Università degli studi di Padova

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Paradossi dell’implicazione materiale ed estensioni della logica minimale proposizionale

Relatore:
Prof. Francesco Ciraulo

Laureando: Lorenzo Nardean
Matricola: 1165751

Anno accademico 2021/2022
24 febbraio 2022

Indice

Introduzione

In questa tesi ci occuperemo dei cosiddetti paradossi dell'implicazione materiale e delle relazioni che intercorrono tra di loro in logica minimale, con l'obiettivo di studiare possibili estensioni per tale sistema logico. La logica minimale, l'ambiente logico nel quale lavoreremo, fu teorizzata nel 1937 dal matematico norvegese Ingebrigt Johansson [8], per questo talvolta è anche detta 'logica di Johansson', e si ottiene rimuovendo dal calcolo alla Hilbert per la logica proposizionale intuizionista l'assioma *ex falso sequitur quodlibet* ($\varphi \wedge \neg\varphi \to \psi$, con φ e ψ formule qualsiasi).

Cosa rende particolare questa logica, e perché decidiamo di studiare e classificare i paradossi dell'implicazione materiale proprio all'interno di questo sistema? La prima osservazione che si può fare è che la logica minimale rappresenta una base concettuale dalla quale si possono ottenere varie logiche via via più complesse: basta aggiungere un assioma per far evolvere la logica minimale in logica intuizionista; in particolare ogni tautologia in logica minimale è anche tautologia intuizionista. A seconda degli assiomi o delle regole che scegliamo di aggiungere alla logica minimale otteniamo logiche più complesse di quella di partenza.

L'assenza dell'assioma *ex falso quodlibet* ci permette di entrare nel campo delle logiche paraconsistenti, ovvero quelle in cui è ammessa l'inconsistenza (una proposizione del tipo $\varphi \wedge \neg\varphi$, con φ formula qualsiasi, cioè la simultanea presenza di una formula e della sua negazione), ma essa non genera teorie banali. In queste logiche si possono raggiungere risultati non banali partendo da un insieme di ipotesi inconsistente. Le logiche in cui tutte le teorie inconsistente sono banali sono dette *esplosive* [13]. Come suggerisce il filosofo Graham Priest [14], le logiche paraconsistenti possono essere usate in molti campi, ad esempio: informazioni di un database, teorie scientifiche, costituzioni e altri sistemi giuridici etc.

In un articolo sulle logiche paraconsistenti [11] Maarten McKubre-Jordens scrive:

> "Paraconsistent mathematics is mathematics where some contradictions are allowed. The term 'paraconsistent' was coined to mean 'beyond the consistent'. The objects of study are essentially the same as classical mathematics, but the allowable universe of study is enlarged by

> allowing some inconsistent objects. The paraconsistent response to the classical paradoxes and contradictions is to say that these are interesting facts to study, instead of problems to solve. [...]
> The thought is this: suppose I have a pretty good theory that makes sense of a lot of the things I see around me, and suppose that somewhere in the theory a contradiction is hiding. Paraconsistent logicians hold that this does not (necessarily) make the theory incoherent, it just means one has to be very careful in the deductions one makes to avoid falling from contradiction into incoherence."

L'articolo di Hans Diener e Maarten McKubre-Jordens *"Classifying material implications over minimal logic"* [6] si propone di classificare i paradossi dell'implicazione materiale usando la logica minimale, con il proposito di dare "motivazioni a supporto dell'uso della logica minimale come ambiente logico per ragionare nei casi in cui è possibile la presenza di una inconsistenza". Questo articolo è stata la principale fonte, assieme alla tesi *"Minimal and Subminimal Logic of Negation"* [3] e al libro *"Constructive Negations and Paraconsistency"* [13] nei quali è possibile trovare numerosi approfondimenti.

Come per ogni logica, nel Capitolo 1 definiremo una sintassi e una semantica per la logica minimale. Vedremo che sintatticamente è possibile definire gli assiomi della logica minimale in due modi differenti: $\mathrm{LM}_{\perp}$, e $\mathrm{LM}_{\neg}$. Queste due assiomatizzazioni sono equivalenti. La semantica che scegliamo per la logica minimale usa i frame di Kripke. Vedremo i teoremi di completezza e validità, che saranno utili per i capitoli successivi. Concluderemo con alcuni cenni storici sullo sviluppo della logica minimale.

Nel Capitolo 2 si definiranno i paradossi dell'implicazione materiale. Tutte queste proposizioni sintattiche sono tautologie in logica classica, ma non sono dimostrabili in logica minimale. Molti di questi paradossi sono conosciuti sin dai tempi della Scolastica, come per esempio la *consequentia mirabilis*: $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$.

Il Capitolo 3 mostrerà l'esistenza di equivalenze in logica minimale tra alcuni paradossi dell'implicazione materiale e altre proposizioni notevoli, come la doppia negazione, il terzo escluso, l'ex falso, e il terzo escluso debole. Si arriverà a definire lo schema del teorema 3.0.1, che rappresenta una base di partenza per lo studio delle estensioni della logica minimale.

Nel Capitolo 4 si farà una breve parentesi sul frammento implicazionale. In particolare, andremo a vedere dove si collocano nello schema del teorema 4.2.2 le versioni implicazionali di due importanti paradossi dell'implicazione materiale, DGP $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ e la formula di Tarski $\psi \vee (\psi \to \vartheta)$.

Il Capitolo 5 servirà a dimostrare che nello schema del teorema 4.2.2 nessuna freccia può essere invertita e nessuna freccia può essere aggiunta. Faremo uso del teorema di validità, introdotto nel Capitolo 1. Questo ci assicura che se esistesse una dimostrazione di A $\to$ B, allora in ogni modello che rende valido A è valido anche B. Basta trovare un modello in cui è valido A ma non è valido B per affermare che la dimostrazione di A $\to$ B non esiste. Attraverso l'uso di contromodelli opportunamente scelti, questo ci permetterà di dimostrare che le frecce nello schema del teorema 4.2.2 non possono essere invertite e nessuna freccia può essere aggiunta.

Dunque questo schema ci permette di dare alcune estensioni per la logica minimale non *esplosive*, ovvero in cui la presenza dell'inconsistenza non genera risultati banali. Come osserva Sergei Odintsov [13], questo non salva la logica minimale dal problema dell'equivalenza di tutte le negazioni: per ogni formula φ e ψ, possiamo dimostrare che $\varphi, \neg\varphi \vdash_{LM} \neg\psi$. Ciò significa che la negazione non ha significato in una teoria inconsistente della logica minimale, perché tutte le formule di negazione sono derivabili da essa.

Nel Capitolo 6 si cercherà una soluzione a questo problema tramite l'introduzione di due operatori unari: l'operatore contraddizione $C(\varphi)$ e l'operatore falso $A(\varphi)$.
Qual è l'intuizione alla base di questi due operatori? Possiamo interpretare la contraddizione non solo come una costante proposizionale $\perp$ ma possiamo definirla come $C(\varphi) := \varphi \wedge \neg\varphi$. Da questa definizione segue che $C(\varphi)$ deve implicare φ [13]. L'operatore $A(\varphi)$, invece, può non avere nessuna relazione con φ, come nel caso di LM in cui $A(\varphi)$ è proprio la costante $\perp$.

Capitolo 1

Logica minimale proposizionale

1.1 Assiomi della logica minimale

Dato un insieme numerabile di variabili proposizionali, una formulazione della logica minimale proposizionale (d'ora in poi per brevità talvolta la chiameremo solo logica minimale) si può ottenere a partire da un linguaggio $\mathcal{L}^{\perp} = \mathcal{L}^{+} \cup \{\perp\}$, dove $\mathcal{L}^{+}$=$\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, e il simbolo $\perp$ indica il concetto di *falso* o *contraddizione*. In questo linguaggio ogni formula del tipo $p \rightarrow p$, con p variabile proposizionale arbitraria, viene indicata con la costante proposizionale $\top$ ad indicare il concetto di *vero* o *tautologia*.

Definizione 1.1.1. Nel linguaggio $\mathcal{L}^{\perp}$, dato un insieme $\mathcal{P}$ di variabili proposizionali chiamiamo *formula* una lista di simboli definita induttivamente in tal modo:

- ogni variabile proposizionale in $\mathcal{P}$ è una formula;
- $\perp$ è una formula;
- se φ e ψ sono formule, allora $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ sono formule.

L'insieme delle formule su $\mathcal{P}$ è detto $\mathcal{P}(PROP)$. Useremo la notazione $\varphi \leftrightarrow \psi$ come abbreviazione di $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

Presentiamo una formalizzazione della logica minimale tramite un calcolo alla Hilbert [5]. Consideriamo i seguenti assiomi:

1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
2. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \vartheta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \vartheta))$
3. $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$

4. $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$

5. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \vartheta) \to (\varphi \to (\psi \wedge \vartheta)))$

6. $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$

7. $\psi \to (\varphi \vee \psi)$

8. $(\varphi \to \vartheta) \to ((\psi \to \vartheta) \to ((\varphi \vee \psi) \to \vartheta))$

Chiameremo questa formulazione della logica minimale $\mathrm{LM}_\perp$.
Per essere precisi, si tratta di *schemi* di assiomi: le lettere φ, ψ e ϑ indicano formule arbitrarie. Oltre a questi otto assiomi assumiamo come unica regola di deduzione il *modus ponens*: se φ e $\varphi \to \psi$ sono teoremi, allora lo è anche ψ.
Aggiungendo agli assiomi 1 - 8 l'assioma

$$\perp \to \varphi \qquad \textit{ex-falso}$$

si ottiene una formalizzazione della logica intuizionista [5].

Definizione 1.1.2. Dato un insieme di formule Φ e una formula φ, una *dimostrazione* di φ a partire dalle ipotesi Φ è una successione finita $\varphi_1, ..., \varphi_n$ dove $\varphi_n = \varphi$ e per ogni $0 \leq k \leq n$ è soddisfatta (almeno) una delle seguenti alternative:

1. φ_k è un assioma;

2. φ_k appartiene a Φ;

3. φ_k segue da due elementi precedenti per modus ponens, cioè esistono $i, j < k$ tali che $\varphi_j = \varphi_i \to \varphi_k$.

Scriveremo $\Phi \vdash \varphi$ per indicare che esiste una dimostrazione di φ a partire dalle ipotesi Φ. Diremo anche che φ è conseguenza logica di Φ.

Un inisieme di formule Φ è detto *teoria* se è chiuso per la conseguenza logica: $\Phi \vdash \varphi$ implica $\varphi \in \Phi$.
Vale il seguente:

Teorema 1.1.1 (Teorema di deduzione)**.** *Sia $\Phi \cup \{\varphi, \psi\}$ un insieme di formule di un linguaggio del primo ordine. Allora $\Phi \vdash \varphi \to \psi$ se e solo se $\Phi, \varphi \vdash \psi$.*

Dimostrazione. Se $\Phi \vdash \varphi \to \psi$, cioè esiste una dimostrazione di $\varphi \to \psi$ a partire da ipotesi in Φ, allora aggiungendo l'ipotesi φ possiamo concludere per modus ponens, cioè vale $\Phi, \varphi \vdash \psi$.
Viceversa, sappiamo per ipotesi che $\Phi, \varphi \vdash \psi$, cioè esiste una lista finita $\gamma_0, ...\gamma_n$

che costituisce una dimostrazione di ψ a partire da Φ e φ. Procediamo per induzione su n.
Se $n = 0$ significa che ψ è un assioma oppure appartiene a Φ, φ. Se ψ è un assioma oppure appartiene a Φ allora vale $\Phi \vdash \psi$, e quindi $\Phi \vdash \varphi \to \psi$ (per Ax1).
Se invece ψ coincide con φ allora $\varphi \to \psi$ è dimostrabile senza bisogno di ipotesi; dunque vale $\Phi \vdash \varphi \to \psi$.
Supponiamo il teorema vero per dimostrazioni di lunghezza minore di n. Dimostriamolo per dimostrazioni di lunghezza n:

- se γ_n cioè ψ è un assioma oppure appartiene a Φ, φ si ragiona come nel caso base.
- se esistono $i, j < n$ tali che $\gamma_j = \gamma_i \to \psi$, allora $\Phi, \varphi \vdash \gamma_i$ e $\Phi, \varphi \vdash \gamma_i \to \psi$. Per ipotesi induttiva si ottiene $\Phi \vdash \varphi \to \gamma_i$ e $\Phi \vdash \varphi \to (\gamma_i \to \psi)$. Quindi la tesi perché $\varphi \to \gamma_i$, $\varphi \to (\gamma_i \to \psi) \vdash \varphi \to \psi$.

