Università degli studi di Padova
Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"
Corso di laurea Magistrale in Matematica

La dimostrazione nell'insegnamento e apprendimento della matematica nella scuola secondaria di II grado

Relatore:
Prof.ssa Cinzia Bonotto
Correlatore:
Prof. Luigi Tomasi

Candidato:
Gloria Luison
Matricola 2023714

Anno accademico 2021/2022 - 16.12.2022

"Far matematica, dopo i Greci,
vuol dire dimostrare."
(Bourbaki, 1980)

"Non c'è matematica senza dimostrazione.
È vero che la matematica non si esaurisce
in dimostrazioni. [...] ma la dimostrazione
segna il passaggio alla matematica vera
e propria da una fase propedeutica."
(Lolli, 1988)

Indice

Introduzione

Il ragionamento ipotetico-deduttivo è il cuore stesso della matematica e dimostrare che una certa proposizione è vera è l'attività principale di un matematico. Per questi motivi (e non solo) l'educazione alla dimostrazione è un'importante obiettivo didattico e, come suggerito dalle *Indicazioni Nazionali* per i Licei e le *Linee guida* per gli Istituti Tecnici e Professionali (2010, 2012), dovrebbe fare parte dei curricoli di ogni tipologia di Scuola Secondaria di II grado.

Durante il mio percorso di Laurea Magistrale in Matematica la dimostrazione ovviamente è sempre stata presente in ogni insegnamento. Nel corso di *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, tenuto dal Prof. L. Tomasi nell'anno accademico 2021/2022, tuttavia, essa è stata trattata sotto un diverso punto di vista, ovvero quello didattico, e le lezioni che hanno approfondito il tema dell'insegnamento della dimostrazione nella Scuola secondaria hanno dato spunto per la realizzazione di questo progetto di Tesi. A questa ispirazione iniziale si sono aggiunte alcune altre motivazioni: la consapevolezza della difficoltà dell'argomento e dunque un interesse ad approfondire le metodologie didattiche più opportune per proporre la dimostrazione a scuola e la volontà di mettersi in gioco nell'ideazione e attuazione di una progettazione didattica, desiderando io stessa poter svolgere la professione dell'insegnante in futuro. Ho dunque ritenuto interessante approfondire tale argomento da un punto di vista didattico.

L'elaborato si propone di introdurre il concetto di dimostrazione matematica da un punto di vista teorico, analizzando come esso si è evoluto nel corso dei secoli, e di illustrare l'importanza dell'insegnamento e apprendimento del concetto di dimostrazione nella Scuola secondaria di II grado; vorrebbe inoltre presentare le metodologie e le tecniche tramite cui proporre la dimostrazione a scuola, analizzando le *Indicazioni Nazionali* e la letteratura sul tema, infine si propone di presentare un progetto da me ideato, in collaborazione con i relatori di questa tesi, volto a sperimentare un approccio graduale di avvio e consolidamento del concetto di dimostrazione nella Scuola secondaria di II grado.

Nel primo Capitolo verrà presentato un excursus storico sulla dimostrazione, atto ad analizzare come tale concetto si sia evoluto nei secoli. Verrà descritta la nascita della dimostrazione nell'antica Grecia, il suo sviluppo nel mondo arabo e in età moderna; si analizzerà l'evoluzione del concetto a causa della nascita del calcolo infinitesimale e successivamente delle geometrie non euclidee, durante il processo di rigorizzazione dell'analisi e con la "crisi dei fondamenti" tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo. Verrà infine approfondita la nascita dell'assiomatica moderna. A completamento del primo capitolo verrà presentata la dimostrazione da un punto di vista teorico, analizzandone la struttura e le differenti tipologie.

Il secondo Capitolo illustrerà alcune tematiche legate all'insegnamento e apprendimento della dimostrazione. La ricerca didattica sul tema offre negli ultimi anni un vastissimo panorama di studi, ricerche e articoli ed è in continua evoluzione. Verranno dunque selezionate alcune metodologie e strumenti che i didatti della matematica indicano come validi per l'insegnamento e apprendimento della dimostrazione; queste metodologie e strumenti verranno approfonditi e successivamente applicati per l'ideazione del progetto didattico presentato nel terzo Capitolo.
Verranno in particolare investigate le motivazioni a sostegno dell'importanza di insegnare a dimostrare nella Scuola secondaria e dell'utilizzo di intuizione e congettura in una fase propedeutica alla dimostrazione. Verranno dati suggerimenti didattici, sarà valutata l'utilità dei software di geometria dinamica in percorsi di avvio alla dimostrazione e la necessità di introdurre la dimostrazione in ogni ambito della Matematica e non esclusivamente in quello geometrico. Oltre alla letteratura sul tema, verranno anche analizzate le *Indicazioni Nazionali* per i Licei del 2010 [35] e i curricoli proposti dall'UMI, pubblicati nei volumi *Matematica 2003* [33] e *Matematica 2004* [34].

Il terzo Capitolo è dedicato alla presentazione di un progetto di sperimentazione didattica da me ideato per sperimentare dei percorsi graduali rispettivamente di avvio e consolidamento della dimostrazione nella Scuola secondaria di II grado. Questo progetto nasce allo scopo di delineare un percorso di approccio maggiormente graduale nell'insegnamento della dimostrazione a scuola, che eviti metodi e atteggiamenti di tipo meccanico-riproduttivo o che porti ad escludere la dimostrazione dal curricolo di matematica.
Le domande di ricerca alla base del progetto sono: constatate le difficoltà degli studenti della Scuola secondaria nell'affrontare la dimostrazione, è forse necessario un approccio maggiormente graduale alla dimostrazione tramite cui si possa trasmettere agli studenti la necessità di quest'ultima e motivarli nell'affrontare procedimenti di tipo dimostrativo? L'utilizzo di software di geometria dinamica può essere utile in un percorso di avvio e/o consolidamento della dimostrazione? L'utilizzo della congettura, dell'argomentazione e dell'intuizione può essere utile in un percorso di avvio e/o consolidamento della dimostrazione? È forse necessario introdurre la dimostrazione in diversi ambiti della Matematica e non quasi esclusivamente in Geometria euclidea, per evitare che si crei l'idea sbagliata che essa sia uno "strumento" esclusivamente geometrico?
Il capitolo prosegue con la descrizione delle implementazioni del progetto in una classe prima Liceo delle Scienze applicate e in una classe terza Liceo Scientifico ordinario del Liceo Ginnasio Statale "Giorgione" di Castelfranco Veneto. Verranno esposte le modalità attraverso le quali sono state attuate le attività e verranno riportati i risultati di questionari, laboratori e compiti svolti dagli studenti. Attraverso l'analisi dei dati raccolti e le osservazioni effettuate nel corso del progetto, verrà poi effettuato un bilancio delle attività proposte, presentando le conclusioni cui si può giungere, oltre ad alcuni spunti per possibili miglioramenti e sviluppi del progetto.

L'elaborato si conclude con due appendici, che raccolgono rispettivamente i materiali utilizzati nel corso dell'implementazione del progetto nella classe prima e i materiali utilizzati nel corso dell'implementazione del progetto nella classe terza.

Capitolo 1

La dimostrazione in matematica

1.1 Storia della dimostrazione

Com'è nata e come si è sviluppata la dimostrazione logica? Perché nel corso della storia della matematica sono presenti diversi tipi di dimostrazione? E cosa ha causato, alla fine dell'Ottocento, un cambiamento negli standard della dimostrazione?
Queste sono solo alcune delle domande a cui questo capitolo mira a rispondere. Conoscere la storia del concetto di dimostrazione o, più in generale, di un argomento scientifico, non è infatti soltanto culturalmente interessante, ma permette di conoscere le conseguenze dello sviluppo del concetto; tale approccio, se proposto in una classe di studenti, potrebbe portare in classe un po' di quella curiosità ed entusiasmo che storicamente ci furono durante la nascita e lo sviluppo della dimostrazione. Proprio per tali motivi questa tesi sperimentale sulla didattica della dimostrazione matematica si apre con un excursus storico.

1.1.1 La dimostrazione nell'Antica Grecia

«Demonstration at first was visualisation, the response to the question, "Is that so? Show me."» (Grabiner, 2012, p.148)[19] La parola *teorema*, in greco, significa infatti "ciò che si guarda, su cui si specula" ($\theta\epsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha$) e sul piano etimologico ha la medesima derivazione di *teoria* (dal verbo $\theta\epsilon\omega\rho\acute{\epsilon}\omega$, che si traduce con "guardo, osservo, contemplo"). È dunque immediato immaginare che le prime dimostrazioni prodotte siano state dimostrazioni visuali.
La dimostrazione visuale si può ritrovare nella matematica di numerose culture, tra cui quella greca. Per esempio, la Figura 1.1, tratta dal dialogo di Platone *Il Menone*, di cui si parlerà in modo più approfondito in seguito, illustra come dimostrare, contando dei triangoli, che, dato un quadrato, il quadrato costruito sulla sua diagonale ha area doppia del quadrato di

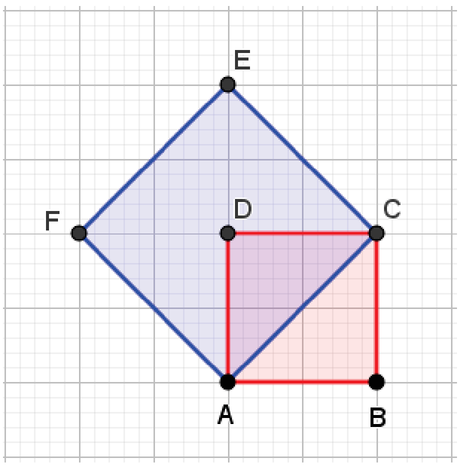


Figura 1.1

partenza.

Anche l'aritmetica utilizzava dimostrazioni visuali: sia che si adoperassero i numeri geroglifici egiziani, un abaco, o che si contasse con le dita, le verità elementari dell'aritmetica potevano (e possono) essere rese evidenti visivamente. I Greci lo sapevano bene: i Pitagorici, per esempio, tramite l'assunzione che un punto rappresentasse l'unità, riuscivano ad ottenere risultati generali tramite delle dimostrazioni visuali (si veda Figura 1.2).

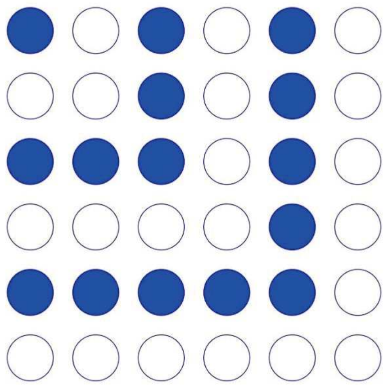


Figura 1.2: Dimostrazione visuale, ad opera dei Pitagorici, che la somma dei primi numeri dispari successivi è sempre un quadrato.

La dimostrazione visuale, tuttavia, non risultò sufficiente ai Greci, i quali fecero della dimostrazione logica l'essenza della loro geometria e, più in generale, di tutta la matematica. Detto con parole semplici, una dimostrazione logica deduce che un fatto è conseguenza logica di un altro che già si supponeva essere dimostrato o assunto come vero ed è dunque necessaria quando ciò che si vuole dimostrare non è evidente. I Greci furono i primi ad accorgersi del fatto che in tali situazioni servissero delle argomentazioni, e si limitarono a non darne nel caso di poche proposizioni primitive(che oggi prendono il nome di "assiomi"): essi costruirono l'intera matematica in modo che avesse una struttura logica, assumendo alla base il più piccolo numero di risultati creduti "già veri", "già evidenti".

Si analizzeranno in seguito le ipotesi più accreditate sul motivo per il quale si giunse a tale passaggio nella storia della dimostrazione matematica, cercando di comprendere perché furono proprio gli antichi Greci a dare alla geometria questo tipo di struttura logica.
Innanzitutto occorre sottolineare che le conquiste greche non provennero dal nulla: la cultura greca fu infatti l'erede di due precedenti tradizioni matematiche, quella egiziana e quella babilonese, le quali entrambe produssero numerosi risultati, non sempre però concordanti. Per esempio, nel trovare l'area del cerchio, i Babilonesi inizialmente approssimavano il numero π con 3, poi con $3 \cdot \frac{1}{8}$ [1], ovvero, utilizzando la notazione decimale moderna, con 3,125. Analizzando il calcolo dell'area del cerchio degli Egizi, si nota invece che π era approssimato con il valore $\frac{256}{81}$, ovvero 3,16. Entrambi i risultati non sono corretti e i Greci probabilmente se ne accorsero e si chiesero quale fosse invece il valore corretto. Questo esempio rende più esplicita l'ipotesi secondo la quale i Greci ritenessero che, per evitare di avere risposte differenti alle medesime domande, fosse necessario assumere soltanto ciò su cui tutti fossero d'accordo, come per esempio che "tutti gli angoli retti sono uguali", e poi dedurre

[1] Il sistema di numerazione babilonese era sessagesimale, dunque sarebbe più accurato dire che approssimassero π con $3 + \frac{7}{60} + \frac{30}{60^2}$.

da queste assunzioni indubitabili altri fatti.
Una seconda possibile spiegazione sull'origine della dimostrazione logica basata su un sistema di assiomi proviene dalla natura della scienza dei Greci. I primi filosofi della natura greci cercavano di trovare una singola spiegazione, un unico principio che potesse dare un senso all'intero universo. Talete (624-647 a.C. circa), per esempio, sosteneva che l'acqua fosse il principio di tutte le cose, Anassimene (585-528 a.C. circa) conferiva tale ruolo all'aria. I Pitagorici (VI secolo a.C.) dicevano che "tutto è numero", Democrito (460-370 a.C. circa) che "tutto è fatto di atomi", Empedocle (492-432 a.C. circa), infine, che tutto fosse costituito di 4 elementi, il fuoco, l'acqua, la terra e l'aria. Questo probabilmente influenzò anche la matematica: così come in natura anche in matematica i Greci cercarono di ridurre ogni cosa a semplici principi primitivi, ai suoi "elementi".
Un'altra possibile spiegazione proviene dalla matematica pratica. Un modo efficace di risolvere problemi sembrava infatti essere quello di ridurli a problemi più semplici la cui soluzione fosse già nota. Basti pensare a come Ippocrate di Chio (470-410 a.C. circa) ridusse il problema della duplicazione del cubo a quello di trovare due medi proporzionali tra due numeri, che a sua volta si riduce al trovare, nel linguaggio odierno, un'intersezione tra un'iperbole e una parabola.
Il processo dei matematici greci di ridurre un problema in problemi già noti andava dal complesso al semplice. Se si suppone invece di invertire l'ordine si ottiene la struttura di una dimostrazione, che parte dalle idee più semplici e che conduce via via ad idee sempre più complesse. Molto più tardi, Pappo di Alessandria (IV secolo d.C.) descriverà la relazione tra i due suddetti processi, chiamando "analisi" il processo a ritroso che permette di trovare gli oggetti più semplici a partire dai quali il problema può essere risolto, e "sintesi" il processo inverso, che mostra come arrivare alla soluzione partendo da questi semplici oggetti.
Una quarta spiegazione per la nascita della dimostrazione logica in Grecia è basata sulla natura della società della Grecia classica. Nel VI e nel V secolo a.C. la Grecia era costituita di piccole città-stato governate dai suoi cittadini. In queste città ed in particolar modo ad Atene, le dispute pubbliche tra partiti e l'interazione tra le parti in causa, dai tribunali alle assemblee pubbliche, richiedevano, e quindi contribuirono a far sviluppare, le capacità logiche. I Greci sapevano che un buon modo per persuadere le persone fosse quello di trovare le loro premesse e poi costruire la propria argomentazione ragionando a partire da esse, mentre un buon modo per confutare le visioni altrui fosse quello di trovare delle conseguenze logiche alle loro visioni che conducessero ad un assurdo. Si può dunque facilmente ipotizzare che l'enfasi culturale sul pensiero logico-argomentativo abbia potuto facilmente influenzare ed essere incorporata alla matematica.
Infine, un'ultima spiegazione proviene dall'influenza della filosofia greca nella matematica. I filosofi greci erano profondamente argomentativi. Il fatto stesso che Platone presentasse la propria filosofia sotto forma di dialoghi dimostra il carattere profondamente logico e argomentativo di questa disciplina. E la matematica greca, essendo profondamente collegata alla filosofia greca, le assomigliava in questo. Il collegamento fra matematica e filosofia risulta evidente non solo in Platone, che rese la matematica il centro del suo programma per l'educazione dei governanti della sua Repubblica ideale, ma anche per il suo successore Aristotele. Aristotele, come vedremo anche in seguito, voleva che ogni scienza iniziasse con l'esplicitazione di principi

primi elementari, per poi dedurre ogni altra cosa logicamente. La filosofia dunque influenzò e diede una direzione ai matematici, direzione che venne in particolar modo seguita da Euclide.
Alla luce di tutte queste ipotesi risulta chiaro che capire come gli uomini siano giunti a questo cambiamento nel modo di concepire la dimostrazione (da dimostrazione visuale a dimostrazione logica) sia un problema storiografico non risolto. Tale problema non è risolvibile soprattutto per mancanza di documentazione storica pre-aristotelica. Nonostante ciò si cercherà, nel seguito della trattazione, di esporre ordinatamente i principali passaggi nella storia della dimostrazione dell'antica Grecia.

Procedendo con ordine, la storiografia colloca l'inizio della civiltà greca nel secondo millennio a.C.. Come riportato da Boyer (1980), *«durante il VI secolo a.C., apparvero due uomini, Talete e Pitagora, che sembra abbiano svolto nel campo della matematica, un ruolo simile a quello di Omero e di Esiodo nel campo della letteratura. [Tuttavia] non ci è stato conservato nessun capolavoro matematico attribuibile all'uno o all'altro, e non si sa neppure con certezza se Talete o Pitagora ne abbiano composto uno. Le loro presunte realizzazioni devono essere ricostruite sulla base di una tradizione non troppo sicura che si è venuta formando attorno a questi due antichi matematici. [...] la nostra esposizione è basata più su una tradizione largamente persistente che non su documenti storici esistenti di qualsiasi natura.»*[12] (p.53)

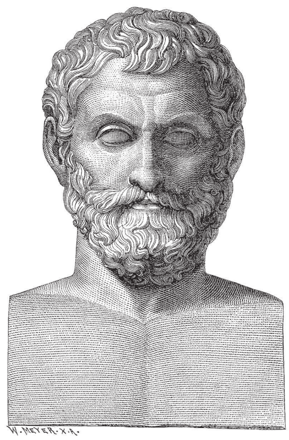


Figura 1.3: Talete di Mileto (640 a.C./625 a.C. circa – 548 a.C./545 a.C. circa)

Talete di Mileto riteneva che la natura agisse secondo principi intelligibili agli uomini e dunque è ritenuto quel filosofo che introdusse l'astrazione nello studio della natura. Fino ad allora la geometria (dal greco antico $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$, composto dal prefisso "geo" che rimanda alla parola "terra" e "metria", ovvero "misura", tradotto quindi letteralmente come "misurazione della terra") significava agrimensura e veniva utilizzata ogni qual volta fosse necessario suddividere terreni, recintare dei campi, costruire altari, ecc. Talete cominciò invece a concepire le figure geometriche non più come oggetti particolari (campi, recinzioni, ecc.) ma come oggetti astratti e iniziò inoltre a notare, studiando i risultati ottenuti dalle precedenti civiltà, come alcuni fatti geometrici fossero deducibili da altri. Non sappiamo molto altro sulla vita e sull'opera di Talete; non si hanno infatti a disposizione dei veri e propri documenti storici che certifichino l'operato del filosofo, e si è costretti dunque a basarsi unicamente sulla tradizione. Un esempio di ciò è il celebre *Teorema di Talete*, proposizione che, per l'appunto, prende il nome dal filosofo. Sappiamo con buona certezza che il teorema venne appreso da Talete durante uno dei suoi viaggi in Babilonia, è la tradizione invece ad attribuirgli una dimostrazione della proposizione, fatto non accertato e che spinse però ad innalzare Talete a "primo matematico" e fondatore dell'impostazione deduttiva della geometria. Non vi sono dunque documentazioni a favore di questa affermazione. Da un commento di Proclo apprendiamo che Talete *«andò dapprima in Egitto e da qui introdusse lo studio della geometria in Grecia. Non solo fece egli stesso parecchie scoperte, ma insegnò ai suoi successori i principi che stavano alla base di molte altre,* *seguendo in alcuni casi un metodo più generale, in altri uno più empirico»*[12] (Boyer, 1980, p.55). È dunque ragionevole supporre che Talete abbia effettivamente dato un contributo all'organizzazione razionale della matematica ed è appurato il fatto che sia il primo uomo a cui vengono attribuite delle scoperte matematiche; sembra invece oltremodo esagerato sostenere che avrebbe creato la geometria basata su deduzioni. Che siano stati i Greci a dare alla geometria una struttura logica è infatti ammesso da tutti, ma non si può affermare con certezza se questo passo sia stato compiuto da Talete o da matematici posteriori, vissuti addirittura due secoli più tardi.

Figura 1.4: Pitagora di Samo (580 a.C./570 a.C. circa – 495 a.C. circa). L'immagine è un particolare dell'affresco *La scuola di Atene*, ad opera di Raffaello, realizzato tra il 1509 e il 1511 e conservato ai Musei Vaticani

Una simile posizione è occupata dalla figura di Pitagora e dalla scuola pitagorica, non meno controverse di quella di Talete. Lo stesso *Teorema di Pitagora* molto probabilmente aveva origini babilonesi, ed è ancora aperta la congettura secondo la quale i Pitagorici furono i primi a fornire una dimostrazione della proposizione. Ciò che è certo è che i Pitagorici abbracciarono la concezione scientifica della geometria di Talete ed è possibile supporre che introdussero una concezione ulteriormente più astratta della matematica.
I Pitagorici scoprirono che l'intuizione può essere contraddittoria, tuttavia non la eliminarono, consapevoli che gli assiomi su cui ogni ramo della matematica si sviluppa vengono accettati grazie al loro carattere intuitivo e che l'intuizione svolge un ruolo importante nella scoperta dei teoremi. Non accettavano tuttavia che essa fosse utilizzata come strumento utile per dichiarare la validità di una proposizione.
Il merito più grande della scuola pitagorica è sicuramente quello di aver introdotto maggiore rigore in matematica e di aver separato ancora di più la matematica dalle sue origini concrete e pratiche.

In conclusione si può affermare che non vi è molta certezza nel collocare la nascita della dimostrazione logica e lo sviluppo del procedimento deduttivo nell'antica Grecia ed è probabile che la matematica del VI e del V secolo a.C. fosse ancora troppo primitiva per dare questo contributo. Come afferma però lo storico Boyer (1980) *«non sarebbe irragionevole considerare la fine del V secolo come un termine ante quem per quanto concerne quella forma deduttiva razionale che ci è oggi così familiare»*[12] (p.91).

Una delle prime testimonianze dirette di una dimostrazione si trova in un dialogo di Platone, *il Menone*, scritto nel IV secolo a.C.. Nel dialogo si fa riferimento a quella proposizione, citata già in precedenza, secondo la quale, dato un quadrato $ABCD$, il quadrato costruito sulla diagonale AC ha area doppia di $ABCD$. Il dialogo avviene tra Socrate e Menone: il primo sta cercando di provare al secondo come uno schiavo analfabeta possa giungere a ricostruire una dimostrazione di un risultato matematico se opportunamente guidato.

Socrate interroga lo schiavo con una serie di domande allo scopo di aiutarlo a "ricordare" (nel senso platonico del termine) le idee corrette per giungere passo passo alla dimostrazione del teorema. *«L'idea di dimostrazione che emerge dal dialogo platonico sembra essere»* quindi *«quella di un ragionamento mediante il quale si arriva a enunciati che possono ritenersi nozioni comuni, ossia noti a tutti e per accettare i quali non c'è più bisogno di argomentare.»* (Paola & Robutti, 2001, p. 5)[39]

Figura 1.5: Platone (428/427 a.C. – 348/347 a.C.) L'immagine è un particolare dell'affresco *La scuola di Atene*, ad opera di Raffaello, realizzato tra il 1509 e il 1511 e conservato ai Musei Vaticani.

I meriti di Platone sono quello di aver contribuito a separare ancor di più gli aspetti teorici da quelli di calcolo nella matematica, restringendo probabilmente la matematica greca a quelle costruzioni geometriche che potessero essere effettuate utilizzando esclusivamente la riga e il compasso ideali (la riga non graduata e il compasso collassabile), e quello di aver sviluppato il metodo analitico, tramite il quale, partendo dagli assiomi, procedendo passo passo si giunge alla dimostrazione del teorema. Platone era tuttavia probabilmente convinto che fosse il procedimento inverso ad essere spesso più pedagogicamente conveniente: occorre partire dalla proposizione che si vuole dimostrare, dedurre da essa una conclusione di cui si conosce la validità e successivamente ripercorrere all'indietro questa catena di ragionamenti ottenendo una vera e propria dimostrazione. È inverosimile che egli abbia inventato il metodo, più probabile invece che abbia formalizzato questo procedimento.

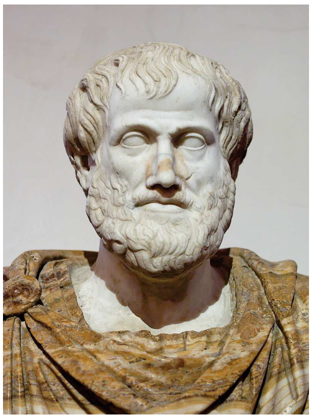


Figura 1.6: Aristotele (384 a.C. o 383 a.C. – 322 a.C.). Il busto (330 a.C.) è conservato al Museo nazionale romano di palazzo Altemps

Il primo filosofo greco a dare una definizione di "metodo analitico" fu Aristotele in *Analitici secondi* (un testo del cosiddetto *Organon* di Aristotele che si occupa della dimostrazione, della definizione e della conoscenza scientifica). Il trattato risale al IV secolo a.C. e in esso è possibile trovare una prescrizione di carattere metodologico su come dovrebbe essere organizzato un qualunque sapere per poter essere qualificato come sapere scientifico: *«esso dovrà strutturarsi in modo da esplicitare un certo numero di principi, indimostrabili perché immediatamente veri, che ne costituiscano il fondamento e, a partire da questi, dovranno poi essere ricavate con dimostrazioni rigorose e corrette tutte le altre proposizioni ammesse al suo interno.»*(Agazzi & Palladino, 1998, p.14)[1] Alle proposizioni iniziali indimostrabili è stato successivamente attribuito il nome di postulati o assiomi [2] e, pertanto, si è potuto convenire in seguito di chiamare

[2] Nell'antica Grecia vennero coniati soltanto i termini "postulato" e "nozione comune", utilizzati per la prima volta da Euclide nel testo degli *Elementi*. Al giorno d'oggi invece il termine "nozione comune" non viene più utilizzato, mentre il termine "assioma" e "postulato" sono diventati sinonimi.

metodo assiomatico quello che consiste nell'organizzazione di una scienza secondo una tale disposizione gerarchica delle sue proposizioni.

Gli *Elementi* di Euclide costituiscono il primo esempio di scienza organizzata secondo i criteri delineati negli *Analitici Secondi*.

L'attività principale di Euclide si colloca tra la fine del IV e l'inizio del III secolo a.C., in posizione istituzionale direttamente collegata al re Tolomeo I. Egli giunse dopo secoli di grande sviluppo della geometria in Grecia e si distinse non tanto per la scoperta di importanti risultati, quanto per il ruolo di maggior sistematore della geometria da un punto di vista ipotetico-deduttivo. Egli non aveva infatti alcuna pretesa di essere originale, attingendo alle opere dei suoi predecessori. Possiamo dunque affermare che il testo degli *Elementi* contiene l'eredità dei tre secoli precedenti della matematica greca e costituisce il primo esempio di sistema assiomatico deduttivo, consegnando ai posteri un'immagine duratura di cosa sia una scienza ed un'esposizione scientifica della matematica. Non ci sorprende sapere che Euclide arrivò "alla fine": l'assiomatizzazione si realizza infatti quasi sempre solo dopo che si è accumulato un ricco corpo di conoscenze.

Figura 1.7: Frammento di una copia de "Gli Elementi" di Euclide

Gli *Elementi* di Euclide sono costituiti da un totale di tredici libri, e rappresentano un manuale introduttivo della matematica "elementare" del tempo, ovvero di geometria, aritmetica e algebra geometrica.
Euclide, sulla scia degli insegnamenti di Aristotele, esplicita fin dall'inizio le proposizioni poste a fondamento della teoria. Nel primo libro degli *Elementi* troviamo infatti diversi tipi di enunciati: i termini, i postulati, le nozioni comuni e le proposizioni. I termini hanno lo scopo di caratterizzare gli enti geometrici. L'enunciazione dei termini si presenta come una serie di definizioni, e questo ha portato alcuni studiosi moderni a criticare l'esposizione euclidea perché una definizione, se si vuole essere rigorosi, può essere data utilizzando termini primitivi indefiniti e posti esplicitamente come tali. Se si considera come Euclide introduce la nozione di punto, invece, si nota che la nozione di "parte" non compare tra quelle primitive enunciate e dunque la definizione potrebbe apparire scorretta [3]. Come sostenuto da Agazzi e Palladino (1998), *«tale critica sarebbe*

[3]La prima celebre "definizione" di Euclide è: *Punto è ciò che non ha parti.* Questa definizione è stata criticata in quanto il punto è un termine primitivo e non andrebbe dunque definito. Questa definizione rientra in realtà in quelle chiamate **definizioni reali**, che sono ben diverse dalle usuali **definizioni nominali**. La definizione nominale infatti è la definizione sintattica come viene concepita al giorno d'oggi, e quindi è una definizione interna alla teoria, quella reale invece è piuttosto un descrivere, un rendere esplicito, ciò che si intende con un termine, facendo riferimento non ad altri termini della teoria, bensì a enti reali, a cui questo termine si riferisce. Per fare ciò ci si avvale di un discorso non interno alla teoria, bensì esterno ad essa, ad esempio attraverso l'uso di vocaboli del linguaggio comune, il cui significato si suppone preventivamente noto. Le definizione reali sono quelle che Enriques, nei *Problemi della scienza* (1985) [17], chiama **definizioni psicologiche** e che risultano essere un modo di far sorgere un certo concetto nella mente altrui

giustificata se Euclide avesse inteso introdurre i termini mediante definizioni formali. Al contrario, egli intende proprio introdurre i termini come primitivi nel suo discorso geometrico, solo che, non pensando affatto che essi debbano essere privi di significato, egli tende a chiarire tale significato, facendo riferimento a nozioni di senso comune che aiutino ad afferrarlo.»(p.37)[1]
Postulati e nozioni comuni sono le proposizioni che Euclide sceglie come premesse fondamentali: egli ritiene quelle proposizioni vere in quanto evidenti e dunque non crede ci sia bisogno di giustificarle in alcun modo. Successivamente, da queste proposizioni esplicitamente dichiarate come premesse della teoria, ricava mediante dimostrazioni altre proposizioni, dette teoremi. Per Euclide, quindi, la dimostrazione è un ragionamento che consente di stabilire la verità delle proposizioni della geometria, riducendole alle nozioni comuni e ai postulati. È doveroso notare che, per quanto riguarda i termini "postulato" e "nozione comune", essi vengono utilizzati da Euclide con sfumature di significato diverse. Euclide utilizza il termine "postulato" per proposizioni specifiche della geometria che vengono accettate come vere, senza necessitare di una dimostrazione, mentre utilizza il termine "nozione comune" per riferirsi a principi di carattere generale, validi non solo in geometria. [4]

Sicuramente al tempo dei Greci non vi era una codifica delle regole logiche utilizzate per dimostrare. Questo non significa però che non ci fossero dei criteri per la dimostrazione: *«anche se non sono esplicitate le regole logiche la cui concatenazione stabilisce un ragionamento, il metodo assiomatico impone implicitamente dei vincoli forti a chi si sforza di seguirlo, ad esempio quello che non deve comparire nella dimostrazione nulla, nessun termine che non sia primitivo e definito; [...] è implicita anche la esclusione della intuizione sensibile a favore della pura intellettualità dei passaggi dimostrativi.»*(Lolli, 1988, pp.42-43)[24]
Oltre a criteri impliciti, ve ne erano però anche di esplicitati, come provato dalla seguente testimonianza di Pappo, matematico greco vissuto ad Alessandria d'Egitto tra il III e il IV secolo d.C. :

L'analisi prende quello che è cercato come se fosse ammesso e passa da esso attraverso le sue successive conseguenze a qualcosa che è ammesso come il risultato di una sintesi: giacché in analisi noi assumiamo quello che è cercato come se fosse già fatto, e indaghiamo da cosa è che risulta, e di nuovo quale è la causa antecedente, e così via, rintracciando i nostri passi noi veniamo su qualche cosa di già noto o che appartiene alla classe dei principi primi, e tale metodo noi lo chiamiamo analisi, nel senso di essere una soluzione all'indietro. Ma nella sintesi, rovesciando il processo,
noi prendiamo come già fatto quello a cui si è infine arrivati nelle analisi e, raggiustando nel loro ordine naturale come conseguenze quelle che prima apparivano antecedenti, e successivamente connettendo i passi tra di loro, arriviamo alla fine a costruire ciò che era cercato; e questo noi chiamiamo sintesi.(Lolli, 1988, p.43)[24]

per mezzo di immagini opportunamente rievocate ed associate. Euclide sembra consapevole di tale distinzione: le definizioni nominali da lui introdotte (tipo quella di angolo retto, angolo ottuso, triangolo equilatero, e cosi via...) verranno utilizzate per giustificare passi di dimostrazione di teoremi; non userà invece mai la definizione reale di alcun termine primitivo da lui data (punto, linea, ...). Il suo apparato teorico è quindi indipendente da questo tipo di definizione.

[4]noi al giorno d'oggi non operiamo questa distinzione e li chiamiamo entrambi col nome di "assiomi". D'ora in avanti, nel proseguo dell'elaborato, verranno utilizzati come sinonimi.

Oltre a distinguere tra analisi e sintesi, i greci suddividevano in un modo ben preciso le proposizioni; ne dà testimonianza Proclo, matematico e filosofo bizantino, vissuto nel V secolo d.C. :

Ogni problema e ogni teorema che è completo con tutte le sue parti a posto contiene in sé i seguenti elementi: enunciazione, dispiegamento, definizione o specificazione, costruzione o macchinario, prova, conclusione. L'enunciazione stabilisce quello che è dato e quello che è cercato... lo spiegamento segnala e isola quello che è dato, e lo adatta per il suo uso nella indagine. La definizione o specificazione isola e afferma isolatamente quello che è cercato. La costruzione o macchinario aggiunge quello che è mancante al dato per il raggiungimento dell'obiettivo. La prova tira la necessaria inferenza ragionando scientificamente da fatti riconosciuti. La conclusione torna di nuovo alla enunciazione, confermando quello che è stato dimostrato... Essenziali e sempre presenti sono enunciazione, prova e conclusione. (Lolli, 1988, p.45)[24]

Possiamo pertanto affermare, citando Lolli (1988), che *«nel III secolo a.C. si raggiunse sotto il segno del metodo assiomatico la uniformità dei metodi geometrici.»* (p.45) [24] Il centro della comunità matematica si stabilì ad Alessandria d'Egitto e la dimostrazione divenne necessaria per l'accettazione delle proposizioni matematiche.

Parallelamente all'affermarsi della dimostrazione a garante della disciplina matematica, gli studiosi iniziarono a rendersi conto che essa non avesse una funzione conoscitiva e che fosse in realtà un passaggio successivo ad una scoperta matematica. Uno dei più illustri matematici a rendersi conto di questo fatto fu Archimede di Siracusa, vissuto nel III secolo a.C.. Egli riconosceva come fosse più facile fornire una dimostrazione dopo aver acquisito una certa conoscenza dell'oggetto della ricerca, piuttosto che mettersi a ricercare senza conoscere nulla sull'argomento.

Figura 1.8: Archimede (287 a.C. circa – 212 a.C.)

Nonostante ciò il modello euclideo e in particolar modo la dimostrazione geometrica vennero tramandati nei secoli a venire e si imposero come unici modelli in matematica. Con il passare degli anni la struttura delle dimostrazioni diverrà sempre meno dettagliata; ciò che rimarrà sarà l'impostazione assiomatica delle dimostrazioni, permanendo netta la distinzione fra termini primitivi e assiomi da un lato e termini definiti e teoremi dall'altro.
Sicuramente vi furono delle conseguenze legate al fatto che il modello di dimostrazione fosse riferito soprattutto a quello geometrico: si vedrà infatti che non sempre sarà adeguato e utilizzabile in generale.

1.1.2 La dimostrazione visuale nel mondo arabo

Come già sottolineato in precedenza, la dimostrazione logica non è l'unico tipo di dimostrazione presente in matematica. In particolare la dimostrazione visuale non scomparve, in quanto risultava essere spesso più convincente di quella logica da un punto di vista psicologico ed inoltre un mezzo per ulteriori scoperte. Tutto ciò ebbe come conseguenza che, successivamente ai Greci, si iniziò a collegare le dimostrazioni visuali a quelle logiche.

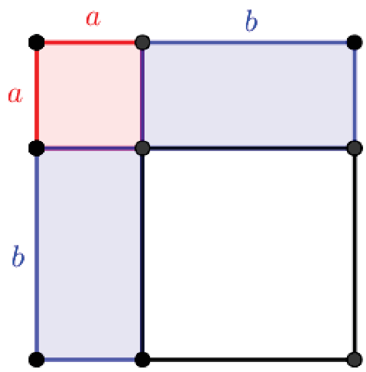


Figura 1.9: Dimostrazione visuale del quadrato di un binomio

La Figura 1.9 rappresenta una nota argomentazione visuale che si ritrova nella matematica babilonese, cinese e indiana, e che può convincere molto facilmente della seguente uguaglianza algebrica:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.1}$$

Dunque la visualizzazione aiutava a spiegare calcoli algebrici.
Successivamente ad Euclide, si affermò sempre di più l'attitudine a testare logicamente anche i più ovvi risultati da un punto di vista visuale. Questa attitudine venne in particolar modo seguita nel mondo islamico in età medievale: i matematici, infatti, combinarono le dimostrazioni visive con la tradizione di dimostrazione dei greci e con le tradizioni di calcolo provenienti dalle culture orientali. Questo produsse qualcosa di nuovo.

Prendiamo per esempio in considerazione le scoperte di Al-Khwarizmi (IX secolo d.C.), matematico, astronomo, geografo e cronografo musulmano, vissuto a Baghdād. La sua fama è dovuta soprattutto ad un trattato di algebra dell'830 circa, *Kitab al-jabr wal mukabala*, nel quale risolve a parole le equazioni fino al II grado. Quest'opera è ritenuta di fondamentale importanza per lo sviluppo di questa disciplina, tanto che dal nome del suo autore, deformato da un traduttore in "Algorithmi", derivò il termine algoritmo, ancor oggi denotante uno schema di calcolo. L'opera di al-Khwarizmi, pur non andando oltre le equazioni di secondo grado, cioè oltre il campo della matematica greca, presenta infatti, accanto alla riacquisizione di nozioni classiche, un notevole grado di elaborazione originale.

Figura 1.10: Al-Khwarizmi (780 circa – 850 circa). L'immagine è un francobollo commemorativo del 1200º anniversario (approssimativo) della nascita del grande matematico persiano, stampato in Unione Sovietica il 6 settembre 1983.

Analizzando in particolar modo l'equazione

$$x^2 + 10x = 39 \tag{1.2}$$

Al-Khwarizmi la rappresenta geometricamente e osserva che non ci sono delle vie immediate per risolvere il problema nella sua forma originale, ovvero "qualcosa a forma di L uguale ad un numero", oppure "gnomone uguale ad un numero" (si veda Figura 1.11). Tuttavia notò come fosse invece più facile risolvere il problema "quadrato uguale ad un numero". Aggiunse allora un quadrato allo gnomone in modo da renderlo a sua volta di forma quadrata, o meglio, detto in altre parole, "completò il quadrato" e questo gli permise di risolvere l'equazione algebrica. Il metodo, passato alla storia come *metodo del completamento del quadrato*, è lo stesso che viene utilizzato attualmente per la risoluzione algebrica di equazioni di secondo grado.

Come fecero Al-Khwarizmi e i suoi successori ad essere certi che il loro metodo

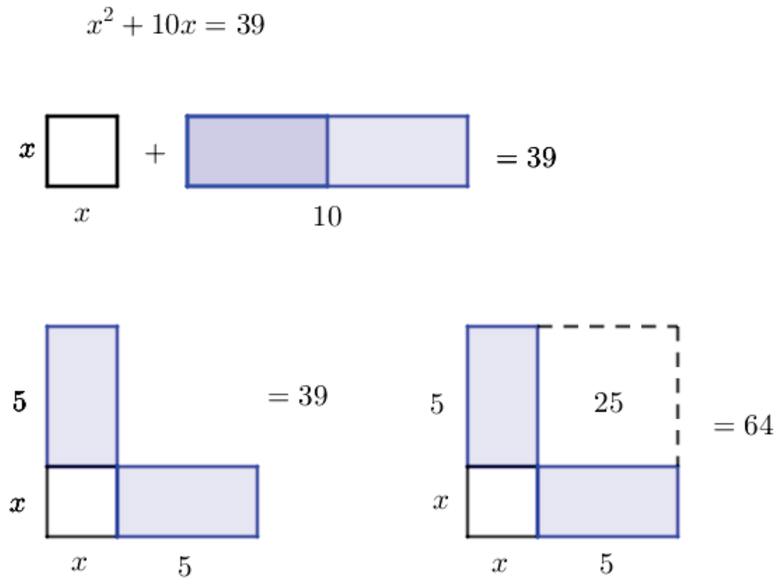


Figura 1.11: Dal quadrato $(x + 5)^2 = 64$
$x + 5 = 8$
$x = 3$

funzionasse correttamente in generale? Lo sapevano perchè la rappresentazione geometrica del metodo era garantita dal teorema II del IV Libro degli *Elementi* di Euclide. Dunque Al-Khwarizmi aveva a portata di mano non solo una nuova scoperta ma anche una dimostrazione.

