

Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

***Relazione per la prova finale***  
***Estensione del modello di De Saint Venant con particolare***  
***riferimento alla torsione non uniforme***

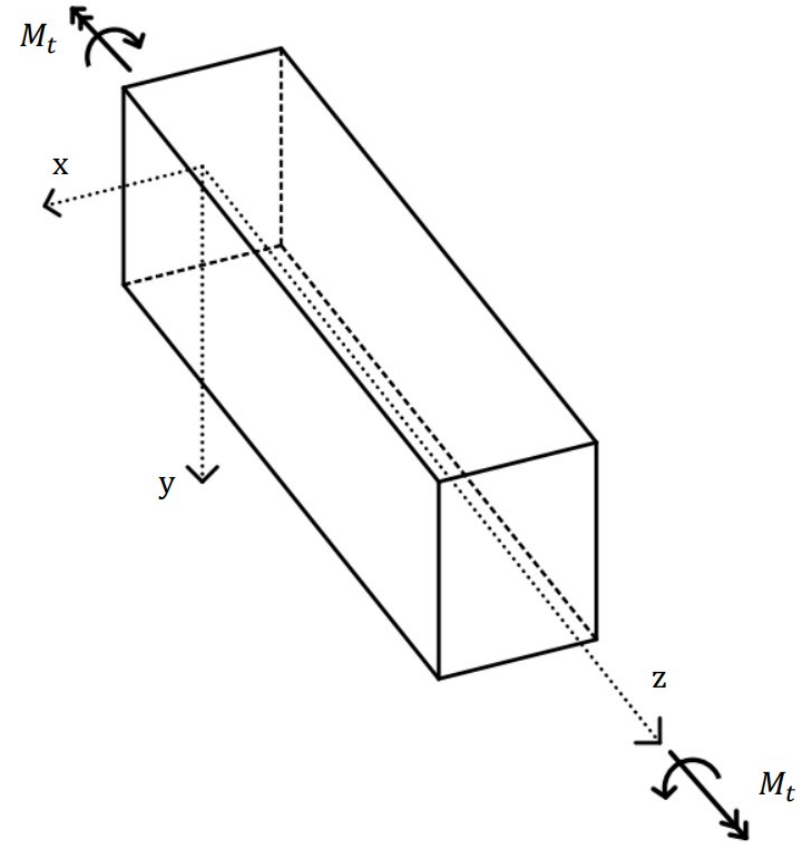
Tutor universitario: Prof. Lorenzo Sanavia

Laureando: Alberto Putti

Padova, 16/09/2022

## Schema della presentazione

- Funzione di ingobbamento
- Centro di torsione
- Torsione non uniforme



*Trave a sezione non simmetrica radialmente  
sollecitata da momento torcente*

Spostamenti:

$$u(P) = -\vartheta zy$$

$$v(P) = \vartheta zx$$

$$w(P) = \vartheta \psi_g(x, y)$$

Deformazioni:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{zx} = \vartheta \left( \frac{\partial \psi_g}{\partial x} - y \right)$$

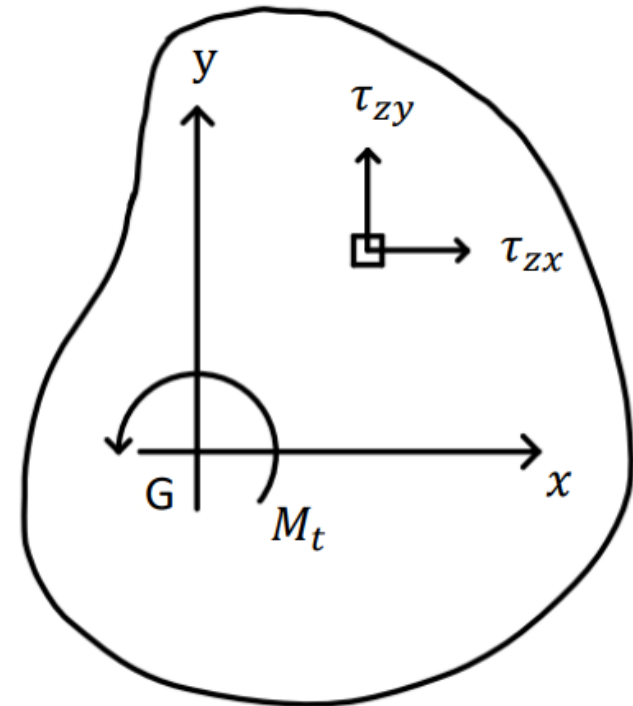
$$\gamma_{zy} = \vartheta \left( \frac{\partial \psi_g}{\partial y} + x \right)$$

