$</i>	g	$[\frac{nS}{km}]$	52
<i>capacità con $\epsilon_r = 2.3$</i>	c_{es}	$[\frac{\mu F}{km}]$	0.234
<i>impedenza caratteristica</i>	\underline{Z}_c	$[\Omega]$	$49.68 \angle -0.04 \text{ rad}$
<i>costante di propagazione</i>	\underline{k}	$[\frac{1}{km}]$	3.710^{-3}

Per stabilire il valore della reattanza di compensazione si fa riferimento alle indicazioni contenute in [16]. Esistono vari motivi che portano a dover compensare l'immissione di potenza reattiva in rete da parte dei cavi: tra queste le più importanti sono le sovratensioni a frequenza di rete nel caso di linea a vuoto, la sovraeccitazione dei generatori sincroni in vicinanza del cavo e le eccessive correnti a vuoto. Queste ultime rappresentano un problema per gli interruttori, che fanno fatica ad estinguerle nel caso di apertura. I vari vincoli sono relazionabili con il grado di compensazione della linea ξ_{sh} , definito come

$$\xi_{sh} = \frac{2 \cdot Q_{SR}}{\omega c d U^2}, \quad (3.1.2)$$

dove U è la tensione di alimentazione, ω la pulsazione della tensione di alimentazione, d la lunghezza della linea, c la capacità chilometrica e Q_{SR} è la potenza reattiva impegnata dallo shunt reactor alla tensione U . Il vincolo più stringente appare essere quello sulla corrente a vuoto I_{NL} ; un valore reputato accettabile è quello di 400 A , perché apribile in caso di guasto da un normale interruttore, anche in concomitanza con sovratensioni della rete di alimentazione fino a 1.4 p.u. . Da prime analisi risulta evidente che il caso in esame, in assenza di compensazione, produrrebbe correnti a vuoto inaccettabili. Si prevede quindi di studiare anche il caso compensato, che risulterebbe la soluzione tecnica più prossima alla realtà.

Il documento [16] ha prodotto, proprio per il caso del cavo in esame XLPE 2500 mm^2 , un grafico del grado di compensazione in funzione della lunghezza della linea, nel caso di una rete a 4000 MVA ; ma nello stesso documento è stato anche dimostrato che il vincolo su I_{NL} non dipende dalla reattanza di corto circuito della rete, quindi si può usare la figura per ricavare ξ_{sh} . Nel caso in questione esso vale

$$\xi_{sh} = 0.55. \quad (3.1.3)$$

Invertendo la (3.1.2) si ottiene

$$\begin{aligned}
 Q_{sr} &= \xi_{sh} \omega c U^2 \frac{d}{2} = \\
 &= 0.55 \cdot 2\pi 50 \cdot 234 \cdot (400)^2 \cdot \frac{30}{2} = \\
 &= 97.037 \text{ Mvar}
 \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

e infine

$$\begin{aligned}
 L_{sr} &= \frac{U^2}{\omega Q_{sr}} = \\
 &= 5.25 \text{ H} .
 \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

3.2 Calcolo delle costanti chilometriche

Si procede ora al calcolo delle costanti chilometriche secondo le formule descritte in [11], per avere un riscontro teorico dei dati tecnici forniti; si avranno inoltre dei riferimenti per costruire degli algoritmi automatici in grado di calcolare, una volta inserita la geometria, i parametri caratteristici del cavo. In analogia con quanto già spiegato in precedenza (cfr. paragrafo 2.1.2), si fa notare che le seguenti formule servono a calcolare i cosiddetti parametri d'esercizio, necessari per modellizzare la linea secondo un circuito monofase equivalente. Le ipotesi sotto cui valgono sono le stesse viste al paragrafo 2.1.1; in particolare, i parametri si riferiscono alla sola sequenza diretta. Tutto questo è perfettamente in linea con l'approccio della ricerca: infatti la teoria vista al capitolo 2 utilizza i parametri d'esercizio ed è valida nelle stesse condizioni in cui essi possono essere calcolati. Dato che si sta trattando la linea anche da un punto di vista tecnico, è opportuno tradurre in termini concreti le ipotesi fatte per portare avanti lo sviluppo teorico; riprendendo i tre punti del paragrafo 2.1.1, si può dire che:

- la *linea è simmetrica* solo nel caso di posa a trifoglio o di trasposizione delle fasi;
- *non vi sono correnti circolanti negli schermi* solo se essi sono collegati in single point bonding o cross bonding; il caso di cross bonding è quello che più si avvicina alla condizione di poter trascurare gli schermi, poiché anche la tensione indotta è nulla;
- *sono presenti solo componenti alla sequenza diretta* se ci troviamo inoltre in un regime di funzionamento simmetrico dal punto di vista elettrico, cioè tutte le fasi sono nella stessa situazione di carico (la simmetria geometrica e quindi dei parametri d'esercizio è già garantita dall'ipotesi 1).

Il cavo XLPE sarà quindi scomposto in 12 major section da 2500 m ciascuna a sua volta divisa in 3 minor section da 833 m, come fatto anche in [7]. Ad ogni sezione di trasposizione verrà anche eseguito il cross bonding degli schermi. Essendo la posa in piano, la fase che vedrà la maggior simmetria sarà quella centrale, cioè la b: il suo comportamento sarà quello più similmente riconducibile al modello monofase equivalente.

3.2.1 Resistenza chilometrica

Il calcolo della resistenza chilometrica non può essere effettuato a rigore perché necessiterebbe la conoscenza della sezione effettiva del conduttore e non di quella nominale [11]. La norma CEI 20-29 [17] ha tabellato i valori di resistenza chilometrica in corrente continua per varie tipologie di conduttori, che in questo caso risulta essere

$$r_{cc,20^{\circ}C} = 7.2 \frac{m\Omega}{km} ; \quad (3.2.1)$$

riportando la resistenza alla temperatura di funzionamento a regime di $90^{\circ}C$ si ottiene

$$\begin{aligned} r_{cc,90^{\circ}C} &= r_{cc,20^{\circ}C} \cdot (1 + 4\pi 10^{-3} \cdot \Delta T) = \\ &= 7.2 \cdot (1 + 4\pi 10^{-3} \cdot 70) = \\ &= 13.53 \frac{m\Omega}{km} . \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

3.2.2 Induttanze chilometriche

Il calcolo dell'induttanza di esercizio può esser eseguito con la [11]

$$l_e = 0.46 \log \frac{GMD}{GMR} , \quad (3.2.3)$$

dove GMD è la distanza media geometrica esprimibile come

$$GMD = \sqrt[3]{s_{12} \cdot s_{13} \cdot s_{23}} = \sqrt[3]{s \cdot s \cdot 2s} = s\sqrt[3]{2} \quad (3.2.4)$$

e GMR è il raggio medio geometrico esprimibile come

$$GMR = k'' \cdot r_{cond} . \quad (3.2.5)$$

Il termine k'' è legato alla forma tubolare del conduttore e alle dimensioni della cavità interna; definendo come r_{hole} il raggio della cavità e il rapporto $a = \frac{r_{hole}}{r_{cond}}$, k'' si può esprimere come

$$k'' = e^{-\frac{0.25 - a^2 + a^4(0.75 - \ln a)}{(1 - a^2)^2}} . \quad (3.2.6)$$

Nel caso in esame si ha

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_{hole}}{r_{cond}} = \frac{5}{34.75} = 0.1439 , \\ k'' &= e^{-\frac{0.25 - a^2 + a^4(0.75 - \ln a)}{(1 - a^2)^2}} = 0.7864 , \\ GMR &= k'' \cdot r_{cond} = 0.7864 \cdot 34.75 = 27.327 \text{ mm} , \\ GMD &= s\sqrt[3]{2} = 350\sqrt[3]{2} = 440.97 \text{ mm} , \end{aligned}$$

e infine

$$l_e = 0.46 \log \frac{GMD}{GMR} = 0.46 \log \frac{440.97}{27.327} = 0.556 \frac{mH}{km} . \quad (3.2.7)$$

Per un valido confronto con il file dati di output di EMTP-RV è utile calcolare le auto e mutue induttanze tra conduttori secondo le formule semplificate di Carson - Clem, di cui si può trovare un richiamo in [14]. Infatti, come più volte fatto notare, l'induttanza di esercizio ha significato solo per linee simmetriche: nella realtà i conduttori hanno accoppiamenti magnetici diversi gli uni dagli altri. Per il calcolo dell'auto impedenza chilometrica di un conduttore (fase o schermo) la formula è

$$z_{ii} = r_i + \pi^2 10^{-4} \cdot f + j \cdot 4\pi 10^{-4} \cdot f \cdot \ln \left(\frac{D_{ca}}{GMR} \right) , \quad (3.2.8)$$

dove r_i è la resistenza del conduttore per unità di lunghezza in $\frac{\Omega}{km}$, f la frequenza di esercizio e D_{ca} la profondità di Carson calcolabile come

$$D_{ca} = 660 \sqrt{\frac{\rho_{terreno}}{f}} . \quad (3.2.9)$$

Per il calcolo della mutua impedenza tra conduttori concentrici uno all'altro si ha

$$z_{ij} = \pi^2 10^{-4} \cdot f + j \cdot 4\pi 10^{-4} \cdot f \cdot \ln \left(\frac{D_{ca}}{r_j} \right) , \quad (3.2.10)$$

dove r_j è il raggio del conduttore esterno.

Per conduttori esterni uno all'altro la mutua impedenza è

$$z_{ij} = \pi^2 10^{-4} \cdot f + j \cdot 4\pi 10^{-4} \cdot f \cdot \ln \left(\frac{D_{ca}}{d_{ij}} \right) , \quad (3.2.11)$$

dove d_{ij} è la distanza tra i centri dei due conduttori.

Con riferimento alla geometria riportata in figura 3.1, avremo che le induttanze da calcolare saranno:

1. auto induttanza $l_{f,ii}$ della fase i , ricavabile da (3.2.8);
2. auto induttanza $l_{s,ii}$ dello schermo i , ricavabile da (3.2.8);
3. mutue induttanze $m_{ff,ij}$ tra fasi i e j , ricavabili da (3.2.11);
4. mutue induttanze $m_{ss,ij}$ tra schermi i e j , ricavabili da (3.2.11);
5. mutue induttanze $m_{fs,ij}$ tra fasi i e schermi j , a loro volta distinguibili nei casi:
 - (a) $m_{fs,ij}^{in}$, fase i concentrica allo schermo j , ricavabile da (3.2.10);
 - (b) $m_{fs,ij}^{ex}$, fase i esterna allo schermo j , ricavabile da (3.2.11).

Sostituendo gli opportuni valori nelle formule indicate si ottengono i valori delle impedenze. Considerando la sola parte immaginaria, cioè la reattanza, si può risalire ai valori delle induttanze dividendo per la pulsazione ω . Si arriva infine ai valori di

1. auto induttanze delle fasi,

$$l_{f,11} = l_{f,22} = l_{f,33} = 2.088 \frac{mH}{km} ;$$

2. auto induttanze degli schermi,

$$l_{s,44} = l_{s,55} = l_{s,66} = 1.919 \frac{mH}{km} ;$$

3. mutue induttanze tra fasi,

$$m_{ff,12} = m_{ff,23} = 1.578 \frac{mH}{km} ,$$

$$m_{ff,13} = 1.439 \frac{mH}{km} ;$$

4. mutue induttanze tra schermi,

$$m_{ss,45} = m_{ss,56} = 1.578 \frac{mH}{km} ,$$

$$m_{ss,46} = 1.439 \frac{mH}{km} ;$$

5. mutue induttanze tra fasi e schermi

(a) nel caso di fase concentrica allo schermo,

$$m_{fs,14}^{in} = m_{fs,25}^{in} = m_{fs,36}^{in} = 1.914 \frac{mH}{km} ;$$

(b) nel caso di fase esterna allo schermo,

$$m_{fs,15}^{ex} = m_{fs,26}^{ex} = m_{fs,35}^{ex} = m_{fs,24}^{ex} = 1.578 \frac{mH}{km} ,$$

$$m_{fs,16}^{ex} = m_{fs,34}^{ex} = 1.439 \frac{mH}{km} .$$

3.2.3 Capacità chilometrica

Il calcolo dell'induttanza di esercizio può esser eseguito con la [11]

$$c = \frac{\epsilon_r}{18 \ln \left(\frac{r_{fase}}{r_{schermo}} \right)} . \quad (3.2.12)$$

In questo caso la capacità d'esercizio coincide con la capacità verso terra della fase, perché si è nella stessa situazione del cavo coassiale: ciò significa perfetta simmetria e quindi stessi valori per le tre fasi; inoltre la presenza dello schermo elimina i mutui accoppiamenti capacitivi. Sostituendo i dati di tabella 1 in (3.2.12) si ottiene

$$c = 234.3 \frac{nF}{km} . \quad (3.2.13)$$

3.2.4 Impedenza d'onda, impedenza caratteristica e costante di propagazione

Richiamando la già commentata equazione (2.1.13) dell'impedenza d'onda e sostituendovi i valori geometrici del cavo si ottiene

$$Z_0 = 21.55 \, \Omega . \quad (3.2.14)$$

Sostituendo invece i valori appena calcolati di induttanza e capacità d'esercizio (3.2.7) e (3.2.13) nell'espressione dell'impedenza caratteristica (2.1.2) risulta

$$Z_c = 48.71 \, \Omega , \quad (3.2.15)$$

ovviamente diversa da Z_0 , in perfetta concordanza con quanto detto in 2.1.2. Nel caso in esame di linea in doppia terna l'impedenza caratteristica vista dall'onda che si propaga è pari alla metà di quella della singola linea: essendo infatti le due terne identiche dal punto di vista geometrico e poste a una distanza tale da considerarle disaccoppiate, le impedenze caratteristiche possono esser viste in parallelo e quindi equivalere ad una singola impedenza dimezzata.

La costante di propagazione vale, sostituendo (3.2.7) e (3.2.13) in 2.1.15,

$$\underline{k} = i3.65 \cdot 10^{-3} \frac{1}{km} ; \quad (3.2.16)$$

in particolare è possibile ricavare il tempo di percorrenza τ della linea in esame lunga $d = 30 \, km$, sostituendo $\sqrt{l_{es}c_{es}} = \frac{k}{i\omega}$ e d in (2.2.3),

$$\tau = 3.485 \cdot 10^{-4} \, s . \quad (3.2.17)$$

3.3 Modello della linea in EMTP-RV

Il software EMTP-RV (Eletromagnetic Transient Program) è la versione proprietaria revisionata del precedente software a licenza libera ATP (Alternative Transient Program). Esso è uno dei principali strumenti utilizzati in letteratura per validare modelli elettrici, confrontare diversi casi di studio e simulazioni in fase di progetto. Il suo punto di forza è la capacità di simulare una grande varietà di transitori anche per sistemi complessi, oltre ad altre funzionalità come ad esempio calcoli di load flow. Le sue debolezze risiedono nella non immediata facilità di utilizzo e nella difficoltà a riprodurre con fedeltà il caso che si vuole esaminare; spesso quindi è necessario disporre di procedure alternative che ne validino i risultati e garantiscano la correttezza del modello scelto.

Il software, fin dalla sua genesi negli anni '60, è accompagnato da una vasta guida per l'utilizzo [18]: paradossalmente, essa pecca in alcuni punti di eccessiva tecnicità e in altri di lacune informative. Si reputa pertanto utile la lettura di alcuni documenti più snelli e specifici alla simulazione che si vuole implementare; a tal proposito si segnalano i riassunti presenti in [7] per quel che riguarda EMTP-RV e in [6] per quel che riguarda ATP.

3.3.1 Creazione del modello

Il modello consiste essenzialmente nel ricreare [21]:

- il generatore equivalente di tensione;
- la linea in cavo;
- i reattori di compensazione, nel caso di linea compensata.

Generatore equivalente Un generatore equivalente che rappresenti la rete di alimentazione è rappresentabile come un generatore ideale di tensione sinusoidale in serie a una reattanza (si considera trascurabile la parte resistiva dell'impedenza di corto circuito).

Si è deciso, come si vedrà nelle simulazioni, di dare alla tensione sinusoidale un valore di picco pari a 1, così che i risultati risultino espressi in termini di per unità rispetto al valore di picco reale V_{picco} : sarà in questo modo anche più rapido calcolare percentualmente le sovratensioni di manovra, per un facile confronto con altri dati.

La reattanza di corto circuito può essere finemente modellizzata come una matrice che tenga conto del comportamento alle sequenze. Infatti note le correnti di corto circuito mono e trifase $\underline{I}''_{cc,3f}$ e $\underline{I}''_{cc,1f}$ si ricavano [11]

$$\underline{Z}''_d = \underline{Z}_i = \frac{\underline{E}_{alim}}{\underline{I}''_{cc,3f}}, \quad (3.3.1)$$

$$\underline{Z}_0 = \underline{E}_{alim} \cdot \left(\frac{3}{\underline{I}''_{cc,1f}} - \frac{2}{\underline{I}''_{cc,3f}} \right). \quad (3.3.2)$$

Considerando il cavo alimentato a una tensione concatenata di 400 kV, con un coefficiente di maggiorazione c pari a 1.1 come secondo norma CEI 11-25 [19], e sostituendo i valori di (3.1.1) in (3.3.1) e (3.3.2) si ottiene

$$\underline{Z}''_d = \underline{Z}_i = i24.143 \Omega, \quad (3.3.3)$$

$$\underline{Z}_0 = i20.027 \Omega. \quad (3.3.4)$$

Si costruisca ora la matrice alle sequenze \mathbf{Z}_s come

$$\mathbf{Z}_s = \begin{bmatrix} \underline{Z}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_d & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_i \end{bmatrix}; \quad (3.3.5)$$

per passare alla matrice relativa alle fasi \mathbf{Z}_f occorre applicare

$$\mathbf{Z}_f = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{Z}_s \mathbf{F}, \quad (3.3.6)$$

dove \mathbf{F} è la matrice di Fortesque:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}. \quad (3.3.7)$$

Seguendo questo procedimento si ottiene la matrice nel caso specifico; dividendo gli elementi per la pulsazione ω la si può scrivere espressa in mH :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 22.769 & -1.371 & -1.371 \\ -1.371 & 22.769 & -1.371 \\ -1.371 & -1.371 & -1.371 \end{bmatrix}. \quad (3.3.8)$$

EMTP-RV mette a disposizione nella sua libreria l'elemento *RL coupled multiphase branch*, in cui è possibile inserire direttamente (3.3.8).

Linea in cavo La modellizzazione della linea in cavo è la parte più delicata. In particolare esistono diversi modelli in grado di rappresentarla [20], qui brevemente riportati:

1. modelli a parametri concentrati; distinguibili a loro volta in
 - (a) modello nominale a π , in cui la linea è vista come un doppio bipolo a π ; nonostante la rapidità di calcolo, è poco preciso;
 - (b) modello a π di un cavo uniformemente crossbondato, è un modello dedicato per i cavi in grado di rappresentare una major section come un doppio bipolo a π , considerando anche i mutui accoppiamenti magnetici; ha gli stessi vantaggi e svantaggi del punto precedente;
 - (c) modello a π esatto, in cui la linea è vista come il doppio bipolo equivalente a una cascata di doppi bipoli a π ; questo modello non è però nel dominio del tempo ma della frequenza, quindi è utile solo nel caso in cui si vogliono determinare i valori dei parametri del sistema in un range di frequenze o per calcoli a regime permanente;
2. modelli a parametri distribuiti; distinguibili a loro volta in
 - (a) modello a costanti distribuite (CP), in cui si tiene conto della distribuzione delle grandezze valutate però solo ad una determinata frequenza; è più preciso dei casi precedenti ed ha il pregio di essere veloce; i risultati che fornisce sono al più imprecisi a favore della sicurezza;
 - (b) modello dipendente dalla frequenza (FD), in cui si tiene conto del diverso comportamento dei parametri alle diverse frequenze; è utile quindi per lo studio dei transitori in maniera più precisa rispetto al modello CP; la matrice di trasformazione \mathbf{Q} utilizzata da EMTP-RV per trovare le grandezze modali è ipotizzata a coefficienti costanti e reali, ipotesi non sempre verificata nel caso dei cavi;
 - (c) modello dipendente dalla frequenza con matrice di trasformazione \mathbf{Q} a sua volta dipendente dalla frequenza (FDQ); è il modello più preciso, anche se il più lento tra quelli presentati.

La scelta iniziale era quella di utilizzare per la linea in cavo il modello FDQ, nonostante la sua lentezza: dati i mezzi computazionali a disposizione e il relativo piccolo numero di simulazioni da effettuare, si era infatti privilegiata la precisione. Purtroppo il software EMTP-RV ha presentato un bug nel codice che ha impedito di risolvere il modello per il valore

ipotizzato di resistività del terreno di $100 \frac{\Omega}{m}$, di cui non si è riusciti a stabilire le cause⁷. Si è quindi ripiegato verso il modello CP: come riportato in [21], i risultati ottenuti con questo modello, nei casi di cavo con isolante solido e in cui la componente alla sequenza zero sia scarsamente coinvolta, non si discostano molto da quelli più accurati ricavati dai modelli dipendenti dalla frequenza. Trattandosi dell'energizzazione di un cavo XLPE a vuoto, si è reputato di rientrare in un modello valido. Essendo il modello CP calcolato ad una determinata frequenza, bisogna anche decidere quale valore sia meglio inserire. In [22] viene presentata la soluzione empirica

$$f = \frac{1}{4\tau} , \quad (3.3.9)$$

dove τ è il tempo di percorrenza della linea di un'onda viaggiante. Sostituendo (3.2.17) in (3.3.9) si ottiene

$$f \simeq 730 \text{ Hz} . \quad (3.3.10)$$

Il software EMTP-RV consente di inserire i dati geometrici del cavo e calcola in maniera automatica le matrici dei parametri di linea. Non è però possibile studiare i casi di conduttori composti da trefoli, perché il programma considera la sezione conduttrice come un materiale massiccio. Per calcolare correttamente la resistenza del conduttore di fase occorre quindi impostare una resistività maggiorata equivalente, ottenuta partendo dai calcoli analitici [23]. Se si prende (3.2.2) e noti i raggi interni ed esterni del conduttore da tabella 1 si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} \rho_{eq} &= r_{cc,20^\circ C} \cdot \pi(r_2^2 - r_1^2) = \\ &= 7.2 \cdot \pi(34.75^2 - 5^2)10^{-6} = \\ &= 26.75 \text{ m}\Omega \frac{mm^2}{m} . \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

I collegamenti che attuano le trasposizioni delle fasi e il cross bonding degli schermi sono stati eseguiti manualmente, senza ricorrere ad opzioni particolari di EMTP-RV che, operando in modo non del tutto chiaro, potrebbero falsare il risultato. Come si vede in figura 3.3 si sono ricreate tutte le 36 minor section di 833 m, con messa a terra ad ogni estremo delle major section. Nel caso di linea compensata come in figura 3.4, si sono semplicemente aggiunti i due reattori ad inizio e fine linea.

Reattori di compensazione Nel caso di linea compensata, i reattori sono facilmente modellizzabili come induttanze concentrate in parallelo alla linea. In questo caso di studio vengono trascurate sia la resistenza del reattore che la sua caratteristica di saturazione; non dovendo studiare casi di apertura del reattore, si trascura anche la sua capacità parassita.

⁷Le prove eseguite per valori di $\rho_{terreno}$ molto bassi o molto alti portavano infatti il modello a risoluzione; nè sulla guida, nè su altre pubblicazioni o in rete si sono trovati riferimenti al tipo di bug riportato nel file di output.