Questo esempio, come molti altri, mostra come l'algebra nel mondo islamico abbia combinato la dimostrazione logica con i problemi numerici. Questa combinazione fu fruttuosa e influenzò la matematica successiva, dimostrando come talvolta l'unione di prospettive anche molto diverse abbia portato, nella storia della matematica, al progresso.

1.1.3 La dimostrazione (algebrica) in età moderna

All'inizio dell'età moderna la geometria euclidea è ferma e compiuta ed è piuttosto l'algebra a svilupparsi, e i metodi algebrici applicati alla geometria.

Questi nuovi sviluppi, portarono, come si potrà leggere in seguito, ad un nuovo stile e modello di dimostrazione.

Figura 1.12: François Viète (1540-1603)

Il primo cambiamento avvenne quando François Viète, nel 1591, (nella sua opera principale *Isagoge in artem analyticam*) per primo introdusse quella che può essere considerata la più grande innovazione per quanto riguarda il simbolismo algebrico, ovvero l'uso integrale delle lettere. Le lettere venivano usate da Viète sia per indicare le incognite che per indicare le quantità note, adoperando per le prime le vocali e per le seconde le consonanti, e permettendo inoltre in tal modo l'introduzione di più di un'incognita. L'algebra terminò dunque di essere "sincopata" e divenne algebra simbolica, nella quale viene utilizzato un completo sistema di notazioni e tutte le trasformazioni algebriche sono espresse in simboli. Introducendo in modo generale il simbolismo, Viète iniziò la trasformazione dell'algebra, che passò dall'essere un insieme di metodi per risolvere singoli problemi ad uno studio generale delle strutture matematiche.
Un secolo dopo sarà Isaac Newton a riassumere la generalità e il potere di questa rivoluzione simbolica definendo l'algebra "un'aritmetica universale". Egli intendeva esprimere come, tramite l'algebra, si potessero dimostrare molte cose dando per scontato la validità universale delle manipolazioni simboliche che obbediscono alle leggi dell'aritmetica.

Il potere del simbolismo e dell'astrazione portarono a progressi sempre maggiori: seguendo Viète, intorno al 1630 Cartesio e Thomas Harriot provarono indipendentemente molti risultati di teoria delle equazioni.

Questo forte sviluppo dell'algebra nel XVII secolo ebbe come conseguenza una profonda frattura nella concezione della dimostrazione.
Come sostiene Lolli (1988), infatti, *«dall'algebra [...] viene uno stile e un modello di dimostrazione ben caratterizzato questo anche nella struttura dei suoi legami interni. In una dimostrazione algebrica i passaggi sono facilmente seguibili, eseguibili e giustificabili, perché si tratta di successioni di identità, e trasformazioni di queste con sostituzioni (di uguali a uguali, come si dice) e le leggi dell'uguaglianza, riflessività, simmetria e transitività. I calcoli sulle lettere quindi, che però coincidono per ora con le dimostrazioni in algebra, sono trasparenti.»* (p.49)[24]

Questo modello algebrico di dimostrazione fu quello a cui si richiamarono di fatto Pascal e Descartes, anche se continuarono a pagare il dovuto omaggio alla geometria, nella loro codifica della dimostrazione matematica come modello di procedimento razionale conoscitivo. Di seguito verranno analizzati i modelli che i due matematici rispettivamente proposero per quanto riguarda le dimostrazioni.
Descartes e Pascal contestavano agli antichi il fatto di non chiarire quasi mai come erano arrivati a certe dimostrazioni, ossia il metodo che avevano seguito per scoprirle. Loro principale preoccupazione fu dunque quella di sviluppare dei metodi che consentissero di ottenere risultati, non solo in

Figura 1.13: Blaise Pascal (1623-1662)

ambito matematico, bensì in generale in ambito scientifico.

Pascal esaltava il pensiero geometrico e, riconoscendo i diversi obiettivi che un matematico poteva porsi, distingueva come già avevano fatto gli antichi greci fra analisi e sintesi.

Si possono avere tre obiettivi principali nello studio della verità: l'uno, di scoprirla quando la si cerca; l'altro, di dimostrarla quando la si possiede; l'ultimo, di distinguerla dal falso quando la si esamina. (Lolli, 1988, p.50)[24]

Soffermandosi poi sull'obiettivo di dimostrare le verità già trovate e chiarirle in modo definitivo, proponeva un metodo specifico, il quale consisteva nel non utilizzare mai in una dimostrazione alcun termine di cui non si aveva precedentemente spiegato il significato e nel non proporre mai proposizioni che non si basassero o fondassero su verità già stabilite. Egli sosteneva che la matematica dovesse avere come punto di partenza delle idee primitive, che non si potevano definire ulteriormente e che le dimostrazioni dovessero utilizzare dei principi così chiari che non se ne potessero trovare altri utili a dimostrarli.
Accanto alle regole per gli assiomi e le definizioni, Pascal definì inoltre le regole per le dimostrazioni, che richiedono di:

non cercare di dimostrare alcuna delle cose che sono talmente evidenti in se stesse che non c'è niente di più chiaro per dimostrarle. Dimostrare tutte le proposizioni un po' oscure, e non usare nella loro dimostrazione che assiomi evidenti, o delle dimostrazioni già accordate o dimostrate. Sostituire sempre mentalmente le definizioni al posto dei termini definiti, per non ingannarsi con l'ambiguità dei termini che le definizioni hanno ristretto. (Lolli, 1988, p.51) [24]

Analizzando queste righe e in generale quanto riportato da Pascal ne *De l'esprit geometrique et de l'art de persuader* si nota subito il legame con la matematica tradizionale: il punto di partenza della dimostrazione, secondo il matematico, devono essere infatti quelle idee chiare e accettate da tutti senza obiezioni. Nel pensiero di Pascal è inoltre chiara la distinzione fra analisi e sintesi; viene meno l'interesse per l'analisi e la strutturazione delle dimostrazioni, mentre rimane la sintesi, "dal semplice e noto al complesso e ignoto", che permette non solo di verificare la correttezza di una proposizione e legittimarla, ma si rivela essere anche un metodo conoscitivo.

Uno dei più famosi testi nel quale viene analizzata e descritta una dimostrazione è il *Discorso sul metodo* (1637) di René Descartes. Innanzitutto l'autore sceglie i precetti della logica su cui fondare l'intero apparato dimostrativo:

ho pensato che bisognava cercare un altro metodo [...] [e come uno stato è meglio governato se ha poche leggi, ma rispettate, ho pensato di sostituire la moltitudine dei precetti della logica con i quattro seguenti].
Il primo era quello di non accettare mai una cosa per vera, a meno che non la conoscessi evidentemente per tale;cioè di evitare precipitazione e prevenzione; e di non comprendere nei miei giudizi nulla che non mi si presentasse così chiaramente e distintamente allo spirito che non avessi alcuna occasione di metterla in dubbio.

La seconda, di dividere ogni difficoltà mi si presentasse in tante parti che si potesse e richiedesse per meglio risolverla.
La terza, di condurre con ordine i miei pensieri, cominciando dagli oggetti più semplici e più facili da conoscere, per risalire poco a poco, come per gradi, fino alla conoscenza dei più complessi; e assumendo un ordine anche tra quelli che naturalmente non si collocano in precedenza gli uni con gli altri.
E infine, di fare sempre delle enumerazioni così complete, e delle rassegne così generali, di essere sicuro di non omettere nulla.
Quelle lunghe catene di ragioni, tutte semplici e facili, di cui i geometri sono abituati a servirsi, per pervenire alle loro dimostrazioni più difficili, mi avevano dato occasione di immaginare che tutte le cose che possono cadere sotto la conoscenza dell'uomo si raggiungono nello stesso modo, e che purché ci si astenga dall'accettarne alcuna per vera quando non lo è, e che si rispetti sempre l'ordine che ci vuole per dedurle le une dalle altre, non possono essercene di così lontane che alla fine non le si raggiunga, né di così nascoste che alla fine non le si scopra. E non mi dovetti scervellare per scoprire da quali si dovesse partire, perché sapevo già che si trattava delle più semplici e più facili da conoscere. (Lolli, 1988, pp.52-53)[24]

Cartesio procede nel suo "discorso" osservando che tra tutti coloro che hanno cercato la verità nelle scienze, solo i matematici sono giunti a delle dimostrazioni, o, come lui stesso le definisce, delle "ragioni certe ed evidenti".
Emerge una descrizione della dimostrazione strutturata dal più semplice al più complesso e l'intuizione che si potesse applicare la matematica anche ad altri domini.
Le lunghe catene di ragioni semplici non sono però, secondo Cartesio, catene di sillogismi: il matematico credeva infatti che raramente si potesse raggiungere una conclusione certa solo sulla base della forma e senza considerare l'oggetto.


Figura 1.14: René Descartes (1596-1650)

La dimostrazione diventa un metodo di scoperta nella matematica e il metodo proposto da Cartesio, in particolar modo, è uno strumento che permise di sostituire la prolissità dell'argomentazione euclidea con la manipolazione di equazioni algebriche, consistendo di fatto nell'operazione di riduzione di problemi geometrici ad equazioni algebriche. In questo modo il metodo, secondo il matematico, aveva valore dimostrativo, poiché conduceva alla certezza.

In tal modo, volendo risolvere qualche problema, si deve fin dal principio considerarlo come già risolto, e assegnare una lettera ad ogni linea che si ritiene necessaria per costruirlo, sia a quelle che non sono note, che alle altre. Poi, senza fare nessuna differenza tra quelle note e le ignote, bisogna svolgere il problema seguendo quell'ordine che più naturalmente di ogni altro mostra in qual modo le rette dipendano mutuamente le une dalle altre, fino a che non si sia riusciti a trovare il procedimento per esprimere una stessa quantità in due modi, cioè non si sia pervenuti a ciò che si chiama equazione. (Lolli, 1988)[24]

In conclusione si può affermare che nel Seicento si ebbe un duplice fenomeno; *«da una parte l'idea della dimostrazione viene precisata, sul modello algebrico, come sequenza lineare di passi semplici e di indiscutibile garanzia; dall'altro questo modello di dimostrazione diventa un modello generale di conoscenza.»* (Lolli, 1988, p.55)[24]
La semplicità che caratterizza i passi delle dimostrazioni risultò avere inoltre un particolare risvolto: anche una macchina avrebbe potuto svolgere tali passaggi, talmente erano semplici.

Nel XVIII secolo i matematici si allontanarono quasi completamente dalla dimostrazione visuale, dando la precedenza al simbolismo algebrico. Una delle ragioni principali fu che molti algebristi, come Lagrange, consideravano l'algebra come "pura" e ritenevano invece che l'intuizione, soprattutto quella geometrica, potesse portare fuori strada. Questa credenza portò i matematici a ricercare dimostrazioni algebriche anche per quelle cose che in figura risultavano ovvie (Lagrange fu il primo, per esempio, a provare a dare una dimostrazione del teorema dei valori intermedi). Come conseguenza di ciò questo nuovo modello algebrico portò ad uno sviluppo considerevole di molti ambiti matematici. Tuttavia ci fu un costo, non di certo in termini di rigore bensì di perdita di intuizione geometrica.

1.1.4 La nascita del calcolo infinitesimale

Contemporaneamente allo sviluppo dell'algebra, alla fine del XVII secolo e poi durante tutto il XVIII secolo nacque e si sviluppò il calcolo infinitesimale. Questo ebbe come conseguenza non solo un cambiamento nello stile della dimostrazione ma anche nei modelli di dimostrazione.

Figura 1.15: A sinistra Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), a destra Isaan Newton (1642-1726)

Newton e Leibnitz indipendentemente inventarono gli algoritmi e i concetti che stanno alla base del calcolo infinitesimale. Il livello di problem-solving di questa nuova area della matematica era molto alto, difatti venne applicato con successo alla meccanica newtoniana.
Non era la prima volta che dei problemi fisici motivassero le ricerche matematiche, nel Settecento però questo aspetto fu cruciale. In quel periodo infatti si sviluppò l'analisi ma le basi del calcolo infinitesimale erano poco chiare. Era dunque il significato fisico della matematica a guidare i passaggi e fornire argomentazioni parziali che giustificassero le nuove idee. Come scrive lo storico della matematica Kline (1991) *«il ragionamento non era essenzialmente diverso dalla dimostrazione di un teorema in geometria, dove vengono usati alcuni fatti completamente evidenti dalla figura anche se nessun assioma o teorema li giustifica.»*[22] Infine era ancora la fisica che, tramite la correttezza delle conclusioni, assicurava la correttezza anche della matematica.
I matematici del diciottesimo secolo, dunque, non si preoccuparono molto dei fondamenti logici del calcolo infinitesimale. Esso però venne sviluppato attraverso

argomentazioni plausibili e derivazioni euristiche senza quelle che i matematici moderni considerano "adeguate giustificazioni". C'era in particolare una grande quantità di ragionamenti discutibili sugli infiniti e sugli infinitesimi, come sostenere che una curva fosse costituita da un numero infinito di segmenti infinitesimali. Le persone iniziarono perciò a notare questi difetti logici.

Figura 1.16: A sinistra Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), a destra Karl Weierstrass (1815-1897)

Una vera e propria rigorizzazione dell'analisi avvenne solo nel XIX secolo, utilizzando definizioni e dimostrazioni con il metodo "epsilon-delta". La rigorizzazione iniziò con Cauchy, 150 anni dopo l'invenzione del calcolo infinitesimale, e fu conclusa soltanto da Weiestrass e dalla sua scuola intorno al 1860. Da allora i matematici iniziarono a costruire dimostrazioni rigorose sui concetti del calcolo infinitesimale.

Analizzando la storia del calcolo infinitesimale, lo storico Grabiner (2012) (in [19]) espone tre approfondimenti a riguardo.
Inizialmente sottolinea come ci possano essere dei momenti nella storia della matematica in cui richiedere delle dimostrazioni al posto di argomentazioni plausibili sia ancora troppo prematuro. Uno di questi momenti fu proprio l'invenzione del calcolo infinitesimale. Dopo tutto, i progressi nel calcolo durante il XVIII secolo non necessitavano di tutto l'apparato di dimostrazioni con il metodo "epsilon-delta" per giustificare la verità dei risultati scoperti. Ci possono essere momenti dunque in cui accontentarsi di un "rigore meno completo" può essere la strada giusta.
Successivamente sottolinea come il primo incentivo ad una ricerca di maggior rigore nel calcolo infinitesimale non derivò da una ricerca di correzione di errori, bensì dalla necessità di insegnare. Le basi del calcolo di Lagrange, per esempio, sono state fornite nel 1797 tramite una serie di lezioni tenute all' *École polytechnique* di Parigi, e Lagrange stesso ha ammesso di aver pensato per la prima volta ai fondamenti del calcolo infinitesimale insegnando alla scuola militare di Torino. Anche i fondamenti di Cauchy furono parte del suo *Cours d'analyse* all'*École polytechnique*. Il lavoro sui fondamenti dell'analisi di Weierstrass proviene invece dalle sue lezioni tenute a Berlino, mentre Dedekind disse di aver iniziato a pensare alla natura dei numeri naturali dopo aver insegnato a Zurigo nel 1858. Dunque la necessità di insegnare di fronte ad una classe focalizzò l'attenzione dei matematici sulla natura dei concetti di base e sulle loro proprietà essenziali.
Una terza considerazione dello storico riguarda invece le dimostrazioni con il metodo "epsilon-delta". Egli afferma che sebbene esse per lungo tempo non furono necessarie ai progressi nel calcolo infinitesimale, ad un certo punto nella storia della matematica divennero cruciali. Conclude dunque affermando che vi sono tempi in cui argomentazioni informali possono essere sufficienti, ma altri in cui dimostrazioni più forti sono assolutamente necessarie per qualsiasi progresso in un determinato ambito matematico, ed è proprio ciò che accadde nella storia dell'analisi, come si potrà leggere in seguito, durante la seconda metà del diciottesimo secolo.

1.1.5 La nascita delle geometrie non euclidee

La fama degli *Elementi* di Euclide dipende non solo dal fatto che essi rappresentano un quadro completo dei principi della geometria noti al tempo e il primo esempio di sistema assiomatico (come già spiegato nel primo paragrafo di questo capitolo), ma anche dalla presenza, al loro interno, del quinto postulato. Usando le parole dei matematici Agazzi e Palladino (1998), la storia del quinto postulato *«costituisce uno dei temi più interessanti dell'intera storia del pensiero scientifico e fornisce la premessa praticamente indispensabile per comprendere il senso di quella "rivoluzione" nei fondamenti della matematica che si è prodotta nel secolo scorso (XIX secolo[5]) con l'introduzione dei sistemi di geometria non euclidea e con la dimostrazione della loro non contraddittorietà.»* (p.35)[1]
Nella stesura degli *Elementi*, Euclide assunse cinque postulati, grazie ai quali dimostrò tutti i teoremi della geometria conosciuti all'epoca. Oggi l'ultimo postulato è solitamente sostituito, secondo la tradizione didattica moderna, dall'equivalente assioma di Playfar del 1795:

Dati una qualsiasi retta r e un punto P non appartenente a essa, è possibile tracciare per P una e una sola retta parallela alla retta r data.

Il problema del quinto postulato euclideo occupò la mente di molti matematici e filosofi nei 2100 anni successivi alla pubblicazione degli *Elementi*, inizialmente a causa del fatto che la proposizione assomigliasse più ad un teorema che ad un postulato [6], successivamente perché ci si rese conto *«che lo stesso Euclide nutrisse qualche perplessità circa questo postulato, e il fatto che nessun teorema, fino al teorema 29, dipenda da esso e che tutti i teoremi successivi, a eccezione del teorema 31, ne dipendano, fa sospettare che Euclide abbia cercato di differirne l'uso il più a lungo possibile.»* (Trudeau, 1991, p.135) [45]
Nessuno metteva in dubbio la veridicità dell'assioma, ma, essendo credenza diffusa che la verità matematica coincidesse con la dimostrabilità, per molto tempo si cercò di dimostrarlo.

I tentativi di "dimostrazione del postulato" che si succedettero nei secoli furono però fallimentari e portarono perlopiù a sostituire il quinto postulato con proposizioni ad esso equivalenti. Fra questi, quello più interessante è dovuto a Girolamo Saccheri (1667-1733), gesuita nato a Sanremo, che insegnò matematica e filosofia a Torino e Pavia. Saccheri era convinto della dimostrabilità della proposizione e, nella sua opera *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntiur prima ipsa universae geometriae principia* ("Euclide liberato da ogni macchia: ossia esperimento geometrico con cui stabilire gli stessi primi principi della Geometria universale", Milano, 1733), sfruttò una forma particolare di metodo dimostrativo, la *consequentia*

[5] n.d.a.

[6] La formulazione di Euclide del **V Postulato** è la seguente:
Se due rette tagliate da una trasversale formano, da una stessa parte, due angoli interni la cui somma sia minore di due retti, allora le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

mirabilis, che lo portò a negare il V postulato e a vederne gli sviluppi, anche se al fine di ottenere una contraddizione. Purtroppo, a causa della poca chiarezza che all'epoca si aveva riguardo ad argomenti come l'infinito e l'infinitesimo, fu indotto erroneamente a credere di aver effettivamente trovato una dimostrazione del postulato.

Nonostante l'errore,Il tentativo di Saccheri portò alla luce una serie di proposizioni che valgono se si nega il V postulato. Tra queste, le più interessanti riguardano la cosiddetta "ipotesi dell'angolo acuto" e si riveleranno essere dei veri e propri teoremi di quella geometria non euclidea che verrà chiamata "iperbolica".
Si può dunque affermare che *«con l'obiettivo di dimostrare l'assoluta verità della geometria euclidea, Saccheri costruì in pratica il primo esempio di geometria non euclidea (geometria iperbolica). Per questo motivo, mentre non possiamo annoverare fra i precursori delle geometrie non euclidee i matematici che nei secoli precedenti avevano tentato di dimostrare direttamente il postulato della parallela a partire dai rimanenti, dobbiamo riconoscere tale caratteristica di precursore a Saccheri, per il fatto di aver intrapreso, attraverso il suo tentativo di dimostrazione per assurdo, la strada nuova di ricavare conclusioni dalla negazione di quel postulato.»* (Agazzi et al., 1998, pp.77-78)[1] Inoltre, per la prima volta, si può ritrovare in nuce la tesi (che avrà fortuna in epoche successive) che la verità matematica coincide con la non contraddittorietà, credendo infatti Saccheri che la falsità si possa sempre dimostrare esibendo una contraddizione.

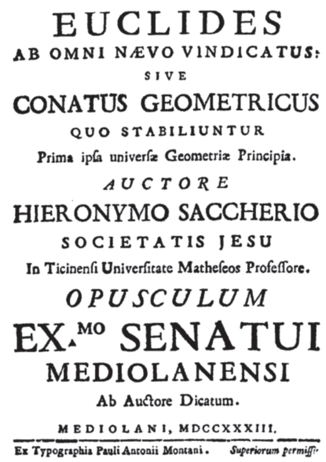

EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu

Figura 1.17: Frontespizio di *Euclides ab omni naevo vindicatus*

L'opera di Saccheri non fu mai nominata negli anni a venire e si dovette attendere la seconda metà dell'Ottocento affinché fosse riscoperta dal matematico italiano Eugenio Beltrami, che le conferì il rilievo spettato. *«Nella seconda metà del secolo XVIII, il problema di dedurre il quinto postulato dalla geometria neutrale si era imposto come indifferibile all'attenzione dei matematici, al punto che D'Alembert lo definì, nel 1759, "le scandale des elements de géométrie"»* (Trudeau, 1991, p.172) [45].

Il grande matematico e fisico tedesco Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fu il primo ad intuire la possibilità di una geometria coerente in cui il V postulato fosse sostituito dalla sua negazione. Dopo anni di sporadici tentativi di dimostrazione del postulato, infatti, nel 1813 giunse alla conclusione che erano possibili geometrie diverse da quella euclidea, geometrie "non-euclidee" come lui stesso le definì. Egli si rese conto, infatti, che l'assioma delle parallele non poteva essere dimostrato sulla base degli altri quattro assiomi. Esso era un'asserzione indipendente ed era perciò possibile adottare un assioma che lo contraddicesse e sviluppare una geometria interamente nuova. Tuttavia non comunicò alcuna delle sue conclusioni.
Coloro che ebbero invece il coraggio di pubblicare quanto intuito e scoperto furono Nicolaj Ivanovič Lobačevskij e Jànos Bolyai, i quali contemporaneamente scoprirono la geometria iperbolica. Tuttavia, *«anziché annunciare un "nuovo mondo"»*, le pubblicazioni di Lobacevskij e Bolyai *«finirono ben presto quasi dimenticate nel*

novero delle bizzarre e stravaganti elucubrazioni che di tanto in tanto si affacciano ai margini della ricerca scientifica.» (Bottazini, 1990, p.180)[11] Ci vollero degli anni e l'intervento di altri matematici affinché le nuove geometrie venissero effettivamente prese in considerazione.

«La geometria non-euclidea per parecchi decenni continuò a rappresentare un aspetto marginale della matematica, fino a che essa non venne incorporata nella matematica come sua parte integrante attraverso le concezioni generali di G.F.B. Riemann.» (Boyer, 1980, p.624) [12]
L'idea di Riemann è di uno studio generale degli spazi curvi, e si rivelerà rivoluzionaria, da un lato permettendo una dimostrazione dell'equivalenza delle geometrie (euclidea e non euclidee), dall'altro rendendo possibile in seguito la formalizzazione della relatività generale.

La scoperta delle geometrie non euclidee mise in crisi il mondo matematico. Ci si rese conto infatti che era problematico trovare un criterio di scelta a favore di una o dell'altra geometria mediante controlli empirici. *«È così che nasce l'idea della geometria (e più in generale della matematica) come complesso di sistemi ipotetico-deduttivi: le teorie matematiche non sono sistemi di proposizioni vere, ricavate a partire da proposizioni iniziali vere, bensì soltanto sistemi di proposizioni che si ricavano come conseguenza logica di altre ammesse ipoteticamente. È chiaro che, qualora le ipotesi ammesse fossero vere, allora lo sarebbero anche le proposizioni da esse dedotte, ma ciò non può essere conosciuto al momento della creazione della teoria matematica, e non intacca, del resto, il suo valore di teoria matematica.»* (Agazzi et al., 1998, pp.308-309)[1]
Iniziò dunque a farsi strada una posizione di convenzionalismo circa i fondamenti della geometria, riassunta perfettamente dalla celebre frase di Poincaré *«Una geometria non può essere più vera di un'altra; può solo essere più comoda.»* (Agazzi et al., 1998, pp.309) [1]
Tutto ciò conferma il carattere rivoluzionario della scoperta delle geometrie non euclidee.

Figura 1.18: A partire da sinistra: Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Nicolaj Ivanovič Lobačevskij (1793-1856), Jànos Bolyai (1802-1860) e Bernhard Riemann (1826-1866)

1.1.6 La rigorizzazione dell'analisi, la crisi dei fondamenti e l'assiomatica moderna

Gli analisti del Settecento avevano prestato poca attenzione al rigore delle loro argomentazioni e alle dimostrazioni, non preoccupandosi di questo fatto, in quanto i risultati ottenuti erano quasi sempre corretti e trovavano conferme nella realtà fisica. Si erano dunque abituati a procedimenti e ragionamenti vaghi. Come affermato dallo storico della matematica Kline, *«Al di là dell'opinione del singolo matematico sulla completezza dei propri risultati, sta di fatto che più o meno dal 200 a.C. al 1870 quasi tutti i matematici poggiavano su una base empirica e pragmatica. Si era perso di vista il concetto di dimostrazione deduttiva da assiomi espliciti. Una delle stupefacenti rivelazioni della storia della matematica è che questo ideale della matematica era stato, di fatto, ignorato per duemila anni nel corso dei quali il suo contenuto si è enormemente dilatato.»* (Kline, 1991, pp.1195-1196)[22]
Come riportato nel paragrafo 1.1.4 sulla nascita del calcolo infinitesimale, dal 1800 in poi i matematici iniziarono a preoccuparsi dell'imprecisione di molti concetti e dimostrazioni di vaste branche dell'analisi e della mancanza di fondamenti di quest'ultima. L'intera comunità matematica era insoddisfatta circa lo stato logico dell'analisi e, come conseguenza di ciò, era sorto il movimento di rigorizzazione dell'analisi o, come anche viene chiamato, di aritmetizzazione dell'analisi. Scopo di questo movimento era infatti quello di ricostruire l'analisi sulla base di concetti puramente aritmetici e iniziò a svilupparsi contemporaneamente alla scoperta delle geometrie non euclidee. Questa scoperta diede un'ulteriore spinta al movimento di rigorizzazione dell'analisi. Difatti, quando Gauss si rese conto che la geometria euclidea non è necessariamente la geometria dello spazio fisico, iniziò a congetturare che il carattere di verità dovesse essere attribuito soltanto all'aritmetica e all'analisi, che ne costituisce uno sviluppo. La scoperta distrusse inoltre il concetto di assioma evidente in sé, e la sua troppo superficiale accettazione. Iniziò ad esserci dunque una forte sfiducia nei confronti della geometria, fenomeno mai verificatosi prima nella storia della matematica, e una spinta alla ricerca dei fondamenti dell'analisi. Questo fatto può sembrare assurdo dal momento che l'aritmetica non possedeva in quel momento alcuna fondazione logica e, assieme all'analisi, si basava esclusivamente sull'esperienza fisica.

La fondazione logica del sistema dei numeri reali è stata edificata soltanto alla fine del XIX secolo. Fino ad allora non erano state stabilite neppure le proprietà più semplici dei numeri razionali e irrazionali positivi e negativi, né questi numeri erano stati neppure definiti. La loro comprensione intuitiva sembrava adeguata e i matematici si accontentavano di operare su questa base. La rigorizzazione dell'analisi li costrinse però a prendere atto che bisognava porre un rimedio alla mancanza di chiarezza dello stesso sistema numerico. I matematici che in quel periodo conclusero il lavoro di fondazione solida del sistema dei numeri reali furono Weierstrass, Riemann, Dedekind e Cantor. Il passo successivo nell'edificazione dei fondamenti per il sistema numerico fu costituito dalla definizione e dalla deduzione delle proprietà dei numeri razionali, mentre la fondazione logica dei numeri naturali, sui quali era basata la fondazione dei razionali, e quindi dei numeri reali stessi, non era ancora mai stata posta in discussione. Richard Dedekind fu il primo a proporre una definizione assiomatica degli interi, pubblicando nel 1888 *Was sind und was sollen die*

Zahlen?. Successivamente, servendosi dei risultati ottenuti da Dedekind nel libro citato sopra, Giuseppe Peano (1858-1932), propose una fondazione teorica dei numeri naturali. Nel 1889 pubblica infatti *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, contenente una nuova assiomatica. Peano sceglie un linguaggio che contiene, oltre ai simboli logici e all'uguaglianza, solo la costante 0 e le operazioni $+, \cdot, '$, che indicano rispettivamente la somma, il prodotto e il passaggio al successivo e corrispondono agli enti primitivi della teoria. Successivamente enuncia 9 assiomi, di cui si riporta una versione informale e attualizzata dei primi cinque.

Si indica l'insieme dei numeri maturali con $\mathbb{N}$, e con x^+ il successore di x.

Assioma P1. $0 \in \mathbb{N}$
Assioma P2. Se $a \in \mathbb{N}$ allora $a^+ \in \mathbb{N}$
Assioma P3. Se $a \in \mathbb{N}$ allora $a^+ \neq 0$
Assioma P4. Se $a, b \in \mathbb{N}$ e $a^+ = b^+$, allora $a = b$
Assioma P5. Sia $A \subset \mathbb{N}$ tale che

- **(PB)** $0 \in A$ e
- **(PI)** se $x \in A$ allora $x^+ \in A$
  allora $A = \mathbb{N}$.

L'assiomatizzazione utilizzata non è l'unica possibile.

ARITHMETICES PRINCIPIA.

§ 1. De numeris et de additione.

Explicationes.

Signo N significatur *numerus (integer positivus).*
» 1 » *unitas.*
» $a+1$ » *sequens a, sive a plus 1.*
» $=$ » *est aequalis.* Hoc ut novum signum considerandum est, etsi logicae signi figuram habeat.

Axiomata.

1. $1 \in N$.
2. $a \in N . \supset . a = a$.
3. $a, b, c \in N . \supset : a = b . = . b = a$.
4. $a, b \in N . \supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c$.
5. $a = b . b \in N : \supset . a \in N$.
6. $a \in N . \supset . a + 1 \in N$.
7. $a, b \in N . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1$.
8. $a \in N . \supset . a + 1 -= 1$.
9. $k \in K \therefore 1 \in k \therefore x \in N . x \in k : \supset_x . x + 1 \in k :: \supset . N \supset k$.

Figura 1.19: Gli assiomi di Peano, versione originale

Il movimento di rigorizzazione dell'analisi fu ottenuto grazie all'utilizzo del metodo assiomatico, applicato alle varie branche della matematica. Per ognuna di essa si partì individuando i termini indefiniti e gli assiomi che ne specificano le proprietà. Successivamente si cercò di dedurre le conseguenze degli assiomi scelti; infine si cercò di stabilire la coerenza, l'indipendenza e la completezza di ogni sistema.
Questo movimento ebbe varie conseguenze: da un lato la teoria dei numeri e l'analisi ebbero la precedenza sulla geometria, dall'altro il metodo assiomatico permise di stabilire i fondamenti logici di vecchie e nuove branche della matematica e di rivelare al contempo quali ipotesi stanno alla base di ciascuna branca, rendendo possibile il confronto fra esse.
Come si potrà leggere anche in seguito, David Hilbert, grande matematico tedesco, fu uno dei maggiori sostenitori del metodo assiomatico e, in uno dei suoi seminari osservava:

Invero il metodo assiomatico è e rimane l'unico sussidio indispensabile e appropriato allo spirito di ogni ricerca esatta, non importa in quale dominio; esso è inattaccabile dal punto di vista logico ed è al tempo stesso secondo; garantisce perciò una piena libertà di ricerca. In questo senso procedere assiomaticamente significa nient'altro che pensare sapendo ciò che si fa. Mentre prima, senza il metodo assiomatico, si procedeva ingenuamente in quanto certi rapporti venivano considerati dogmi, il metodo assiomatico rimuove questa ingenuità e tuttavia permette i vantaggi della fede. (Kline, 1991, pp.1198-1199) [22]

Intorno al 1900 la comunità matematica credeva di aver raggiunto la sistemazione rigorosa della matematica. Per rendersene conto è sufficiente citare il discorso di Poincaré al Congresso di Parigi:

"Abbiamo infine raggiunto il rigore assoluto? In ogni stadio della sua evoluzione, anche i nostri predecessori credevano di averlo raggiunto. Se loro si erano ingannati, non ci inganneremmo anche noi? ...Ora, se oggi in analisi ci proponiamo di essere rigorosi, i sillogismi e i richiami all'intuizione sui numeri puri sono i soli su cui è impossibile ingannarsi. Oggi possiamo affermare di aver raggiunto il rigore assoluto." (Kline, 1991, p.1196) [22]

Alla luce di tutto ciò si può affermare che il XIX secolo è stato per la storia della matematica un periodo di profondo mutamento e che si differenzia dai due secoli precedenti per la nuova visione della matematica. I fenomeni e gli sviluppi più rilevanti che portarono a tale cambio di prospettiva furono, come già in parte esposto, la progressiva autonomia delle discipline matematiche, la nascita delle geometrie non euclidee, la nascita della logica matematica, la rigorizzazione e aritmetizzazione dell'analisi, la nascita della teoria degli insiemi, la logicizzazione dell'aritmetica e il movimento assiomatico.
Tutti questi fenomeni contribuirono a generare un ampio dibattito sulla natura della matematica che coinvolse la comunità matematica nel primo trentennio del XX secolo.

Fra le varie attività che convergevano a portare in primo piano il problema dei fondamenti della matematica, vi fu la scoperta dei paradossi nella teoria degli insiemi (creata da Georg Cantor). Un altro problema che era stato riconosciuto e che venne allo scoperto negli stessi anni è quello della coerenza della matematica. Il primo espediente cui ricorsero i matematici per risolvere tali problemi fu l'assiomatizzazione della teoria degli insiemi formulata da Cantor piuttosto liberamente. Il primo ad affrontare il compito fu il matematico tedesco Ernst Zermelo (1871-1953), il quale rifondò la teoria degli insiemi. Gli sviluppi di Zermelo vennero perfezionati da Fraenkel e variazioni ulteriori vennero apportate da von Neumann. La teoria formale degli insiemi che risultò dal lavoro di questi matematici, si rivelò adeguata allo sviluppo della teoria degli insiemi necessaria praticamente per tutta l'analisi classica. Essa evita inoltre i paradossi, almeno in quanto finora non ne sono stati scoperti all'interno della teoria.

Fu la presenza di alcune antinomie all'interno delle teorie proposte a rendere necessaria una solida e nuova fondazione della matematica, che conciliasse l'utilità delle nuove teorie con la loro non contradditorietà.
Come risposta a questa crisi si consolidarono all'interno del dibattito sui fondamenti tre posizioni che esprimevano ciascuna un modo diverso di vedere e impostare la matematica. Queste costituirono delle vere e proprie scuole di pensiero all'interno della filosofia della matematica del XIX secolo.

- Scuola logicista
- Scuola intuizionista
- Scuola formalista

La Scuola logicista, i cui fondatori furono Russell e Whitehead, si basava sull'idea che la matematica fosse derivabile dalla logica come sua estensione. Il manifesto di questa visione fu l'opera *Principia Matematica* (1910-1913) nella quale, oltre ad un'accurata assiomatizzazione della logica in forma interamente simbolica, si trova, attraverso la teoria dei tipi, una deduzione formale della matematica a partire dalla logica. Di conseguenza, nella visione logicista, la matematica non aveva un contenuto ma solo forma. Non facevano dunque parte di questa disciplina i significati fisici associabili ai numeri o alla geometria. Il logicismo, quindi, voleva dare una risposta alla crisi dei fondamenti attraverso un programma fondazionalista e riduzionista.
La Scuola venne criticata soprattutto per l'immagine che proponeva della matematica: una scienza puramente formale e logico-deduttiva, nella quale i teoremi e i risultati discendono dalle "leggi del pensiero".

La Scuola intuizionista, fondata da Luitzen Brouwer (1881 – 1966), rifiutava ogni tipo di programma fondazionalista e riteneva che le idee matematiche fossero immerse nella mente umana prima di linguaggio, logica ed esperienza. Alla base di tale visione, non si trovava, quindi, la logica classica ma la logica intuizionista, che non contemplava, ad esempio, il principio del terzo escluso (per le applicazioni ad insiemi infiniti), aprendo la possibilità che ci fossero proposizioni indecidibili.
Non riconoscendo alcun principio logico obbligatorio a priori, per gli intuizionisti la matematica non aveva il compito di dedurre delle conclusioni da un sistema di assiomi; inoltre, non sottostando alle regole della logica, i paradossi risultavano totalmente ininfluenti. In campo logico venivano riconosciuti alcuni principi e procedimenti

accettabili intuitivamente e per questo utilizzabili per ricavare nuovi teoremi dai vecchi, in quanto parte dell'intuizione matematica fondamentale. Tuttavia, non tutti i principi logici erano considerati di questo tipo: la ricerca intuizionista intendeva proprio di distinguere tra le regole "lecite" e non. In particolare, l'intuizionismo si pose come branca del costruttivismo: i procedimenti e le definizione costruttive, infatti, escludevano la possibilità di ragionamenti indiretti, non "leciti". La visione intuizionista differì in modo radicale dall'impostazione data alla matematica fino ad allora. Uno dei maggiori critici dell'intuizionismo fu Hilbert che, invece, sosteneva la legge del *tertium non datur* :

Proibire ad un matematico l'uso del principio del terzo escluso è come proibire ad un astronomo l'uso del telescopio, o ad un pugile l'uso dei pugni. (Kline, 1991, pp.1403-1404) [22]

David Hilbert, uno dei più grandi matematici di fine Ottocento e inizi Novecento, fu il fondatore della Scuola formalista e diede inoltre contributi notevolissimi in tutti i campi della matematica, della logica e della fisica-matematica. Fra i suoi studi spicca sicuramente la ricerca dei fondamenti dell'aritmetica, che voleva per l'appunto rifondare ma senza l'utilizzo della teoria degli insiemi, provandone la coerenza.

Figura 1.20: David Hilbert (1862-1943)

Per i formalisti ciascuna delle discipline matematiche doveva avere una propria fondazione assiomatica, consistente in concetti e principi logico-matematici. La logica veniva usata come linguaggio di segni che traduceva gli enunciati in formule e formalizzava il ragionamento; gli assiomi esprimevano, invece, le regole di derivazione e le relazioni tra le formule. I simboli matematici, i segni e le operazioni erano totalmente svuotati di ogni significato. In particolare, quindi, i simboli risultavano la vera essenza e non rappresentavano più degli oggetti fisici idealizzati.
La matematica, nell'ottica formalista era, allora, un insieme di sistemi formali (ognuno con i propri concetti, assiomi, regole di deduzione, teoremi, ecc.) e il suo compito era quello di sviluppare ciascuno di questi sistemi deduttivi. In particolare, Hilbert e i suoi allievi elaborarono tra gli anni venti e trenta del Novecento la *Beweistheorie* (teoria della dimostrazione), o metamatematica, per dimostrare la coerenza dei sistemi formali.

Come si può notare, un'importante differenza tra le diverse scuole filosofiche che emersero dalla crisi dei fondamenti consiste nel rapporto tra la matematica e la logica. Per il logicismo la prima era "subordinata" alla seconda, per gli intuizionisti la logica non era altro che un linguaggio descrittivo, infine, per i formalisti, le due si dovevano combinare.
Nessuna della soluzioni proposte da queste tre scuole, comunque, raggiunse l'obiettivo di dare un approccio alla matematica universalmente accettabile.