Tensioni:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{zx} = G\vartheta \left( \frac{\partial \psi_g}{\partial x} - y \right)$$

$$\tau_{zy} = G\vartheta \left( \frac{\partial \psi_g}{\partial y} + x \right)$$



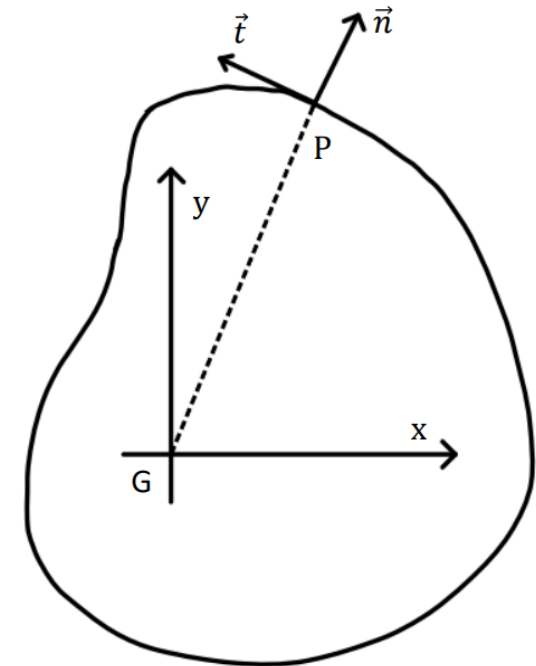
*Sezione generica e tensioni agenti*

Equilibrio:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = 0 \quad \Longrightarrow \quad G \vartheta \left( \frac{\partial^2 \psi_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_g}{\partial y^2} \right) = 0$$

Condizioni al contorno:

$$\mathbf{T} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \psi_g}{\partial \vec{n}} = y t_y + x t_x = (P - G) \cdot \vec{t}$$



*Sezione generica e vettori normale e tangente alla superficie*

Spostamenti:

$$u(P) = -\vartheta z(y - y_c)$$

$$v(P) = \vartheta z(x - x_c)$$

$$w(P) = \vartheta \psi_c(x, y)$$

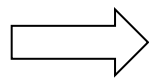
Tensioni:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{zx} = G\vartheta \left( \frac{\partial \psi_c}{\partial x} - y + y_c \right)$$

$$\tau_{zy} = G\vartheta \left( \frac{\partial \psi_c}{\partial y} + x - x_c \right)$$

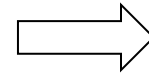
Funzione di ingobbamento rispetto a C:



$$\nabla^2 \psi_c(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial(\psi_c + y_c x - x_c y)}{\partial \vec{n}} = y \alpha_x - x \alpha_y$$