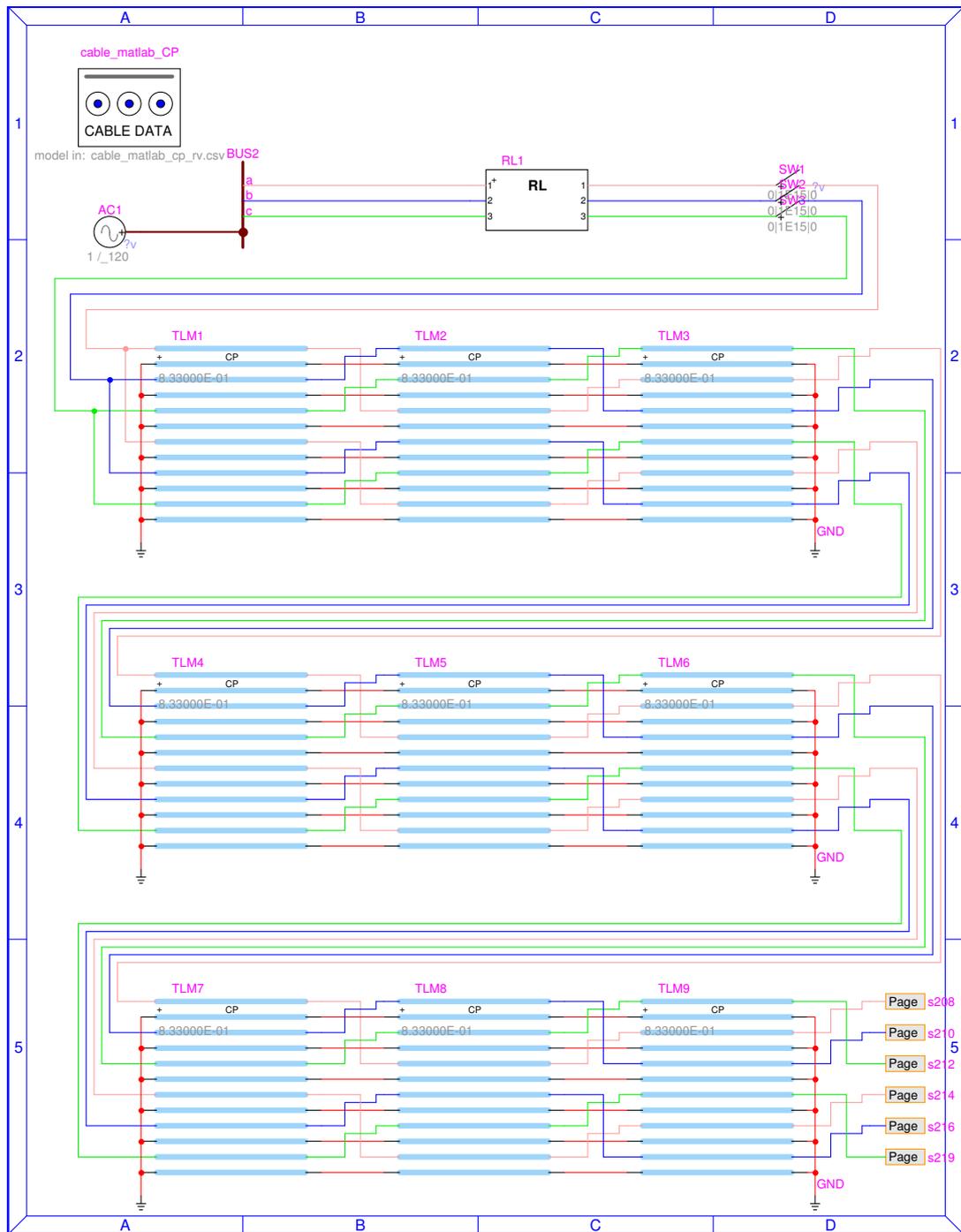


Figura 3.3: Circuito in EMTP della linea in cavo senza compensazione reattiva (solo le prime 3 major section)

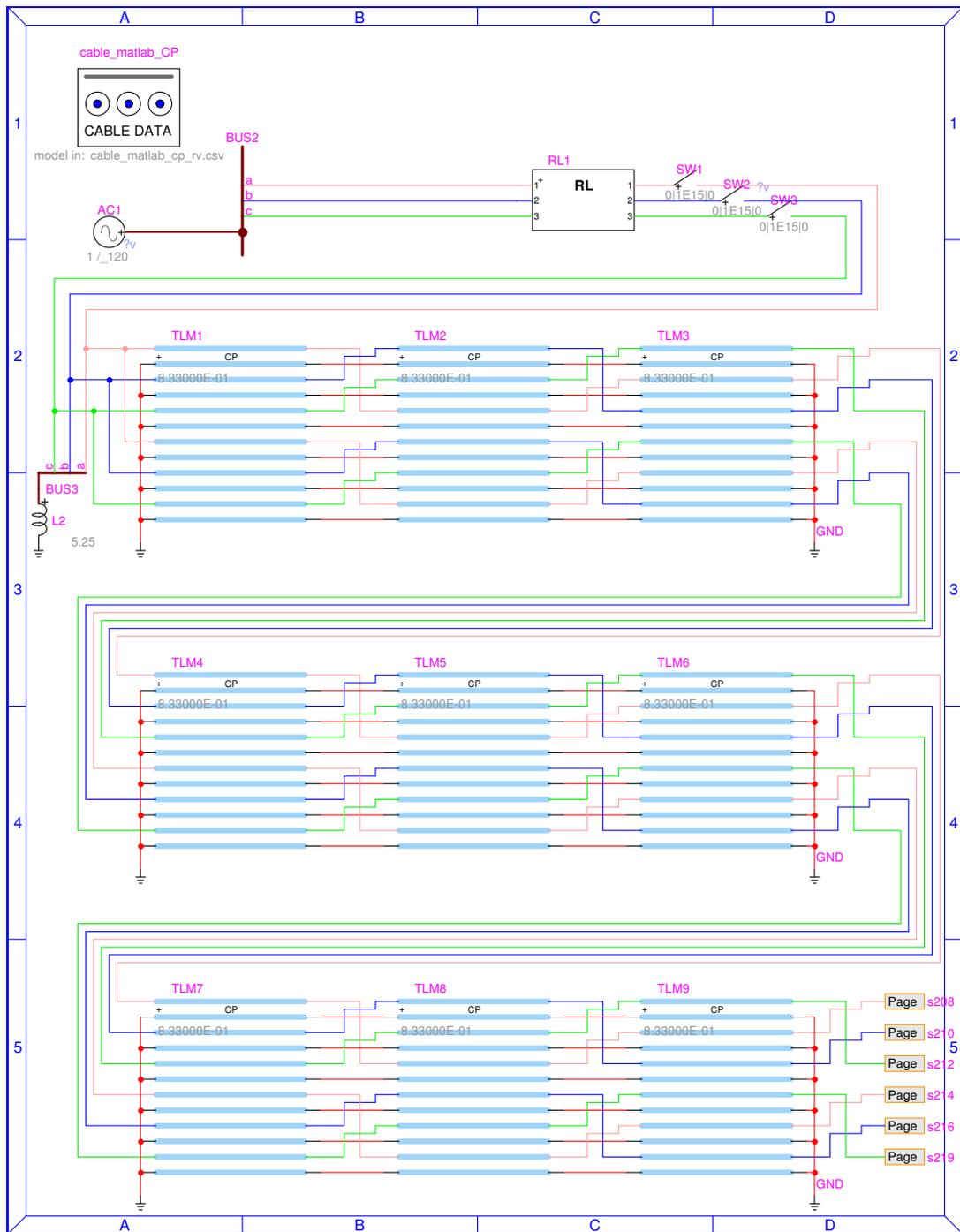


Figura 3.4: Circuito in EMTP della linea in cavo con compensazione reattiva (solo le prime 3 major section)

Tabella 3: Confronto fra parametri calcolati analiticamente e in EMTP

parametro	unità di misura	analitico	EMTP-RV	misure
$r_{cc,90^\circ C}$	$\frac{m\Omega}{km}$	13.53	-	13.3
$l_{f,ii}$	$\frac{mH}{km}$	2.088	2.072	-
$l_{s,ii}$	$\frac{mH}{km}$	1.919	1.919	-
$m_{ff,ij}$ conduttori vicini	$\frac{mH}{km}$	1.578	1.577	-
$m_{ff,ij}$ conduttori lontani	$\frac{mH}{km}$	1.439	1.438	-
$m_{ss,ij}$ conduttori vicini	$\frac{mH}{km}$	1.578	1.577	-
$m_{ss,ij}$ conduttori lontani	$\frac{mH}{km}$	1.439	1.438	-
$m_{cs,ij}$ conduttori concentrici	$\frac{mH}{km}$	1.914	1.921	-
$m_{cs,ij}$ conduttori vicini	$\frac{mH}{km}$	1.578	1.577	-
$m_{cs,ij}$ conduttori lontani	$\frac{mH}{km}$	1.439	1.438	-
c	$\frac{nF}{km}$	234.3	234.6	234
Z_c	Ω	48.71	-	49.68
\underline{k}	$\frac{1}{km}$	$3.65 \cdot 10^{-3}$ $\angle 1.57 \text{ rad}$	-	$3.7 \cdot 10^{-3}$ $\angle 1.53 \text{ rad}$

3.3.2 Verifica del modello

Prima di procedere con le simulazioni, è utile e vantaggioso verificare che il modello coincida effettivamente con quello studiato. In tabella 3.3.2 si sono riportati i valori forniti da EMTP-RV nel file di output, quelli calcolati analiticamente e anche quelli misurati forniti dal costruttore e già visti in tabella 2. La concordanza è notevole, quindi ci si aspetta che le simulazioni diano un risultato valido.

4 Metodo Ghizzetti - Ossicini

Le equazioni (2.2.10) e (2.3.4) non sono antitrasformabili analiticamente: infatti nessuna delle formule di antitrasformazione notevoli riportate nell'appendice B è riconducibile ad esse; anche il calcolo dell'integrale di Laplace (B.2.1) secondo la definizione B.1.1 risulta risolvibile solo per via numerica [24] [25].

Tuttavia, la complessità del problema non esclude che esistano vie di soluzione approssimate ma comunque analitiche. I metodi di analisi basati sul calcolo simbolico e le trasformate di Laplace sono ottimamente descritti in un libro di Aldo Ghizzetti e Alessandro Ossicini [26], che ha fornito le fondamentali teoriche di questo capitolo. Le principali nozioni matematiche, le formule e le ipotesi sotto cui valgono sono riassunte in appendice B.2.2; qui verranno richiamati i soli punti di interesse, integrati con alcune considerazioni di livello fisico. A giusto tributo del lavoro di ricerca ed esposizione, che ha portato in superficie la quasi totalità degli elementi necessari a studiare la propagazione d'onda nei cavi AAT, questo metodo è dedicato agli autori del libro.

4.1 Riassunto del metodo matematico Ghizzetti - Ossicini

La formula implementata nel metodo Ghizzetti - Ossicini è la (B.2.10), che qui si richiama per comodità e riscritta per il caso specifico che si sta analizzando

$$v_a(t) = \sum_{k=1}^{\infty} R(s_k) ,$$

in cui con s_k si indicano tutti i poli (cioè punti di singolarità, vedi appendice A.3) di $e^{st}V_a(s)$ e con $R(s_k)$ i residui (vedi appendice A.4) di $e^{st}V_a(s)$ nei poli s_k . Essa consente di calcolare una grandezza nel dominio del tempo come somma di un'infinità di termini nel dominio di Laplace, senza ricorrere ad integrali.

Il problema dell'antitrasformazione così formulato pone due questioni:

- *calcolo dei poli*, che sarà affrontato nella successiva sezione 4.2; verranno usati metodi di calcolo numerico, data la natura trascendente delle equazioni;
- *calcolo dei residui*, che sarà affrontato nella sezione 4.3; una volta noto il polo sarà possibile calcolarne il residuo corrispondente, ma nel caso delle funzioni studiate si giungerà a delle forme indeterminate, che richiederanno parecchi passaggi matematici per arrivare ad una formulazione finale adeguata.

4.2 Calcolo dei poli

4.2.1 Caso ideale - non compensato

Nel Capitolo 2 si è già vista l'espressione (2.2.11), che definisce $V_a(s)$ come prodotto tra le trasformate di Laplace $E(s)$ e $F(s)$. Si possono quindi suddividere i poli s_k in due categorie:

- *poli della linea*, che si indicheranno come $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots$, cioè quei punti che annullano il denominatore di $F(s)$;

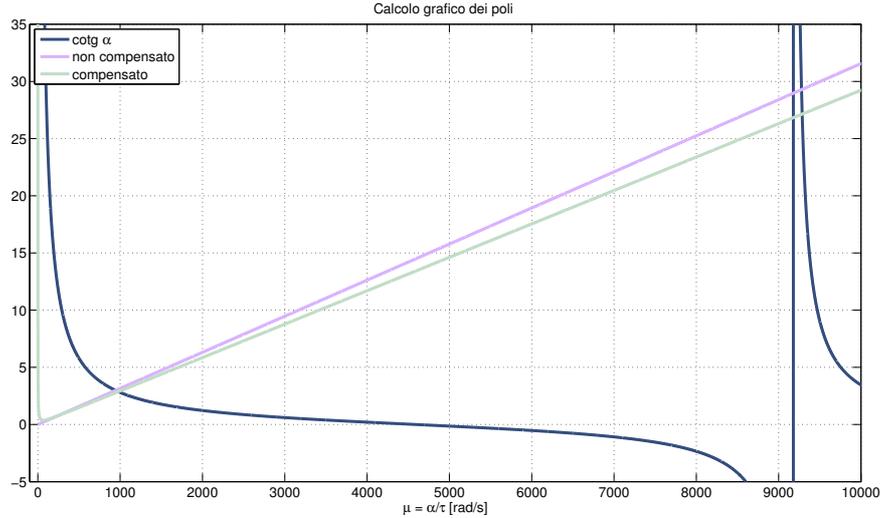


Figura 4.1: Calcolo grafico dei poli

- *poli dell'ingresso*, che si indicheranno come s_{IN} , cioè quei punti che annullano il denominatore di $E(s)$.

Il termine e^{st} può essere trascurato perché è immediato verificare che non ha poli. Lo studio verrà dunque affrontato in maniera distinta per i due casi.

Poli della linea Si riconsideri l'equazione (2.2.12) e si cerchi di calcolarne i poli ricordando che, nel caso di linea ideale, tutte le soluzioni saranno puramente immaginarie del tipo $s_i = \nu\mu_i$ (manca cioè un termine legato allo smorzamento dell'onda):

$$F(\nu\mu) = \frac{1}{\nu\mu T_1 \sinh(\nu\mu\tau) + \cosh(\nu\mu\tau)} ;$$

ricordando inoltre che vale $\cosh \nu\mu\tau = \cos \mu\tau$ e $\sinh \nu\mu\tau = \nu \sin \mu\tau$ si può scrivere

$$F(\nu\mu) = \frac{1}{-\mu T_1 \sin(\mu\tau) + \cosh(\mu\tau)} .$$

Se viene imposto il cambio di variabile $\alpha = \mu\tau$ e definito $k = \frac{T_1}{\tau}$ è possibile arrivare alla forma compatta

$$F(\alpha) = \frac{1}{-k\alpha \sin(\alpha) + \cos(\alpha)} . \quad (4.2.1)$$

L'equazione (4.2.1) è a variabili puramente reali e pertanto più semplice da studiare. I poli si possono calcolare imponendo il denominatore uguale a 0:

$$-k\alpha \sin(\alpha) + \cos(\alpha) = 0 \leftrightarrow k\alpha = \cot \alpha . \quad (4.2.2)$$

- Ad ogni α_i corrisponde una pulsazione $\mu_i = \frac{\alpha_i}{\tau}$: essendo la pulsazione in rad/s e la costante di tempo in s risulta chiaro che α è un numero espresso in radianti.

- L'equazione 4.2.2 è soddisfatta da un'infinità di punti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots$ con $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_i < \dots$, come si vede in 4.1; infatti la retta $k\alpha$ interseca la funzione $\cot \alpha$ in infiniti punti, dato che quest'ultima è periodica di periodo π .
- Notiamo sempre dalla figura 4.1 come i poli all'aumentare di i tendano sempre di più al valore $(i + 1)\pi$, cioè l'intersezione tra la retta $k\alpha$ e $\cot \alpha$ si avvicina sempre di più all'asintoto della cotangente (asintotica ai multipli di π).

Nel caso pratico di implementazione ovviamente non si potranno calcolare tutti gli α_i , dato che sono in numero infinito: si stabilirà un numero di poli m adeguatamente elevato da garantire una sufficiente precisione all'antitrasformazione. L'equazione (4.2.2) è già di per sé un metodo di punto fisso adatto ad essere implementato in un linguaggio di programmazione. È altresì noto che il metodo di punto fisso è lento e non sempre di sicura convergenza: è quindi preferibile usare il metodo di Newton - Raphson, più veloce e affidabile. La sua espressione è

$$x_{j+1} = x_j - \frac{f'(x_j)}{f(x_j)}, \quad (4.2.3)$$

con $j = 0, 1, 2, \dots$. Adattando il metodo al problema specifico, è naturale associare x al polo μ_i e x_j alla j -esima approssimazione di μ_i . $f(x)$ è il denominatore di $F(s)$ già visto in (4.2.1); di conseguenza $f'(x)$ è la derivata prima del denominatore di $F(s)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} [-k\alpha \sin(\alpha) + \cos(\alpha)] &= -k \sin(\alpha) - k\alpha \cos(\alpha) - \sin(\alpha) = \\ &= -k\alpha \cos(\alpha) + (k + 1) \sin(\alpha). \end{aligned}$$

L'iterazione da implementare in forma completa è

$$\mu_{i,j+1} = \frac{1}{\tau} \left[\alpha_{i,j} - \frac{[k\alpha_{i,j} \cos(\alpha_{i,j}) + (k + 1) \sin(\alpha_{i,j})]}{k\alpha_{i,j} \sin(\alpha_{i,j}) + \cos(\alpha_{i,j})} \right], \quad (4.2.4)$$

con $i \in [1, m]$.

Poli dell'ingresso Gli altri poli che interessano sono quelli della trasformata dell'ingresso $E(s)$; come si vedrà in seguito, sarà rilevante solo la trasformata di un segnale cosinusoidale di pulsazione ω che è

$$\mathcal{L}[e(t)] = \mathcal{L}[V \cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \quad (4.2.5)$$

È facile dedurre che il polo è unico e vale

$$s^2 + \omega^2 = 0 \leftrightarrow s_{IN} = i\omega \leftrightarrow \mu_{IN} = \omega. \quad (4.2.6)$$

4.2.2 Caso ideale - compensato

La determinazione dei poli nel caso di linea compensata è più complessa: ci si riferisce quindi all'espressione semplificata (2.3.7). Nonostante questo valgono sempre le osservazioni iniziali fatte al paragrafo 4.2.1, quindi si distinguono i poli di $V_a(s)$ in poli della linea e poli dell'ingresso.

Poli della linea L'equazione (2.3.7) diventa, per una linea ideale e quindi per $s = \nu\mu$,

$$F(\nu\mu) = \frac{1}{\left[A \cos(\mu\tau) + \sin(\mu\tau) \left(\frac{B}{\mu} - \mu C \right) \right]} .$$

Se si opera ancora la sostituzione $\alpha = \mu\tau$ si ottiene, con passaggi analoghi a prima,

$$A \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \left(\frac{\tau B}{\alpha} - \alpha \frac{C}{\tau} \right) = 0 \leftrightarrow \frac{C\alpha^2 - B\tau^2}{\alpha A \tau} = \cot \alpha . \quad (4.2.7)$$

- L'equazione 4.2.7 è ancora soddisfatta da un'infinità di punti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots$ con $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_i < \dots$, come si vede in 4.1. È anche interessante fare un confronto grafico con (4.2.2), da cui si nota come i poli più piccoli siano differenti mentre tendano a coincidere man mano che aumenta il loro valore ($i \rightarrow \infty$).
- Come diretta conseguenza del punto precedente (e sempre visibile dalla figura 4.1), i poli all'aumentare di i tendono sempre di più al valore $(i+1)\pi$, in concordanza con quanto già detto per i poli della linea non compensata.

Si prevede sempre l'utilizzo del metodo di Newton - Raphson per l'implementazione in un linguaggio di programmazione

$$x_{j+1} = x_j - \frac{f'(x_j)}{f(x_j)} ,$$

con $j = 0, 1, 2, \dots$. In analogia con quanto già detto al paragrafo 4.2.1 risultano ovvie le corrispondenze tra x e s_i , $f(x)$ e il denominatore di $F(s)$ e $f'(x)$ e la derivata prima del denominatore di $F(s)$ che ora si calcola:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[A \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \left(\frac{\tau B}{\alpha} - \alpha \frac{C}{\tau} \right) \right] = \\ & = -A \sin(\alpha) - \frac{\tau B}{\alpha^2} \sin(\alpha) + \frac{\tau B}{\alpha} \cos(\mu\tau) - C \sin(\mu\tau) - C\tau\mu \cos(\mu\tau) = \\ & = \cos(\alpha) \left[\frac{\tau B}{\alpha} - \frac{C}{\tau} \alpha \right] - \sin(\alpha) \left[A + \frac{\tau B}{\alpha^2} + \frac{C}{\tau} \right] . \end{aligned}$$

Si scrive infine l'iterazione da implementare in forma completa:

$$\mu_{i,j+1} = \frac{1}{\tau} \left\{ \alpha_{i,j} - \frac{A \cos(\alpha_{i,j}) + \sin(\alpha_{i,j}) \left(\frac{\tau B}{\alpha_{i,j}} - \alpha_{i,j} \frac{C}{\tau} \right)}{\cos(\alpha_{i,j}) \left[\frac{\tau B}{\alpha_{i,j}} - \frac{C}{\tau} \alpha_{i,j} \right] - \sin(\alpha_{i,j}) \left[A + \frac{\tau^3 B}{\alpha_{i,j}^2} + \frac{C}{\tau} \right]} \right\} , \quad (4.2.8)$$

con $i \in [1, m]$.

Poli dell'ingresso I poli dell'ingresso ovviamente non cambiano nel caso di linea compensata, si tratta sempre di un singolo polo identico a quello della relazione (4.2.6):

$$\mu_{IN} = \omega$$

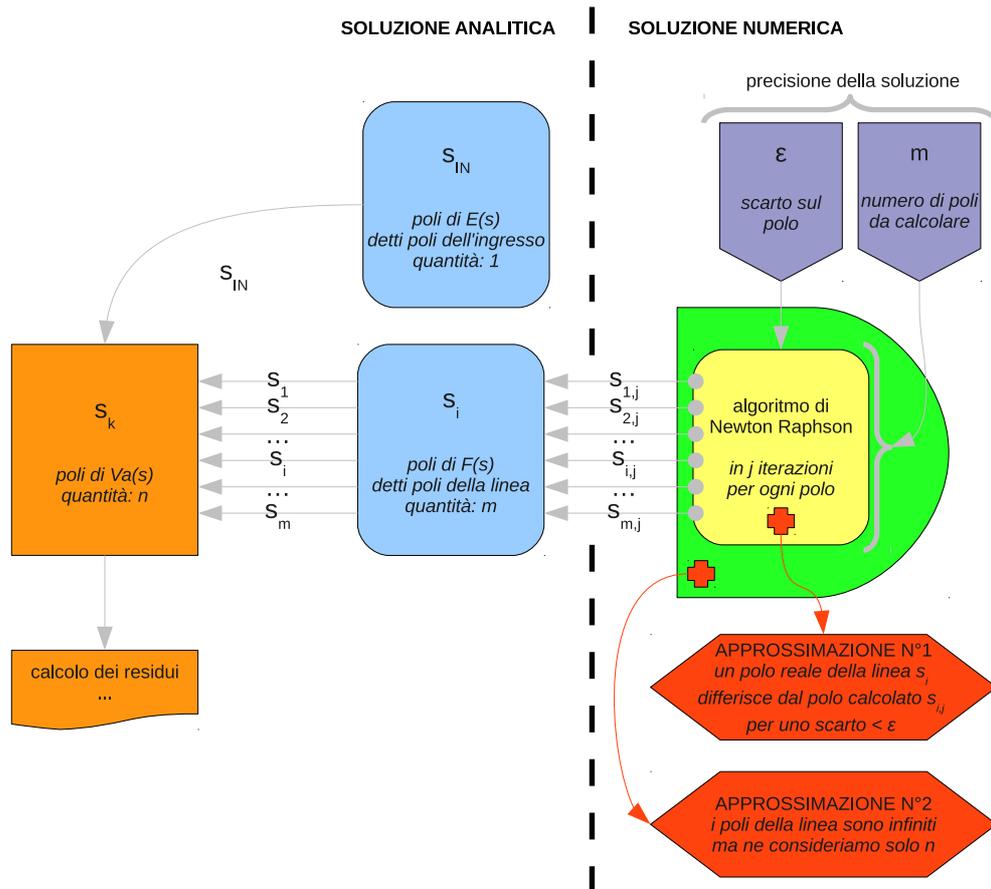


Figura 4.2: Diagramma riassuntivo del metodo per il calcolo dei poli

4.2.3 Riepilogo

A questo punto si hanno tutte le funzioni per implementare il metodo iterativo e calcolare i poli, che schematicamente viene riassunto in figura 4.2.