Hilbert non passò alla storia solamente in quando fondatore del formalismo, bensì divenne famoso per l'opera *Grundlagen der Geometrie* (Fondamenti della Geometria),

con la quale rifonda la geometria euclidea, integrando tutto quello che mancava degli *Elementi*. Tralasciando il contenuto specifico dell'opera, è importante ricordare che in essa Hilbert affrontò due ulteriori problemi, oltre a quello di integrare l'assiomatica euclidea: quello dell'indipendenza e quello della non contraddittorietà dei suoi assiomi, problema che Euclide non si era posto in quanto egli riteneva che la "verità" della sua geometria fosse assicurata dal fatto di essere una perfetta descrizione delle proprietà dello spazio fisico.
Aprendo brevemente una parentesi e parlando dell'assiomatica classica, si può dire che in generale essa, come esemplificato dal testo di Euclide, concepisse le proposizioni come vere, non distinguendo fra l'aspetto semantico e quello sintattico e facendo prevalere di gran lunga quello semantico. Fu l'avvento delle geometrie non euclidee uno degli eventi che invece avviò un'affermazione del punto di vista sintattico: *«le teorie matematiche vennero concepite non più come sistemi di proposizioni vere a proposito di certi ambiti di oggetti matematici, bensì come sistemi di formule vuote di significato e tenute assieme da puri nessi di concatenazione deduttiva.»* (Agazzi et al., 1998 p.20)[1] Questo nuovo punto di vista fece però sorgere dei problemi importanti per le teorie assiomatiche, ovvero la coerenza o non contraddittorietà, la reciproca indipendenza e la completezza, le cui soluzioni possono però essere ricondotte a un problema di non contraddittorietà.
«Un primo tipo di soluzione fu trovato riuscendo a ricondurre la non contraddittorietà dei sistemi assiomatici più esposti a dubbi alla non contraddittorietà di teorie matematiche ben note e collaudate da tempo (geometria euclidea). Si trattava però soltanto di una dimostrazione di non contraddittorietà relativa. Il problema sarebbe stato completamente risolto se si fosse potuta trovare almeno una teoria matematica di cui si potesse dimostrare la coerenza in modo diretto e, per così dire, assoluto, cioè senza uscire dalla teoria stessa per cercare altrove degli appoggi.» (agazzi et al., 1998 p.23)[1]
Ritornando all'operato di Hilbert, egli riuscì a ricondurre il problema della non contraddittorietà degli assiomi della geometria euclidea alla non contraddittorietà della geometria cartesiana la quale, a sua volta, si basa sulla non contraddittorietà dell'aritmetica dei numeri reali e quindi, in ultima istanza, sull'aritmetica dei numeri naturali. Hilbert si fermò a questo punto, nella convinzione che in futuro sarebbe stato possibile dimostrare la non contraddittorietà dell'aritmetica.
Al Congresso di Parigi del 1900, infatti, propose, assieme ad una lista di altri 22 problemi (quindi 23 in tutto) il problema della non contradditorietà degli assiomi per i numeri naturali, motivando numerose ricerche logiche fino agli inizi degli anni '30 del secolo scorso, fino cioè ai risultati fondamentali di Gödel.
Nel suo *Programma* enunciato verso il 1920, Hilbert proponeva di formalizzare tutta la matematica, a partire dall'aritmetica, con opportuni sistemi di assiomi, dimostrando che tali sistemi non portavano a contraddizioni. In particolare si poneva il problema di dimostrare che gli assiomi dell'aritmetica non portano a risultati contraddittori.

Come scritto in precedenza, in un celebre teorema del 1931, K. Gödel dimostrò l'impossibilità di ottenere una dimostrazione di non contraddittorietà di una teoria matematica, di complessità almeno pari all'aritmetica elementare, utilizzando unicamente quanto offerto all'interno della teoria stessa.
« Da allora, le dimostrazioni di non contraddittorietà hanno seguito altre strade: o si è

cercato di attingere fuori dalle teoria sottoposte ad esame degli strumenti che, pur non appartenendo ad esse, si potessero egualmente ritenere sicuri, oppure si è ritornati a dimostrazioni di non contraddittorietà relativa, oppure ancora si è accettato di utilizzare per le dimostrazioni di non contraddittorietà dei metodi semantici.» (Agazzi et al., 1998, p.24)[1]

Come affermato da Villani, Bernardi e Zoccante (2012), però, *«I risultati di Gödel presentano, comunque, aspetti positivi. In logica si dimostra che, se la teoria PA (assiomatica di Peano [7]) fosse completa, cioè se per ogni enunciato α fosse un teorema o α oppure $\neg\alpha$, allora esisterebbe un procedimento generale per stabilire se un enunciato è o no un teorema. Detto in termini informatici: esisterebbe, almeno in linea di principio, un unico programma in grado di stabilire, di fronte a un qualsiasi enunciato, se si tratta o no di un teorema. [...]»* La matematica, dunque *«mostra di non esaurirsi in un procedimento meccanico»* (p.93)[47] e di necessitare dell'intervento umano nei processi di dimostrazione.

Figura 1.21: Kurt Gödel (1906-1978)

[7] n.d.a.

1.2 La dimostrazione da un punto di vista teorico

Scopo di questa sezione è dare una panoramica generale del concetto di dimostrazione matematica da un punto di vista teorico, definendo inizialmente cosa sia un teorema e una dimostrazione, delineando la loro struttura logica ed elencando infine le diverse tipologie di dimostrazione.
Il contenuto di questa sezione, sebbene sia noto ai matematici, è fondamentale da un punto di vista didattico. Si è ritenuto dunque importante trattare in questo primo capitolo di una tesi didattica e sperimentale gli argomenti suddetti, in modo tale da poterli affrontare nel capitolo successivo da un punto di vista didattico, al fine di una trasposizione a scuola.

1.2.1 La struttura di un teorema

Si dice che una teoria (matematica, o in generale scientifica) viene sviluppata in modo **assiomatico** quando è costituita da tutte e sole le proposizioni che seguono logicamente da alcune proposizioni fissate dette **assiomi**. Le conseguenze logiche degli assiomi di una teoria vengono chiamate **teoremi**.
Attualmente tutta la matematica viene studiata in modo assiomatico, anche se non viene sempre (anzi, quasi mai) precisato cosa si debba intendere con "conseguenza logica" né quali siano gli assiomi logici (o anche della teoria degli insiemi) che vengono usati assieme agli assiomi che caratterizzano la teoria stessa.

In generale la parola teorema viene utilizzata quando l'enunciato è di un certo interesse e la dimostrazione non è del tutto immediata
In caso contrario, al posto di "teorema" si usano i seguenti termini:

- LEMMA: teorema che non ha un interesse autonomo, ma si applica in certe dimostrazioni successive.
- COROLLARIO: teorema che si ottiene come "immediata" conseguenza di altri teoremi.
- PROPOSIZIONE: termine generico, usato spesso in matematica come sinonimo di teorema, ma usato anche in logica con un significato più vicino a quello del linguaggio naturale: qualsiasi frase a cui sia possibile attribuire un valore di verità (vero o falso), a prescindere del fatto che si sappia o meno quale delle due circostanze si verifica.
- LEGGE-REGOLA-PROPRIETA': si usano normalmente per indicare Teoremi di "natura algoritmico-calcolativa". (Si noti che a volte i termini regola e proprietà possono essere utilizzati per indicare definizioni)
- CRITERIO: il termine criterio è usato spesso per teoremi che esprimono una condizione necessaria e sufficiente. Talvolta lo stesso termine è usato anche per teoremi che esprimono condizioni solo sufficienti.
- PRINCIPIO: si tratta di un termine ambiguo, usato con significati diversi, a volte come assioma, a volte come teorema.

Parlando di struttura di un teorema, nella maggior parte degli enunciati si possono distinguere l'**ipotesi** e la **tesi**. Tuttavia non è vero che nell'enunciato di ogni teorema sia esplicitata un'ipotesi e una tesi. Basti pensare ai seguenti esempi:

- esistono infiniti numeri primi
- esistono tre rette a due a due sghembe
- tre punti qualunque sono contenuti in una retta o in una circonferenza.

Tuttavia non tutti sono d'accordo con l'ultima affermazione: alcuni matematici credono che in tutti i teoremi ci sia un'ipotesi, rappresentata eventualmente dagli assiomi della teoria. Come sostiene Villani (et al., 2012), *«questa obiezione ha un fondamento (in effetti si parla di metodo ipotetico deduttivo), ma c'è una netta differenza fra le ipotesi di una teoria (gli assiomi, che possono anche essere in numero infinito) e un'ipotesi specifica che fa parte dell'enunciato di un teorema. Accettare un postulato è concettualmente diverso dalle ipotesi [contenute in un enunciato.] [...] Del resto, quando si parla di teorema inverso, ci si riferisce allo scambio fra ipotesi e tesi, e non si pretende certo di ritrovare gli assiomi a partire da un singolo enunciato.»* (p.56)[47]

La maggior parte dei teoremi matematici si presenta sotto forma di **implicazione**, scelta dettata da motivazioni didattiche ed epistemologiche. Più precisamente essi saranno del tipo:

$$\forall x \forall y ... [A(x, y, ...) \to B(x, y, ...)] \tag{1.3}$$

L'implicazione $A \to B$ equivale a $\neg B \to \neg A$, che viene detta *implicazione contronominale* della precedente, mentre $B \to A$ (non equivalente alla prima implicazione) viene detta *implicazione inversa* della prima.

Solitamente, per dimostrare che un'implicazione non è corretta, si costruisce un *controesempio* (esempio in base al quale si esclude la correttezza di un'implicazione), cioè una situazione in cui vale l'ipotesi ma non la tesi.
Occorre però notare che non sempre, di fronte a un qualsiasi enunciato, è possibile dimostrarlo o trovare un controesempio. Allo stesso modo non è vero che un enunciato scientifico, per essere tale, deve essere o verificabile o confutabile.

Ma quando si può parlare effettivamente di dimostrazione? O meglio, che cosa significa che una dimostrazione è rigorosa?
«Nei manuali di logica si trova una definizione precisa di dimostrazione: un elenco di passaggi elementari, ciascuno giustificato da una regola di deduzione. Questa definizione è inattaccabile, ma nei libri di matematica le dimostrazioni sono scritte in altro modo! Se davvero si dovessero scrivere tutti i passaggi, anche le dimostrazioni più semplici occuperebbero varie pagine. In proposito Henri Poincaré, in polemica con Giuseppe Peano, affermò: "ma se occorrono 27 equazioni per dimostrare che 1 è un numero, quante ne serviranno per dimostrare un vero teorema?"». Villani (et al. 2012), per rispondere alla domanda di sopra prosegue dicendo: *«[...] una dimostrazione è rigorosa quando è giudicata tale dai matematici; o, forse meglio, quando ci sono motivi per ritenere che, volendo, sarebbe possibile scrivere in dettaglio*

quell'elenco di passaggi elementari di cui si parla nella definizione logica.» (p.61)[47]

A completamento di quanto appena scritto, si riporta in seguito una definizione rigorosa di **deduzione logica** (o **dimostrazione**), che permette di formalizzare i principi abitualmente utilizzati nelle dimostrazioni (si veda ad esempio Zanardo & Ciraulo, 2020 [48].).
Alcuni aspetti fondamentali della deduzione logica sono:

1. Una deduzione logica (o dimostrazione) in una teoria assiomatica è una successione finita $\varphi_0, ..., \varphi_n$ di formule in cui ogni φ_i è un assioma della teoria, o segue logicamente dalle formule precedenti.

2. Se le formule $\varphi_0, ..., \varphi_n$ sono valide in una struttura matematica (in cui quelle formule sono interpretate) e φ segue logicamente da $\varphi_0, ..., \varphi_n$, allora anche φ è valida in quella struttura matematica.

3. Tutte le formule logicamente valide (e quindi, in particolare, tutte le tautologie) sono dimostrabili in ogni teoria assiomatica.

Le formule che seguono logicamente dagli assiomi di una teoria vengono chiamate **teoremi** (di quella teoria). Poiché in 1 non escludiamo che n possa essere 0, gli assiomi risultano essere particolari teoremi. Da 1 segue anche in particolare che, anche se una teoria ha infiniti assiomi, ogni dimostrazione ne coinvolge solo un numero finito. Da 2 segue che, se una struttura matematica verifica gli assiomi di una teoria, anche tutti i teoremi risultano verificati in quella struttura.

Ci sono vari modi per dare una **definizione rigorosa di deduzione logica**; in questa tesi è stato scelto di presentare una variante del sistema di Hilbert [8]. Il sistema di Hilbert è una teoria assiomatica molto particolare, cuore comune di tutte le teorie del primo ordine, i cui teoremi sono le tautologie e le formule logicamente valide.
I suoi assiomi sono i seguenti:

H1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

H2 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\psi \to \chi))$

H3 $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

H4 $\forall x\varphi \to \varphi[x/t]$ per ogni termine t

H5 $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

H6 $\varphi \to \forall x\varphi$ se x non compare libera in φ

H7 $x = x$

H8 $x = y \to (\varphi[z/x] \to \varphi[z/y])$

[8]Altri sistemi possibili sono quello della deduzione naturale e il calcolo dei sequenti

In realtà si tratta di "schemi di assiomi" in quanto le lettere φ e ψ indicano formule arbitrarie.
Gli assiomi da soli non producono nessun nuovo teorema se non si specifica almeno una Regola di Deduzione, cioè un modo per produrre nuovi teoremi a partire da altri già dimostrati. Nel caso proposizionale basta assumere il *Modus Ponens*: se φ e $\varphi \to \psi$ sono teoremi, allora lo è anche ψ. Oltre al *Modus Ponens* si assune un'altra regola di deduzione: se φ è un teorema nella teoria Φ e x non compare libera in Φ allora $\forall x\varphi$ è un teorema in Φ (*Regola di Generalizzazione*).

Definizione 1.2.1. Una **Dimostrazione** di φ a partire dalle ipotesi Φ è una successione finita $\varphi_0, ..., \varphi_n$ dove $\varphi_n = \varphi$ e per ogni $0 \leq k \leq n$ è soddisfatta (almeno) una delle seguenti alternative:

1. φ_k è un assioma;
2. φ_k appartiene a Φ;
3. φ_k segue da due elementi precedenti per *modus ponens*, cioè esistono $i, j < k$ tali che $\varphi_j = \varphi_i \to \varphi_k$;
4. φ_k segue per *generalizzazione*, cioè esiste una variabile x ed esiste $i < k$ tale che $\varphi_k = \forall x\varphi_i$ e x non compare libera nei φ_j con $j \leq i$ che appartengono a Φ.

1.2.2 Tipologie di dimostrazione

Come già accennato nel paragrafo sulla storia della dimostrazione, negli anni si svilupparono differenti tipologie di dimostrazione. Si partì dalla dimostrazione visuale, per poi introdurre la dimostrazione logica. Di quest'ultima però se ne possono elencare tipi differenti, come si potrà leggere in seguito.
Il contenuto di quel che segue è stato principalmente ricavato dal testo *Tecniche dimostrative. La logica incontra la matematica* di Samuele Maschio (2019), con lo scopo, per l'appunto, di classificare le varie tipologie di dimostrazione logica e descrivere la loro struttura.

«Una dimostrazione», come afferma l'autore del testo, *«è una sequenza di ragionamenti con cui si prova che una certa proposizione matematica è vera ed è, in effetti, l'unico strumento che permette di raggiungere questo scopo. Dimostrare che una certa proposizione è vera (ed è quindi un teorema) è l'attività principale di un matematico.»* (p.33)[30]
Maschio spiega successivamente come la dimostrazione di un teorema possa dipendere sia dalla particolare forma della proposizione, ovvero dalla sua struttura logica, sia dal suo contenuto specifico, ovvero dagli oggetti matematici di cui parla.

Si cercherà in seguito di classificare i principali tipi di dimostrazione sulla base della loro struttura, partendo da quella più classica e frequente, ovvero la dimostrazione diretta.

DIMOSTRAZIONE DIRETTA:

La forma più tipica che assume un teorema è quella dell'implicazione, in cui si chiede di dimostrare che da un'ipotesi I segue una tesi T. Talvolta questa implicazione può essere pensata come racchiusa da un quantificatore come segue:

$$\forall x \in A(I(X) \to T(x)) \tag{1.4}$$

A seconda della forma assunta da un teorema, il matematico potrà decidere in che modo cercarne una dimostrazione, tuttavia non potrà dimostrarlo senza mai riferirsi agli oggetti di cui parla.
Ci si può chiedere, dunque, quali siano gli strumenti non-logici che possono essere utilizzati nella dimostrazione di un teorema. Solitamente sono permessi solo sei tipi di giustificazione:

1. "per ipotesi" (l'ipotesi del teorema)
2. "per l'assioma" (un assioma del sistema)
3. "per il teorema" (un teorema dimostrato precedentemente)
4. "per la definizione" (il significato di un termine definito)
5. "per il passo" (un passo precedente della dimostrazione"
6. "per l'ipotesi RAA" (*reductio ad absurdum* nel caso di una dimostrazione per assurdo, come si approfondirà in seguito)

A questi si aggiunge la giustificazione "per la regola...di logica", utilizzabile per l'appunto quando si giustifica un passo di una dimostrazione con una regola di logica.

Scopo della dimostrazione diretta è di riuscire a concludere che la tesi T è vera, assumendo che l'ipotesi I lo sia (se c'è un'ipotesi) e utilizzando ragionamenti leciti e i risultati specifici dell'ambito matematico del problema, inclusi i calcoli algebrici.

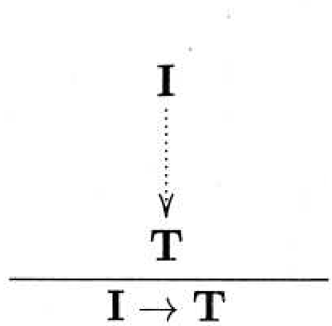


Figura 1.22: Schema della dimostrazione diretta

Vi possono essere però a sua volta diverse tipologie di dimostrazione diretta:

- Se la tesi da dimostrare assume la forma $P \wedge Q$, ovvero di una CONGIUNZIONE, si dovrà dimostrare che, assunta la verità dell'ipotesi I, sarà possibile dedurre la verità sia di P che di Q.

- Se la tesi da dimostrare assume la forma $P \vee Q$, ovvero di una DISGIUNZIONE, si dovrà dimostrare che, assunta la verità dell'ipotesi I, una tra P e Q è vera. In questo caso specifico l'ipotesi potrebbe dipendere da un elemento arbitrario $a \in A$, e dunque il fatto che la tesi sia vera potrebbe dipendere dallo specifico a. In questa situazione si utilizza la cosiddetta tecnica della DIMOSTRAZIONE PER CASI.

- Se la tesi da dimostrare assume la forma $\exists x \in A \ P(x)$, ovvero la forma di una proposizione ESISTENZIALE, si dovrà cercare di costruire un elemento a appartenente all'insieme A, eventualmente dipendente anche da elementi presenti nell'ipotesi, tale per cui la proposizione $P(a)$ sia vera. Quest'operazione potrebbe risultare difficile e dunque spesso, per individuale l'elemento a per cui $P(a)$ è vera, si assume che $P(a)$ sia vera e si cerca da derivare da questa proposizione alcune proprietà che a in tal caso dovrebbe soddisfare. Una volta trovato un ragionevole candidato, la dimostrazione consiste nel verificare che effettivamente $P(a)$ sia vera.

  Nel caso in cui venisse richiesto di provare non solo l'esistenza, ma anche l'UNICITÀ di un $a \in A$ tale per cui $P(a)$ sia vera, è conveniente assumere sempre che $P(a)$ sia vera e successivamente cercare di dimostrare che questo conduce ad un unico elemento a. Successivamente occorre sempre verificare $P(a)$.

- Se la tesi da dimostrare assume la forma $\neg P$, ovvero di una NEGAZIONE, si dovrà dimostrare, una volta assunta la verità dell'ipotesi, la falsità di P.

- Se la tesi da dimostrare assume la forma $\forall x \in A \ P(x)$, cioè si una PROPOSIZIONE UNIVERSALE, oppure la forma $P \to Q$, ovvero di un'IMPLICAZIONE, ci si può ricondurre ai casi precedenti. Infatti la proposizione $I \to (P \to Q)$, è equivalente alla proposizione $I \wedge P \to Q$, mentre la proposizione $I \to \forall x \in A \ P(x)$ è equivalente a $\forall x \in A(I \to P(x))$ se I non contiene la variabile x, e questo può essere sempre assunto.

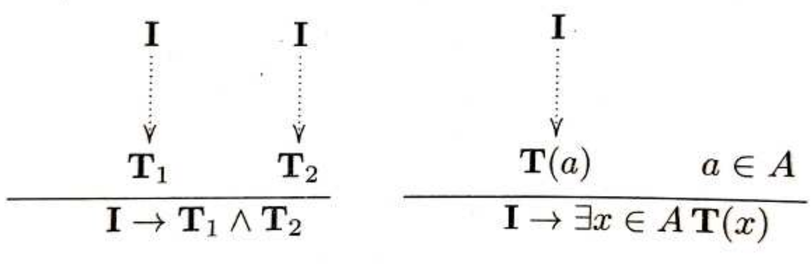


Figura 1.23: Schemi della dimostrazione diretta in casi specifici

DIMOSTRAZIONE PER CASI:
In alcune proposizioni l'ipotesi I può essere ridotta alla forma di disgiunzione $I_1 \vee I_2 \vee ... \vee I_n$, ovvero può essere suddivisa in più casi. Si parlerà allora di dimostrazione per casi. I casi non sono necessariamente incompatibili fra loro.
In questo caso, per dimostrare che la tesi T segue da I, è necessario dimostrare che essa segue da ognuno dei casi I_i, per $i = 1, ..., n$).

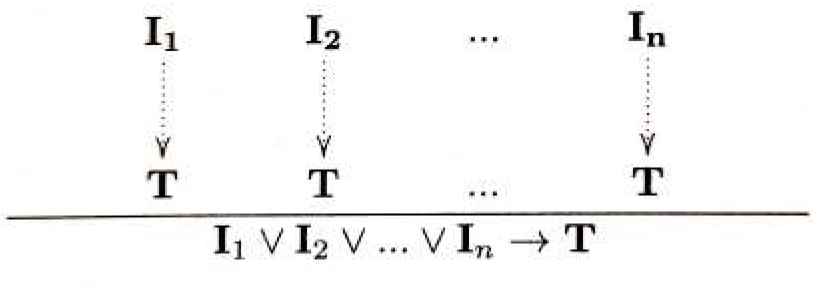


Figura 1.24: Schema della dimostrazione per casi

DIMOSTRAZIONE INDIRETTA:
Le dimostrazioni indirette sono tutte quelle in cui si "usa" la negazione della tesi e si suddividono rispettimìvamente in:

- DIMOSTRAZIONE CONTRONOMINALE. Le implicazioni $I \rightarrow T$ e $\neg T \rightarrow \neg I$ sono logicamente equivalenti. La tecnica dimostrativa contronominale consiste dunque nel dimostrare che dalla negazione della tesi segue la negazione dell'ipotesi, ovvero nel dimostrare la proposizione contronominale, la quale è equivalente alla proposizione di partenza.

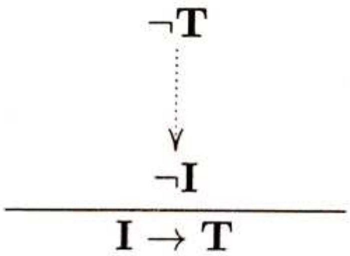


Figura 1.25: Schema della dimostrazione contronominale

- DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO. La tecnica dimostrativa per assurdo viene utilizzata quando si vuole dimostrare che da un'ipotesi I segua una tesi T. Essa consiste nell'assumere che valgano contemporaneamente sia l'ipotesi I

che la negazione della tesi $\neg T$ e derivare da queste una contraddizione.

Soffermandosi in particolar modo sul ragionamento per assurdo, pare che esso risalga a Zenone di Elea (V secolo a.C.). Negli *Elementi* di Euclide molti teoremi sono dimostrati con un ragionamento per assurdo. Esso invece non è accettato dagli intuizionisti, come già accennato in precedenza, che non contemplano il principio del terzo escluso e che dunque non credono che in generale $\neg\neg A$ equivalga ad A. L'idea del ragionamento per assurdo sta invece proprio nel costatare che, una volta scartato $\neg A$, *tertium non datur*, dunque A.
Questo tipo di dimostrazione pone indubbiamente delle difficoltà didattiche, anche se viene accettato nella vita quotidiana, dove si presenta spesso nella forma di ragionamento per esclusione.

Un caso particolare di dimostrazione per assurdo è la cosiddetta *consequentia mirabilis*, che consiste nel negare un enunciato e trovare una contraddizione proprio con la negazione assunta. In altre parole, se si dimostra che da $\neg A$ segue A, allora si conclude A. Il primo ad utilizzare questo ragionamento fu Girolamo Saccheri, come spiegato nel paragrafo precedente, il quale, per ottenere A, tentava di dimostrare che $\neg A$ "distrugge sé stessa".

Nella dimostrazione per assurdo, la contraddizione ricavata come conseguenza della negazione della tesi può assumere diverse forme:

1. la negazione di un teorema noto
2. una certa proposizione P e la sua negazione $\neg P$ (nel caso in cui da I si derivi P e da $\neg T$ si derivi $\neg P$)
3. la negazione dell'ipotesi $\neg I$

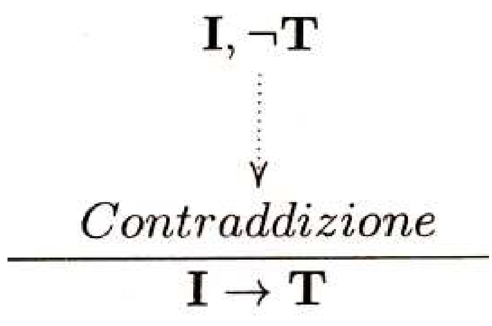


Figura 1.26: Schema della dimostrazione per assurdo

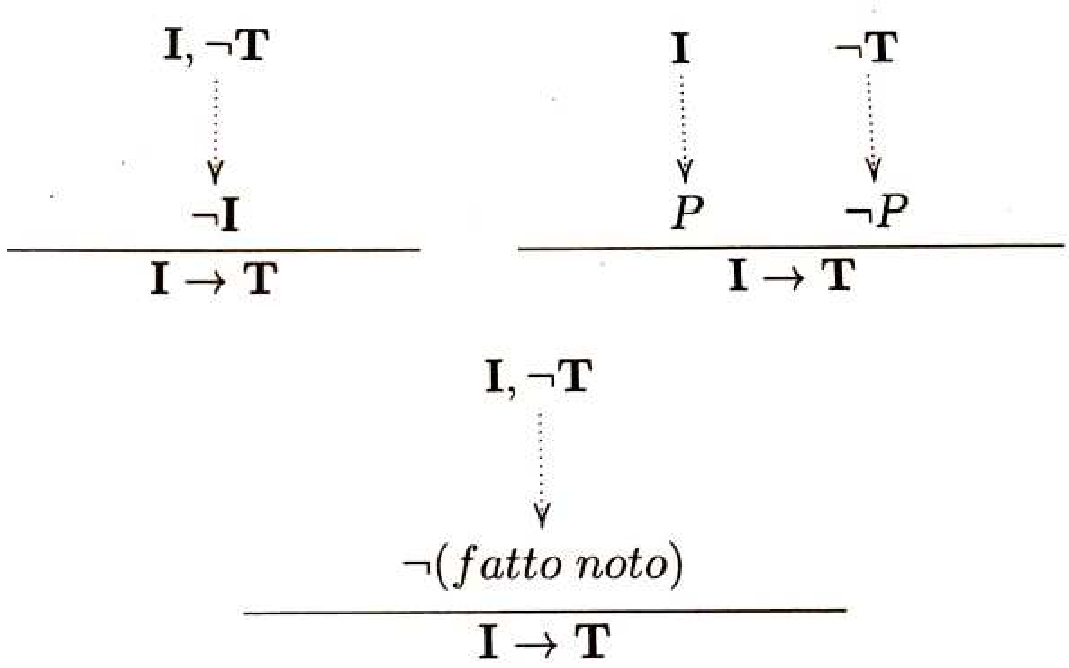


Figura 1.27: Casi della dimostrazione per assurdo

Se il teorema che si vuole dimostrare non è riconducibile alla forma $I \to T$, ma è semplicemente un enunciato T, la tecnica dimostrativa per assurdo consiste nel dimostrare una contraddizione a partire dall'assunzione della negazione dell'enunciato del teorema $\neg T$.

IL PRINCIPIO DI INDUZIONE:
Il principio di induzione matematica è una tecnica dimostrativa che viene utilizzata soprattutto in Teoria dei numeri e si ritrova in uno degli assiomi di Peano (Giuseppe Peano, 1858-1932) dell'Aritmetica, precisamente il 5° assioma:

Assioma 1.2.1 (PA 5)**.** *Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e sia A un sottoinsieme di $\mathbb{N}$.Se si ha:*

1. $0 \in A$;

2. *per ogni numero naturale k se $k \in A$, allora anche $s(k) \in A$,*

allora $A = \mathbb{N}$.

Si indichi ora con P una proprietà che si esprime usando i numeri naturali (può essere vera o falsa) e si scriva $P(n)$ per indicare la proprietà riferita al numero n. Dall'assioma riportato, segue una delle formulazioni più note del Principio di induzione matematica:

Teorema 1.2.1 (Principio di induzione)**.** *Se*

- *B. $P(0)$ è vera e*

- *P. dall'assunzione che $P(n)$ è vera, segue che $P(n+1)$ è vera (qualunque sia $n \in \mathbb{N}$),*

allora $P(n)$ è vera per ogni numero naturale n.

La prima condizione del teorema viene detta *base* per l'induzione, la seconda invece viene detta *passo induttivo* e la verità di P(n) nella seconda condizione viene detta *ipotesi induttiva.*

Si possono fare diverse osservazioni riguardanti il principio di induzione:

- Innanzitutto si può notare come il principio di induzione sia equivalente a un assioma della teoria dei numeri naturali, quindi non è una "regola logica", bensì un assioma della teoria [9], come ad esempio il V postulato di Euclide per la geometria euclidea.
- Il principio di induzione si applica per accertarsi che una proprietà sia vera in generale. Di solito però questa proprietà dev'essere congetturata precedentemente attraverso esempi o altre vie.
- Il principio di induzione, infine, può creare varie difficoltà da un punto di vista didattico, in quanto un'errata interpretazione della seconda condizione può far pensare che si stia ipotizzando che sia vera la proprietà che si deve dimostrare. La seconda condizione afferma infatti che :

  $$\text{per ogni } k \in \mathbb{N}, \text{ se vale } P(k) \text{ allora vale } P(k+1)$$

  e non che

  $$\text{se vale } P(k) \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}, \text{ allora vale } P(k+1).$$

[9] il Principio di induzione è un assioma se si sceglie come teoria di riferimento L'Aritmetica di Peano. Se si sceglie invece come riferimento la teoria di Zermelo-Fraenkel si tratta di un teorema dimostrabile.

Capitolo 2

La dimostrazione nell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria di II grado

La ricerca didattica sulla dimostrazione matematica offre negli ultimi anni un vastissimo panorama di articoli, studi e ricerche. La sperimentazione sul tema è in continua evoluzione e oggigiorno, a differenza di dieci anni fa, sembra esserci un generale consenso riguardo al fatto che lo sviluppo delle capacità dimostrative costituisca un'importante obiettivo nell'educazione matematica, e di conseguenza sembra esserci una rinnovata tendenza ad includere la dimostrazione nei curricoli di Matematica[1]. (Mariotti, 2006) [28]
Tuttavia, nella prassi scolastica, non sembra emergere una simile attenzione alla riflessione sulla dimostrazione come oggetto di studio nei suoi differenti aspetti, sia per quel che riguarda le sue funzioni (scoprire, convincere, validare, sistemare, precisare la nozione di conseguenza logica fra la proposizione da dimostrare e gli assiomi della teoria...), sia per quel che riguarda i vari aspetti (logici, epistemologici, cognitivi...), sia, infine, per quel che riguarda i contesti d'uso (argomentazione, generalizzazione, spiegazione, comunicazione...).
In definitiva, sembrerebbe che nell'insegnamento il problema della dimostrazione non abbia la stessa considerazione che ha attualmente nella pratica matematica e nella ricerca didattica. Sembra inoltre che molti insegnanti cerchino di risolvere le difficoltà dell'attività dimostrativa semplicemente evitando di affrontarle e quindi richiedendo, al più, ai propri studenti, di ripetere alcune dimostrazioni proposte dall'insegnante o del tutto simili a quelle fatte dall'insegnante. Nella prassi didattica sono rarissimi, se non inesistenti, i momenti di produzione autonoma e di successiva validazione di enunciati, momenti che, d'altra parte, comportano numerose difficoltà. Le difficoltà delle attività dimostrative sono acuite dalla scelta, tradizionale nella prassi didattica e mai abbandonata, di introdurre le dimostrazioni soltanto nel ricco ambiente della geometria euclidea. Inoltre, le regole formali di deduzione implicita-

[1] La dimostrazione è sempre stata presente nei Programmi dei Licei Classici e Scientifici, tuttavia, con la scuola di massa, negli anni '70-'90 del secolo scorso, si è preferito lavorare con la Geometria analitica e questo ha fatto sì che la Dimostrazione passasse in secondo piano. Ultimamente, grazie anche all'avvento dei software di geometria dinamica, vi è stato un graduale ritorno alla Dimostrazione a scuola, non quanto però indicato nei curricoli di Matematica.

mente utilizzate nelle dimostrazioni presentate sui libri di testo o dall'insegnante, non sembrano sempre in consonanza con le regole usualmente utilizzate dagli studenti nell'argomentare. Effettuare una dimostrazione richiede inoltre capacità di organizzare strutture complesse; richiede capacità di controllo e quindi atteggiamenti di tipo metacognitivo sui quali la didattica tradizionale insiste poco. Soprattutto, però, richiede impegno, attenzione e condivisione degli obiettivi tra insegnante e allievo. (Paola et al., 2001)[39]

Alla luce di ciò, e con l'idea che la dimostrazione dovrebbe invece effettivamente essere insegnata e appresa a scuola, questo capitolo cercherà di raccogliere i risultati delle ricerche didattiche sul "dimostrare", con l'obiettivo di una reale applicazione tra i banchi di scuola, come si è cercato di fare nella sperimentazione presentata nel Capitolo 3.
Tuttavia, a causa della vastità dell'argomento, non è stato possibile trattare in questa tesi tutti gli aspetti riguardanti il "dimostrare" da un punto di vista didattico.
Verranno di conseguenza analizzati, tramite supporto bibliografico, soltanto gli aspetti che sono stati presi in considerazione e studiati durante la sperimentazione a scuola presentata nel Capitolo 3. In particolare, si cercheranno di delineare le motivazioni del perché sia importante insegnare la dimostrazione a scuola, si analizzerà il ruolo della dimostrazione nelle *Indicazioni Nazionali* e nelle proposte di curricoli, si approfondirà l'importanza di trasmettere la necessità della dimostrazione, dando alcuni suggerimenti didattici. Tra questi suggerimenti, emergeranno l'importanza dell'intuizione e della congettura (e il ruolo delle figure) nella fase propedeutica alla dimostrazione, la necessità di "emancipare" la dimostrazione dalla geometria euclidea, presentandola anche in differenti ambiti matematici, e l'importanza dell'utilizzo del software (in particolare i software di geometria dinamica) come strumento didattico.

Si sottolinea infine che il contenuto di quanto segue sarà riferito quasi esclusivamente alla Scuola secondaria di II grado, in quanto, per l'appunto, la sperimentazione del Capitolo 3 è stata svolta in classi di questo grado d'istruzione scolastica e la presentata Didattica della matematica propone di introdurre la dimostrazione a partire proprio dalla Scuola secondaria di II grado.

2.1 Il ruolo della dimostrazione a scuola: obiettivi e suggerimenti

«Il ruolo dell'argomentazione e della dimostrazione nell'insegnamento della matematica [...] è sicuramente importante per due motivi: da una parte la dimostrazione è una parte essenziale del fare matematica, e, in un certo senso, caratterizza il fare matematica. Dall'altra l'argomentazione, o meglio l'educazione all'argomentazione, è un obiettivo didattico per il quale l'insegnamento della matematica è chiamato a portare il suo specifico contributo fin dal primo ciclo.» (Baccaglini Frank, Di Martino, Natalini, & Rosolini, 2018, p.119).[4]
Il metodo ipotetico-deduttivo è ciò che maggiormente differenzia la matematica da tutte le altre scienze, in particolare da quelle sperimentali. Nonostante ciò esso è stato preso a modello anche dalle altre discipline sperimentali in quanto fornisce un assetto teorico coerente. Conseguentemente apprendere a dimostrare assume inoltre una valenza che va al di là della matematica, perché *«contribuisce ad abituare a ragionare correttamente anche in altri contesti, il che rappresenta un patrimonio culturale per tutti i futuri cittadini.»*(Villani, 2006, p.19)[46]
Appare dunque evidente l'esistenza di molteplici motivazioni a giustificare l'insegnamento della dimostrazione a scuola.

Citando quanto riportato dagli autori del testo *Didattica della matematica* (Baccaglini Frank et al., 2018) [4], si potrebbero identificare due obiettivi distinti nel trattare di dimostrazione:

1. far **comprendere "che cos'è una dimostrazione"**, e quindi trasmettere agli studenti che la dimostrazione si deve conformare alle regole epistemiche e comunicative della matematica;

2. **insegnare a produrre delle dimostrazioni**.

Gli autori proseguono affermando che *«quello che spesso accade in aula è che l'obiettivo principale (e quasi unico) diventa un terzo: la comprensione di una dimostrazione prodotta da altri (tipicamente l'insegnante o il libro di testo). Sicuramente anche questo può essere un obiettivo molto importante, ma a condizione che "capire una dimostrazione" significhi tanto comprendere la correttezza matematica dei suoi singoli passaggi quanto perché quei passaggi dimostrano ciò che si vuole dimostrare.»*(Baccaglini Frank et al., 2018, p. 120)[4]
Chiarificati gli obiettivi, e con la consapevolezza della difficoltà di questo argomento, verranno date in seguito alcune osservazioni e suggerimenti su come proporre il tema della dimostrazione a scuola e come favorirne l'apprendimento, partendo proprio dall'individuare le cause delle difficoltà degli studenti.

Come ampiamente descritto nel Capitolo 1, nei secoli l'idea di dimostrazione matematica e le caratteristiche che essa deve avere per essere considerata tale sono mutate. Questo suggerisce quanto possa essere importante trasmettere questa consapevolezza anche agli alunni e condividere con loro i criteri di accettabilità di una dimostrazione.

«È importante esplicitare quali caratteristiche chiediamo affinché una certa giustificazione in contesto matematico può essere riconosciuta come dimostrazione in classe. Per far questo è necessario ***condividere*** *anche* ***il senso di una dimostrazione****: a quali obiettivi risponde? Quando è richiesta e perché? Che cosa garantisce una dimostrazione?»* (Baccaglini Frank et al., 2018, p.121)[4]
Uno stesso studio di De Villiers (1990, citato da Baccaglini Frank et al., 2018, pp. 130-131)[16], dimostra che le difficoltà degli studenti nell'approccio alla dimostrazione non sono spiegabili soltanto ed esclusivamente in termini cognitivi, ma sono collegate alla difficoltà di **attribuire una chiara funzione al dimostrare**. È quindi fondamentale porre agli studenti domande e collezionare le loro risposte sul tema "dimostrazione" (Che cos'è una dimostrazione? Qual è lo scopo di produrre una dimostrazione? Quando è necessario dimostrare? Qual è il potere di una dimostrazione?) e successivamente condividere in prima persona le risposte opportune.

Nell'articolo citato, De Villiers sottolinea inoltre quanto sia importante che gli studenti imparino ad **apprezzare le diverse funzioni della dimostrazione**, e consiglia a tal proposito di consentire agli studenti di sperimentarle di prima persona. Successivamente elenca quelle che individua essere le principali funzioni della dimostrazione. Esse vengono riportate di seguito, ed il contenuto di quanto segue è tratto principalmente dagli articoli di De Villiers (1990)[16] e Harel (2007) [20].

- **Verificare e Convincere.** La dimostrazione può essere uno strumento per validare e anche convincere relativamente alla validità di una congettura.
  La verifica si riferisce al ruolo della dimostrazione come mezzo per stabilire la verità di un'asserzione in accordo con un sistema assiomatico.
  Tuttavia, per potersi dedicare alla dimostrazione di un teorema, è importante essere convinti della sua veridicità. Ecco perché è importante la fase induttiva, che permette di fornire fiducia nella validità di un teorema.
  Nessun matematico tuttavia, nonostante possa essere convinto della veridicità di una congettura, dubiterebbe della necessità di una dimostrazione (a differenza, probabilmente, di uno studente). È importante quindi trasmettere che la dimostrazione è necessaria anche per convincersi di un fatto.

- **Spiegare.** La spiegazione è differente dalla verifica perché spesso ad un matematico non è sufficiente sapere che una proposizione è vera e vorrebbe capirne il perché. Questa funzione è spesso considerata molto più importante di quella di validazione da molti matematici. Si può notare, infine, come usufruire di più dimostrazioni di uno stesso fatto possa offrire spunti e suggerimenti diversi.

- **Sistematizzare.** La sistematizzazione si riferisce alla presentazione delle verifiche in una forma organizzata, dove ogni risultato è derivato sequenzialmente dai risultati precedentemente stabiliti, dalle definizioni, dagli assiomi o dagli enti primitivi. La dimostrazione svolge un ruolo fondamentale in questi termini, essendo coinvolta nel processo matematico di assiomatizzazione a posteriori. La soluzione di un problema e la sua validazione tramite dimostrazione, porta infatti con sé altri problemi e domande, come chiedersi se l'enunciato in questione sia quello giusto, se la teoria sia quella giusta, se ci siano altre questioni non risolte. La dimostrazione aiuterebbe inoltre ad individuare eventuali inconsistenze della teoria, argomenti circolari o assunzioni non esplicitate (come nel caso della geometria euclidea). Può inoltre aiutare a semplificare delle teorie, offrire spunti per sistemi deduttivi alternativi o più eleganti ed economici.