□

Da questa dimostrazione si può osservare che essa è del tutto identica a quella del caso classico. In effetti il teorema vale per ogni linguaggio del primo ordine che abbia almeno i primi due assiomi (gli unici che abbiamo usato) e come unica regola il modus ponens [1].

Un modo equivalente per definire la sintassi per la logica minimale è quello di considerare gli assiomi 1 - 8, a cui si aggiunge

$$9. \ ((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi)) \to \neg\varphi$$

Questo assioma è chiamato *principle of contradiction* [3], o *reductio ad absurdum* [13].
Chiaramente, dal momento che abbiamo fatto uso del simbolo $\neg$, stiamo usando un linguaggio diverso da $\mathcal{L}^{\perp}$: stiamo semplicemente usando il linguaggio $\mathcal{L}^{\neg} = \mathcal{L}^{+} \cup \{\neg\}$, dove il simbolo $\neg$ rappresenta la negazione.

Definizione 1.1.3. Nel linguaggio $\mathcal{L}^{\neg}$, dato un insieme $\mathcal{P}$ di variabili proposizionali, chiamiamo *formula* una lista di simboli definita induttivamente in tal modo:

- ogni variabile proposizionale in $\mathcal{P}$ è una formula;
- se φ è una formula $\neg\varphi$ è una formula;
- se φ e ψ sono formule, allora $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$ sono formule.

Quella che si ottiene è una formulazione che chiameremo $\mathrm{LM}_{\neg}$.

1.2 Equivalenza di $\mathrm{LM}_\perp$ e $\mathrm{LM}_\neg$

Ci chiediamo come interpretare nei due sistemi i simboli $\perp$ e $\neg$. Osserviamo preliminarmente che in $\mathrm{LM}_\perp$ il simbolo di contraddizione $\perp$ equivale a $\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi$. Lo dimostriamo tramite la seguente

Proposizione 1.2.1. *Per ogni formula φ, vale*

$$LM_\perp \vdash \perp \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$$

dove $\neg\varphi$ significa $\varphi \to \perp$

Dimostrazione. Assumiamo come ipotesi $\perp$. Usiamo il teorema di deduzione:
$\vdash \perp \to \neg\varphi$ equivale a dimostrare $\perp \vdash \neg\varphi$, equivale a dimostrare $\perp, \varphi \vdash \perp$ che è banalmente vero.
$\vdash \perp \to \neg\neg\varphi$ equivale a dimostrare $\perp \vdash \neg\neg\varphi$, equivale a dimostrare $\perp, \neg\varphi \vdash \perp$ che è banalmente vero.

$\perp \to \neg\varphi$	
$\perp \to \neg\neg\varphi$	
$(\perp \to \neg\varphi) \to ((\perp \to \neg\neg\varphi) \to (\perp \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)))$	Ax5
$\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi$	modus ponens

Viceversa:

$(\varphi \to \perp) \wedge ((\varphi \to \perp) \to \perp)$	ipotesi
$\varphi \to \perp$	Ax3
$(\varphi \to \perp) \to \perp$	Ax4
$\perp$	modus ponens

□

Definizione 1.2.1. Data φ formula in $\mathcal{L}^\perp$, definiamo la sua traduzione φ^* in $\mathcal{L}^\neg$ per ricorsione sulla complessità di φ in questo modo

- $p^* := p$, per ogni variabile p,
- $\perp^* := \neg q \wedge \neg\neg q$, dove q è una variabile proposizionale fissata,
- $(\varphi \circ \psi)^* := \varphi^* \circ \psi^*$, dove $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$

Lemma 1.2.1. *Data una formula φ arbitraria in $\mathcal{L}^{\perp}$,*

$$LM_{\perp} \vdash \varphi \Rightarrow LM_{\neg} \vdash \varphi^{*}$$

Dimostrazione. Per induzione sulla profondità della dimostrazione di φ.
Sappiamo per ipotesi che $\mathrm{LM}_{\perp} \vdash \varphi$, cioè esiste una lista finita $\gamma_0, ...\gamma_n$ che costituisce una dimostrazione di φ. Procediamo per induzione su n.
Se $n = 0$ significa che φ è un assioma. È evidente dalla definizione precedente che se φ è un assioma in $\mathrm{LM}_{\perp}$ allora φ^{*} sarà un assioma in $\mathrm{LM}_{\neg}$.
Supponiamo il teorema vero per dimostrazioni di lunghezza minore di n. Dimostriamolo per dimostrazioni di lunghezza n:

- se γ_n cioè φ è un assioma si ragiona come nel caso base.
- se esistono $i, j < n$ tali che $\gamma_j = \gamma_i \to \varphi$, allora c'è una dimostrazione di $\vdash \gamma_i$ e di $\vdash \gamma_i \to \varphi$. Per ipotesi induttiva, in $\mathrm{LM}_{\neg}$ ci sarà una dimostrazione di $\vdash \gamma_i^{*}$ e di $\vdash \gamma_i^{*} \to \varphi^{*}$

□

Definizione 1.2.2. Data una formula φ in $\mathcal{L}^{\neg}$ definiamo la traduzione φ_{*} in $\mathcal{L}^{\perp}$ per ricorsione sulla complessità di φ in questo modo

- $p_{*} := p$, per ogni variabile p,
- $(\varphi \circ \psi)_{*} := \varphi_{*} \circ \psi_{*}$, dove $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$,
- $(\neg\varphi)_{*} := \varphi_{*} \to \perp$

Lemma 1.2.2. *Data una formula φ arbitraria in $LM_{\neg}$,*

$$LM_{\neg} \vdash \varphi \Rightarrow LM_{\perp} \vdash \varphi_{*}$$

Dimostrazione. Come prima si dimostra per induzione sulla profondità della dimostrazione di φ. Ci concentriamo sulla dimostrazione del caso in cui φ sia l'assioma 9, cioè

$$\mathrm{LM}_{\perp} \vdash (p \to q) \wedge (p \to (q \to \perp)) \to (p \to \perp)$$

Ci basta usare il teorema di deduzione e gli assiomi 1 - 8, assieme alla regola di *modus ponens*, per vedere che si dimostra facilmente. □

Cerchiamo di capire che relazione ci sia tra una formula in un sistema e la sua traduzione nell'altro sistema. Per farlo abbiamo bisogno del seguente

Lemma 1.2.3. *Siano φ e ψ formule arbitrarie di $\mathcal{L}^{\perp}$ e $\mathcal{L}^{\neg}$ rispettivamente. Allora,*

1. $LM_{\perp} \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi^*)_*$
2. $LM_{\neg} \vdash \psi \leftrightarrow (\psi_*)^*$

Dimostrazione. Si dimostra per induzione sulla struttura delle formule φ e ψ. Vediamo ad esempio il caso di $\perp$ e $\neg\psi$.

$$(\perp^*)_* = (\neg q \wedge \neg\neg q)_* = (q \to \perp \wedge (q \to \perp) \to \perp)$$

Concludiamo usando la proposizione 1.2.1 con cui possiamo dire $\mathrm{LM}_{\perp} \vdash \perp \leftrightarrow (\perp^*)_*$.

Consideriamo ora il caso $\neg\psi$. Assumiamo che $\mathrm{LM}_{\neg} \vdash \psi \leftrightarrow (\psi_*)^*$. Osserviamo che

$$((\neg\psi)_*)^* = (\psi_* \to \perp)^* = (\psi_*)^* \to (\neg q \wedge \neg\neg q)$$

Assumiamo $((\neg\psi)_*)^*$. Questo ci dà $(\psi_*)^* \to (\neg q \wedge \neg\neg q)$, che implica, per l'ipotesi, $\psi \to (\neg q \wedge \neg\neg q)$. Questo equivale a

$$(\psi \to \neg q) \wedge (\psi \to \neg\neg q)$$

che per l'assioma 9 ci porta a concludere $\neg\psi$.

Dall'altra parte, assumiamo $\neg\psi$ e $(\psi_*)^*$. Sarebbe come assumere $\neg\psi$ e ψ, perciò

$$\neg\psi, (\psi_*)^* \vdash_{LM_{\neg}} \neg q$$

e allo stesso modo

$$\neg\psi, (\psi_*)^* \vdash_{LM_{\neg}} \neg\neg q$$

Dunque

$$LM_{\neg} \vdash \neg\psi \to ((\psi_*)^* \to (\neg q \wedge \neg\neg q))$$

□

Ora possiamo dimostrare l'equivalenza di $\mathrm{LM}_{\perp}$ e $\mathrm{LM}_{\neg}$.

Teorema 1.2.1 (Equivalenza di $\mathrm{LM}_{\perp}$ e $\mathrm{LM}_{\neg}$)**.** *Siano φ e ψ, rispettivamente, formule di $LM_{\perp}$ e di $LM_{\neg}$. Allora*

$$LM_{\perp} \vdash \varphi \iff LM_{\neg} \vdash \varphi^* \text{ e } LM_{\neg} \vdash \psi \iff LM_{\perp} \vdash \psi_*$$

Dimostrazione. Discende dai risultati precedenti. □

Denotiamo $\Gamma^* = \{\varphi^* | \varphi \in \Gamma\}$ e $\Delta_* = \{\psi_* | \psi \in \Delta\}$, per ogni Γ insieme di formule di $\mathrm{LM}_{\perp}$ e Δ insieme di formule di $\mathrm{LM}_{\neg}$. Generalizziamo il risultato precedente:

Corollario 1.2.1. *Siano* Γ, φ *e* Δ, ψ *insiemi arbitrari di formule di* $LM_\perp$ *e* $LM_\neg$ *rispettivamente. Allora*

$$\Gamma \vdash_{LM_\perp} \varphi \iff \Gamma^* \vdash_{LM_\neg} \varphi^*$$
$$e$$
$$\Delta \vdash_{LM_\neg} \psi \iff \Delta_* \vdash_{LM_\perp} \psi_*$$

Per l'equivalenza di $\mathrm{LM}_\perp$ e $\mathrm{LM}_\neg$ possiamo parlare semplicemente della formulazione LM nel linguaggio $\mathcal{L} = \mathcal{L}^+ \cup \{\perp, \neg\}$, data dagli assiomi 1-9, in cui è ammesso l'uso dei simboli $\perp$ e $\neg$ nel senso che abbiamo dato.

1.3 Semantica

In questa sezione ci concentreremo sulla semantica introdotta da Saul Kripke[1]. Come scrive van Dalen [4] "a Kripke semantic is convenient for applications and it is fairly simple".
Un *frame* di Kripke per la logica minimale [13] è una terna $\mathcal{W} = \langle W, \sqsubseteq, Q \rangle$, dove W è un insieme non vuoto, $\sqsubseteq$ è una relazione di ordine parziale per W, e $Q \subseteq W$ è un sottoinsieme di W chiuso verso l'alto.

Definizione 1.3.1. Sia $(X, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato, $S \subseteq X$ si dice chiuso verso l'alto se per ogni $s \in S$ e ogni $x \in X$, se $s \leq x$ allora $x \in S$.

