



# **Università degli studi di Padova**

Facoltà di ingegneria

## **DIPARTIMENTO DI TECNICA E GESTIONE DEI SISTEMI INDUSTRIALI**

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Meccanica e  
Meccatronica

### **ANALISI TRIDIMENSIONALE AGLI ELEMENTI FINITI DI UNA TRAVE A CASSONE CON DIVERSI SPESSORI SOLLECITATA A TORSIONE**

Relatore: Ch.mo Prof. Michele Zappalorto

Correlatore: Ing. Paolo Andrea Carraro

Laureando: Scapin Davide

Anno Accademico: 2013 - 2014



<b>1.INTRODUZIONE .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1.INTRODUZIONE AL PROBLEMA .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2.INTRODUZIONE AL FEM .....</b>	<b>3</b>
<b>2.FORMULAZIONI TEORICHE .....</b>	<b>5</b>
<b>2.1.FORMULA DI BREDT .....</b>	<b>5</b>
<b>3.MODELLAZIONE FEM .....</b>	<b>7</b>
<b>3.1.IL SOFTWARE .....</b>	<b>7</b>
<b>3.2.PREPROCESSOR .....</b>	<b>7</b>
<b>3.3.SOLUTION .....</b>	<b>14</b>
<b>3.4.POSTPROCESSOR .....</b>	<b>15</b>
<b>4.ANALISI DEI RISULTATI .....</b>	<b>19</b>
<b>4.1.PREMESSE .....</b>	<b>19</b>
<b>4.2.TRAVE CON SPESSORE 1 MM .....</b>	<b>20</b>
4.2.1.Tensioni Teoriche .....	20
4.2.2.Path 1 .....	20
4.2.3.Path 2 .....	21
4.2.4.Confronto teoria - FEM.....	22
4.2.5.Commenti .....	23
<b>4.3.TRAVE CON SPESSORE 2 MM .....</b>	<b>24</b>
4.3.1.Tensioni Teoriche .....	24
4.3.2.Path 1 .....	24
4.2.3.Path 2 .....	25
4.2.4.Confronto teoria - FEM.....	26
4.3.5.Commenti .....	27
<b>4.4.TRAVE CON SPESSORE 3 MM .....</b>	<b>28</b>
4.4.1.Tensioni Teoriche .....	28
4.4.2.Path 1 .....	28
4.4.3.Path 2 .....	29
4.4.4.Confronto teoria - FEM.....	30
4.4.5.Commenti .....	31
<b>4.5.TRAVE CON SPESSORE 5 MM .....</b>	<b>32</b>
4.5.1.Tensioni Teoriche .....	32
4.5.2.Path 1 .....	32
4.5.3.Path 2 .....	33
4.5.4.Confronto teoria - FEM.....	34
4.5.5.Commenti .....	35
<b>4.6.TRAVE CON SPESSORE 10 MM .....</b>	<b>36</b>
4.6.1.Tensioni Teoriche .....	36
4.6.2.Path 1 .....	36
4.6.3.Path 2 .....	37
4.6.4.Confronto teoria - FEM.....	38
4.6.5.Commenti .....	39
<b>4.7.TRAVE CON SPESSORE 15 MM .....</b>	<b>40</b>
4.7.1.Tensioni Teoriche .....	40
4.7.2.Path 1 .....	40
4.7.3.Path 2 .....	41
4.7.4.Confronto teoria - FEM.....	42

4.6.5. <i>Commenti</i> .....	43
<b>4.8. CONSIDERAZIONI SUGLI ERRORI DEI RISULTATI</b> .....	<b>44</b>
<b>4.9. CONFRONTO CON TRAVE A SEZIONE QUADRA CAVA</b> .....	<b>49</b>
<b>4.10. CONSIDERAZIONI SULLA SCHEMATIZZAZIONE DEL MOMENTO</b> .....	<b>51</b>
<b>5. CONCLUSIONI</b> .....	<b>57</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	<b>59</b>



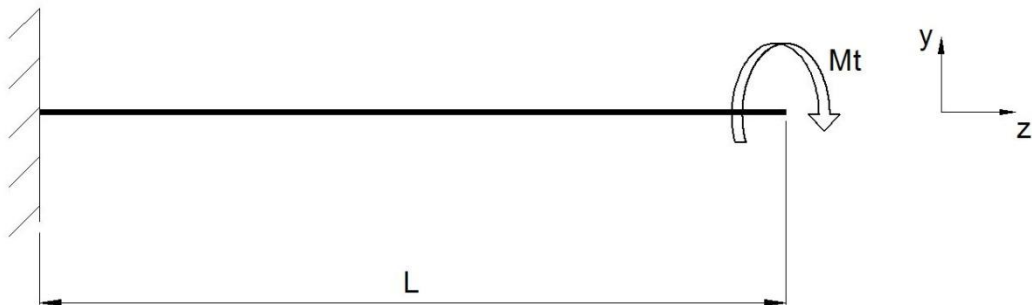


# 1.INTRODUZIONE

## 1.1.Introduzione al problema

L'obiettivo dello studio svolto è stato l'analisi agli elementi finiti dello stato tensionale di una trave a cassone incastrata ad una estremità, soggetta ad un momento torcente. Tale analisi è stata condotta per diversi spessori della trave, con la finalità di confrontare i risultati ottenuti dall'analisi FEM, con quelli ricavabili mediante trattazione teorica del problema, in particolare utilizzando la formula di Bredt. Si è potuto quindi valutare se, e quanto, la trattazione teorica descriva il problema reale con un accettabile grado di approssimazione.

Nel caso in esame la geometria da considerare è quella riportata in *Figura 1.1*, cioè quella di una trave con asse longitudinale  $z$ , di lunghezza  $L$ , incastrata ad una estremità, a cui è applicato un momento torcente  $Mt$ . La sezione della trave, riportata in *Figura 1.2*, ha dimensioni  $A \times B$  e uno spessore costante  $t$ . Tale parametro verrà fatto variare nelle diverse analisi, passando da valori minori a valori sempre via via più grandi.



*Figura 1.1. Schema della trave*

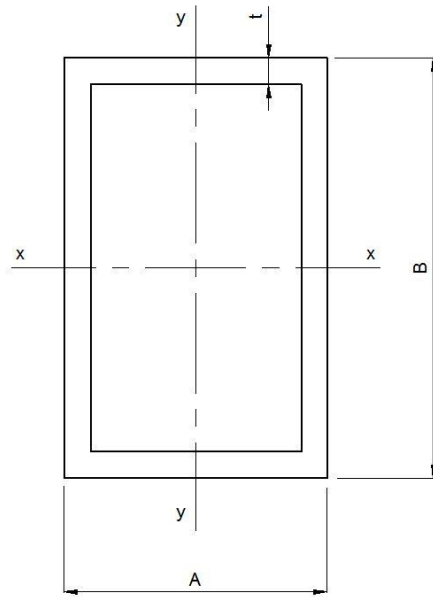


Figura 1.2. Vista in sezione della trave

Con:

$A = 50 \text{ mm}$

$B = 80 \text{ mm}$

$L = 700 \text{ mm}$

$M_t = 1000000 \text{ Nmm}$

$t = 1, 2, 3, 5, 10, 15 \text{ mm}$

I dati FEM raccolti sono stati presi sulla mezzeria della trave, in modo da poter trascurare effetti localizzati di concentrazione delle tensioni dovute alla vicinanza del vincolo, da una parte, e del punto di applicazione del momento, dall'altra. Considerando quindi la situazione sulla mezzeria della trave è plausibile pensare che le tensioni si siano uniformate e non risentano dei fenomeni precedentemente descritti. In particolare poi, i dati sulla distribuzionale tensionale sono stati raccolti lungo i due tracciati indicati in *Figura 1.3*.



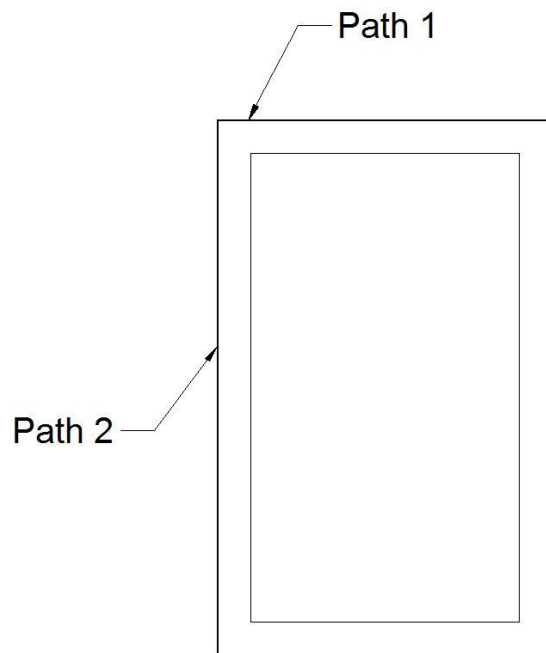


Figura 1.3. Definizione dei Path

## 1.2.Introduzione al FEM

Oggigiorno nella stragrande maggioranza delle applicazioni a livello ingegneristico, è quasi impossibile pensare di poter utilizzare formulazioni derivanti da trattazioni teoriche ed arrivare a risultati che descrivano correttamente lo stato del corpo in esame, senza che vi siano errori dovuti ad approssimazioni. A volte, per analisi grossolane di primo tentativo, le trattazioni che derivano dalla teoria vanno più che bene per trovare quantomeno l'ordine di grandezza degli stati di tensione e deformazione di un corpo; questi però molto frequentemente non rispecchiano quello che accade in realtà, perché appunto si compiono delle approssimazioni e delle assunzioni che non sempre sono del tutto coerenti con la teoria.

In questo ambito trovano spazio i metodi di studio agli elementi finiti, o FEM (Finite Element Method) che si prestano bene ad essere automatizzati tramite calcolatore e che quindi permettono di risolvere in maniera automatica strutture complesse anche molto diverse fra loro.

Tali metodi prevedono di discretizzare un dominio continuo in tanti sottodomini continui di forma elementare, formando una griglia, detta *mesh*. Esistono diverse forme che tali sottodomini possono assumere: triangoli e quadrilateri per domini 2D, esaedri e tetraedri per domini 3D. Nel caso 2D, ad esempio, l'elemento triangolare è per sua natura più rigido dell'elemento a quattro lati, per questo in ottica di un'analisi FEM, un

elemento triangolare approssimerà peggio la realtà rispetto a un elemento quadrilatero, che sarà maggiormente in grado di seguire gli spostamenti reali del corpo.

Su ciascun elemento, detto appunto elemento finito, la soluzione del problema è definita da una combinazione lineare di funzioni, dette funzioni di forma. Maggiore è il grado di tali funzioni, maggiore sarà il grado di accuratezza della soluzione numerica trovata.

Si noti che anche utilizzando il metodo degli elementi finiti si possono commettere molte approssimazioni, fra le quali il considerare perfettamente omogeneo, isotropo e lineare il materiale, oppure il fatto di utilizzare elementi di forma elementare troppo grandi, che quindi non riescono a descrivere correttamente lo stato del corpo. Relativamente a questo problema è utile compiere un'analisi di sensitività, facendo diverse prove infittendo sempre più la mesh. In questo modo i risultati saranno affetti da minor approssimazione, a scapito del tempo necessario all'analisi, in quanto il numero di equazioni da risolvere aumenterà di molto. Si è visto che da un certo numero di elementi finiti in poi, anche infittendo la mesh, i risultati rimangono pressoché invariati e si raggiunge la cosiddetta convergenza. A questo punto è possibile definire il numero di elementi minimo che dia una soluzione stabile ed accettabile.

## 2.FORMULAZIONI TEORICHE

### 2.1.Formula di Bredt

Nel caso di sollecitazione di torsione su sezioni circolari è possibile l'utilizzo della formula di Coulomb, che prevede una distribuzione delle tensioni tangenziali dovute alla torsione di tipo direttamente lineare al raggio e calcolabile tramite il rapporto del momento applicato con un il momento d'inerzia polare, il tutto moltiplicato per il raggio.

Nel caso di sezioni non circolari, però, le ipotesi preliminari fatte per la trattazione di Coulomb cadono in difetto in quanto si verifica il fenomeno detto dell'ingobbamento.

Per lo studio di questi casi è possibile utilizzare l'analogia idrodinamica proposta da Kelvin oppure quella della membrana proposta da Prantl, che mettono in relazione lo stato tensionale di un corpo soggetto a torsione, con lo stato di un fluido perfetto o di una membrana.

Nel caso particolare di sezioni in parete sottile a profilo chiuso, però, è possibile determinare matematicamente una semplice relazione che lega le tensioni tangenziali al momento torcente applicato e alla geometria della sezione. Tale relazione è detta formula di Bredt:

$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot A^* \cdot t}$$

in cui  $M_t$  è il momento torcente applicato alla sezione,  $t$  è lo spessore e  $A^*$  è l'area racchiusa dalla linea media (*Figura 2.1*).