- **Scoprire.** La scoperta si riferisce alle situazioni in cui, durante il processo di dimostrazione, nuovi risultati possono essere scoperti. Oppure, al contrario, durante il processo di dimostrazione, si potrebbero scoprire dei controesempi all'asserzione, che porterebbero a raffinarla, aggiungendo le necessarie restrizioni che eliminino i controesempi. Si potrebbero inoltre sviluppare nuove congetture.

- **Comunicare.** La comunicazione si riferisce alle interazioni sociali sul significato, la validità e l'importanza della conoscenza matematica offerta dalla dimostrazione prodotta. La dimostrazione diventa dunque un oggetto tramite cui si condivide un certo bagaglio culturale, cercando di trasmettere le intenzioni di chi la produce. La dimostrazione in questo senso è un processo sociale tramite il quale viene tramandato e disseminato il sapere matematico.

Lo stesso G. Lolli afferma: *« Fare matematica e fare dimostrazione sono dunque la stessa cosa. Ciò non vuol dire che debbano essere un tormentone. C'è chi sostiene, essendo la loro funzione quella di stabilire il legame di conseguenza logica degli assiomi, che esse vadano commisurate solo su questa funzione globale, e che non importa se si fanno (anzi si devono fare) dimostrazioni complicate per fatti ovvi; le ragioni dell'organizzazione logica della teoria prevalgono su tutto. Ma così si trascurano altre funzioni della dimostrazione, che sono il motivo per cui si continua a cercare di perfezionarle, di semplificarle, di trovarne di nuove; tra queste c'è quella di far capire, senza risalire ai principi, la ragione del sussistere del teorema, di mostrare, nel mentre si dimostra, di essere a un tempo strumento di comunicazione e di convinzione.»* (Lolli, 1997, citato da Baccaglini Frank et al., 2018, pp. 127-128) [4]

Come già accennato in precedenza, spesso capita che gli allievi si limitino a leggere e ripetere le dimostrazioni richieste dagli insegnanti. Produrre una dimostrazione, però, è una cosa diversa, che richiede un lavoro didattico specifico e graduale dell'insegnante e degli allievi che abbiano interesse a questo percorso. Saper dimostrare un teorema, infatti, non significa aver imparato a memoria e saper ripetere l'enunciato del teorema e della sua dimostrazione: sarebbe auspicabile che l'insegnamento e apprendimento del concetto di dimostrazione raggiungesse molteplici obiettivi, quali **conoscere l'enunciato dei teoremi più importanti, essere in grado di riformulare un enunciato con parole proprie, saper distinguere le ipotesi dalla tesi, aver compreso e saper schematizzare i ragionamenti, conoscere i riferimenti ad assiomi o ad altri teoremi, saper fare esempi e controesempi, saper illustrare quanto affermato dal teorema, saper leggere e capire autonomamente dimostrazioni alternative, individuare errori logici**.

Come può fare dunque un insegnante se gli studenti non sentono il bisogno di produrre una dimostrazione di certi fatti e di certe proprietà incontrate nello studio della matematica? Per evitare che gli alunni affrontino una dimostrazione solo perché richiesto dall'insegnante o che pensino che si vogliano dimostrare proposizioni "evidenti", è auspicabile non usare già all'inizio della scuola secondaria di II grado il metodo assiomatico-deduttivo in modo sistematico, bensì **scegliere alcuni nuclei fondamentali, non solo in geometria**, e un numero ridotto di teoremi da dimostrare, mettendo in luce il quadro teorico in cui si inseriscono. Si potrebbe inoltre **avvalersi dell'utilizzo di software di geometria dinamica** e di attività di esplorazione e scoperta di proprietà tramite **problemi posti in forma aperta**, come verrà approfondito nei paragrafi successivi (in particolare nei Paragrafi 2.5, 2.4, 2.3).

Il ruolo centrale occupato dalla dimostrazione nella cultura matematica è stato messo in discussione di recente, e non solo a livello didattico, livello per il quale la questione si presenta ciclicamente. Come affermato da Samuele Antonini al Convegno dell'Unione Matematica Italiana di Pavia del 2019 [2], alla fine degli anni '90 diversi matematici hanno scritto delle sorti di necrologi alla dimostrazione, ipotizzando, in un futuro non troppo lontano, la perdita del suo ruolo centrale all'interno della matematica. *«Questa linea di pensiero nasceva anche da alcune novità in un certo senso legate alla sensazione di una perdita di controllo sulla dimostrazione da parte dei matematici: perdita di controllo legata all'avvento di dimostrazioni assistite dalla potenza di calcolo dei nuovi calcolatori, ma anche all'estrema complessità di dimostrazioni di risultati significativi [...], che risultano alla fine realmente accessibili solo a pochi all'interno della comunità dei matematici.»* (comitato editoriale *Archimede*, 2022, p.58)[14]
Tuttavia, come risposta a tutto ciò, l'attenzione alla dimostrazione non solo non è scemata, ma è addirittura cresciuta. Oggigiorno infatti, a differenza di dieci anni fa, sembra esserci un consenso generale sul fatto che sviluppare negli studenti una sensazione di "necessità di dimostrazione" costituisca un importante obiettivo dell'educazione matematica, cosicché sembra esserci una tendenza generale all'includere maggiormente la tematica della dimostrazione nei curricoli. Ancora oggi però, l'idea che la dimostrazione sia per tutti non è condivisa da ogni insegnante, anche nelle nazioni in cui c'è una lunga tradizione di inclusione della dimostrazione nei curricoli. In effetti, le difficoltà incontrate dagli studenti hanno portato molti insegnanti ad abbandonare questa pratica e hanno richiesto un dibattito sul tema tra didatti della matematica, che ha prodotto un gran numero di studi. Questo dibattito è lontano dall'essere chiuso: in particolare, la ricerca didattica italiana si sta rivelando molto attiva, intervenendo con vari contributi che si caratterizzano sia per l'attenzione alla riflessione storica ed epistemologica, sia sulla messa a punto di ambienti di apprendimento che supportino gli studenti nel delicato passaggio dall'argomentazione alla dimostrazione.

Maria Alessandra Mariotti (Università di Siena), nell'articolo *Argomentare, spiegare, dimostrare* (2022) [29], discute del ruolo della dimostrazione nell'insegnamento della matematica e afferma che le difficoltà connesse all'apprendimento del concetto di dimostrazione, del suo senso ancor più che delle tecniche dimostrative, hanno portato a scelte didattiche che la escludono (anche a livello universitario talvolta). Sottolinea non solo l'importanza di lavorare sulla dimostrazione a scuola, ma illustra anche

come la ricerca didattica abbia mostrato la continuità tra pratiche di giustificazione diverse (quali la spiegazione, l'argomentazione e la congettura) sulle quali si può e deve lavorare ben prima della Scuola secondaria di secondo grado.
«Il ruolo cruciale che l'argomentare e il dimostrare hanno nella pratica matematica ha come implicazione per la pratica didattica la necessità di riconoscere l'importanza di porre lo sviluppo di competenze argomentative tra gli obiettivi primari e trasversali dell'educazione matematica; nello stesso tempo, la discussione presentata ha messo chiaramente in luce che questo obiettivo didattico deve essere armonizzato con la necessità di promuovere la comprensione e dunque di sviluppare il senso matematico di quanto proposto in classe.» (Mariotti, 2022, p.75) [29]
Tutto questo suggerisce di cercare di **sviluppare in classe la "cultura del perché"**, ovvero rendere "naturale" in ambito matematico l'abitudine di cercare un perché per ogni affermazione, e farlo sia per sé, favorendone la comprensione, sia per riconoscerne l'accettabilità rispetto alla matematica, ed in particolare alla sua organizzazione teorica.

Ulteriori suggerimenti didattici:

- Un allenamento al ragionamento ipotetico-deduttivo è opportuno, purché non sia totalizzante e non uccida l'interesse per esplorazioni personali degli alunni e formulazione di congetture, prima di passare ad una loro sistemazione teorica. (Villani, 2006) [46]

- È didatticamente sconsigliabile (e probabilmente impossibile) dimostrare tutto. La consapevolezza che ogni teorema esige una dimostrazione non va confusa con l'aspettativa che gli studenti imparino a dimostrare personalmente tutti i teoremi incontrati lungo il percorso. È preferibile concentrarsi dunque su un numero limitato di teoremi, tra quelli più adatti a suscitare interesse e momenti di riflessione tra gli allievi. Quando si omette una dimostrazione, inoltre, si dovrebbe specificare che sarebbe necessaria e si dovrebbero spiegare le ragioni dell'omissione. (Villani, 2006) [46]

- L'insegnamento della dimostrazione dovrebbe promuovere l'acquisizione di un metodo. I seguenti passaggi sono suggeriti da Luigi Tomasi nell'articolo *Alcune osservazioni sui concetti di definizione e dimostrazione nell'insegnamento della matematica* (2013) [32]:

    1. dare l'enunciato del teorema, precisando l'ipotesi e la tesi anche se nell'enunciato queste non sono esplicitamente indicate;
    2. individuare il tipo di dimostrazione (per casi, dimostrazione diretta, indiretta, per induzione,...);
    3. individuare i passaggi nella dimostrazione, dove vengono utilizzate le varie ipotesi;
    4. precisare quali concetti (ossia definizioni) e quali teoremi si usano nella dimostrazione;
    5. qualora fosse possibile, fornire un'interpretazione geometrica;

6. fornire alcuni esempi di applicazione del teorema e non “generalizzare”, ossia verificare attentamente che tutte le ipotesi del teorema siano soddisfatte (per evitare il formarsi di “stereotipi” non sempre corrispondenti al caso generale, è opportuno fornire varie tipologie di esempi);
7. chiedersi se vale l’implicazione inversa ed eventualmente fornire un controesempio.

2.2 La dimostrazione nelle Indicazioni Nazionali e nei programmi della scuola secondaria

Negli ultimi due decenni (dal 2000 circa) sono stati presi diversi provvedimenti al fine di aggiornare la scuola italiana e introdurre nuovi curricoli di matematica. I vari curricoli che si sono succeduti negli anni sono stati preceduti da un lavoro realizzato da una Commissione istituita dall'UMI nel 2000, a cui per l'appunto i curricoli fanno riferimento.
La Commissione, di cui facevano parte docenti universitari, esperti in didattica e docenti di scuola, aveva il compito di elaborare un curricolo di matematica per la scuola primaria e secondaria adeguato ai mutati bisogni della società, sulla scia di analoghe iniziative promosse da associazioni di matematici in Europa e nel mondo. Il Progetto curricolare redatto dall'UMI reca il nome di *Matematica per il cittadino* e definisce *«un corpus di conoscenze e abilità matematiche fondamentali, necessarie a tutti coloro che entrano nell'attuale società»* [33]. Sono stati pubblicati successivamente tre volumi[2] contenenti, oltre i suddetti curricoli, numerose attività da svolgere in classe, volte ad illustrare il significato delle scelte operate all'interno del curricolo.
Il curricolo di matematica proposto dall'UMI per la Scuola secondaria di II grado presenta le competenze matematiche che l'allievo deve acquisire in quattro nuclei tematici:

- Numeri e algoritmi
- Spazio e figure
- Relazioni e funzioni
- Dati e previsioni

e tre nuclei, detti "di processo" e quindi trasversali:

- Argomentare, congetturare e dimostrare
- Misurare
- Risolvere e porsi problemi

Quest'iniziativa dell'UMI ebbe una profonda influenza su tutti i curricoli ministeriali approvati successivamente. Come si può notare, infatti, anche le Indicazioni Nazionali presentano una suddivisione negli stessi quattro nuclei tematici del Curricolo proposto dall'UMI.[3]

---

[2] Il primo volume, *Matematica 2001*, contiene le proposte per la scuola primaria e per la secondaria di primo grado, il secondo volume, *Matematica 2003*, contiene le proposte per il primo e secondo biennio della scuola secondaria di secondo grado, infine il terzo volume, *Matematica 2004*, contiene le proposte per il V anno della scuola secondaria di secondo grado

[3] l'unica differenza sta nella denominazione: nella Scuola secondaria di II grado si trovano infatti, come nuclei tematici, *Aritmetica e algebra*, *Geometria*, *Relazioni e funzioni* e *Dati e previsioni*; per i primi due nuclei sono stati scelti dunque i nomi tradizionali, mentre per gli ultimi due gli stessi del curricolo dell'UMI.

Verranno analizzate in seguito le parti, rispettivamente del Curricolo proposto dall'UMI e delle Indicazioni Nazionali, che riguardano la dimostrazione, i processi dimostrativi e argomentativi e il sistema assiomatico, soffermandosi in particolare su quelle rivolte ai Licei Scientifici e delle Scienze applicate, in quanto oggetto della sperimentazione proposta nel Capitolo 3.

2.2.1 Dimostrare in *La Matematica per il cittadino*

Per quanto concerne il nucleo trasversale **Argomentare, congetturare e dimostrare**, il Curriculum dell'UMI (2003) [33] propone una serie di abilità e competenze che gli studenti dovrebbero acquisire durante il primo biennio, il secondo biennio e il V anno della Scuola secondaria di secondo grado:

Primo biennio

Abilità	**Conoscenze**
• Scoprire e descrivere regolarità in dati o in situazioni osservate. • Esprimersi nel linguaggio naturale con coerenza e proprietà. • Usare, in varie situazioni, linguaggi simbolici (linguaggio degli insiemi, linguaggio dell'algebra elementare, linguaggio logico). • Analizzare semplici testi del linguaggio naturale, individuando eventuali errori di ragionamento. • Riconoscere e usare propriamente locuzioni della lingua italiana con valenza logica ("se... allora", "per ogni", "esiste almeno un", ecc.). • Costruire la negazione di una frase. • Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti. • Verificare una congettura in casi particolari, con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. • Confutare congetture prodotte, anche mediante il ricorso a controesempi. • Confrontare le proprie congetture con quelle prodotte da altri. • In semplici casi, costruire catene deduttive per dimostrare teoremi e congetture, proprie o altrui.	• Linguaggio naturale e linguaggio simbolico. Proposizioni e valori di verità. I connettivi. • Variabili e quantificatori. Legami fra connettivi e quantificatori. I predicati.

Come si può notare, le conoscenze specifiche di questo nucleo sono poche, mentre vari e pervasivi sono i collegamenti alle conoscenze degli altri nuclei. Viene dunque lasciato ai docenti il compito di scegliere quali argomenti proporre ai propri studenti.

Secondo biennio

Abilità	**Conoscenze**
• Analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto. • Comprendere il concetto di insieme infinito, con riferimento agli insiemi infiniti d'uso corrente in matematica. • Applicare in semplici casi il principio d'induzione. • Distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi. • Comprendere ed usare forme diverse di argomentazioni o di dimostrazioni.	• Schemi di ragionamento (ad esempio, il ragionamento per assurdo). • Il metodo ipotetico-deduttivo. Enti primitivi e assiomi. Definizioni; teoremi e dimostrazioni.

Anche in questo caso le conoscenze specifiche sono poche mentre molteplici sono i possibili collegamenti alle conoscenze degli altri nuclei; spetta sempre ai docenti la scelta dei collegamenti più opportuni.

Nel curricolo vengono inoltre presentate alcune osservazioni di cui tenere conto nel momento in cui si introduce il concetto di dimostrazione nell'insegnamento della matematica durante il primo e secondo biennio nella Scuola secondaria di II grado:

- E' utile introdurre la dimostrazione e i procedimenti argomentativi tramite degli spunti storici, quali la nascita del pensiero logico nell'antica Grecia, i paradossi, la nascita e lo sviluppo dei linguaggi simbolici e la crisi dei fondamenti della matematica

- E' opportuno abituarsi a congetturare e argomentare in vari settori. Ad esempio si possono proporre in geometria attività di esplorazione delle figure che conducano, attraverso la produzione di congetture e le relative prove, alla scoperta di proprietà geometriche. Oppure si può proporre lo studio di alcune proprietà dei numeri naturali o delle regole del calcolo algebrico, o anche del calcolo aritmetico. In particolare, del curricolo viene sottolineato di non proporre dimostrazioni solo in geometria.

- E' importante confrontare e avere la consapevolezza della differenza fra verifica e dimostrazione. In particolare è importante trasmettere come *«il sapere* *"ufficiale" è, non diversamente da quello prodotto dall'individuo o dal gruppo (ad esempio dal gruppo-classe), il frutto di un percorso fatto di congetture, verifiche, argomentazioni, e infine sistemazione teorica: il tutto sempre modificabile, migliorabile e finalizzato in sostanza ad una condivisione la più ampia possibile.»* (UMI, 2003, pp.17-18)[33]

- Può essere utile analizzare, oltre alle dimostrazioni "ufficiali", quelle proposte agli studenti, anche se scorrette. In questo modo è possibile evidenziare il ruolo delle ipotesi, delle definizioni e confrontare dimostrazioni diverse di uno stesso teorema.
- E' preferibile lavorare sui teoremi più "importanti", ovvero quelli che emergono per il loro ruolo e impiego o da un punto di vista storico.

Viene invece sconsigliato di:

- Trattare la logica separatamente dalla dimostrazione.
- Esagerare con le pretese di rigore. Risulta opportuno, invece, richiedere sempre sensatezza e coerenza, senza eccedere con la formalizzazione.
- Sottovalutare i ragionamenti intuitivi e considerarli negativamente.
- Inserire in una trattazione teorica quelli che sono semplici esercizi.

Quinto anno

Abilità	**Conoscenze**
• Riconoscere aspetti sintattici e aspetti semantici di una teoria. • Comprendere il ruolo e le caratteristiche di un sistema assiomatico.	• Sistemi assiomatici in vari contesti. • Coerenza e indipendenza di un sistema assiomatico. • Modelli come interpretazione di un sistema assiomatico.

Anche per il quinto anno vengono presentate alcune osservazioni:

- Per parlare di sistemi assiomatici è bene riprendere argomenti noti agli studenti e mostrare come i concetti in gioco possano essere sistemati in una teoria assiomatica. In particolare viene suggerito di usare come riferimento l'aritmetica dei numeri naturali oppure la geometria euclidea. Un altro argomento tramite il quale introdurre i sistemi assiomatici è la nascita delle geometrie non euclidee, che possono essere introdotte sia per via sintattica, modificando gli assiomi della geometria euclidea, sia per via semantica, attraverso lo studio di modelli.

- E' opportuno riprendere e consolidare le abilità e le conoscenze citate per gli anni precedenti, come "Comprendere ed usare consapevolmente forme diverse di dimostrazione"

Si sconsiglia invece di:

- Presentare una trattazione puramente teorica dei modelli e delle proprietà dei sistemi assiomatici che risulterebbe eccessivamente astratta.

Il Curricolo proposto dall'UMI delinea infine quali dovrebbero essere i risultati di apprendimenti in un Liceo scientifico e quali dovrebbero essere le competenze acquisite. In particolare, per quanto riguarda la dimostrazione, il documento afferma che, oltre a raggiungere i risultati di apprendimento comune, gli studenti dovranno:

- comprendere le strutture portanti dei procedimenti argomentativi e dimostrativi della matematica, anche attraverso la padronanza del linguaggio logico-formale; usarle in particolare nell'individuare e risolvere problemi di varia natura;
- aver approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni);
- saper spiegare il procedimento seguito, anche in forma scritta, saper confrontare procedimenti diversi e produrre formalizzazioni che consentano allo studente di passare da un problema specifico a una classe di problemi;
- saper riconoscere, fra diverse argomentazioni, quelle che sono adeguate a sostenere una determinata tesi;
- saper produrre esempi e controesempi utili a confermare o a confutare una determinata affermazione;
- comprendere e saper utilizzare diverse forme di rappresentazione, passando dall'una all'altra a seconda delle esigenze (grafica, numerica, simbolica, nella lingua naturale);

Il curricolo dell'UMI, oltre ad approfondire i quattro nuclei tematici e i tre nuclei trasversali, propone alcune indicazioni sul cosiddetto **laboratorio di matematica**.
«Il laboratorio di matematica non costituisce un nucleo di contenuto né uno di processo, ma si presenta come una serie di indicazioni metodologiche trasversali, basate certamente sull'uso di strumenti, tecnologici e non, ma principalmente finalizzate alla costruzione di significati matematici.
Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni).» (UMI, 2003, p.4) [33]
Spesso c'è l'illusione di pensare di conoscere le cose per il solo fatto di aver appreso delle parole, mentre, per un'autentica assimilazione delle idee matematiche, è invece fondamentale l'interazione tra le persone che si sviluppa durante lo svolgimento di attività. Il laboratorio, pertanto, essendo il luogo in cui gli allievi argomentano,

discutono e manipolano oggetti sotto la guida del docente, rappresenta un'efficace metodologia di insegnamento e apprendimento.
Gli strumenti del laboratorio di matematica suggeriti nel curricolo dell'UMI sono i seguenti:

- i materiali poveri (come carta, fogli trasparenti, fogli quadrettati, ecc.)
- le macchine matematiche
- i software di geometria dinamica
- i software di manipolazione simbolica
- i fogli di calcolo
- le calcolatrici grafico-simboliche

2.2.2 La dimostrazione nelle Indicazioni Nazionali

Come anticipato in precedenza, i curricoli proposti dall'UMI ebbero una notevole influenza sulle Indicazioni Nazionali.
Ci si focalizzerà in seguito soltanto sulle Indicazioni per il secondo ciclo di istruzione.

Il secondo ciclo di istruzione è organizzato in modo da offrire agli studenti sei tipologie di Liceo, due tipologie di Istituti Tecnici e due tipologie di Istituti Professionali; anche i documenti di riferimenti sono quindi distinti: ci sono le Indicazioni Nazionali per i Licei [35], le Linee Guida per gli Istituti Tecnici [36] e le Linee Guida per gli Istituti Professionali [37]. Tutti e tre i documenti citati declinano gli obiettivi differenziandoli per il primo biennio, per il secondo biennio e per il quinto anno della scuola secondaria di secondo grado.

Anche in questo caso ci si concentrerà unicamente sulle Indicazioni per i Licei scientifici e si analizzerà il ruolo che viene dato alla dimostrazione e quali sono gli obiettivi di apprendimento a riguardo. Nel decreto legge, tra i gruppi di concetti e metodi che devono essere obiettivo di studio in matematica si trovano:

- gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, **dimostrazioni**, generalizzazioni, **assiomatizzazioni**);
- una chiara visione delle caratteristiche dell'**approccio assiomatico** nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica. (Indicazioni Nazionali, 2010)[35]

PRIMO BIENNIO
Analizzando le Indicazioni per il primo biennio, la dimostrazione è citata principalmente tra gli obiettivi per la Geometria. Si legge infatti:

Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di ***postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione****, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale.* (Indicazioni Nazionali, 2010, pp. 338-339)[35]

Viene però consigliato di non ridurre l'approccio euclideo ad una formulazione puramente assiomatica.

Tra gli obiettivi specifici per l'apprendimento per quanto concerne Aritmetica e Algebra si legge invece:

La ***dimostrazione*** *dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ e di altri numeri sarà un'importante occasione di approfondimento concettuale.* (Indicazioni Nazionali, 2010, p.338)[35]
E ancora:
Lo studente acquisirà la capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema (mediante un'equazione, disequazioni o sistemi) e risolverlo, sia per ***dimostrare*** *risultati generali, in particolare in aritmetica.* (Indicazioni Nazionali, 2010, p.338) [35]

SECONDO BIENNIO
Tra gli obiettivi per il secondo biennio, la dimostrazione non è mai esplicitamente citata.

QUINTO ANNO
Tra gli obiettivi per l'ultimo anno si legge invece:

Nell'anno finale lo studente approfondirà la comprensione del ***metodo assiomatico*** *e la sua utilità concettuale e metodologica anche dal punto di vista della modellizzazione matematica. Gli esempi verranno tratti dal contesto dell'aritmetica, della geometria euclidea o della probabilità ma è lasciata alla scelta dell'insegnante la decisione di quale settore disciplinare privilegiare allo scopo.* (Indicazioni Nazionali, 2010, p.341)[35]

Come sottolineato dagli autori di *Didattica della matematica* (2018) [4], un aspetto di interesse delle *Indicazioni* per i Licei (ma che si ritrova anche nelle *Linee Guida* per gli Istituti Tecnici e Professionali) *«è il fatto che il riferimento esplicito alla dimostrazione come oggetto, sia solo nell'ambito della Geometria e con particolare riferimento agli Elementi di Euclide»* (Baccaglini Frank et al., 2018, p.162)[4]. Mentre gli accenni agli aspetti dimostrativi sembrerebbero poter essere di carattere completamente generale, essi sono invece confinati all'ambito della Geometria. Questa specifica osservazione verrà approfondita nel paragrafo 2.4 di questo secondo capitolo.

Nelle Indicazioni viene fatto riferimento anche agli **strumenti informatici** in quanto dispositivi che offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. Viene suggerito di favorire l'utilizzo di questi strumenti nelle opportune

occasioni; il decreto legge suggerisce però di introdurre l'uso degli strumenti informatici in modo critico, senza creare l'illusione che essi siano dei mezzi automatici di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo.
In particolar modo, in riferimento al programma di Geometria del primo biennio, il decreto riporta:

La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria. (Indicazioni nazionali, 2018, p. 339)[35]

Tali costruzioni diventano importanti, se non fondamentali, al momento di congetturare una proprietà geometrica o produrre una dimostrazione. A tal proposito, nel paragrafo 2.5 si approfondirà l'utilizzo del software come importare strumento didattico in ambito dimostrativo.

2.3 L'importanza dell'intuizione e della congettura

Come affermato da Efraim Fischbein (conferenza di Samuele Antonini, 2022) [3], affinché il processo di ragionamento sia un'attività genuina e produttiva, gli "oggetti" mentali (concetti, operazioni, enunciati) devono avere un tipo di consistenza ed evidenza diretta simile a quella degli oggetti e degli eventi reali, esterni e materiali. Egli definisce dunque l'**intuizione** come un'idea che possiede due proprietà fondamentali della realtà concreta e oggettiva: l'immediatezza – cioè l'evidenza intrinseca – e la certezza (imminente, pratica e significativa). La conoscenza intuitiva avrà dunque le caratteristiche della conoscenza di oggetti reali e materiali (evidenza diretta, immediatezza, certezza, ...) e della manipolabilità degli oggetti reali e ha quindi il ruolo di conferire ad uno sforzo intellettuale le proprietà di produttività ed efficienza. Sarà dunque più probabile che da un'intuizione si producano congetture o spunti per una dimostrazione. Ecco perché l'intuizione è fondamentale nei processi dimostrativi e per apprendere a dimostrare nella Scuola secondaria di II grado.

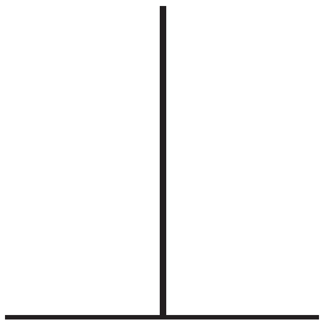
Ma come si creano nuove intuizioni? Sempre a detta di Fischbein esse si creano quando chi apprende è attivamente coinvolto. Ecco perché sia i curricoli dell'UMI, sia le *Indicazioni nazionali*, suggeriscono di utilizzare il laboratorio di matematica come metodologia di insegnamento e apprendimento. (vedi Paragrafo 2.2)

Ovviamente occorre distinguere però tra intuizione e **percezione**. Per farlo è sufficiente citare Proclo, il quale, nel suo *Commento al I libro degli Elementi di Euclide* riferisce che gli Epicurei irridevano il teorema:

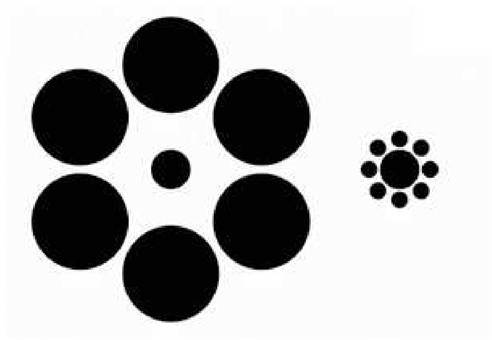
Teorema 2.3.1 (Proposizione XX del I libro)**.** *In ogni triangolo la somma di due lati è maggiore del lato rimanente*

perché è evidente, anche ad un asino, in quanto se si fosse posto del foraggio in un vertice del triangolo e l'asino ad un altro vertice, l'animale, avido di cibo, avrebbe percorso un solo lato e non due.
Proclo stesso replica a questa osservazione dicendo che la mera percezione della verità di un teorema è cosa differente da una dimostrazione scientifica di esso e dalla conoscenza del motivo per cui è vero.

I paradossi visivi mostrano efficacemente la tensione fra le percezioni pratiche e le aspettative teoriche, dimostrando di fatto che la percezione inganna. (Si veda Figura 2.1)



(a) *Valutazione delle lunghezze: esempio di Fick, 1851, per cui un segmento interrotto appare decisamente più corto della stessa lunghezza che lo interrompe*



(b) *Valutazione delle grandezze: illusione del 1897 di Theodor Lipps, per cui uno stesso cerchio appare più piccolo se circondato da cerchi grandi, e più grande se circondato da cerchi piccoli*

Figura 2.1

Oltre all'intuizione, un'altra capacità che è opportuno sviluppare per favorire il processo dimostrativo, è la capacità di congetturare. La **congettura**, in matematica, *«è una proposizione dimostrata vera in taluni casi, della quale non si sia riusciti a dimostrare la falsità in nessun caso e che perciò si presume vera in ogni caso»* (Vocabolario Treccani)[44].

Diversi studi italiani hanno sottolineato come l'introduzione di attività di argomentazione in cui gli studenti elaborino anche una o più congetture possa rendere più semplice il processo di dimostrazione agli studenti.
Come affermato dagli autori di *Didattica della matematica* (2018), *«l'insegnamento della dimostrazione, che spesso è basato principalmente su apprendimento "riproduttivo" (le dimostrazioni sono presentate agli studenti direttamente, senza che ne debbano produrre di nuove), sembra essere poco efficace; mentre sembra più efficace l'uso di problemi aperti adeguati, in cui è necessario anche produrre congetture.»* (p.135) [4]

Durante la produzione della congettura, lo studente costruisce il proprio enunciato attraverso un'intensa attività argomentativa, funzionalmente legata alla giustificazione della plausibilità delle proprie scelte: durante la successiva fase dimostrativa, lo studente ricollega il proprio processo in modo coerente, organizzando in una catena logica alcuni degli argomenti prodotti durante la costruzione dell'enunciato.

Osservando ciò che più spesso accade a scuola, si nota che il senso della dimostrazione non è innato negli allievi, bensì viene costruito gradualmente dall'azione didattica dell'insegnante. Nelle prime fasi dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria di II grado non è opportuno parlare in termini troppo rigorosi, ossia alcuni concetti e molte proprietà si accettano a livello intuitivo per la loro "evidenza". (Tomasi, 2021) [43] Occorre però fare attenzione poiché spesso con l'invocazione del "si vede" si perde (o meglio non si ritiene necessaria) la giustificazione tramite una

dimostrazione, perché appunto una data proprietà "si vede dalla figura".
Per evitare quindi che le dimostrazioni in geometria incontrate dagli alunni nel primo biennio di Liceo "spaventino e scoraggino" gli studenti, è opportuno, da un punto di vista didattico, che siano precedute e accompagnate da attività di argomentazione e congettura. Non si può partire quindi immediatamente da un'impostazione assiomatica, ma occorre arrivarci gradualmente, mettendo in evidenza l'importanza di alcuni teoremi e senza proporre troppe dimostrazioni. Si sconsiglia di proporre congetture e dimostrazioni solo in ambito geometrico, anche se, per la dimostrazione, le *Indicazioni nazionali* del 2010 sembrano privilegiare la Geometria. (Si veda Paragrafo 2.2 e Paragrafo 2.4).

Un esempio di proposta da adottare per proporre delle congetture e attività esplorative è quella presentata nel Paragrafo 2.5 tramite un software di geometria dinamica.

Soffermandosi infine sul **ruolo che occupano le figure** nel processo di dimostrazione di un teorema in Geometria, si possono fare ulteriori commenti e osservazioni sui temi di intuizione, percezione e congettura.
Il disegno geometrico è infatti spesso fuorviante: il disegno di un triangolo, per esempio, viene interpretato dall'insegnante come supporto visivo atto a rappresentare idealmente l'intera famiglia dei triangoli, mentre viene interpretato dall'allievo come il disegno di quello specifico triangolo. L'insegnante, dunque, è attento a formulare tutte le sue considerazioni in termini generali, in modo tale che possano applicarsi anche ad ogni altro triangolo prescindendo dalle proprietà specifiche del triangolo disegnato, l'allievo invece rischia di riferire tutte le considerazioni dell'insegnante esclusivamente a quel caso particolare.

Portando come esempio uno dei tanti citati da Villani (2006) [46], nel dimostrare il seguente teorema:

Teorema 2.3.2. *La somma degli angoli interni di un triangolo misura* 180°

l'insegnante svilupperà un ragionamento complesso, suddividendolo in passaggi ed illustrando i vari passaggi tramite un disegno fatto alla lavagna. Lo studente riuscirà probabilmente a comprendere i passaggi, ma potrebbe non afferrarne il significato complessivo, credendo che per provare la veridicità della proposizione possa essere sufficiente misurare con il goniometro gli angoli interni del triangolo disegnato alla lavagna.

L'uso di figure geometriche non va però nemmeno sminuito. Il ruolo che svolgono in ambito geometrico, infatti, è molto importante, in quanto l'osservazione visiva di una figura ce ne fornisce un'immagine globale e questa globalità della percezione consente di fissare l'attenzione su certe caratteristiche della figura che ci appaiono come particolarmente interessanti, e di congetturarne determinate proprietà.
Alla luce di quanto scritto sopra, però,

- non vanno sottovalutate le difficoltà di coordinamento tra la descrizione verbale di una proprietà geometrica e una sua rappresentazione visiva che può essere sia concreta sia virtuale;

- nell'ambito della geometria razionale frasi del tipo "Come si vede dalla figura..." sottintendono l'esigenza di tradurre l'evidenza visiva in opportuni ragionamenti teorici. (Villani, 2006) [46]

Nonostante il ruolo giocato dalle figure, è assodata la superiorità del ragionamento teorico rispetto alla semplice osservazione visiva: i matematici considerano più convincente una dimostrazione teorica rispetto alla chiara evidenza che può derivare dall'attenta osservazione di una figura. Le motivazioni a riguardo sono molteplici e alcune di essere sono già state approfondite in precedenza:

- qualunque verifica grafica non potrebbe essere ripetuta infinite volte;
- gli enti della geometria non sono oggetti reali;
- ci sono importanti teoremi geometrici, per i quali nessuna osservazione empirica di disegni materiali può aiutare a congetturare l'enunciato;
- nel caso di enti geometrici tridimensionali è difficile desumere informazioni attendibili da un'osservazione delle loro rappresentazioni;
- disegni imprecisi possono trarre facilmente in inganno;
- è difficile disegnare fedelmente le configurazioni geometriche che intervengono a livello teorico nelle dimostrazioni per assurdo. (Villani, 2006) [46]

Questo per ribadire il concetto che sì, le figure sono importanti (se ben utilizzate), ma il ricorso alla dimostrazione è necessario, sia per avere una conferma dei fatti congetturati, sia per avere una comprensione totale del ruolo dei singoli assiomi e delle proposizioni già dimostrate in precedenza.

2.4 Emancipazione della dimostrazione dalla Geometria euclidea

L'importanza dell'insegnamento e dell'apprendimento del metodo ipotetico-deduttivo in ambito geometrico è indiscussa. Tale insegnamento viene considerato didatticamente e culturalmente rilevante e ciò è giustificato dalla storia e tradizione della didattica della matematica. La domanda a cui però vuole cercare di dare risposta questo paragrafo è la stessa domanda che Villani pone nel testo *Cominciamo dal punto* (Villani, 2006) [46], ovvero "È opportuno usare la geometria (in particolare la geometria euclidea) come palestra esclusiva o privilegiata per far acquisire agli allievi familiarità col metodo ipotetico-deduttivo?"

Tradizionalmente la geometria è sempre stata l'ambito quasi esclusivo per l'introduzione del concetto di dimostrazione nella scuola secondaria e continua ad esserlo. L'impostazione didattica tradizionale, che prevede per l'appunto di introdurre la dimostrazione nel primo biennio della scuola secondaria di II grado iniziando dalla geometria, si è rivelata però difficile per la maggior parte degli allievi, soprattutto dal momento in cui la scuola è diventata meno "elitaria" di un tempo. Questo ha avuto come conseguenza, negli ultimi decenni, che in molti indirizzi vi sia stato un progressivo abbandono della dimostrazione, soprattutto nella geometria sintetica. (Seminario Luigi Tomasi, 2021)[42]
Questa situazione suggerisce, da un lato di adottare un approccio alla dimostrazione che coinvolga più ambiti della matematica (non solo quello geometrico), dall'altro la necessità di un approccio più graduale alla dimostrazione, che faccia anche uso degli strumenti tecnologici come, per esempio, i software di geometria dinamica e più in generale delle tecnologie (questa seconda ipotesi verrà approfondita nel paragrafo 2.5).

Analizzando le Indicazioni Nazionali del paragrafo 2.2 si può notare come, sebbene la dimostrazione sia ritenuta un obiettivo formativo, essa compaia nello specifico associata prevalentemente alla geometria euclidea (o al più ad una specifica dimostrazione, l'irrazionalità della radice di 2). *« È vero che la dimostrazione è associata anche all'ambito aritmetico, ma in riferimento ai "calcoli con le espressioni letterali" e sembra pertanto che le dimostrazioni che si abbiano [...] in mente siano poco più che catene di uguaglianze o disuguaglianze. Di fatto questo è rispecchiato dalla pratica dell'insegnamento della matematica nei Licei in cui la geometria è, nella migliore ipotesi, l'unico ambito matematico in cui lo studente, nel corso del primo biennio, si cimenta con vere e proprie dimostrazioni.»* (Maschio, 2019, p. 557) [31]

La principale conseguenza di tali scelte didattiche è che i primi anni gli studenti, vedendo solo dimostrazioni di geometria, saranno portati a fondare la loro conoscenza su di esse, creando la misconcezione che siano strumento soltanto geometrico, che vi sia una netta divisione tra geometria e matematica e imparando ad utilizzare solo alcune tecniche dimostrative (che, per quanto riguarda le dimostrazioni geometriche, sono anche piuttosto specifiche).

Gli studenti che proseguiranno i loro studi in ambito matematico si renderanno conto invece che le dimostrazioni della matematica moderna non sono affatto simili a quelle geometriche e che anzi somigliano di più a quelle di ambito aritmetico, algebrico o combinatorio. È vero che spesso anche in geometria si usano tecniche dimostrative applicabili in ogni altro ambito matematico, come per esempio la dimostrazione per assurdo, ma potrebbe succedere che, vedendo queste tecniche applicate solo all'ambito geometrico, gli studenti non riescano a riconoscerne l'applicabilità in altre situazioni.

Il valore didattico della dimostrazione geometrica è indiscusso: il suo vantaggio è evidente, in quanto i problemi possono essere rappresentati graficamente dagli studenti, rendendoli più tangibili e quindi comprensibili. Secondo Samuele Maschio, autore dell'articolo *Emancipare la dimostrazione dalla geometria euclidea nella didattica della matematica*, però, *«Questo aspetto [...] può talvolta rappresentare uno svantaggio in un certo altro senso. Infatti può accadere che gli studenti non siano in grado di capacitarsi del perché si dovrebbe dimostrare un fatto.[...] Può risultare difficile far comprendere allo studente che il problema che dice "Si dimostri che un triangolo rettangolo con.... è sempre..." non si riferisce al solo triangolo in figura, ma a qualsiasi triangolo che soddisfi le ipotesi.»* (Maschio, 2019, p.559) [31]
Anche altri autori, come Paola e Robutti (2001) [39], sono in accordo con quanto sostenuto da Maschio: il fatto che tradizionalmente la dimostrazione si abbia in geometria ha fortemente caratterizzato la prassi didattica e in Italia, di conseguenza, la dimostrazione viene un po' ovunque introdotta con la geometria sintetica. Sebbene questo sia in accordo con la tradizione, lo è in modo minore con le strategie di insegnamento che propongono un approccio più graduale alla dimostrazione. La geometria, infatti, può "distrarre" gli studenti al reale apprendimento di un metodo ipotetico-deduttivo, a causa del disegno, della misura e del grande numero di proposizioni assunte a fondamento della teoria.