Gli elementi u di W sono detti mondi. Q è detto il cono dei mondi anormali. I mondi che non appartengono a Q si dicono normali.
Una *valutazione* v di un *frame* $\mathcal{W}$ è una funzione da un sottoinsieme di $\langle W, \sqsubseteq \rangle$ chiuso verso l'alto verso l'insieme $\mathcal{P}$ delle variabili proposizionali. Un *modello* $\mu = \langle \mathcal{W}, v \rangle$ è una coppia data da un *frame* e una sua valutazione. Si dice che μ è un modello di $\mathcal{W}$.
Definiamo la relazione $u \Vdash \varphi$, dove $u \in W$ e φ è una formula. Per ogni variabile proposizionale p:

$$u \Vdash p \iff p \in v(u)$$

e per induzione, per ogni formula φ e ψ

$$u \Vdash \varphi \wedge \psi \iff u \Vdash \varphi \text{ e } u \Vdash \psi$$

$$u \Vdash \varphi \vee \psi \iff u \Vdash \varphi \text{ oppure } u \Vdash \psi$$

$$u \Vdash \varphi \to \psi \iff \forall y \in W (u \sqsubseteq y \wedge y \Vdash \varphi \implies y \Vdash \psi)$$

[1] Saul Aaron Kripke (New York, 13 novembre 1940) è un filosofo, logico e accademico statunitense. (`wikipedia.org/wiki/Saul_Kripke`)

A livello meta-teorico usiamo le regole della logica classica.
Per la costante $\perp$ poniamo:

$$u \Vdash \perp \iff u \in Q$$

In particolare, per le formule del tipo $\neg\varphi$ abbiamo:

$$u \Vdash \neg\varphi \iff \forall y \in W(u \sqsubseteq y \wedge y \Vdash \varphi \implies y \in Q)$$

Una formula φ è vera nel modello $\mu = \langle \mathcal{W}, v \rangle$ se $u \Vdash \varphi$ vale per ogni $u \in W$, e si scrive semplicemente $\mathcal{W} \Vdash \varphi$.
In questa semantica i mondi possibili sono ordinati da $\sqsubseteq$ con la richiesta che se una formula è valida in un certo mondo è valida anche in tutti i mondi "sopra" rispetto all'ordine.
Dato un mondo w in un modello μ e un insieme di formule Γ, diciamo

- che Γ è legato a un mondo w in un modello μ (e scriviamo $\mu, w \Vdash \Gamma$) se $w \Vdash \psi$ per ogni formula $\psi \in \Gamma$.
- che φ segue semanticamente da Γ se $\mu, w \Vdash \Gamma$ implica $w \Vdash \varphi$. Denotiamo questa relazione con la scrittura $\Gamma \Vdash \varphi$.

1.4 Teoremi di validità e completezza

Lo scopo di questa sezione è quello di dimostrare che, dato un insieme di formule Γ,

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \Vdash \varphi \qquad \text{Teorema di validità}$$

e

$$\Gamma \Vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \qquad \text{Teorema di completezza}$$

Ovvero, se una formula φ è dimostrabile sintatticamente tramite gli assiomi e il modus ponens, allora è valida semanticamente, e viceversa.
La dimostrazione del teorema di completezza necessità di un po' di lavoro preparatorio:

Definizione 1.4.1. Si dice che un insieme di formule Γ ha la proprietà di disgiunzione se $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ implica $\varphi \in \Gamma$ oppure $\psi \in \Gamma$.

Lemma 1.4.1. *[2] Lemma di Lindenbaum: sia Γ un insieme di formule e φ tale che $\Gamma \nvdash \varphi$. Allora esiste una teoria Δ con la proprietà di disgiunzione che estende Γ e che non contiene φ.*

Dimostrazione. Numeriamo tutte le formule $\phi_0, \phi_1, ..., \phi_n, ...$ Definiamo $\Delta_0 := \Gamma$ e per induzione

- $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\phi_n\}$ se $\Delta_n \cup \{\phi_n\}$ non dimostra φ.
- $\Delta_{n+1} = \Delta_n$ se $\Delta_n \cup \{\phi_n\}$ dimostra φ.

Sia Δ l'unione di tutti i Δ_n. Per costruzione Δ è una teoria. Inoltre nessuno dei Δ_n prova φ quindi neanche Δ prova φ. Mostriamo che Δ ha la proprietà di disgiunzione. Supponiamo che $\phi \vee \psi \in \Delta$ e che $\phi \notin \Delta$ e $\psi \notin \Delta$. Sia $\phi = \phi_m$ e $\psi = \phi_n$. Sia n il più grande tra n ed m, senza perdere di generalità. Allora φ è dimostrabile sia in $\Delta_n \cup \{\phi\}$ che in $\Delta_n \cup \{\psi\}$.
Quindi φ è dimostrabile anche in $\Delta_n \cup \{\phi, \psi\}$ ma questo è assurdo poiché $\Delta_n \cup \{\phi, \psi\} \subseteq \Delta$ e $\Delta \nvdash \varphi$. □

Definizione 1.4.2. [3] Modello canonico: il modello canonico di $\mathrm{LM}_\perp$ è un modello di Kripke $\mathcal{M}_\perp = \langle \mathcal{W}, v \rangle$, dove l'insieme dei mondi W è l'insieme delle teorie di $\mathrm{LM}_\perp$ con la proprietà di disgiunzione. Per ogni mondo $u \in \mathrm{W}$, $v(u)$ è un insieme di formule di $\mathcal{P}(\mathrm{PROP})$ con la proprietà di disgiunzione. Q è definito come l'insieme delle teorie che contengono $\perp$; $u \in Q, \perp \in v(u)$.

Lemma 1.4.2. *[2] Truth lemma: nel modello canonico di $LM_\perp$, sia Γ un insieme di formule con la proprietà di disgiunzione, e $u \in W$ tale che $v(u) = \Gamma$. Per ogni formula φ*

$$\mathcal{M}_\perp, u \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma$$

Dimostrazione. Si dimostra per induzione sulla lunghezza di φ. Se φ è una variabile proposizionale o una formula del tipo $\psi \circ \vartheta$ con $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ la dimostrazione è identica al caso intuizionista [2] e discende direttamente dalle definizioni. Se φ è $\perp$ è facile vedere dalla definizione che $\mathcal{M}_\perp, u \Vdash \perp \iff \perp \in \Gamma$ con $u \in Q$.
□

Teorema 1.4.1. *Teorema di validità e completezza per $LM_\perp$: Per ogni insieme di formule Γ, per ogni formula φ*

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \Vdash \varphi$$

Dimostrazione. La dimostrazione della validità consiste nel verificare che tutti gli assiomi 1-8 sono validi e che le regole di inferenza preservano la validità.
Per esempio, consideriamo l'assioma 2

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \vartheta) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \vartheta))$$

Dimostriamo che questo assioma è valido: vogliamo che per ogni modello μ, dato un mondo w

$$\mu, w \Vdash (\varphi \to (\psi \to \vartheta) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \vartheta))$$

Sia $w \sqsubseteq v$. Assumiamo

$$\mu, v \Vdash (\varphi \to (\psi \to \vartheta))$$

Sia $v \sqsubseteq u$. Assumiamo

$$\mu, u \Vdash (\varphi \to \psi)$$

Quindi ogni t, $u \sqsubseteq t$, che rende vero φ rende vero ψ. E quindi per transitività di $\sqsubseteq$

$$\mu, v \Vdash ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \vartheta))$$

Questo prova la validità dell'assioma nel mondo w del modello μ. Sia il mondo che il modello sono stati scelti in modo arbitrario.
Occupiamoci ora della completezza. Supponiamo φ tale che $\Gamma \nvdash \varphi$. Il lemma di Lindenbaum ci assicura l'esistenza di una teoria Δ con la proprietà di disgiunzione, tale che $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\varphi \notin \Delta$. Allora u tale che $v(u) = \Delta$ è uno degli elementi di W nel modello canonico $\mathcal{M}_\perp$. Da $\mathcal{M}_\perp, u \Vdash \Gamma$ e $\mathcal{M}_\perp, u \nVdash \varphi$, grazie al Truth lemma, otteniamo $\Gamma \nVdash \varphi$, come volevamo. □

In particolare, il teorema di validità può essere usato per dimostrare la non derivabilità di certe formule in logica minimale.
Supponiamo di avere dimostrato $\vdash \varphi \to \psi$ e ci chiediamo se sia vero il viceversa, cioè $\vdash \psi \to \varphi$. Supponiamo inoltre di avere un modello $\mathcal{W}$ tale che $\mathcal{W} \Vdash \psi$ ma non $\mathcal{W} \Vdash \varphi$. Se esistesse una dimostrazione di $\vdash \psi \to \varphi$, allora dovremmo avere $\mathcal{W} \Vdash \varphi$. Questo ci assicura che una tale dimostrazione non esiste. Utilizzeremo questo ragionamento per ottenere i risultati del Capitolo 5.

1.5 Cenni storici

La locuzione latina *ex falso sequitur quodlibet* (in latino "dal falso segue qualsiasi cosa") compare per la prima volta nell'opera *In librum primum Priorum Analyticorum Aristotelis quaestiones* del teologo scozzese francescano del XIII secolo Giovanni Duns Scoto. Tuttavia gli storici sono concordi nel riconoscere che le *Questiones* siano opera di un autore sconosciuto, e che siano state attribuite a Scoto successivamente. Per questo ci si riferisce all'autore dell'opera come lo Pseudo-Scoto [9]. Nella *Questio X* lo Pseudo-Scoto stabilisce e prova la seguente tesi:

> *"Ad quamlibet propositionem implicantem contradictionem de forma sequitur quaelibet alia propositio in consequentia formali."*

"Ad una qualsiasi proposizione che implichi una contraddizione segue in coseguenza formale un'altra qualsiasi proposizione."

Possiamo rappresentare la prova nel seguente albero di derivazione. La linea orizzontale indica il passaggio rappresentato in latino da *igitur* (allora, dunque)

$$\dfrac{\dfrac{\text{Socrate esiste e Socrate non esiste}}{\text{Socrate non esiste}} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Socrate esiste e Socrate non esiste}}{\text{Socrate esiste}}}{\text{Socrate esiste o un uomo è un asino}}}{\text{un uomo è un asino}}$$

Andrej Nikolaevič Kolmogorov notava come il principio *ex falso quodlibet*, nella forma $\neg p \to (p \to q)$, fosse stato introdotto in logica classica, ma non fosse necessario per il ragionamento matematico. Riteneva infatti che mancasse di 'qualsiasi fondamento intuitivo', infatti 'asserisce qualcosa che riguarda le conseguenze di qualcosa che è impossibile'. La prima formalizzazione della logica intuizionista ad opera di Kolmogorov del 1925 [10] era paraconsistente [13].
Al contrario, Arend Heyting era convinto che usare *ex falso quodlibet* fosse ammissibile nel ragionamento intuizionista e aggiunse l'assioma $\neg p \to (p \to q)$ alla sua variante della logica intuizionista del 1930 [7].
La logica minimale appare nel 1937 in un articolo di Ingebrigt Johanson [8], come una versione più debole della logica intuizionista di Heyting. Infatti l'articolo è il risultato di una serie di lettere tra Johanson e Heyting. In una di queste Johanson afferma che l'assioma $\neg p \to (p \to q)$ appare troppo forte da un punto di vista costruttivo.
Nella logica minimale di Johanson, il frammento positivo del sistema di Heyting rimane invariato. Johanson torna alla variante della logica intuizionista di Kolmogorov. Più precisamente il frammento della logica di Johanson con i simboli di implicazione e negazione coincide con quello intuizionista proposizionale del sistema di Kolmogorov.
Nel 1959 il matematico inglese David Nelson scrisse [12]

> "In both the intuitionistic and the classical logic all contradictions are equivalent. This makes it impossible to consider such entities at all in mathematics. It is not clear to me that such a radical position regarding contradiction is necessary."

Capitolo 2

Paradossi dell'implicazione materiale

Cosa sono i *paradossi dell'implicazione materiale*? Sono un inseme di proposizioni notevoli, perché mostrano come proposizioni sintattiche del tipo "... $\to$ ...", usate in maniera informale con il significato del costrutto "se... allora..." generano risultati controintuitivi.