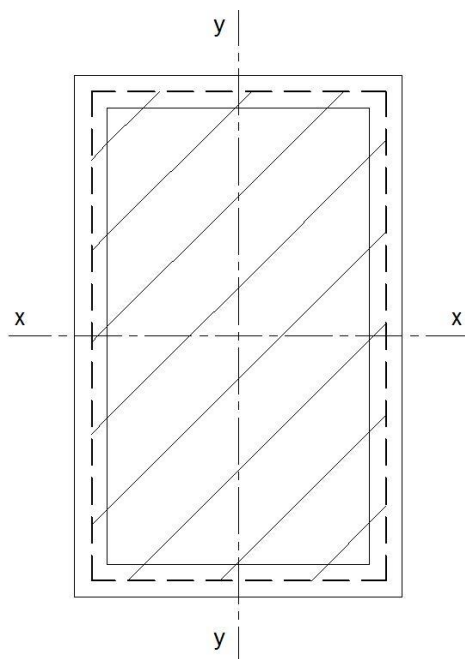


Figura 2.1. Particolare area racchiusa dalla linea media

L'ipotesi fondamentale di questa trattazione è quella dell'uniformità delle tensioni tangenziali dovute al momento torcente, lungo la direzione dello spessore. Questo è tanto più vero, quanto minore è tale dimensione. Infatti per spessori sottili è ragionevole ipotizzare che le tensioni presenti da una parte, siano pressoché costanti lungo la direzione dello spessore, visto appunto che questo è sottile.

Si fa poi uso dell'analogia idrodinamica con la quale si ipotizza di mettere in movimento un fluido perfetto all'interno della sezione. Essendo sottile lo spessore, la sezione a profilo chiuso può essere immaginata come un tubo di flusso (considerando una profondità unitaria), in cui la portata resta invariata, per definizione. Si ha quindi la costanza del prodotto velocità per area (per definizione di portata) e tramite l'uso dell'analogia idrodinamica, si fa corrispondere all'andamento della velocità, l'andamento delle tensioni tangenziali.

Si noti che, con questa trattazione, se lo spessore rimane costante, anche le tensioni tangenziali rimangono costanti.

# 3.MODELLAZIONE FEM

## 3.1.Il software

Per le analisi del problema in esame il software che è stato utilizzato è *Ansys*, uno dei programmi più completi per lo studio dei problemi con l'approccio agli elementi finiti. Come la maggior parte di software FEM, anche *Ansys* divide l'analisi in tre step:

*Preprocessor*, dove si descrive lo stato del corpo in esame, definendo geometrie, mesh, carichi e vincoli;

*Solution*, dove il calcolatore risolve i sistemi di equazioni derivanti dalla definizione dello stato del corpo descritto nella fase di *Preprocessor*, e cerca di arrivare a convergenza;

*Postprocessor*, dove l'utente può svolgere tutte le analisi del caso, sulla base dei risultati ottenuti dal calcolatore dopo la fase "*Solution*". In questa fase è possibile visualizzare, ad esempio, stati tensionali e deformativi del corpo, a seguito delle forze e dei vincoli associategli.

## 3.2.Preprocessor

Dopo aver avviato il programma *Ansys*, e aver impostato la directory dove andare a salvare il lavoro e il nome dell'analisi, si apre il menù a sinistra denominato *Preprocessor*.

Occorre innanzitutto definire che tipo di elementi si intendono utilizzare. Per l'analisi in questione saranno necessari dapprima elementi piani a 8 nodi, per creare la sezione e la mesh nel piano x-y, in seguito elementi solidi a 20 nodi, per creare la geometria tridimensionale della trave.

Per far questo, dal menù *Element Type* si aggiungono gli elementi *Quad 8 node 183* e *Brick 20 node 186*. A questo punto si conferma l'operazione e si esce dalla finestra.

Occorre poi definire il tipo di materiale che si andrà ad analizzare. Dal menù di sinistra si accede alla voce *Material Props* e successivamente al sottomenù *Material Models*. Quindi si seleziona

*Structural | Linear | Elastic | Isotropic*

e infine si inseriscono i valori di modulo elastico, pari a 206000 MPa, e di coefficiente di Poisson, pari a 0,3.

Si noti che non è necessario inserire in *Ansys* le unità di misura, basta avere l'accortezza di usare grandezze con unità coerenti e compatibili (es. lunghezze in mm, forze in N e tensioni in MPa).

A questo punto si conferma e si esce dalla finestra di immissione.

Ora è possibile definire le caratteristiche geometriche della sezione. Dapprima si individueranno dei punti strategici, detti *keypoints*, che verranno in seguito uniti con delle linee che rappresenteranno i contorni delle aree.

Per creare i *keypoints* occorre andare sul menù

*Preprocessor | Modeling | Create | Keypoints | On Working Plane*

e inserire i valori delle coordinate dei *keypoints*. Di seguito è riportato l'esempio per la sezione con spessore 5 mm. In *Tabella 3.1* vi sono le coordinate, in *Figura 3.1* vi è la visualizzazione a video.

<b>POS</b>	<b>x</b>	<b>y</b>	<b>z</b>
1	25	40	0
2	-25	40	0
3	-25	-40	0
4	25	-40	0
5	20	40	0
6	-20	40	0
7	-20	-40	0
8	20	-40	0
9	20	35	0
10	-20	35	0
11	-20	-35	0
12	20	-35	0
13	25	35	0
14	-25	35	0
15	-25	-35	0
16	25	-35	0

*Tabella 3.1. Coordinate keypoints per sezione con spessore 5 mm*

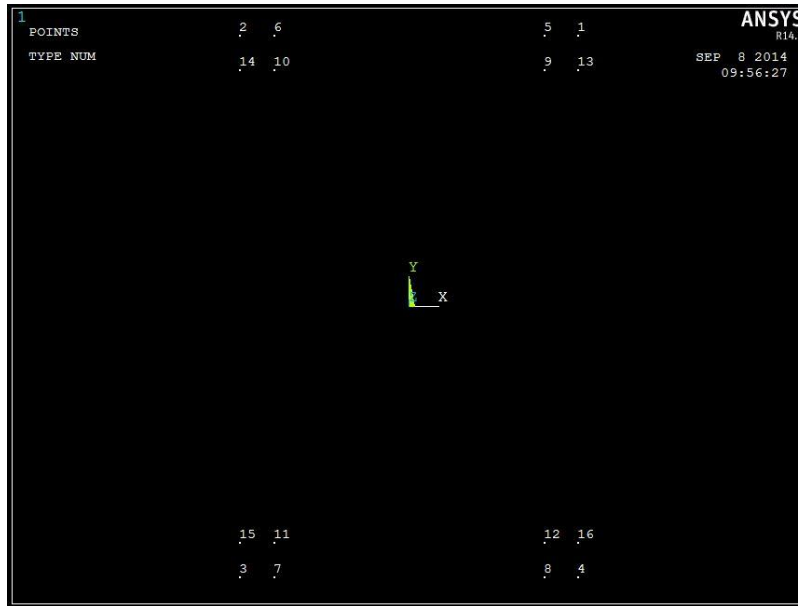


Figura 3.1. Visualizzazione a schermo dopo creazione keypoints

Quindi, dal menù gerarchico di sinistra:

*Preprocessor | Modeling | Create | Lines | Lines | Straight Line*

si vanno a creare le linee fra i *keypoints* (Figura 3.2)

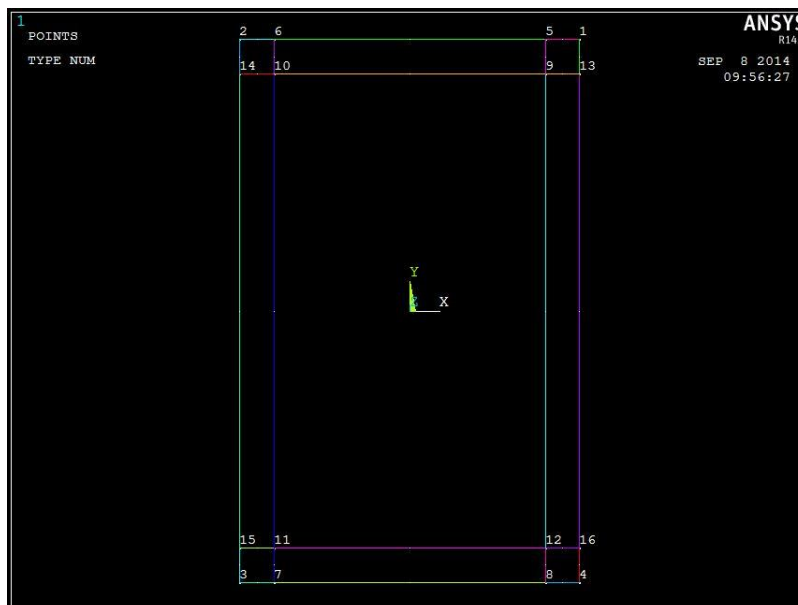


Figura 3.2. Visualizzazione a schermo dopo creazione lines

Infine con il comando:

*Preprocessor | Modeling | Create | Areas | Arbitrary | By Lines*

si vanno a selezionare le linee sul contorno delle varie aree, definendo così delle regioni (Figura 3.3).

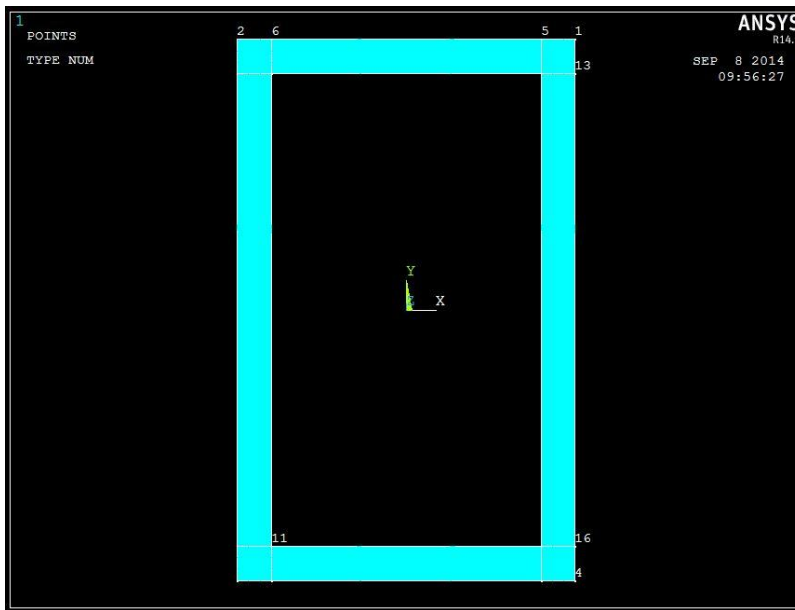


Figura 3.3. Visualizzazione a schermo dopo creazione Areas

Prima di dare profondità alla sezione con il comando *Extrude*, si crea la mesh della sezione piana. Per far questo occorre andare sulla voce *Meshing* del menù *Preprocessor* e, dopo aver controllato che su *Mesh Attributes | Default Attribs*, alla voce *[TIPE]* vi sia selezionato l'elemento piano a 8 nodi 183 (questo perché si sta ancora lavorando su un piano bidimensionale), si va a creare una *Mesh Mapped* sulle aree. Si vanno quindi a dividere le linee con le divisioni riportate in *Figura 3.4* con il comando:

*Preprocessor | Meshing | Size Cntrls | Manual Size | Lines | Picked Lines*



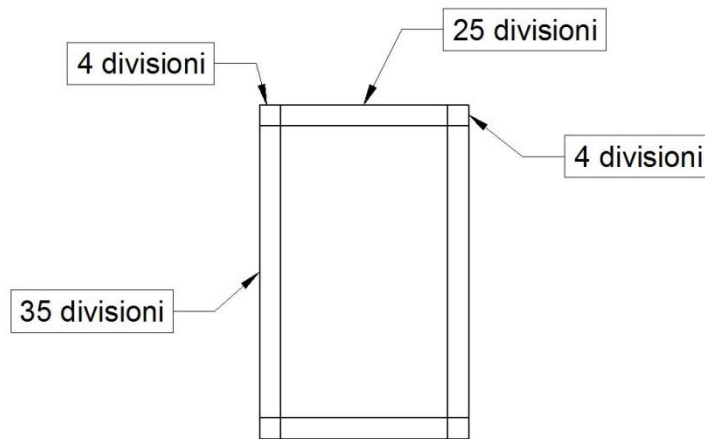


Figura 3.4. Particolare sul numero di divisioni delle linee

e infine si crea la mesh su tutte le aree (Figura 3.5) con il comando

*Preprocessor | Meshing | Mesh | Areas | Mapped | 3 or 4 sided*

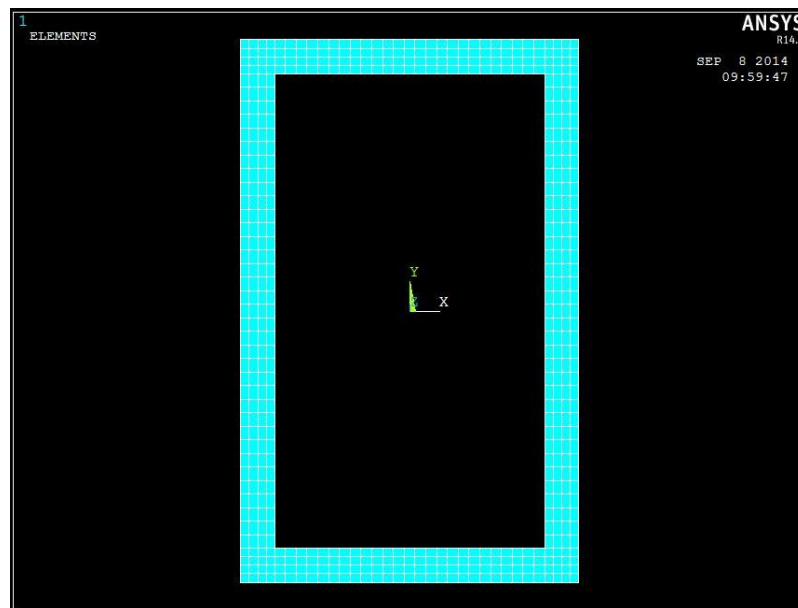


Figura 3.5. Visualizzazione a schermo dopo creazione della mesh 2D

A questo punto è possibile estrarre la sezione lungo il piano z, con il comando

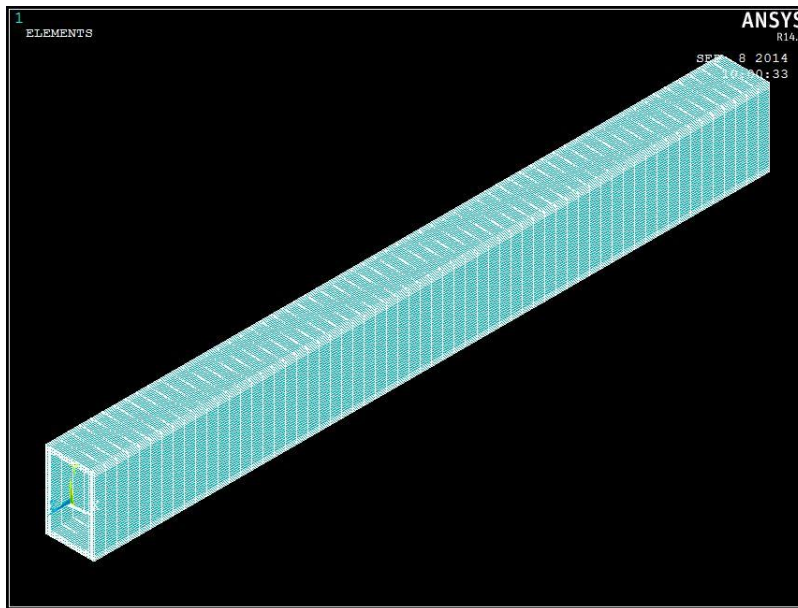
*Preprocessor | Modeling | Operate | Extrude*

avendo però l'accortezza di inserire nelle opzioni del comando *Elem Ext Opts*, alla voce *[TIPE]* l'elemento Brick 20 nodi 186 (in quanto ora si passa a lavorare sulle tre dimensioni), alla voce *No. Elem divs* il numero di suddivisioni lungo l'asse z (in questo

caso 60) e spuntando la voce *ACLEAR*, che permette di rimuovere tutti gli elementi piani preesistenti e di sostituirli con gli elementi sopra-selezionati (in questo caso *Brick 20 nodi 186*). Infine si esegue una estrusione tramite Offset XYZ, in particolare settando un offset di -700 nella direzione z operando con il comando

*Preprocessor | Modeling | Operate | Extrude | Areas | By XYZ Offset*

Si avrà una situazione come in *Figura 3.6*.



*Figura 3.6. Visualizzazione a schermo dopo operazione di estrusione*

Ora non resta che inserire vincoli e carichi.

Per quanto riguarda i primi occorre ruotare la sezione in modo tale da visualizzare la parte che andrà incastrata e, con il comando

*Preprocessor | Loads | Define Loads | Apply | Structural | Displacement | On Areas*

si selezionano le aree interessate e si bloccano tutti i gradi di libertà selezionando la voce *ALL DOF* (All Degree Of Freedom).

Riguardo all'imporre il momento torcente occorre fare una precisazione: in *Ansys* non è possibile inserire direttamente momenti, ma solo forze. Bisogna quindi fare in modo di inserire "manualmente" una coppia sulla sezione d'estremità, applicando delle forze sui nodi periferici in modo tale che il prodotto *Forza x Braccio* dia esattamente il valore del momento voluto.

Inizialmente si era ipotizzato di schematizzare il momento torcente con una coppia di forze agenti solo sui due lati orizzontali (Figura 3.7), ma le analisi davano luogo a risultati molto strani, specialmente per spessori piccoli (si analizzerà nel dettaglio al **Paragrafo 4.10**). Si è passati quindi a schematizzare il momento come in (Figura 3.8).

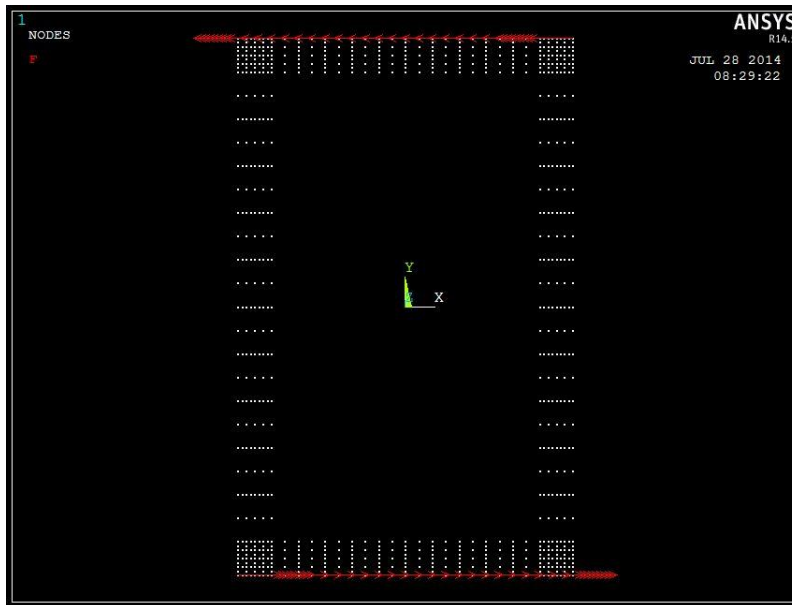


Figura 3.7.

Primo tentativo di schematizzazione del momento.

In questo caso si ha:

$$2*(F*A/2) = Mt$$

Quindi:

$$F = Mt/A = \dots = 12500 \text{ N}$$

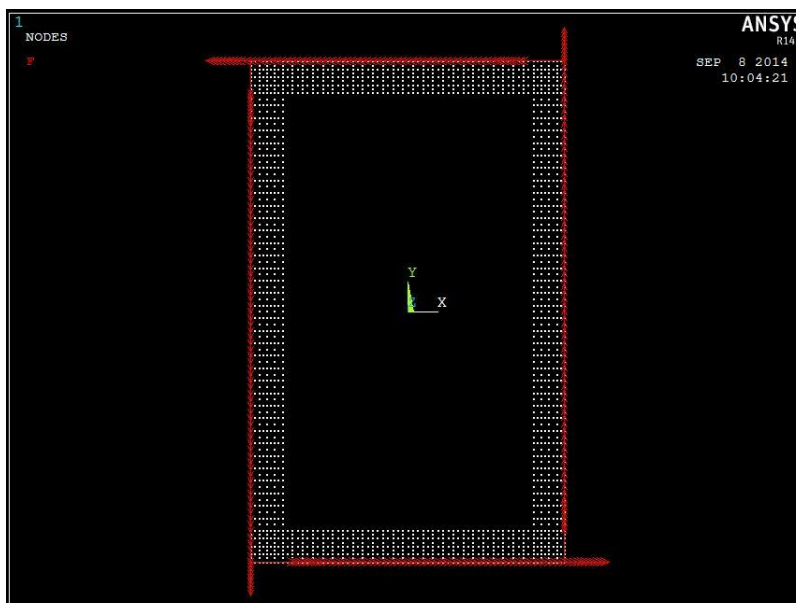


Figura 3.8.

Secondo tentativo di schematizzazione del momento.

In questo caso si ha:

$$2*((F*A/2)+(F*B/2)) = Mt$$

Quindi:

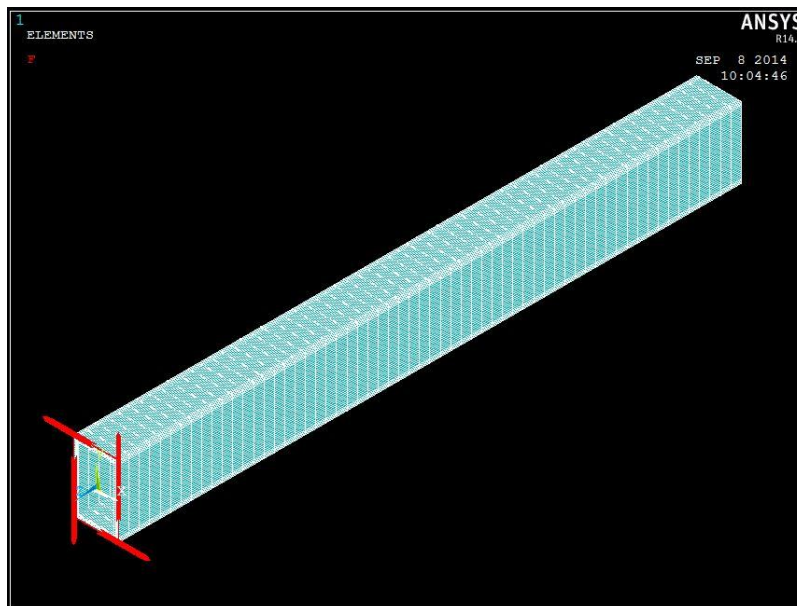
$$F = Mt/(A+B) = \dots \approx 7692 \text{ N}$$

Operativamente, tramite il comando *Select* si è selezionata la fila di nodi interessata dalla forza, che si è poi distribuita su tutti i nodi della selezione mediante il comando

*Preprocessor | Loads | Define Loads | Apply | Structural | Forces | On nodes*

Identicamente è stato fatto per le altre tre serie di forze.

Alla fine si è arrivati ad avere la situazione visualizzata in *Figura 3.9*.



*Figura 3.9. Schermata pre-solving*

### **3.3.Solution**

Dopo aver definito tutte le grandezze geometriche e fisiche, e le condizioni di vincolo e di carico, è possibile lanciare la soluzione. Dal menù

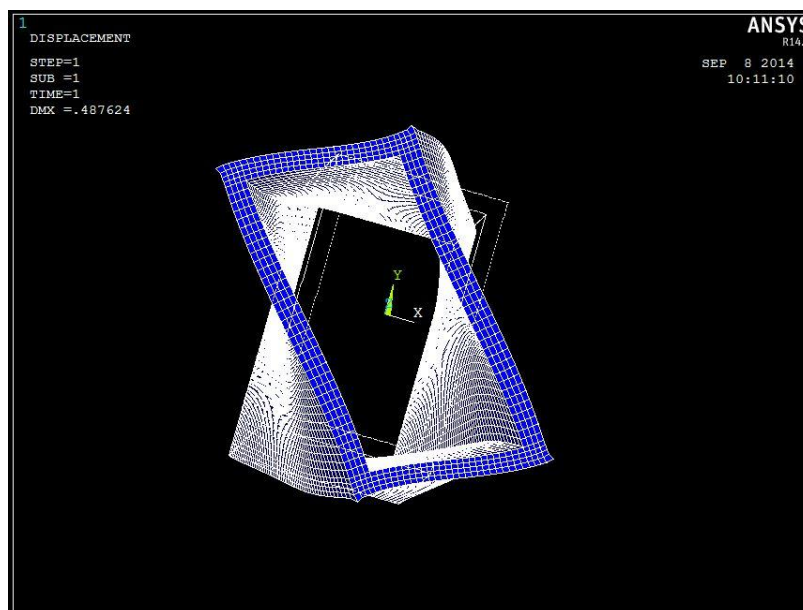
*Solution | Solve | Current LS*

si fa partire la soluzione. Il calcolatore impiegherà un certo periodo di tempo a risolvere la struttura, dipendente dal numero di nodi, e quindi di equazioni, che sono presenti nel problema. Una volta arrivato a convergenza comparirà una finestra con la scritta "*Solution is done!*".

### 3.4.Postprocessor

La parte finale di un'analisi FEM è la fase di analisi vera e propria dove si visualizzano i risultati inizialmente cercati.