Una prima possibile soluzione viene data da Maschio che, come molti altri autori, sostiene che proporre dimostrazioni anche in ambito aritmetico o algebrico possa aiutare, in quanto queste aree della matematica, non avendo immediate rappresentazioni figurali, non presentano gli stessi problemi della Geometria euclidea. Problemi come "Dimostrare che la radice di 2 è irrazionale" possono rappresentare "autentiche scoperte" per gli studenti, non avendo le caratteristiche dell'ovvietà e dell'evidenza dei fatti geometrici, portandoli a comprendere la necessità del dimostrare e aumentando la loro curiosità e ricerca matematica.
Egli invita dunque a non presentare la dimostrazione esclusivamente in ambito geometrico; infatti se *«nella scuola secondaria di primo grado il senso comune è che la geometria siano le figure e la "matematica" siano i conti, sarebbe auspicabile non rischiare che nella scuola secondaria di secondo grado la geometria diventi, nella percezione degli studenti, la scienza delle dimostrazioni astruse di fatti evidenti e la "matematica" la scienza dei conti difficili e privi di un significato.»* (Maschio, 2019, p.561) [31]

Una seconda proposta (Paola & Robutti, 2001) [39] consisterebbe invece nel trattare di dimostrazione anche in Geometria analitica. Il metodo di Cartesio è infatti fortemente legato alla dimostrazione e potrebbe essere dunque presentato come metodo per ricercare e scoprire una dimostrazione.

Anche Villani, in *Cominciamo dal punto* (2006) [46], sostiene che sarebbe limitativo e sbagliato confinare le dimostrazioni alla sola geometria, per gli stessi motivi spiegati in precedenza. Aggiunge però: *«Quanto ad attribuire un ruolo privilegiato (non esclusivo) alle dimostrazioni in geometria, in linea di massima posso essere d'accordo [...] purché si eviti di penalizzare l'intuizione geometrica e purché si privilegi la comprensione delle dimostrazioni rispetto ad una loro memorizzazione.»* (Villani, 2006, p. 26) [46]

2.5 L'utilizzo del software come strumento didattico

La Geometria euclidea è spesso definita "geometria con riga e compasso", a causa della centralità dei problemi di costruzione nell'opera di Euclide. L'importanza teorica della nozione di costruzione è chiaramente illustrata dalla storia dei problemi classici della geometria. Nonostante l'apparente obiettivo pratico, cioè il disegno che si può realizzare su un foglio di carta, le costruzioni geometriche hanno però anche un significato teorico. Gli strumenti e le regole per le costruzioni geometriche hanno una controparte negli assiomi e nei teoremi di una teoria, cosicché ogni costruzione corrisponde ad uno specifico teorema. All'interno di un sistema di questo tipo, il teorema convalida la correttezza della costruzione: la relazione tra gli elementi del disegno prodotto dalla costruzione sono enunciati da un teorema.

L'insegnamento della geometria (e in particolare la scelta di insegnare o meno la geometria euclidea) a scuola ha subito diversi cambiamenti nel corso del XX secolo, da un lato a causa delle proposte di innovazione didattica (come, per esempio, quelle del gruppo Bourbaki), dall'altro a causa dei mutati bisogni e difficoltà degli allievi. Da quasi trent'anni, invece, c'è stato un certo ritorno della geometria sintetica, grazie soprattutto al diffondersi dei software di geometria dinamica.

Un software di Geometria Dinamica è un software che permette di eseguire costruzioni con riga e compasso e di metterle in movimento, trascinando con l'uso del mouse o facendo muovere lungo una curva prefissata uno qualsiasi dei punti da cui dipendono le costruzioni stesse (Brigaglia, Raspanti, & Rogora, 2020).[13]. Il primo software di questo tipo a vedere la luce è stato *Cabri-géomètre*, nato alla fine degli anni Ottanta (1988) nei laboratori di ricerca del CNRS (*Centre National de la Recherche Scientifique*) e dell'Università *Joseph Fourier* di Grenoble.
Un secondo famosissimo software di geometria dinamica è GeoGebra, che ha il vantaggio di essere gratuito e ben supportato da una comunità attiva di sviluppatori e utenti. Nella sperimentazione descritta al Capitolo 3, si farà riferimento esclusivamente a questo software.

GeoGebra è un software per l'apprendimento e l'insegnamento della matematica che fornisce strumenti per lo studio di geometria, algebra e analisi. Il suo creatore, Markus Hohenwarter, iniziò il progetto nel 2001 presso l'Università di Salisburgo, proseguendo presso la *Florida Atlantic University* (2006–2008), la *Florida State University* (2008–2009) e ora presso l'Università di Linz, avvalendosi del supporto di sviluppatori open-source e traduttori sparsi in tutto il mondo. Da un lato GeoGebra è un sistema di geometria dinamica: permette la costruzione di punti, vettori, segmenti, rette, coniche e funzioni, e permette di modificarli in tempo reale. Dall'altro lato, equazioni e coordinate possono essere inserite direttamente: in questo modo, GeoGebra ha la possibilità di trattare variabili numeriche, vettori e punti, calcolare derivate e integrali di funzioni e dispone di vari operatori.

Rispetto al mondo classico delle figure fatte con carta e matita, la novità di un ambiente dinamico consiste nella possibilità di manipolare direttamente le figure.
Una delle più importanti funzioni offerta dai software di geometria dinamica, infatti,

è il **trascinamento**, che permette di trasformare le figure costruite mantenendo però le proprietà geometriche delle stesse. La dinamica delle figure, infatti, grazie alla funzione di trascinamento, conserva la sua logica intrinseca, cioè la logica della costruzione; gli elementi di una figura sono correlati in una gerarchia di proprietà, e questa gerarchia corrisponde a una relazione di condizionalità logica. Una figura sarà dunque corretta se e solo se ogni altra figura ottenibile da questa per trascinamento è a sua volta corretta.
Il trascinamento può essere utilizzato da un lato per verificare se la costruzione eseguita è corretta e corrisponde allo scopo prefissato, dall'altro al fine di produrre una congettura. Per le loro caratteristiche di dinamicità questi strumenti possono quindi costituire un ottimo supporto all'insegnamento e apprendimento della matematica, anche per quanto riguarda l'**avvio alla dimostrazione**. (Mariotti, 2001) [26]

I vantaggi e gli svantaggi dell'utilizzo degli ambienti di geometria dinamica sono stati ampiamente discussi in letteratura. Da un lato essi offrono la possibilità di fare una distinzione esplicita tra "disegno" e "figura", permettendo di visualizzare quali sono le proprietà che sembrano rimanere costanti in una figura, a prescindere dallo specifico disegno effettuato (Laborde, 1992) [23]; dall'altro lato, molti studi hanno dimostrato che l'interpretazione degli studenti della modalità di trascinamento non è ovvia e non può essere data per scontata (Hoelz, 1996) [21].

Sicuramente la disponibilità della capacità di rappresentazione grafica dei software di geometria dinamica ha dato nuovi impulsi all'esplorazione matematica e ha portato ad un nuovo interesse nell'insegnamento della geometria. Oltre a questo, come si scriveva in precedenza, i software dinamici hanno anche il potenziale di incoraggiare sia all'esplorazione sia alla dimostrazione perché rendono più facile porre e testare congetture.
Tuttavia, mentre è abbastanza chiaro che un software di geometria dinamica possa contribuire allo sviluppo del ragionamento geometrico, in particolare nel supportare la soluzione di problemi geometrici, il contributo che può dare per **favorire una cultura della dimostrazione** appare essere più questionabile.
Tramite un software di geometria dinamica, il trascinamento permette agli studenti una forte evidenza percettiva che una data proprietà è vera. Come spesso sottolineato, però, può essere naturale e ragionevole per lo studente saltare alla conclusione che l'esplorazione tramite il trascinamento sia sufficiente a garantire la verità di quello che può essere osservato, questo prevenendo l'emergere di qualsiasi domanda di perché, e come conseguenza, la possibilità di percepire la necessità della dimostrazione.
Conseguentemente, un software di geometria dinamica da solo, senza un adeguato ambiente organizzato, non favorirebbe l'esigenza di una dimostrazione.
Sarà dunque compito del docente chiarire agli studenti le potenzialità della funzione di trascinamento. Infatti, l'organizzazione sequenziale di strumenti usati per produrre una figura dinamica determinano una dipendenza tra i differenti elementi della figura: questa dipendenza potrebbe non essere immediatamente colta, ma diventa evidente ad un utente non appena attiva la funzione di trascinamento. Una corretta interpretazione dei possibili movimenti effettuabili con il mouse costituisce l'elemento base per un utilizzo effettivo della funzione di trascinamento, sia per congetturare sia per dimostrare, come confermato anche dai dati sperimentali. Successivamente,

le congetture e la ricerca empirica potrebbero portare lo studente a percepire contraddizione e incertezza, aprendo la strada al bisogno di spiegazioni e superando la forza dell'evidenza empirica.
Ecco perché l'utilizzo di strumenti informatici è importante anche per apprendere a dimostrare. Essi possono essere sfruttati per l'appunto per produrre congetture, ovvero per formulare un enunciato che risponda ad un problema posto in forma aperta. La congettura successivamente può essere validata, conducendo gli studenti a produrre la dimostrazione.

Come si scriveva in precedenza, l'invenzione dei software di geometria dinamica ha determinato un recupero dell'interesse per l'insegnamento della geometria euclidea, in particolare delle costruzioni con riga e compasso. Questi software consentono infatti di vedere dinamicamente le figure riportando in primo piano i metodi sintetici nello studio della geometria e nella risoluzione di problemi. Come sostenuto da Tomasi in [41], il software può essere integrato in un percorso didattico con diverse modalità:

- quando c'è bisogno di fare una figura ad elevata precisione (sia da parte degli insegnanti che degli studenti)
- per esplorare dinamicamente e per visualizzare oggetti geometrici che, se modificati opportunamente, mettono in luce delle proprietà invarianti (si sfrutta il "dragging", ovvero il trascinamento)
- per scoprire delle proprietà e produrre delle congetture.

Ovviamente l'utilizzo di questi strumenti informatici presuppone una conoscenza approfondita del software da parte degli insegnanti, i quali devono preparare progetti didattici precisi che prevedano l'utilizzo del software al momento opportuno. È preferibile che esso venga inizialmente utilizzato dall'insegnante e successivamente anche dagli allievi.

Nella proposta di curricolo UMI (2003) [33], si trovano delle indicazioni non solo riguardo la dimostrazione (come analizzato nel paragrafo 2.2), ma anche riguardo l'utilizzo del software e in particolare su attività di esplorazione da realizzare mediante l'utilizzo del software ai fini di un'avvio graduale alla dimostrazione. Fra le varie indicazioni:

- si consiglia l'uso del software (software di geometria dinamica, fogli elettronici, calcolatrici grafiche, ecc);
- si insiste molto sull'argomentazione, sulle congetture e sulla discussione matematica prima di arrivare alla dimostrazione;
- si pone l'accento su attività di esplorazione e di scoperta di proprietà, da realizzare mediante l'uso dei software e in generale delle nuove tecnologie, accanto a quelle tradizionali.

Solitamente gli studenti incontrano diverse difficoltà ad affrontare e produrre delle dimostrazioni. Spesso l'insegnamento della dimostrazione a scuola finisce per diventare lettura e ripetizione delle dimostrazioni proposte dall'insegnante, anche perché capita che gli studenti non sentano il bisogno di produrre dimostrazioni e le affrontino soltanto perché richiesto dall'insegnante. Il fatto che si scelga di parlare di dimostrazione quasi esclusivamente in geometria euclidea nel primo biennio di liceo scientifico, non fa che peggiorare la situazione, in quanto spesso, le proprietà di cui viene richiesta una dimostrazione, appaiono evidenti agli studenti da un punto di vista visivo. Ecco perché occorre introdurre metodologie e approcci differenti nell'insegnamento della dimostrazione, in particolare, come suggerito dall'UMI, il ricorso all'argomentazione e alla congettura e l'utilizzo per l'appunto dei software di geometria dinamica.

Tra le attività più significative che combinino questi due aspetti ci sono i **problemi proposti in forma "aperta"**, che sono stati studiati e sperimentati perché sembrano essere i più utili per motivare alla dimostrazione. Se ne descriverà in seguito un esempio, un secondo esempio è stato invece oggetto della sperimentazione presentata nel Capitolo 3.

Un problema in forma aperta deve sempre avere le seguenti caratteristiche:

- ha un enunciato abbastanza breve;
- non contiene in forma esplicita tutte le informazioni né tutte le ipotesi e tanto meno la soluzione o la tesi;
- non induce automaticamente a uno specifico metodo di risoluzione;
- non contiene l'esplicitazione di tutte le richieste. (Tomasi, 2019) [41]

I problemi si presentano quindi come situazioni in cui lo studente deve esplorare, utilizzando ciò che gli viene suggerito e anche ciò che egli stesso ritiene utile, per trarre delle conclusioni che non si configurano come "il risultato", ma come le conseguenze delle premesse che ha usato.
Ovviamente occorre scegliere problemi non troppo facili e neppure troppo complessi.

Un'esempio proposto dall'UMI in *Matematica 2003* è il seguente problema:

Dato un triangolo, costruire le bisettrici di due angoli interni. Con l'uso di un software, trascinando opportunamente i vertici del triangolo, puoi rendere queste bisettrici tra esse perpendicolari? Se sì, costruire un triangolo che abbia questa proprietà; altrimenti spiega perché è impossibile ottenere questa configurazione. (Si veda Figura 2.2)

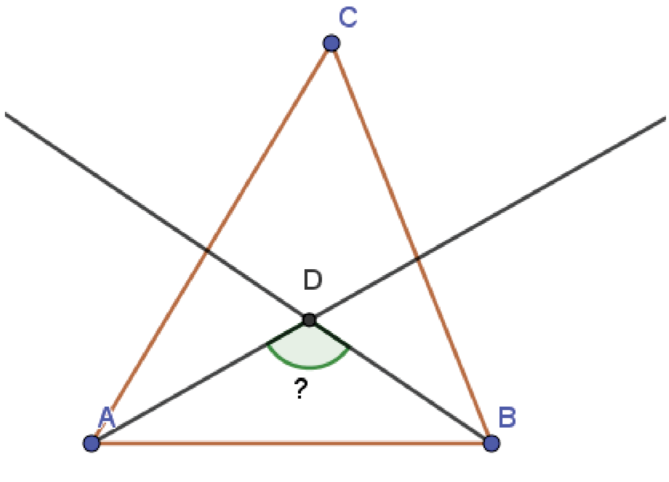


Figura 2.2

Sicuramente, come suggerito da Villani (2006) [46], il software va usato in aggiunta e non in sostituzione della manualità del disegno con riga e compasso.
Egli pone inoltre l'attenzione su altri piccoli accorgimenti di cui tener conto.
Egli afferma che il software *«è utile dal punto di vista figurale per esplorare situazioni non ancora completamente formalizzate e per stimolare gli allievi a formulare congetture.»* (Villani, 2006, p.37) [46] Per esempio, è facile notare, utilizzando GeoGebra, che tre dei quattro punti notevoli di un triangolo (baricentro, ortocentro e circocentro) sono allineati e che tale proprietà continua a valere al variare della forma del triangolo per effetto di un qualsiasi trascinamento dei suoi vertici. Tale osservazione non sarebbe possibile (o comunque non sarebbe così semplice da verificare) utilizzando riga e compasso.
Occorre però prestare attenzione a non promuovere un utilizzo acritico degli strumenti informatici. In tal caso per esempio bisogna evitare di indurre a credere che *«l'evidenza visiva, unita alla permanenza di una proprietà sotto l'effetto del trascinamento, possa considerarsi probante, alla stessa stregua di una dimostrazione matematica.[...] D'altra parte, un uso critico e attento dello stesso software può essere un'eccellente occasione per ribadire ancora una volta la distinzione tra congetture formulate in base all'evidenza visiva e dimostrazioni inserite in un contesto teorico»* (Villani, 2006, p.37) [46]

Capitolo 3

Progetto di osservazione e azione didattica sulla dimostrazione nella scuola secondaria di II grado

In questo capitolo verrà presentato un progetto di osservazione e azione didattica sulla dimostrazione, caratterizzato da due implementazioni effettuate in due differenti classi della Scuola secondaria di II grado.
Verranno inizialmente presentate le attività da cui sono composte le due implementazioni realizzate per gli studenti rispettivamente di una classe prima e di una classe terza di un Liceo Scientifico (Ordinario e Scienze applicate), che prevedono due differenti percorsi di avvio alla dimostrazione. Per ciascuna attività sono state indicate la durata, la struttura e gli obiettivi e i materiali occorrenti per la sua realizzazione. I materiali cui si farà riferimento sono stati inseriti in Appendice A e B; verrà successivamente presentata la realizzazione delle implementazioni del progetto effettuate in una classe prima Liceo delle Scienze applicate e in una classe terza Liceo Scientifico di Castelfranco Veneto. Dopo una descrizione della messa in pratica delle attività, i due paragrafi sulle implementazioni si concluderanno con l'analisi dei dati raccolti.

Il progetto ha origine dalle seguenti domande di ricerca:

- Constatate le difficoltà degli studenti della Scuola secondaria nell'affrontare la dimostrazione (come affermato da numerosi autori e riportato nel Capitolo 2), è forse necessario un approccio maggiormente graduale alla dimostrazione tramite cui si possa trasmettere agli studenti la necessità di quest'ultima e motivarli ad approcciarsi a procedimenti di tipo dimostrativo?
- L'utilizzo di software di geometria dinamica può essere utile in un percorso di avvio e/o consolidamento della dimostrazione?
- L'utilizzo della congettura, dell'argomentazione e dell'intuizione può essere utile in un percorso di avvio e/o consolidamento della dimostrazione?
- È forse necessario introdurre la dimostrazione in tutti gli ambiti della Matematica e non quasi esclusivamente in Geometria euclidea, per evitare che si crei la misconcezione che essa sia uno "strumento" esclusivamente geometrico?

Il progetto è volto a cercare di dare una risposta a tali quesiti, confermando o contraddicendo quanto emerso nel Capitolo 2 e lasciando spazio a ulteriori sperimentazioni nella Scuola secondaria di II grado, vista la necessità di un ritorno della dimostrazione a scuola (e non solo nei Curricoli).

La difficoltà di reperire docenti disponibili ad accogliere la sperimentazione nelle proprie classi ha comportato l'attuazione del progetto unicamente in una classe prima (Liceo delle Scienze applicate) e in una classe terza (Liceo Scientifico) di un Liceo di Castelfranco Veneto. Il progetto è stato proposto solamente a docenti di matematica che prestano insegnamento presso Licei Scientifici, in quanto si è valutato che tale fosse il contesto preferibile per effettuare la prima realizzazione sul campo. È importante però sottolineare come il progetto non sia stato ideato per essere impiegato unicamente in classi appartenenti a tale indirizzo di studi, bensì risulti attuabile anche in altri indirizzi: sicuramente è riproponibile in tutti i Licei, ma potrebbe essere riproposto anche in un Istituto tecnico e/o professionale, previa rimodulazione e modifica delle attività.

L'implementazione ha avuto luogo presso il Liceo Ginnasio Statale "Giorgione" di Castelfranco Veneto: una docente di Matematica di una classe prima e una docente di Matematica e Fisica di una classe terza di tale Liceo si sono rese disponibili ad accogliere il progetto all'interno della propria classe. La scelta delle classi e la loro conformazione verranno descritte in seguito, nei rispettivi paragrafi.

Come appena accennato, la difficoltà di reperire docenti disponibili ad accogliere la sperimentazione ha comportato una difficoltà nel reperire anche delle classi campione. Oltretutto, con le docenti resesi disponibili, è stata constatata l'impossibilità di valersi di classi campione: i livelli di partenza sarebbero stati differenti e, poiché l'argomento (la dimostrazione) è trattato da quasi ogni classe della scuola, un confronto fra due classi non avrebbe portato ad alcun risultato che si potesse ritenere significativo. Sarebbe stato necessario un numero considerevole di classi da paragonare, ma, vista la difficoltà nel reperirle, si è preferito lavorare senza classi campione, cercando comunque di ricavare dei risultati, seppur maggiormente qualitativi, confrontando il livello della classe, le conoscenze e la motivazione degli studenti prima e dopo la sperimentazione.
I metodi attraverso i quali sono stati raccolti i dati per valutare la riuscita del progetto sono l'osservazione partecipante e la somministrazione di questionari, compiti e verifiche.

3.1 Indagine in una classe prima Liceo delle Scienze applicate

3.1.1 Il progetto

- **Obiettivi del progetto:** nella scuola italiana, per tradizione e come riportato nelle Indicazioni Nazionali (2010)[35], la dimostrazione si affronta nel I biennio della scuola secondaria di secondo grado in geometria e nel II biennio e V classe, seppur inferiormente, in analisi. Il carattere di questo studio è spesso di tipo riproduttivo, a causa del poco tempo a disposizione e della difficoltà dell'argomento.
  L'obiettivo dell'indagine, forse un po' ambizioso, è di sperimentare un percorso di *avvio graduale alla dimostrazione*, in cui, tramite l'**intuizione** e la **congettura**, si possa *trasmettere* agli studenti la *necessità della dimostrazione*, in particolare l'*esigenza di porre degli assiomi, di organizzare in modo rigoroso le deduzioni e di utilizzare un linguaggio opportuno e specifico della disciplina.*
  Si vuole quindi ipotizzare, e verificare con un'indagine, un approccio un po' più graduale e la rivalutazione delle congetture, in modo da osservare possibili miglioramenti (oppure no) nell'apprendimento da parte degli allievi.

- **Struttura del progetto:** Il progetto può essere suddiviso in tre fasi distinte. Obiettivo della prima fase è avere informazioni sul livello della classe e sulle capacità di espressione con linguaggio appropriato. Inoltre servirà ad introdurre la dimostrazione cercando di incuriosire gli alunni all'argomento.
  Obiettivo della seconda fase è introdurre in modo graduale la dimostrazione in classe, servendosi in particolare di strumenti come l'argomentazione e la congettura, l'utilizzo di un software di geometria dinamica e la proposta di un laboratorio di informatica con dei problemi proposti in forma aperta.
  Infine, obiettivo della terza fase è raccogliere informazioni, tramite un questionario e una verifica, circa l'effettiva utilità degli strumenti usati nel percorso di avvio alla dimostrazione matematica, rispondendo ai quesiti di ricerca scritti a inizio capitolo.

- **Durata del progetto:** all'incirca 16 ore di cui 10 di tipo osservativo e 6 di tipo attivo, da svolgere in accordo con il/la docente accogliente di classe.

Vengono ora presentati i contenuti di ciascuna attività, fornendo precise indicazioni rispetto ai tempi di realizzazione e i materiali da impiegare. Le seguenti schede rappresentano quindi la programmazione delle attività in cui è strutturato il progetto, e possono essere impiegate per riproporre tale sperimentazione. È possibile consultare i file con i materiali necessari per la realizzazione delle varie attività nell'apposita Appendice A.

Attività 1: Osservazione della classe e somministrazione questionario iniziale

Durata: 2 ore di tipo osservativo.

Struttura e Obiettivi: La prima attività prevede:

- un periodo di osservazione con lo scopo di *conoscere la classe*;
- la successiva somministrazione di un questionario iniziale che permetta, possibilmente, di *ricavare informazioni sulla preparazione degli alunni, sull'abilità nell'utilizzo di un linguaggio appropriato alla disciplina e sulla loro capacità di distinzione tra definizione, assioma ed enunciato di un teorema.*
  Il test sarà cartaceo, a risposte multiple (chiuse) e non verrà valutato. Verrà consegnato e svolto interamente in aula in circa 30 minuti;
- l'assegnazione di un compito per casa agli studenti, ovvero studiare dal libro di testo le prime definizioni (tralasciando gli enti fondamentali): semiretta, segmento, poligonale, semipiano, angolo, angolo giro, retto e nullo, figura concava e convessa ecc... Questo compito potrebbe contribuire ad *imparare ad utilizzare sin da subito il libro di testo* e gradualmente ad *adoperare un linguaggio appropriato alla disciplina.*

Materiale occorrente: Il libro di testo [7] e il questionario iniziale presente in Appendice A.

Attività 2: Definizioni, enti primitivi e introduzione storica alla geometria euclidea e alla dimostrazione

Durata: 2 ore, in parte di tipo osservativo e in parte di tipo attivo.

Struttura e Obiettivi: La seconda attività prevede:

- di chiamare alla LIM[1] alcuni studenti, interrogandoli (senza valutazione) sulle definizioni assegnate per casa e utilizzando gli **errori compiuti** per farli *ragionare sull'importanza del linguaggio* e per *introdurre gli enti primitivi.*
  Ogni qual volta diano una definizione sbagliata (es: due angoli sono adiacenti quando hanno un vertice in comune) si utilizza **GeoGebra** [2] (vista Grafici, senza assi e senza griglia) per rappresentare l'errore graficamente con dei **controesempi**. Importante in tal caso è l'utilizzo della funzione di trascinamento che può aiutare gli studenti a visualizzare gli eventuali errori.
  Contemporaneamente si utilizza l'"interrogazione" come percorso per introdurre gli **enti primitivi della geometria**: ad ogni definizione data dagli alunni si chiede loro il significato dei termini che hanno usato. Se i termini usati non sono conosciuti, si devono dare altre definizioni. Anche in queste saranno

[1]Lavagna interattiva multimediale

[2]Per poter svolgere quest'attività, GeoGebra dovrebbe già essere stato introdotto alla classe e gli studenti dovrebbero già avere una minima conoscenza del software

utilizzati altri enti, che a loro volta dovranno essere definiti. Si fa quindi capire agli allievi che per interrompere questo procedimento è *necessario fissare degli enti primitivi*;

- un'**introduzione storica** alla geometria euclidea e alla dimostrazione: nella seconda parte della lezione viene introdotta la geometria euclidea con una parentesi storica sulla nascita della dimostrazione. Conoscere la storia della dimostrazione, infatti, potrebbe *ricreare la motivazione e l'entusiasmo che storicamente si ebbero durante la nascita e lo sviluppo della dimostrazione*. La spiegazione verrà accompagnata da una presentazione con slides, durante la quale gli studenti potranno prendere appunti o rispondere a provocazioni poste con lo scopo di rendere la lezione interessante e meno passiva.
  In questa introduzione possono essere enunciati alcuni dei postulati euclidei (scelti dalla professoressa/dal professore); è possibile che risulti difficile agli alunni capire la necessità dei postulati a questo punto dell'anno scolastico, ed è sconsigliato ridurre l'approccio euclideo ad una formulazione puramente assiomatica (Si vedano *Indicazioni nazionali* (2010)[35]). Si potrebbe però ritornare velocemente sull'argomento dopo l'avvio alla dimostrazione.

Materiale occorrente: Il libro di testo [7], una LIM collegata ad un dispositivo in cui è stato scaricato GeoGebra[3] e il Power Point presente in Appendice A.

Attività 3: Osservazione della classe

Durata: 4 ore di tipo osservativo.

Struttura e Obiettivi: la professoressa/ il professore proseguirà con il programma tradizionale, seguendo il libro di testo e introducendo le operazioni con angoli e segmenti e i primi teoremi sugli angoli e i segmenti.
Obiettivo di questa fase è *osservare le reazioni degli studenti, il linguaggio usato, le eventuali difficoltà e le metodologie attuate dall'insegnante*. Non vi è stato ancora un avvio **graduale** alla dimostrazione; si è pensato tuttavia potesse essere più efficace introdurlo successivamente a questa parte introduttiva, poiché i teoremi sugli angoli e sui segmenti sono molto intuitivi ed immediati, di conseguenza si prestano molto poco ad attività di avvio graduale alla dimostrazione.

Attività 4: Laboratorio di matematica. Avvio graduale alla dimostrazione tramite un problema in forma aperta.

Durata: 2 ore di tipo attivo.

Struttura e Obiettivi: l'attività verrà svolta in **laboratorio di informatica**. L'obiettivo della lezione è *sperimentare un avvio alla congettura e alla sua validazione attraverso la dimostrazione, cogliendo varianti e invarianti in una situazione geometrica e favorendo l'acquisizione del linguaggio specifico.*

[3] È preferibile scaricare la versione 5 del software

Agli studenti viene consegnata una scheda con un problema e delle domande a cui rispondere (vedi scheda in Appendice A). Il quesito assumerà la forma di un **problema posto in forma aperta**, descritto in precedenza nel Capitolo 2. Inoltre su Classroom verrà condiviso un **file GeoGebra** già pronto (riferito al problema in questione) su cui potranno lavorare (utilizzando in particolar modo la funzione di trascinamento) per avere intuizioni e fare congetture sul problema (eventualmente, se la classe è collaborativa, si potrebbe proporre agli studenti stessi di costruire la figura su GeoGebra). Il teorema scelto per l'attività, convertito in problema posto in forma aperta, è il cosiddetto *Teorema di Varignon*, che afferma:

Teorema 3.1.1. *Il quadrilatero PQRS (si veda Figura 3.1) avente per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero, è un parallelogramma.*

Gli allievi lavorano individualmente nei primi 20 minuti, compilando la scheda personale, poi inizia una discussione di classe con lo scopo di *generare congetture e cercare di far capire agli studenti la necessità di una dimostrazione (che possa spiegare le congetture, che organizzi le congetture in un sistema deduttivo, che possa convincere tutti e che aiuti nella comunicazione del risultato e nella scoperta eventualmente di proprietà o risultati più generali) e di porre dei postulati.*

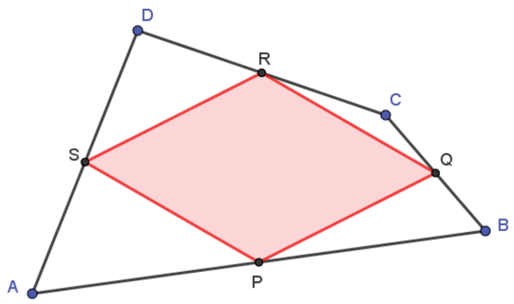


Figura 3.1

Ovviamente in questa fase non verrà data una dimostrazione effettiva del teorema poiché gli allievi non hanno ancora gli strumenti per capirla. La dimostrazione verrà possibilmente fatta a tempo debito, nel frattempo si auspica di aver suscitato della curiosità e dell'interesse negli alunni.

Materiale occorrente: Un pc/tablet per studente, GeoGebra versione 5 classica, la scheda di lavoro presente in Appendice A, e il file GeoGebra associato.
Si consiglia di effettuare in anticipo le seguenti azioni:

- Menu Opzioni → Etichettatura → Solo i nuovi punti;
- Menu Opzioni → Dimensione del carattere: 16 o 18 pt;
- Nascondi gli assi;
- Nascondi griglia;
- Terminate queste impostazioni, scegliere Menu Opzioni → Salva impostazioni.

Attività 5: Dimostrazioni di alcuni teoremi fondamentali

Durata: 4 ore di tipo osservativo.

Struttura e Obiettivi: la quinta attività prevede:

- una prima parte in cui la/il docente prosegue con il programma introducendo i primi due criteri di congruenza fra triangoli e assegnando esercizi e piccole dimostrazioni agli alunni. Si cercheranno di *osservare le possibili difficoltà incontrate dagli allievi e gli errori più frequenti.*

- una seconda parte in cui vengono introdotti alcuni teoremi fondamentali (es teorema e inverso del teorema del triangolo isoscele). Anche in questa fase si cercherà di far ricorso all'intuizione e alla congettura: ci si avvarrà di file **GeoGebra** per *cercare di far scoprire agli allievi, tramite l'intuizione, le proprietà che si vogliono dimostrare*; successivamente si cercherà di *farli ragionare tramite congetture sul perché valga quella data proprietà/come poterla spiegare*; infine si sistematizzerà il tutto tramite una dimostrazione.

Materiale occorrente: Il libro di testo [7], una LIM collegata ad un dispositivo in cui è stato scaricato GeoGebra e i files GeoGebra che si intende utilizzare.

Attività 6: Verifica e questionario conclusivi

Durata: 2 ore.

Struttura e Obiettivi: dopo 16 ore di compresenza, potrebbe non esserci sufficiente materiale per una verifica scritta. Si potrebbe di conseguenza chiedere alla/al docente i risultati della prima verifica assegnata al termine del capitolo sui triangoli, per ricavarne dati utili ai fini dell'indagine. In particolare sarebbe importante *studiare quali siano*, al termine del percorso introduttivo alla dimostrazione, *le principali difficoltà che gli alunni ancora riscontrano nel processo dimostrativo di semplici enunciati, in modo tale da capire se il lavoro effettuato sia stato efficace e sufficiente o se servirebbe un avvio ulteriormente più graduale alla dimostrazione, vista la difficoltà dell'argomento.*
Verrà inoltre somministrato un questionario conclusivo, atto a verificare:

- come si sentono gli studenti prima e dopo aver svolto (o provato a svolgere) una dimostrazione in autonomia e/o guidati;

- l'importanza della rappresentazione grafica del teorema e della precoce distinzione fra ipotesi e tesi;

- l'importanza di congetturare;

- l'utilità dell'attività svolta in laboratorio di informatica;

- l'importanza dell'utilizzo di software di geometria dinamica;

- l'interesse/la curiosità alla scoperta (e alla dimostrazione);

- l'esigenza/la necessità di dimostrare;

- l'esigenza/la necessità di un'organizzazione rigorosa;

- l'importanza dell'utilizzo di un linguaggio specifico;

- la necessità (o meno) di un percorso ulteriormente più graduale di avvio alla dimostrazione.

Materiale occorrente: Il questionario conclusivo contenuto in Appendice A.

3.1.2 L'implementazione del progetto

La classe candidata frequenta l'indirizzo Scienze Applicate; tale indirizzo *«fornisce allo studente competenze particolarmente avanzate negli studi afferenti alla cultura scientifico-tecnologica, con particolare riferimento alle scienze matematiche, fisiche, chimiche, biologiche, della terra, all'informatica e alle loro applicazioni.»*(MIUR, 2010)[38] L'indirizzo Scienze Applicate condivide le medesime indicazioni nazionali previste per il liceo scientifico tradizionale, riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento in relazione alle attività e agli insegnamenti compresi nei piani degli studi. (Indicazioni Nazionali, 2010)[35] Sono comuni ai due indirizzi anche le ore di lezione di matematica previste per il primo anno del primo biennio. Per queste ragioni è stato accettato di lavorare in una classe di tale indirizzo.
La classe in questione è composta da 26 alunni, di cui 13 ragazze e 13 ragazzi.
L'implementazione del progetto presso la suddetta classe prima del Liceo Ginnasio Statale "Giorgione" di Castelfranco Veneto è stata effettuata all'inizio dell'anno scolastico, ed è proseguita complessivamente per due mesi (da metà ottobre a metà dicembre), durante i quali il progetto veniva portato in classe due volte la settimana, in incontri da un'ora o due ore ciascuno.

Attività 1:
Nel corso del primo incontro con la classe è stato somministrato un questionario iniziale (si veda Appendice A), per conoscere il livello di partenza di ciascuno studente. Il test, costituito da domande a risposta multipla, ha permesso di sondare la preparazione iniziale degli studenti sui concetti di definizione, assioma e teorema e sull'abilità nell'utilizzo di un linguaggio appropriato alla disciplina. Si è ritenuto necessario verificare la preparazione iniziale degli studenti in quanto provenienti da istituti diversi e uscenti da due anni di "didattica mista", in presenza ed a distanza.[4] È stato così possibile verificare se vi fossero studenti che, nel corso della loro precedente carriera scolastica, avessero studiato la geometria euclidea attraverso una prospettiva assiomatico-deduttiva. Inoltre, conoscere il livello del gruppo classe ha reso possibile intervenire sul progetto in modo da adattarlo alle problematiche emerse attraverso il test.

I risultati conseguiti dagli studenti nel Test d'ingresso sono illustrati dalla Figura 3.2, la quale mostra il numero di risposte corrette o errate fornite dagli studenti a ciascuna domanda che è stata loro rivolta.
Confrontando le domande del questionario iniziale (presente in Appendice A) con le risposte date dagli studenti e riportate nel grafico in Figura 3.2, si può subito notare che le domande riferite alle Definizioni (1, 3, 6, 7, 8, 14, 15) hanno quasi tutte

[4] A causa della diffusione del virus SARS-Cov-2 a partire da dicembre 2019

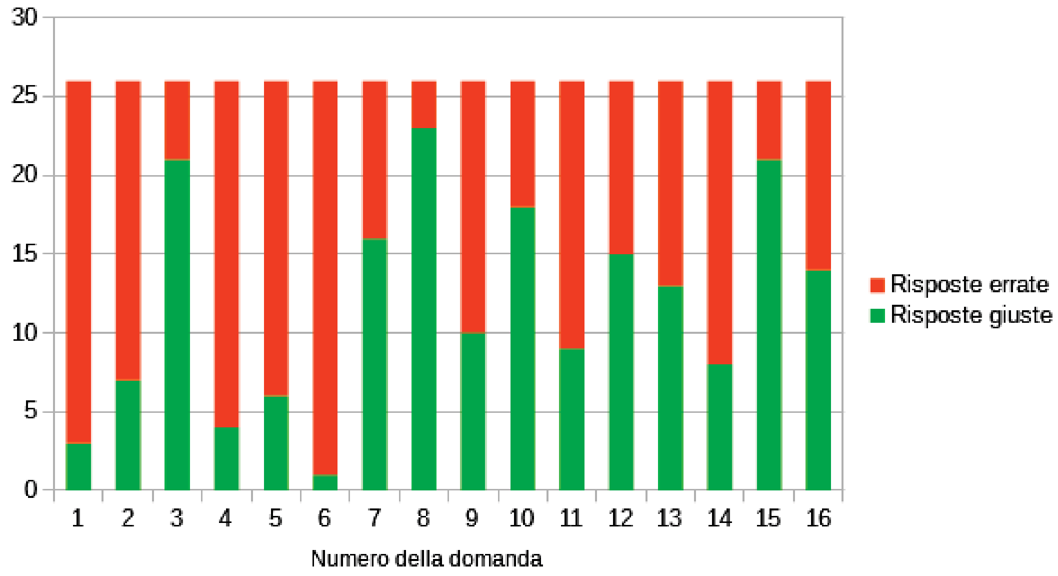


Figura 3.2

ottenuto un buon numero di risposte corrette. Questo ad indicare probabilmente il fatto che gli studenti conoscono il significato di "definizione" e conoscono oltretutto alcune definizioni, imparate probabilmente alla Scuola secondaria di I grado. Come ci si aspettava però, le domande 1, 6 e 14 hanno ottenuto punteggi più bassi, nonostante si riferissero alla definizione, in quanto presentavano definizioni parzialmente corrette o con elementi sovrabbondanti (1 e 6) o definizioni ancora mai incontrare nel percorso di studi degli alunni (14).

Le domande riferite a teoremi o assiomi sono state invece quelle maggiormente sbagliate dagli alunni; alcuni studenti hanno inoltre chiesto alla ricercatrice il significato della parola assioma, rivelando così di non aver quasi mai incontrato il metodo deduttivo nel corso delle loro pregresse carriere scolastiche.

Tutti i risultati sono in accordo con le aspettative della ricerca: ci si aspettava che gli studenti non conoscessero il metodo ipotetico-deduttivo, che non avessero ancora mai (o quasi mai) sentito parlare di teoremi e che, sebbene conoscessero il significato di definizione, non avessero ancora acquisito un linguaggio appropriato alla disciplina e non fossero in grado di distinguere tra una definizione "corretta" e una sovrabbondante o mancante di proprietà.
Si ricorda come le stesse *Indicazioni nazionali* sottolineassero di non insistere troppo con le definizioni nel primo biennio di Scuola secondaria di II grado: spesso sono accettabili anche definizioni sovrabbondanti.

Dall'osservazione iniziale della classe, emerge inoltre che:

- la classe è partecipativa e la maggior parte degli studenti risponde alle provocazioni e alle domande della professoressa senza esitazioni;

- gli studenti non sono timorosi di chiedere quando non hanno capito, anzi lo fanno spesso. Il fatto che vengano poste molte domande, aiuta anche chi non se la sente di farne a ripassare e capire meglio.

Attività 2:
Nelle successive tre lezioni è continuata l'osservazione della classe, impegnata a studiare le prime definizioni di geometria euclidea.
Si riportano in seguito alcune delle risposte più significative date dagli studenti alle domande della professoressa:

- Cos'è una semiretta? "È una linea che ha un inizio ma non ha una fine/ è una retta che ha un inizio ma non ha una fine".
- Cos'è una linea? Lo studente risponde rappresentando graficamente una retta.
- Che cos'è un angolo? "È un incrocio tra due rette/ è la distanza tra due semirette/ è il punto di incontro tra due semirette con la stessa origine".
- Cosa sono due angoli consecutivi/ adiacenti/ complementari/ supplementari/ ecc.? Gli studenti rispondono correttamente.
- Qual è la definizione di angolo esterno? Gli studenti non conoscono la definizione.

Dalla seconda attività sono emersi aspetti già intuiti dall'esito del Questionario iniziale: gli studenti, terminata la Scuola secondaria di I grado, hanno poca padronanza del linguaggio specifico della disciplina (come è normale che sia) ma hanno idee abbastanza corrette sugli enti geometrici e le loro proprietà, riuscendo di conseguenza a rappresentarli correttamente con un disegno. Cercano successivamente di riprodurre a parole ciò che hanno in mente ma non con poca difficoltà.

L'utilizzo del software GeoGebra ha tuttavia aiutato gli studenti nella comprensione degli errori compiuti e si è quindi rivelato un ottimo strumento.