$\psi_t = \psi_c + y_c x - x_c y$  è soluzione



$\psi_c = \psi_g - y_c x + x_c y + k$

Si ottengono le stesse  
tensioni tangenziali

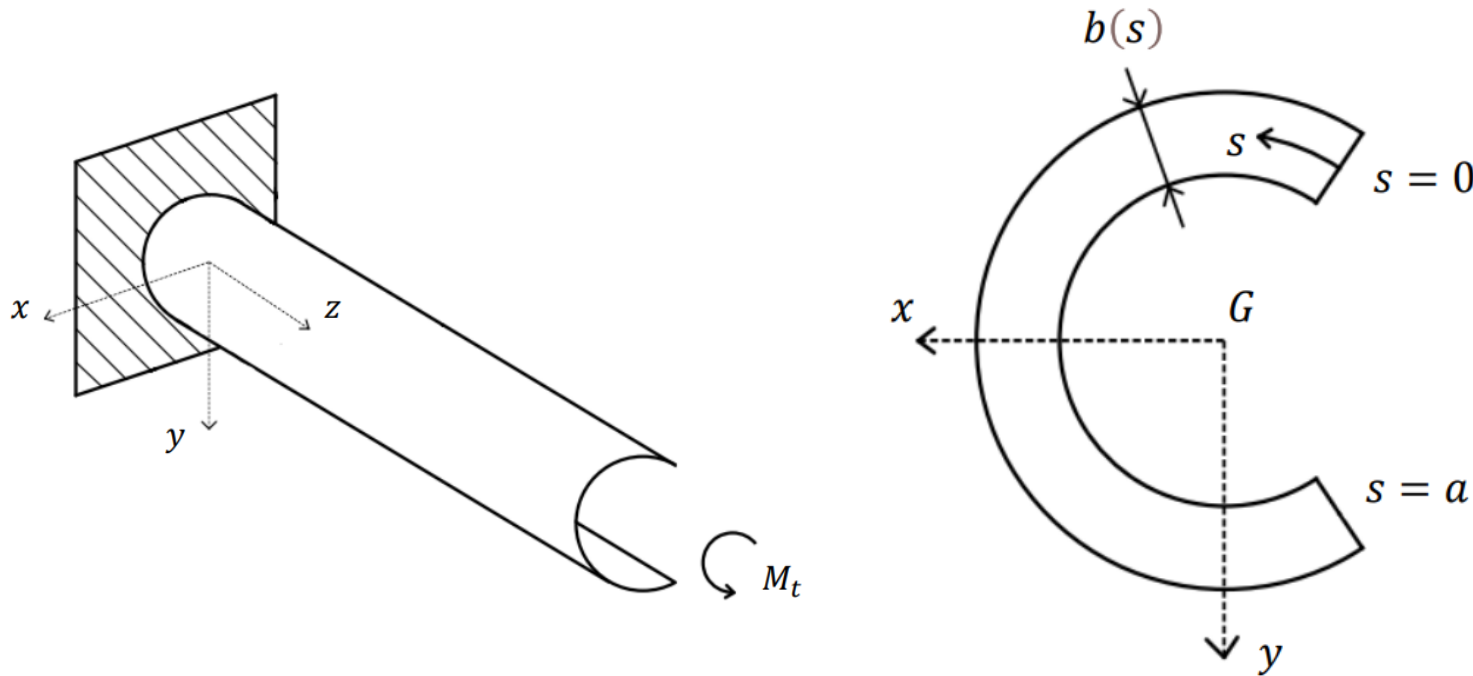
$$\tau_{zx} = G\vartheta \left( \frac{\partial \psi_g}{\partial x} - y \right)$$

$$\tau_{zy} = G\vartheta \left( \frac{\partial \psi_g}{\partial y} + x \right)$$

Ponendo:  $\int_A wxdA = \int_A wydA = 0$

Si ricava:  $\left\{ \begin{array}{l} x_c = -\frac{1}{I_x} \int_A \psi_g y dA \\ y_c = \frac{1}{I_y} \int_A \psi_g x dA \end{array} \right.$

Nell'esempio dell'incastro la torsione uniforme non è più accettabile in quanto il vincolo influenza gli spostamenti longitudinali, viene quindi introdotta la torsione non uniforme:  $\vartheta = \vartheta(z)$ .