Nel caso in esame si può visualizzare a schermo la deformata della struttura, tenendo però ben presente che nel visualizzare tale deformata, il software *Ansys* la amplifica notevolmente per far apprezzare maggiormente gli spostamenti del corpo. Sotto queste precisazioni, la deformata della trave con spessore 5 mm che compare a video risulta essere quella di *Figura 3.10*.



*Figura 3.10. Particolare deformato trave*

Un'analisi grafica qualitativa e quantitativa dello stato tensionale si può avere plottando a video delle mappe della sezione, dove a diversi valori di un particolare stato tensionale corrispondono diversi colori.

Per far ciò sono state usate le *Surfaces* sulla mezzera della trave. Dopo aver selezionato dal menù a tendina *WorkPlane*, la voce *Display Workplane*, si è fatto un offset dello stesso di -350 mm lungo la direzione z, in modo tale da posizionarlo esattamente nel punto dove andare ad eseguire il cosiddetto contour plot. A questo punto si è creata la superficie tramite il comando:

*Postprocessor | Surface Operations | Create Surface | On Cutting Plane*

A tale superficie si è dato un nome generico e successivamente, tramite il comando *Map Results*, si sono selezionate le componenti tensionali significative, in particolare gli sforzi di tangenziali  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ . Infine, col comando *Plot Results*, si sono visualizzate a video queste componenti tensionali. A titolo di esempio viene riportato in *Figura 3.11* l'andamento della tensione  $\tau_{xz}$  nella trave con spessore 5 mm (le altre si vedranno nel dettaglio nel capitolo successivo).

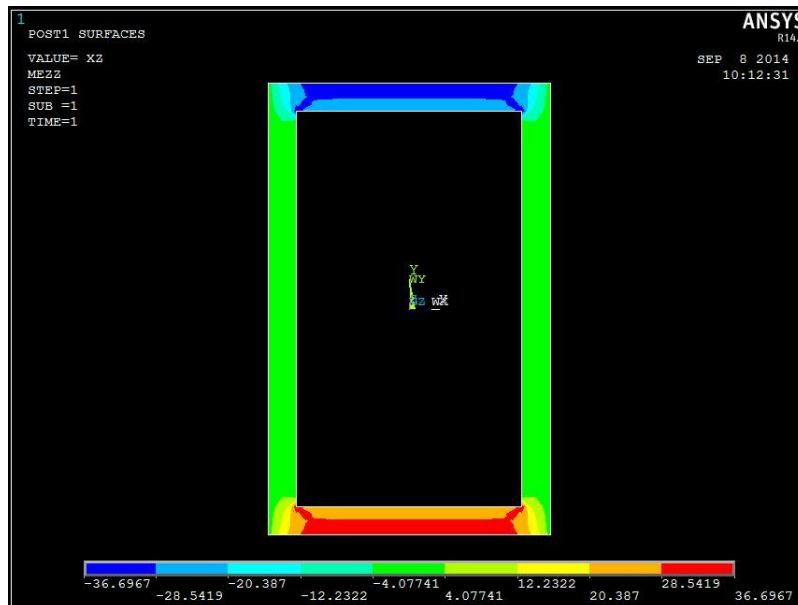


Figura 3.11. Contour Plot tensione tau x-z nella sezione con spessore 5 mm

Altra tipo di analisi che è stata condotta è quella che vede l'utilizzo dei cosiddetti *path*, cioè dei tracciati lungo i quali è possibile riportare l'andamento di alcune grandezze come, ad esempio, sforzi tensionali. Nel caso in esame si sono considerati due tracciati specifici, il *path 1* e il *path 2* (cfr. **Paragrafo 1.1**). Innanzitutto però occorre definirli tramite il comando

*Postprocessor | Path Operation | Define Path | By Nodes*

avendo cura di selezionare ad uno ad uno, nell'ordine corretto, i nodi per cui passerà il *path*. Una volta ultimata questa operazione si definisce che tipo di grandezze andare a misurare lungo tale tracciato, con il comando:

*Postprocessor | Path Operation | Map Onto Path*

Infine, tramite il sottomenù *Plot Path Item*, è possibile plottare a video l'andamento delle grandezze selezionate in precedenza (*Figura 3.12*), oppure è possibile esportare tali valori per poterli meglio utilizzare all'intero di un foglio di calcolo.

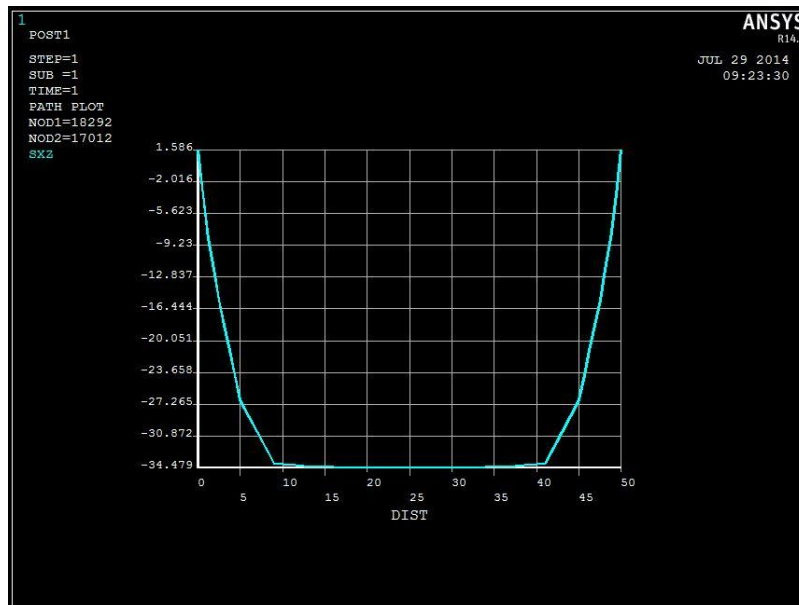


Figura 3.12. Particolare grafico tensione  $\tau_{xz}$  lungo il path 1 nella trave a spessore 5 mm





## 4.ANALISI DEI RISULTATI

### 4.1.Premesse

Prima di passare alla parte relativa ai risultati dell'analisi occorre fare alcune premesse.

Innanzitutto, come si accennava precedentemente al **Paragrafo 3.2**, la schematizzazione scelta per rappresentare il momento torcente applicato è quella che vede quattro serie di coppie, concentrate sui quattro spigoli della sezione. Si è visto che applicarle solo sugli spigoli superiore e inferiore portava a degli errori per nulla trascurabili sulle componenti tensionali (come si vedrà in seguito).

Altra questione poi è quella relativa al segno delle tensioni. Al fine dei calcoli mediante la formula di Bredt si sono sempre prese le tensioni come positive, non considerandone il verso. Nel confronto con i risultati FEM, però, occorre avere la coerenza del segno; in particolare, con il sistema di riferimento e il verso del momento utilizzati, la tensione tangenziale  $\tau_{xz}$  che si genera nel *path 1* avrà direzione contraria all'asse x, perciò dovrà essere considerata negativa. Stesso discorso deve essere fatto per la tensione tangenziale  $\tau_{yz}$  nel *path 2* che, avendo direzione contraria all'asse y, deve essere considerata negativa.

Ultima premessa da fare è relativa al fatto che le tensioni tangenziali in corrispondenza degli spigoli esterni sono nulle per equilibrio, quindi si troverà sempre che la componente tensionale partirà da zero in prossimità dello spigolo, aumenterà fino ad arrivare ad un valore costante (se lo spessore è ragionevolmente sottile) e tornerà a zero in prossimità dello spigolo adiacente. Di questo fatto non si tiene conto nella teoria di Bredt, che considera le tensioni uniformi e costanti lungo tutta la lunghezza del path.

## 4.2.Trave con spessore 1 mm

### 4.2.1.Tensioni Teoriche

Essendo lo spessore della trave costante, la teoria dà un valore di sforzi tangenziali dovuti alla torsione costanti anch'essi, e calcolabili con la formula di Bredt:

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \frac{Mt}{2 \cdot A^* \cdot t} = \frac{1000000 \text{ Nmm}}{2 \cdot (79 \text{ mm} \cdot 49 \text{ mm}) \cdot 1 \text{ mm}} = 129,166 \text{ MPa}$$

### 4.2.2.Path 1

Il contour plot della componente tensionale  $\tau_{xz}$  è di seguito riportato in *Figura 4.1*.



Figura 4.1. Contour Plot tensione  $\tau_{xz}$  in mezzeria su trave da 1 mm

I valori specifici della tensione nei nodi del *path 1* sono di seguito riportati nella *Tabella 4.1*.

S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM
0	1,3022	15,4	-113,78	37,48	-115,73
0,125	-12,379	16,36	-113,21	38,44	-116,53
0,25	-26,059	17,32	-112,75	39,4	-117,33
0,375	-38,266	18,28	-112,29	40,36	-118,24
0,5	-50,473	19,24	-111,94	41,32	-119,15
0,625	-61,855	20,2	-111,6	42,28	-120,17

S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM
0,75	-73,236	21,16	-111,37	43,24	-121,19
0,875	-86,378	22,12	-111,14	44,2	-122,5
1	-99,521	23,08	-111,02	45,16	-123,82
1,96	-114,88	24,04	-110,91	46,12	-127,03
2,92	-130,24	25	-110,91	47,08	-130,24
3,88	-127,03	25,96	-110,91	48,04	-114,88
4,84	-123,82	26,92	-111,02	49	-99,521
5,8	-122,5	27,88	-111,14	49,125	-86,378
6,76	-121,19	28,84	-111,37	49,25	-73,236
7,72	-120,17	29,8	-111,6	49,375	-61,855
8,68	-119,15	30,76	-111,94	49,5	-50,473
9,64	-118,24	31,72	-112,29	49,625	-38,266
10,6	-117,33	32,68	-112,75	49,75	-26,059
11,56	-116,53	33,64	-113,21	49,875	-12,379
12,52	-115,73	34,6	-113,78	50	1,3022
13,48	-115,04	35,56	-114,35		
14,44	-114,35	36,52	-115,04		

Tabella 4.1. Valori di tensione SXZ sul path 1. Trave spessore 1 mm

#### 4.2.3.Path 2

Il contour plot della componente tensionale  $\tau_{yz}$  è di seguito riportato in *Figura 4.2*.



Figura 4.2. Contour Plot tensione  $\tau_{yz}$  in mezzeria su trave da 1 mm

I valori specifici della tensione nei nodi del *path 2* sono di seguito riportati nella *Tabella 4.2*.

S	SYZ - FEM	S	SYZ - FEM	S	SYZ - FEM
0	0,65446	24,4	-154,78	56,714	-154,11
0,125	-12,905	25,514	-155,45	57,829	-153,34
0,25	-26,465	26,629	-156,03	58,943	-152,57
0,375	-38,725	27,743	-156,6	60,057	-151,71
0,5	-50,985	28,857	-157,08	61,171	-150,85
0,625	-62,606	29,971	-157,56	62,286	-149,89
0,75	-74,226	31,086	-157,95	63,4	-148,93
0,875	-87,959	32,2	-158,33	64,514	-147,87
1	-101,69	33,314	-158,62	65,629	-146,81
2,1143	-119,6	34,429	-158,91	66,743	-145,65
3,2286	-137,5	35,543	-159,1	67,857	-144,49
4,3429	-137,21	36,657	-159,29	68,971	-143,23
5,4571	-136,91	37,771	-159,39	70,086	-141,97
6,5714	-138,11	38,886	-159,49	71,2	-140,64
7,6857	-139,3	40	-159,49	72,314	-139,3
8,8	-140,64	41,114	-159,49	73,429	-138,11
9,9143	-141,97	42,229	-159,39	74,543	-136,91
11,029	-143,23	43,343	-159,29	75,657	-137,21
12,143	-144,49	44,457	-159,1	76,771	-137,5
13,257	-145,65	45,571	-158,91	77,886	-119,6
14,371	-146,81	46,686	-158,62	79	-101,69
15,486	-147,87	47,8	-158,33	79,125	-87,959
16,6	-148,93	48,914	-157,95	79,25	-74,226
17,714	-149,89	50,029	-157,56	79,375	-62,606
18,829	-150,85	51,143	-157,08	79,5	-50,985
19,943	-151,71	52,257	-156,6	79,625	-38,725
21,057	-152,57	53,371	-156,03	79,75	-26,465
22,171	-153,34	54,486	-155,45	79,875	-12,905
23,286	-154,11	55,6	-154,78	80	0,65446

Tabella 4.2 Valori di tensione S YZ sul path 2. Trave spessore 1 mm

#### 4.2.4. Confronto teoria - FEM

Di seguito vengono riportati due grafici dove vengono messi a confronto i valori teorici calcolati mediante la formula di Bredt, e i valori risultanti dall'analisi FEM al calcolatore. In particolare il *Grafico 4.1* rappresenta la tensione tangenziale  $\tau_{xz}$  lungo il *path 1*, mentre il *Grafico 4.2* rappresenta la tensione tangenziale  $\tau_{yz}$  lungo il *path 2*.