L'introduzione degli enti primitivi della geometria e l'introduzione storica alla geometria euclidea e alla dimostrazione hanno inizialmente incuriosito la classe, che si è presentata attenta, partecipe e motivata. Tuttavia, nella parte conclusiva della lezione gli studenti sono parsi stanchi e un po' annoiati. Probabilmente l'attività richiedeva un livello di attenzione alto per un tempo troppo prolungato, sarebbe dunque auspicabile modificarla in modo da rendere la classe più attiva e coinvolta, evitando i cali di attenzione.

Attività 3:
L'osservazione della classe è proseguita e sono state raccolte ulteriori considerazioni circa le definizioni, la rappresentazione grafica e l'utilizzo di un linguaggio specifico:

- gli studenti faticano a dare sempre delle definizioni corrette, tuttavia a partire da esempi rappresentati tramite GeoGebra riescono quasi sempre a dare una definizione;

- gli studenti, qualora non sappiano dare una definizione, riescono tuttavia a rappresentarne un esempio;

- la classe risponde sempre in modo corretto alla domanda "che cos'è un assioma", probabilmente perché in prima persona era interessata e incuriosita a conoscerne il significato;

- quando viene richiesto una rappresentazione grafica, gli studenti hanno la tendenza a rappresentare casi particolari e non generali.

Anche queste osservazioni sono in linea con le aspettative sulle conoscenze e le proprietà di linguaggio di una classe di prima Liceo Scienze applicate.

Nel corso della terza attività, la professoressa ha introdotto in modo tradizionale la dimostrazione, seguendo il libro di testo. Dopo aver dato alcuni consigli agli studenti, ha proposto in più di una lezione le prime dimostrazioni (gli studenti erano tenuti a capirle e saperle riprodurre). È stata sottolineata in particolare l'importanza di:

- un disegno che dev'essere realizzato evitando i casi particolari;

- la trasformazione dell'enunciato del teorema, ove possibile, nella forma "se..., allora..." per distinguere con più facilità tra ipotesi e tesi;

- l'utilizzo dei colori per distinguere ipotesi e tesi nell'enunciato di un teorema e l'utilizzo degli stessi colori anche nel disegno.

La professoressa, nel corso delle lezioni, ha inoltre spiegato che si possono usare procedimenti diversi per giungere allo stesso risultato durante una dimostrazione, l'importante è che siano sempre giustificati e che, nonostante spesso gli studenti possano intuire la veridicità di un enunciato dal disegno, non possono giustificare il teorema dicendo "si vede dalla figura", ma devono procedere con una dimostrazione rigorosa. Probabilmente quest'ultimo passaggio non è affatto immediato, motivo per cui si è cercato di sperimentare un approccio più graduale alla dimostrazione che trasmetta agli studenti la necessità di quest'ultima.

Nell'assegnare i compiti per casa, tuttavia, anche la professoressa ha utilizzato un approccio graduale: inizialmente ha assegnato soltanto esercizi di rappresentazione grafica di un testo di un teorema (e viceversa di intuizione di un testo a partire da un disegno) e di distinzione fra ipotesi e tesi, successivamente ha assegnato dimostrazioni guidate e solo dopo un certo numero di lezioni ha assegnato dimostrazioni da svolgere in completa autonomia.

Per quanto riguarda la dimostrazione, è stato osservato che:

- il più delle volte gli studenti non incontrano troppe difficoltà nell'individuare ipotesi e tesi nel testo di un teorema;
- talvolta non c'è corrispondenza fra il testo del teorema e la rappresentazione grafica del suo contenuto realizzata dagli studenti;
- spesso non vengono giustificati i passaggi usati in una dimostrazione.

Alla richiesta di quali siano state le difficoltà maggiormente incontrate nei compiti lasciati per casa, gli studenti hanno risposto:

- difficoltà nel fare il disegno, partendo dal testo del teorema;
- difficoltà nell'elencare gli elementi noti (ipotesi);
- difficoltà a svolgere la dimostrazione, una volta fatto il disegno e trovate ipotesi e tesi;
- gli studenti riconoscono che riguardando le dimostrazioni viste in classe riescono a svolgere in autonomia più facilmente quelle assegnate per casa;
- difficoltà ad utilizzare i termini opportuni.

Attività 4:
L'attività di avvio graduale alla dimostrazione tramite un problema in forma aperta è stata svolta nel laboratorio di informatica del Liceo Giorgione. È stato deciso di non consegnare agli studenti dei file GeoGebra già pronti dalla ricercatrice, bensì di guidarli nella loro costruzione e successivamente di permettere loro di esplorare liberamente le figure realizzate, in particolare tramite la funzione di trascinamento del software, per rispondere ai quesiti della scheda di lavoro (si veda Appendice A).

La classe ha assunto un atteggiamento molto positivo e partecipativo nei confronti dell'attività e gli studenti sono apparsi molto incuriositi.

Si riportano in seguito alcuni dei frammenti più significativi delle schede di lavoro compilate dagli studenti e successivamente consegnate alla ricercatrice. Si cercherà quindi di trarne delle osservazioni di carattere generale sull'attività e sui suoi aspetti positivi e negativi.

La Figura 3.3 riporta la risposta di uno studente che ben rappresenta le risposte date dalla maggior parte della classe alla domanda 4 della scheda di lavoro: tramite l'esplorazione della figura, con l'ausilio della funzione di trascinamento di GeoGebra, per gli studenti è risultato molto facile intuire e successivamente congetturare che "congiungendo i punti medi di un quadrilatero generico si ottiene sempre un parallelogramma", ovvero quello che più comunemente è noto come *Teorema di Varignon*[5]. Si può dunque trarre la conclusione che proporre problemi in forma aperta con

[5] La classe non è a conoscenza del fatto che si tratti di un teorema

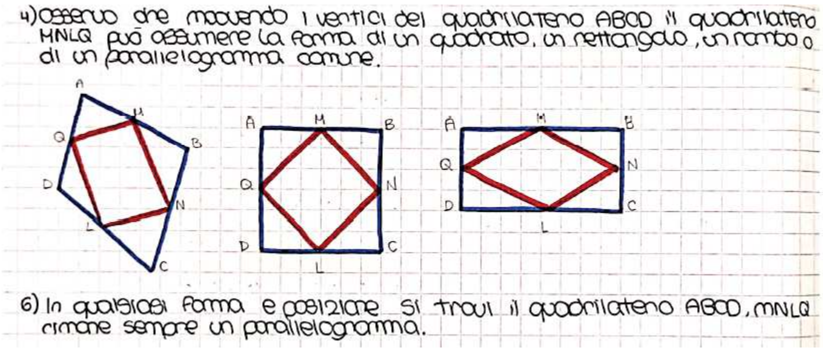


Figura 3.3

l'utilizzo di software di geometria dinamica possa aiutare gli studenti a elaborare delle congetture e favorire i processi intuitivi. Sono dunque un ottimo strumento in un percorso di avvio graduale alla dimostrazione.

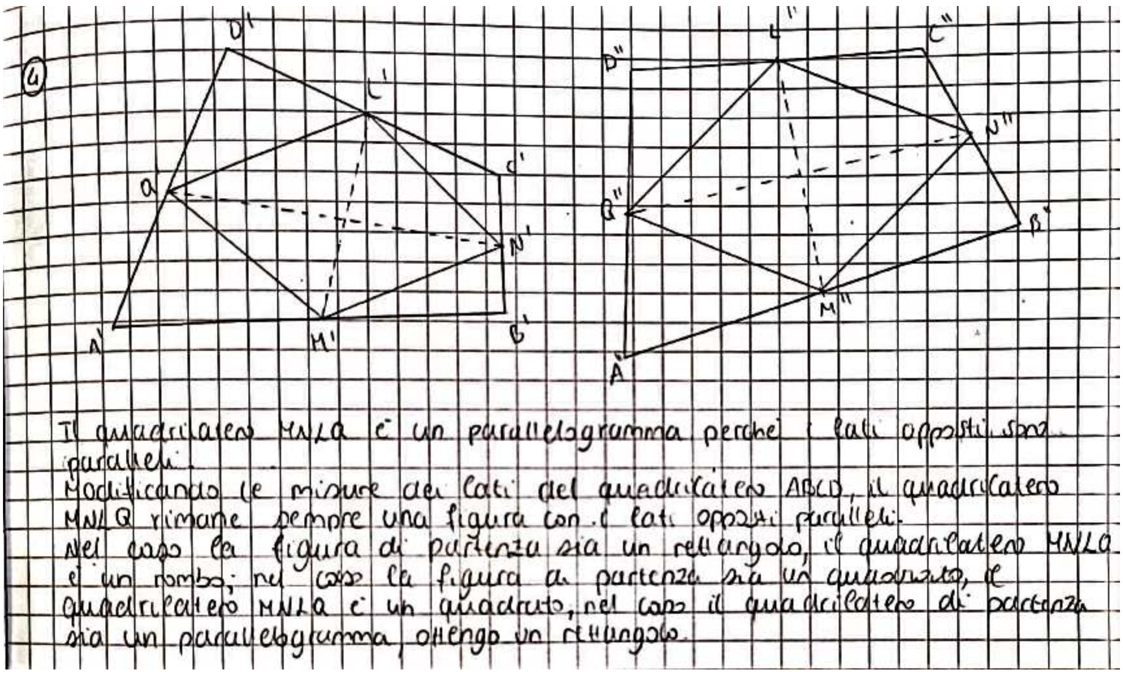


Figura 3.4

Anche l'immagine presente in Figura 3.4 è un ottimo esempio di risposta degli studenti al quarto quesito della scheda. In questo caso l'alunno è riuscito inoltre a distinguere due casi particolari dal caso generale, sempre servendosi della funzione di trascinamento.

La Figura 3.5 rappresenta invece il più tipico errore emerso durante l'attività laboratoriale (tuttavia non molto frequente fra gli alunni). Un numero ristretto di allievi non è riuscito a generalizzare le osservazioni fatte tramite il software, soffermandosi solo su alcuni casi particolari, e non riuscendo a congetturare la proprietà corretta. Si tratta di un tipico errore fra gli studenti del primo biennio della Scuola secondaria

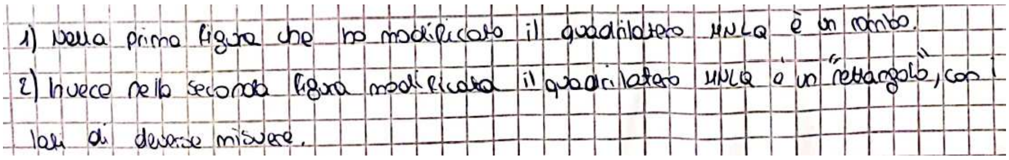


Figura 3.5

di II grado, che non sempre riescono a visualizzare le proprietà più generali e che si soffermano dunque sui casi particolari che riescono ad osservare dal testo di un problema o da una rappresentazione grafica.

Figura 3.6

Anche l'ultima immagine, in Figura 3.6, contiene l'errore sopra citato. È stata scelta tuttavia poiché riporta la più comune risposta data dagli studenti alla domanda numero 6. Gli studenti infatti, dopo aver congetturato correttamente, si sono resi conto di non essere in grado di giustificare o di fornire una spiegazione di quanto affermato. Dalla discussione provocata nella classe, è emersa la necessità di fornire una dimostrazione per giustificare le proprietà intuite e congetturate dagli studenti. È stato dunque possibile concludere che l'attività ha avuto gli esiti previsti, generando auspicabilmente in molti studenti il bisogno e la necessità di dimostrare.
La ricercatrice ha successivamente spiegato alla classe di non poter fornire in quel momento una dimostrazione, in quanto gli studenti non erano ancora in possesso di tutte le conoscenze per comprenderla, e promettendo però che entro la fine dell'anno scolastico avrebbero potuto disporre di una dimostrazione del fatto congetturato.

Si riportano in seguito alcuni dei commenti lasciati dagli studenti nel Questionario conclusivo (si veda Appendice A) in risposta alla domanda numero 5 "Cosa ne pensi dell'attività svolta in laboratorio di informatica sulla dimostrazione?"

Mi ha incuriosito perché:

- "è stata una nuova esperienza che mi ha aiutato a capire meglio come impostare ipotesi e tesi";
- "ho potuto ragionare guardando la figura";

- "mi è piaciuto provare a dimostrare una cosa che non conoscevo e fare delle ipotesi";
- "è stata un'attività diversa dal normale";
- "mi ha aiutato nella comprensione delle proprietà di una figura".

È stata utile perché:

- "penso sia il modo migliore per dimostrare un teorema e capirlo";
- "ho capito come fare una dimostrazione";
- "mi ha aiutato a capire come le figure possono variare rimanendo simili";
- "mi ha permesso di compiere alcune osservazioni che senza lo strumento digitale non avrei trovato";
- "riesco meglio a fare il disegno".

Attività 5:
La sperimentazione è proseguita con l'osservazione della classe alla proposta di un numero sempre maggiore di proposizioni da dimostrare. Frequentemente la professoressa ha lasciato che gli studenti autonomamente rappresentassero con un disegno il testo della proposizione, successivamente ha spiegato la dimostrazione e consegnato alla classe alcuni file su Classroom in modo tale che gli studenti potessero rileggere le dimostrazioni svolte, studiarle e correggere gli appunti presi. La professoressa inoltre ha sempre caricato gli svolgimenti delle dimostrazioni assegnate per casa, in modo tale che gli studenti potessero controllarle e studiarle nel caso non riuscissero a svolgerle in autonomia e in modo tale che imparassero un metodo.
Gli errori e le difficoltà maggiormente osservate nel momento della correzione delle dimostrazioni autonomamente svolte dagli alunni sono:

- aggiungere ipotesi non presenti nel testo del teorema o della proposizione da dimostrare;
- difficoltà a verbalizzare quanto intuito;
- difficoltà ad individuare le ipotesi meno evidenti (ad esempio che un punto giace su un segmento);
- difficoltà nello scrivere le ipotesi con simboli matematici (per gli studenti è più facile scriverle a parole).

Durante questa quinta fase della sperimentazione la professoressa ha introdotto i primi due criteri di congruenza dei triangoli.
Tuttavia, durante la maggior parte di questa quinta fase della sperimentazione la

classe si trovava in D.A.D. [6], a causa della presenta di alcuni alunni risultati positivi al virus SARS-CoV-2. Le lezioni sono dunque state adattate a questa situazione di emergenza e sono state svolte con l'ausilio della LIM: la ricercatrice e la professoressa si trovavano in classe e utilizzavano la LIM per scrivere, gli alunni invece erano collegati tramite Google Meet e potevano vedere ciò che veniva scritto o disegnato sulla LIM. Sicuramente non si è trattata della situazione ottimale per introdurre un argomento così delicato, tuttavia si è cercato di procedere con la sperimentazione e registrare il maggior numero di osservazioni possibile.

Dopo aver motivato lo studio dei criteri di congruenza (i quali permettono di poter stabilire la congruenza di due triangoli conoscendo soltanto la congruenza di 3 elementi dei triangoli, fra angoli e lati, di cui almeno un lato), la professoressa ha svolto la dimostrazione del primo criterio, senza coinvolgere gli studenti. Ha sottolineato inoltre alcune frasi da utilizzare nelle dimostrazioni per aiutare gli studenti a diventare autonomi e acquisire un metodo e ha suggerito di scrivere a sinistra i fatti che riguardano il primo triangolo e a destra quelli del secondo.

Per quanto riguarda la dimostrazione del secondo criterio di congruenza dei triangoli, la professoressa ha inizialmente richiamato il significato di dimostrazione per assurdo, già anticipato all'inizio dell'anno scolastico. Successivamente ha svolto la dimostrazione, inizialmente senza coinvolgere la classe, vista la difficile impostazione della parte iniziale della dimostrazione, successivamente chiedendo agli studenti un'attiva partecipazione nell'osservazione della figura e nel proseguo della dimostrazione. Gli studenti, nonostante fossero collegati da casa, hanno risposto con partecipazione alle domande della professoressa. Hanno inoltre richiesto alla docente di riportare per iscritto alla lavagna ogni osservazione e passo della dimostrazione: questo denota l'esigenza di acquisire un metodo e un linguaggio specifico, di cui gli studenti si rendono conto di essere carenti.

Si può concludere che l'approccio utilizzato dalla docente è quello tradizionalmente proposto nei libri di testo per il primo biennio della Scuola secondaria di II grado. In accordo con le ricerche in ambito didattico, forse si potrebbe proporre un approccio maggiormente graduale all'argomento, che non preveda unicamente un laboratorio, degli esercizi graduali e l'utilizzo di GeoGebra. Nonostante ciò è lodevole la scelta della professoressa di non tagliare la dimostrazione dal programma di matematica e di insegnarla ai propri studenti.

Un approccio di spiegazione maggiormente graduale è stato sperimentato durante la spiegazione del *Teorema diretto del triangolo isoscele*: inizialmente è stato proposto alla classe un file GeoGebra tramite cui osservare, mediante la funzione di trascinamento, le proprietà invarianti di un generico triangolo isoscele. Senza enunciare il testo del teorema, si è richiesto agli studenti di proporre alcune congetture. Non è stato difficile per gli alunni congetturare che gli angoli alla base di un triangolo isoscele fossero sempre congruenti. Una volta congetturata la proprietà corretta, sono state scritte le ipotesi e la tesi (con l'ausilio dei colori), infine si è proceduto

[6]Didattica a distanza

con la scrittura rigorosa della dimostrazione.
Il coinvolgimento attivo della classe e l'invito a congetturare ha sicuramente incuriosito gli studenti ed evitato che la lezione risultasse noiosa. Affermare che questo tipo di attività abbia effettivamente "fatto la differenza" nel percorso di avvio alla dimostrazione intrapreso dalla classe è probabilmente eccessivo: sarebbe necessario adottare un approccio graduale in un periodo più prolungato e con attività continuative e meno sporadiche. Tuttavia dal questionario finale proposto durante la sesta attività sono emersi degli esiti positivi della sperimentazione, che auspicabilmente è risultata utile alla classe.

Attività 6:
Verranno presentati in seguito e brevemente commentati i risultati del questionario conclusivo:

Figura 3.7

Un primo dato emerso dall'analisi del questionario conclusivo è quanto si può leggere dall'istogramma in Figura 3.7: l'atteggiamento della maggior parte degli studenti, quando si apprestano a dimostrare una proposizione, è positivo e sono incuriositi e fiduciosi di trovare una soluzione. Questa osservazione non può tuttavia riferirsi all'intera classe, in cui vi sono studenti che non si sentono motivati e incontrano difficoltà ad affrontare una dimostrazione.

Le attività di argomentazione e congettura, seppur in numero limitato, sembrerebbero aver dato degli esiti positivi: gli studenti ne hanno riconosciuto l'utilità e talvolta questo tipo di attività ha aumentato la loro curiosità e interesse circa il compito che stavano svolgendo (si veda Figura 3.8)

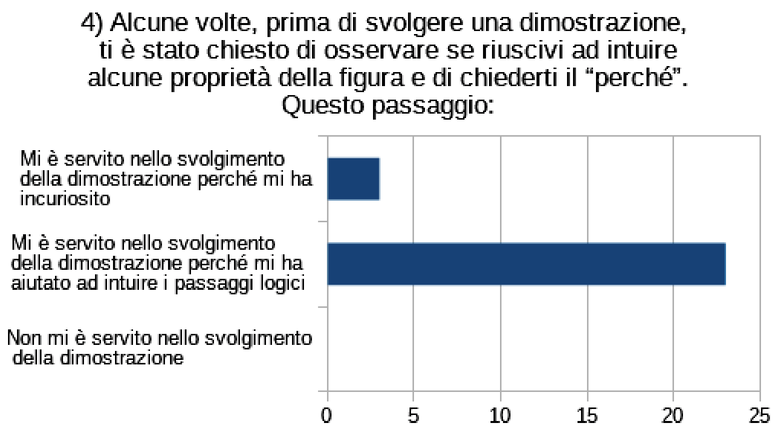


Figura 3.8

Figura 3.9

Come già riportato in precedenza, l'attività che probabilmente ha avuto l'esito più positivo e che permette di conseguenza di ricavare maggiori informazioni de questa sperimentazione è l'attività svolta in laboratorio di informatica. Sono già state riportate le opinioni scritte dagli studenti a riguardo, ma in figura 3.9 si possono vedere anche le loro risposte in forma "chiusa". Il laboratorio si è rivelato utile sotto molti punti di vista: ha avvicinato gli studenti all'uso di GeoGebra, ha generato in molti studenti il bisogno e la necessità di dimostrare, ha insegnato un metodo e ha motivato la classe rispetto al dimostrare.

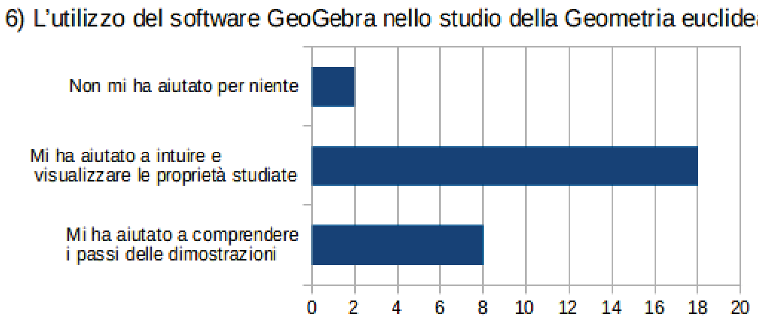


Figura 3.10

Anche l'utilizzo di GeoGebra, come dimostrato dell'istogramma in Figura 3.10, ha avuto gli esiti previsti: gli studenti sono stati aiutati nella visualizzazione delle proprietà e nella comprensione delle dimostrazioni. Da quanto emerso durante l'attività laboratoriale, sembrerebbe inoltre che l'utilizzo del software (in combinazione a dei problemi posti in forma aperta) possa motivare alla dimostrazione.
Sicuramente è sconsigliato un utilizzo esclusivo dei software di geometria dinamica: esso va usato in aggiunta e non in sostituzione della manualità del disegno con riga e compasso.

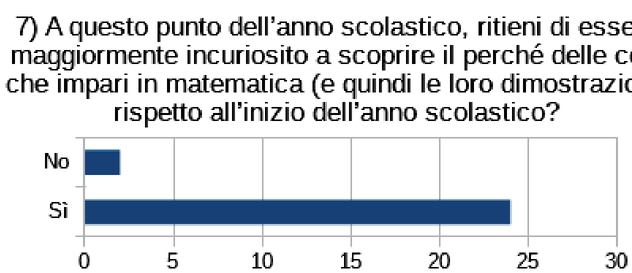


Figura 3.11

In conclusione si può ipotizzare che le attività di argomentazione e congettura proposte, il problema aperto e l'utilizzo di GeoGebra abbiano contribuito, come già affermato, ad aumentare la curiosità e l'interesse degli studenti, come visibile in Figura 3.11.

Come già anticipato, vi è la consapevolezza che il lavoro proposto a questa classe non sia sufficiente e che sarebbe necessario un percorso che sia più graduale di avvio alla dimostrazione. Ciò è evidenziato dalle risposte degli studenti alla domanda 8 del questionario conclusivo: più della metà della classe non sente ancora sempre l'esigenza di dare una spiegazione e dunque dimostrare le proprietà geometriche notate.

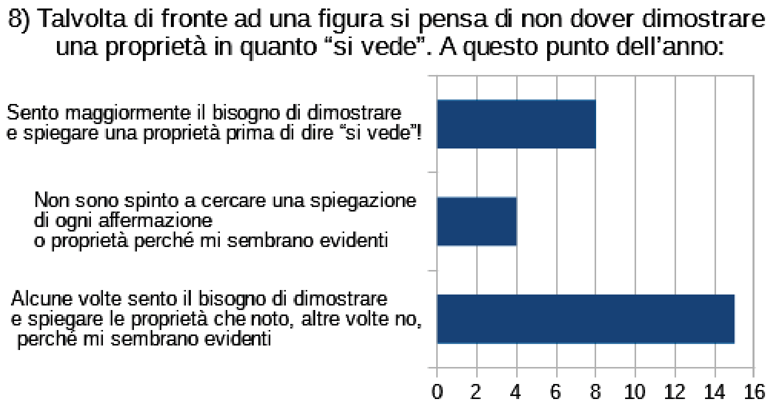


Figura 3.12

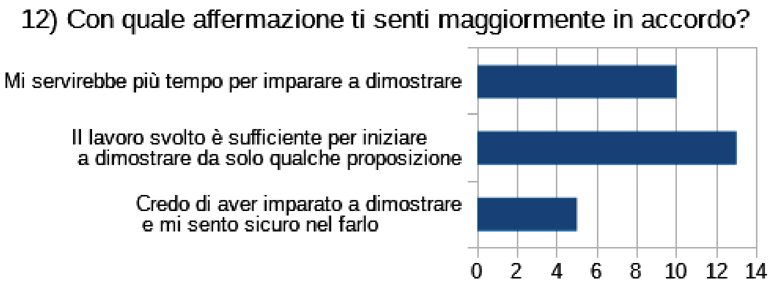


Figura 3.13

Anche la domanda 12 conferma quanto scritto sopra: gli studenti ammettono di aver bisogno di più tempo per imparare a dimostrare. Ci si aspettava tuttavia un simile risultato: è normale che gli studenti, a metà Dicembre del primo anno di Scuola secondaria di II grado, non si sentano ancora sicuri e non abbiano ancora tutte le conoscenze per dimostrare con fiducia ogni proposizione proposta.
Nonostante ciò sembrerebbe che la sperimentazione abbia comunque avuto un'influenza positiva sull'apprendimento della dimostrazione.

L'implementazione del progetto si è conclusa a metà Dicembre, tuttavia la classe ha proseguito con la docente il percorso di avvio alla dimostrazione. A conclusione del capitolo G2 *I triangoli* del libro di testo [7], è stata svolta una verifica (realizzata dalla professoressa), contenente quattro tipologie di esercizi dimostrativi, di graduale difficoltà:

1. disegnare la figura che rappresenti l'enunciato di un teorema proposto e scrivere le ipotesi e le tesi;
2. scegliere la proposizione corretta, a partire dal disegno;
3. svolgere una dimostrazione guidata;
4. svolgere una dimostrazione in completa autonomia.

La professoressa ha riferito che la verifica ha avuto dei risultati molto positivi: la maggior parte della classe ha superato la prova in modo più che sufficiente.

Gli esiti sembrerebbero essere stati migliori rispetto alle aspettative della docente, probabilmente a significato che la sperimentazione sia riuscita effettivamente ad influire sul percorso di apprendimento della classe.

3.1.3 Bilancio e riflessioni finali

Complessivamente, il progetto si è rivelato efficace. I risultati conseguiti nella verifica finale e i dati raccolti attraverso il questionario conclusivo hanno restituito l'immagine di una classe che ha appreso i contenuti presentati e ha sviluppato delle competenze centrali per il proseguimento del percorso scolastico.
Gli obiettivi dell'indagine erano sicuramente ambiziosi, tuttavia i risultati finali e le osservazioni svolte nel corso del progetto hanno evidenziato un aumentato interesse della classe nei confronti dell'argomento e un miglioramento nella produzione autonoma di dimostrazioni. In particolare, molto positive sono state le osservazioni effettuate durante l'attività laboratoriale, tramite cui la classe sembrerebbe aver compreso la necessità di dimostrare e sia rimasta incuriosita e motivata a svolgere esercizi dimostrativi.
La stessa professoressa si è espressa positivamente riguardo all'attività: l'ha trovata molto interessante, notando essa stessa il coinvolgimento degli studenti e le domande che la tipologia di problema ha fatto sorgere negli alunni, affermando di voler riproporre simili attività nelle classi in cui avrebbe insegnato.
Si può dunque concludere che la rivalutazione della congettura, la proposta di problemi aperti e l'utilizzo del software si siano rivelati validi strumenti per un percorso di avvio alla dimostrazione.
Tuttavia, l'aver constatato che gli stessi studenti ammettessero di necessitare di maggior tempo per imparare a dimostrare e le difficoltà a percepire sempre la necessità della dimostrazione (in quanto strumento necessario per validare una proprietà osservata e non semplice esercizio assegnato dalla professoressa), porta a concludere che sarebbe necessario un percorso ancora più graduale di avvio alla dimostrazione.
La sperimentazione, inoltre, è stata svolta su un piccolo campione di studenti e non è stato possibile attuare il progetto nelle molteplici realtà scolastiche esistenti. Sarebbe interessante allargare la sperimentazione ad indirizzi di studio differenti, al fine di verificare se le conclusioni cui si giunge sono le medesime. Inoltre, ampliare il bacino di studenti all'interno della sperimentazione permetterebbe di effettuare un confronto tra le classi che si attengono ad un percorso più tradizionale e le classi che invece prendono parte al progetto, riuscendo ad ottenere possibilmente risultati maggiormente oggettivi sull'effettiva utilità degli strumenti sopra citati.
Sarebbe infine interessante proporre in un simile percorso sulla dimostrazione non solo in ambito geometrico: si potrebbero proporre dimostrazioni aritmetiche e algebriche e verificare quanto in tal caso migliori (oppure no) l'approccio degli studenti alla dimostrazione.

3.2 Indagine in una classe terza Liceo Scientifico

3.2.1 Il progetto

- **Obiettivi del progetto:** nella scuola italiana, per tradizione e come riportato nelle *Indicazioni Nazionali* (2010) [35], la dimostrazione si affronta nel I biennio della scuola secondaria di secondo grado in geometria e nel II biennio e V classe, seppur inferiormente, anche in analisi. Il carattere di questo studio è spesso di tipo riproduttivo, a causa del poco tempo a disposizione e della difficoltà dell'argomento.
  L'obiettivo dell'indagine, forse un po' ambizioso, è di sperimentare un *percorso di avvio graduale alla dimostrazione*, in cui si possa trasmettere agli studenti la *necessità della dimostrazione*, in particolare l'*esigenza di porre degli assiomi, di organizzare in modo rigoroso le deduzioni e di utilizzare un linguaggio opportuno e specifico della disciplina.*
  In particolare riferimento alla classe terza del secondo biennio di Liceo Scientifico, si vorrebbe provare a *trasmettere* agli studenti che *la dimostrazione non è uno "strumento" proprio soltanto della geometria euclidea, bensì di tutti gli ambiti della matematica*, quindi anche dell'algebra, della geometria analitica, dell'analisi, ecc... Si vorrebbe inoltre provare a *capire quale sia l'idea che gli studenti hanno di "dimostrazione"* a questo punto del loro percorso scolastico e *sottolineare l'importanza* che ha quest'ultima in matematica.

- **Struttura del progetto:** Il progetto iniziale prevedeva di inserirsi nel programma di aritmetica e algebra di una classe del primo biennio o di una quarta superiore, per introdurre la dimostrazione aritmetica e algebrica, cercando dunque di eliminare la credenza diffusa che la dimostrazione sia uno strumento esclusivamente geometrico. Non trovando un docente e una di queste classi disponibili ad accogliere il progetto, esso è stato modificato adattandosi al programma di una classe terza, in particolare al programma di Geometria analitica. In questo caso si tratta comunque e sempre di Geometria, dunque è più difficile centrare l'obiettivo della sperimentazione, tuttavia le dimostrazioni di Geometria analitica sono molto algebriche, sebbene ci sia ancora il riferimento alle figure.
  In generale sarebbe auspicabile attuare la sperimentazione che sarà descritta in seguito nel momento in cui la classe inizia a studiare la Geometria analitica.
  Il progetto può essere suddiviso in tre fasi distinte. Obiettivo della prima fase è avere informazioni sul livello della classe e sulle conoscenze e idee che gli studenti hanno sulla dimostrazione.
  Obiettivo della seconda fase è introdurre la dimostrazione in geometria analitica, servendosi in particolare di strumenti come l'argomentazione e la congettura, l'utilizzo di un software di geometria dinamica e la proposta di un laboratorio di informatica.
  Infine, obiettivo della terza fase è raccogliere informazioni, tramite un questionario e una verifica, circa gli esiti della sperimentazione, rispondendo ai quesiti di ricerca scritti a inizio capitolo.

- **Durata del progetto:**: circa 12 ore, di cui 8 di tipo osservativo e 4 di tipo attivo, da svolgere in accordo con la/il docente accogliente di classe.

Verranno di seguito presentati i contenuti di ciascuna attività, fornendo precise indicazioni rispetto ai tempi di realizzazione e i materiali da impiegare. Le seguenti schede rappresentano quindi la programmazione delle attività in cui è strutturato il progetto, e possono essere impiegate per riproporre tale sperimentazione. È possibile consultare i file con i materiali necessari per la realizzazione delle varie attività nell'apposita Appendice B.

Attività 1: Osservazione della classe e somministrazione questionario iniziale

Durata: 1 ora di tipo osservativo.

Struttura e Obiettivi: La prima attività prevede:

- un periodo di osservazione con lo scopo di conoscere la classe;
- la successiva somministrazione di un questionario iniziale che permetta di *capire quale sia l'idea che hanno gli studenti sulla dimostrazione a questo punto del loro percorso scolastico e se la vedano come oggetto relativo esclusivamente all'ambito geometrico (nel I biennio), oppure no.* Si potrebbe inoltre indagare quanto è stata presente la dimostrazione nel percorso scolastico degli studenti, quante e quali dimostrazioni ricordano di aver studiato, cosa hanno trasmesso loro gli insegnanti sull'argomento "Dimostrazione in matematica".
Il test sarà cartaceo, a risposte multiple (chiuse) e aperte e non verrà valutato. Verrà consegnato e svolto interamente in aula in circa 15 minuti;

Materiale occorrente: il questionario iniziale presente in Appendice B.

Attività 2: La dimostrazione in Geometria analitica

Durata: 10 ore, in parte di tipo osservativo, in parte di tipo attivo.

Struttura e Obiettivi: la seconda attività prevede di:

- osservare la classe con lo scopo di cercare di *capire se nei programmi di introduzione alla Geometria analitica e nel libro di testo adottato [8] siano presenti delle dimostrazioni* e, in caso affermativo, se queste siano rese esplicite o rimangano "nascoste". Inoltre si vorrebbe cercare di *capire se gli alunni siano consapevoli* che le eventuali dimostrazioni "nascoste" sono effettivamente *delle dimostrazioni* e come giustificherebbero tale consapevolezza;
- inserirsi durante le spiegazioni con dei brevi interventi (concordati precedentemente con la/il docente) con lo scopo principale di cercare di *trasmettere agli*

studenti che i procedimenti studiati per ricavare la formula della distanza tra i punti, le formule del punto medio di un segmento, la formula del baricentro di un triangolo, l'equazione di una retta, ecc. *sono effettive dimostrazioni*, con delle ipotesi e una tesi, al pari di quelle studiate nel primo biennio in geometria euclidea (anche se più aritmetico-algebriche).
Si potrebbero dunque esplicitare i vari passaggi logici di queste dimostrazioni (o alcune di queste) e chiarire quali teoremi si usano ed eventualmente quali postulati della geometria e proprietà algebriche. Si potrebbe utilizzare il software **GeoGebra** per questi brevi interventi, invitando alla partecipazione attiva da parte degli studenti.

- assegnare agli studenti degli esercizi argomentativi proposti dal loro libro di testo (uno a settimana, la cui difficoltà sarà pesata sulla base di quanto studiato precedentemente), chiedendo loro di consegnarli su Classroom. In questo modo potrebbe essere più facile osservare i miglioramenti e/o le difficoltà degli alunni.

Materiale occorrente: Il libro di testo [8], una LIM collegata ad un dispositivo in cui è stato scaricato GeoGebra[7] e dei files GeoGebra già pronti a supporto delle dimostrazioni che si intendono spiegare.

Attività 3: Laboratorio di matematica. "È possibile dimostrare il teorema di Pitagora per via analitica?"

Durata: 2 ore di tipo attivo.

Struttura e Obiettivi: l'attività verrà svolta in **laboratorio di informatica**.
Si chiede agli studenti se sia possibile dimostrare il Teorema di Pitagora analiticamente e, con gli strumenti a loro disposizione, si cerca di svolgere assieme (o in autonomia in base al livello della classe) la "dimostrazione", possibilmente con il supporto del software **GeoGebra**.
Successivamente si chiede loro se effettivamente si tratti di una dimostrazione, si attendono le loro risposte e si fa loro notare che, nonostante i calcoli siano tutti corretti e la scelta del sistema di riferimento sia abbastanza generica, non si tratta in realtà di una dimostrazione corretta. Il punto debole del ragionamento sta nel fatto che nella "dimostrazione" è stata usata la formula cartesiana della distanza fra i punti, formula la cui validità poggia per l'appunto sul Teorema di Pitagora (e quindi sui postulati di Euclide, in particolare il V). Si è quindi in presenza di un circolo vizioso.
L'attività potrebbe essere svolta con l'ausilio di una scheda di lavoro su cui riportare risultati e osservazioni e di un pc, permettendo quindi a ciascuno studente di lavorare su GeoGebra.
Gli obiettivi della lezione sono molteplici: *osservare se gli studenti sappiano svolgere autonomamente i passaggi logici della "falsa dimostrazione" e se la svolgano con spirito critico* (chiedendosi se i passaggi sono tutti corretti o non ponendosi alcun quesito e svolgendola "meccanicamente"). Si vorrebbe inoltre provare a *trasmettere*

[7] È preferibile scaricare la versione 5 del software

loro che *non è possibile dimostrare il teorema di Pitagora analiticamente* perché la geometria analitica ha i suoi fondamenti nella geometria euclidea e nelle proprietà degli insiemi numerici che si studiano in aritmetica e algebra.

Materiale occorrente: un pc/tablet per studente, GeoGebra versione 5 classica, la scheda di lavoro presente in Appendice B e il file GeoGebra associato.
Si consiglia di effettuare in anticipo le seguenti azioni:

- Menu Opzioni → Etichettatura → Solo i nuovi punti;
- Menu Opzioni → Dimensione del carattere: 16 o 18 pt;
- Menu visualizza → Grafici;
- Nascondi griglia;
- Mostra gli assi
- Terminate queste impostazioni, scegliere Menu Opzioni → Salva impostazioni.

Attività 4: Verifica e questionario conclusivi

Durata: 2 ore.
Struttura e Obiettivi: verrà somministrato agli studenti un questionario conclusivo, atto a verificare se siano in grado di collegare ciò che abbiamo loro proposto, se abbiano sviluppato una visione maggiormente critica del processo dimostrativo e se abbiano appreso i concetti spiegati. In particolare il questionario indagherà su:

- la consapevolezza degli studenti circa le dimostrazioni effettuate durante l'indagine;
- la consapevolezza degli studenti circa i fondamenti delle dimostrazioni e formule studiate;
- la consapevolezza degli studenti che le dimostrazioni si effettuino in ogni ambito della matematica (e anche in altre discipline, come la fisica);
- l'interesse/la curiosità circa la dimostrazione;
- il bisogno/la necessità di produrre dimostrazioni;
- l'importanza dell'utilizzo di software di geometria dinamica;
- l'importanza dello studio di dimostrazioni algebriche (e non solo geometriche).

Si potrebbe inoltre inserire nella verifica di fine capitolo uno o due esercizi dimostrativi per osservare i possibili miglioramenti e l'approccio alla dimostrazione al termine dell'intervento.

Materiale occorrente: il questionario conclusivo presente in Appendice B.

3.2.2 L'implementazione del progetto

La classe candidata frequenta l'indirizzo Scientifico ordinario ed è composta da 21 alunni, di cui 12 ragazze e 9 ragazzi. L'implementazione del progetto presso la suddetta classe terza del Liceo Ginnasio Statale "Giorgione" di Castelfranco Veneto è stata effettuata durante il primo quadrimestre, ed è proseguita complessivamente per un mese e mezzo (da inizio novembre a metà dicembre), durante il quale il progetto veniva portato in classe tre volte la settimana, in incontri da un'ora ciascuno.

Attività 1:
Nel corso del primo incontro con la classe è stato somministrato un questionario iniziale (si veda Appendice B), atto a capire quale fosse l'idea che avevano gli studenti sulla dimostrazione a quel punto del loro percorso scolastico, se la vedessero come oggetto relativo esclusivamente all'ambito geometrico, oppure no, e quanto fosse stata presente la dimostrazione nel loro percorso scolastico.

I risultati ottenuti tramite il Test d'ingresso sono illustrati in seguito.

Alla domanda numero 2, "A cosa serve una dimostrazione?", gli studenti hanno risposto in questo modo (si riportano le risposte più frequenti e più significative):

- serve a provare una tesi, a verificare un teorema;
- spiega alcuni fenomeni attraverso il ragionamento o la logica;
- serve a determinare certe caratteristiche specifiche di una figura piana;
- formulare degli assiomi/teoremi;
- serve a spiegare delle regole e chiarire alcuni concetti di quella materia;
- per arrivare a rispondere alla domanda del teorema;
- dare un senso ai procedimenti che si fanno per arrivare alla soluzione di un quesito;
- per spiegare quelle cose che noi sappiamo essere vere e che quindi diamo per scontate, ma non sappiamo il perché siano così;
- dimostrare qualcosa che non è facilmente intuibile.

Le risposte più significative alla terza domanda, "Perché si utilizzano processi dimostrativi in Matematica?" sono state invece:

- per comprendere i passaggi, secondo i quali si può constatare qualcosa;
- per essere certi della correttezza di una tesi, ma anche per verificare i passaggi o il risultato finale di una formula;

- per illustrare i passaggi/ragionamenti utilizzati per giungere ad una determinata conclusione;
- per capire i teoremi e da dove derivano sulla base di assiomi o di qualcosa studiato in precedenza;
- per riuscire a dare spiegazioni;
- per teorizzare e comprendere meglio alcuni processi che possono apparentemente risultare astratti e complessi;
- per determinare delle caratteristiche comuni a tutto un gruppo di figure o di solidi.