Trave a sezione aperta in parete sottile e particolare della sezione

Spostamenti:

$$u(P) = -\vartheta(z)z(y(s) - y_c)$$

$$v(P) = \vartheta(z)z(x(s) - x_c)$$

$$w(P) = \vartheta(z)\psi_c(s)$$

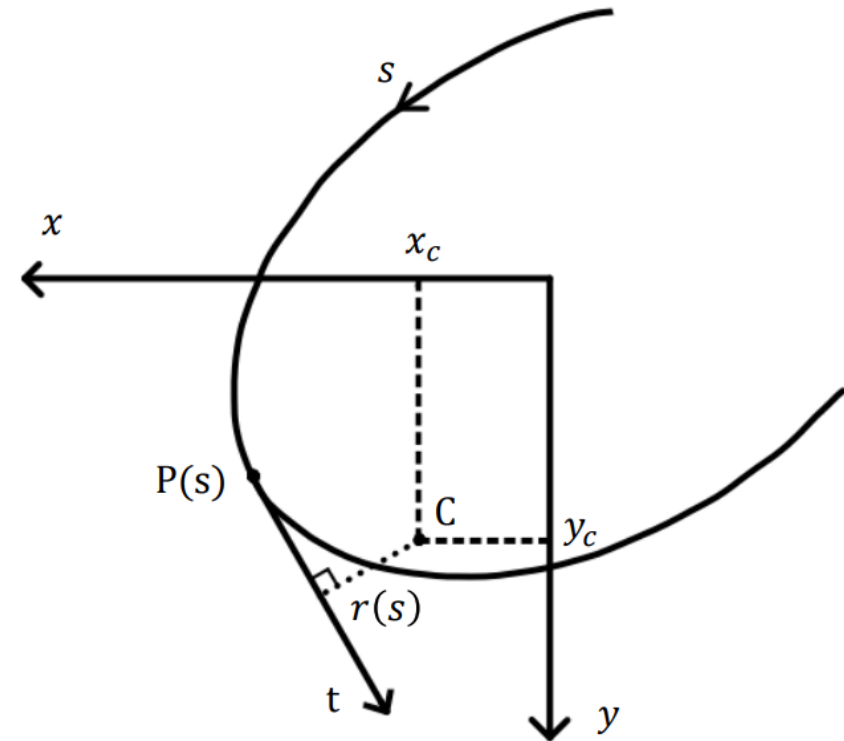
Funzione di ingobbamento per sezioni aperte in parete sottile:

$$\psi_c(s) = 2(\bar{\Omega} - \Omega(s))$$

Dove:

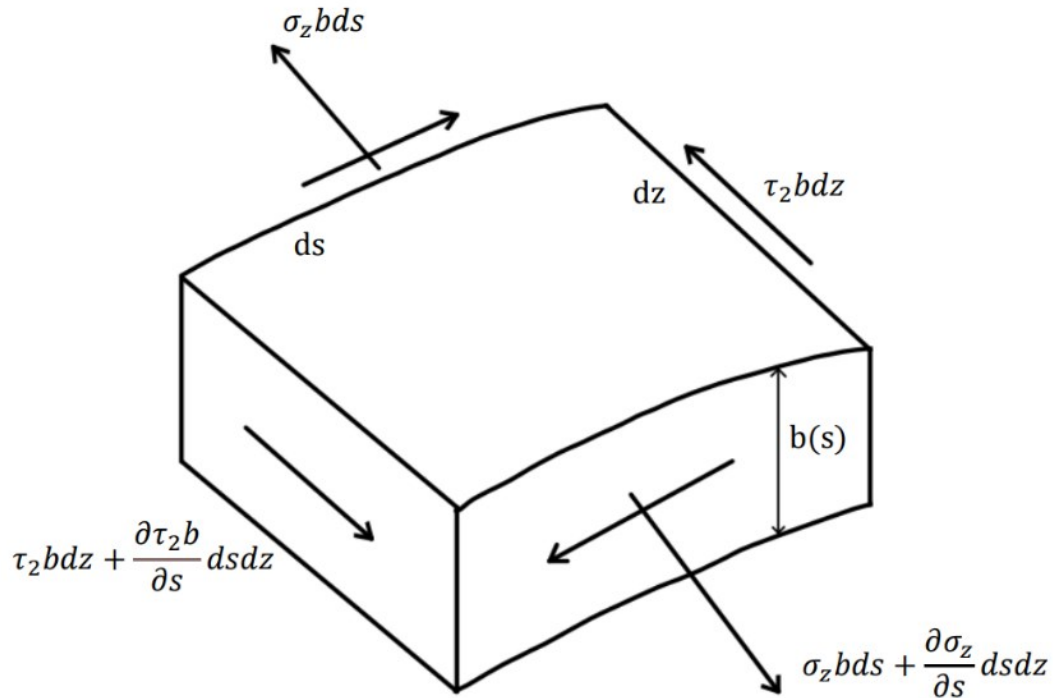
$$\Omega(s) = \frac{1}{2} \int_0^s r(s') ds' \quad \bar{\Omega} = \frac{1}{A} \int_A \Omega dA$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \vartheta'(z) \psi(s) \quad \sigma_z = E \varepsilon_z$$



Coordinata curvilinea della sezione





*Elemento infinitesimo della trave*

Equilibrio alla traslazione lungo z:

$$\frac{\partial \tau_2 b}{\partial s} = -b \frac{\partial \sigma_z}{\partial s} = -Eb(s)\vartheta''(z)\psi_c(s)$$

Flusso di tensioni tangenziali:

$$q(s, z) = \tau_2 b = -E\vartheta''(z) \int_0^s b(s')\psi_c(s') ds'$$

Momento torcente dovuto al flusso:

$$M_{t2} = \int_0^a q(s, z)r(s) ds = -E\vartheta''(z) \int_0^a \left( \int_0^s b(s')\psi_c(s') ds' \right) r(s) ds = -E\vartheta''(z)\Gamma$$

Rigidità di ingobbamento:

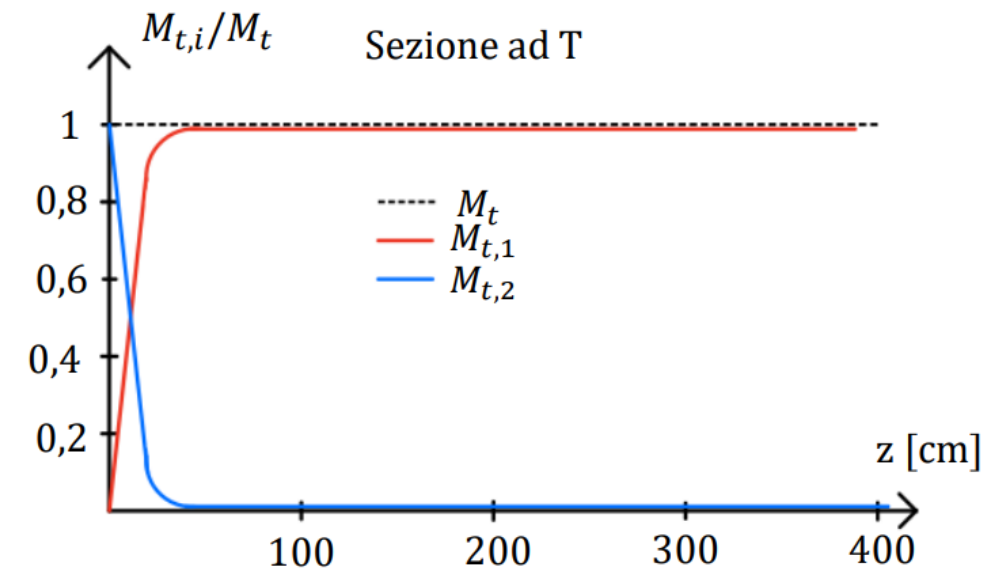
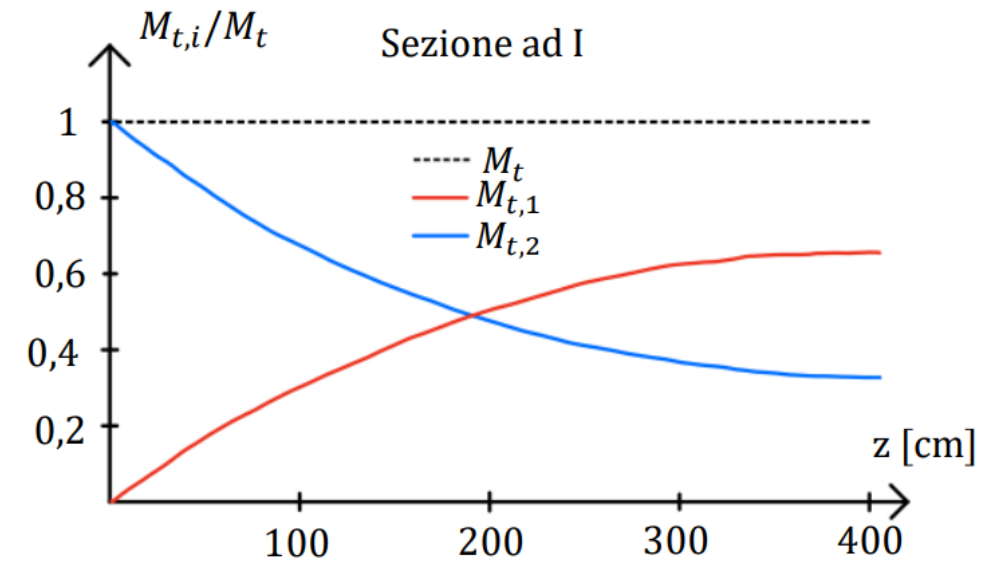
$$\Gamma = \int_0^a \left( \int_0^s b(s') \psi_c(s') ds' \right) r(s) ds = \int_A \psi_c^2 dA$$

Il momento  $M_{t2}$  rappresenta il contributo degli effetti del vincolo, insieme al momento  $M_{t1}$  previsto dal DSV equilibra il momento applicato all'estremo libero della trave.

$$M_t = M_{t1} + M_{t2} = GJ\vartheta(z) - E\vartheta''(z)\Gamma$$

Confronto della torsione e dei momenti torcenti primari e secondari in vari tipi di sezioni (H=40 cm; B=20 cm; spessore costante)

z (cm)	I	T	Rett.
40	0.011	0.625	0.999
80	0.041	0.811	1
120	0.086	0.874	1
160	0.142	0.905	1
200	0.202	0.924	1
400	0.417	0.962	1
600	0.631	0.975	1
800	0.721	0.981	1
1000	0.776	0.985	1
5000	0.955	0.999	1



- Sezione generica  $\rightarrow$  spostamenti fuori piano  $\rightarrow$  funzione di ingobbamento
- Tensioni indipendenti da  $P \rightarrow$  centro di torsione
- Incastro  $\rightarrow$  torsione non uniforme  $\rightarrow$  ripartizione momento torcente

## Bibliografia

Corradi Dall'acqua L., Meccanica delle strutture: il comportamento dei mezzi continui, McGraw-Hill, Milano 1992

Corradi Dall'acqua L., Meccanica delle strutture: le teorie strutturali e il metodo degli elementi finiti, McGraw-Hill, Milano 1992

Lenci S., Lezioni di meccanica strutturale, Pitagora editrice, Bologna 2009

Simoni L., Lezioni di scienza delle costruzioni, Libreria progetto, Padova 1998