4.3 Calcolo dei residui

4.3.1 Caso ideale - non compensato

Il metodo descritto in B.2.2 prevede che i residui vadano calcolati nei poli di $e^{st}V_a(s)$, che sono già stati definiti come s_k . A questo fine è necessario quindi scegliere anche l'ingresso $e(t)$ e la sua trasformata $E(s)$. È noto che l'istante peggiore di chiusura degli interruttori è quello in cui la tensione $e(t)$ è massima; ciò corrisponde a un ingresso di tipo cosinusoidale $e(t) = V_{max} \cos(\omega t)$, la cui trasformata è già stata vista nell'equazione (4.2.5). Sostituendo quindi (4.2.5) in (2.2.10) si ottiene $V_a(s)$ nel caso di ingresso cosinusoidale

$$V_a(s) = \frac{s}{[sT_1 \sinh(s\tau) + \cosh(s\tau)](s^2 + \omega^2)} \quad (4.3.1)$$

Si inizia calcolando i residui secondo (A.4.1) nei poli della linea s_i , supponendo che essi

siano noti. Operando ancora una volta la sostituzione $s = \nu\mu$, valida nel caso di linea ideale,

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow s_i} e^{st} V_a(s)(s - s_i) &= \lim_{s \rightarrow s_i} e^{st} \frac{s(s - s_i)}{[sT_1 \sinh(s\tau) + \cosh(s\tau)](s^2 + \omega^2)} = \\ &= \lim_{\mu \rightarrow \mu_i} e^{\nu\mu t} \frac{-\mu(\mu - \mu_i)}{-T_1\mu(\omega^2 - \mu^2) \sin(\mu\tau) + (\omega^2 - \mu^2) \cos(\mu\tau)}.\end{aligned}$$

Escludendo l'esponenziale complesso $e^{\nu\mu t}$, risulta sempre una funzione a variabili puramente reali, cioè $V_a(\nu\mu)(\nu\mu - \nu\mu_i) = V_a(\mu)(\mu - \mu_i)$. Il limite per $\mu \rightarrow \mu_i$ è in una forma del tipo $\frac{0}{0}$ e pertanto indeterminato. Chiamando $D(\mu)$ il denominatore di $V_a(\mu)$ si nota come esso consista nella somma di due termini in seno e coseno:

$$D(\mu) = -T_1\mu(\omega^2 - \mu^2) \sin(\mu\tau) + (\omega^2 - \mu^2) \cos(\mu\tau).$$

Si sviluppi $D(\mu)$ in serie di Taylor secondo la definizione A.1.3. Per snellire la trattazione, va evidenziato che i termini dello sviluppo derivanti da $f(\mu_i)$ una volta sommati tra loro danno un risultato nullo, essendo $\sum_i f(\mu_i) = D(\mu_i) = 0$; questo è logico da dedurre se si pensa che $D(\mu_i)$ è il denominatore calcolato nel polo, che per definizione lo annulla. Si ometteranno pertanto tutti i termini $f(\mu_i)$, dato che non danno reale contributo alla determinazione del limite e verranno indicati con [...].

$$\begin{aligned}\lim_{\mu \rightarrow \mu_i} -T_1\mu(\omega^2 - \mu^2) \sin(\mu\tau) &\simeq \\ \simeq [\dots] - T_1[(\omega^2 - \mu_i^2) \sin(\mu_i\tau) - 2\mu_i^2 \sin(\mu_i\tau) + \tau\mu_i(\omega^2 - \mu_i^2) \cos(\mu_i\tau)](\mu - \mu_i) + o(\mu^2) &= \\ = [\dots] - T_1[\sin(\mu_i\tau)(\omega^2 - 3\mu_i^2) + \tau\mu_i(\omega^2 - \mu_i^2) \cos(\mu_i\tau)](\mu - \mu_i) + o(\mu^2)\end{aligned}\tag{4.3.2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\mu \rightarrow \mu_i} (\omega^2 - \mu^2) \cos(\mu\tau) &\simeq \\ \simeq [\dots] + [-2\mu_i \cos(\mu_i\tau) - \tau(\omega^2 - \mu_i^2) \sin(\mu_i\tau)](\mu - \mu_i) + o(\mu^2)\end{aligned}\tag{4.3.3}$$

Sommando i due limiti (4.3.2) e (4.3.3) si ottiene lo sviluppo di Taylor del denominatore, che opportunamente riarrangiato dà:

$$\begin{aligned}\lim_{\mu \rightarrow \mu_i} D(\mu) &\simeq D(\mu_i) + [-T_1 \sin(\mu_i\tau)(\omega^2 - 3\mu_i^2) - T_1\tau\mu_i(\omega^2 - \mu_i^2) \cos(\mu_i\tau) + \\ &\quad - 2\mu_i \cos(\mu_i\tau) - \tau(\omega^2 - \mu_i^2) \sin(\mu_i\tau)](\mu - \mu_i) + o(\mu^2) \simeq \\ &\simeq D(\mu_i) - \{\sin(\mu_i\tau)[T_1(\omega^2 - 3\mu_i^2) + \tau(\omega^2 - \mu_i^2)] + \\ &\quad + \cos(\mu_i\tau)[T_1\tau\mu_i(\omega^2 - \mu_i^2) - 2\mu_i]\}(\mu - \mu_i) + o(\mu^2) \\ &\simeq D(\mu_i) - \{\sin(\mu_i\tau)[\omega^2(T_1 + \tau) - \mu_i^2(3T_1 + \tau)] + \\ &\quad + \mu_i \cos(\mu_i\tau)[T_1\tau(\omega^2 - \mu_i^2) - 2]\}(\mu - \mu_i) + o(\mu^2)\end{aligned}$$

A questo punto, avendo un termine noto nullo $D(\mu_i)$ e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, si vede come si possa semplificare $(\mu - \mu_i)$ al denominatore con quello al numeratore. Semplificando infine i due segni negativi a numeratore e denominatore il limite risulta esistere

e pertanto il residuo $R(\nu\mu_i) = \lim_{\mu \rightarrow \mu_i} e^{\nu t} V_a(\nu\mu) \nu(\mu - \mu_i)$ ha valore:

$$R(\nu\mu_i) = \frac{e^{\nu\mu_i t} \mu_i}{\sin(\mu_i \tau) [\omega^2 (T_1 + \tau) - \mu_i^2 (3T_1 + \tau)] + \mu_i \cos(\mu_i \tau) [T_1 \tau (\omega^2 - \mu_i^2) - 2]} \quad (4.3.4)$$

Si calcolino ora i residui dei poli dell'ingresso, che in questo caso è solo uno dato che l'ingresso ha un unico polo in $\mu_{IN} = \omega$. Operando la consueta sostituzione $s = \nu\mu$ e ricordando la scomposizione $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$, si ottiene una forma determinata

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \nu\omega} e^{st} V_a(s) (s - \nu\omega) &= \lim_{\mu \rightarrow \omega} e^{\nu\mu t} \frac{-\mu(\mu - \omega)}{[-T_1 \mu \sin(\mu\tau) + \cos(\mu\tau)](\omega^2 - \mu^2)} = \\ &= \lim_{\mu \rightarrow \omega} e^{\nu\mu t} \frac{\mu(\mu - \omega)}{[-T_1 \mu \sin(\mu\tau) + \cos(\mu\tau)](\mu - \omega)(\mu + \omega)} = \\ &= \frac{e^{\nu\omega t}}{2[\cos(\omega\tau) - T_1 \omega \sin(\omega\tau)]} \end{aligned}$$

e quindi

$$R(\nu\omega) = \frac{e^{\nu\omega t}}{2[\cos(\omega\tau) - T_1 \omega \sin(\omega\tau)]} \quad (4.3.5)$$

Ricordando la formula (B.2.10) vista in B.2 si può infine scrivere:

$$\begin{aligned} v_a(t) &= \sum_{i=1}^m \frac{e^{\pm \nu\mu_i t} \mu_i}{\sin(\mu_i \tau) [\omega^2 (T_1 + \tau) - \mu_i^2 (3T_1 + \tau)] + \mu_i \cos(\mu_i \tau) [T_1 \tau (\omega^2 - \mu_i^2) - 2]} + \\ &+ \frac{e^{\pm \nu\omega t}}{2[\cos(\omega\tau) - T_1 \omega \sin(\omega\tau)]} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

A questo punto della trattazione è opportuno soffermarsi su delle osservazioni importanti, sia dal punto di vista matematico che fisico.

- Nella formula (4.3.6) si è introdotto il segno \pm ad ogni polo: questo perché i poli immaginari sono sempre a coppia con il loro complesso coniugato. A livello pratico questo significa che nell'eseguire la sommatoria si dovranno considerare per ogni k due termini con segno della fase opposto; anche a livello grafico si intuisce come una somma di questo genere elimini le parti immaginarie e lasci solo la componente reale, in accordo con quel che ci si aspetta dall'antitrasformazione di un segnale dal dominio di Laplace al dominio del tempo (dominio puramente reale).
- Sempre nella formula (4.3.6) si distinguono due termini: uno legato ai *poli della linea* e uno legato al *polo dell'ingresso*. Il primo è una sommatoria di termini oscillatori a diverse pulsazioni proprie della linea a costanti distribuite, il secondo è un unico termine alla frequenza di rete. È possibile quindi dedurre che quest'ultimo rappresenta il segnale *a regime* mentre l'altro rappresenta la *componente transitoria*; come ci si aspetta, il segnale reale è dato dalla somma della componente permanente e di quella transitoria.
- I residui legati ai poli della linea non sono i residui di $F(s)$ ma di $e^{st} V_a(s)$: questo dovrebbe risultare esplicito dalla trattazione eseguita, ma è giusto puntualizzarlo. In altre parole, il valore di $R(\nu\mu_i)$ che determina l'ampiezza delle oscillazioni transitorie non

è ricavabile da $F(s)$, ma dipende fortemente dal segnale in ingresso, come tra l'altro è giusto aspettarsi.

4.3.2 Caso ideale - compensato

Come già visto al paragrafo 4.3.1, per calcolare i residui di $e^{st}V_a(s)$ è necessario definire anche l'ingresso $e(t)$ e la sua trasformata $E(s)$. Anche nel caso compensato valgono le considerazioni svolte in precedenza: l'istante peggiore di chiusura dell'interruttore è quello in cui la tensione del generatore è massima, il che equivale a considerare un ingresso di tipo cosinusoidale $e(t) = V_{max}\cos(\omega t)$, la cui trasformata è già stata vista nell'equazione (4.2.5).

Sostituendo quindi (4.2.5) in (2.3.4) si ottiene $V_a(s)$ nel caso di ingresso cosinusoidale

$$V_a(s) = \frac{1}{\left[\cosh(s\tau) \left(2 \frac{L_{cc}}{L_{sr}} + 1 \right) + \sinh(s\tau) \left(\frac{Z_c^2 L_{cc} + s^2 L_{sr}^2 L_{cc} + Z_c^2 L_{sr}}{s Z_c L_{sr}^2} \right) \right]} (s^2 + \omega^2) . \quad (4.3.7)$$

Si vogliono ancora una volta calcolare i residui di $e^{st}V_a(s)$ secondo (A.4.1) nei poli della linea s_i . Operando l'ormai consueta sostituzione $s = \nu\mu$ si ottiene

$$\lim_{s \rightarrow s_i} e^{st} V_a(s)(s - s_i) = \lim_{\mu \rightarrow \mu_i} \frac{-e^{\nu\mu t} \mu (\mu - \mu_i)}{\left[\cos(\mu\tau) \left(2 \frac{L_{cc}}{L_{sr}} + 1 \right) + \sin(\mu\tau) \left(\frac{Z_c^2 (L_{cc} L_{sr}) - \mu^2 L_{sr}^2 L_{cc}}{\mu Z_c L_{sr}^2} \right) \right]} (\omega^2 - \mu^2) .$$

Si vede come, escludendo l'esponenziale complesso $e^{\nu\mu t}$, si ottenga sempre una funzione a variabili puramente reali, cioè $V_a(\nu\mu)(\nu\mu - \nu\mu_i) = V_a(\mu)(\mu - \mu_i)$. Il limite per $\mu \rightarrow \mu_i$ è in una forma del tipo $\frac{0}{0}$ e pertanto risulta indeterminato. Chiamando ancora $D(\mu)$ il denominatore di $V_a(\mu)$ e considerando l'espressione più snella (2.3.7) di $F(s)$, il denominatore $D(\mu)$ diventa chiaramente la somma di tre termini,

$$D(\mu) = A(\omega^2 - \mu^2) \cos(\mu\tau) + \frac{B}{\mu} (\omega^2 - \mu^2) \sin(\mu\tau) - \mu C (\omega^2 - \mu^2) \sin(\mu\tau) . \quad (4.3.8)$$

Per calcolare il limite è necessario sviluppare in serie di Taylor questi tre termini sempre secondo la definizione A.1.3. Anche qui, in analogia con quanto già spiegato al paragrafo 4.3.1, si indica con $[\dots]$ quel termine dello sviluppo derivante da $f(\mu_i)$ che, una volta sommato agli altri, darebbe $\sum_i f(\mu_i) = D(\mu_i) = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \mu_i} A(\omega^2 - \mu^2) \cos(\mu\tau) &= \\ = [\dots] + [-2\mu_i \cos(\mu_i\tau) - \tau(\omega^2 - \mu_i^2) \sin(\mu_i\tau)] (\mu - \mu_i) + o(\mu^2) , \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \mu_i} (\omega^2 - \mu^2) \frac{B}{\mu} \sin(\mu\tau) &= \\ = [\dots] + B \left[-2 \sin(\mu_i\tau) - \frac{\omega^2 - \mu_i^2}{\mu_i^2} \sin(\mu_i\tau) + \tau \frac{\omega^2 - \mu_i^2}{\mu_i} \cos(\mu_i\tau) \right] (\mu - \mu_i) + o(\mu^2) = \quad (4.3.10) \\ = [\dots] + B \left[\tau \frac{\omega^2 - \mu_i^2}{\mu_i} \cos(\mu_i\tau) - \sin(\mu_i\tau) \left(2 + \frac{\omega^2 - \mu_i^2}{\mu_i^2} \right) \right] (\mu - \mu_i) + o(\mu^2) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\mu \rightarrow \mu_i} -C\mu(\omega^2 - \mu^2) \sin(\mu\tau) = \\
& = [\dots] - C \left[-2\mu_i^2 \sin(\mu_i\tau) + \sin(\mu_i\tau)(\omega^2 - \mu_i^2) + \tau\mu_i(\omega^2 - \mu_i^2) \cos(\mu_i\tau) \right] (\mu - \mu_i) + o(\mu^2) = \\
& = [\dots] - C \left[\tau\mu_i(\omega^2 - \mu_i^2) \cos(\mu_i\tau) - \sin(\mu_i\tau)(3\mu_i^2 - \omega^2) \right] (\mu - \mu_i) + o(\mu^2) .
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Sommando i tre limiti (4.3.9), (4.3.10) e (4.3.11) si ottiene lo sviluppo di Taylor del denominatore, che opportunamente riarrangiato dà

$$\begin{aligned}
& \lim_{\mu \rightarrow \mu_i} D(\mu_i) \simeq \\
& \simeq D(\mu_i) + \cos(\mu_i\tau) \left[-2A\mu_i + B\tau \frac{\omega^2 - \mu_i^2}{\mu_i} - C\tau(\omega^2 - \mu_i^2) \right] + \\
& \quad - \sin(\mu_i\tau) \left[A\tau(\omega^2 - \mu_i^2) + B \left(2 + \frac{\omega^2 - \mu_i^2}{\mu_i^2} \right) - C(3\mu_i^2 - \omega^2) \right] (\mu - \mu_i) + o(\mu^2) \simeq \\
& \simeq D(\mu_i) + \cos(\mu_i\tau) \left[-2A\mu_i + \tau(\omega^2 - \mu_i^2) \left(\frac{B}{\mu_i} - C\mu_i \right) \right] + \\
& \quad - \sin(\mu_i\tau) \left[(\omega^2 - \mu_i^2) \left(A\tau + \frac{B}{\mu_i^2} \right) + 2B - C(3\mu_i^2 - \omega^2) \right] (\mu - \mu_i) + o(\mu^2) .
\end{aligned}$$

A questo punto, avendo un termine noto nullo $D(\mu_i)$ e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, si vede come si possa semplificare $(\mu - \mu_i)$ al denominatore con quello al numeratore. Il limite risulta esistere e pertanto il residuo $R(\nu\mu_i) = \lim_{\mu \rightarrow \mu_i} e^{st} V_a(\nu\mu) \nu(\mu - \mu_i)$ ha valore

$$R(\nu\mu_i) = \frac{e^{\nu\mu_i t} \mu_i}{\cos(\mu_i\tau) \mathcal{K}_{cos} - \sin(\mu_i\tau) \mathcal{K}_{sin}} , \tag{4.3.12}$$

avendo definito per semplicità i due valori dipendenti da μ_i ,

$$\mathcal{K}_{cos} = \left[-2A\mu_i + \tau(\omega^2 - \mu_i^2) \left(\frac{B}{\mu_i} - C\mu_i \right) \right] , \tag{4.3.13}$$

$$\mathcal{K}_{sin} = \left[(\omega^2 - \mu_i^2) \left(A\tau + \frac{B}{\mu_i^2} \right) + 2B - C(3\mu_i^2 - \omega^2) \right] . \tag{4.3.14}$$

Si calcolino ora i residui dei poli dell'ingresso, che in questo caso è solo uno dato che l'ingresso ha un unico polo in $\mu_{IN} = \omega$. Operando la consueta sostituzione $s = \nu\mu$ e ricordando la scomposizione $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$, si ottiene una forma determinata,

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow i\omega} e^{st} V_a(s)(s - i\omega) &= \lim_{\mu \rightarrow \omega} e^{\mu t} \frac{\mu(\mu - \omega)}{\left[A \cos(\mu\tau) - \sin(\mu\tau) \left(\mu C - \frac{B}{\mu} \right) \right] (\omega^2 - \mu^2)} = \\
&= \lim_{\mu \rightarrow \omega} e^{\mu t} \frac{\mu(\mu - \omega)}{\left[A \cos(\mu\tau) - \sin(\mu\tau) \left(\mu C - \frac{B}{\mu} \right) \right] (\mu - \omega)(\mu + \omega)} = \\
&= \frac{e^{i\omega t}}{2 \left[A \cos(\omega\tau) - \sin(\omega\tau) \left(\omega C - \frac{B}{\omega} \right) \right]} ,
\end{aligned}$$

e quindi

$$R(\omega) = \frac{e^{i\omega t}}{2 \left[A \cos(\omega\tau) - \sin(\omega\tau) \left(\omega C - \frac{B}{\omega} \right) \right]} . \quad (4.3.15)$$

Ricordando la formula (B.2.10) vista in B.2 si può infine scrivere:

$$v_a(t) = \sum_{i=1}^m \frac{e^{\pm i\mu_i t} \mu_i}{\cos(\mu_i\tau)\mathcal{K}_{cos} - \sin(\mu_i\tau)\mathcal{K}_{sin}} + \frac{e^{\pm i\omega t}}{2 \left[A \cos(\omega\tau) - \sin(\omega\tau) \left(\omega C - \frac{B}{\omega} \right) \right]} \quad (4.3.16)$$

5 Metodo con approssimazione di Taylor

L'antitrasformazione di (2.2.10) e (2.3.4) è resa difficoltosa, come si è visto, dalla complessità del denominatore, che non trova corrispondenze con le antitrasformate notevoli dell'appendice B. È quindi lecito chiedersi se non esista un modo per approssimare il denominatore e semplificare l'antitrasformazione.

In questo capitolo si vedrà come lo sviluppo in serie di Taylor, spesso usato in ambito ingegneristico, consenta tutto questo. In particolare renderà il denominatore di (2.2.10) e (2.3.4) di tipo razionale algebrico e quindi antitrasformabile con i metodi classici. Per contro, tutto il metodo sarà riferito ad un'espressione approssimata, quindi ci si dovrebbe aspettare una precisione inferiore rispetto al metodo Ghizzetti - Ossicini.

La basi matematiche di questo capitolo sono fornite in B.2.1; esse sono consultabili su numerosi testi: qui in particolare ci si riferisce alla trattazione presente in [9] e [26].

5.1 Riassunto del metodo matematico con approssimazione di Taylor

Si riportano in seguito per comodità, riscritte per il caso specifico che si sta analizzando, le espressioni del paragrafo B.2.1. La formula implementata nel metodo con approssimazione di Taylor è la (B.2.5) leggermente modificata⁸

$$v_a(t) = \sum_{k=1}^n R(s_k) ,$$

in cui con s_k indichiamo tutti i poli (cioè punti di singolarità, vedi A.3) di $e^{st}V_a(s)$ e con $R(s_k)$ i residui (vedi A.4) di $e^{st}V_a(s)$ nei poli s_k . Si vede come il problema così impostato risulti del tutto analogo a quello visto al capitolo 4: la differenza sostanziale sta nell'espressione di $V_a(s)$ che verrà approssimata, sotto opportune ipotesi, mediante lo sviluppo in serie di Taylor A.1.3. In particolare si applicherà la (A.1.4) al denominatore $D(s)$ di $V_a(s)$:

$$D(s) = \sum_{i=0}^n \frac{D^i(s_0)}{i!} (s - s_0)^i + o(n) \quad s \rightarrow s_0 .$$

La natura di $D(s)$, dopo quest'approssimazione, non sarà più trascendente ma di tipo razionale algebrico⁹. Questo risultato consente anche di utilizzare la (B.2.7),

$$R(s_k) = e^{s_k t} \frac{N(s_k)}{D'(s_k)} ,$$

in cui $N(s_k)$ è il numeratore di $V_a(s)$ e $D'(s)$ la derivata prima del denominatore, entrambi calcolati nel polo s_k .

Le questioni da affrontare saranno sempre due:

⁸In particolare, per non creare confusione con la notazione usata al paragrafo B.2.1, si fa presente che è identico considerare la sommatoria $\sum_{k=1}^n R(s_k)$, con $R(s_k)$ residui di $e^{st}V_a(s)$, e la sommatoria $\sum_{k=1}^n e^{s_k t} R(s_k)$, con $R(s_k)$ residui solo di $V_a(s)$: qui si è scelta la prima espressione per meglio evidenziare l'analogia tra i tre metodi.

⁹Lo sviluppo in serie di Taylor è infatti una sommatoria su i di monomi di grado i crescente fino ad n , moltiplicati per un coefficiente che è la derivata i -esima: il risultato è un polinomio razionale di grado n del tipo $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

- *calcolo dei poli*, che sarà affrontato nella successiva sezione 5.2; risulterà più snello e veloce di quanto visto in 4.2 proprio grazie alla natura razionale algebrica di $D(s)$;
- *calcolo dei residui*, che sarà affrontato nella sezione 5.3; si nota subito come la formula (B.2.7) sia molto semplice poiché permette di arrivare in un solo passaggio ad un'espressione del residuo, a differenza dei lunghi e complicati passaggi necessari per le espressioni (4.3.4) e (4.3.12) viste ai paragrafi 4.3.1 e 4.3.2.

Sin dall'inizio si imposterà l'analisi nel caso generale di sviluppo di ordine n , facilmente implementabile in un linguaggio di programmazione, lasciando così la possibilità di scegliere la precisione della soluzione e non vincolandosi a uno sviluppo determinato, che peraltro risulterebbe anche inutilmente complesso se reso totalmente esplicito.

5.2 Calcolo dei poli

5.2.1 Caso ideale - non compensato

Come già fatto notare, il termine e^{st} può non essere analizzato nel calcolo dei poli, poiché è immediato verificare che ne è privo. Lo studio dunque verrà affrontato in maniera distinta solo per i già noti casi di *poli della linea* e *poli dell'ingresso*.

Polì della linea Si inizia calcolando gli sviluppi asintotici di seno e coseno iperbolico. Si ricorda che le derivate prime valgono

$$\left. \frac{d}{ds} [\cosh(s)] \right|_{s=0} = \sinh(s)|_{s=0} = 0 , \quad (5.2.1)$$

$$\left. \frac{d}{ds} [\sinh(s)] \right|_{s=0} = \cosh(s)|_{s=0} = 1 , \quad (5.2.2)$$

Si prenda ora ad esempio la derivata seconda del coseno iperbolico

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} [\cosh(s)] \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} [\sinh(s)] \right|_{s=0} = 1 ,$$

che essendo funzione di (5.2.2) è diversa da 0. Discorso analogo è possibile fare per la derivata seconda del seno iperbolico

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} [\sinh(s)] \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} [\cosh(s)] \right|_{s=0} = 0 ,$$

che essendo funzione di (5.2.1) è uguale a 0. Il procedimento è ripetibile in modo ricorsivo e si può facilmente estendere al caso generico di derivate n - *esime*, visto che è sempre possibile esprimere la derivata $(n + 1)$ - *esima* di una come funzione dell' n - *esima* dell'altra in una forma del tipo:

$$f^{n+1}(s)|_{s=0} = g^n(s)|_{s=0} , \quad (5.2.3)$$

$$g^{n+1}(s)|_{s=0} = f^n(s)|_{s=0} , \quad \text{con } f'(0) = 1 , g'(0) = 0 . \quad (5.2.4)$$

Esiste quindi una successione logica delle derivate:

- il *coseno iperbolico* ha solo derivate di ordine pari, perché riconducibili a funzioni di (5.2.2) che è diverso da 0;
- il *seno iperbolico* ha solo derivate di ordine dispari, perché riconducibili a funzioni di (5.2.1) che è diverso da 0.