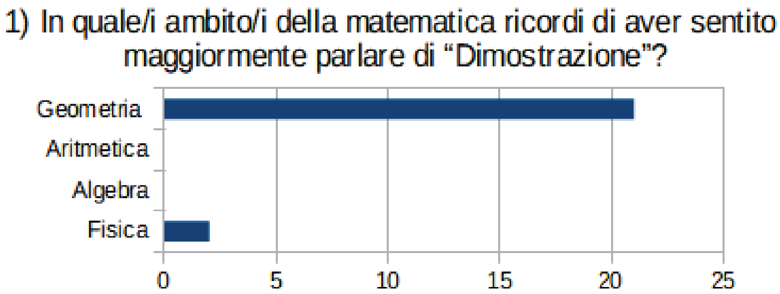


Figura 3.14

Come ipotizzato, la quasi totalità della classe ricorda di aver sentito parlare di dimostrazione solo in Geometria euclidea (si veda Figura 3.14). Probabilmente le sole dimostrazioni incontrare dagli studenti nel primo biennio sono quelle studiate in Geometria. Alcuni studenti ricordano tuttavia di aver sentito parlare di dimostrazione anche in Fisica.

Come conseguenza di quanto emerso in Figura 3.14, l'istogramma in Figura 3.15 rende evidente il fatto che, se ad una classe viene presentata la dimostrazione esclusivamente in ambito geometrico, la maggior parte degli studenti si convincerà del fatto che si possano svolgere solamente dimostrazioni geometriche.

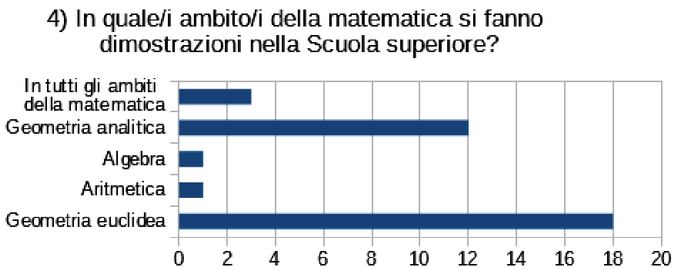


Figura 3.15

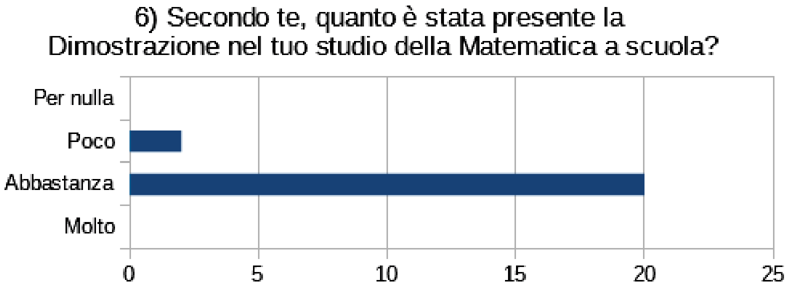


Figura 3.16

Nonostante la constatazione del fatto che gli studenti abbiano incontrato quasi esclusivamente dimostrazioni di Geometria euclidea, dal questionario emerge che la dimostrazione sia stata abbastanza presente durante il loro percorso scolastico e che non sia stata "sacrificata" a causa della difficoltà dell'argomento e della tendenza sempre più diffusa a non presentare la dimostrazione nelle classi del primo biennio.

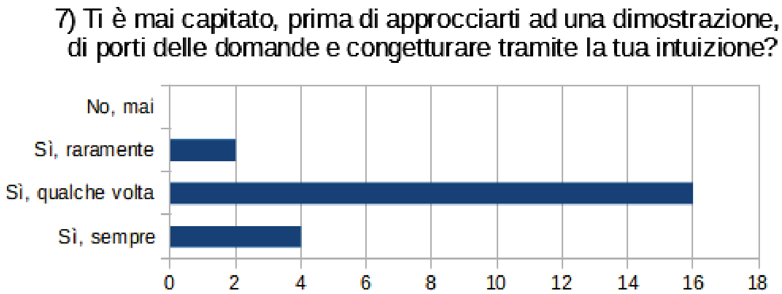


Figura 3.17

Sembrerebbe infine che alla classe sia già stato insegnato a congetturare e porsi domande prima di approcciare una dimostrazione. Nel corso della sperimentazione verrà testata la veridicità delle affermazioni degli studenti.

Dall'osservazione iniziale della classe, emerge inoltre che la classe è molto partecipativa, e che la professoressa è solita fare lezione assieme alla classe, coinvolgendo gli studenti in tutte le spiegazioni.

Attività 2:
Durante le lezioni che hanno composto la seconda fase della sperimentazione, la professoressa e la ricercatrice hanno proposto numerose dimostrazioni di Teoremi (o meglio, Proposizioni) e formule della Geometria Analitica. Ogni dimostrazione è stata svolta con l'ausilio del software GeoGebra, tramite dei file precedentemente preparati dalla ricercatrice e si è cercato di coinvolgere attivamente la classe invitando gli studenti a congetturare o a proporre uno svolgimento per le dimostrazioni.
Si riportano in seguito le dimostrazioni affrontate (o accennate), e le osservazioni raccolte.

- **Formula della distanza fra due punti nel piano cartesiano:** alcuni degli studenti hanno intuito autonomamente che nello sviluppo della dimostrazione sarebbe stato utilizzato il Teorema di Pitagora. Non erano tuttavia consapevoli che quanto spiegato dalla ricercatrice fosse una dimostrazione: è stato necessario sottolinearlo e spiegare che la dimostrazione si fonda sulla Geometria euclidea e sull'Algebra, in particolare sulle proprietà delle operazioni algebriche. I risultati del Questionario iniziale sono dunque stati confermati: inizialmente gli studenti credevano che una dimostrazione dovesse assomigliare solo a quelle svolte in Geometria euclidea nel primo biennio.

- **Coordinate del punto medio:** la ricercatrice ha svolto la dimostrazione cercando di coinvolgere gli studenti (i quali sono stati partecipativi e hanno proposto numerose idee di svolgimento) e ha sottolineato che la dimostrazione sfrutta il Teorema di Talete, alcune proprietà algebriche e la definizione di punto medio. Anche questa dimostrazione si basa dunque sull'Algebra e non solo sulla Geometria euclidea.

- **Coordinate del baricentro:** la professoressa non ha svolto la dimostrazione, tuttavia ha esplicitato che la formula è giustificata da una dimostrazione, specificando anche su cosa si basasse (Teorema di Talete, algebra e proprietà del baricentro).

- **Equazione della retta passante per due punti:** la ricercatrice ha svolto la dimostrazione (che sfrutta il Teorema di Talete e alcune proprietà algebriche) e gli studenti si sono mostrati interessati, facendo domande qualora non avessero capito. La dimostrazione non offriva la possibilità di fare molte congetture, in quanto i passaggi erano poco intuitivi.
La professoressa ha successivamente introdotto i casi particolari dell'equazione generale della retta e l'equazione della retta in forma esplicita. È stato sottolineato che quest'ultima formula non descrive tutte le rette, ovvero non comprende quelle parallele all'asse y, mentre l'equazione in forma esplicita, di cui era stata fornita la dimostrazione, le comprende tutte.

- **Condizione di parallelismo:** in accordo con la professoressa è stato proiettato sulla LIM un file GeoGebra interattivo tramite il quale gli studenti potessero notare che muovendo due rette parallele il loro coefficiente angolare rimane invariato. Gli studenti sono riusciti ad intuire la proprietà e si sono rivelati interessati a vederne una dimostrazione. Successivamente hanno svolto autonomamente l'implicazione inversa contenuta della Proposizione da dimostrare. Infine, assieme alla ricercatrice, la classe ha ragionato sul fatto che si trattasse di una dimostrazione puramente algebrica, a differenza di quelle precedentemente affrontate in cui erano stati usati risultati della Geometria euclidea.
Gli studenti hanno iniziato dunque a comprendere meglio cosa significa che si può dimostrare in ogni ambito della matematica. Hanno inoltre chiesto come sarebbe cambiata la dimostrazione se le due rette fossero state incidenti e non parallele, dimostrando così di essere incuriositi e motivati a dimostrare.
In ultimo, è stato fatto osservare che i teoremi spiegati non valgono per le rette parallele all'asse y, in quanto nelle dimostrazioni veniva utilizzata l'equazione esplicita della retta.

- **Formula della distanza di un punto da una retta:** Sono stati solamente fatti degli accenni alla dimostrazione, e sono stati gli studenti stessi ad intuire cosa venisse sfruttato nello svolgimento della dimostrazione.

- **Equazione dell'asse di un segmento:** la professoressa ha spiegato l'equazione, utilizzando la definizione di asse come luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi di un segmento e imponendo tale condizione analiticamente. Di fatto ha svolto una dimostrazione ma non l'ha mai esplicitato alla classe. Una simile spiegazione è stata data per l'**equazione della bisettrice**.

Durante questa seconda fase della sperimentazione, oltre ad osservare la classe e introdurre nuove dimostrazioni, sono stati assegnati agli studenti dei compiti da svolgere in autonomia, la maggior parte dei quali prevedeva di svolgere autonomamente delle dimostrazioni di Geometria analitica.
Gli errori più frequenti osservati sono stati:

- sostituzione di alcuni valori e semplice verifica della tesi del teorema, senza fare una vera e propria dimostrazione;
- omissione delle ipotesi e della tesi;
- svolgimento della dimostrazione in modo "euclideo", ovvero utilizzando teoremi di Geometria euclidea e non risultati di Geomtria analitica, come da consegna.

Un esempio significativo è il primo compito assegnato agli studenti, ovvero:

"Dimostrare che la distanza di un punto $P(x; y)$ dall'origine è data da $\sqrt{x^2 + y^2}$."

La classe ha svolto l'esercizio in tre modi differenti, di cui soltanto il primo è corretto. Gli errori più frequenti sono stati gli stessi errori sopra citati.

La Figura 3.18 è un esempio di corretto svolgimento della dimostrazione.

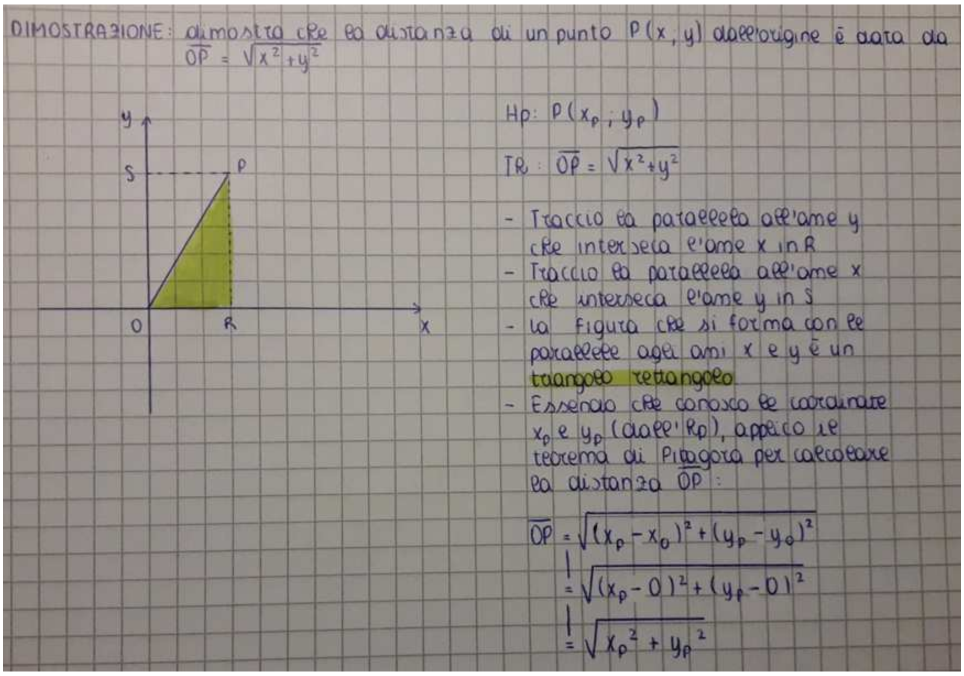


Figura 3.18

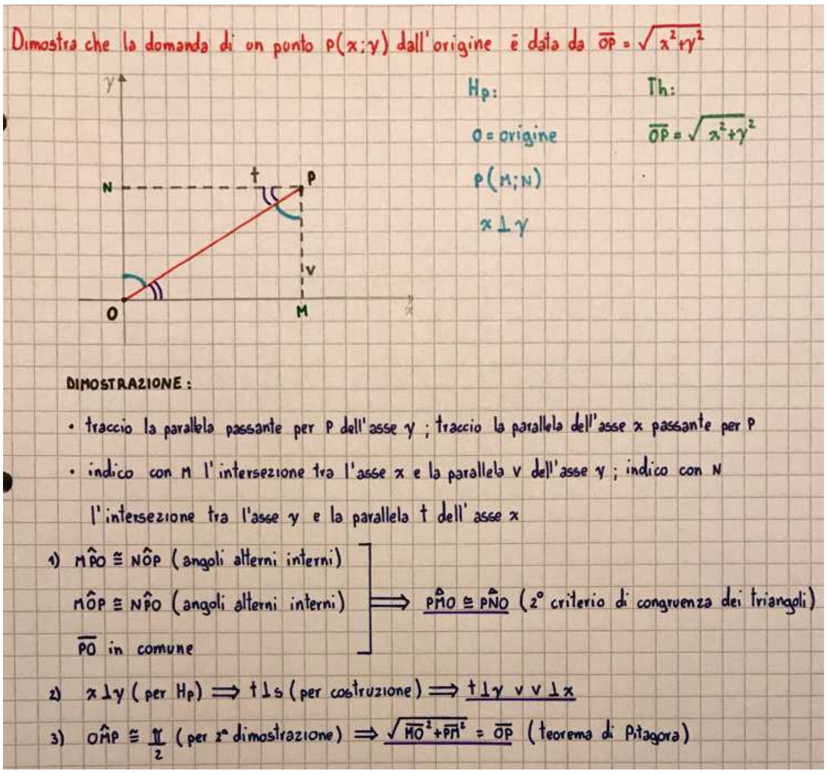


Figura 3.19

La figura 3.19, invece, è un esempio di utilizzo improprio di passaggi tipici di una dimostrazione di Geometria euclidea: probabilmente gli studenti avevano la convinzione di dover utilizzare per forza lo stile di dimostrazione della Geometria euclidea per svolgere correttamente l'esercizio, avendo incontrato nel loro percorso scolastico soltanto dimostrazioni di questo tipo, e non riuscendo di conseguenza a produrre una dimostrazione corretta, che realmente giustificasse la formula della distanza di un punto dall'origine.

Infine, la figura 3.20 rappresenta l'errore più grave (ma anche meno frequente):

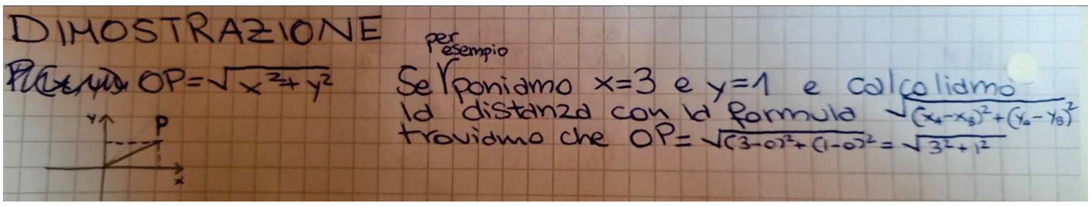


Figura 3.20

alcuni studenti hanno ritenuto di aver svolto una dimostrazione semplicemente verificando che la formula fosse corretta per un numero molto piccolo (uno in questo caso) di esempi numerici.

Si è notato, tuttavia, che il numero degli errori degli studenti è notevolmente diminuito con il passare del tempo e con il proseguire del progetto: verso la fine del progetto quasi la totalità della classe era in grado di svolgere in autonomia e correttamente le dimostrazioni di Geometria analitica assegnate.

Attività 3:
Durante la terza fase della sperimentazione è stata proposta un'attività laboratoriale. Inizialmente si era previsto di svolgerla in laboratorio di informatica, successivamente invece si è ritenuto più conveniente svolgere l'attività in classe (per non perdere troppo tempo negli spostamenti dalla succursale alla sede centrale della scuola).

Ad ogni studente è stata consegnata la Scheda di lavoro presente in Appendice B, che interrogava gli alunni sulla possibilità o meno di dimostrare il Teorema di Pitagora per via analitica. Dopo aver spiegato il tipo di attività, gli studenti sono stati lasciati lavorare individualmente, per poi raccogliere in un momento successivo le risposte date e creare un dibattito.
Durante l'attività indiividuale alcuni studenti hanno chiesto:

- se, per rispondere alle domande, dovessero utilizzare le generiche formule analitiche o dei numeri specifici (la domanda denota la convinzione di alcuni studenti che per dimostrare sia sufficiente verificare numericamente una formula);
- cosa scrivere nelle conclusioni (la domanda denota che alcuni studenti stessero compilando la scheda in modo meccanico, senza chiedersi il perché delle cose che stavano facendo).
- se potessero usare il Teorema di Pitagora (la domanda rivela come alcuni studenti abbiano compreso di dover utilizzare il Teorema di Pitagora e sia sorto in loro il dubbio di non poter utilizzare il Teorema di Pitagora per dimostrare il Teorema di Pitagora).

Alla domanda numero 1:
Il sistema di riferimento scelto è generico?,
buona parte degli studenti ha risposto negativamente, in quanto il triangolo rettangolo raffigurato nella Scheda aveva i cateti paralleli agli assi del piano cartesiano. Le risposte denotano un atteggiamento positivo degli studenti, i quali sanno riconoscere quando un disegno non è generico. In tal caso, tuttavia, il disegno era effettivamente generico ai fini della dimostrazione. Alcuni studenti se ne sono resi conto scrivendo che "non ci sono numeri ma componenti generiche" e che "le coordinate sono le più generiche possibili, non avendoci sostituito specifici valori numerici."
Alla domanda numero 2:
I calcoli sono corretti?,
tutti gli studenti hanno risposto in modo affermativo.
Alla domanda numero 3:
Secondo te, si tratta di una dimostrazione? In caso di risposta negativa, dove sta l'errore a tuo avviso?
11 studenti hanno risposto in modo negativo, perché:

- conoscevo già Pitagora;
- si è usato Pitagora per dimostrare la tesi;

- non dimostra Pitagora in generale bensì un caso particolare di esso, in cui il triangolo ha i cateti paralleli all'asse x e y;
- per ricavare la lunghezza di un lato applico la tesi;
- ho usato la tesi nella dimostrazione, per dimostrarla;
- abbiamo analizzato un caso specifico in cui i due cateti son paralleli agli assi;

Da un'analisi delle risposte risulta che solo pochi studenti abbiano autonomamente intuito che non sia possibile dimostrare il Teorema di Pitagora in via analitica, in quanto si utilizzerebbe la tesi nella dimostrazione.

Durante la discussione è nuovamente emerso che alcuni studenti non ritenessero il sistema di riferimento sufficientemente generico (ma che se fosse stato generico, allora il procedimento avrebbe rappresentato una dimostrazione).
Solo nel momento in cui la ricercatrice ha chiesto esplicitamente cosa avessero utilizzato gli studenti per calcolare la lunghezza dei segmenti, tutta la classe ha realizzato di aver utilizzato la tesi per dimostrare il teorema.
Gli studenti sono rimasti colpiti e incuriositi e hanno posto numerose domande alla ricercatrice. In particolare erano interessati a sapere se in generale si potesse utilizzare la geometria analitica per dimostrare Proposizioni di geometria euclidea e perché in matematica si facesse uso di postulati (gli studenti si chiedevano perché fosse necessario scegliere dei postulati sempre veri, che non si possono dimostrare).
È stata dunque data una breve spiegazione sui fondamenti e sui postulati della Geometria euclidea e della Geometria analitica (che si fonda su quella euclidea e sull'Algebra e che dunque non può essere utilizzata per dimostrare Proposizioni di Geometria euclidea), e sul sistema assiomatico.
Un alunno infine ha chiesto se si potessero cambiare i postulati della Geometria euclidea ed è dunque stato spiegato che esistono altre Geometrie oltre a quella euclidea, ottenute proprio dalla modifica dei postulati di partenza.

In conclusione si può affermare che l'attività ha avuto degli esiti positivi, visto l'interesse generato nella classe nei confronti della dimostrazione e del sistema assiomatico.
Sicuramente l'attività ha evidenziato numerose difficoltà che gli studenti avevano nel dimostrare, a conferma del fatto che spesso sia necessario un avvio maggiormente graduale alla dimostrazione per permettere agli studenti di acquisire maggiore autonomia con i metodi dimostrativi. Nonostante ciò l'attività ha raggiunto lo scopo di far comprendere agli studenti quali fossero i fondamenti della Geometria analitica e la necessità di un atteggiamento critico (e non meccanico) di fronte a un problema dimostrativo.

Attività 4:
Verranno presentati in seguito e brevemente commentati i risultati del questionario conclusivo:

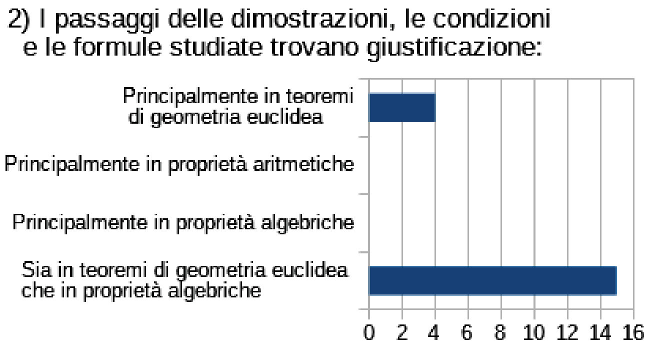


Figura 3.21

Al termine della sperimentazione la quasi totalità della classe ha compreso quali siano i fondamenti della Geometria analitica. Gli studenti hanno compreso che i passaggi delle dimostrazioni studiate o eseguite autonomamente trovano giustificazione non solo in Geometria euclidea, bensì anche in numerose proprietà algebriche.

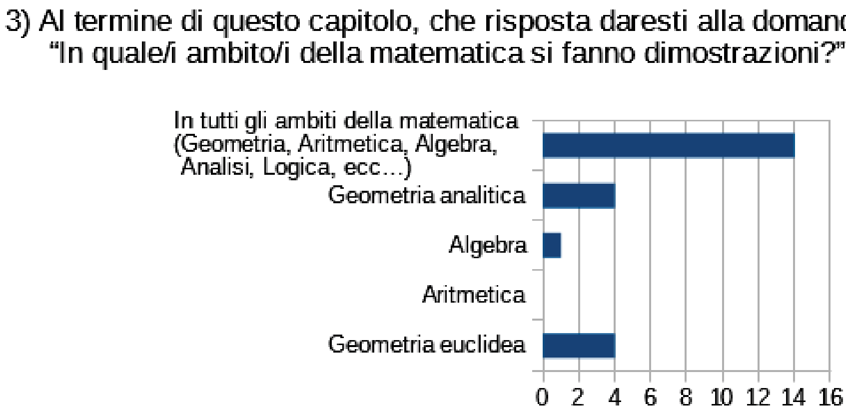


Figura 3.22

Le risposte alla terza domanda del questionario, raccolte nell'istogramma in Figura 3.22, denotano che l'obiettivo principale della sperimentazione è stato raggiunto: confrontando queste risposte con quelle del questionario iniziale si può affermare che vi sia una maggior consapevolezza negli alunni che si possa (anzi si deve) dimostrare in tutti gli ambiti della matematica, e non solo in Geometria euclidea, come la maggior parte della classe credeva a inizio del percorso.

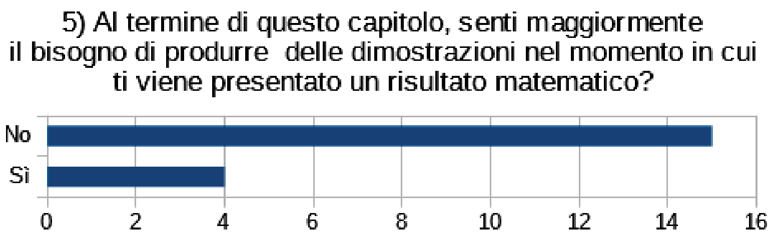


Figura 3.23

L'istogramma in Figura 3.23 apre ad alcune riflessioni: il fatto che gli studenti non si sentano incuriositi e soprattutto non sentano il bisogno di dimostrare, indica la possibile necessità di percorsi maggiormente graduali di introduzione della dimostrazione a scuola, che tramite la proposta di problemi in forma aperta, attività di congettura e utilizzo di strumenti informatici, possano trasmettere agli studenti la necessità di dimostrare e li possano inoltre motivare a farlo. Servirebbe tuttavia più tempo e costanza per proporre percorsi di questo tipo, ma si auspica che questo tipo di sperimentazione possa generare interrogativi e mettere in discussione il lettore, offrendo interessanti spunti per l'insegnamento.

Come già verificato nella sperimentazione effettuala in una classe prima Liceo delle Scienze applicate, il software GeoGebra si è rivelato uno strumento utile e di supporto durante lo svolgimento delle dimostrazioni.

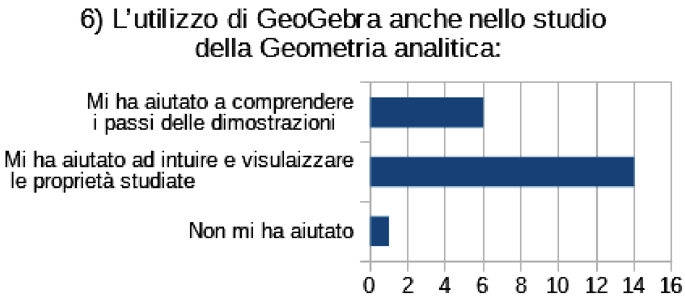


Figura 3.24

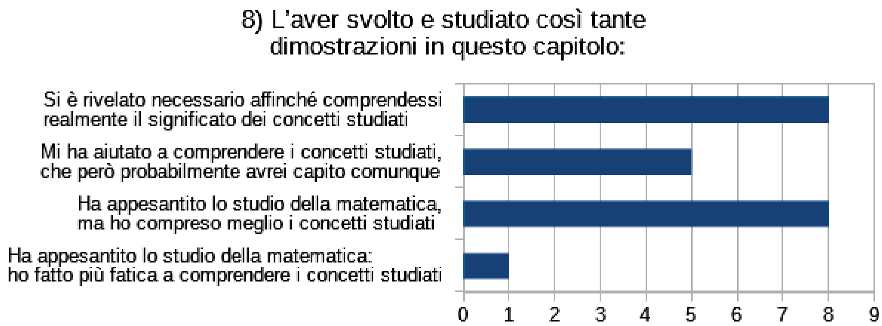


Figura 3.25

Anche le risposte alla domanda numero 8, così come quelle alla domanda numero 6, offrono spunti di riflessione circa la necessità di un lavoro più strutturato di avvio alla dimostrazione. Gli studenti riconoscono l'utilità dello strumento, tuttavia a volte trovano pesante dover dimostrare. Forse si potrebbe ridurre il numero di dimostrazioni proposte durante la sperimentazione, senza tuttavia rinunciare a utilizzare la dimostrazione anche in quest'ambito della matematica.

Si riportano infine alcune fra le risposte più significative degli studenti all'ultima domanda del questionario conclusivo, ovvero:
Cosa ti è rimasto maggiormente impresso di questo intervento mirato sulla dimostrazione?

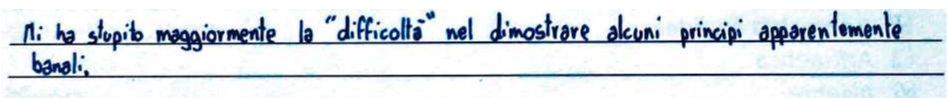


Figura 3.26

che spesso ci vengono date delle formule che siamo costretti ad imparare a memoria, senza sapere da dove provengano. Con questo intervento mi è risultato più facile imparare alcune formule, dopo averle dimostrate.
Ho anche capito che tutti la maggior parte di ciò che studiamo è frutto di una dimostrazione.

Figura 3.27

Il fatto che alcune volte diamo per scontato utilizzare delle formule senza sapere la loro "origine", per esempio quando abbiamo compilato il questionario sulla dimostrazione di pitagora che senza rendercene conto abbiamo usato la formula per dimostrare la formula che dovevamo dimostrare. Quel questionario mi ha fatto pensare molto

Figura 3.28

Ho capito che si possono fare dimostrazioni in tutti gli ambiti della matematica, mentre prima pensavo si potesse solo nella geometria euclidea.
Mi è risultato più semplice capire il perché di certe formule senza darle per scontate.

Figura 3.29

Il fatto che molto spesso risolviamo esercizi dimostrandoli pur non rendendocene conto

Figura 3.30

Per comprendere meglio i concetti è stato molto utile dimostrare alcune cose.
le dimostrazioni possono quindi aiutare ad acquisire maggiormente i concetti, ma aiuta anche a sviluppare il ragionamento

Figura 3.31

Mi è rimasto maggiormente impresso il processo per dimostrare. Ho notato che i procedimenti sia scritti che mentali sono migliorati anche in altre materie differenti dalla geometria analitica, ad esempio fisica

Figura 3.32

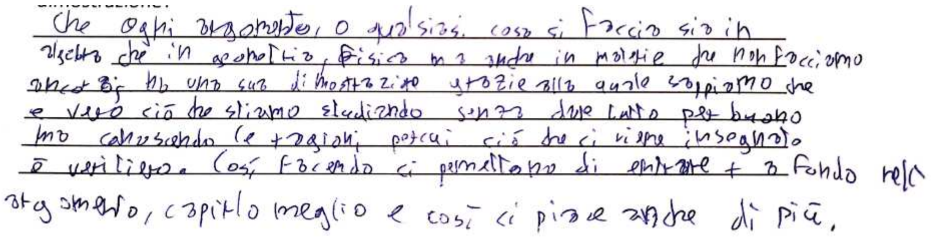

Che ogni argomento, o qualsiasi cosa si faccia sia in algebra che in geometria, fisica ma anche in materie che non facciamo ancora, ha una sua dimostrazione grazie alla quale sappiamo che è vero ciò che stiamo studiando senza dare tutto per buono ma conoscendo le ragioni per cui ciò che ci viene insegnato è veritiero. Così facendo ci permettono di entrare + a fondo nell'argomento, capirlo meglio e così ci piace anche di più.

Figura 3.33

Le risposte degli studenti denotano che la sperimentazione attuata ha sicuramente avuto un'influenza positiva sul percorso di apprendimento della classe.

Per quanto riguarda la verifica svolta dalla classe al termine del capitolo *Il piano cartesiano e la retta* del libro di testo [8], si può affermare che essa non abbia avuto gli esiti desiderati. La verifica conteneva infatti un solo esercizio di tipo dimostrativo, atto a verificare i possibili miglioramenti della classe a termine del percorso proposto. la lunghezza del compito e probabilmente anche la scarsa fiducia degli studenti nell'approcciare una dimostrazione, hanno fatto sì che la maggior parte degli studenti non iniziasse nemmeno a svolgere la dimostrazione. Probabilmente si sarebbe dovuto pensare ad una verifica di diverso tipo, per incoraggiare gli studenti a svolgere anche questa tipologia di esercizio. Nonostante ciò, i pochi studenti che hanno svolto la dimostrazione, lo hanno fatto in modo eccellente.

3.2.3 Bilancio e riflessioni finali

Complessivamente, il progetto si è rivelato abbastanza efficace. I dati raccolti attraverso il questionario conclusivo hanno restituito l'immagine di una classe che ha appreso i contenuti presentati, ha sviluppato delle competenze centrali per il proseguo del percorso scolastico ed è rimasta particolarmente colpita ed interessata al tema dei fondamenti e al metodo della Matematica. Purtroppo la verifica non ha invece riportato gli esiti aspettati.
I risultati del questionario e le osservazioni svolte nel corso del progetto, hanno evidenziato una maggiore consapevolezza degli studenti sull'importanza e sull'utilizzo della dimostrazione in Matematica e un miglioramento nella produzione autonoma delle dimostrazioni assegnate come compito per casa. Un simile discorso non può essere fatto anche per le verifiche, come già riportato e giustificato in precedenza. Inoltre gli studenti hanno sviluppato la consapevolezza che si possa (e si deve) dimostrare in ogni ambito della Matematica, e non solo.
Si può dunque concludere che la proposta di dimostrazioni di tipo algebrico e analitico, di attività di argomentazione e congettura e l'utilizzo di software di geometria dinamica si siano rivelati strumenti validi per trasmettere agli studenti la necessità della dimostrazione, in particolare l'esigenza di porre degli assiomi, di organizzare in modo rigoroso le deduzioni e di utilizzare un linguaggio opportuno e specifico della disciplina; in particolare, inoltre, sono stati utili per trasmettere agli studenti che la dimostrazione non è uno "strumento" proprio soltanto della geometria euclidea,

bensì di tutti gli ambiti della matematica, quindi anche dell'algebra, della geometria analitica, dell'analisi, ecc...
Tuttavia, l'aver constatato che gli studenti stessi ammettessero di non sentire sempre la necessità di dimostrare e l'aver osservato gli esiti delle verifiche, portano a concludere che sarebbe necessario un percorso più lungo e probabilmente più graduale di presentazione della dimostrazione in differenti ambiti della matematica. Sarebbe quindi interessante proporre esercizi di tipo argomentativo/ dimostrativo non solo in Geometria euclidea nel primo biennio e in Geometria analitica nel secondo, bensì in ogni ambito della matematica, ovviamente senza ridurre l'insegnamento ad un approccio puramente assiomatico. In generale, la sperimentazione è stata svolta su un piccolo campione di studenti, di conseguenza non è stato possibile attuare il progetto nelle molteplici realtà scolastiche esistenti. Sarebbe interessante allargare la sperimentazione ad indirizzi di studio differenti, al fine di verificare se le conclusioni cui si giunge sono le medesime. Inoltre, ampliare il bacino di studenti all'interno della sperimentazione permetterebbe di effettuare un confronto tra le classi che si attengono ad un percorso più tradizionale e le classi che invece prendono parte al progetto, riuscendo ad ottenere risultati maggiormente oggettivi sull'effettiva utilità della sperimentazione.

Conclusioni

Nell'elaborato si è cercato di approfondire la tematica relativa al concetto di dimostrazione nell'insegnamento e apprendimento della matematica nella Scuola secondaria di II grado.
In particolare è stato riportato un progetto di osservazione e azione didattica sulla dimostrazione nella Scuola secondaria di II grado, che è stato implementato in una classe prima Liceo delle Scienze applicate e in una classe terza Scientifico ordinario di un Liceo di Castelfranco Veneto.

Dall'analisi di ricerche didattiche su alcuni importanti temi legati alla dimostrazione, è emersa la constatazione che la dimostrazione non sempre è presente a scuola tanto quanto indicato nei curricoli. Tuttavia, da questa analisi si evidenzia l'importanza di insegnare a dimostrare a scuola, in quanto il ragionamento ipotetico-deduttivo è il cuore stesso della matematica e l'educazione all'argomentazione e alla dimostrazione è un obiettivo didattico che assume una valenza che va al di là della matematica, perché può aiutare a far ragionare correttamente anche in altri contesti, rappresentando un patrimonio culturale per tutti i futuri cittadini. Le stesse *Indicazioni Nazionali / Linee Guida* introducono la dimostrazione in tutte le tipologie di Istituti Superiori (della Scuola secondaria di II grado), e non solo nei Licei.
L'approfondimento delle ricerche didattiche ha permesso inoltre di analizzare alcuni strumenti che la letteratura sul tema indica come validi in un percorso di avvio e consolidamento del concetto di dimostrazione. In particolare, l'introduzione di attività di argomentazione tramite cui gli studenti possano elaborare congetture sembra essere un ottimo strumento per rendere più stimolante e interessante il processo di dimostrazione per gli studenti. Anche la proposta di problemi in forma aperta, combinata all'utilizzo di software di geometria dinamica, sembra avere il potenziale di incoraggiare sia all'esplorazione sia alla dimostrazione, in quanto rende più facile porre e testare congetture, permettendo di esplorare situazioni non ancora completamente formalizzate. La letteratura consiglia inoltre di non presentare la dimostrazione esclusivamente in ambito geometrico: sebbene questo sia in accordo con la tradizione, lo è in modo minore con le strategie di insegnamento che propongono un approccio più graduale alla dimostrazione. La Geometria, infatti, può "distrarre" gli studenti dal reale apprendimento di un metodo ipotetico-deduttivo, a causa del disegno, della misura e del grande numero di proposizioni assunte a fondamento della teoria. Viene dunque consigliato di proporre anche dimostrazioni in ambito aritmetico, algebrico e analitico, ancora meglio se tramite problemi presentati in forma aperta e tramite la ricerca di congetture. Questi strumenti, oltre a facilitare i

processi dimostrativi, sembrano trasmettere agli studenti la necessità e quindi una maggiore motivazione a dimostrare.

Vista la necessità di un ritorno della dimostrazione a scuola, è stato ideato un progetto avente come scopo quello di sperimentare un percorso di avvio graduale alla dimostrazione, in cui, tramite l'intuizione e la congettura, si possa trasmettere agli studenti la necessità della dimostrazione. In particolare riferimento alla classe terza del secondo biennio di Liceo Scientifico, è stata proposta una progettazione avente come obiettivo quello di trasmettere agli studenti che la dimostrazione non è uno "strumento" soltanto della geometria euclidea, bensì di tutti gli ambiti della matematica, quindi anche dell'algebra, della geometria analitica, dell'analisi, ecc... Sono state quindi poste le domande di ricerca riportate all' inizio del terzo Capitolo (si veda 3).

Il progetto è stato così implementato: nella prima fase sono state osservate le classi in modo da poter raccogliere informazioni sul livello delle classi stesse e sulle conoscenze degli alunni; nella seconda fase si è cercato di introdurre gradualmente la dimostrazione nella classe prima e la dimostrazione in geometria analitica nella classe terza, servendosi in particolare di strumenti come l'argomentazione e la congettura, l'utilizzo di un software di geometria dinamica (GeoGebra) e la proposta di laboratori di informatica con dei problemi proposti in forma aperta; infine, nella terza fase sono state raccolte informazioni, tramite questionari e verifiche, circa l'effettiva utilità degli strumenti usati nel percorso di avvio alla dimostrazione matematica, cercando di rispondere ai quesiti di ricerca.
I metodi attraverso i quali sono stati raccolti i dati per valutare la riuscita del progetto sono l'osservazione partecipante e la somministrazione di questionari, compiti e verifiche.

Complessivamente, il progetto di sperimentazione didattica si è rivelato efficace. I dati raccolti attraverso i questionari conclusivi e le osservazioni svolte nel corso del progetto hanno evidenziato un aumentato interesse degli studenti nei confronti dell'argomento, una maggiore consapevolezza sull'importanza e sull'utilizzo della dimostrazione in Matematica e un miglioramento nella produzione autonoma delle dimostrazioni. Le classi sembrerebbero aver appreso i contenuti presentati e aver sviluppato nuove competenze (in particolare, la classe terza è rimasta particolarmente colpita ed interessata al tema dei fondamenti della Matematica).
La risposta alla prima domanda di ricerca è sicuramente affermativa, in quanto i questionari iniziali e conclusivi proposti agli studenti e le osservazioni effettuate hanno evidenziato un quadro abbastanza chiaro: un atteggiamento riproduttivo nei confronti della dimostrazione non sembra aiutare gli studenti a superare le difficoltà dell'argomento, mentre proporre un approccio più graduale alla dimostrazione sembrerebbe motivarli e aiutarli ad acquisire un metodo e renderli maggiormente consapevoli della necessità di dimostrare. Tuttavia, rispetto all'implementazione del progetto attuata, si è osservato che probabilmente servirebbe un approccio ancor più graduale alla dimostrazione, che preveda un maggior numero di attività esplorative e argomentative, con l'aiuto di un software di matematica e attività di congettura tramite problemi posti in forma aperta e di riflessione sul tema.