1. $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \vartheta)$ (strong linearity)
2. $(\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$ (ex contradictione quodlibet)
3. $\varphi \to (\psi \vee \neg\psi)$
4. $(\varphi \to \psi) \vee \neg\psi$
5. $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$
6. $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ (consequentia mirabilis; Clavius's law)
7. $((\varphi \wedge \psi) \to \vartheta) \to ((\varphi \to \vartheta) \vee (\psi \to \vartheta))$
8. $((\varphi \to \vartheta) \wedge (\psi \to \beta)) \to ((\varphi \to \beta) \vee (\psi \to \vartheta))$
9. $(\neg(\varphi \to \psi)) \to (\varphi \wedge \neg\psi)$ (the counterexample principle)
10. $(((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi)$ (PP Peirce's Principle)
11. $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ (linearity o DGP, Dirk Gently's Principle)[1]

[1]Gli autori di [6] hanno scelto questo nome ispirandosi al romanzo di Douglas Adams *Dirk Gently's Holistic Detective Agency*, in cui il protagonista crede nella "fondamentale interconnessione di tutte le cose".

12. $(\neg\neg\varphi \vee \varphi) \to \varphi$

13. $\psi \vee (\psi \to \vartheta)$ (formula di Tarski)

14. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \vee (\neg\psi \to \neg\varphi)$ (weak DGP)

15. $(\varphi \to \psi \vee \vartheta) \to ((\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \vartheta))$

16. $\neg(\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi$

(anche in questo caso ricordiamo che si tratta di *schemi* di proposizioni.)

Si tratta di tautologie classiche. Ci interessa capire come si relazionano con:

DNE $\neg\neg\varphi \to \varphi$ (doppia negazione)

LEM $\varphi \vee \neg\varphi$ (terzo escluso)

EFQ $\perp\to \varphi$ (ex falso quodlibet)

WLEM $\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$ (terzo escluso debole)

e con le leggi di De Morgan

DM1 $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$

DM2 $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$

DM1' $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \leftrightarrow \varphi \vee \psi$

DM2' $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \psi$

Proposizione 2.0.1. *DM2 è dimostrabile in LM*

Dimostrazione.

1. Dimostrare $\vdash \neg(\varphi\vee\psi) \to \neg\varphi\wedge\neg\psi$ equivale a dimostrare $\neg(\varphi\vee\psi) \vdash \neg\varphi\wedge\neg\psi$, per il teorema di deduzione.

$(\varphi \to ((\varphi \vee \psi) \to \perp)) \to ((\varphi \to (\varphi \vee \psi)) \to (\varphi \to \perp))$	Ax2
$\neg(\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \neg(\varphi \vee \psi))$	Ax1
$\neg(\varphi \vee \psi)$	ipotesi
$\varphi \to \neg(\varphi \vee \psi)$	modus ponens
$(\varphi \to (\varphi \vee \psi)) \to (\varphi \to \perp)$	modus ponens
$\varphi \to \varphi \vee \psi$	Ax6

$\varphi \to \bot$ modus ponens

Ovvero $\neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi$. Allo stesso modo si trova una dimostrazione per $\neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\psi$.

$(\neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi) \to ((\neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\psi) \to (\neg(\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)))$ Ax8

$\neg(\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ modus ponens

$\neg\varphi \wedge \neg\psi$ modus ponens

2. Dimostrare $\vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi \to \neg(\varphi \vee \psi)$ equivale a dimostrare $\neg\varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$, per il teorema di deduzione.

$\neg\varphi \wedge \neg\psi$ ipotesi

$\neg\varphi$ Ax3

$\neg\psi$ Ax4

$(\varphi \to \bot) \to ((\psi \to \bot) \to ((\varphi \vee \psi) \to \bot))$ Ax8

$(\varphi \vee \psi) \to \bot$ modus ponens

$\neg(\varphi \vee \psi)$

□

Proposizione 2.0.2. *In LM, EFQ + LEM $\implies$ DNE*

Dimostrazione.
Sia φ tale che vale $\neg\neg\varphi$. Per LEM vale φ oppure vale $\neg\varphi$.
Se valesse φ basta applicare Ax1 e MP per ottenere $\neg\neg\varphi \to \varphi$.
Se valesse $\neg\varphi$ avremmo $\bot$, che per EFQ implicherebbe φ, quindi $\neg\neg\varphi \to \varphi$. □

Capitolo 3

Equivalenze

Proposizione 3.0.1. *in LM i seguenti schemi di proposizioni sono equivalenti: DNE, 9, 12, 16, DM1', e DM2'*

Dimostrazione.

Chiaramente DNE $\Leftrightarrow$ 12 e DNE $\Leftrightarrow$ 16. Dimostriamo DNE $\Rightarrow$ 9, ovvero che grazie a DNE possiamo dimostrare $\neg(\varphi \to \psi) \vdash (\varphi \wedge \neg\psi)$.
Supponiamo $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$. Supponiamo anche φ e $\neg\psi$. Per th. di deduzione le seguenti derivazioni sono equivalenti:

$\neg(\varphi \to \psi), \neg(\varphi \wedge \neg\psi), \varphi, \neg\psi \vdash \bot$ (poiché le ipotesi φ e $\neg\psi$ equivalgono a $\varphi \wedge \neg\psi$)

$\neg(\varphi \to \psi), \neg(\varphi \wedge \neg\psi), \varphi \vdash \neg\neg\psi$

$\neg(\varphi \to \psi), \neg(\varphi \wedge \neg\psi), \varphi \vdash \psi$ (applicando DNE a $\neg\neg\psi$)

$\neg(\varphi \to \psi), \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \vdash \varphi \to \psi$

Quindi $\neg(\varphi \to \psi), \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \vdash \bot$; che equivale a $\neg(\varphi \to \psi) \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$.
Applichiamo DNE e otteniamo $\neg(\varphi \to \psi) \vdash (\varphi \wedge \neg\psi)$, come volevasi dimostrare.
Per dimostrare che 9 $\Rightarrow$ DNE, supponiamo $\neg\neg\varphi$, ovvero $\neg(\neg\varphi \to \bot)$. Applicando 9 otteniamo $\varphi \wedge \neg\bot$, quindi φ (Ax3).
Che DNE implichi DM1' e DM2' è evidente. Il viceversa si dimostra osservando che, per entrambe le regole, sostituendo ψ con φ si ottiene DNE. $\square$

Proposizione 3.0.2. *in LM i seguenti schemi di proposizioni sono equivalenti: LEM, 3, 4, e 6.*

Dimostrazione.

Si vede subito che LEM $\Leftrightarrow$ 3, LEM $\Leftrightarrow$ 4 e LEM $\Rightarrow$ 6. Dimostriamo 6 $\Rightarrow$ LEM: è sufficiente dimostrare $\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \to \varphi \vee \neg\varphi$. Assumiamo $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$; per DM2 equivale a $\neg\varphi \wedge \neg\varphi$.
Supponiamo di avere nelle nostre ipotesi φ; questo ci porterebbe a una contraddizione. Quindi possiamo dire che vale $\neg\varphi$. Per indebolimento $\varphi \vee \neg\varphi$. $\square$

Proposizione 3.0.3. *in LM i seguenti schemi di proposizioni sono equivalenti: EFQ, 2, e 5*

Dimostrazione.

Chiaramente EFQ $\Rightarrow$ 2 $\Rightarrow$ 5. Per dimostrare che 5 $\Rightarrow$ EFQ, basta dimostrare $5, \bot \vdash \varphi$ (teorema di deduzione). Osserviamo che da $\bot$ deduciamo $\bot \to (\top \to \bot)$ (Ax1) da cui $\top \to \bot$ (MP), che equivale a $\neg\top$. Applicando 5, $\top \to \varphi$, e quindi φ. $\square$

Proposizione 3.0.4. *in LM i seguenti schemi di proposizioni sono equivalenti: WLEM, 14 e DM1*

Dimostrazione.

Mostriamo che WLEM $\Leftrightarrow$ 14. Un verso si dimostra partendo da $\neg\psi$ o $\neg\neg\psi$.
Se vale $\neg\psi$, abbiamo $\neg\psi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$ (Ax1) e quindi $\neg\varphi \to \neg\psi$ (MP).
Se vale $\neg\neg\psi$, assumiamo $\neg\psi$, quindi $\neg\neg\psi \wedge \neg\psi$, quindi $\bot$. Da $\bot \to (\varphi \to \bot)$ (Ax1) otteniamo $\varphi \to \bot$ (MP), ovvero $\neg\varphi$.
In entrambi i casi si giunge a $(\neg\varphi \to \neg\psi) \vee (\neg\psi \to \neg\varphi)$ (assiomi 6 e 7).
Viceversa, abbiamo $\neg\varphi \to \neg\neg\varphi$ o $\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$.
Nel primo caso supporre che valga $\neg\varphi$ ci porta a $\bot$, quindi arriviamo a $\neg\neg\varphi$.
Nel secondo caso, assumiamo φ. Grazie alla tautologia $\varphi \to \neg\neg\varphi$ otteniamo $\neg\varphi$ per MP. Questo porta a una contraddizione, quindi $\neg\varphi$.
In entrambi i casi si giunge a $\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$.
Vediamo ora WLEM $\Leftrightarrow$ DM1. Supponiamo DM1 e φ. Dato che $\neg(\neg\varphi \wedge \varphi)$ è dimostrabile senza assunzioni abbiamo $\neg\neg\varphi \vee \neg\varphi$. Quindi vale WLEM.
Viceversa supponiamo $\neg(\varphi \wedge \psi)$. Per WLEM vale $\neg\varphi$ oppure $\neg\neg\varphi$. Nel primo caso otteniamo immediatamente la tesi $\neg\varphi \vee \neg\psi$ (Ax6). Nel secondo, aggiungiamo l'ipotesi ψ. Per il teorema di deduzione le seguenti dimostrazioni sono equivalenti:

$$\neg(\varphi \wedge \psi), \psi, \varphi \vdash \bot$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi), \psi \vdash \neg\varphi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi), \psi \vdash \neg\neg\neg\varphi \; *$$

$\neg(\varphi \wedge \psi), \neg\neg\varphi, \psi \vdash \perp$

Quindi l'ipotesi ψ ci ha portato a una contraddizione. Dunque abbiamo $\neg\psi$ e da qui la tesi $\neg\varphi \vee \neg\psi$ (Ax7).
* Abbiamo usato la proposizione $\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$: abbiamo $\neg\varphi$, supponiamo $\neg\neg\varphi$, troviamo una contraddizione: quindi $\neg\neg\neg\varphi$. $\square$

Proposizione 3.0.5. *in LM i seguenti schemi di proposizioni sono equivalenti: PP, 1, e 13*

Dimostrazione.

Mostriamo che 1 $\Rightarrow$ PP $\Rightarrow$ 13 $\Rightarrow$ 1.
Prima implicazione: per 1 abbiamo che $\top \to \varphi$ o $\varphi \to \psi$. Nel primo caso vale φ. Nel secondo basta usare il modus ponens e otteniamo di nuovo φ. Quindi $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$: abbiamo dimostrato che vale PP.
Seconda implicazione: per ogni formula ψ e ϑ ben definita, vale

$$(((\psi \vee (\psi \to \vartheta)) \to \vartheta) \to \psi \vee (\psi \to \vartheta)) \to \psi \vee (\psi \to \vartheta)$$

(è un'istanza di PP con $(\psi \vee (\psi \to \vartheta))$ al posto di φ)
Dimostriamo che è vera la premessa. Partiamo da $(\psi \vee (\psi \to \vartheta)) \to \vartheta$. Se supponiamo ψ otteniamo ϑ, perciò abbiamo $\psi \to \vartheta$. Con l'indebolimento otteniamo $\psi \vee (\psi \to \vartheta)$ che è quello che volevamo dimostrare. Da MP segue 13.
Terza implicazione: evidente. $\square$

Proposizione 3.0.6. *in LM i seguenti schemi di proposizioni sono equivalenti: DGP, 7, 8, e 15*

Dimostrazione.