In questo caso particolare si deve tener conto che l'argomento è la costante τ moltiplicata per la variabile s , perciò le (5.2.3) e (5.2.4) diventano più propriamente:

$$f^{n+1}(s\tau)\Big|_{s=0} = g^n(s\tau)\Big|_{s=0} \tau, \quad (5.2.5)$$

$$g^{n+1}(s\tau)\Big|_{s=0} = f^n(s\tau)\Big|_{s=0} \tau, \quad \text{con } f'(0) = \tau, \quad g'(0) = 0. \quad (5.2.6)$$

Quanto detto risulterà più chiaro se si fa riferimento al seguente piccolo esempio di ordine 4:

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{ds^4} [\cosh(s\tau)]\Big|_{s=0} &= \frac{d^3}{ds^3} [\sinh(s\tau)]\Big|_{s=0} \cdot \tau = \\ &= \frac{d^2}{ds^2} [\cosh(s\tau)]\Big|_{s=0} \cdot \tau^2 = \\ &= \frac{d}{ds} [\cosh(s\tau)]\Big|_{s=0} \cdot \tau^3 = \\ &= \tau^4. \end{aligned}$$

Usando le formule (5.2.5) e (5.2.6) in (A.1.4) si ottengono gli sviluppi asintotici di ordine n di seno e coseno iperbolico con argomento $s\tau$ nel punto $s = 0$:

$$\begin{aligned} \cosh(s\tau) &= 1 + (0) \cdot (s) + (\tau^2) \cdot \frac{(s^2)}{2!} + (0) \cdot \frac{(s^3)}{3!} + (\tau^4) \cdot \frac{(s^4)}{4!} + \dots + o(n) = \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{(\tau^{2i})(s^{2i})}{2i!} + o(n), \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

$$\begin{aligned} \sinh(s\tau) &= 0 + (\tau) \cdot (s) + (0) \cdot \frac{(s^2)}{2!} + (\tau^3) \cdot \frac{(s^3)}{3!} + (0) \cdot \frac{(s^4)}{4!} + \dots + o(n) = \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{(\tau^{2i+1})(s^{2i+1})}{(2i+1)!} + o(n). \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Si può adesso procedere alla sostituzione di (5.2.7) e (5.2.8) nel denominatore $D(s)$ di

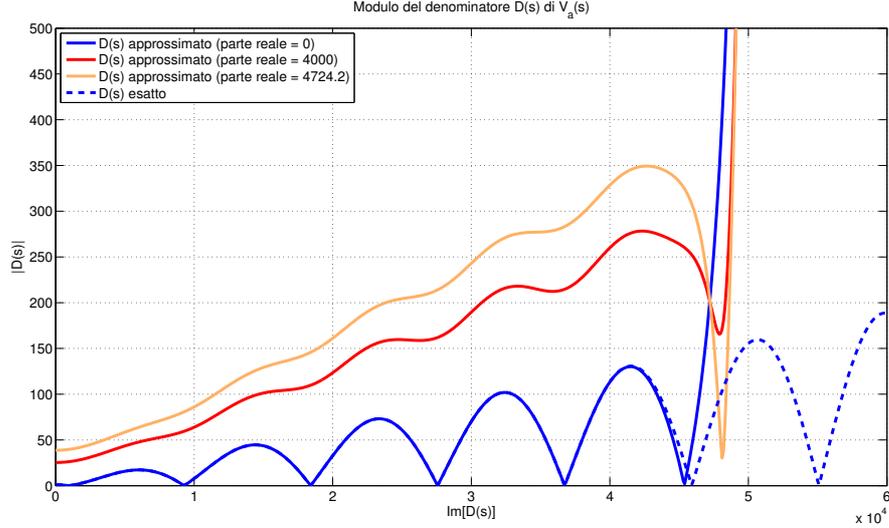


Figura 5.1: Modulo del denominatore $D(s)$ di $V_a(s)$ in funzione della parte immaginaria di s e parametrizzato per alcuni valori della parte reale di s , nel caso esatto ed approssimato

(2.2.10),

$$\begin{aligned}
& sT_1 \sinh(s\tau) + \cosh(s\tau) \simeq \\
& \simeq sT_1 \cdot \sum_{i=0}^n \frac{(\tau^{2i+1})(s^{2i+1})}{(2i+1)!} + \sum_{i=0}^n \frac{(\tau^{2i})(s^{2i})}{2i!} + o(n) \\
& = sT_1 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{(\tau^{2i-1})(s^{2i-1})}{(2i-1)!} + \sum_{i=0}^n \frac{(\tau^{2i})(s^{2i})}{2i!} + o(n) \\
& = \sum_{i=1}^n \frac{T_1(\tau^{2i-1})(s^{2i})}{(2i-1)!} + 1 + \sum_{i=1}^n \frac{(\tau^{2i})(s^{2i})}{2i!} + o(n) \\
& = 1 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{T_1(\tau^{2i-1})}{(2i-1)!} + \frac{(\tau^{2i})}{2i!} \right] (s^{2i}) + o(n).
\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Per ottenere una forma compatta si è imposto che il termine di ordine maggiore sia quello del coseno iperbolico e si è portato fuori il termine $\frac{(\tau^{2i})(s^{2i})}{2i!} \Big|_{i=0} = 1$ dalla sommatoria: così è possibile portare tutto dentro un unico simbolo di sommatoria e raccogliere un fattore s^{2i} . La (5.2.9) è un polinomio algebrico di ordine n : se eguagliata a 0, diventa un'equazione algebrica e le sue radici sono ricavabili da un qualsiasi calcolatore automatico senza troppe difficoltà. Espressioni analitiche si potrebbero ricavare per n di ordine 2, 3 o 4, ma non si otterrebbero comunque risultati precisi nè significativi a livello teorico.

A questo punto risulta utile un confronto con l'espressione esatta del denominatore $D(s)$ per vedere che approssimazioni si stanno introducendo. Si consideri uno sviluppo di ordine 40; con riferimento alla figura 5.1, si può notare come l'approssimazione di Taylor (curva blu continua) sia adeguatamente aderente alla formulazione esatta (curva blu tratteggiata) fino ad ordini elevati della parte immaginaria; da lì in poi essa diverge e il modulo tende a infinito. I punti in cui il modulo di $D(s)$ si annulla identificano i poli di $D(s)$: la precisione è sufficiente, soprattutto se si considera che la parte immaginaria fisicamente rappresenta una pulsazione e

che il contributo di ampiezza dei termini di (B.2.5) decresce molto al suo aumentare, quindi l'errore che si commette è attenuato.

I punti di passaggio per lo 0 sono in questo caso 6, che corrispondono a 12 radici (dato che i poli sono complessi e coniugati); è però noto che un polinomio di ordine n dà luogo ad n soluzioni, quindi è lecito domandarsi dove siano le altre 28. La risposta arriva se si parametrizza il denominatore con la parte reale di s : in figura 5.1 sono riportate in rosso e arancione le curve che tendono al primo polo con parte reale diversa da 0. Nella realtà si sa che, data l'ipotesi di linea ideale, le radici devono essere tutte puramente immaginarie; di conseguenza tutte quelle che non soddisfano a quest'ipotesi devono essere trascurate, poiché frutto solo dell'approssimazione e prive di un riscontro fisico: esse non sarebbero infatti presenti se si usasse $D(s)$ esatto. Sarà compito del programma di calcolo automatico, a cui verrà fornito il polinomio approssimato di ordine n , calcolarne le radici e tenere solo i risultati accettabili.

Poli dell'ingresso Per i poli dell'ingresso nulla cambia, visto che ci si pone nel caso peggiore di ingresso cosinusoidale che presenta un unico polo in

$$\mu_{IN} = \omega .$$

5.2.2 Caso ideale - compensato

Poli della linea Riprendendo le considerazioni appena viste al paragrafo 5.2.1, si può brevemente passare già alla sostituzione di (5.2.7) e (5.2.8) nel denominatore $D(s)$ di (2.3.4):

$$\begin{aligned} & A \cosh(s\tau) + \sinh(s\tau) \left(\frac{B}{s} + sC \right) \simeq \\ & \simeq A \cdot \sum_{i=0}^n \frac{(\tau^{2i})(s^{2i})}{2i!} + \left(\frac{B}{s} + sC \right) \cdot \sum_{i=0}^n \frac{(\tau^{2i+1})(s^{2i+1})}{(2i+1)!} + o(n) \\ & = A \cdot \sum_{i=0}^n \frac{(\tau^{2i})(s^{2i})}{2i!} + B \cdot \sum_{i=0}^n \frac{(\tau^{2i+1})(s^{2i})}{(2i+1)!} + sC \cdot \sum_{i=1}^n \frac{(\tau^{2i-1})(s^{2i-1})}{(2i-1)!} + o(n) \quad (5.2.10) \\ & = s^{2i} \cdot \sum_{i=0}^n \left[A \frac{(\tau^{2i})}{2i!} + B \frac{(\tau^{2i+1})}{(2i+1)!} \right] + \sum_{i=1}^n C \frac{(\tau^{2i-1})(s^{2i})}{(2i-1)!} + o(n) \\ & = (A + B\tau) + s^{2i} \cdot \left[\sum_{i=1}^n A \frac{(\tau^{2i})}{2i!} + B \frac{(\tau^{2i+1})}{(2i+1)!} + C \frac{(\tau^{2i-1})(s^{2i})}{(2i-1)!} \right] + o(n) . \end{aligned}$$

Una volta costruito il polinomio approssimato sarà compito del calcolatore trovarne le radici; i criteri di accettabilità delle stesse e le approssimazioni che questo introduce sono le stesse del paragrafo 5.2.1.

Poli dell'ingresso Per i poli dell'ingresso nulla cambia, visto che ci si pone nel caso peggiore di ingresso cosinusoidale che presenta un unico polo in

$$\mu_{IN} = \omega .$$

5.3 Calcolo dei residui

5.3.1 Caso ideale - non compensato

Con le approssimazioni introdotte si è arrivati ad una forma della tensione trasformata del tipo

$$V_a(s) = \frac{N(s)}{D_{approx}(s)} .$$

Si sa dal paragrafo 4.2.1 che i poli di $D(s)$ sono tutti immaginari e distinti l'uno dall'altro, come si vede anche nelle figure 4.1 e 5.1. In questo caso particolare, come spiegato meglio in appendice B.2.1, per calcolare i residui di $e^{st}V_a(s)$ si può applicare la (B.2.7), che diventa

$$R(s_k) = e^{s_k t} \frac{N(s_k)}{D'_{approx}(s_k)} .$$

Avendo costruito il denominatore come un polinomio razionale di ordine n , con n variabile in base alla precisione voluta, è facile calcolarne la derivata in modo automatizzato. Per quanto detto al paragrafo 5.2.1 i residui andranno calcolati solo su quei poli con parte reale nulla, in base all'ipotesi fatta di linea ideale. L'espressione del residuo sarà uguale sia nel caso dei poli della linea che di quelli dell'ingresso.

5.3.2 Caso ideale - compensato

Per il caso compensato vale il discorso fatto al precedente paragrafo 5.3.1: l'unica differenza sarà nell'espressione di $D(s)$ e nei diversi valori di pulsazione che si troveranno durante il calcolo dei poli.

6 Metodo Benato

Proseguendo la ricerca di nuovi algoritmi per l'analisi delle sovratensioni interne, è venuto alla luce un metodo che ha un'ideale continuità con quello approssimato di Taylor. Esso trae origine dagli studi eseguiti dal gruppo di ricerca di Sistemi Elettrici per l'Energia dell'Università di Padova sotto la supervisione del prof. Benato sull'*analisi multiconduttore* (Multiconductor Cell Analysis, in seguito MCA). Questa tipologia di approccio ai sistemi elettrici di trasmissione dell'energia è stata sviluppata per tener conto nella sua interezza delle caratteristiche del sistema (dissimmetrie, presenza di altri conduttori passivi come schermi e guaine) e raccogliere maggiori informazioni rispetto ad un'analisi condotta su schemi monofasi equivalenti, per loro natura approssimati.

Il metodo si basa sulla matrice alle ammettenze, che tiene conto delle disimmetrie e della presenza di altri conduttori, relativa a una cella elementare di lunghezza Δ_l modellata come un doppio bipolo a π : operando una cascata di queste matrici si riescono ad ottenere, per condizioni di regime o di guasto, i valori di tensione per ogni elemento della linea e in una qualsiasi cella.

Quello che viene presentato di seguito è un tentativo di estendere la procedura dai regimi permanenti a quelli transitori. Per restare in linea anche con il lavoro esposto nei precedenti capitoli si tratterà esclusivamente una linea ideale e simmetrica, non sfruttando quindi i principali vantaggi che offre l'MCA, ma questa potrà essere una valida base di partenza per successivi lavori: a parere di chi scrive, l'estensione del metodo al caso di linea reale e successivamente a sistemi multiconduttore non dovrebbe risultare eccessivamente complicato.

Dato che l'intuizione iniziale e la gestione del gruppo di ricerca sono del prof. Benato, questo metodo è a lui dedicato.

6.1 Matrici di trasmissione

6.1.1 Matrice di trasmissione della linea

Si sa che una linea può essere rappresentata attraverso una matrice di trasmissione a partire dal sistema di equazioni (2.1.26) [8]:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh[xk(s)] & Z_c \sinh[xk(s)] \\ \frac{\sinh[xk(s)]}{Z_c} & \cosh[xk(s)] \end{bmatrix}; \quad (6.1.1)$$

nel caso in esame di linea ideale è possibile sostituire $s\tau$ a $xk(s)$ ed utilizzare solo l'elemento A della matrice per calcolare la tensione, perché la linea è a vuoto. Si è inoltre visto al capitolo 5 come sia possibile utilizzare gli sviluppi asintotici di seno e coseno iperbolico ottenendo comunque una buona precisione dei risultati.

Si prenda ora in considerazione un modello della linea a costanti concentrate come mostrato in figura 6.1; è possibile costruire la matrice del doppio bipolo costituito da Z e Y

$$\mathbf{T}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 + ZY & Z \\ Y & 1 \end{bmatrix} \quad (6.1.2)$$

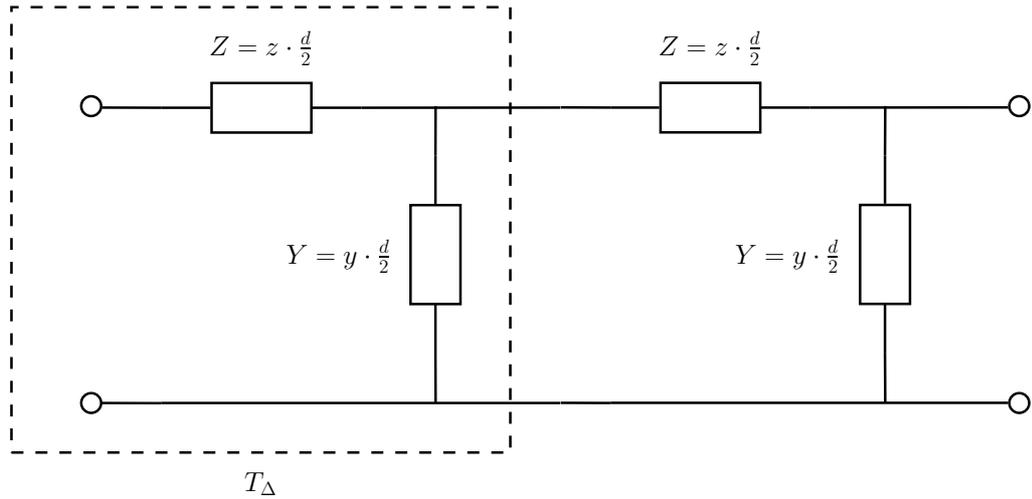


Figura 6.1: Rappresentazione di una linea come cascata di due doppi bipoli a parametri concentrati

e, ricordando che

$$Z = z \cdot \frac{d}{2} \quad (6.1.3)$$

$$Y = y \cdot \frac{d}{2}, \quad (6.1.4)$$

con z e y rispettivamente impedenza e ammettenze chilometriche della linea, si ottiene sostituendo in (6.1.2)

$$\mathbf{T}_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 + zy \cdot \frac{d^2}{4} & z \cdot \frac{d}{2} \\ y \cdot \frac{d}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + zy \cdot \frac{d^2}{4} & z \cdot \frac{d}{2} \\ y \cdot \frac{d}{2} & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.1.5)$$

La matrice di trasmissione dell'intera linea è ovviamente

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\Delta}^2. \quad (6.1.6)$$

Si calcoli il solo elemento A di \mathbf{T} per i motivi visti in precedenza, ricordando che $zy = k$:

$$A = 1 + 3 \frac{zy}{4} d^2 + \frac{(zy)^2}{16} d^4 = 1 + 3 \frac{(kd)^2}{4} + \frac{(kd)^4}{16}. \quad (6.1.7)$$

Si può pensare di aumentare il numero di doppi bipoli in cascata considerando n tratti di linea sempre più brevi di lunghezza Δ_l , tali che $n \cdot \Delta_l = d$: si arriva a costruire così una cosiddetta scala di doppi bipoli. La matrice di trasmissione totale sarà ora data da

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\Delta}^n, \quad (6.1.8)$$

in analogia con (6.1.6). Implementando con il pacchetto di calcolo simbolico di Matlab il calcolo di \mathbf{T} e troncando per semplicità l'espressione ai termini di quarto grado¹⁰, si ottiene la tabella 6.1.1. Si analizzi ora il termine con $(dk)^2$: si vede che il suo coefficiente moltiplicativo

¹⁰Quest'approssimazione è possibile se si considera che $zy = k^2$ è molto piccolo, dell'ordine di circa 10^{-6} .

Tabella 4: Primo elemento A della matrice di trasmissione \mathbf{T} , equivalente alla serie di n matrici \mathbf{T}_{Δ} , calcolato per diversi valori di n con Matlab.

numero di celle	elemento A di \mathbf{T}
3	$1 + (dk)^2 \frac{6}{9} + (dk)^4 \frac{5}{81} + \dots$
4	$1 + (dk)^2 \frac{10}{16} + (dk)^4 \frac{15}{256} + \dots$
5	$1 + (dk)^2 \frac{15}{25} + (dk)^4 \frac{35}{625} + \dots$
6	$1 + (dk)^2 \frac{21}{36} + (dk)^4 \frac{70}{1296} + \dots$

segue una sequenza numerica al crescere del numero di celle n , riassumibile come

$$\frac{6}{9}, \frac{10}{16}, \frac{15}{25}, \frac{21}{36}, \frac{28}{36}, \dots, \frac{\frac{1}{2}(n^2 + n)}{n^2}.$$

Eseguendo il limite per n che tende a infinito si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(n^2 + n)}{n^2} = \frac{1}{2}, \quad (6.1.9)$$

che è proprio il coefficiente del termine di secondo grado dello sviluppo di Taylor (5.2.7) del coseno iperbolico. Analoghe considerazioni possono essere fatte per i termini di ordine superiore.

Abbiamo quindi dimostrato come, costruendo una semplice matrice di trasmissione \mathbf{T}_{Δ} per una porzione sufficientemente piccola di linea Δ_l , si riesca a ricavare la matrice di trasmissione \mathbf{T} dell'intera linea come semplice elevamento a potenza di \mathbf{T}_{Δ} , riconducibile al caso già studiato e ritenuto preciso dell'approssimazione in serie di Taylor. Quest'approccio però è molto più semplice dal punto di vista formale e più flessibile: esso infatti non è necessariamente legato a una data configurazione di linea, essendo sufficiente introdurre le opportune matrici di modellizzazione degli altri elementi, come si andrà adesso a vedere.

6.1.2 Matrice di trasmissione dell'impedenza del generatore equivalente

Il caso studiato in quest'articolo ha sempre fatto riferimento a una linea ideale alimentata da un generatore equivalente di tensione. Per tenerne conto anche in questo metodo sarà sufficiente creare la matrice del doppio bipolo degenere associato a un'impedenza serie, come in figura 6.2

$$\mathbf{T}_{\text{alim}} = \begin{bmatrix} 1 & Z_{\text{alim}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.1.10)$$

Questa andrà poi moltiplicata per la matrice di trasmissione della linea derivante dalla scala di doppi bipoli.

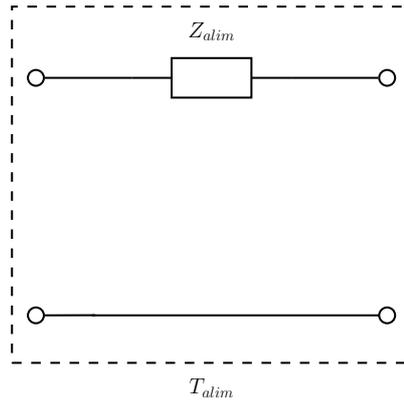


Figura 6.2: Impedenza serie equivalente all'impedenza della rete di alimentazione

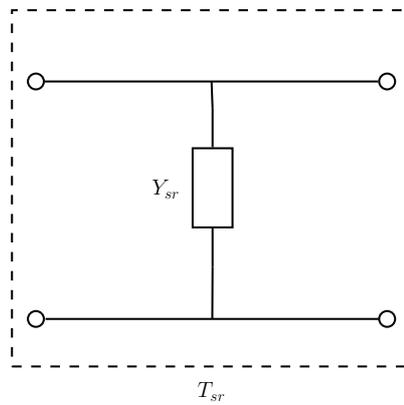


Figura 6.3: Ammettenza parallelo equivalente all'ammettenza del reattore di compensazione

6.1.3 Matrice di trasmissione dello shunt reactor

Nel caso di linea compensata è sufficiente moltiplicare la matrice di trasmissione della linea per la matrice di trasmissione del doppio bipolo degenere associato a un'impedenza in derivazione, come in figura 6.3

$$\mathbf{T}_{sr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_{sr} & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.1.11)$$

Ovviamente la matrice \mathbf{T} va moltiplicata per \mathbf{T}_{sr} all'inizio e alla fine, o comunque nel punto in cui lo shunt reactor viene inserito, dato che per il prodotto tra matrici non vale la proprietà commutativa.

6.1.4 Parallelo di doppi bipoli

Avendo associato alla linea la sua matrice di trasmissione \mathbf{T} , si può pensare di valutare il comportamento con più linee in parallelo. Per farlo basta seguire le indicazioni fornite in [8] e

qui riportate:

$$\begin{aligned}
A_p &= \frac{A_1 B_2 + A_2 B_1}{B_1 + B_2} \\
B_p &= \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2} \\
C_p &= C_1 + C_2 + \frac{(A_1 - A_2)(D_1 - D_2)}{B_1 + B_2} \\
D_p &= \frac{D_1 B_2 + D_2 B_1}{B_1 + B_2} .
\end{aligned} \tag{6.1.12}$$

Nel caso in cui le linee siano identiche e quindi si abbia l'uguaglianza $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ le (6.1.12) si semplificano in

$$\begin{aligned}
A_p &= A_1 \\
B_p &= \frac{B_1}{2} \\
C_p &= 2C_1 \\
D_p &= D_1 .
\end{aligned} \tag{6.1.13}$$

6.2 Antitrasformazione computazionale della matrice di trasmissione

Una volta definite le matrici \mathbf{T}_Δ , \mathbf{T}_{alim} ed eventualmente \mathbf{T}_{sr} , basta comporle in modo adeguato. Con riferimento al circuito equivalente non compensato di figura 2.2 si ottiene la seguente matrice totale di trasmissione

$$\mathbf{T}_{\text{tot}} = \mathbf{T}_{\text{alim}} \cdot \mathbf{T}_\Delta^n ; \tag{6.2.1}$$

con riferimento invece al circuito equivalente compensato di figura 2.3 si ottiene la seguente matrice totale di trasmissione

$$\mathbf{T}_{\text{tot}} = \mathbf{T}_{\text{alim}} \cdot \mathbf{T}_{\text{sr}} \cdot \mathbf{T}_\Delta^n \cdot \mathbf{T}_{\text{sr}} . \tag{6.2.2}$$

Della matrice \mathbf{T}_{tot} interessa solo il primo elemento A_{tot} , perché la linea è a vuoto. A_{tot} è un polinomio algebrico antitrasformabile con metodi elementari: dato però l'elevato numero di elementi necessari per ottenere una precisione sufficiente (n deve tendere all'infinito, quindi molto grande) sarebbe difficoltoso antitrasformarlo analiticamente. Si sfrutteranno le capacità di calcolo automatiche dell'elaboratore per svolgere questo compito: il risultato sarà una sommatoria di modi $e^{s_k t}$ moltiplicati per opportune costanti $R(s_k)$.

L'utilizzo di queste nomenclature è voluto per evidenziare la perfetta analogia con (B.2.5) e con i residui di $e^{st} V_a(s)$ ¹¹, a cui si è ancora una volta giunti pur percorrendo una strada diversa.

¹¹Si veda anche nota 8 a pag. 45.

7 Verifica dei modelli con EMTP

Si vuole ora verificare la correttezza dei modelli proposti ai capitoli 4, 5 e 6 eseguendo dei controlli incrociati tra di essi e considerando anche un modello esterno in EMTP costruito come descritto in 3.3. Come si avrà modo di appurare, la loro validità sarà ottima, almeno nel primo periodo di transitorio che però è anche quello di maggior interesse, poiché presenta le sovratensioni più elevate.

Infine vengono presentati anche alcuni interessanti confronti in termini di prestazioni.

7.1 Verifica del metodo Ghizzetti - Ossicini

Avendo a disposizione entrambi i modelli, si è creata una subroutine in Matlab che operi automaticamente il confronto grafico.

7.1.1 Linea non compensata

I risultati sono presentati in figura 7.1 e più in dettaglio in figura 7.2.

Dalla prima si vede innanzitutto come la pulsazione fondamentale del termine transitorio sia la stessa nel caso del calcolo in Matlab e in EMTP. Essendo la pulsazione legata alle soluzioni di (4.2.2), si può dedurre che il metodo iterativo di Newton - Raphson con cui sono calcolate converge verso un valore corretto. Analizzando la forma d'onda più a fondo, come nella seconda figura, si vede che anche le successive pulsazioni sono calcolate in modo esatto, perché la deformazione dell'onda fondamentale che esse portano è praticamente coincidente a quella calcolata con EMTP.