Nonostante ciò anche le risposte alla seconda e terza domanda sono state affermative: gli stessi studenti sembrano aver riconosciuto le potenzialità e i vantaggi dell'utilizzo del software di geometria dinamica GeoGebra per approcciarsi alla dimostrazione geometrica. GeoGebra infatti, grazie alla funzione di trascinamento, è un valido strumento per congetturare proprietà geometriche. Essi inoltre sembrano aver riconosciuto la congettura come valida attività propedeutica alla dimostrazione, capace di trasmettere loro la necessità di una dimostrazione come validazione di un fatto matematico.
Infine, l'implementazione nella classe terza ha portato a rispondere positivamente anche all'ultima domanda: la classe, avendo studiato ed effettuato dimostrazioni quasi esclusivamente in ambito geometrico, aveva effettivamente la misconcezione che essa fosse soltanto strumento della Geometria, mentre l'introduzione della dimostrazione in ambiti diversi della matematica sembra non solo aver trasmesso loro l'universalità dei processi ipotetico-deduttivi in matematica, ma anche aver permesso riflessioni sui fondamenti della matematica.
Come è già stato più volte sottolineato, le implementazioni del progetto sono state svolte su un piccolo campione di studenti e quindi i risultati non sono generalizzabili. Sarebbe interessante allargare la sperimentazione a indirizzi di studio differenti, al fine di verificare se le conclusioni cui si giunge sono le medesime. Inoltre, l'ampliamento del bacino di studenti all'interno della sperimentazione permetterebbe di effettuare un confronto tra le classi che si attengono a un percorso più tradizionale e le classi che invece prendono parte al progetto, riuscendo ad ottenere risultati maggiormente oggettivi sull'effettiva validità della sperimentazione. Infine sarebbe auspicabile un percorso ancor più graduale di avvio alla dimostrazione che preveda di proporre attività di tipo argomentativo/ dimostrativo non solo in Geometria euclidea nel primo biennio e in Geometria analitica nel secondo, bensì in ogni ambito della matematica, ovviamente senza far sì che l'insegnamento adotti un approccio esclusivamente assiomatico.

Desidero concludere questo elaborato con un commento e una riflessione di carattere personale. Il progetto di osservazione e azione didattica sulla dimostrazione, che ho, nel concreto, attuato a scuola in due classi differenti, non ha avuto per me una valenza esclusivamente accademica. Oltre ad avermi permesso di ricavare interessanti dati e informazioni, utili ai fini di questa Tesi di Laurea Magistrale, e di rispondere ai quesiti sorti successivamente ad un'attenta ricerca dei principali contributi in didattica e teorie dell'apprendimento sulla dimostrazione, il progetto ha infatti avuto per me una valenza anche a livello prettamente personale. L'esperienza è stata molto formativa in quanto ha fatto sì che io mi mettessi in gioco e che non solo osservassi il lavoro di altre preparatissime docenti con le loro classi, ma anche che io stessa mi cimentassi nel coinvolgere delle classi con lezioni e attività laboratoriali. Questo mi ha permesso di riflettere sull'insegnamento, di arricchirmi attraverso il prezioso confronto e l'osservazione di docenti di Matematica, ed è stata una piacevole conferma circa i miei progetti futuri. Ho infatti intrapreso lo studio della Matematica cinque anni fa con il desiderio di diventare insegnante, e sono grata di aver avuto la possibilità di svolgere questo tipo di lavoro e quest'esperienza, da cui esco entusiasta e soddisfatta di aver insegnato -o almeno provato ad insegnare- a scuola la Matematica, concentrandomi in particolare sul tema della dimostrazione.

Appendice A

Materiali progetto classe prima

La presente appendice raccoglie tutti i materiali impiegati nel corso della sperimentazione presso una classe Prima Liceo delle Scienze applicate del Liceo Ginnasio Statale "Giorgione" di Castelfranco Veneto.
In ordine è possibile consultare i seguenti file:

- *Questionario iniziale*, somministrato durante la prima attività in classe prima;
- *Presentazione Power Point*, utilizzata durante la seconda attività per l'introduzione storica alla geometria euclidea e alla dimostrazione;
- *Scheda di lavoro*, utilizzata per l'attività laboratoriale (quarta attività);
- *Questionario conclusivo*, somministrato durante la sesta ed ultima attività in classe prima.

Seguono i file indicati in precedenza, secondo l'ordine in cui sono stati presentati.

Progetto di Tesi di laurea magistrale in didattica della matematica

Classe I - Questionario iniziale

SEGNA CON UNA CROCETTA L'AFFERMAZIONE CORRETTA TRA QUELLE PROPOSTE:

Quale delle seguenti frasi è una definizione?

- ❑ Un triangolo è isoscele quando ha due lati e due angoli congruenti
- ❑ Se un triangolo è isoscele allora ha due angoli congruenti
- ❑ Un triangolo è isoscele quando ha due lati congruenti
- ❑ Se un triangolo ha due angoli congruenti allora è isoscele
- ❑ Un triangolo è isoscele se e solo se ha due angoli congruenti

La frase "per due punti distinti del piano passa una ed una sola retta” è:

- ❑ Una definizione
- ❑ Una proprietà
- ❑ Un teorema
- ❑ Un assioma
- ❑ Un’osservazione

La frase “si dice punto medio di un segmento quel suo punto che lo divide in due segmenti congruenti” è:

- ❑ Una definizione
- ❑ Una proprietà
- ❑ Un teorema
- ❑ Un assioma
- ❑ Un’osservazione

La frase “se un triangolo è isoscele, allora ha due angoli congruenti” è:

- ❑ Una definizione
- ❑ Una proprietà
- ❑ Un teorema
- ❑ Un assioma
- ❑ Un’osservazione

Solo una di queste affermazioni è un assioma della Geometria Euclidea, quale?

- ❑ Per due punti distinti del piano passa una ed una sola linea
- ❑ Per tre punti distinti passa uno e un solo piano
- ❑ Per ogni retta esiste almeno un punto del piano che non le appartiene
- ❑ Un angolo è concavo se non contiene i prolungamenti dei suoi lati
- ❑ Due angoli opposti al vertice sono congruenti

Quale delle seguenti frasi è una definizione?

- ❑ Data una retta orientata e due suoi punti A e B, con A che precede B, il segmento AB è l'insieme dei punti della retta formato da A, da B e dai punti che seguono A e precedono B
- ❑ Data una retta orientata e due suoi punti A e B, con A che precede B, il segmento AB è l'insieme dei punti della retta compresi tra A e B
- ❑ Un segmento è una parte finita di una retta
- ❑ Data una retta orientata e un suo punto O, chiamiamo segmento l'insieme formato da O e da tutti i punti che lo seguono
- ❑ Data una retta orientata e un suo punto O, chiamiamo segmento l'insieme formato da O e da tutti i punti che lo precedono

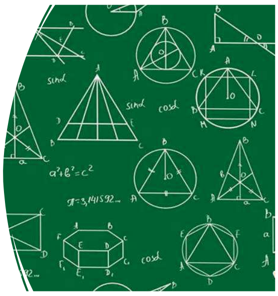
ASSEGNA AD OGNI FRASE LA LETTERA CORRISPONDENTE, A SECONDA CHE SI TRATTI DI UNA DEFINIZIONE (D) , DI UN ASSIOMA (A) O DI UN TEOREMA (T)

LETTERE	FRASI
	Dato un segmento, si dice punto medio del segmento il punto che lo divide in due segmenti congruenti.
	La bisettrice di un angolo è la semiretta uscente dal vertice che divide l'angolo in due angoli congruenti
	Due angoli opposti al vertice sono congruenti.
	Due punti distinti appartengono ad una e una sola retta.
	Se un triangolo è isoscele, allora ha due angoli congruenti.
	Se un triangolo è isoscele, allora la bisettrice dell'angolo al vertice è anche altezza e mediana rispetto alla base.
	Se A e B sono due punti distinti di una retta, o A precede B, o B precede A.
	Due figure sono congruenti se sono sovrapponibili mediante un movimento rigido.
	Un angolo è ciascuna delle due parti di piano individuate da due semirette aventi la stessa origine, incluse le due semirette.
	Tre punti distinti e non allineati appartengono a uno e un solo piano.

Presentazione: introduzione storica alla geometria euclidea e alla dimostrazione

La nascita della Geometria

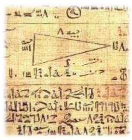
Un po' di storia ...



La parola GEOMETRIA proviene dal greco e significa **"misura della terra"**.

Assiro-Babilonesi → Erano in grado di calcolare con precisione aree di quadrati, di rettangoli, di triangoli rettangoli e persino di trapezi, mentre per determinare l'area del cerchio si servivano del valore $\pi = 3$

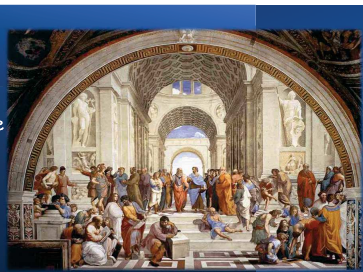
Antichi Egiziani → Necessità di ripristinare confini di proprietà, che ogni anno venivano cancellati dalle inondazioni del Nilo



Le conoscenze matematiche servivano a **scopi principalmente pratici.**

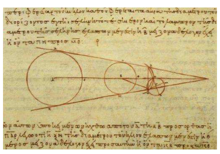
Spetta ai Greci, a partire da Talete di Mileto (600 a. C. circa) e Pitagora di Samo, fondatore della famosa scuola pitagorica a Crotone (540 a. C. circa), il merito di **aver elevato la matematica a dignità di scienza.**

La nascita della dimostrazione nella Geometria Greca



La parola greca "**Teorema**" (θεώρημα) significa "**ciò che si guarda**". In antichità la dimostrazione era infatti semplice visualizzazione, la risposta alla domanda "Perché è così? Mostramelo!"

Tuttavia le dimostrazioni visuali non furono sufficienti per i **Greci,** i quali fecero della **dimostrazione logica** (**ipotetico-deduttiva**) l'essenza della loro geometria e cercarono di assumere come basi della geometria il più piccolo numero possibile di risultati "già noti".

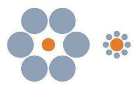


Perché Intuizione e Visualizzazione non bastano?

Può capitare di studiare teoremi la cui verità appare così ovvia che ogni dimostrazione sembra del tutto inutile!

Tuttavia, valutazioni di questo tipo sono spesso affrettate, basate sull'osservazione di una figura disegnata e non su un ragionamento valido in generale.

La sola osservazione e l'evidenza visiva possono dare delle sorprese...



Perché furono i Greci a dare alla Geometria tale struttura logica? Vediamo alcune ipotesi...

1. **La matematica Greca ha le sue radici in quella Egiziana e Babilonese** → I risultati non sempre combaciavano. Questo portò probabilmente i Greci ad accettare come note assunzioni su cui tutti erano d'accordo e dedurre tutte le altre cose da queste.

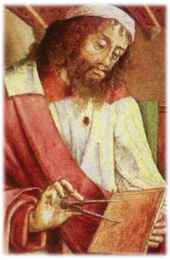
2. **Natura della Scienza dei Greci** → I filosofi Greci cercavano singole spiegazioni che potessero giustificare l'intero Universo. Così anche in matematica: i Greci cercarono di ridurla ai suoi principi primi, ai suoi "Elementi"

3. **Volontà di risolvere problemi** → Il modo più efficace di risolvere problemi è ridurli a problemi più semplici di cui si conosce già la soluzione

Perché furono i Greci a dare alla Geometria tale struttura logica? Vediamo alcune ipotesi...

4. **Natura della società greca** → Nelle *poleis* Greche i politici dovevano conquistare il favore delle assemblee per essere eletti. Nacque così la retorica e da essa la LOGICA. La logica utilizzava solo argomentazioni razionali e consequenziali. Proprio all'interno della logica si affermò il concetto di dimostrazione.

5. **Influenza della filosofia** → I filosofi greci erano profondamente argomentativi

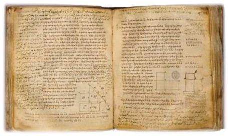


Il pensiero matematico greco trova la sua meravigliosa sintesi in **Euclide**, vissuto in Alessandria verso il 300 a. C.

Con Euclide la geometria cessò di essere una scienza frammentaria, episodica, studiata solo per scopi pratici e divenne parte fondamentale del **pensiero scientifico razionale, libera da ogni legame di tipo pratico-sperimentale**

↓

Sistema ipotetico-deduttivo.



Euclide nei suoi Elementi, di contenuto aritmetico-geometrico, raccoglie e sistema tutto il complesso delle conoscenze matematiche del tempo secondo un mirabile **schema ipotetico-deduttivo**.

Gli **Elementi** costituiscono **uno dei più grandi monumenti che l'uomo abbia saputo elevare alla matematica**.

Il sistema Ipotetico-deduttivo

Enti primitivi: non vengono definiti, sono accettati come noti.
Sono i **punti**(lettere maiuscole A,B,C..), le **rette**(r,s,t,..), i **piani** (α, β,...)

Postulati: sono proprietà assunte come "primitive". Queste affermazioni non sono dedotte e vengono accettate come vere.

Definizioni: sono proposizioni nelle quali si caratterizza in modo inequivocabile un concetto o un ente (concetto di perpendicolarità, di parallelismo, ente: triangolo isoscele, mediana...)

Teoremi: sono enunciati la cui verità viene dimostrata a partire dai postulati e/o da altri teoremi precedentemente dimostrati.

Corollario: è un teorema che deriva immediatamente da un altro teorema appena dimostrato, oppure da un postulato.

Lemma: è un teorema che si prefigge l'obiettivo di facilitare la dimostrazione di un successivo notevole teorema.

L'insieme dei postulati e delle proposizioni che da essi si deducono (i teoremi) si chiama **sistema ipotetico-deduttivo**.

POSTULATI DI APPARTENENZA

Postulato 0: lo spazio è l'insieme di tutti i punti; rette e piani sono sottoinsiemi dello spazio. Una retta contiene infiniti punti, un piano contiene infinite rette, uno spazio contiene infiniti piani.

Postulato 1: Per due punti distinti passa una e una sola retta.

Conseguenza del postulato 1: due rette distinte non possono avere più di un punto in comune.
Quindi, date due rette r ed s, esse possono essere:
- **incidenti** se hanno un punto in comune; in questo caso si dice che le rette si intersecano in quel punto, e il punto si dice **punto di intersezione**
- **non incidenti** se non hanno punti in comune, quindi se non si intersecano.

Definizione: Punti che appartengono ad una stessa retta si dicono **allineati**.
Definizione: Due rette che giacciono sullo stesso piano e che non si intersecano in nessun punto si dicono **parallele**.

Postulato 2: Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano.

Definizione: I punti che appartengono ad uno stesso piano si dicono **complanari**.

Postulato 3: Se due punti di una retta appartengono ad un piano, allora tutti i punti della retta appartengono a quel piano (la retta appartiene al piano).

POSTULATI D'ORDINE

Postulato 4: Tra i punti di una retta è possibile stabilire una relazione di ordine totale, cioè si possono ordinare i punti di una retta in modo che:
- dati due punti A e B della retta, o A e B coincidono, o A precede B, o B precede A (**proprietà di tricotomia**);
- se A precede B e B precede C, allora A precede C (**proprietà transitiva**).

Definizione: Una retta su cui è stato scelto un verso di percorrenza si dice **retta orientata**.

Postulato 5: Su una retta orientata ogni punto è seguito da almeno un altro punto ed è preceduto da almeno un altro punto.

Postulato 6: Tra due punti di una retta è compreso almeno un terso punto.

Teorema: Per un punto passano infinite rette.

Definizione: L'insieme di tutte le rette passanti per un punto è detto **fascio di rette**, o anche **fascio proprio di rette**; il punto comune a tutte le rette è detto **centro del fascio**.

Definizione: Un **fascio improprio di rette** è, invece, costituito da una retta e da tutte le rette parallele ad essa.

BIBLIOGRAFIA

- V. Villani, Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della matematica (Geometria). Bologna: Pitagora, 2006
- G. Hanna, M. de Villiers, Proof and Proving in Mathematics Education, the 19th ICMI Study, Springer, 2012
- M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi, Matematica.Blu, Seconda edizione, Zanichelli, 2016

Scheda di lavoro

Problema: Sia ABCD un quadrilatero convesso generico. Su ogni lato traccia il punto medio. Chiama M il punto medio del lato AB, N il punto medio del lato BC, L il punto medio del lato CD e Q il punto medio del lato DA. Unendo i punti M, N, L, Q individuerai un nuovo quadrilatero.
Che tipo di quadrilatero hai ottenuto? Perché?

1. Leggi accuratamente il testo. Ci sono parole che non conosci? Scrivile nel tuo quaderno e prova a cercarne il significato sul libro.

2. Individua le IPOTESI del problema. Se possibile scrivile in linguaggio matematico, altrimenti scrivile in linguaggio naturale, o anche in entrambi i modi. Poi fai un disegno che tenga conto delle ipotesi.

3. Apri GeoGebra (vista Grafici, senza assi e senza griglia). Disegna un quadrilatero ABCD. Costruisci i punti medi dei lati M, N, L, Q e il quadrilatero MNLQ.
Che cosa si osserva? (**Suggerimento**: modifica il quadrilatero ABCD con il mouse e osserva come cambia di conseguenza il quadrilatero MNLQ.)

4. Osservando il quadrilatero MNLQ, che quadrilatero ti sembra di aver costruito? Scrivi la tua possibile risposta solo dopo avere eseguito più di un disegno sul quaderno.
Poi prova a spiegare il perché della tua risposta.

5. Se ora sei convinto dalla tua risposta prova a scrivere una nuova SPIEGAZIONE nel modo più corretto possibile, usando le parole giuste e eventualmente dei simboli matematici e un disegno fatto con cura.
(**Suggerimento**: immaginati un tuo compagno che non crede alla tua risposta e prova a convincerlo.)

Progetto di Tesi di laurea magistrale in didattica della matematica

Classe I - Questionario conclusivo sulla Dimostrazione

Negli ultimi due mesi di scuola hai iniziato a studiare la Geometria euclidea. In particolare, durante questo percorso, è stato importante lo studio delle definizioni di enti e proprietà del piano euclideo e delle DIMOSTRAZIONI. Dopo aver scoperto che cos'è una dimostrazione matematica, ti sei cimentato a svolgerne alcune in autonomia, magari con un po' di fatica.
A questo punto dell'anno scolastico, ti chiedo di rispondere il più sinceramente possibile ad alcune domande sul tuo percorso di approccio alla dimostrazione.

Il questionario è anonimo.

1) Come ti senti il più delle volte di fronte al testo di un teorema che devi dimostrare?
- ❑ Non motivato a trovare una dimostrazione
- ❑ Incuriosito
- ❑ Fiducioso
- ❑ In difficoltà
- ❑ Talmente in difficoltà da non riuscire a cimentarmi nell'esercizio

2) Come ti senti il più delle volte dopo aver provato a svolgere una dimostrazione?
- ❑ Soddisfatto
- ❑ Demoralizzato
- ❑ Indifferente
- ❑ Insicuro

3) Prima di imparare a dimostrare autonomamente una proposizione, hai svolto degli esercizi in cui ti veniva richiesto di rappresentare tramite una figura (o più figure) la proposizione e di individuare e scrivere l'ipotesi e la tesi.
Penso che questo lavoro preliminare:
- ❑ Mi sia utile per avere chiare le cose note e ciò che devo dimostrare e per intuire i passi della dimostrazione
- ❑ Mi sia abbastanza utile, ma a volte potrei farne a meno
- ❑ Mi sembra inutile per svolgere poi la dimostrazione.

4) Alcune volte, prima di svolgere una dimostrazione, ti è stato chiesto di osservare se riuscivi ad intuire alcune proprietà dalla figura e di chiederti il "perché". Questo passaggio:
- ❑ Mi è servito nello svolgimento della dimostrazione perché mi ha incuriosito
- ❑ Mi è servito nello svolgimento della dimostrazione perché mi ha aiutato ad intuire i passi logici
- ❑ Non mi è servito nello svolgimento della dimostrazione.

5) Cosa ne pensi dell'attività svolta in laboratorio di informatica sulla dimostrazione?

- ❑ Mi ha incuriosito (spiega perché:____ ____)
- ❑ È stata utile (spiega perché: ____ ____)
- ❑ È stata poco interessante e tutto sommato inutile (spiega perché:_________________ ____)
- ❑ Altri commenti:____ ____

6) L'utilizzo del software GeoGebra nello studio della Geometria euclidea:

- ❑ Non mi ha aiutato per niente
- ❑ Mi ha aiutato a intuire e visualizzare le proprietà studiate
- ❑ Mi ha aiutato a comprendere i passi delle dimostrazioni

7) A questo punto dell'anno scolastico, ritieni di essere maggiormente incuriosito a scoprire il perché delle cose che impari in matematica (e quindi le loro dimostrazioni) rispetto all'inizio dell'anno scolastico?

- ❑ Sì
- ❑ No

8) Talvolta di fronte ad una figura si pensa di non dover dimostrare una proprietà in quanto "si vede". A questo punto dell'anno:

- ❑ Sento maggiormente il bisogno di dimostrare e spiegare una proprietà prima di dire "si vede!"
- ❑ Non sono spinto a cercare una spiegazione di ogni affermazione o proprietà perché mi sembrano evidenti
- ❑ Alcune volte sento il bisogno di dimostrare e spiegare le proprietà che noto, altre volte invece no, perché mi sembrano evidenti.

9) Senti la necessità di utilizzare un linguaggio specifico (e preciso) quando provi a fare una dimostrazione?

- ❑ Sì, perché lo trovo molto utile
- ❑ Sì, perché mi è stato insegnato così
- ❑ No, perché preferisco esprimermi con il linguaggio normale.

10) Senti la necessità di esprimere e organizzare in modo rigoroso le deduzioni quando provi a fare una dimostrazione?

- ❑ Sì, perché lo trovo utile
- ❑ Sì, perché mi è stato insegnato così
- ❑ No, perché l'importante è aver capito.

11) In questo percorso di approccio alla dimostrazione, in cui stai imparando a dimostrare alcune proposizioni autonomamente, con quale di queste affermazioni ti senti maggiormente d'accordo?

- ❑ Sento l'esigenza di essere guidato sin dall'inizio per svolgere una dimostrazione
- ❑ Sento il bisogno inizialmente di intuire e fare ipotesi autonomamente di fronte a una figura e solo successivamente di essere guidato.

12) Con quale affermazione ti senti maggiormente d'accordo?

- ❑ Mi servirebbe più tempo per imparare a dimostrare
- ❑ Il lavoro svolto è sufficiente per iniziare a dimostrare da solo qualche proposizione
- ❑ Credo di aver imparato a dimostrare e mi sento sicuro nel farlo

Ti chiedo infine di rispondere a queste domande aperte:

1) Che cos'è una definizione?

____
____
____

2) Che cos'è un teorema?

____
____
____

3) Che cos'è una dimostrazione?

____
____
____

Appendice B

Materiali progetto classe terza

La presente appendice raccoglie tutti i materiali impiegati nel corso della sperimentazione presso una classe terza Liceo Scientifico del Liceo Ginnasio Statale "Giorgione" di Castelfranco Veneto.
In ordine è possibile consultare i seguenti file:

- *Questionario iniziale*, somministrato durante la prima attività in classe terza;
- *Scheda di lavoro*, utilizzata per l'attività laboratoriale (terza attività);
- *Questionario conclusivo*, somministrato durante la quarta ed ultima attività in classe terza.

Seguono i file indicati in precedenza, secondo l'ordine in cui sono stati presentati.

Progetto di Tesi di laurea magistrale in didattica della matematica

Classe III - Questionario iniziale sulla Dimostrazione

1) Che cos'è a tuo parere una dimostrazione?

----

2) A cosa serve una dimostrazione?

----

3) Perché si utilizzano processi dimostrativi in Matematica?

----

4) In quale/i ambito/i della matematica ricordi di aver sentito maggiormente parlare di "<u>Dimostrazione</u>"? (Puoi segnare più opzioni)

- ❑ Geometria
- ❑ Aritmetica
- ❑ Algebra
- ❑ Altro: ___________________

5) In quale/i ambito/i della matematica si fanno dimostrazioni nella Scuola superiore? (Puoi segnare più opzioni)

- ❑ Geometria euclidea
- ❑ Aritmetica
- ❑ Algebra
- ❑ Geometria analitica
- ❑ In tutti gli ambiti della matematica

6) Secondo te, quanto è stata presente la Dimostrazione nel tuo studio della Matematica a scuola?

- ❑ Molto
- ❑ Abbastanza
- ❑ Poco
- ❑ Per nulla

7) Ti è mai capitato di svolgere in autonomia qualche dimostrazione nel tuo percorso scolastico (senza vederla precedentemente riprodotta dall'insegnante) ?

- ❑ Sì, spesso
- ❑ Sì, qualche volta
- ❑ No, mai

8) Ti è mai capitato, prima di approcciarti ad una dimostrazione, di porti delle domande e congetturare tramite la tua intuizione?

- ❑ Sì, sempre
- ❑ Sì, qualche volta
- ❑ Sì, raramente
- ❑ No, mai

Se sì, ti è servito nello svolgimento della dimostrazione e nella sua comprensione?

- ❑ Sì
- ❑ No

9) Scrivi di seguito i teoremi (di cui è stata svolta la dimostrazione) che ricordi di aver studiato durante il tuo percorso di studi (se non ricordi il nome preciso del teorema, prova a scrivere, anche con parole tue, l'enunciato del teorema o della proposizione di cui ricordi di aver studiato la dimostrazione):

----

10) Hai incontrato dimostrazioni anche in altre materie di studio?

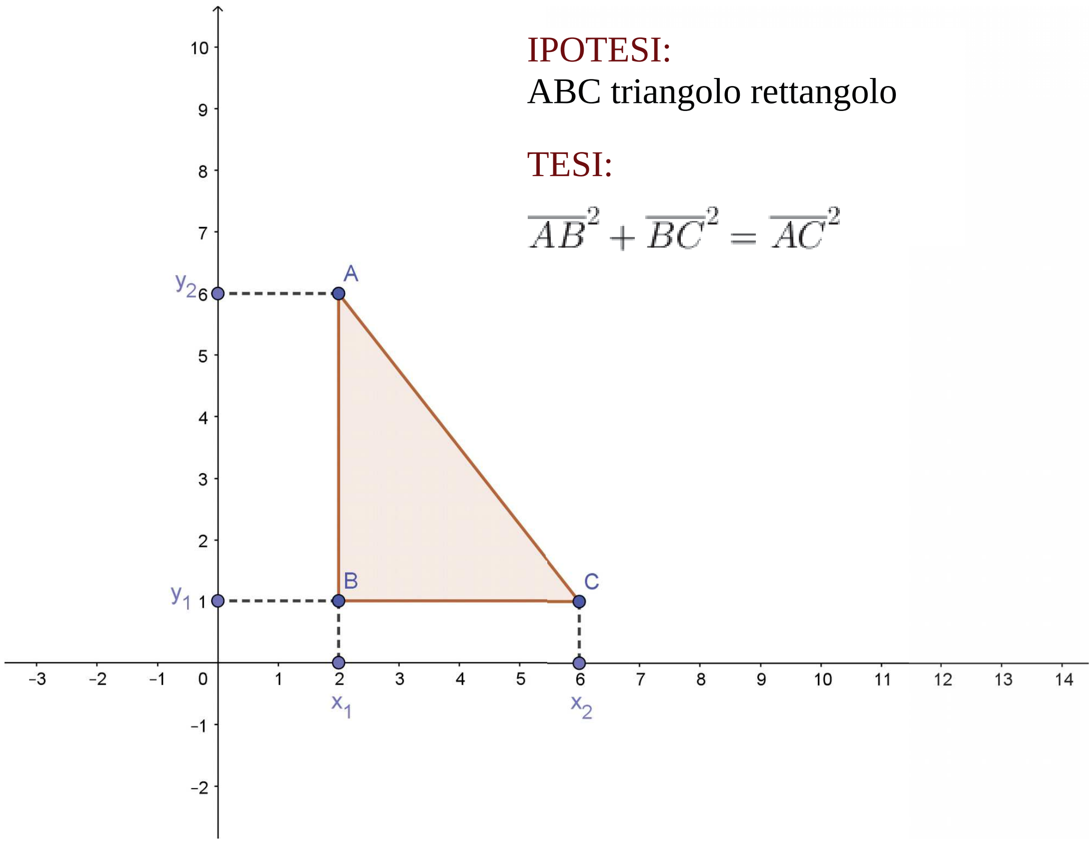
- ❑ Sì
- ❑ No

Se sì, in quali materie? (Puoi segnare più opzioni)

- ❑ Lingua latina
- ❑ Lingua e letteratura italiana
- ❑ Storia e geografia
- ❑ Fisica
- ❑ Scienze naturali
- ❑ Lingua e cultura straniera
- ❑ Disegno e storia dell'arte
- ❑ Filosofia

Scheda di lavoro:
Si può dimostrare il Teorema di Pitagora per via analitica?

TEOREMA: In ogni triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.



IPOTESI:
ABC triangolo rettangolo

TESI:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

Svolgimento (è una DIMOSTRAZIONE?) :

1. Rappresentiamo sul piano cartesiano un generico triangolo rettangolo ABC.
   $A = (x_1, y_2)$
   $B = (x_1, y_1)$
   $C = (x_2, y_1)$

2. Qual è la lunghezza del segmento AB?________________________

   Qual è la lunghezza del segmento BC?________________________

   Qual è la lunghezza del segmento AC?________________________

3. Ricordando che la formula per calcolare l'area di un quadrato è ________________________ calcoliamo:

   Area del quadrato costruito sul segmento AB:____________________

   Area del quadrato costruito sul segmento BC:____________________

   Area del quadrato costruito sul segmento CA:____________________

4. Conclusione:
   ____
   ____
   ____

Lo svolgimento proposto è una dimostrazione? Discutiamone assieme:

1. Il sistema di riferimento scelto è abbastanza generico?
   ____
   ____
   ____

2. I calcoli sono corretti?
   ____
   ____
   ____

3. Secondo te, si tratta di una dimostrazione? In caso di risposta negativa, dove sta l'errore a tuo avviso?
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

Progetto di Tesi di laurea magistrale in didattica della matematica

Classe III - Questionario conclusivo sulla Dimostrazione

1) Nel capitolo appena concluso, hai incontrato e studiato alcune dimostrazioni?
- ❑ Sì
- ❑ No

Se sì, quali ricordi?

____

____

____

____

____

2) I passaggi delle dimostrazioni, le condizioni e le formule studiate trovano giustificazione:
- ❑ Principalmente in Teoremi di geometria euclidea

  (Puoi fare qualche esempio? ____

  ____

- ❑ Principalmente in Proprietà algebriche

  (Puoi fare qualche esempio? ____

  ____

- ❑ Principalmente in Proprietà aritmetiche

  (Puoi fare qualche esempio? ____

  ____

- ❑ Sia in teoremi di geometria euclidea che in proprietà algebriche

  (Puoi fare qualche esempio? ____

  ____

3) Al termine di questo capitolo, che risposta daresti alla domanda: "In quale/i ambito/i della matematica si fanno dimostrazioni?"
- ❑ Geometria euclidea
- ❑ Aritmetica
- ❑ Algebra
- ❑ Geometria analitica
- ❑ In tutti gli ambiti della matematica (Geometria, Aritmetica, Algebra, Analisi, Logica, ecc...)

4) Al termine di questo capitolo, sei maggiormente incuriosito/a a scoprire il perché delle cose che impari in matematica (e quindi la loro dimostrazione)?
- ❑ Sì
- ❑ No

5) Al termine di questo capitolo, senti maggiormente il bisogno di produrre delle dimostrazioni nel momento in cui ti viene presentato un risultato matematico?
- ❑ Sì
- ❑ No

6) L'utilizzo di GeoGebra anche nello studio della Geometria analitica:
- ❑ non mi ha aiutato
- ❑ mi ha aiutato ad intuire e visualizzare le proprietà studiate
- ❑ mi ha aiutato a comprendere i passi delle dimostrazioni

7) Lo studio di dimostrazioni algebriche:
- ❑ Mi ha permesso di ottenere con più facilità dei risultati (trovo più difficile svolgere dimostrazioni completamente geometriche come quelle viste nel primo biennio).
- ❑ È stato più difficile: trovo più semplice ottenere un risultato tramite dimostrazione geometrica.
- ❑ Non ho notato differenze rispetto allo studio di dimostrazioni completamente geometriche.

8) L'aver svolto e studiato così tante dimostrazioni in questo capitolo:
- ❑ Ha appesantito lo studio della matematica: ho fatto più fatica a comprendere i concetti studiati
- ❑ Ha appesantito lo studio della matematica, ma ho compreso meglio i concetti studiati
- ❑ Mi ha aiutato a comprendere i concetti studiati, che però probabilmente avrei capito comunque
- ❑ Si è rivelato necessario affinché comprendessi realmente il significato dei concetti studiati

9) Cosa ti è rimasto maggiormente impresso di questo intervento mirato sulla dimostrazione?

____

____

____

____

____

____

Provenienza delle figure

Capitolo 1:

- 1.1, 1.10, 1.11: Rappresentazione personale realizzata utilizzando GeoGebra, ispirata a Hanna G., de Villiers M., *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*, Springer
- 1.2: Youtube https://www.youtube.com/
- 1.3, 1.6, 1.7, 1.9, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15, 1.16, 1.17, 1.18, 1.20, 1.21: Wikipedia, https://it.wikipedia.org/wiki/Pagina_principale
- 1.19: Dispense del corso di *Fondamenti della matematica*
- 1.4: https://maddmaths.simai.eu/divulgazione/pitagora/
- 1.5: https://biografieonline.it
- 1.8: https://scienzaatscuola.it
- 1.22, 1.23, 1.24, 1.25, 1.26, 1.27: Maschio S., *Tecniche dimostrative. La logica incontra la matematica*, Scienza Express, 2019

Capitolo 2:

- 2.1: Dispense del corso di *Fondamenti della matematica*
- 2.2: Rappresentazione personale realizzata utilizzando GeoGebra, ispirata a Villani V., *Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Geometria)*, Pitagora Editrice, Bologna

Capitolo 3:

- 3.1: Rappresentazione personale realizzata utilizzando GeoGebra
- 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24, 3.25: Istogrammi realizzati utilizzando Excel, rappresentanti i risultati dei Questionari iniziali e conclusivi delle due sperimentazioni
- 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.18, 3.19, 3.20, 3.26, 3.27, 3.28, 3.29, 3.30, 3.31, 3.32, 3.33: Scannerizzazioni delle risposte degli studenti a domande aperte dei Questionari o di compiti assegnati. È stata richiesta l'autorizzazione a pubblicare tali contenuti in modo anonimo.

Bibliografia

[1] Agazzi, E., & Palladino, D. (1998). *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria dal punto di vista elementare*. Brescia: La Scuola.

[2] Antonini, S. (2016). *Educare all'argomentazione. Tavola rotonda.* XXXIII Convegno UMI-CIIM. Università di Pavia. Disponibile in https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2016/11/Antonini_UMI-CIIM2016.pdf.

[3] Antonini, S. (2022). *Esempi e controesempi, questi sconosciuti.* Ciclo di conferenze: *Le difficoltà in matematica all'università e nel passaggio scuola secondaria di secondo grado - università.* Università di Ferrara

[4] Baccaglini Frank, A., Di Martino, P., Natalini, R., & Rosolini, G. (2018). *Didattica della matematica.* Milano; Firenze: Mondadori Università.

[5] Bergamini, M., Trifone, A., & Barozzi, G. (2010). *Geometria.Blu.* Bologna: Zanichelli Editore.

[6] Bergamini M., Trifone A., & Barozzi G. (2012). *Manuale blu 2.0 di matematica. Equazioni, disequazioni e funzioni. Geometria analitica* Bologna: Zanichelli Editore.

[7] Bergamini, M., Trifone, A., & Barozzi, G. (2016). *Matematica.Blu* (2 ed.). Bologna: Zanichelli Editore.

[8] Bergamini M., Trifone A., & Barozzi G. (2020). *Manuale blu 2.0 di matematica* (3 ed.). Bologna: Zanichelli Editore.

[9] Bernardi, C. (2019 Novembre-Dicembre). Esplorare e dimostrare. Esempi e riflessioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 42*, 582-595.

[10] Bonotto, C., Dispense del corso di *Fondamenti della matematica.* Università degli Studi di Padova. A.A. 2019/2020.

[11] Bottazzini, U. (1990). *Il flauto di Hilbert: storia della matematica moderna e contemporanea.* Torino: UTET libreria.

[12] Boyer, C. B. (1980). *Storia della matematica.* Milano: Mondadori.

[13] Brigaglia, A., Raspanti, M.A., & Rogora, E. (2020). Uso di un software di Geometria Dinamica nella formazione dei futuri insegnanti. Disponibile in: arXiv:2012.05881 [math.HO] https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.05881

[14] Comitato editoriale di Archimede. (2022 Aprile-Giugno). Di cosa parliamo quando parliamo di dimostrazionme.*Archimede. Rivista per gli insegnanti e i cultori di matematiche pure e applicate, 74*, 58-59.

[15] D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

[16] De Villiers, M.D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*, 17-24.

[17] Enriques, F. (1985). *Problemi della scienza* (Rist. anast. della 2. ed). Bologna: Zanichelli.

[18] Fischbein, E., & Engel, I. (1989) . Difficoltà psicologiche nella comprensione del principio di induzione matematica. *La matematica e la sua didattica, 3*, 43-45.

[19] Grabiner, J.V. (2012). Why Proof? A Historian's Perspective. In Hanna, G., & de Villiers, M. (editors), *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (p. 147-167). Dordrecht: Springer Netherlands.

[20] Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2*, 805-842.

[21] Hoelz, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of geometry. *International Journal of Computer for Mathematical Learning, 1*,169–187.

[22] Kline, M. (1991). *Storia del pensiero matematico.* Torino: Einaudi Editore.

[23] Laborde, C. (1992). Solving problems in computer based geometry environment: The influence of the features of the software. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 92*, 128–135.

[24] Lolli, G. (1988). *Capire una dimostrazione: il ruolo della logica nella matematica.* Bologna: Il Mulino.

[25] Lolli, G. (2005). *QED. Fenomenologia della dimostrazione.* Torino: Bollati Boringhieri.

[26] Mariotti, M.A. (2001). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 25–53.

[27] Mariotti, M.A. (2005). *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria.*, Bologna: Pitagora.

[28] Mariotti, M.A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In Gutiérrez, A., & Bolero, P. (eds.) *Handbook of research on tha psychology of mathematics education.* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense.

[29] Mariotti, M.A. (2022 Aprile-Giugno). Argomentare, spiegare, dimostrare. *Archimede. Rivista per gli insegnanti e i cultori di matematiche pure e applicate, 74*, 67–76.

[30] Maschio, S. (2019). *Tecniche dimostrative. La logica incontra la matematica.* Trieste: Scienza Express.

[31] Maschio, S. (2019 Novembre-Dicembre). Emancipare la dimostrazione dalla geometria euclidea nella didattica della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 42*, 555-567.

[32] Mazzanti, G., Roselli, V., & Tomasi, L. (2013). Alcune osservazioni sui concetti di definizione e dimostrazione nell'insegnamento della matematica. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate.* vol. 36B, N. 1, 2, 3.

[33] Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, Direzione Generale Ordinamenti Scolastici, Unione Matematica Italiana, Società Italiana di Statistica. (2004). *Matematica 2003. La Matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica. Ciclo secondario.* Lucca: Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri".

[34] Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, Direzione Generale Ordinamenti Scolastici, Unione Matematica Italiana, Società Italiana di Statistica. (2004). *Matematica 2004. La Matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica. Ciclo secondario: quinta classe.* Lugo di Romagna: Liceo Scientifico Statale "G. Ricci Curbastro".

[35] MIUR. (2010a). *Indicazioni nazionali degli obiettivi specifici di apprendimento per i licei.*Disponibile in http://nuovilicei.indire.it/.

[36] MIUR. (2010b) *Istituti Tecnici. Linee Guida per il passaggio al nuovo ordinamento.* Disponibile in http://nuovitecnici.indire.it/.

[37] MIUR. (2010c). *Istituti Professionali. Linee Guida per il passaggio al nuovo ordinamento.* Disponibile in http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_professionali/linee_guida/_LINEE%20GUIDA%20ISTITUTI%20%20PROFESSIONALI_.pdf.

[38] MIUR. (2010d). *Liceo scientifico - opzione scienze applicate.* Disponibile in https://www.miur.gov.it/liceo-scientifico-opzione-scienze-applicate.

[39] Paola, D., & Robutti, O. (2001). La dimostrazione alla prova. Itinerari per un insegnamento integrato di algebra, logica, informatica, geometria. *Matematica e aspetti didattici*, quaderni del MPI, 45, 97-202. Lucca: MPI.

[40] Tomasi, L. (2012). Il principio di induzione matematica: considerazioni didattiche. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate.* vol. 35-A-B, N.5.

[41] Tomasi, L. (2019). Argomentare, congetturare, dimostrare: cosa cambia con l'uso di un software? *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate.* vol. 42 A-B, N.5.

[42] Tomasi, L. (2021). *Verso la dimostrazione nella scuola secondaria di II grado. Considerazioni didattiche.* Seminario per la Scuola secondaria di II grado, 35 Convegno nazionale *La didattica della matematica:riflessioni teoriche e proposte concrete*, Castel San Pietro Terme: Incontri con la Matematica XXXV.

[43] Tomasi, L., Dispense del corso di *Matematiche elementari da un punto di vista superiore.* Università degli Studi di Padova. A.A. 2021/2022.

[44] Treccani *Vocabolario Treccani* online, http://www.treccani.it/vocabolario/

[45] Trudeau, R. (1991) . *La rivoluzione non euclidea.* Torino:Bollati Boringhieri.

[46] Villani, V. (2006). *Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Geometria).* Bologna: Pitagora Editrice.

[47] Villani, V., Bernardi, C., Zoccante, S., & Porcaro R. (2012). *Non solo calcoli. Domande e risposte sui perché della matematica.* Milano: Springer.

[48] Zanardo, A., & Ciraulo, F., Dispense del corso di *Metodo Assiomatico e Teoria degli Insiemi.* Università degli Studi di Padova. A.A. 2020/2021.