Mostriamo DGP $\Leftrightarrow$ 7.
($\Rightarrow$) Dobbiamo dimostrare $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi), (\varphi \wedge \psi) \to \vartheta \vdash (\varphi \to \vartheta) \vee (\psi \to \vartheta)$.
Se vale $\varphi \to \psi$, aggiungiamo l'ipotesi φ, allora abbiamo anche ψ (Ax1 + MP). Otteniamo $\varphi \wedge \psi$, quindi ϑ. Abbiamo dimostrato $\varphi \to \vartheta$ (th. di deduzione), per Ax6 $(\varphi \to \vartheta) \vee (\psi \to \varphi)$.
Se invece vale $\psi \to \varphi$, allo stesso modo troviamo $\psi \to \vartheta$
($\Leftarrow$) Scriviamo 7 con $\vartheta \equiv \varphi \wedge \psi$. La premessa è banalmente vera, perciò otteniamo $(\varphi \to (\varphi \wedge \psi)) \vee (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$, da cui $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$.
Mostriamo DGP $\Leftrightarrow$ 8.
($\Rightarrow$) Per DGP abbiamo come ipotesi $(\varphi \to \beta) \vee (\beta \to \varphi)$, quindi la nostra dimostrazione diventa $(\varphi \to \beta) \vee (\beta \to \varphi), (\varphi \to \vartheta) \wedge (\psi \to \beta) \vdash (\varphi \to \beta) \vee (\psi \to \vartheta)$.
Se vale $\varphi \to \beta$ la conclusione è banale.
Se vale $\beta \to \varphi$, assumiamo ψ, allora vale β; con una catena di implicazioni vale φ, e vale ϑ. Quindi $\psi \to \vartheta$ (th. di deduzione), e per Ax6 $(\varphi \to \beta) \vee (\psi \to \vartheta)$, che è la nostra tesi.

($\Leftarrow$) Scriviamo 8 con $\vartheta \equiv \varphi$ e $\beta \equiv \psi$, ovvero $((\varphi \to \varphi) \wedge (\psi \to \psi)) \to ((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi))$.
Dato che la premessa è $(\top \wedge \top) \equiv \top$, cioè è sempre vera, otteniamo la conslusione, cioè proprio $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$.
Mostriamo DGP $\Leftrightarrow$ 15.
($\Rightarrow$) Supponiamo $\varphi \to (\psi \vee \vartheta)$. Per DGP abbiamo come ipotesi $(\psi \to \vartheta) \vee (\vartheta \to \psi)$, quindi la nostra dimostrazione diventa $(\psi \to \vartheta) \vee (\vartheta \to \psi), \varphi \to (\psi \vee \vartheta) \vdash (\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \vartheta)$ (th. di deduzione).
Se vale $\psi \to \vartheta$, assumiamo φ, e otteniamo $\psi \vee \vartheta$ (MP), che ci dà ϑ. Quindi abbiamo $\varphi \to \vartheta$, quindi $(\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \vartheta)$ (Ax6).
Se vale $\vartheta \to \psi$, allo stesso modo si ottiene $(\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \vartheta)$.
($\Leftarrow$) Applicando 15 a $\varphi \vee \psi$, ψ, φ, otteniamo $(\varphi \vee \psi \to \varphi \vee \psi) \to ((\varphi \vee \psi \to \varphi) \vee (\varphi \vee \psi \to \psi))$
Chiaramente la premessa è sempre vera. Abbiamo così $((\varphi \vee \psi \to \varphi) \vee (\varphi \vee \psi \to \psi))$, che equivale a $(\psi \to \varphi) \vee (\varphi \to \psi)$ □

Teorema 3.0.1. *Le implicazioni del seguente schema sono valide in LM*

$$\begin{tikzcd}
 & & DNE \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & PP \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & EFQ \\
LEM \arrow[dr, Rightarrow] & & DGP \arrow[dl, Rightarrow] & \\
 & WLEM & &
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. È evidente che DNE $\Rightarrow$ EFQ e che LEM $\Rightarrow$ WLEM.

- DNE $\Rightarrow$ PP: equivale a dire che DNE dimostra $(\varphi \to \psi) \to \varphi \vdash \varphi$. Supponiamo $\neg\varphi$; per modus tollens[1] otteniamo $\neg(\varphi \to \psi)$. Dalla Proposizione 1 sappiamo che DNE $\Rightarrow$ 9, quindi $\varphi \wedge \neg\psi$ (MP); da cui si ricava φ (Ax3). Questo è assurdo perché avevamo supposto $\neg\varphi$. Dunque $(\varphi \to \psi) \to \varphi \vdash \neg\neg\varphi$.

[1] $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$; abbreviazione del latino *modus tollendo tollens*, "modo che toglie", letteralmente "modo che toglie con l'aver tolto". `(wikipedia.org/wiki/Modus_tollens)`

Basta applicare DNE al secondo membro e abbiamo dimostrato la tesi. Ovviamente il modus tollens vale in LM: supponiamo φ; da $\varphi \to \psi$ otteniamo ψ, che va in contraddizione con $\neg\psi$, quindi $\neg\varphi$.

- PP $\Rightarrow$ LEM: supponiamo $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$, ovvero $(\varphi \vee \neg\varphi) \to \bot$. Allora φ porta a una contraddizione; quindi $\neg\varphi$. Ma avremmo $\varphi \vee \neg\varphi$ (Ax6). Quindi $((\varphi \vee \neg\varphi) \to \bot) \to (\varphi \vee \neg\varphi)$. Applichiamo PP e otteniamo $\varphi \vee \neg\varphi$.

- PP $\Rightarrow$ DGP: per PP possiamo affermare

$$((((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)) \to \varphi) \to ((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi))) \to ((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi))$$

Dimostriamo che vale la premessa. Supponiamo $((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)) \to \varphi$, e supponiamo ψ. Allora $\varphi \to \psi$ (Ax1), quindi φ (MP). Quindi abbiamo che $\psi \to \varphi$. Per Ax7 arriviamo a $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$. Per modus ponens ricaviamo la conclusione e finiamo la dimostrazione.

- DGP $\Rightarrow$ WLEM: per DGP, possiamo supporre $(\varphi \to \neg\varphi) \vee (\neg\varphi \to \varphi)$. Nel primo caso, se supponiamo φ troviamo una contraddizione, quindi vale $\neg\varphi$. Basta applicare Ax6 per ottenere $\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$ Nel secondo caso, se supponiamo $\neg\varphi$ giungiamo lo stesso ad una contraddizione, perciò $\neg\neg\varphi$. Applichiamo Ax7 e otteniamo lo stesso $\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$.

$\square$

Capitolo 4

Il frammento implicazionale

4.1 Il frammento implicazionale di $\mathcal{L}$

Definizione 4.1.1. Dato un linguaggio $\mathcal{L}$, si dice *frammento* un linguaggio $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ che si ottiene imponendo una restrizione sintattica su $\mathcal{L}$.[1]

Per ottenere il frammento implicazionale di $\mathcal{L} = \mathcal{L}^+ \cup \{\bot, \neg\}$ (introdotto nella sezione 1.2) basta togliere i simboli $\wedge$ e $\vee$ dal nostro linguaggio, e sostituirli tramite le seguenti definizioni:

Definizione 4.1.2. Nel frammento implicazionale $\varphi \vee \psi$ viene definito come

$$(\varphi \to \bot) \to (\psi \to \bot) \to \bot$$

Usiamo sempre il simbolo $\neg$ come abbreviazione di $\to \bot$.

$$(\varphi \to \bot) \to (\psi \to \bot) \to \bot \equiv \neg\varphi \to \neg\neg\psi$$

Proposizione 4.1.1. *In LM, $\neg\varphi \to \neg\neg\psi$ equivale a $\neg\psi \to \neg\neg\varphi$*

Dimostrazione.

1. $\neg\varphi \to \neg\neg\psi \vdash \neg\psi \to \neg\neg\varphi$ equivale a $\neg\varphi \to \neg\neg\psi, \neg\psi \vdash \neg\neg\varphi$ (Th di deduzione).
   Supponiamo $\neg\varphi \to \neg\neg\psi$ e $\neg\psi$. Aggiungiamo l'ipotesi $\neg\varphi$. Ottenaimo $\neg\neg\psi$ (per MP), che è in contraddizione con $\neg\psi$. Quindi $\neg\neg\varphi$.

2. Dobbiamo dimostrare $\neg\psi \to \neg\neg\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\neg\psi$ (Th di deduzione).
   Supponiamo $\neg\psi$. Troviamo $\neg\neg\varphi$ (per MP), che è in contraddizione con $\neg\varphi$. Quindi $\neg\neg\psi$.

[1] `wikipedia.org/wiki/Fragment_(logic)`

$\square$

Definizione 4.1.3. Nel frammento implicazionale la congiunzione può essere eliminata: $\varphi \wedge \psi \to \vartheta$ viene tradotto con $\varphi \to \psi \to \vartheta$, mentre $\vartheta \to \varphi \wedge \psi$ viene tradotto con i due casi separati $\vartheta \to \varphi$ e $\vartheta \to \psi$.

Data una formula φ del linguaggio $\mathcal{L}$, indichiamo con $\varphi^{\to}$ la sua *traduzione* nel frammento implicazionale.

4.2 I paradossi dell'implicazione materiale nel frammento implicazionale

- 13 si traduce con $\neg\psi \to \neg\neg(\psi \to \vartheta)$ (Weak Tarski's formula, WT)
- 11 (DGP) si traduce con $\neg(\varphi \to \psi) \to \neg\neg(\psi \to \varphi)$ (DGP$^{\to}$)

Teorema 4.2.1. *In LM valgono le seguenti implicazioni:*
a) PP $\Rightarrow$ WT
b) DGP $\Rightarrow$ DGP$^{\to}$
c) EFQ $\Rightarrow$ WT
d) WT $\Rightarrow$ DGP$^{\to}$

Dimostrazione.

a) Usiamo PP nella forma $((\bot \to \vartheta) \to \bot) \to \bot$ $(*)$.
Dimostrare $\vdash \neg\psi \to \neg\neg(\psi \to \vartheta)$ equivale a dimostrare $\neg\psi \vdash \neg\neg(\psi \to \vartheta)$, che equivale a dimostrare $\neg\psi, \neg(\psi \to \vartheta) \vdash \bot$ (teorema di deduzione).
Supponiamo allora

   (i) $\psi \to \bot$

   (ii) $(\psi \to \vartheta) \to \bot$

   (iii) $\bot \to \vartheta$

   Per la transitività dell'implicazione, da (i) e (iii) otteniamo $\psi \to \vartheta$. Applichiamo quest'ultimo risultato a (ii) e abbiamo $\bot$.
   Questo significa che $\psi \to \bot, (\psi \to \vartheta) \to \bot \vdash (\bot \to \vartheta) \to \bot$ (teorema di deduzione).
   A questo punto entra in gioco PP nella forma $(*)$. Abbiamo che $\psi \to \bot, (\psi \to \vartheta) \to \bot \vdash \bot$, ovvero la nostra tesi.

b) Supponiamo $\neg(\varphi \to \psi)$. Per DGP vale $\varphi \to \psi$ oppure $\psi \to \varphi$.
Nel primo caso abbiamo una contraddizione. Per Ax1 $\bot \to (\neg(\psi \to \varphi) \to \bot)$. Per MP $\neg(\psi \to \varphi) \to \bot$, cioè $\neg\neg(\psi \to \varphi)$. Nel secondo caso, dato che $\alpha \to \neg\neg\alpha$ è una tautologia in LM, abbiamo $\neg\neg(\psi \to \varphi)$.

c) La dimostrazione è identica alla a), tranne per il fatto che (iii) è un'istanza di EFQ, quindi non serve neanche supporla.

d) Supponiamo $\neg(\varphi \to \psi)$. Aggiungiamo l'ipotesi ψ. Per Ax1 $\psi \to (\varphi \to \psi)$. Allora $\varphi \to \psi$ per MP. Questo è in contraddizione con l'ipotesi $\neg(\varphi \to \psi)$. Quindi $\neg(\varphi \to \psi) \vdash \neg\psi$
Ora abbiamo $\neg\psi \to \neg\neg(\psi \to \varphi)$ (WT). Quindi $\neg\neg(\psi \to \varphi)$ (per MP).
Abbiamo dimostrato che con WT si può dedurre $\neg(\varphi \to \psi) \vdash \neg\neg(\psi \to \varphi)$, cioè $\vdash \neg(\varphi \to \psi) \to \neg\neg(\psi \to \varphi)$ (Th di deduzione).