Si nota poi come anche le ampiezze dei due casi siano quasi coincidenti, il che porta ad esser certi della bontà dei calcoli dei residui (4.3.4) e (4.3.5). Le leggere discrepanze sono imputabili ai mutui accoppiamenti magnetici tra fasi e schermi, trascurati invece nel metodo Ghizzetti - Ossicini: in particolare il picco calcolato da EMTP risulta essere più smussato. Con il proseguire del tempo l'ampiezza della curva di EMTP tende a decrescere in forma esponenziale: ciò è imputabile allo smorzamento introdotto dalle resistenze, ancora una volta trascurato nella procedura Matlab. Estendendo la simulazione si avrebbe quindi che il metodo Ghizzetti - Ossicini oscillerebbe permanentemente (in coerenza con il caso ipotizzato di linea ideale) mentre EMTP tenderebbe gradualmente a una situazione di regime permanente. Si è comunque in grado di calcolare con il metodo Ghizzetti - Ossicini la forma d'onda della tensione a regime: si ricorda, infatti, che la forma d'onda della tensione all'arrivo è ricavata come somma di una parte transitoria, ricavata dai residui della linea (4.3.4), e di una permanente, legata ai residui dell'ingresso (4.3.5). In particolare essa è più elevata della tensione nominale di circa il 10%, risultato compatibile con quanto si sa sulla teoria delle linee a vuoto e l'effetto Ferranti.

Infine si conclude che le imprecisioni viste poco influenzano il calcolo della sovratensione massima: essa è di 1.743 *p.u.* con il metodo Ghizzetti - Ossicini e di 1.734 *p.u.* con EMTP, con una differenza percentuale dello 0.52%, ad ogni modo con un'approssimazione a favore della sicurezza. Interessante anche notare come la stima di massima di sovratensione di chiusura su linea a vuoto di circa 2 *p.u.* che si trova in letteratura [8] sia prudenziale ma tendenzialmente corretta.

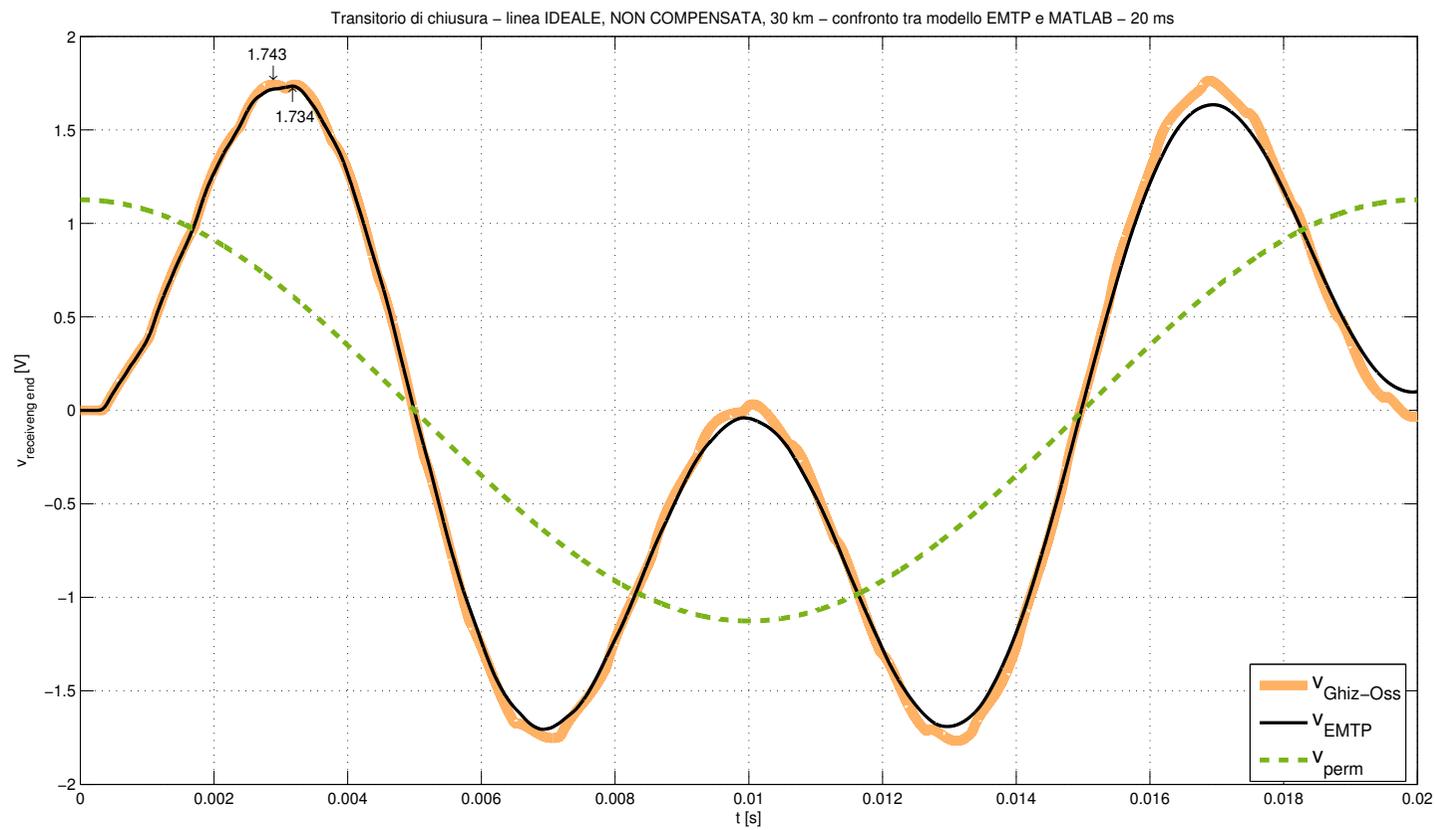


Figura 7.1: Transitorio di chiusura nei primi 20 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm² a 400 kV, non compensata, $d = 30$ km, $x_{cc} = 24.143$ Ω ; confronto fra il metodo Ghizzetti - Ossicini e EMTP

Transitorio di chiusura – linea IDEALE, NON COMPENSATA, 30 km – confronto tra modello EMTP e MATLAB – 5 ms

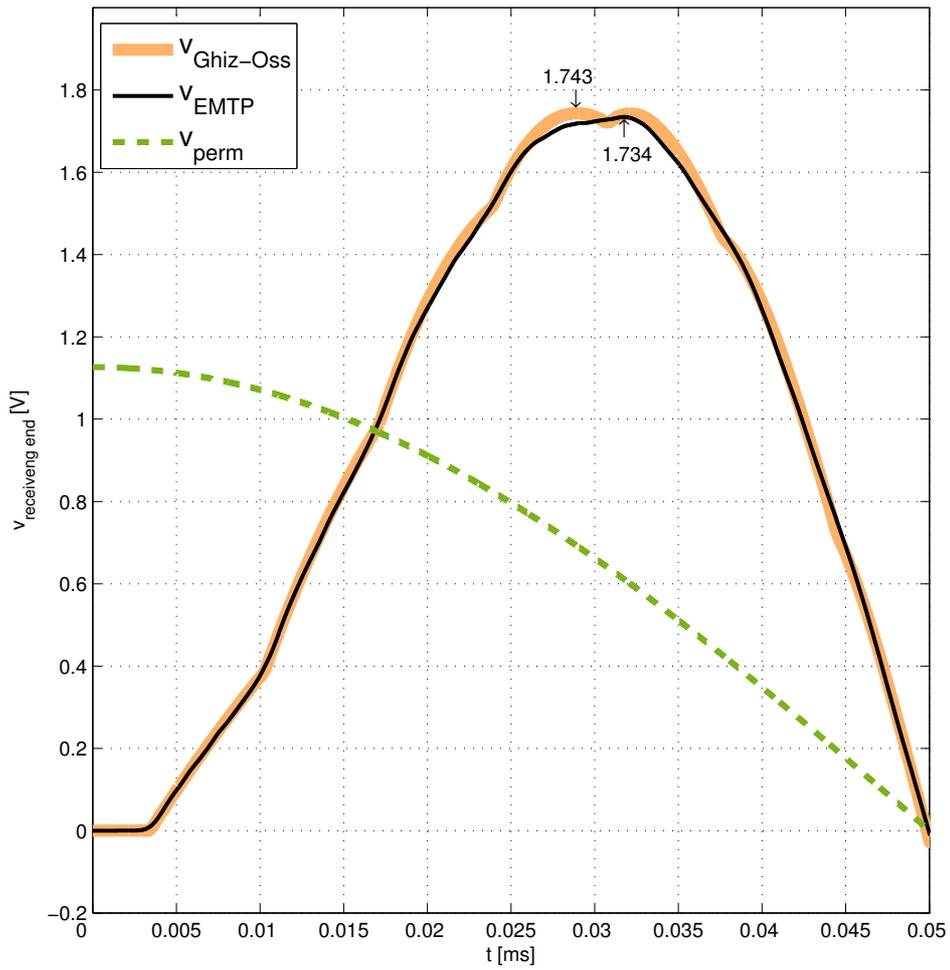


Figura 7.2: Transitorio di chiusura nei primi 5 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm² a 400 kV, non compensata, $d = 30$ km, $x_{cc} = 24.143$ Ω ; confronto fra il metodo Ghizzetti - Ossicini e EMTP

Come piccola aggiunta, si porga attenzione al tratto iniziale del grafico in cui la tensione si mantiene nulla: esso coincide con il tempo di percorrenza della linea, stimato in (3.2.17) come

$$\tau = 3.485 \cdot 10^{-4} \text{ s} ,$$

cioè l'estremità della linea resta a riposo per tutto quel tempo in cui l'onda viaggia dal punto iniziale a quello finale, iniziando poi a riflettersi e creando le sovratensioni fin qui discusse.

7.1.2 Linea compensata

I risultati sono presentati in figura 7.3 e più in dettaglio in figura 7.4.

Le considerazioni sulla precisione del metodo sono analoghe a quelle del caso non compensato. In particolare si nota ancora che le soluzioni di (4.2.7) sono corrette in quanto le pulsazioni, fondamentale e di ordine superiore, coincidono e danno origine alla stessa forma d'onda.

I residui sono calcolati in modo corretto, dato che le ampiezze delle due curve coincidono.

Il modello EMTP presenta andamento smorzato a causa della presenza delle resistenze dei conduttori e tende quindi a una condizione di regime, mentre il metodo Ghizzetti - Ossicini oscilla in modo permanente.

Queste imprecisioni non inficiano il calcolo della sovratensione massima, che nel caso del metodo Ghizzetti - Ossicini risulta di 1.703 *p.u.* mentre con EMTP di 1.683 *p.u.*, con una differenza dell'1.18%, ad ogni modo con un'approssimazione a favore della sicurezza. La sovratensione a regime per effetto Ferranti, evidenziata dalla curva a tratteggio rosso fino, è inferiore al caso non compensato, come ci si aspettava introducendo gli shunt reactor a inizio e fine linea. Anche la sovratensione massima ne trae beneficio, calando del 2.94%; il ruolo degli shunt reactor è quindi positivo anche se non determinante nella riduzione delle sovratensioni, come confermato anche in [16].

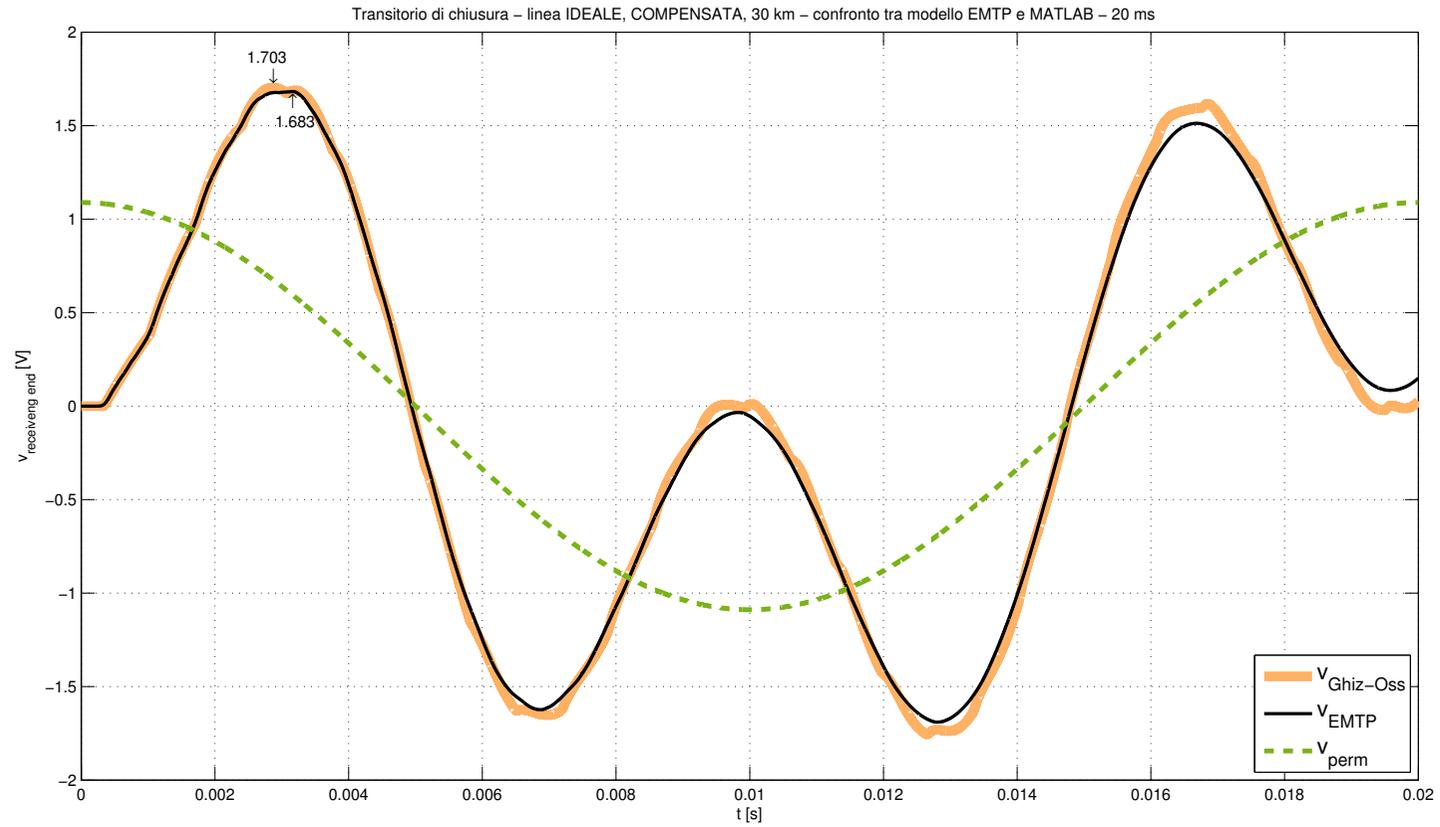


Figura 7.3: Transitorio di chiusura nei primi 20 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm² a 400 kV, compensata con $\xi = 0.55$, $d = 30$ km, $x_{cc} = 24.143$ Ω ; confronto fra il metodo Ghizzetti - Ossicini e EMTP

Transitorio di chiusura – linea IDEALE, COMPENSATA, 30 km – confronto tra modello EMTP e MATLAB – 5 ms

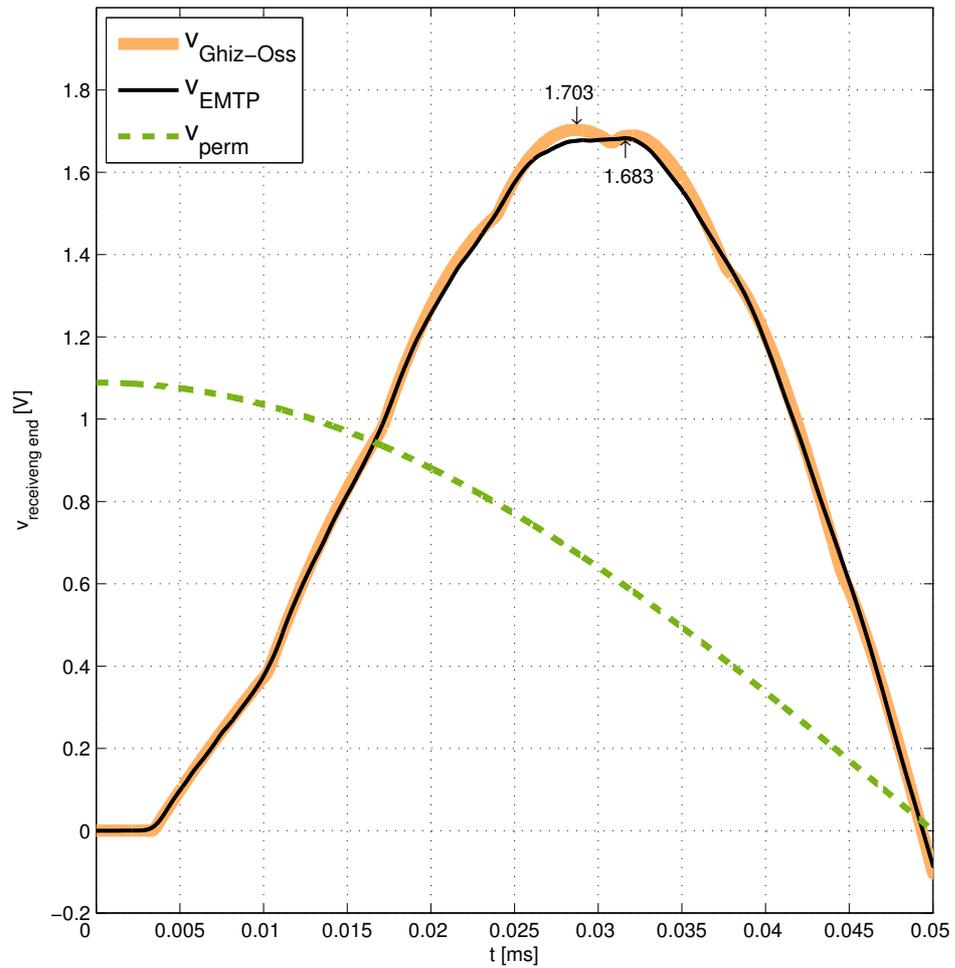


Figura 7.4: Transitorio di chiusura nei primi 5 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm^2 a 400 kV, compensata con $\xi = 0.55$, $d = 30 \text{ km}$, $x_{cc} = 24.143 \Omega$; confronto fra il metodo Ghizzetti - Ossicini e EMTP

7.2 Verifica del metodo con approssimazione di Taylor

Il metodo con approssimazione di Taylor è stato messo a confronto con EMTP e con il metodo Ghizzetti - Ossicini, visto che era a disposizione, anche per vedere di quanto si discostava.

7.2.1 Linea non compensata

I risultati sono presentati in figura 7.5 e più in dettaglio in figura 7.6.

Come si vede da entrambe le figure, ma in particolare dalla seconda, il metodo con approssimazione di Taylor ricalca esattamente la curva calcolata con il metodo Ghizzetti - Ossicini: le considerazioni fatte in 7.1 nel caso di linea non compensata sono quindi identiche e dal punto di vista della precisione i due si equivalgono. Ciò è anche interessante dal punto di vista teorico perché, partendo dalle stesse basi e percorrendo strade diverse, si è giunti al medesimo risultato.

7.2.2 Linea compensata

I risultati sono presentati in figura 7.7 e più in dettaglio in figura 7.8.

Si vede ancora come il metodo con approssimazione di Taylor coincida con il Ghizzetti - Ossicini: per il confronto con EMTP valgono sempre le osservazioni fatte in 7.1 nel caso di linea compensata.

7.3 Verifica del metodo Benato

Il metodo Benato è stato messo a confronto con EMTP e con il metodo Ghizzetti - Ossicini, che come si è visto coincide con quello con approssimazione di Taylor.

7.3.1 Linea non compensata

I risultati sono presentati in figura 7.9 e più in dettaglio in figura 7.10.

Il metodo Benato si scosta, seppur di poco, dai risultati ricavati in precedenza. In particolare si vede che la pulsazione fondamentale non è precisa come negli altri casi, perché verso i 20 ms tende ad anticipare le altre curve. Va però tenuto presente che ai fini dello studio delle sovratensioni interessano solo il primi istanti di transitorio e in quel periodo l'errore sulla pulsazione è decisamente trascurabile. Esso va imputato allo sviluppo approssimato di Taylor a cui tende la cascata di celle rappresentanti la linea: aumentando in modo considerevole il numero di celle la curva del metodo Benato tenderebbe a sovrapporsi alle altre. D'altro canto, l'impegno computazionale sarebbe di gran lunga maggiore e in ogni caso poco utile.

Si vede infatti che la forma d'onda nella seconda figura, pur discostandosi dalle altre, permette di ricavare in maniera esatta il valore della sovratensione. Esso coincide con i due casi precedenti e quindi valgono le stesse precisioni rispetto a EMTP.

7.3.2 Linea compensata

I risultati sono presentati in figura 7.11 e più in dettaglio in figura 7.12.

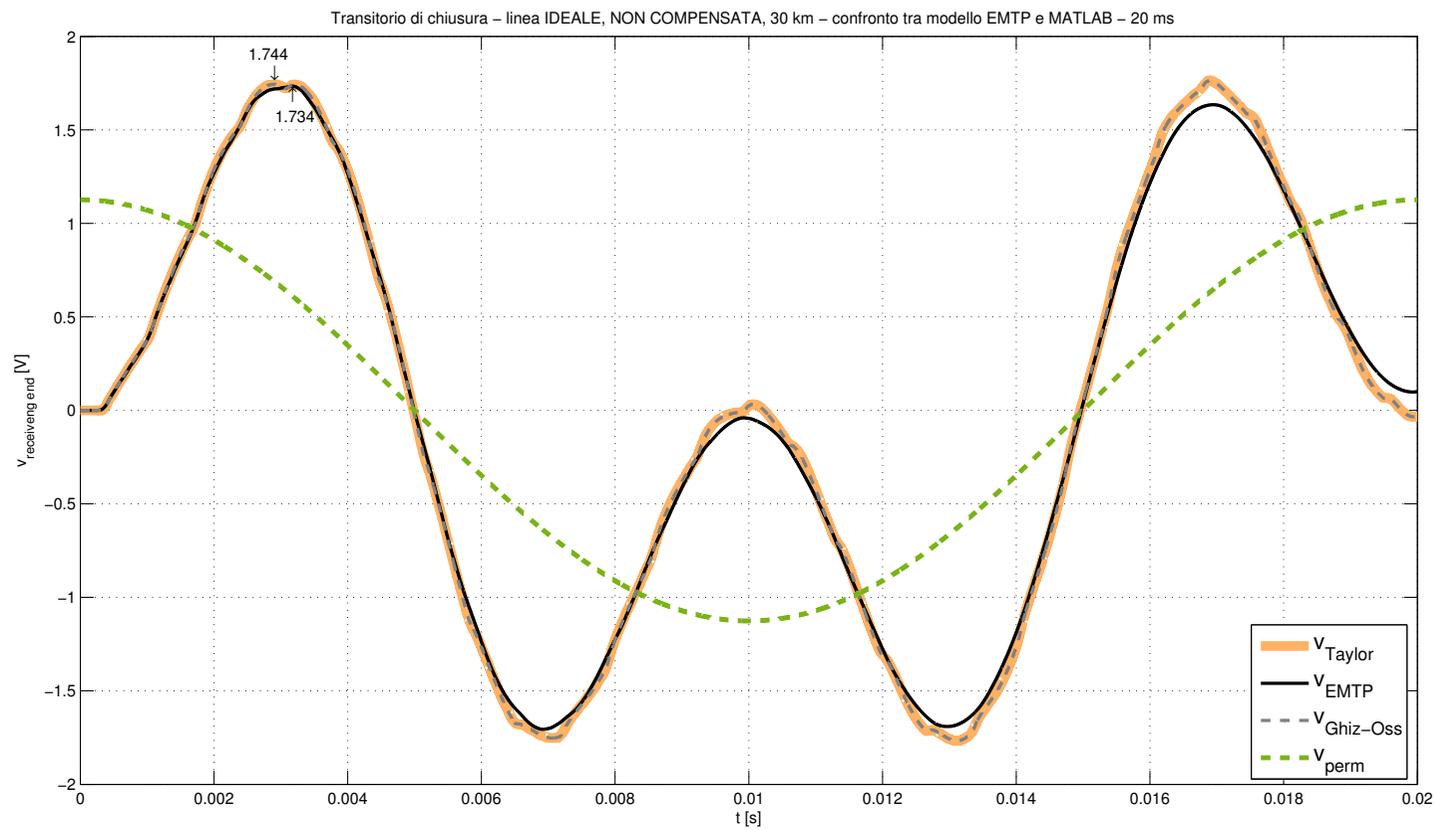


Figura 7.5: Transitorio di chiusura nei primi 20 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm² a 400 kV, non compensata, $d = 30$ km, $x_{cc} = 24.143$ Ω ; confronto fra il metodo con approssimazione di Taylor e EMTP

Transitorio di chiusura – linea IDEALE, NON COMPENSATA, 30 km – confronto tra modello EMTP e MATLAB – 5 ms