Grafico 4.1. Andamento della tensione  $S_{XZ}$  lungo il path 1. Trave spessore 1 mm

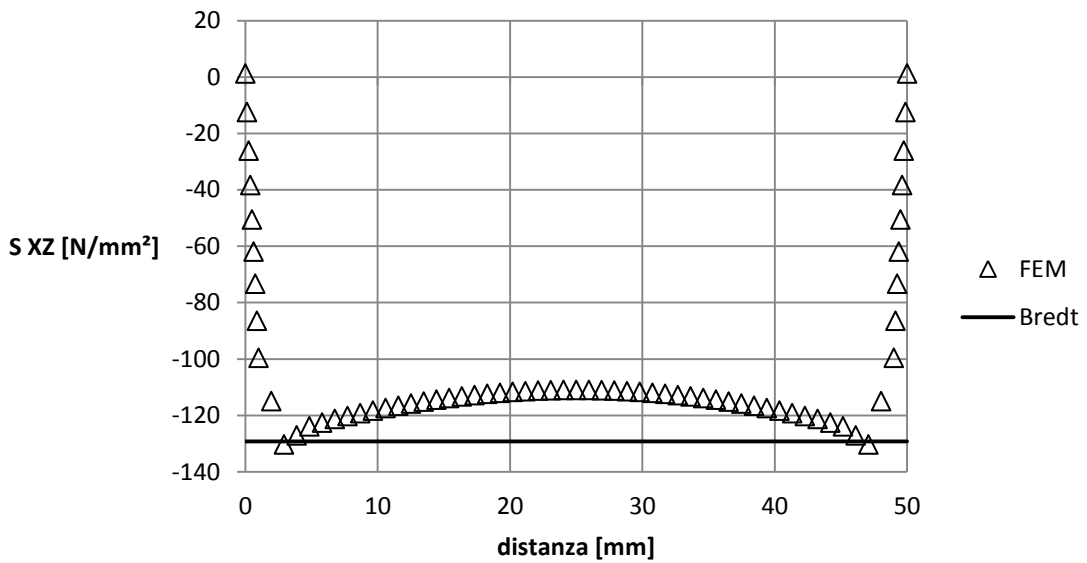
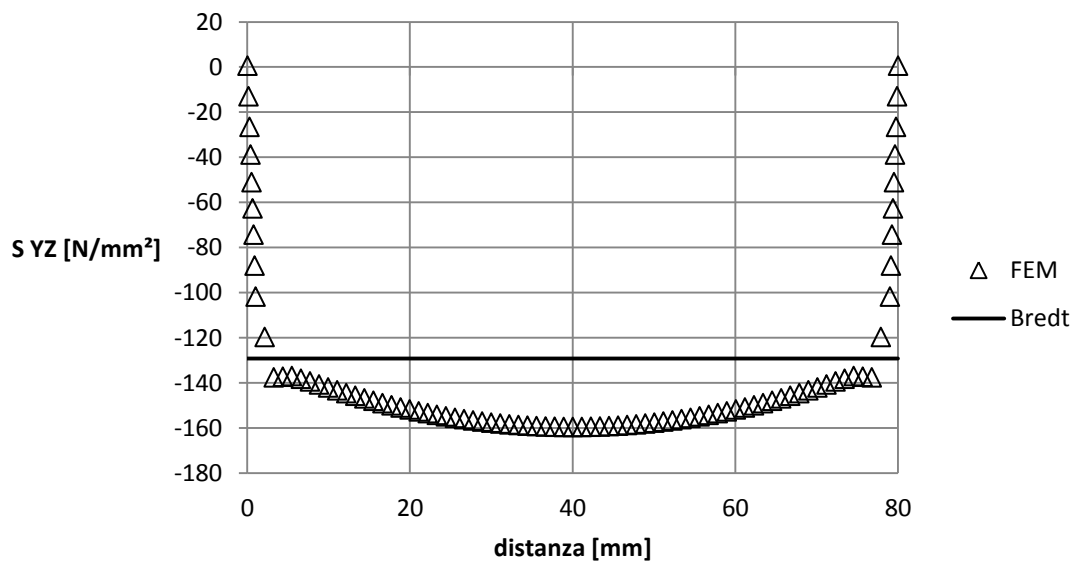


Grafico 4.2. Andamento della tensione  $S_{YZ}$  lungo il path 2. Trave spessore 1 mm



#### 4.2.5. Commenti

Dai contour plot si nota che, almeno visivamente, la teoria alla base della trattazione di Bredt è rispettata, in quanto le tensioni sembrano uniformemente distribuite e costanti. Dall'analisi dei grafici, però, si evince che la distribuzione delle tensioni non è perfettamente costante ed aderente ai risultati teorici, anche se lo spessore è minimo. Questo molto probabilmente può essere dovuto ad una cattiva schematizzazione del carico (si tornerà sull'argomento successivamente).

### 4.3.Trave con spessore 2 mm

#### 4.3.1.Tensioni Teoriche

Essendo lo spessore della trave costante, la teoria dà un valore di sforzi tangenziali dovuti alla torsione costanti anch'essi, e calcolabili con la formula di Bredt:

$$\tau_{xz} = t_{yz} = \frac{Mt}{2 \cdot A^* \cdot t} = \frac{1000000 \text{ Nmm}}{2 \cdot (78 \text{ mm} \cdot 48 \text{ mm}) \cdot 2 \text{ mm}} = 66,773 \text{ MPa}$$

#### 4.3.2.Path 1

Il contour plot della componente tensionale  $\tau_{xz}$  è di seguito riportato in *Figura 4.3*.



Figura 4.3.Contour Plot tensione  $\tau_{xz}$  in mezzeria su trave da 2 mm

I valori specifici della tensione nei nodi del *path 1* sono di seguito riportati nella *Tabella 4.3*.

S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM
0	-0,094	15,8	-66,141	36,96	-66,613
0,25	-7,932	16,72	-66,002	37,88	-66,807
0,5	-15,769	17,64	-65,891	38,8	-67,001
0,75	-22,524	18,56	-65,780	39,72	-67,223
1	-29,279	19,48	-65,696	40,64	-67,445
1,25	-35,461	20,4	-65,612	41,56	-67,703

S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM
1,5	-41,642	21,32	-65,557	42,48	-67,962
1,75	-47,360	22,24	-65,501	43,4	-68,216
2	-53,078	23,16	-65,473	44,32	-68,471
2,92	-61,086	24,08	-65,445	45,24	-68,782
3,84	-69,093	25	-65,445	46,16	-69,093
4,76	-68,782	25,92	-65,445	47,08	-61,086
5,68	-68,471	26,84	-65,473	48	-53,078
6,6	-68,216	27,76	-65,501	48,25	-47,360
7,52	-67,962	28,68	-65,557	48,5	-41,642
8,44	-67,703	29,6	-65,612	48,75	-35,461
9,36	-67,445	30,52	-65,696	49	-29,279
10,28	-67,223	31,44	-65,780	49,25	-22,524
11,2	-67,001	32,36	-65,891	49,5	-15,769
12,12	-66,807	33,28	-66,002	49,75	-7,932
13,04	-66,613	34,2	-66,141	50	-0,094
13,96	-66,446	35,12	-66,280		
14,88	-66,280	36,04	-66,446		

Tabella 4.3. Valori di tensione SXZ sul path 1. Trave spessore 2 mm

#### 4.2.3.Path 2

Il contour plot della componente tensionale  $\tau_{yz}$  è di seguito riportato in *Figura 4.4*.



Figura 4.4. Contour Plot tensione  $\tau_{yz}$  in mezzeria su trave da 2 mm

I valori specifici della tensione nei nodi del *path 2* sono di seguito riportati nella *Tabella 4.4*.

S	SYZ - FEM	S	SYZ - FEM	S	SYZ - FEM
0	-0,21275	24,8	-76,666	56,286	-76,497
0,25	-8,0532	25,886	-76,836	57,371	-76,303
0,5	-15,894	26,971	-76,981	58,457	-76,11
0,75	-22,733	28,057	-77,127	59,543	-75,892
1	-29,573	29,143	-77,248	60,629	-75,674
1,25	-35,876	30,229	-77,369	61,714	-75,433
1,5	-42,179	31,314	-77,466	62,8	-75,191
1,75	-48,179	32,4	-77,563	63,886	-74,925
2	-54,178	33,486	-77,636	64,971	-74,66
3,0857	-63,158	34,571	-77,708	66,057	-74,371
4,1714	-72,138	35,657	-77,757	67,143	-74,082
5,2571	-72,088	36,743	-77,805	68,229	-73,771
6,3429	-72,037	37,829	-77,83	69,314	-73,459
7,4286	-72,415	38,914	-77,854	70,4	-73,126
8,5143	-72,793	40	-77,854	71,486	-72,793
9,6	-73,126	41,086	-77,854	72,571	-72,415
10,686	-73,459	42,171	-77,83	73,657	-72,037
11,771	-73,771	43,257	-77,805	74,743	-72,088
12,857	-74,082	44,343	-77,757	75,829	-72,138
13,943	-74,371	45,429	-77,708	76,914	-63,158
15,029	-74,66	46,514	-77,636	78	-54,178
16,114	-74,925	47,6	-77,563	78,25	-48,179
17,2	-75,191	48,686	-77,466	78,5	-42,179
18,286	-75,433	49,771	-77,369	78,75	-35,876
19,371	-75,674	50,857	-77,248	79	-29,573
20,457	-75,892	51,943	-77,127	79,25	-22,733
21,543	-76,11	53,029	-76,981	79,5	-15,894
22,629	-76,303	54,114	-76,836	79,75	-8,0532
23,714	-76,497	55,2	-76,666	80	-0,21275

Tabella 4.4. Valori di tensione S YZ sul path 2. Trave spessore 2 mm

#### 4.2.4. Confronto teoria - FEM

Di seguito vengono riportati due grafici dove vengono messi a confronto i valori teorici calcolati mediante la formula di Bredt, e i valori risultanti dall'analisi FEM al calcolatore. In particolare il *Grafico 4.3* rappresenta la tensione tangenziale  $\tau_{xz}$  lungo il *path 1*, mentre il *Grafico 4.4* rappresenta la tensione tangenziale  $\tau_{yz}$  lungo il *path 2*.



Grafico 4.3. Andamento della tensione  $S_{XZ}$  lungo il path 1. Trave spessore 2 mm

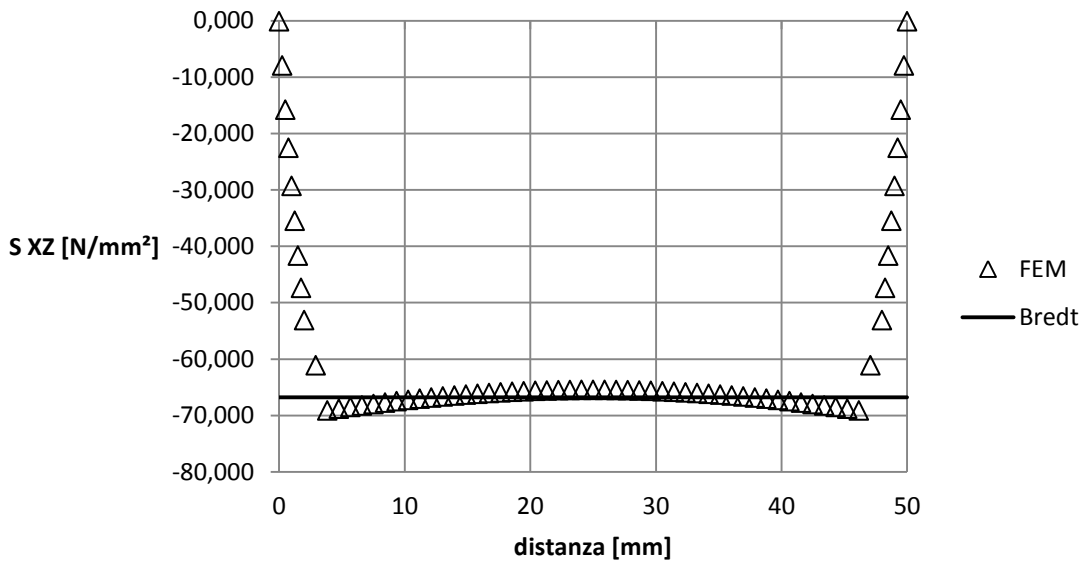
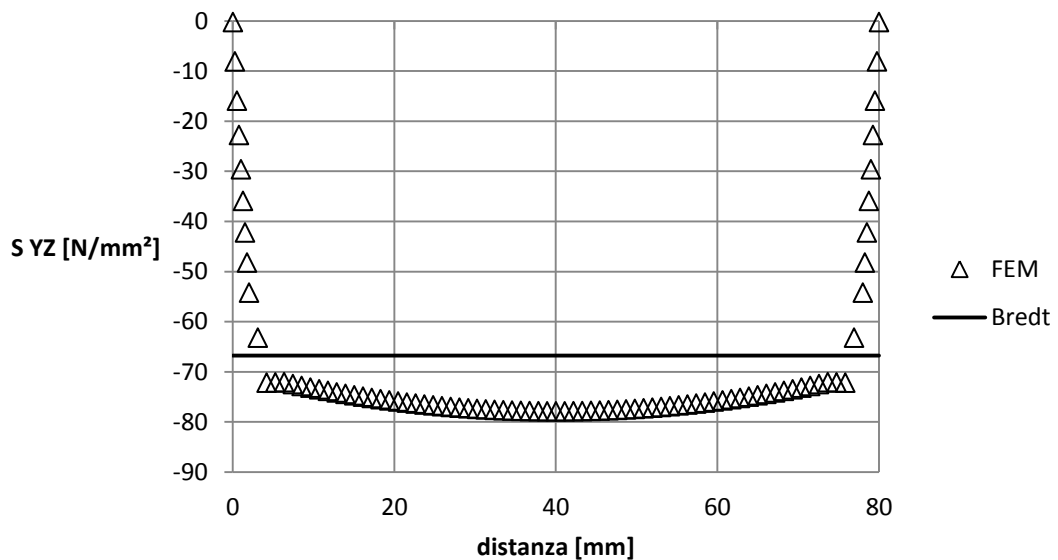