□

Teorema 4.2.2. *Le implicazioni del seguente schema sono valide in LM*

$$
\begin{tikzcd}
 & & DNE \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & PP \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & EFQ \arrow[dl, Rightarrow] \\
LEM \arrow[d, Rightarrow] & DGP \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & WT \arrow[d, Rightarrow] & \\
WLEM & & DGP^{\to} &
\end{tikzcd}
$$

Dimostrazione. Conseguenza dei teoremi 3.0.1 e 4.2.1. Nel prossimo capitolo vedremo che nessuna freccia può essere invertita, e nessuna freccia può essere aggiunta. □

Capitolo 5

Risultati di separazione

5.1 Modelli completi

Per mostrare che nelle implicazioni del Teorema 4.2.2 non vale il viceversa useremo la semantica e i modelli. Richiamiamo l'introduzione alla semantica di LM fatta nel Capitolo 1. Nella nostra disamina useremo solo *modelli completi* [6], cioè per ogni insieme $U \subseteq \mathcal{W}$ chiuso verso l'alto, esiste un simbolo proposizionale P_U tale che $u \Vdash P_U \Leftrightarrow u \in U$.
Per ogni formula ben definita α esiste un simbolo proposizionale P_α tale che

$$\mathcal{W} \Vdash \alpha \iff \mathcal{W} \Vdash P_\alpha$$

Dove P_α è in realtà P_U con $U = \{u | u \Vdash \alpha\}$.

Proposizione 5.1.1. *$\mathcal{W} \Vdash$ EFQ sse $Q = \emptyset$.*

Dimostrazione. Se $Q = \emptyset$ vale EFQ. Lo vediamo perché dalla definizione

$$u \Vdash \bot \to \psi \iff \forall y \in W(u \sqsubseteq y \wedge y \Vdash \bot \implies y \Vdash \psi)$$

Ma dato che $y \Vdash \bot \iff y \in Q$ e Q è vuoto, EFQ vale sempre.
Viceversa, supponiamo Q non vuoto. Sia $u \in Q$ un mondo anormale, perciò $u \Vdash \bot$. Per completezza esiste il simbolo proposizionale $P_\emptyset$, ma poiché $u \notin \emptyset$, $u \nVdash P_\emptyset$. Quindi $u \nVdash \bot \to P_\emptyset$, che contraddice EFQ. Dunque Q è vuoto. $\square$

Dato un *frame* $\mathcal{W} = \langle W, \sqsubseteq, Q \rangle$, definiamo $\mathcal{W}^\bot = \langle W, \sqsubseteq, W \rangle$, il *frame* dove tutti i mondi sono anormali.

Proposizione 5.1.2. *Per ogni modello completo si ha:*
1. $\mathcal{W}^\bot \Vdash LEM$
2. $\mathcal{W}^\bot \nVdash DNE$
3. $\mathcal{W}^\bot \nVdash EFQ$

Dimostrazione. Applicando le regole di verità, ci accorgiamo che per ogni formula qualsiasi α, $\mathcal{W}^\perp \Vdash \neg\alpha$. Dunque $\mathcal{W}^\perp \Vdash \alpha \vee \neg\alpha$, cioè $\mathcal{W}^\perp \Vdash$ LEM.
Sia P un simbolo proposizionale per il quale esiste un $u \in \mathcal{W}^\perp$ tale che $u \nVdash P$, ovvero $P \notin v(u)$. Sicuramente $u \Vdash \neg P$ (per il punto precedente), quindi anche $u \Vdash \neg\neg P$. Abbiamo trovato un u in cui non vale $\neg\neg P \to P$, perciò $\mathcal{W}^\perp \nVdash$ DNE.
In $\mathcal{W}^\perp$, $Q \neq \emptyset$, quindi per il teorema precedente $\mathcal{W}^\perp \nVdash$ EFQ. □

Proposizione 5.1.3. *Sia $(\mathcal{W}, v)$ un modello completo, e sia α una formula non contenente $\perp$. Allora:*

$$\mathcal{W} \Vdash \alpha \iff \mathcal{W}^\perp \Vdash \alpha$$

Dimostrazione. È evidente, poiché α non contiene $\perp$, Q non entra mai in gioco. □

Un ordine parziale si dice $\vee$-*free* se non contiene a, b, c tali che $a \leq b, a \leq c$, e b e c non siano confrontabili. In pratica, chiediamo che nell'ordine non ci siano biforcazioni.

Proposizione 5.1.4. *Consideriamo un modello completo $\mathcal{W} = \langle W, \sqsubseteq, Q\rangle$.*
1. $\mathcal{W} \Vdash DPG$ sse $\mathcal{W}$ è $\vee$-free.
2. $\mathcal{W} \Vdash WLEM$ se $\mathcal{W} \setminus Q$ è $\vee$-free.

Dimostrazione.

1. Supponiamo $\mathcal{W}$ $\vee$-free; siano P e Q simboli proposizionali arbitrari. Consideriamo un mondo qualsiasi $u \in \mathcal{W}$. Se $P \in v(u)$ abbiamo che $u \Vdash Q \to P$. Allo stesso modo se $Q \in v(u)$ $u \Vdash P \to Q$. Quindi $u \Vdash (Q \to P) \vee (P \to Q)$. Se invece né P né Q stanno in $v(u)$, consideriamo gli insiemi $A = \{y \in \mathcal{W} | u \sqsubseteq y \wedge P \in v(y)\}$ e $B = \{y \in \mathcal{W} | u \sqsubseteq y \wedge Q \in v(y)\}$: o $A \subset B$ oppure $B \subset A$: immaginiamo ci siano z, z' tali che $z \in A$, $z \notin B$, e $z' \in B$ e $z' \notin A$. Per forza $z \not\sqsubseteq z'$, altrimenti z' sarebbe in B. Allo stesso modo si dimostra che $z' \not\sqsubseteq z$, ma in questo modo z, z' e u contraddicono l'ipotesi che $\mathcal{W}$ sia $\vee$-free.
   Se $A \subset B$, $u \Vdash Q \to P$ per ogni u; se $B \subset A$, $u \Vdash P \to Q$ per ogni u. In entrambi i casi $u \Vdash P \to Q \vee Q \to P$. Abbiamo dimostrato che $\mathcal{W} \Vdash$ DGP.
   Per mostrare il viceversa dimostriamo che se $\mathcal{W}$ non è $\vee$-free allora $\mathcal{W} \nVdash$ DGP. Supponiamo ci siano $a, b, c \in \mathcal{W}$ tali che $a \sqsubseteq b$, $a \sqsubseteq c$, ma che non valga né $b \sqsubseteq c$ né $c \sqsubseteq b$. Siano P_b e P_c i simboli proposizionali corrispondenti a $\{x \in \mathcal{W} | b \sqsubseteq x\}$ e $\{x \in \mathcal{W} | c \sqsubseteq x\}$. Si osserva che $b \Vdash P_b$ ma $b \nVdash P_c$, e che $c \Vdash P_c$ ma $c \nVdash P_b$. Supponiamo $a \Vdash (P_b \to P_c) \vee (P_c \to P_b)$. Nel caso $a \Vdash (P_b \to P_c)$, per monotonia $b \Vdash (P_b \to P_c)$. Ma dal momento che $b \Vdash P_b$ avremmo $b \Vdash P_c$, che è una contraddizione. Quindi non vale DGP.

2. Sia P un simbolo proposizionale arbitrario. Prendiamo un mondo arbitrario $u \in \mathcal{W}$. Se $u \in Q$ abbiamo $u \Vdash \neg\alpha$ per ogni α e la tesi è verificata.
   Se $u \in \mathcal{W} \setminus Q$, e se non c'è nessun $u \sqsubseteq y$ tale che $P \in v(y)$ e $y \notin Q$, allora $u \Vdash \neg P$, quindi $u \Vdash \neg P \vee \neg\neg P$.
   Se $u \in \mathcal{W} \setminus Q$, supponiamo esista $u \sqsubseteq y$ tale che $P \in v(y)$ e $y \notin Q$. Vogliamo dimostrare che $u \Vdash \neg\neg P$. Per farlo mostriamo che per ogni $u \sqsubseteq z$, se $z \Vdash \neg P$ allora $z \in Q$.
   Sia $u \sqsubseteq z$ e $z \notin Q$. Dal momento che $\mathcal{W} \setminus Q$ è $\vee$-free, si ha che $z \sqsubseteq y$ oppure $y \sqsubseteq z$. Nel secondo caso, $y \Vdash P$, quindi $z \Vdash P$ e questo porta a una contraddizione.
   Nel primo caso $y \Vdash \neg P$ e anche qui troviamo una contraddizione. Quindi $z \in Q$. Abbiamo dimostrato che preso u in $\mathcal{W} \setminus Q$ $\vee$-free, $u \Vdash \neg P \vee \neg\neg P$, da qui la tesi.

□

Proposizione 5.1.5. *Dato un frame completo $\mathcal{W} = \langle W, \sqsubseteq, Q \rangle$,*
1. $\mathcal{W} \Vdash PP$ sse $\mathcal{W}$ è fatto di punti a due a due non confrontabili.
2. $\mathcal{W} \Vdash LEM$ sse $\mathcal{W} \setminus Q$ è fatto di punti a due a due non confrontabili.
3. $\mathcal{W} \Vdash DNE$ sse $\mathcal{W}$ è fatto di punti a due a due non confrontabili e $Q = \emptyset$.

Dimostrazione.

1. Sia $\mathcal{W}$ fatto di punti a due a due non confrontabili, siano P e S simboli proposizionali arbitrari, sia u un mondo arbitrario di $\mathcal{W}$.
   Se $S \in v(u)$ allora $u \Vdash ((S \to P) \to S) \to S$.
   Se $S \notin v(u)$, $u \Vdash (S \to P)$, quindi $u \nVdash (S \to P) \to S$. Allora $u \Vdash ((S \to P) \to S) \to S$.
   Viceversa, prendiamo $u, y \in \mathcal{W}$ e supponiamo siano confrontabili: $u \sqsubseteq y$. Mostriamo che non vale PP. Sia $U = \{u \sqsubseteq y | u \neq y\}$ a cui è associato P_U, imponiamo $P_\emptyset = S$. Per ogni $u \sqsubseteq y$, $u \neq y$ abbiamo $y \Vdash (P_U \to S) \to S$. Dato che $y \nVdash P_U \to S$ $u \nVdash P_U \to S$, quindi $u \Vdash (P_U \to S) \to P_U$. Se valesse $u \Vdash$ PP avremmo che $u \Vdash P_U$ che è una contraddizione. Quindi non vale PP. Passando alla contronominale si ottiene la tesi.

2. Consideriamo ancora P simbolo proposizionale arbitrario e $u \in \mathcal{W}$. Avviene che $P \in v(u)$ (e quindi $u \Vdash P$) oppure $P \notin v(u)$. I mondi y tali che $u \sqsubseteq y$, $u \neq y$ sono tutti in Q (perché supponiamo $\mathcal{W} \setminus Q$ sia fatto di punti a due a due non confrontabili), quindi $y \Vdash \bot$. Per tutti i $u \sqsubseteq y$ tali che $y \Vdash P$, si ha anche $y \to \bot$, e quindi $u \Vdash \neg P$. Abbiamo dimostrato che per u, P arbitrari, $u \Vdash P \vee \neg P$.
   Viceversa supponiamo ci siano $u, y \in \mathcal{W} \setminus Q$ distinti, e $u \sqsubseteq y$. Mostriamo

che $\mathcal{W} \not\Vdash$ LEM. P_y simbolo proposizionale associato a $\{x \in \mathcal{W} | y \sqsubseteq x\}$. Osserviamo che $u \not\Vdash P_y$. Se $u \Vdash \neg P_y$, anche $y \Vdash \neg P_y$, ossia $y \Vdash \perp$, che contraddice $y \notin Q$. Quindi $u \not\Vdash \neg P_y$. Passando alla contronominale si ottiene la tesi.