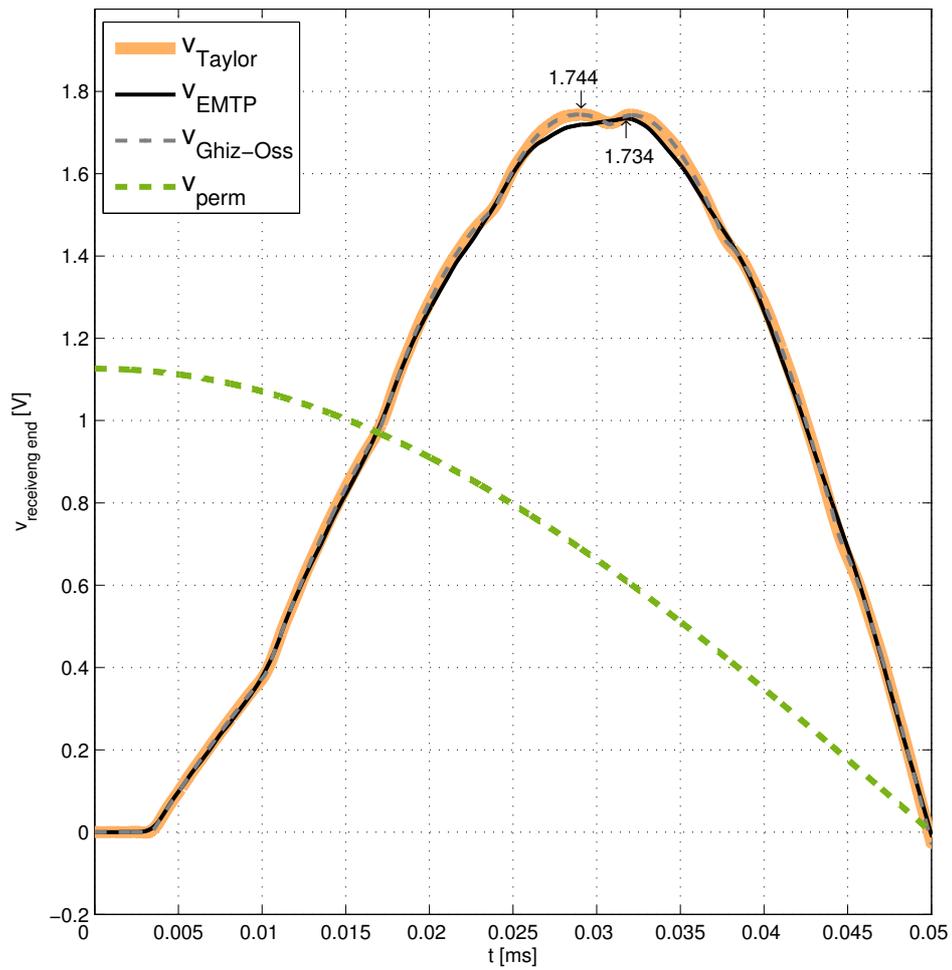


Figura 7.6: Transitorio di chiusura nei primi 5 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm² a 400 kV, non compensata, $d = 30$ km, $x_{cc} = 24.143$ Ω; confronto fra il metodo con approssimazione di Taylor e EMTP

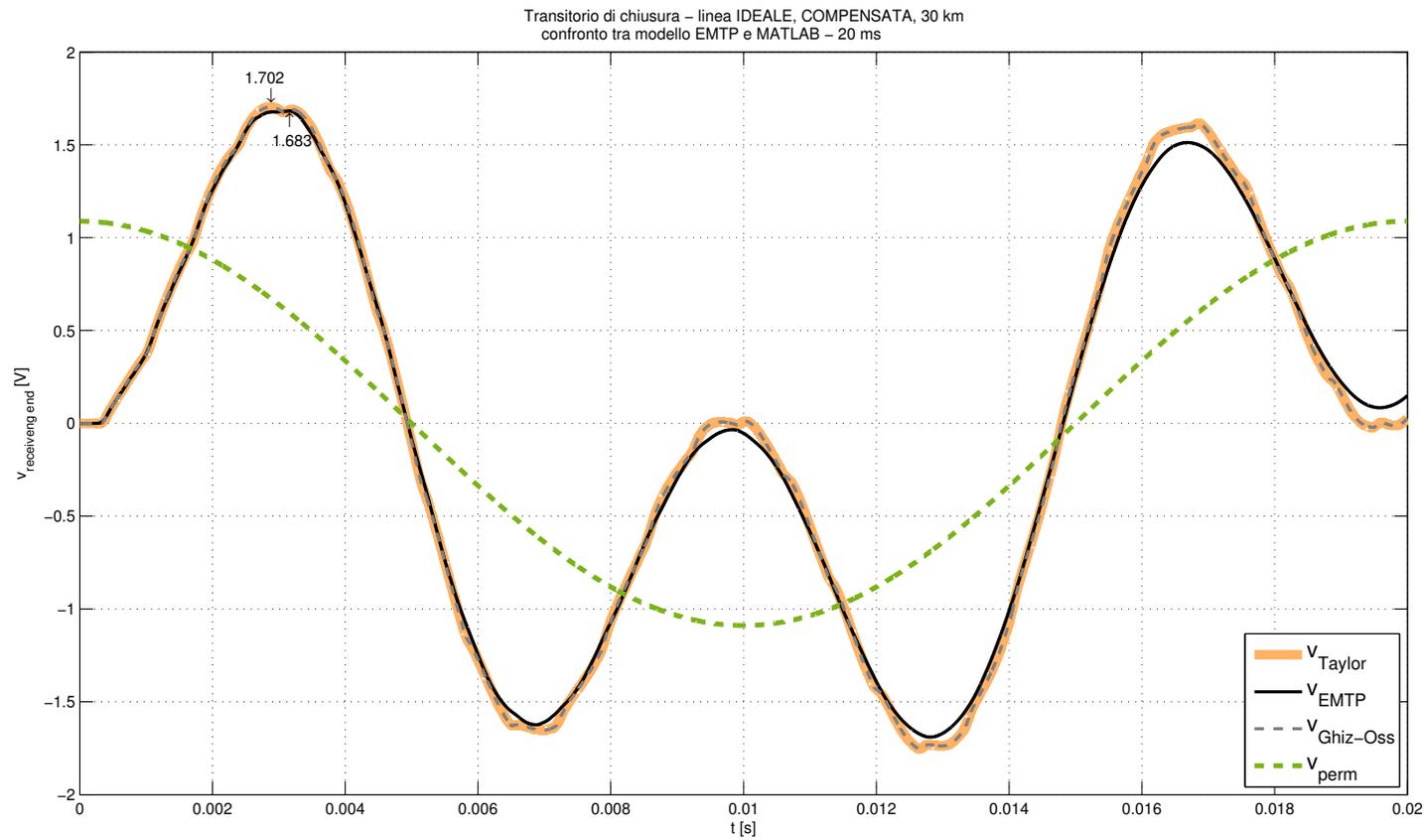


Figura 7.7: Transitorio di chiusura nei primi 20 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm² a 400 kV, compensata con $\xi = 0.55$, $d = 30$ km, $x_{cc} = 24.143$ Ω ; confronto fra il metodo con approssimazione di Taylor e EMTP

Transitorio di chiusura – linea IDEALE, COMPENSATA, 30 km – confronto tra modello EMTP e MATLAB – 5 ms

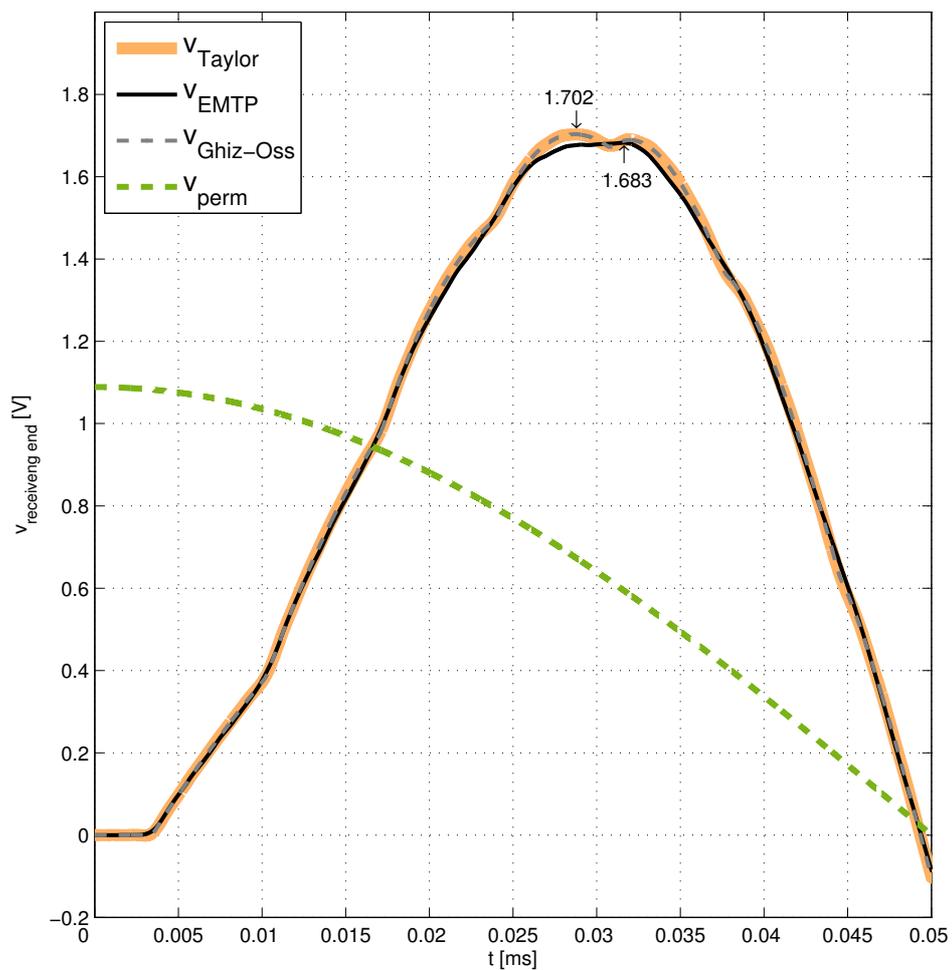


Figura 7.8: Transitorio di chiusura nei primi 5 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm² a 400 kV, compensata con $\xi = 0.55$, $d = 30$ km, $x_{cc} = 24.143$ Ω ; confronto fra il metodo con approssimazione di Taylor e EMTP

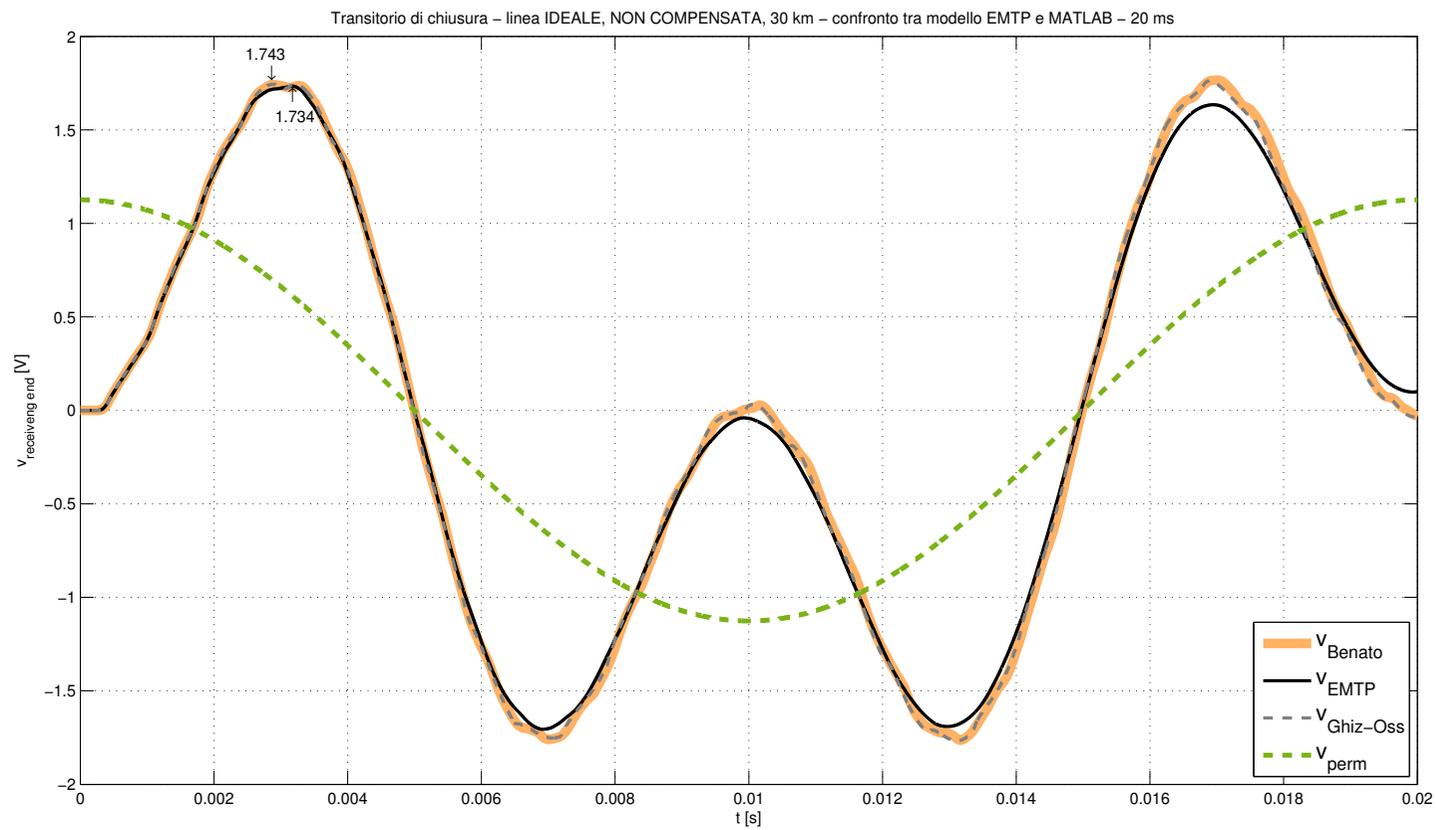


Figura 7.9: Transitorio di chiusura nei primi 20 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm² a 400 kV, non compensata, $d = 30$ km, $x_{cc} = 24.143$ Ω ; confronto fra il metodo con approssimazione Benato e EMTP

Transitorio di chiusura – linea IDEALE, NON COMPENSATA, 30 km – confronto tra modello EMTP e MATLAB – 5 ms

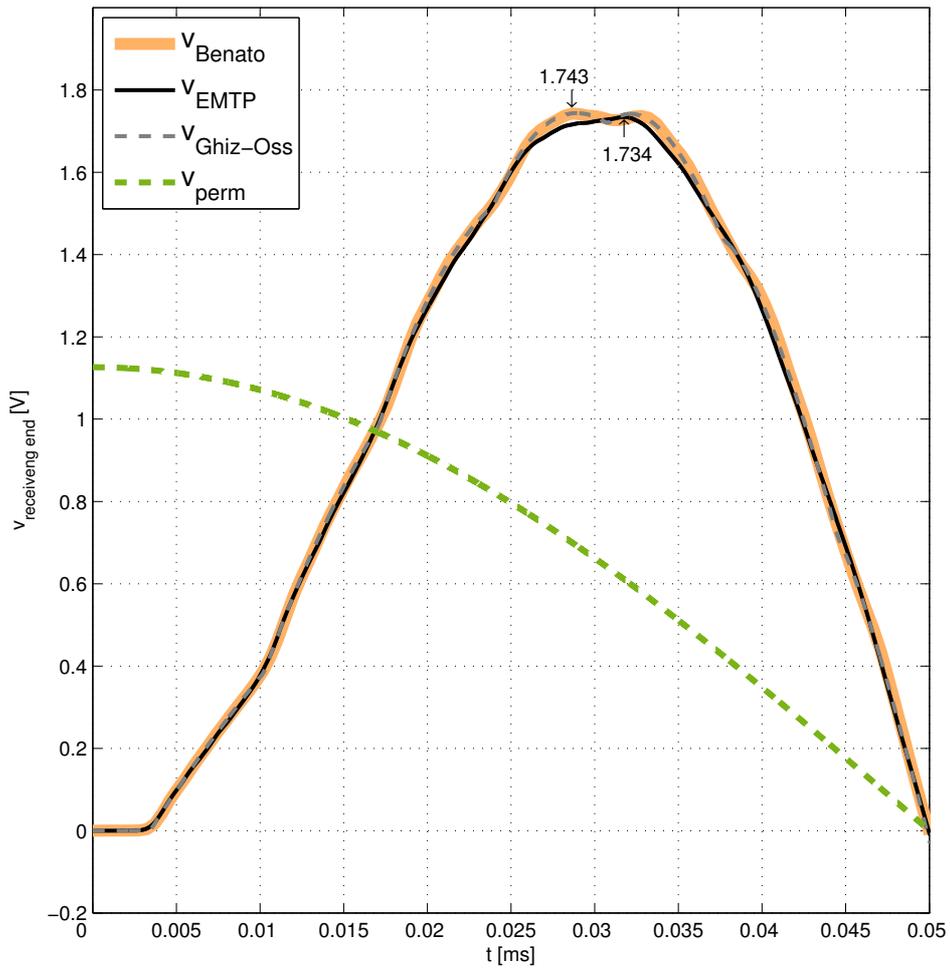


Figura 7.10: Transitorio di chiusura nei primi 5 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm² a 400 kV, non compensata, $d = 30$ km, $x_{cc} = 24.143$ Ω; confronto fra il metodo Benato e EMTP

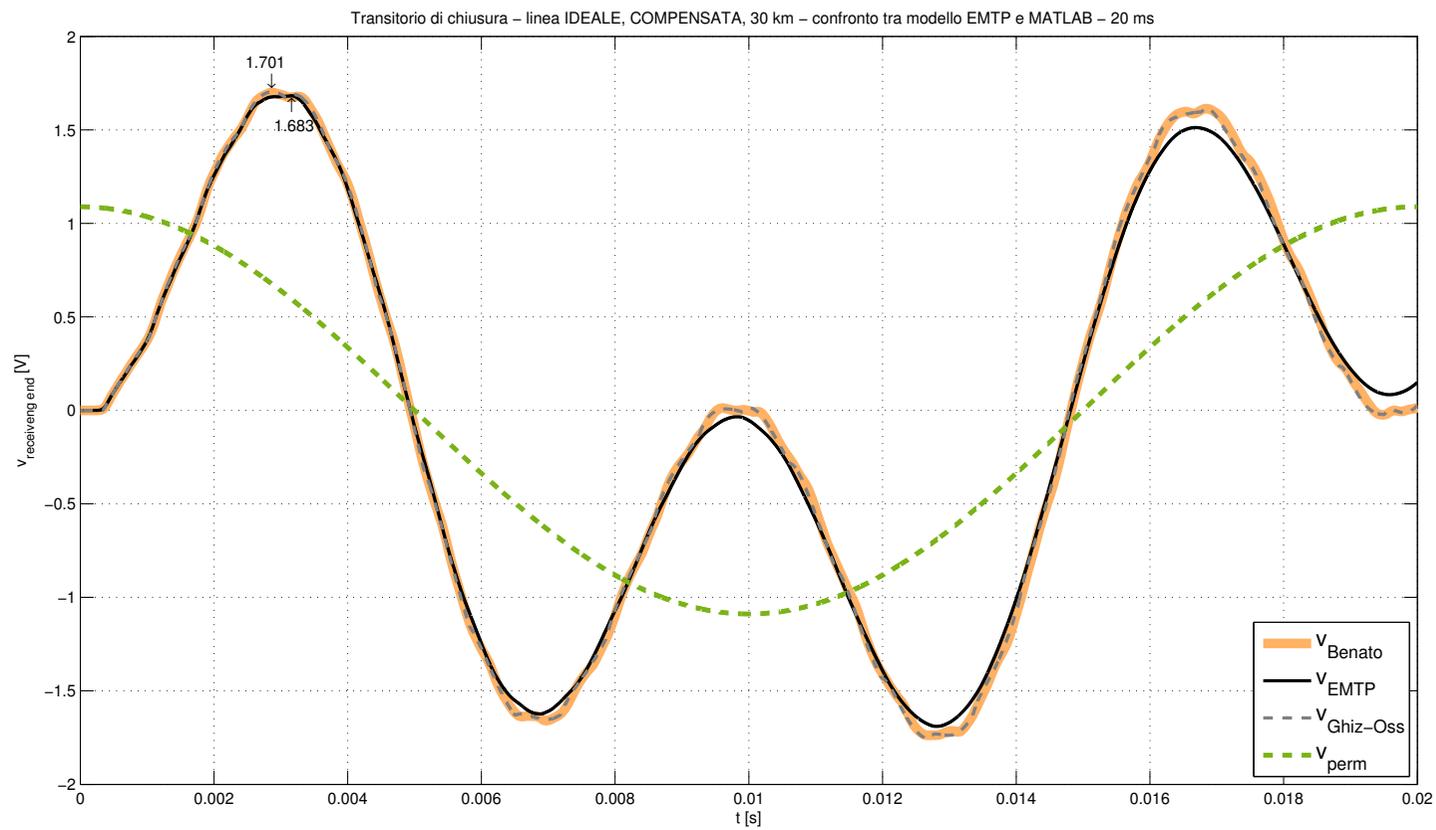


Figura 7.11: Transitorio di chiusura nei primi 20 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm² a 400 kV, compensata con $\xi = 0.55$, $d = 30$ km, $x_{cc} = 24.143$ Ω ; confronto fra il metodo con approssimazione Benato e EMTP

Transitorio di chiusura – linea IDEALE, COMPENSATA, 30 km – confronto tra modello EMTP e MATLAB – 5 ms

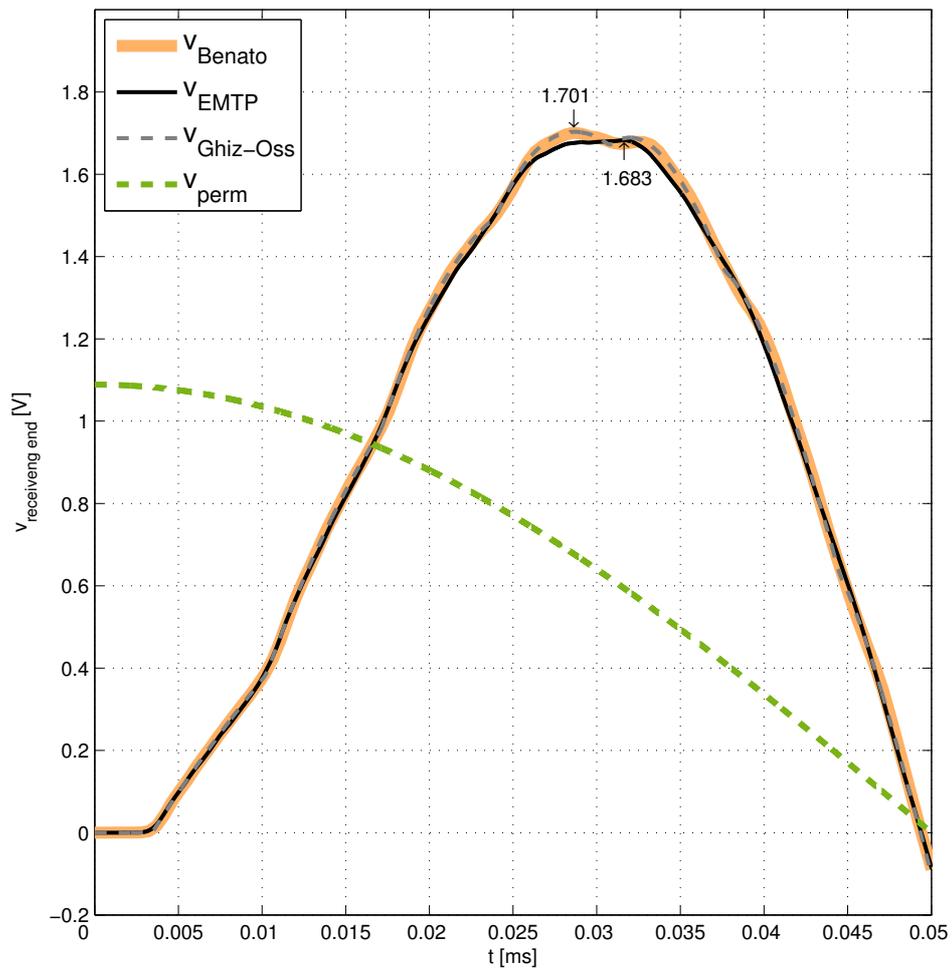


Figura 7.12: Transitorio di chiusura nei primi 5 ms dopo la manovra dell'interruttore su linea in cavo XLPE 2500 mm² a 400 kV, compensata con $\xi = 0.55$, $d = 30$ km, $x_{cc} = 24.143$ Ω ; confronto fra il metodo Benato e EMTP

Si ravvisa lo stesso livello basso di imprecisione messo in luce al paragrafo precedente, con conseguenze minime sulla precisione dei risultati. Sui valori massimi delle sovratensioni valgono le stesse identiche considerazioni fatte in 7.1 nel caso di linea compensata.

7.4 Prestazioni

Si riassumono infine in tabella 7.4 le prestazioni dei vari metodi, non solo in termini di precisione ma anche di complessità del codice, tempi di calcolo e flessibilità intesa come casistiche implementabili (già adesso o attraverso sviluppi futuri, come l'estensione al caso non ideale o a sistemi multiconduttore).