Grafico 4.4. Andamento della tensione  $S_{YZ}$  lungo il path 2. Trave spessore 2 mm



#### 4.3.5. Commenti

Anche in questo caso dall'analisi visiva dei contour plot sembra che le tensioni siano abbastanza costanti ed uniformemente distribuite, fatta ovviamente eccezione dei punti nell'intorno degli spigoli interni dove, per quanto riguarda l'uniformità tensionale ad una analisi sui contour plot, si risente del fenomeno della concentrazione delle tensioni. Osservando poi i grafici comparativi si può dire che per quanto riguarda la tensione lungo il *path 1* la formula di Bredt è quasi perfettamente verificata, lungo il *path 2* vi è un errore medio dalla teoria di circa il 13%.

## 4.4.Trave con spessore 3 mm

### 4.4.1.Tensioni Teoriche

Essendo lo spessore della trave costante, la teoria dà un valore di sforzi tangenziali dovuti alla torsione costanti anch'essi, e calcolabili con la formula di Bredt:

$$\tau_{xz} = t_{yz} = \frac{Mt}{2 \cdot A^* \cdot t} = \frac{1000000 \text{ Nmm}}{2 \cdot (77 \text{ mm} \cdot 47 \text{ mm}) \cdot 3 \text{ mm}} = 46,053 \text{ MPa}$$

### 4.4.2.Path 1

Il contour plot della componente tensionale  $\tau_{xz}$  è di seguito riportato in *Figura 4.5*.



Figura 4.5.Contour Plot tensione  $\tau_{xz}$  in mezzeria su trave da 3 mm

I valori specifici della tensione nei nodi del *path 1* sono di seguito riportati nella *Tabella 4.5*.

S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM
0	-0,27679	16,2	-49,146	36,44	-49,273
0,375	-6,2178	17,08	-49,109	37,32	-49,324
0,75	-12,159	17,96	-49,079	38,2	-49,376
1,125	-17,078	18,84	-49,048	39,08	-49,43
1,5	-21,997	19,72	-49,026	39,96	-49,485
1,875	-26,389	20,6	-49,003	40,84	-49,531

S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM
2,25	-30,781	21,48	-48,988	41,72	-49,577
2,625	-34,53	22,36	-48,973	42,6	-49,515
3	-38,28	23,24	-48,966	43,48	-49,452
3,88	-43,001	24,12	-48,958	44,36	-48,587
4,76	-47,723	25	-48,958	45,24	-47,723
5,64	-48,587	25,88	-48,958	46,12	-43,001
6,52	-49,452	26,76	-48,966	47	-38,28
7,4	-49,515	27,64	-48,973	47,375	-34,53
8,28	-49,577	28,52	-48,988	47,75	-30,781
9,16	-49,531	29,4	-49,003	48,125	-26,389
10,04	-49,485	30,28	-49,026	48,5	-21,997
10,92	-49,43	31,16	-49,048	48,875	-17,078
11,8	-49,376	32,04	-49,079	49,25	-12,159
12,68	-49,324	32,92	-49,109	49,625	-6,2178
13,56	-49,273	33,8	-49,146	50	-0,27679
14,44	-49,228	34,68	-49,184		
15,32	-49,184	35,56	-49,228		

Tabella 4.5. Valori di tensione S XZ sul path 1. Trave spessore 3 mm

#### 4.4.3.Path 2

Il contour plot della componente tensionale  $\tau_{yz}$  è di seguito riportato in *Figura 4.6*.



Figura 4.6. Contour Plot tensione  $\tau_{yz}$  in mezzeria su trave da 3 mm

I valori specifici della tensione nei nodi del *path 2* sono di seguito riportati nella *Tabella 4.6*.

S	SYZ - FEM	S	SYZ - FEM	S	SYZ - FEM
0	-0,30243	25,2	-52,189	55,857	-52,141
0,375	-6,2708	26,257	-52,237	56,914	-52,086
0,75	-12,239	27,314	-52,279	57,971	-52,031
1,125	-17,212	28,371	-52,32	59,029	-51,969
1,5	-22,185	29,429	-52,355	60,086	-51,908
1,875	-26,627	30,486	-52,389	61,143	-51,839
2,25	-31,069	31,543	-52,417	62,2	-51,771
2,625	-34,945	32,6	-52,445	63,257	-51,696
3	-38,821	33,657	-52,465	64,314	-51,621
4,0571	-44,14	34,714	-52,486	65,371	-51,539
5,1143	-49,459	35,771	-52,5	66,429	-51,457
6,1714	-50,12	36,829	-52,514	67,486	-51,367
7,2286	-50,78	37,886	-52,521	68,543	-51,277
8,2857	-50,934	38,943	-52,528	69,6	-51,183
9,3429	-51,088	40	-52,528	70,657	-51,088
10,4	-51,183	41,057	-52,528	71,714	-50,934
11,457	-51,277	42,114	-52,521	72,771	-50,78
12,514	-51,367	43,171	-52,514	73,829	-50,12
13,571	-51,457	44,229	-52,5	74,886	-49,459
14,629	-51,539	45,286	-52,486	75,943	-44,14
15,686	-51,621	46,343	-52,465	77	-38,821
16,743	-51,696	47,4	-52,445	77,375	-34,945
17,8	-51,771	48,457	-52,417	77,75	-31,069
18,857	-51,839	49,514	-52,389	78,125	-26,627
19,914	-51,908	50,571	-52,355	78,5	-22,185
20,971	-51,969	51,629	-52,32	78,875	-17,212
22,029	-52,031	52,686	-52,279	79,25	-12,239
23,086	-52,086	53,743	-52,237	79,625	-6,2708
24,143	-52,141	54,8	-52,189	80	-0,30243

Tabella 4.6. Valori di tensione S YZ sul path 2. Trave spessore 3 mm

#### 4.4.4. Confronto teoria - FEM

Di seguito vengono riportati due grafici dove vengono messi a confronto i valori teorici calcolati mediante la formula di Bredt, e i valori risultanti dall'analisi FEM al calcolatore. In particolare il *Grafico 4.5* rappresenta la tensione tangenziale  $\tau_{xz}$  lungo il *path 1*, mentre il *Grafico 4.6* rappresenta la tensione tangenziale  $\tau_{yz}$  lungo il *path 2*.

Grafico 4.5. Andamento della tensione  $S_{XZ}$  lungo il path 1. Trave spessore 3 mm

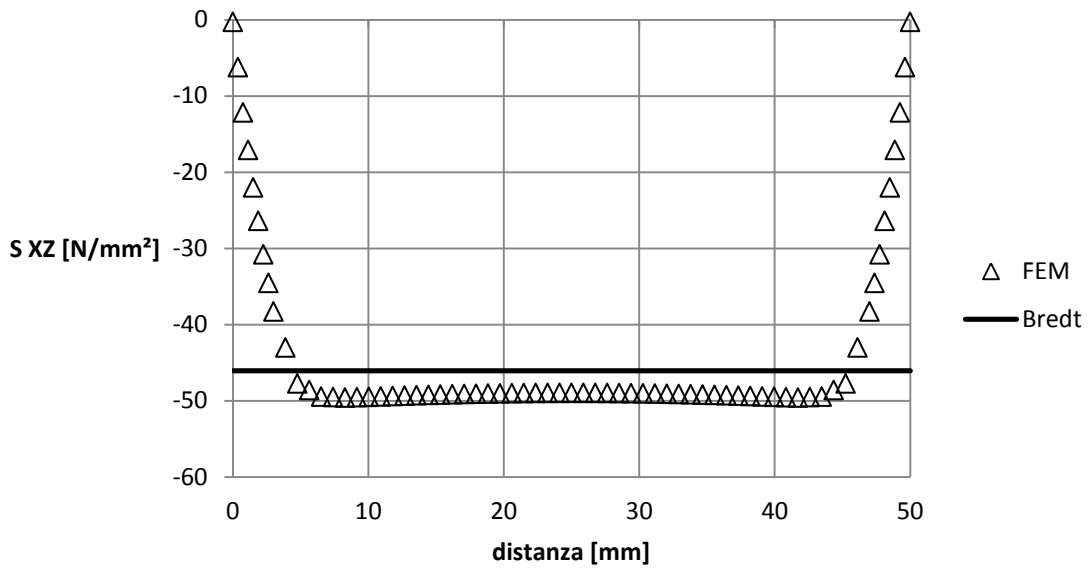
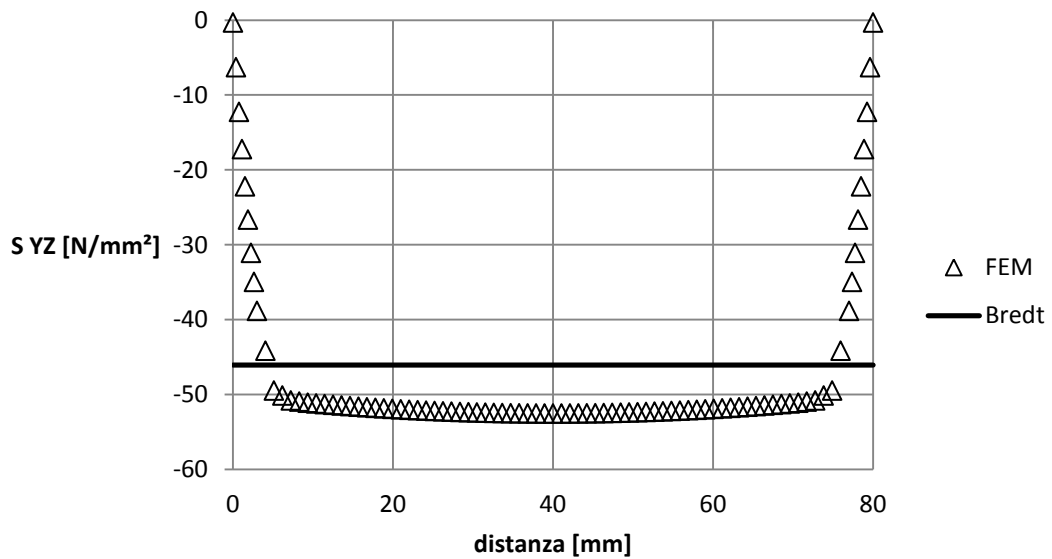


Grafico 4.6. Andamento della tensione  $S_{YZ}$  lungo il path 2. Trave spessore 3 mm



#### 4.4.5. Commenti

Dall'analisi dei contour plot si comincia ad osservare qualche zona dove la tensione non è più uniforme, ma in linea generale la si può ancora definire tale. Passando allo studio dei grafici comparativi si nota che in linea di massima le tensioni sono abbastanza costanti lungo i due path, nel primo l'errore dalla teoria è di circa il 6%, mentre nel secondo è di circa l'11%.

## 4.5.Trave con spessore 5 mm

### 4.5.1.Tensioni Teoriche

Essendo lo spessore della trave costante, la teoria dà un valore di sforzi tangenziali dovuti alla torsione costanti anch'essi, e calcolabili con la formula di Bredt:

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \frac{Mt}{2 \cdot A^* \cdot t} = \frac{1000000 \text{ Nmm}}{2 \cdot (75 \text{ mm} \cdot 45 \text{ mm}) \cdot 5 \text{ mm}} = 29,627 \text{ MPa}$$

### 4.5.2.Path 1

Il contour plot della componente tensionale  $\tau_{xz}$  è di seguito riportato in *Figura 4.7*.