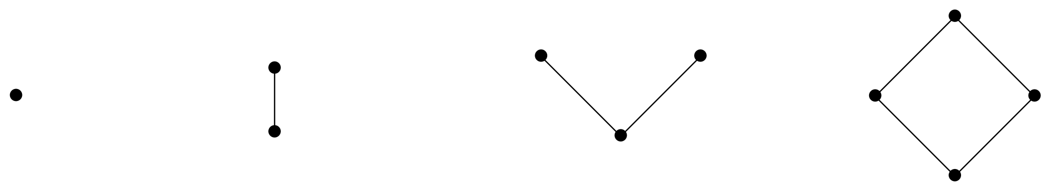
3. Sappiamo che DNE $\Rightarrow$ PP $\Rightarrow \mathcal{W}$ è fatto di punti a due a due non confrontabili; inoltre DNE $\Rightarrow$ EFQ $\Rightarrow Q = \emptyset$.
   Viceversa, è noto che EFQ + LEM $\Rightarrow$ DNE (Proposizione 2.0.2). Perciò se $\mathcal{W}$ è fatto di punti a due a due non confrontabili e $Q = \emptyset$, allora $\mathcal{W} \Vdash$ DNE.

$\square$

5.2 Contromodelli

Consideriamo i seguenti *frame*:

1. $\mathcal{W}_1 = \{0\}$ e $v_1(0) = \emptyset$.
2. $\mathcal{W}_2 = (\{1, 2\}, \leq, \emptyset)$.
3. $\mathcal{W}_2' = (\{1, 2\}, \leq, \{2\})$.
4. $\mathcal{W}_3 = (\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}, \subset, \emptyset)$.
5. $\mathcal{W}_3' = (\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}, \subset, \{\{1\}, \{2\}\})$.
6. $\mathcal{W}_4 = (\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\{1, 2\}\}, \subset, \emptyset)$.



In questa figura i diagrammi di Hasse di $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$, $\mathcal{W}_3$ e $\mathcal{W}_4$. Il diagramma di $\mathcal{W}_2'$ è come quello di $\mathcal{W}_2$, e il diagramma di $\mathcal{W}_3'$ è come quello di $\mathcal{W}_3$; gli ordini sono gli stessi, cambia solo l'insieme Q dei mondi anormali.

Grazie ai risultati visti nella sezione precedente vale la seguente

Proposizione 5.2.1. *In LM valgono i seguenti risultati:*

	DNE	*EFQ*	*LEM*	*DGP*	*PP*	*WLEM*	*WT*	$DGP^{\to}$
$\mathcal{W}_1$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\mathcal{W}_1^{\perp}$	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\mathcal{W}_2$	✗	✓	✗	✓	✗	✓	✓	✓
$\mathcal{W}_2^{\perp}$	✗	✗	✓	✓	✗	✓	✓	✓
$\mathcal{W}_2'$	✗	✗	✓	✓	✗	✓	✗	✓
$\mathcal{W}_3$	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✓
$\mathcal{W}_3^{\perp}$	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✓	✓
$\mathcal{W}_3'$	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✗	✗
$\mathcal{W}_4$	✗	✓	✗	✗	✗	✓	✓	✓
$\mathcal{W}_4^{\perp}$	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✓	✓

Dimostrazione. Dato $\mathcal{W}_1^{\perp}$, per Proposizione 5.1.3. $\mathcal{W}_1^{\perp} \Vdash$ LEM, $\mathcal{W}_1^{\perp} \nVdash$ DNE, $\mathcal{W}_1^{\perp} \nVdash$ EFQ.
$\mathcal{W}_2$ è un modello di EFQ. $\mathcal{W}_2 \nVdash$ DNE, infatti se ci fosse un P tale che $2 \Vdash P$ e $1 \nVdash P$, allora non ci sarebbe nessun u tale che $u \Vdash \neg P$, dato che $Q = \emptyset$. Quindi per tale P si avrebbe $\mathcal{W}_2 \Vdash \neg\neg P$ ma $1 \nVdash P$.
Lo stesso P ci assicura che $\mathcal{W}_2 \nVdash$ LEM.
Consideriamo ora $\mathcal{W}_2'$. Dal momento che è $\vee$-free, allora vale DGP$^{\to}$. Sia P di nuovo tale che $2 \Vdash P$ e $1 \nVdash P$. WT non è valido, infatti $1 \Vdash \neg P$; Se $2 \Vdash P \to S$ allora $1 \Vdash \neg(P \to S)$. Dato che $1 \notin Q$, $1 \nVdash \perp$ e quindi $1 \nVdash \neg\neg(P \to S)$.
$\mathcal{W}_3$ non soddisfa WLEM, infatti per P tale che $\{1\} \Vdash P$, $\emptyset \nVdash \neg P \vee \neg\neg P$.
$\mathcal{W}_3' \nVdash$ DGP$^{\to}$: sia $P = P_{\{1\}}$ e $S = S_{\{2\}}$. Allora $\emptyset \nVdash P \to S$ e $\emptyset \nVdash S \to P$. Dal momento che $1 \Vdash \perp$ e $2 \Vdash \perp$, $\emptyset \Vdash \neg(P \to S)$ e $\emptyset \Vdash \neg(S \to P)$. Siccome $\emptyset \nVdash \perp$, abbiamo $\emptyset \nVdash \neg\neg(P \to S)$.
È noto che LEM e EFQ $\Rightarrow$ DNE (Proposizione 2.0.2). Quindi sotto l'ipotesi che valga EFQ il nostro diagramma "collassa" in:

$$\begin{array}{c} DNE, PP, LEM \\ \Downarrow \\ DGP \\ \Downarrow \\ WLEM \end{array}$$

Il modello $\mathcal{W}_2$ mostra che la prima implicazione non è invertibile. Per dimostrare che EFQ e WLEM $\not\Rightarrow$ DGP consideriamo il modello $\mathcal{W}_4$.
Dato che $Q = \emptyset$ è un modello di EFQ; dal momento che non è $\vee$-free non soddisfa DGP. Mostriamo che in $\mathcal{W}_4$ vale WLEM. Sia P una formula arbitraria. Se $P \notin v(\{1,2\})$, allora $\mathcal{W}_4 \Vdash P \to \bot$. Se $P \in v(\{1,2\})$ allora $P \to \bot$ non vale in nessun mondo, perciò $\mathcal{W}_4 \Vdash \neg\neg P$. In entrambi i casi $\mathcal{W}_4 \Vdash \neg P \vee \neg\neg P$.

□

Teorema 5.2.1. *Le implicazioni del Teorema 4.2.2 non sono invertibili, e nessun'altra freccia può essere aggiunta.*

Dimostrazione. Discende dalle proprietà dei modelli $\mathcal{W}_{1\ldots4}$. □

Concludiamo questa sezione con alcune considerazioni sui modelli che abbiamo usato per le dimostrazioni.
Nel definire la semantica di Kripke nel Capitolo 1 abbiamo chiesto che $\sqsubseteq$ fosse un semplice ordine parziale, senza chiedere che fosse un albero, come si trova talvolta in letteratura [6].

Definizione 5.2.1. Un albero è un ordine parziale $(T, \leq)$ in cui per ogni $t \in T$ l'insieme $\{s \in T | s < t\}$ è un buon ordine rispetto a $\leq$.

Questo perché secondo Diener e McKubre-Jordens [6] "for a structural analysis of what principles hold depending on the underlying partial order it makes more sense to consider arbitrary partial orders rather than tree-like ones."
Per capire meglio questo fatto è utile considerare dei modelli per la logica intuizionista. Come abbiamo visto, i modelli per la logica intuizionista sono quelli in cui $Q = \emptyset$, poiché in logica intuizionista vale EFQ.
Il modello $\mathcal{W}_3$ è un modello albero con una biforcazione: in tale modello non è valido DNE, né LEM né PP (che sono intuizionisticamente equivalenti, Proposizione 2.0.2) e neanche WLEM e DGP. Il modello $\mathcal{W}_4$, che non è un modello albero, ci dà invece molte più informazioni.

Capitolo 6

Negazione e contraddizione

6.1 Equivalenza delle negazioni in presenza di contraddizione

La proprietà che rende interessante la logica minimale è che la presenza dell'inconsistenza non genera risultati banali. Mentre in logica intuizionista $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$ qualsiasi sia la formula ψ, in logica minimale questo non avviene. Ciò è dovuto all'assenza dell'assioma *ex falso quodlibet*.
Tuttavia, per ogni formula φ e ψ è possibile dimostrare

$$\varphi, \neg\varphi \vdash_{LM} \neg\psi$$

Questo significa che sebbene una teoria inconsistente in logica minimale possa essere non banale, lo è per quanto riguardo la negazione. Qualsiasi formula negata può essere dimostrabile in logica minimale, qualora sia presente una contraddizione.
Giocano un ruolo essenziale l'assioma 1

$$\varphi \to (\psi \to \varphi)$$

e l'assioma 9

$$((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi)) \to \neg\varphi.$$

Infatti, partendo dalle ipotesi φ e $\neg\varphi$, per l'assioma 1 e modus ponens arriviamo a $\psi \to \varphi$ e $\psi \to \neg\varphi$. Basta applicare l'assioma 9 per ottenere $\neg\psi$.

Nel superare questo problema Odintsov scrive [13]:

> "We should preserve the most essential property of intuitionistic negation, namely, that the negation must be defined as reduction to absurdity."

In logica intuizionista la negazione è caratterizzata da tre importanti proprietà:

1. $\neg\varphi$ significa che se è vero φ questo ci porta a una contraddizione;
2. Una contraddizione può essere rappresentata dalla costante $\bot$;
3. Una contraddizione implica qualsiasi cosa: $\bot \to \varphi$, oppure $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$.

Osserviamo che 3 implica 2. Se da una contraddizione posso dedurre qualsiasi cosa, allora tutte le contraddizioni sono equivalenti tra loro. In logica minimale, per come è stato definito il nostro sistema, omettiamo la proprietà 3. La proprietà 2, invece, è conservata in logica minimale.

Questo porta al problema dell'equivalenza delle negazioni. Sembra naturale che per superare il problema occorra omettere non solo la proprietà 3 ma anche la proprietà 2. Questo ci porta a chiederci: come dobbiamo intendere e definire la *contraddizione* nel nostro sistema? Esponiamo l'intuizione che formuleremo nelle prossime sezioni.
Se in LM intendiamo la contraddizione usando l'operatore $C(\varphi) := \varphi \wedge \neg\varphi$, la negazione può essere definita in due modi: tramite la costante $\bot$, $\neg\varphi := \varphi \to \bot$, oppure tramite l'operatore $C(\varphi)$, $\neg\varphi := \varphi \to C(\varphi)$.
È chiaro che

$$LM \vdash \neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to C(\varphi))$$

Questo ci porta all'idea di definire la negazione tramite l'operatore contraddizione C.

6.2 L'operatore contraddizione $C(\varphi)$

Consideriamo il linguaggio $\mathcal{L}^C = \{\wedge, \vee, \to, C\}$, ovvero $\mathcal{L}^+ \cup \{C\}$, con C operatore unario. Definiamo una C-logica una logica nel linguaggio $\mathcal{L}^C$ con gli assiomi 1-8. In questi assiomi non sono presenti i simboli $\bot$ e $\neg$, quindi possono essere scritti nel linguaggio $\mathcal{L}^C$. Aggiungiamo alla C-logica l'assioma $C(\varphi) \to \varphi$.

Definizione 6.2.1. Diciamo che C è *estensionale* [13] in una C-logica L se L è chiusa per la regola

$$\varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow C(\varphi) \leftrightarrow C(\psi)$$

Lemma 6.2.1. *Sia L una C-logica e*

$$C(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow C(\varphi) \wedge \psi,\ C(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge C(\psi) \text{ in } L$$

Allora C è estensionale in L.