Precisione Come più volte spiegato, EMTP è stato assunto come caso esatto perché più vicino alle ipotesi reali: le precisioni dei metodi sono quindi ad esso riferite e come si è visto nelle sezioni precedenti possono tutte considerarsi ottime pur nelle ipotesi di idealità della linea. Il metodo che più si discosta dagli altri è il Benato.

Tempi di calcolo Andando a vedere i tempi di calcolo (dato fornito direttamente da EMTP o utilizzando i comandi *tic* e *toc* in Matlab) si hanno dei valori sorprendenti: infatti tutti i metodi proposti hanno tempi di calcolo inferiori rispetto al software commerciale, sia nel caso compensato che non compensato. In particolare il metodo Ghizzetti - Ossicini risulta il più rapido, perché tutte le formule sono state inserite nel codice e non si domanda al programma di eseguire nessun calcolo automatico (mentre nel caso di Taylor il programma deve calcolare la derivata del denominatore e nel caso del Benato la sua antitrasformata di Laplace).

Complessità del codice La rapidità di compilazione del codice è opposta però alla sua complessità: se infatti nel metodo Ghizzetti - Ossicini si lasciano pochi compiti al programma, la sua stesura ha richiesto molto tempo e anche formalmente diversi passaggi matematici; esso racchiude due routine, una per il calcolo dei poli e una per il calcolo dei residui, per niente banali. Il metodo con approssimazione di Taylor e Benato sono invece più snelli: l'ultimo in particolare, avvalendosi delle notazioni matriciali, ha richiesto veramente poche righe di codice per ottenere gli stessi risultati degli altri.

Flessibilità Lo studio condotto si è limitato, per motivi di tempo, ad un caso semplificato ideale. Ciò non esclude però che in futuro si possano riprendere i vari metodi e tentare di estenderli. Il metodo Ghizzetti - Ossicini, proprio per come è strutturato, non sarebbe ricavabile nel caso di linea non ideale, in particolare con elementi dissipativi: le radici del denominatore avrebbero infatti parti reali oltre che immaginarie e la stessa variabile di Laplace comparirebbe nell'argomento di seno e coseno iperbolico sotto radice quadra, rendendo la via analitica alquanto impercorribile. Il metodo in serie di Taylor può invece prevedere di sviluppare il denominatore nel caso di linea non ideale: riuscendo a calcolarne lo sviluppo e riconducendosi quindi a una forma polinomiale, non si avrebbero poi problemi ad utilizzare i metodi di inversione già proposti nel caso di funzioni razionali. Le difficoltà analitiche appaiono però ancora abbastanza elevate. Il metodo Benato è quello che meglio si addice allo sviluppo: esso infatti non parte da un'equazione elettrica, ma da una rappresentazione matriciale della linea. Se in questa si inseriscono i valori di resistenza e conduttanza chilometriche, il risultato è direttamente un polinomio, che come si è visto coincide con lo sviluppo in serie di Taylor per un numero infinito di celle e quindi resta valido. L'inversione è affidata al programma e trattandosi sempre di una funzione razionale non dovrebbe presentare grosse difficoltà. I tempi di simulazione restano inoltre competitivi con EMTP, essendo circa la metà. Non

ultimo, resta il fatto che sfruttando la notazione matriciale esso è facilmente estendibile a sistemi multiconduttore: sarebbe auspicabile quindi che la ricerca proseguisse e si giungesse ad un utilizzo dell'MCA non solo a casi di regime o disimmetrici di guasto, ma anche a quelli a regime variabile.

Tabella 5: Confronto tra le prestazioni dei metodi e EMTP

metodo	precisione	tempi di calcolo	complessità del codice	flessibilità
EMTP	ottima assunta come riferimento	non comp.: 5.02323 s comp.: 4.83603 s	-	molto flessibile
Ghizzetti Ossicini	ottima ma inferiore a EMTP	non comp.: 0.304772 s comp.: 0.89339 s	molto complesso	non flessibile
Taylor	ottima ma inferiore a EMTP	non comp.: 4.197614 s comp.: 3.509490 s	normale	flessibile (non ideale)
Benato	ottima ma inferiore a tutti	non comp.: 2.037856 s comp.: 3.103200 s	molto semplice	molto flessibile (non ideale, MCA)

8 Formula approssimata per il calcolo delle sovratensioni di manovra

Con questo lavoro di ricerca si è entrati in possesso di nuove formule capaci di esprimere analiticamente le sovratensioni nei cavi per altissima tensione; esse sono state implementate al calcolatore ottenendo, come si è visto, buoni risultati. Si vuole ora completare lo studio indagando se da questi risultati si possono ricavare delle utili espressioni tecniche, applicabili a casi reali di installazione. Sarebbe da questo punto di vista interessante riuscire a valutare la sovratensione massima che si potrebbe presentare sul cavo collegato a una rete di potenza di corto circuito nota in funzione della lunghezza del cavo stesso; in letteratura non si trovano ancora riferimenti in merito.

Si dimostrerà come questo sia invece possibile utilizzando, con opportune semplificazioni, quanto ricavato al capitolo 4: il risultato sarà una formula volutamente semplice dal punto di vista formale, con precisioni sufficienti nel normale range di lunghezze di installazione dei cavi in altissima tensione. Le ipotesi sotto cui varranno le seguenti considerazioni sono le stesse fatte dall'inizio di quest'articolo e riassunte al paragrafo 2.1.1: esse sono effettivamente limitative, quindi la formula che verrà proposta ne risentirà a sua volta. Essa può tuttavia dare delle indicazioni di massima sull'entità delle sovratensioni, per il cui calcolo preciso si rimanda o ad uno dei metodi computazionali qui proposti o a software specifici.

Nulla esclude che altre formule approssimate possano essere ricavate in futuro dagli altri metodi o con nuovi approcci.

8.1 Calcolo della formula approssimata

Si riprendano le formule 4.3.6 e 4.3.16: secondo quanto già fatto notare esse sono la somma di due componenti, una transitoria di infinite pulsazioni μ_i e una permanente di pulsazione ω . Inoltre la parte immaginaria dell'esponenziale complesso si elimina, lasciando solo la parte reale che coincide con il coseno del suo argomento. Considerando per semplicità la sola pulsazione fonamentale del termine transitorio (quella ad ampiezza maggiore), le (4.3.6) e (4.3.16) possono essere sinteticamente riscritte come

$$v_{a,NC}(t) = \mathcal{T}_{NC} \cos(\mu t) + \mathcal{P}_{NC} \cos(\omega t) , \quad (8.1.1)$$

$$v_{a,C}(t) = \mathcal{T}_C \cos(\mu t) + \mathcal{P}_C \cos(\omega t) , \quad (8.1.2)$$

formalmente uguali una all'altra. La differenza sta evidentemente nei diversi valori dei coefficienti qui per chiarezza riportati:

$$\mathcal{T}_{NC} = \frac{2\mu_i}{\sin(\mu_i\tau)[\omega^2(T_1 + \tau) - \mu_i^2(3T_1 + \tau)] + \mu_i \cos(\mu_i\tau)[T_1\tau(\omega^2 - \mu_i^2) - 2]} , \quad (8.1.3)$$

$$\mathcal{P}_{NC} = \frac{1}{[\cos(\omega\tau) - T_1\omega \sin(\omega\tau)]} , \quad (8.1.4)$$

$$\mathcal{T}_C = \frac{2\mu_i}{\cos(\mu_i\tau)\mathcal{K}_{cos} - \sin(\mu_i\tau)\mathcal{K}_{sin}} , \quad (8.1.5)$$

$$\mathcal{P}_C = \frac{1}{[A \cos(\omega\tau) - \sin(\omega\tau) (\omega C - \frac{B}{\omega})]} ; \quad (8.1.6)$$

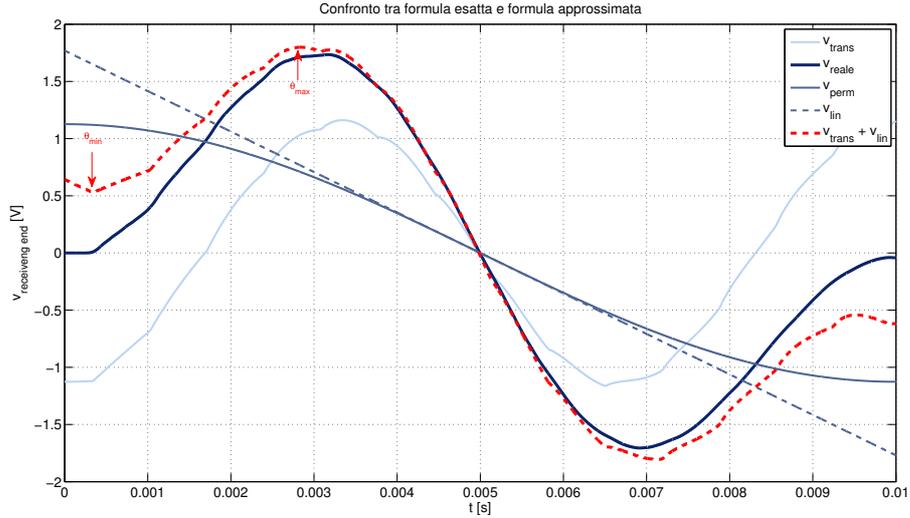


Figura 8.1: Tensione all'arrivo esatta, somma del termine permanente e transitorio, e tensione all'arrivo approssimata, somma del termine lineare e transitorio

Per gli sviluppi dettagliati di \mathcal{K}_{cos} , \mathcal{K}_{sin} , A , B , e C si veda 4.3.2. Nel seguito quindi non si farà più distinzione tra caso compensato e non compensato, perché essi potranno essere affrontati allo stesso modo avendo cura di utilizzare i coefficienti ad essi relativi. Il caso generale sarà quindi

$$v_a(t) = \mathcal{T} \cos(\mu t) + \mathcal{P} \cos(\omega t) . \quad (8.1.7)$$

La ricerca del massimo e del relativo istante di massimo di (8.1.7) non è fattibile analiticamente: essa porta sempre ad un'equazione trascendente a causa dei diversi argomenti μ e ω del coseno. Il massimo della parte transitoria non coincide con il massimo assoluto, perché il contributo dato dalla parte permanente non è trascurabile. Come si può notare dalle curve di v_{reale} e v_{trans} di figura 8.1 l'istante di massimo cade nella zona in cui il termine permanente sta calando dal suo valore massimo a 0: il suo contributo porterà quindi il massimo assoluto ad essere inferiore al massimo della parte transitoria. Si osservi che la parte permanente si annulla all'istante

$$t^* = \frac{\tau}{4} = \frac{1}{4f} = \frac{1}{4\frac{\omega}{2\pi}} = \frac{\pi}{2\omega} \quad (8.1.8)$$

e che la pendenza del termine permanente in quel punto vale

$$m^* = -\omega \mathcal{P} \sin(\omega t^*) = -\omega \mathcal{P} . \quad (8.1.9)$$

Si è dunque deciso di linearizzare questo tratto di funzione considerando la parte permanente come una retta passante per il punto t^* con pendenza m^* ; l'espressione della tensione diventa quindi

$$v_a(t) \simeq \mathcal{T} \cos(\mu t) + \omega \mathcal{P}(t^* - t) . \quad (8.1.10)$$

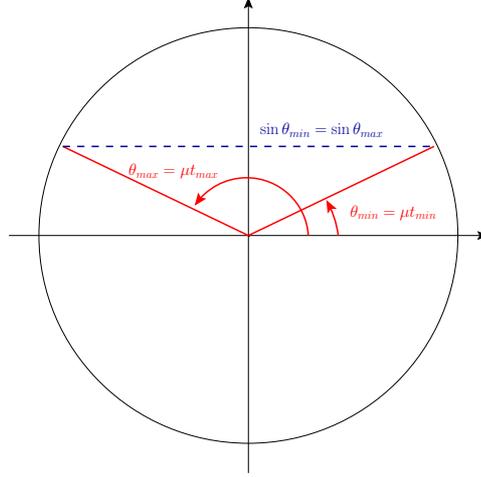


Figura 8.2: Circonferenza goniometrica in cui sono evidenziati i due punti stazionari t_{min} e t_{max} , di valore diverso ma il cui seno, che annulla la derivata della funzione, coincide

La (8.1.10) è un'equazione lineare di cui può essere calcolato il punto di massimo imponendo la derivata prima uguale a zero

$$\frac{dv_a(t)}{dt} = -\mu\mathcal{T} \sin(\mu t) - \omega\mathcal{P} = 0 \leftrightarrow \sin(\mu t) = -\frac{\omega\mathcal{P}}{\mu\mathcal{T}}. \quad (8.1.11)$$

Prima di procedere all'inversione di (8.1.11), è utile ragionare sull'andamento del termine transitorio di $v_a(t)$: con le ipotesi fatte esso sarà oscillante in modo permanente, mentre nella realtà sarà oscillatorio smorzato. Il picco di tensione si avrà dunque nel primo periodo, mentre eventuali picchi per istanti maggiori sono da trascurare, dato che non avranno luogo fisicamente.

Come si nota inoltre da figura 8.1, nel primo periodo ci sono due punti stazionari che soddisfano l'equazione (8.1.11), uno che corrisponde a un minimo relativo e l'altro a uno di massimo assoluto, che è quello che si sta cercando di calcolare. Se il punto di minimo si ha in un istante t_{min} tale che la fase sia $\theta_{min} = \mu t_{min}$, il punto di massimo si avrà in un istante t_{max} tale che la fase sia $\theta_{max} = \mu t_{max} = \pi - \theta_{min} = \pi - \mu t_{min}$, perché così $\sin \theta_{min} = \sin \theta_{max}$, come schematizzato in figura 8.1. Questo va tenuto in considerazione perché la funzione inversa arcseno è definita solo da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ e, applicandola con leggerezza, fornirebbe il valore t_{min} . Avendo appena visto come ricondursi a t_{max} si può infine scrivere:

$$t_{min} = \frac{1}{\mu} \arcsin\left(-\frac{\omega\mathcal{P}}{\mu\mathcal{T}}\right) \quad (8.1.12)$$

$$t_{max} = \frac{\theta_{max}}{\mu} = \frac{\pi - \theta_{min}}{\mu} = \frac{\pi}{\mu} - \arcsin\left(-\frac{\omega\mathcal{P}}{\mu\mathcal{T}}\right). \quad (8.1.13)$$

La (8.1.13) è l'espressione approssimata dell'istante di massimo di $v_a(t)$. Inserendola in

(8.1.10) si ottiene l'espressione analitica del valore massimo

$$\begin{aligned}
v_{a,max}(t_{max}) &\simeq \mathcal{T} \cos(\mu t_{max}) + \omega \mathcal{P}(t^* - t_{max}) \\
&= -\mathcal{T} \sqrt{1 - \sin^2(\mu t_{max})} + \omega \mathcal{P} \left(\frac{\pi}{2\omega} - t_{max} \right) \\
&= -\mathcal{T} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega \mathcal{P}}{\mu \mathcal{T}} \right)^2} + \mathcal{P} \left[\frac{\pi}{2} - \pi \frac{\omega}{\mu} + \frac{\omega}{\mu} \arcsin \left(-\frac{\omega \mathcal{P}}{\mu \mathcal{T}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{8.1.14}$$

dove tra le due radici possibili di $\cos(\mu t_{max})$ in funzione di $\sin(\mu t_{max})$ si è tenuto conto che esso ha valore negativo, come ben visibile in figura 8.1.

Si raccolga in (8.1.14) il termine \mathcal{P} : come si vedrà, dal punto di vista della precisione, non ha particolare influenza approssimare il rapporto come $\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{P}} \simeq -1$. Le (8.1.13) e (8.1.14) possono essere ridotte alle più compatte e immediate

$$t_{max} \simeq \frac{\pi}{\mu} - \arcsin \left(-\frac{\omega}{\mu} \right) . \tag{8.1.15}$$

$$v_{a,max}(t_{max}) \simeq \mathcal{P} \left\{ \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\mu} \right)^2} + \frac{\omega}{\mu} \left[\arcsin \left(-\frac{\omega}{\mu} \right) - \pi \right] + \frac{\pi}{2} \right\} , \tag{8.1.16}$$

su cui si possono fare alcune interessanti osservazioni.

Innanzitutto si vede come il valore massimo della tensione dipenda considerevolmente dal rapporto fra le due pulsazioni ω e μ , rispettivamente pulsazione della grandezza in ingresso e pulsazione naturale della linea di ordine maggiore.

In secondo luogo, si ricorda come il termine \mathcal{P} coincida con la sovratensione di regime per effetto Ferranti ed è calcolabile per linee brevi come [11]

$$\mathcal{P} = \frac{1}{1 - \omega^2 cd (L_{cc} + \frac{1}{2}d)} . \tag{8.1.17}$$

Infine è utile spendere alcune parole sul calcolo di μ . Come si è visto in 4.2 e 5.2 esso è sempre stato fatto utilizzando metodi numerici o al calcolatore, come Newton - Raphson o la risoluzione automatica delle radici di un polinomio. Se si dovesse ricorrere a questi metodi verrebbe meno l'utilità della formula, perché a quel punto sarebbe più semplice utilizzare direttamente uno dei metodi proposti in quest'articolo, con maggiore precisione. Si è deciso quindi di presentare il calcolo di μ ricorrendo all'approssimazione a costanti concentrate della linea, come peraltro proposto in [8] e di immediata applicazione. Considerando valida la

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{L_{eq} C_{eq}}} \tag{8.1.18}$$

restano da determinare i parametri concentrati equivalenti a seconda della configurazione del sistema. Nel caso di singola terna alimentata da una rete modellizzabile da un generatore equivalente di tensione si avrà

$$L_{eq} = L_{cc} + L_{es} , \tag{8.1.19}$$

$$C_{eq} = C_{es} , \tag{8.1.20}$$

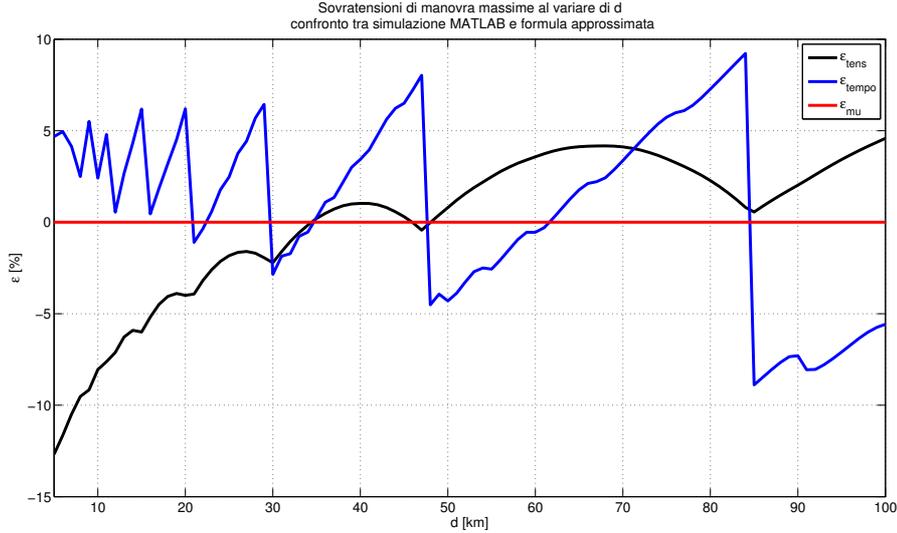


Figura 8.3: Confronto tra la formula approssimata e il metodo Ghizzetti - Ossicini, utilizzando i termini \mathcal{T} e \mathcal{P} esatti e μ calcolata numericamente

mentre nel caso di linee in parallelo

$$L_{eq} = L_{cc} + \frac{L_{es}}{2}, \quad (8.1.21)$$

$$C_{eq} = 2C_{es}. \quad (8.1.22)$$

Si vedrà nella sezione successiva che imprecisioni questo calcolo semplificato comporta.

8.2 Verifica della formula approssimata

Resta ora da stabilire la bontà delle approssimazioni effettuate e gli eventuali campi di applicazione della formula, in base alle tolleranze di precisione ammesse. Le simulazioni sono state svolte prendendo come caso sempre quello riportato al capitolo 3 e utilizzato in tutto l'articolo. Il metodo considerato esatto è il Ghizzetti - Ossicini.

Ogni simulazione prevede il lancio del programma numerico, da cui si ricava l'elemento di valore massimo del vettore tensione d'uscita a cui è associato anche un preciso istante. Implementando le formule (8.1.15) e (8.1.16) si calcola lo scarto relativo percentuale; inoltre, viene presentato il caso significativo con il calcolo di μ approssimata.

8.2.1 Verifica con \mathcal{T} e \mathcal{P} esatti, μ esatta

Il primo caso considera ovviamente se l'approssimazione lineare è da ritenersi valida, senza la quale non si sarebbe riusciti a trovare la formula. Il rapporto tra i coefficienti \mathcal{T} e \mathcal{P} non è approssimato e μ è calcolata usando il metodo di Newton - Raphson.

Come si vede in figura 8.3 l'errore sull'istante di massimo si mantiene in un range del $\pm 10\%$ per distanze anche molto elevate; l'andamento a dente di sega è imputabile al fatto che nella formulazione approssimata si è considerato una sola pulsazione μ , mentre nella realtà il termine transitorio è dato da una sommatoria infinita di termini oscillatori. Questi ultimi creano

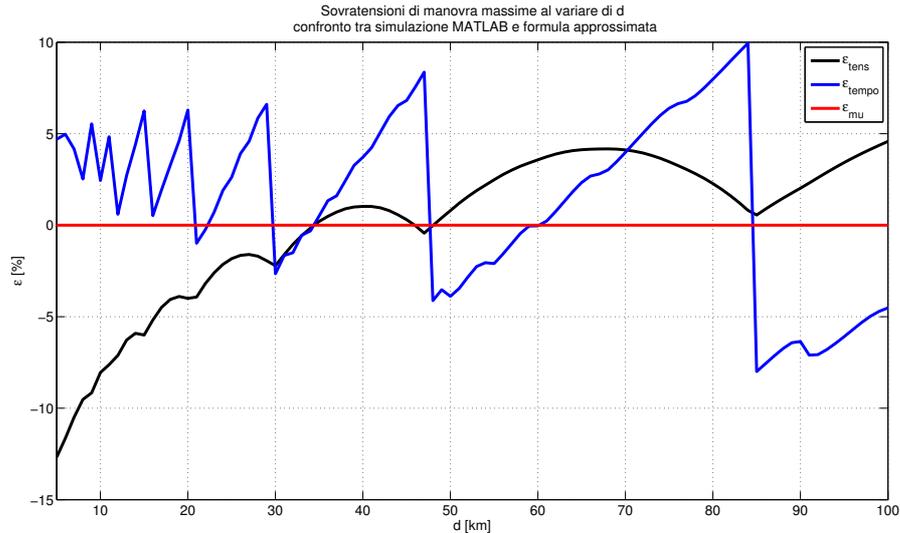


Figura 8.4: Confronto tra la formula approssimata e il metodo Ghizzetti - Ossicini, utilizzando l'approssimazione a -1 del rapporto tra i termini \mathcal{T} e \mathcal{P} e μ calcolata numericamente

un'impresione definibile come un disturbo periodico che si sovrappone alla fondamentale del termine transitorio. Va però tenuto in conto che queste oscillazioni nella realtà sono smorzate dalla resistenza del cavo qui trascurata.

L'errore sul valore massimo è limitato a qualche percento anche per lunghe distanze, ma cresce molto per quelle brevi. In particolare per $d < 15 \text{ km}$ esso decresce molto rapidamente verso valori negativi, che porterebbero a sovrastimare la sovratensione nel cavo. Ciò è dovuto al venir meno della validità dell'approssimazione lineare del termine permanente: per brevi distanze infatti il punto di massimo tende sempre più a spostarsi verso i primi istanti del transitorio. In quei punti il coseno dell'ingresso è ancora nell'intorno del suo punto di massimo, piuttosto piatto che decrescente in modo lineare, come visibile in figura 8.1.

8.2.2 Verifica con \mathcal{T} e \mathcal{P} approssimati, μ esatta

Viene ora proposto il caso in cui il rapporto tra \mathcal{T} e \mathcal{P} sia approssimato pari a -1 . Come si vede in figura 8.4 gli andamenti degli errori non vengono molto modificati: restano infatti gli stessi range di tolleranza visti al paragrafo precedente. A fronte della notevole semplificazione di calcolo, quest'approssimazione è stata quindi ritenuta utile e valida.

8.2.3 Verifica con \mathcal{T} e \mathcal{P} approssimati, μ approssimata

Il caso conclusivo è quello che riveste anche il maggior interesse: è stata qui infatti implementata la formula ricorrendo al calcolo analitico di μ secondo (8.1.18) e (8.1.21).