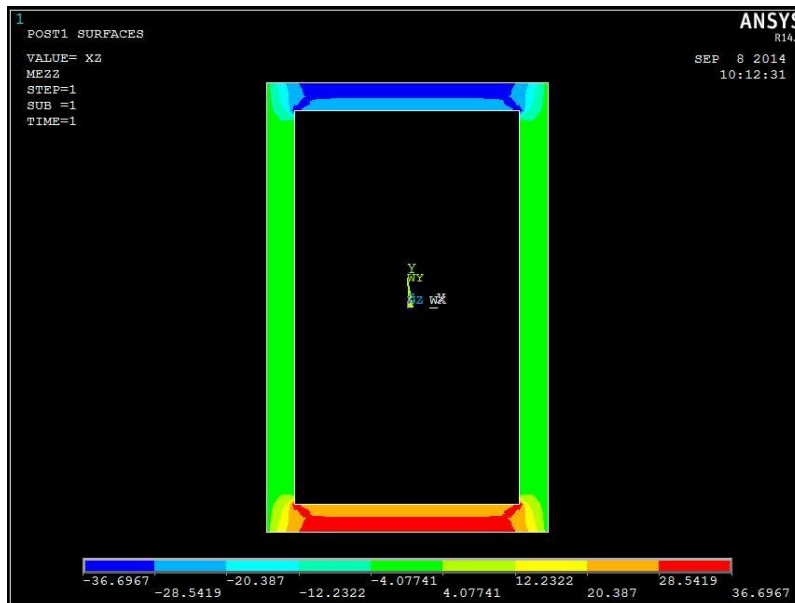


Figura 4.7. Contour Plot tensione  $\tau_{xz}$  in mezzeria su trave da 5 mm

I valori specifici della tensione nei nodi del *path 1* sono di seguito riportati nella *Tabella 4.7*.

S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM
0	-0,34373	17	-34,478	35,4	-34,456
0,625	-4,8412	17,8	-34,482	36,2	-34,432
1,25	-9,3387	18,6	-34,483	37	-34,408
1,875	-12,782	19,4	-34,485	37,8	-34,344
2,5	-16,224	20,2	-34,485	38,6	-34,28
3,125	-19,166	21	-34,486	39,4	-34,108

S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM
3,75	-22,108	21,8	-34,487	40,2	-33,936
4,375	-24,479	22,6	-34,487	41	-33,49
5	-26,85	23,4	-34,487	41,8	-33,044
5,8	-28,903	24,2	-34,487	42,6	-32
6,6	-30,956	25	-34,487	43,4	-30,956
7,4	-32	25,8	-34,487	44,2	-28,903
8,2	-33,044	26,6	-34,487	45	-26,85
9	-33,49	27,4	-34,487	45,625	-24,479
9,8	-33,936	28,2	-34,487	46,25	-22,108
10,6	-34,108	29	-34,486	46,875	-19,166
11,4	-34,28	29,8	-34,485	47,5	-16,224
12,2	-34,344	30,6	-34,485	48,125	-12,782
13	-34,408	31,4	-34,483	48,75	-9,3387
13,8	-34,432	32,2	-34,482	49,375	-4,8412
14,6	-34,456	33	-34,478	50	-0,34373
15,4	-34,465	33,8	-34,474		
16,2	-34,474	34,6	-34,465		

Tabella 4.7. Valori di tensione S XZ sul path 1. Trave spessore 5 mm

#### 4.5.3.Path 2

Il contour plot della componente tensionale  $\tau_{yz}$  è di seguito riportato in *Figura 4.8*.

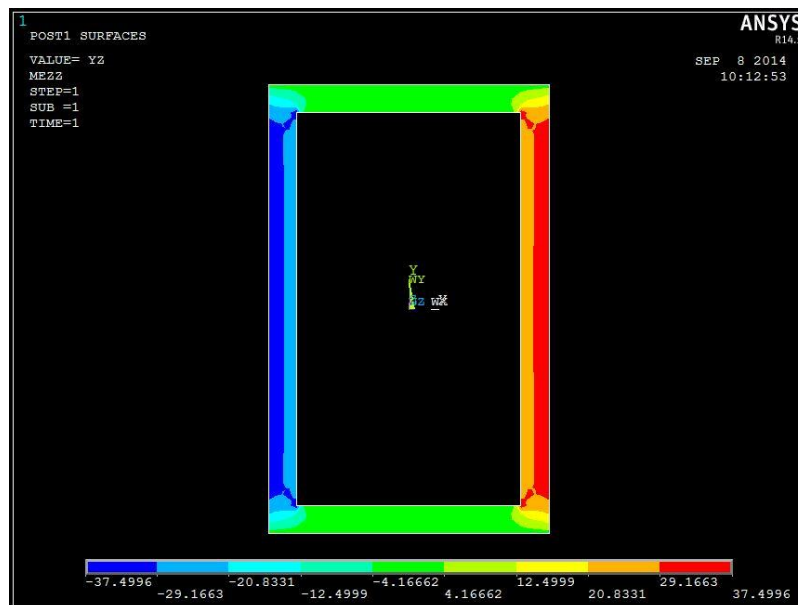


Figura 4.8. Contour Plot tensione  $\tau_{yz}$  in mezzeria su trave da 5 mm

I valori specifici della tensione nei nodi del *path 2* sono di seguito riportati nella *Tabella 4.8*.

S	SYZ - FEM	S	SYZ - FEM	S	SYZ - FEM
0	0,34586	26	-34,479	55	-34,479
0,625	-4,8556	27	-34,479	56	-34,479
1,25	-9,3654	28	-34,479	57	-34,479
1,875	-12,819	29	-34,479	58	-34,479
2,5	-16,273	30	-34,479	59	-34,479
3,125	-19,217	31	-34,479	60	-34,478
3,75	-22,162	32	-34,479	61	-34,478
4,375	-24,551	33	-34,48	62	-34,476
5	-26,941	34	-34,48	63	-34,475
6	-29,348	35	-34,48	64	-34,468
7	-31,755	36	-34,48	65	-34,462
8	-32,703	37	-34,48	66	-34,438
9	-33,65	38	-34,48	67	-34,414
10	-33,946	39	-34,48	68	-34,328
11	-34,241	40	-34,48	69	-34,241
12	-34,328	41	-34,48	70	-33,946
13	-34,414	42	-34,48	71	-33,65
14	-34,438	43	-34,48	72	-32,703
15	-34,462	44	-34,48	73	-31,755
16	-34,468	45	-34,48	74	-29,348
17	-34,475	46	-34,48	75	-26,941
18	-34,476	47	-34,48	75,625	-24,551
19	-34,478	48	-34,479	76,25	-22,162
20	-34,478	49	-34,479	76,875	-19,217
21	-34,479	50	-34,479	77,5	-16,273
22	-34,479	51	-34,479	78,125	-12,819
23	-34,479	52	-34,479	78,75	-9,3654
24	-34,479	53	-34,479	79,375	-4,8556
25	-34,479	54	-34,479	80	0,34586

Tabella 4.8. Valori di tensione S YZ sul path 2. Trave spessore 5 mm

#### 4.5.4. Confronto teoria - FEM

Di seguito vengono riportati due grafici dove vengono messi a confronto i valori teorici calcolati mediante la formula di Bredt, e i valori risultanti dall'analisi FEM al computer. In particolare il *Grafico 4.7* rappresenta la tensione tangenziale  $\tau_{xz}$  lungo il *path 1*, mentre il *Grafico 4.8* rappresenta la tensione tangenziale  $\tau_{yz}$  lungo il *path 2*.



Grafico 4.7. Andamento della tensione  $S_{XZ}$  lungo il path 1. Trave spessore 5 mm

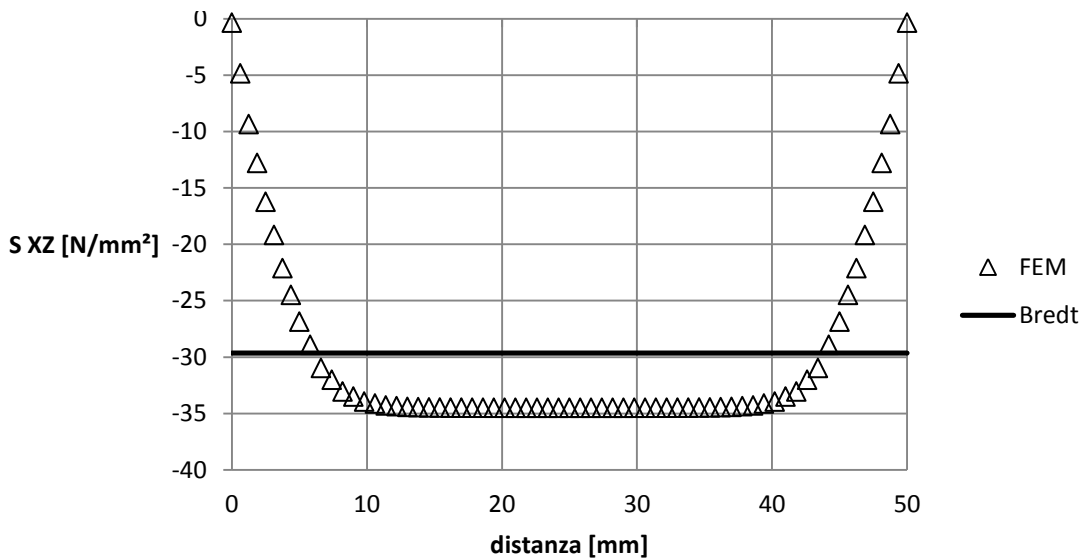
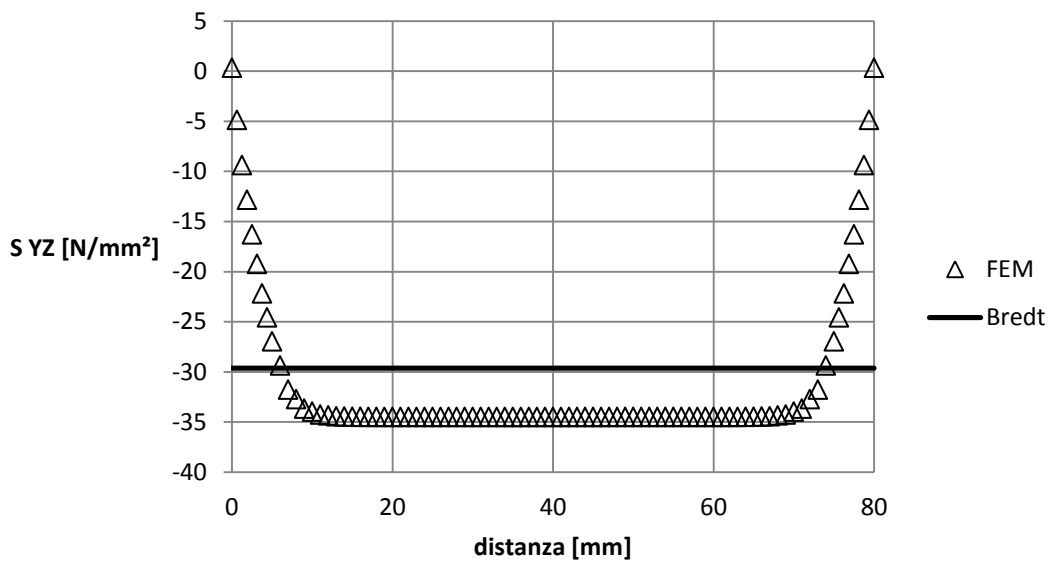


Grafico 4.8. Andamento della tensione  $S_{YZ}$  lungo il path 2. Trave spessore 5 mm



#### 4.5.5. Commenti

In questo caso anche solo con l'analisi grafica dei contour plot si può affermare che l'ipotesi per cui la tensione dovrebbe essere costante lungo lo spessore comincia a non descrivere proprio fedelmente lo stato tensionale del corpo. Analizzando poi i grafici comparativi si nota che le tensioni sulle superfici esterne (relative ai path 1 e 2) presentano tensioni che tutto sommato possono considerarsi nel complesso ancora costanti, con una differenza media dai valori teorici di circa il 14% su entrambi i tracciati.

## 4.6.Trave con spessore 10 mm

### 4.6.1.Tensioni Teoriche

Essendo lo spessore della trave costante, la teoria dà un valore di sforzi tangenziali dovuti alla torsione costanti anch'essi, e calcolabili con la formula di Bredt:

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \frac{Mt}{2 \cdot A^* \cdot t} = \frac{1000000 \text{ Nmm}}{2 \cdot (70 \text{ mm} \cdot 40 \text{ mm}) \cdot 10 \text{ mm}} = 17,857 \text{ MPa}$$

### 4.6.2.Path 1

Il contour plot della componente tensionale  $\tau_{xz}$  è di seguito riportato in *Figura 4.9*.