Dimostrazione. Supponiamo $\varphi \leftrightarrow \psi \in L$. Usando la prima equivalenza e il fatto che $C(\varphi) \to \varphi$,

$$C(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow C(\varphi) \wedge \psi \leftrightarrow C(\varphi) \wedge \varphi \leftrightarrow C(\varphi)$$

In modo simile, da $C(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge C(\psi)$ otteniamo che $C(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow C(\psi)$. Quindi $C(\varphi) \leftrightarrow C(\psi)$. □

Teorema 6.2.1. *Sia L un C-logica e $\neg\varphi := \varphi \to C(\varphi)$. Allora*

$$C(\varphi) \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi.$$

Inoltre,

$$((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi)) \to \neg\varphi$$

se e solo se

$$C(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow C(\varphi) \wedge \psi, \; C(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge C(\psi)$$

Dimostrazione. Dalla proprietà $\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \psi$ e da $C(\varphi) \to \varphi$, si ottiene immediatamente l'equivalenza $C(\varphi) \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$.
($\Rightarrow$) Assumiamo $((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi)) \to \neg\varphi$ e mostriamo che in questo caso la negazione può essere definita tramite la costante *falso*, $\neg\varphi \leftrightarrow \varphi \to \bot$, dove $\bot := C(p_0 \to p_0)$, per una fissata variabile p_0. Sostituendo la definizione di negazione all'interno della premessa otteniamo

$$(\,(\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to (\psi \to C(\psi)))\,) \to (\varphi \to C(\varphi))$$

Ricordando che $\vdash_{LM} \varphi \to (\psi \wedge \vartheta) \;\leftrightarrow\; (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \vartheta)$, otteniamo

$$(\varphi \to (\psi \wedge (\psi \to C(\psi)))) \to (\varphi \to C(\varphi)).$$

Per $C(\varphi) \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$, questo è equivalente a

$$(\varphi \to C(\psi)) \to (\varphi \to C(\varphi)).$$

Sostituendo ψ con $p_0 \to p_0$ otteniamo

$$\vdash (\varphi \to C(p_0 \to p_0)) \to \neg\varphi$$

Sostituendo φ con $p_0 \to p_0$ e ψ con φ otteniamo

$$((p_0 \to p_0) \to C(\varphi)) \to ((p_0 \to p_0) \to C(p_0 \to p_0))$$

Da cui abbiamo $C(\varphi) \to C(p_0 \to p_0)$. Applicando l'assioma 1

$$\neg\varphi \to (\varphi \to C(p_0 \to p_0))$$

E così finalmente siamo arrivati a $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \to \bot)$.
Da questo fatto e dall'equivalenza $C(\varphi) \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$ si ottiene $\vdash_{LM} C(\varphi) \leftrightarrow \varphi \wedge \bot$.
Questo dimostra che

$$C(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \bot \leftrightarrow (\varphi \wedge \bot) \wedge \psi \leftrightarrow C(\varphi) \wedge \psi$$

Similmente si dimostra anche l'altra equivalenza.
($\Leftarrow$) Assumiamo $C(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow C(\varphi) \wedge \psi$ e $C(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge C(\psi)$.
Per il lemma 6.2.1 l'operatore C è estensionale. Se definiamo $\bot := C(p_0 \to p_0)$, usando l'estensionalità di C otteniamo

$$C(\varphi) \leftrightarrow C((p_0 \to p_0) \wedge \varphi) \leftrightarrow C(p_0 \to p_0) \wedge \varphi \leftrightarrow \varphi \wedge \bot$$

e anche

$$\neg\varphi \leftrightarrow \varphi \to C(\varphi) \leftrightarrow \varphi \to (\varphi \wedge \bot) \leftrightarrow \varphi \to \bot.$$

Abbiamo ottenuto $\neg\varphi \leftrightarrow \varphi \to \bot$. Interpretando la negazione in questo modo

$$\vdash_{LM} ((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi)) \to \neg\varphi$$

□

Il senso di questo teorema è che in una C-logica si presenta il problema della negazione se e solo se la negazione definita tramite l'operatore C soddisfa l'assioma 9.
Si può riassumere nel seguente

Corollario 6.2.1. *In una C-logica L, per ogni formula φ e ψ,*

$$\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\psi$$

se e solo se

$$C(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow C(\varphi) \wedge \psi,\ C(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge C(\psi)$$

6.3 L'operatore falso $A(\varphi)$

È stato fatto notare sopra che in LM la negazione può essere definita in due modi equivalenti: tramite la costante $\bot$ oppure con l'operatore contraddizione $C(\varphi)$. Questa semplice osservazione porta a una distinzione tra l'operatore contraddizione e quello che chiameremo *l'operatore falso* e che indicheremo con $A(\varphi)$.

> "There are different intuitions behind these operators. By $C(\varphi)$ we mean a contradiction expressed in terms of φ, i.e., a simultaneous stating of φ and its negation $\neg\varphi$, from which follows that $C(\varphi)$ should imply φ. By $A(\varphi)$ we mean such a statement that reducing φ to it, i.e., proving the implication $\varphi \to A(\varphi)$, is enough to negate φ."
>
> [Odintsov[13]]

Questo modo di intendere $A(\varphi)$ non ci porta ad assumere $A(\varphi) \to \varphi$. Le formule $A(\varphi)$ e φ potrebbero essere incomparabili, come nel caso di LM con le formule $\perp$ e φ: nella formalizzazione della logica minimale che abbiamo visto al Capitolo 1 (LM) l'operatore falso è semplicemente la costante $\perp$ $(A(\varphi) \leftrightarrow \perp)$.
L'operatore contraddizione $C(\varphi)$ può essere considerato come un caso speciale dell'operatore falso, soddisfacente la condizione $C(\varphi) \to \varphi$ per ogni φ.

> "Moreover, if a negation of some system can be defined in terms of an absurdity operator, such a negation itself can be taken as an absurdity operator, which will produce the same negation"
>
> [Odintsov[13]]

Consideriamo il linguaggio $\mathcal{L}^A = \mathcal{L}^+ \cup \{A\}$, dove A è un operatore unario. Definiamo una A-logica una logica nel linguaggio $\mathcal{L}^A$ con gli assiomi 1 - 8.

Proposizione 6.3.1. *Sia L una A-logica. Definiamo l'operatore contraddizione C come $C(\varphi) := \varphi \wedge A(\varphi)$ e la negazione $\neg$ come $\neg\varphi := \varphi \to A(\varphi)$. le seguenti formule sono dimostrabili in L:*

$\neg\varphi \leftrightarrow \varphi \to \neg\varphi$;

$\neg\varphi \leftrightarrow \varphi \to C(\varphi)$;

$C(\varphi) \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$;

$C(\varphi) \to \varphi$;

$C(\varphi) \to A(\varphi)$;

$A(\varphi) \to \neg\varphi$.

Dimostrazione. Per esempio la prima, $\neg\varphi \leftrightarrow \varphi \to \neg\varphi$, è l'abbreviazione di

$$\varphi \to A(\varphi) \leftrightarrow \varphi \to (\varphi \to A(\varphi))$$

Per la prima implicazione basta usare l'assioma 1 e modus ponens.
Viceversa, usando il teorema di deduzione

$\vdash (\varphi \to (\varphi \to A(\varphi))) \to (\varphi \to A(\varphi))$

$(\varphi \to (\varphi \to A(\varphi)) \vdash \varphi \to A(\varphi)$

$(\varphi \to (\varphi \to A(\varphi))), \varphi \vdash A(\varphi)$

Che usando modus ponens è banalmente vera.
Anche le altre sono facilmente derivabili usando le definizioni e gli assiomi 1-8. □

In merito a questa proposizione Odintsov scrive [13] :

> "This proposition shows that C defined in terms of the absurdity operator A really can be considered as a contradiction operator corresponding to the negation defined via A and that there is the whole 'interval' of operators, from C to $\neg$ defining the same negation."

Conclusioni

In questa tesi abbiamo studiato tre aspetti che riguardano la logica minimale proposizionale.

In primo luogo lo studio dei paradossi dell'implicazione materiale in logica minimale può essere visto come un contributo di reverse-mathematics per quanto riguarda le logiche non-classiche.

Secondo, abbiamo visto delle possibili estensioni per la logica minimale. Negli anni sono stati fatti diversi studi in questo campo, per esempio Odintsov ha sviluppato molte estensioni della logica minimale per logiche paraconsistenti [13]. Dai risultati ottenuti in questa tesi possiamo intuire come le estensioni che derivano dai paradossi dell'implicazione materiale si distinguano tra di loro. Rispetto alle estensioni di Odintsov, Diener e McKubre-Jordens scrivono nel loro articolo [6]: "our resulting hierarchy covers a smaller area, but in more depth".
Il teorema 4.2.2 mostra quali relazioni intercorrono tra i paradossi dell'implicazione materiale e altre proposizioni notevoli nell'ambito della logica minimale, e fornisce uno schema di possibili estensioni per tale sistema logico.

Infine abbiamo osservato che alcune criticità riguardanti la negazione e la contraddizione sono insite nella definizione stessa di queste due entità. Per superarle possiamo agire direttamente sul linguaggio e introdurre dei nuovi operatori.

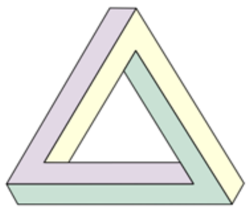
Il ruolo della contraddizione nella storia del pensiero matematatico è sempre stato fondamentale: basti pensare al celebre paradosso del mentitore ("questa frase è falsa") oppure al paradosso di Russell senza il quale oggi forse non avremmo la moderna teoria degli insiemi.
Così scrive Maarten McKubre-Jordens in un suo articolo sulla paraconsistenza [11]:

> "Classical mathematics uses classical logic, and classical logic is *explosive*. [...] Naive set theory, for example, is classically disinteresting, because it not only proves that 1+1=2, but also that 1+1=7. All because of Russell's paradox. There is no classical distinction between inconsistency (the occurrence of a contradiction) and incoherence (a system which proves anything you like). The classical mathematician does not distinguish between a contradiction and total absurdity; both are used

to reject assumptions. However, from the paraconsistent viewpoint, not all contradictions are necessarily absurd."

La logica minimale, con le sue possibili estensioni, può essere un ambiente paraconsistente in cui ragionare qualora fossimo in presenza di una contraddizione. Per la matematica moderna la contraddizione diventa quell'elemento di sprono che ci induce ad indagare su questioni meta-matematiche e ad aprire il nostro sguardo su orizzonti che prima erano "chiusi ai matematici".
Sempre citando McKubre-Jordens [11]:

> "Allowing inconsistencies without incoherence opens up many areas of mathematics previously closed to mathematicians. One such area is inconsistent geometry. M. C. Escher's famous drawings, for example, often contain impossible shapes or inconsistent ideas. [...] The Penrose triangle is an inconsistent figure, but at the same time coherent; certainly coherent enough to be put down on paper."



Bibliografia

[1] J. Bell e M. Machover. *A Course in Mathematical Logic*. North-Holland, 1977.

[2] Nick Bezhanishvili e Dick de Jongh. *Intuitionistic logic. ILLC Prepublication*. Series PP-2006-25, Università di Amsterdam. 2006.

[3] Almudena Colacito. *Minimal and Subminimal Logic of Negation*. MSc Thesis. Università di Amsterdam. 2016.

[4] Dirk van Dalen. *Logic and Structure*. Springer-Verlag London, 2013.

[5] Dirk van Dalen. *Intuitionistic Logic*. The Blackwell Guide to Philosophical Logic. Blackwell Oxford, 2001.

[6] Hannes Diener e Maarten McKubre-Jordens. *Classifying material implications over minimal logic*. Università di Canterbury (NZ). Archive for Mathematical Logic (2020) 59:905-924. Springer-Verlag GmbH Germany, 2020.

[7] Arend Heyting. *Die formalen regeln der intuitionistischen logik*. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1930.

[8] Ingebrigt Johansson. *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*. Compositio Mathematica. 1937.

[9] William Kneale e Martha Calvert. *Storia della logica*. Einaudi, 1972.

[10] Andrei Nikolaevich Kolmogorov. *Sul principio del terzo escluso*. Matematiceskij Sbornik. 1925.

[11] Maarten McKubre-Jordens. *This is not a carrot: Paraconsistent mathematics*. Plus Magazine, 2011. URL: `plus.maths.org/content/not-carrot`.

[12] David Nelson. *Negation and separation of concepts in constructive systems*. 1959.

[13] Sergei Odintsov. *Constructive Negations and Paraconsistency*. Springer Netherlands, 2008.

[14] Graham Priest. *Romanae Disputationes - What is paraconsistent logic?* URL: `https://www.youtube.com/watch?v=uwVO8WNlAjw`.