Come si vede da figura 8.5, all'aumentare della distanza d l'errore relativo commesso su μ cresce linearmente. Correlando questa nuova causa di imprecisione agli altri errori relativi, si nota come essa pesi notevolmente, poiché per lunghe distanze porta l'errore sul valore massimo a divergere. Non si è riusciti a trovare un modo più preciso per calcolare il valore di μ : se si considerano accettabili tolleranze del $\pm 5\%$, la formula (8.1.16) presentata e utilizzata con

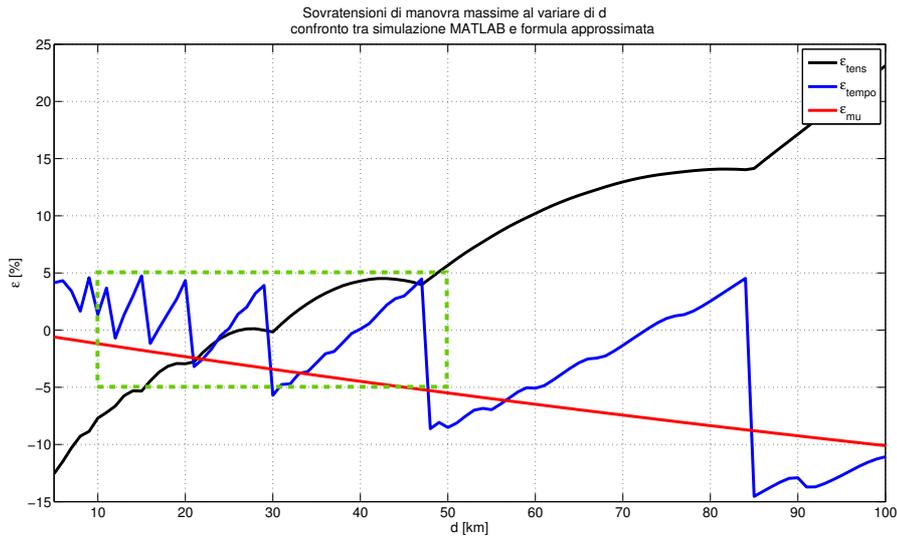


Figura 8.5: Confronto tra la formula approssimata e il metodo Ghizzetti - Ossicini, utilizzando l'approssimazione a -1 del rapporto tra i termini \mathcal{T} e \mathcal{P} e μ calcolata analiticamente

(8.1.18) ha validità entro un range di distanze tra 15 e 50 km, come evidenziato in figura 8.5 nel rettangolo verde.

9 Conclusioni

Il lavoro di ricerca presentato in questo documento è rilevante poiché fornisce delle utili basi per

- validare modelli creati con EMTP-RV;
- creare nuove procedure self - made nel caso di linee reali e multiconduttore.

Per quanto riguarda il primo punto, si ha spesso la necessità di verificare se i dati del modello immessi in EMTP-RV combaciano con quelli che si hanno e se esso rispecchia la situazione da simulare. Avere più di un metodo disponibile per una verifica, con possibilità di inserire manualmente i parametri elettrici della linea, consente di svincolarsi dalle routine interne al programma e mette al riparo da erronee conclusioni. Di fatto, troppo spesso risultati non coerenti con la realtà sono dovuti ai classici errori umani di creazione del modello o a ipotesi di partenza non valide, piuttosto che a imprecisioni del programma.

Per quanto riguarda il secondo punto, si è visto come il metodo Benato ben si presti ad essere ulteriormente investigato e sviluppato. Essendo l'MCA uno dei punti di forza delle odierne analisi sui sistemi elettrici, appare affascinante l'ipotesi di estenderlo dai casi di regime di guasto ai regimi transitori.

Ha inoltre valenza teorica l'esser riusciti ad antitrasformare in ben tre modi diversi una funzione nel dominio di Laplace senza ricorrere a metodi di calcolo numerico. La sempre più grande capacità di calcolo degli elaboratori porta infatti a non investire molto risorse sull'ottimizzazione delle operazioni da eseguire, nè tantomeno alla creazione di algoritmi dedicati; la riscoperta di metodi noti da decenni, ma mai utilizzati, ha invece dimostrato che si possono ottenere non solo buoni risultati, ma anche in tempi minori rispetto alle soluzioni commerciali.

In più, a partire dal metodo Ghizzetti - Ossicini, si è riusciti a ricavare una formula approssimata, con un range di applicazione dai 15 ai 50 *km* entro errori del $\pm 5\%$, che può tornare utile per valutazioni preliminari su l'installazione di linee in cavo in un particolare punto della rete.

10 Ringraziamenti

Vorrei ringraziare con calore e affetto i miei genitori, Roberto e Angelisa, che hanno faticato silenziosamente garantendomi disponibilità e tempo per portare a termine i miei studi, senza mai farmelo presente e dandomi sempre grande soddisfazione quando conseguivo i miei risultati.

Con amore ringrazio anche la mia fidanzata Chiara, che mi ha sostenuto e pazientemente aspettato quando i miei impegni mi portavano via da lei, riuscendo a farmi sorridere nei momenti di scoraggiamento ed ansia.

Ringrazio il prof. Roberto Benato, per avermi seguito in questi mesi e mostrato come ci si può entusiasmare di fronte alla ricerca scientifica; non avrei potuto risolvere molti problemi trovati nel corso del lavoro di tesi senza il prezioso aiuto di Fabio e Sebastian, che non si sono mai rifiutati di rispondere ai miei dubbi più banali o a quelli più impegnativi.

Infine ringrazio tutti i miei amici, chi compagno di Corso, chi compagno di stanza, chi entrambe le cose: questi cinque anni sarebbero stati più grigi e certe sfide meno affrontabili senza la vostra presenza.

Certe imprese necessitano di persone con cui parlare, confrontarsi e appoggiarsi per essere superate: chiunque mi sia stato vicino, sappia che sarò per sempre legato nei miei ricordi a quest'esperienza bellissima che si chiama Università.

Riferimenti bibliografici

- [1] WG 21/22-01, “Comparison of Overhead Lines And Underground Cables For Electricity Transmission”, CIGRÈ 1996
- [2] D. Pietribiasi, “Conduttori innovativi per le reti in Alta Tensione”, Padova, Tesi di Laurea Triennale in Ingegneria dell’Energia, 2011
- [3] R. Benato, C. Di Mario, A. Lorenzoni: “Lines versus Cables: Consider All Factors”, *Transmission & Distribution World*, vol. 59, n. 11, pp. 26-32, novembre 2007
- [4] R. Benato, P. Brunello, E. M. Carlini, C. Di Mario, L. Fellin, G. Knollseisen, M. Laußegger, M. Muhr, A. Paolucci, W. Stroppa, H. Worle, R. Woschitz, “Italy–Austria GIL in the new planned railway galleries Fortezza–Innsbruck under Brenner Pass”, *E&I Elektrotechnik und Informationstechnik*, vol. 123, n. 12, pp. 551-558, dicembre 2006
- [5] R. Benato, C. Di Mario, H. Koch, “High capability applications of Long Gas Insulated Lines in Structures”, *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 22, n. 1, pp.619-626, gennaio 2007
- [6] A. Boscaro, “Sovratensioni di origine atmosferica in linee elettriche miste di tipo aerea-cavo e aerea-blindata”, Padova, Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Elettrotecnica, 2012
- [7] L. Bellin, “Sovratensioni di origine interna di manovra in linee elettriche ibride aerea-cavo e aerea-blindata”, Padova, Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Elettrotecnica, 2012
- [8] A. Paolucci, *Trasmissione dell’energia elettrica*, Padova, CLEUP, 1998
- [9] G. Sameda, G. Zingales, F. Gasparini, *Elementi di elettrotecnica generale*, Padova, Patron, 1977
- [10] R. Benato, “Multiconductor Analysis of underground power transmission system: EHV AC cables”, *Electric Power System Research*, vol. 79, pp. 27-38, 2009
- [11] R. Benato, L. Fellin, *Impianti Elettrici*, Torino, UTET Scienze Tecniche, 2011
- [12] R. Benato, L. Fellin, A. Paolucci, “Elettrodotti blindati: una alternativa per la trasmissione”, *L’Energia Elettrica*, vol. 77, pp. 60-63
- [13] A. Dalla Verde, G. Silva, *Calcolazione elettrica delle grandi linee di trasmissione*, Milano, Libreria ed. politecnica, 1930
- [14] R. Benato, A. Paolucci, *EHV AC Undergrounding Electrical Power: Performance and Planning*, Londra, Springer, 2010
- [15] “Valori minimi e massimi convenzionali della corrente di corto circuito e della potenza di corto circuito della rete rilevante con tensione 380-220-150-132 kV - Anno 2012”, www.terna.it/default/Home/SISTEMA_ELETTTRICO/qualita_servizio_trasmissione, Maggio 2013

- [16] WG C4-109, “Steady-state and transient EHV AC cable shunt reactive compensation assessment”, CIGRÈ 2010
- [17] Norma CEI EN 60228 (anche CEI 20-29), *Conduttori per cavi isolati*, terza edizione, 2005
- [18] H. W. Dommel, *EMTP Theory Book*, Portland, OR, Bonneville Power Administration, 1982
- [19] Norma CEI 11-25, *Calcolo delle correnti di corto circuito nelle reti trifasi a corrente alternata Parte 0: Calcolo delle correnti*, seconda edizione, 2001
- [20] L. Marti, “Simulation of Electromagnetic Transients in Underground Cables using the EMTP”, IEE 2nd International Conference on Advances in Power System Control, Operation and Management, Hong Kong, Dicembre 1993, pp. 147-152
- [21] IEEE Working Group 15.08.09, *Modeling and Analysis of Switching Transients Using Digital Programs*, Piscataway, NJ, IEEE Operations Center, Settembre 1998, pp. 73-97
- [22] A. Ametani, “A Method of a Lightning Surge Analysis Recommended in Japan using EMTP”, *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 20, n. 2, pp. 867-875, Aprile 2005
- [23] U. S. Gudmundsdottir , C. L. Bak and W. T. Wiechowski, *Modeling of long High Voltage AC Underground Cables in the Transmission System*, Aalborg University, Department of Energy Technology, 2010, pp. 16-22
- [24] F. A. Uribe, “Electromagnetic transients in underground transmission systems through the numerical Laplace transform”, *Electrical Power and Energy Systems*, vol. 24, pp. 215-221, 2002
- [25] X. M. Lopez-Fernandez , C. Alvarez-Mariño , V. Malo-Machado, “Computation Method for Transients in Underground Cables With Lossy Earth Return Path”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 46, n. 8, pp. 2911-2914, Agosto 2010
- [26] A. Ghizzetti, A. Ossicini, *Trasformate di Laplace e calcolo simbolico*, Torino, UTET, 1971

Appendice A: Richiami di analisi complessa

Vengono di seguito brevemente richiamate alcune definizioni e teoremi matematici utilizzati nel testo.

A.1 Derivata complessa e rappresentazioni in serie

Si definisce prima di tutto la **derivata complessa** di una funzione:

DEF A.1.1: Sia $f(z)$ una funzione definita in un insieme aperto contenente il punto z_0 ; si definisce derivata complessa di f nel punto z_0 il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) . \quad (\text{A.1.1})$$

Esistono poi vari metodi di rappresentazione in serie di una funzione in un punto; uno fra questi lo **sviluppo in serie di Laurent**:

DEF A.1.2: Data una funzione $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$ connesso, essa è sviluppabile in serie di Laurent in un campo circolare \mathbb{C}_0 come

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z - z_0)^k = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{C_{-r}}{(z - z_0)^r} + \sum_{s=0}^{\infty} C_s (z - z_0)^s , \quad (\text{A.1.2})$$

con C_k detti coefficienti della serie di Laurent e calcolabili usando

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz , \quad (\text{A.1.3})$$

ove γ è una qualsiasi circonferenza di centro z_0 e contenuta in \mathbb{C}_0 .

Un caso particolare dello sviluppo in serie di Laurent è lo **sviluppo in serie di Taylor**, che considera termini C_k con solo $k > 0$:

DEF A.1.3: Data una funzione $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$ connesso, essa è sviluppabile in serie di Taylor come

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k , \quad (\text{A.1.4})$$

con C_k detti coefficienti della serie di Taylor e calcolabili usando

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} . \quad (\text{A.1.5})$$

Se z_0 fosse un punto regolare allora la serie di Laurent coinciderebbe con quella di Taylor.

A.2 Classi di funzioni

Le funzioni complesse possono essere **funzioni analitiche** se vale il seguente teorema:

TEO A.2.1: *Una funzione è analitica se e solo se, preso comunque un punto appartenente al dominio della funzione, esiste un suo intorno in cui la funzione coincide col suo sviluppo in serie di Taylor (A.1.4).*

Alle funzioni analitiche appartiene una prima classe di funzioni complesse, le **funzioni olomorfe**:

DEF A.2.1: *Sia $f(z)$ una funzione definita in un insieme connesso \mathbb{C} ; essa si dice olomorfa in \mathbb{C} se è derivabile secondo la definizione A.1.1 in ogni punto $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Una seconda classe di funzioni complesse sono le **funzioni meromorfe**, definite secondo

DEF A.2.2: *Si dice che una funzione $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$ connesso, è meromorfa in $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ se $f(z)$ è olomorfa in $\mathbb{D} - \{z_1, z_2, \dots\}$, con z_1, z_2, \dots punti singolari non essenziali.*

Un caso particolare di funzioni meromorfe sono le funzioni razionali, caratterizzate da un numero di singolarità finito; caso più interessante sono quelle funzioni meromorfe che hanno un infinito numero di singolarità.

A.3 Punti singolari

Si inizia dando la definizione di una **singolarità isolata**:

DEF A.3.1: *Si dice singolarità isolata un punto isolato in cui una funzione olomorfa non è definita, mentre risulta definita in ogni altro punto vicino.*

I punti singolari isolati possono essere distinti in **eliminabili**, **poli** o **essenziali**; per i nostri scopi interessano in particolare gli ultimi due tipi. La definizione A.1.2, ed in particolare la formula (A.1.3), sono necessarie per definire un generico **polo di ordine m**

DEF A.3.2: *Si dice polo di ordine m un punto tale che il coefficiente m -esimo della serie di Laurent sia*

$$C_{-m} \neq 0, C_{-(m+1)} = C_{-(m+2)} = \dots = 0,$$

e un **punto essenziale**

DEF A.3.3: *Si dice punto essenziale un punto tale che esistono infiniti coefficienti della serie di Laurent diversi da 0:*

$$C_{-1} = C_{-2} = \dots \neq 0.$$

Per stabilire la natura di un punto singolare non è però necessario applicare letteralmente le precedenti definizioni, dato che è possibile utilizzare il seguente teorema A.3.1:

TEO A.3.1: *Se z_0 è una singolarità isolata di $f(z)$ allora si può dire che z_0 è:*

- *eliminabile* $\leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \ell < \infty$;
- *polo* $\leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$;
- *polo di ordine m* $\leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^m = \ell < \infty$;
- *essenziale* $\leftrightarrow \nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

A.4 Teorema dei residui

DEF A.4.1: *Si definisce **residuo** $R(z_0)$ nel punto z_0 il coefficiente della serie di Laurent C_{-1} , calcolato secondo (A.1.3). Nel caso particolare in cui z_0 sia un polo del primo ordine risulta anche*

$$C_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) . \quad (\text{A.4.1})$$

La conoscenza di questo concetto risulta utile per esprimere un particolare tipo di integrale, sotto opportune ipotesi, mediante somma di più termini, secondo il teorema A.4.1:

TEO A.4.1: *Sia $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$ connesso, una funzione definita in $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ che abbia un insieme di punti di singolarità $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset \mathbb{D}$, e la frontiera $\partial\mathbb{D}$ sia costituita da un numero finito di archi di curva e non cada su nessuno dei punti singolari z_1, z_2, \dots, z_n ; allora si può dire che*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} f(z) dz = R(z_1) + R(z_2) + \dots + R(z_n) . \quad (\text{A.4.2})$$

Appendice B: Trasformata e antitrasformata di Laplace

B.1 Trasformata di Laplace

DEF B.1.1: Siano t una variabile reale, $f(t)$ una funzione definita per $t \geq 0$, $s = a + ib$ una variabile complessa; si chiama **trasformata di Laplace unilatera** della $f(t)$ la funzione $F(s)$ definita formalmente da

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt ; \quad (\text{B.1.1})$$

si chiama invece **trasformata di Laplace bilatera** della $f(t)$ la funzione $F(s)$ definita formalmente da

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt . \quad (\text{B.1.2})$$

La (B.1.2) considera quei casi in cui $f(t)$ è definita anche per $t < 0$.

Per definire propriamente la trasformata i due integrali (B.1.1) e (B.1.2) devono convergere in un semipiano $\Re(s) > \rho$ (nel caso di (B.1.1)) o in una striscia $\rho < \Re(s) < \sigma$ (nel caso di (B.1.2)).

B.2 Antitrasformata di Laplace

TEO B.2.1: Se la trasformata di Laplace è propriamente definita come descritto al capitolo B.1, allora vale la formula d'inversione

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (\text{B.2.1})$$

in ogni punto t in cui la $f(t)$ sia continua oppure presenti discontinuità di prima specie; il valore di x può essere arbitrariamente fissato nell'intervallo (ρ, σ) .

Applicando il teorema B.2.1 si possono calcolare alcune trasformate notevoli, le più note delle quali sono riportate in tabella B.2. Per una lista di 170 trasformate analitiche di Laplace, praticamente comprensiva di ogni caso in materia, si rimanda a [26].

B.2.1 Antitrasformazione di funzioni razionali

Nel caso in cui la funzione nella variabile s sia razionale propria, cioè con grado del numeratore minore del grado del denominatore, è possibile calcolare l'antitrasformata sfruttando metodologie di base, utili anche per un approccio sistemico al problema.

Si prenda una funzione razionale propria, per ipotesi irriducibile,

$$F(s) = \frac{\varphi(s)}{\psi(s)} = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n} , \quad (\text{B.2.2})$$

con $\varphi(s)$ polinomio del numeratore di grado m , $\psi(s)$ polinomio del denominatore di grado n , $0 \leq m < n$, $a_0 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$. Siano s_1, s_2, \dots, s_r le radici del denominatore e $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$

Tabella 6: Trasformate notevoli di Laplace nei casi più semplici

n°	$f(t)$	$F(s)$
1	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
2	1	$\frac{1}{s}$
3	$\cos(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$
4	$\sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
5	$e^{-\alpha t} \cos(\alpha t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
6	$e^{-\alpha t} \sin(\alpha t)$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
7	$\cosh(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$
8	$\sinh(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$
9	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
10	$t^n e^{\beta t}$	$\frac{n!}{(s-\beta)^{n+1}}$

le loro rispettive molteplicità; è possibile procedere alla decomposizione di $F(s)$ in frazioni parziali secondo la formula

$$F(s) = \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^{\nu_k} \frac{R_h(s_k)}{(s-s_k)^h}, \quad (\text{B.2.3})$$

con $R_h(s_k)$ costanti da determinare dette residui di $F(s)$ nel polo s_k . Allora, grazie all'utilizzo della tabella B.2, risulta immediato dire che

$$f(t) = \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^{\nu_k} R_h(s_k) \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{s_k t}. \quad (\text{B.2.4})$$

Se le radici s_1, s_2, \dots, s_r sono semplici, cioè hanno molteplicità $\nu_k = 1 \forall k \in [1, r]$, la (B.2.4) si semplifica in

$$f(t) = \sum_{k=1}^n R(s_k) e^{s_k t}, \quad (\text{B.2.5})$$

con $r = n$ dato che il numero di radici dev'essere uguale al grado massimo del polinomio e tutte sono distinte fra loro. Inoltre, essendo i poli del primo ordine, si può applicare la (A.4.1) alla (B.2.2):

$$R(s_k) = \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) \frac{\varphi(s)}{\psi(s)}; \quad (\text{B.2.6})$$

facendo presente che $\psi(s) = \psi(s) - \psi(s_k)$ perché $\psi(s_k) = 0$ e applicando la definizione di

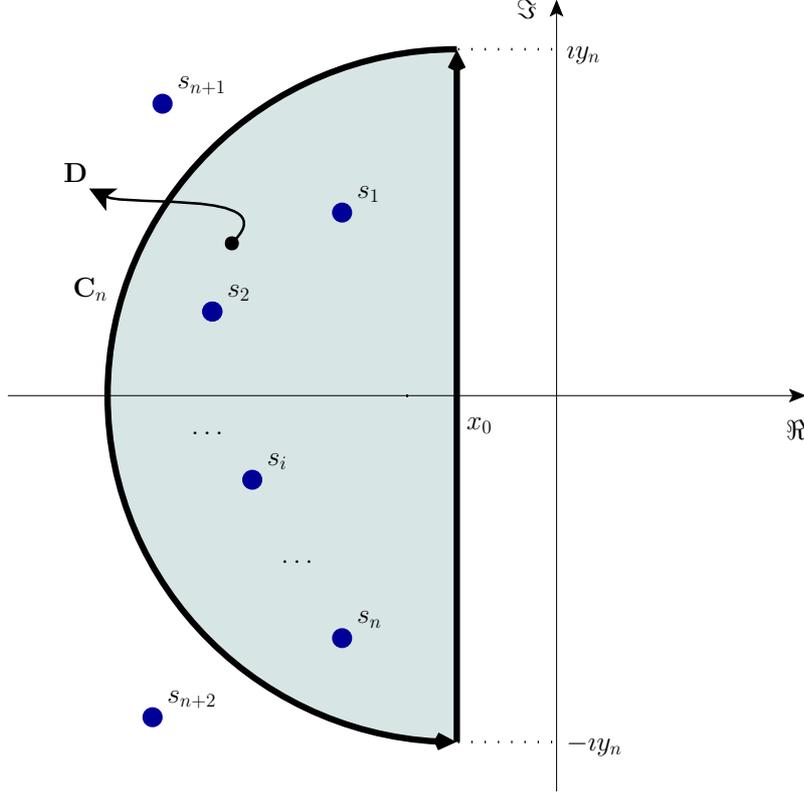


Figura B.1: Poli s_i all'interno del dominio \mathbb{D} , in azzurro; in grassetto, una curva appartenente alla successione \mathbb{C}_n , con estremi in $x_0 \pm iy_n$ e il relativo segmento di ascissa x_0 ed estremi $\pm iy_n$

derivata complessa A.1.1, si ricava che i residui $R(s_k)$ si possono calcolare come

$$\begin{aligned}
 R(s_k) &= \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) \frac{\varphi(s)}{\psi(s) - \psi(s_k)} = \\
 &= \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{\varphi(s)}{\frac{\psi(s) - \psi(s_k)}{(s - s_k)}} = \\
 &= \frac{\varphi(s_k)}{\psi'(s_k)}
 \end{aligned} \tag{B.2.7}$$

B.2.2 Antitrasformazione di funzioni non razionali

Nel caso in cui l'antitrasformata non sia calcolabile secondo i metodi descritti al paragrafo precedente, si può ricorrere all'applicazione della formula di inversione (B.2.1); questo calcolo non è affatto semplice e generalmente dovrà essere risolto per via numerica. Esiste però un altro metodo applicabile se si suppone di conoscere $F(s)$ non solo nel semipiano $\Re(s) > 0$, ma in tutto il suo campo di esistenza.

Si prenda una funzione $F(s)$ meromorfa, che non ricada nel caso di funzione razionale già affrontato al paragrafo precedente. $F(s)$ avrà infiniti poli nel semipiano $\Re(s) \leq 0$ che indicheremo con s_1, s_2, \dots supponendo $|s_1| \leq |s_2| \leq \dots$. Sia $\{\mathbb{C}_n\}_{n=1,2,\dots}$ una successione di curve situate nel semipiano $\Re(s) \leq x_0$ con gli estremi nei punti $x_0 - iy_n, x_0 + iy_n$ della retta $\Re(s) = x_0$, essendo $|y_1| < |y_2| < \dots$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$. Sia inoltre il dominio \mathbb{D} racchiuso da \mathbb{C}_n e dalla retta $x = \Re(s) = x_0$ in modo tale da contenere al suo interno i poli s_1, s_2, \dots, s_n

e lasci all'esterno i poli rimanenti s_{n+1}, s_{n+2}, \dots (si veda la figura B.2.2). Allora, posto che il residuo di $e^{ts}F(s)$ nel polo s_k sia $R(s_k)$ (calcolato secondo (A.4.1)), l'applicazione della formula del teorema dei residui (A.4.2) porta a:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} e^{st} F(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - iy_n}^{x_0 + iy_n} e^{st} F(s) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} e^{st} F(s) ds = \sum_{k=1}^n R(s_k) \quad (\text{B.2.8})$$

Se si riescono a scegliere le curve C_n in modo che risulti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} e^{st} F(s) ds = 0 \quad (\text{B.2.9})$$

si può ricavare, passando (B.2.8) al limite per $n \rightarrow \infty$, che per ogni punto $t > 0$ in cui l'antitrasformata (B.2.1) esista finita, la serie $\sum_{k=1}^n R(s_k)$ riesce convergente e si ha:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} R(s_k) \quad (\text{B.2.10})$$

Le definizioni e i teoremi matematici qui riportati ci hanno permesso di arrivare ad una formulazione che non si incontra spesso dell'antitrasformata di Laplace; da un punto di vista più fisico si può pensare che, una volta noti i modi o pulsazioni naturali del sistema (cioè i suoi poli), l'antitrasformata nel tempo può essere ricavata come una somma infinita di termini oscillatori di pulsazione e ampiezza diversa, in analogia con la ben nota trasformata di Fourier. La teoria sopra esposta ci consente di valutare le ipotesi sotto cui è possibile applicare questo metodo e ci dice inoltre che i coefficienti della serie coincidono con i residui della funzione calcolati nel polo, cosa che non era immediatamente deducibile da un approccio più deduttivo e meno rigoroso.