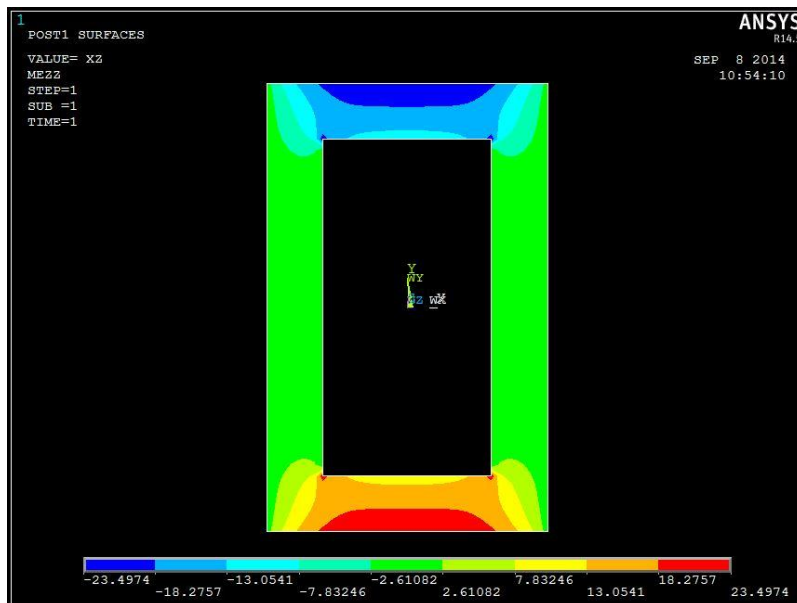


Figura 4.9. Contour Plot tensione  $\tau_{xz}$  in mezzeria su trave 10 mm

I valori specifici della tensione nei nodi del *path 1* sono di seguito riportati nella *Tabella 4.9*.

S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM
0	-0,24285	16,75	-22,873	34	-22,714
0,71429	-2,6905	17,5	-23,031	34,75	-22,476
1,4286	-5,1382	18,25	-23,134	35,5	-22,238
2,1429	-6,8512	19	-23,237	36,25	-21,894
2,8571	-8,5642	19,75	-23,302	37	-21,55
3,5714	-9,996	20,5	-23,366	37,75	-21,073

S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM
4,2857	-11,428	21,25	-23,405	38,5	-20,596
5	-12,656	22	-23,444	39,25	-19,963
5,7143	-13,883	22,75	-23,464	40	-19,331
6,4286	-14,945	23,5	-23,485	40,714	-18,575
7,1429	-16,006	24,25	-23,491	41,429	-17,82
7,8571	-16,913	25	-23,497	42,143	-16,913
8,5714	-17,82	25,75	-23,491	42,857	-16,006
9,2857	-18,575	26,5	-23,485	43,571	-14,945
10	-19,331	27,25	-23,464	44,286	-13,883
10,75	-19,963	28	-23,444	45	-12,656
11,5	-20,596	28,75	-23,405	45,714	-11,428
12,25	-21,073	29,5	-23,366	46,429	-9,996
13	-21,55	30,25	-23,302	47,143	-8,5642
13,75	-21,894	31	-23,237	47,857	-6,8512
14,5	-22,238	31,75	-23,134	48,571	-5,1382
15,25	-22,476	32,5	-23,031	49,286	-2,6905
16	-22,714	33,25	-22,873	50	-0,24285

Tabella 4.9. Valori di tensione S XZ sul path 1. Trave spessore 10 mm

#### 4.6.3.Path 2

Il contour plot della componente tensionale  $\tau_{yz}$  è di seguito riportato in *Figura 4.10*.

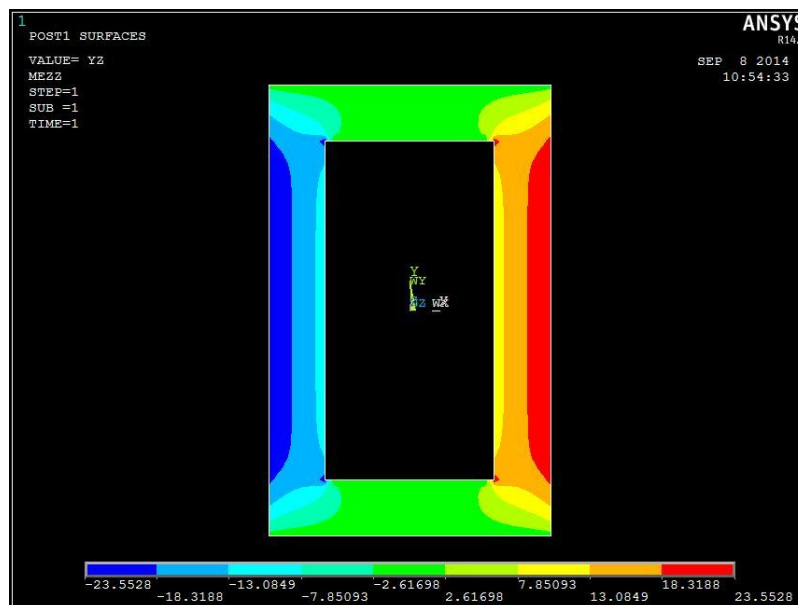


Figura 4.10. Contour Plot tensione  $\tau_{yz}$  in mezzeria su trave 10 mm

I valori specifici della tensione nei nodi del *path 2* sono di seguito riportati nella *Tabella 4.10*.

S	SYZ - FEM	S	SYZ - FEM	S	SYZ - FEM
0	-0,24361	26	-23,519	56	-23,486
0,71429	-2,6901	27	-23,528	57	-23,454
1,4286	-5,1365	28	-23,537	58	-23,422
2,1429	-6,8494	29	-23,541	59	-23,363
2,8571	-8,5623	30	-23,545	60	-23,303
3,5714	-9,9932	31	-23,548	61	-23,194
4,2857	-11,424	32	-23,55	62	-23,085
5	-12,651	33	-23,551	63	-22,89
5,7143	-13,878	34	-23,552	64	-22,694
6,4286	-14,938	35	-23,552	65	-22,359
7,1429	-15,998	36	-23,552	66	-22,024
7,8571	-16,903	37	-23,553	67	-21,484
8,5714	-17,808	38	-23,553	68	-20,944
9,2857	-18,567	39	-23,553	69	-20,135
10	-19,325	40	-23,553	70	-19,325
11	-20,135	41	-23,553	70,714	-18,567
12	-20,944	42	-23,553	71,429	-17,808
13	-21,484	43	-23,553	72,143	-16,903
14	-22,024	44	-23,552	72,857	-15,998
15	-22,359	45	-23,552	73,571	-14,938
16	-22,694	46	-23,552	74,286	-13,878
17	-22,89	47	-23,551	75	-12,651
18	-23,085	48	-23,55	75,714	-11,424
19	-23,194	49	-23,548	76,429	-9,9932
20	-23,303	50	-23,545	77,143	-8,5623
21	-23,363	51	-23,541	77,857	-6,8494
22	-23,422	52	-23,537	78,571	-5,1365
23	-23,454	53	-23,528	79,286	-2,6901
24	-23,486	54	-23,519	80	-0,24361
25	-23,503	55	-23,503		

Tabella 4.10. Valori di tensione S YZ sul path 2. Trave spessore 10 mm

#### 4.6.4. Confronto teoria - FEM

Di seguito vengono riportati due grafici dove vengono messi a confronto i valori teorici calcolati mediante la formula di Bredt, e i valori risultanti dall'analisi FEM al computer. In particolare il *Grafico 4.9* rappresenta la tensione tangenziale  $\tau_{xz}$  lungo il *path 1*, mentre il *Grafico 4.10* rappresenta la tensione tangenziale  $\tau_{yz}$  lungo il *path 2*.

Grafico 4.9. Andamento della tensione  $S_{XZ}$  lungo il path 1. Trave spessore 10 mm

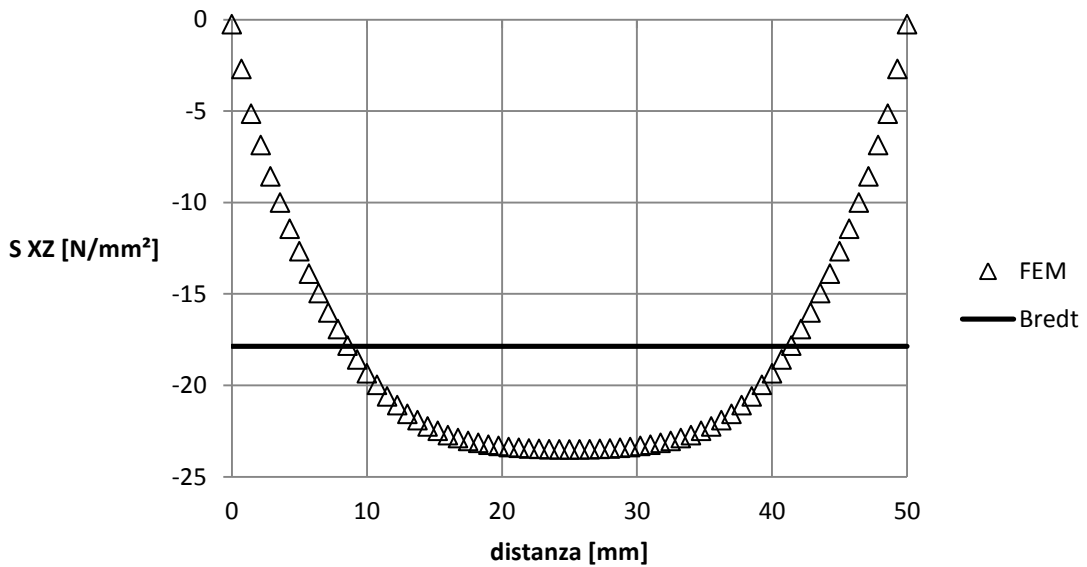
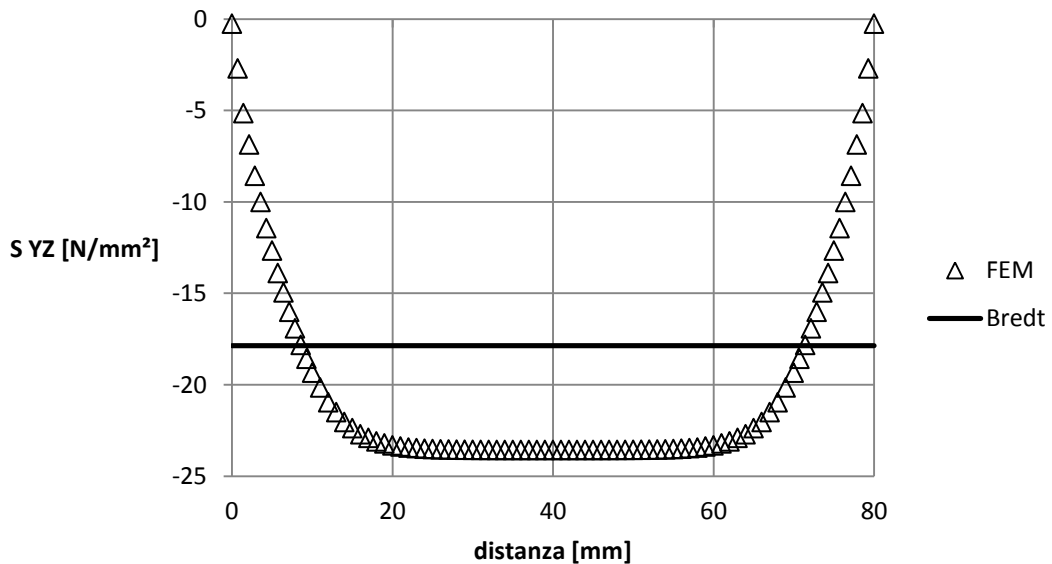


Grafico 4.10. Andamento della tensione  $S_{YZ}$  lungo il path 2. Trave spessore 10 mm



#### 4.6.5. Commenti

In questo caso la teoria delle sezioni in parete sottile cade parecchio in difetto in quanto, già dalla prima analisi grafica, si evince che le tensioni non solo non sono costanti lungo la direzione dello spessore, ma non lo sono nemmeno lungo la direzione della lunghezza. Lo confermano i valori presenti nei grafici comparativi che dimostrano, soprattutto nel *path 1*, cioè quello più corto, che la tensione assume valori costanti solo per un brevissimo tratto di circa 10 mm. Un po' meglio è la situazione nel lato più lungo (*path 2*), dove la tensione si può considerare costante per un tratto di circa 40 mm. In ogni caso l'errore è circa del 24%.

## 4.7.Trave con spessore 15 mm

### 4.7.1.Tensioni Teoriche

Essendo lo spessore della trave costante, la teoria dà un valore di sforzi tangenziali dovuti alla torsione costanti anch'essi, e calcolabili con la formula di Bredt:

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \frac{Mt}{2 \cdot A^* \cdot t} = \frac{1000000 \text{ Nmm}}{2 \cdot (65 \text{ mm} \cdot 35 \text{ mm}) \cdot 15 \text{ mm}} = 14,652 \text{ MPa}$$

### 4.7.2.Path 1

Il contour plot della componente tensionale  $\tau_{xz}$  è di seguito riportato in *Figura 4.11*.

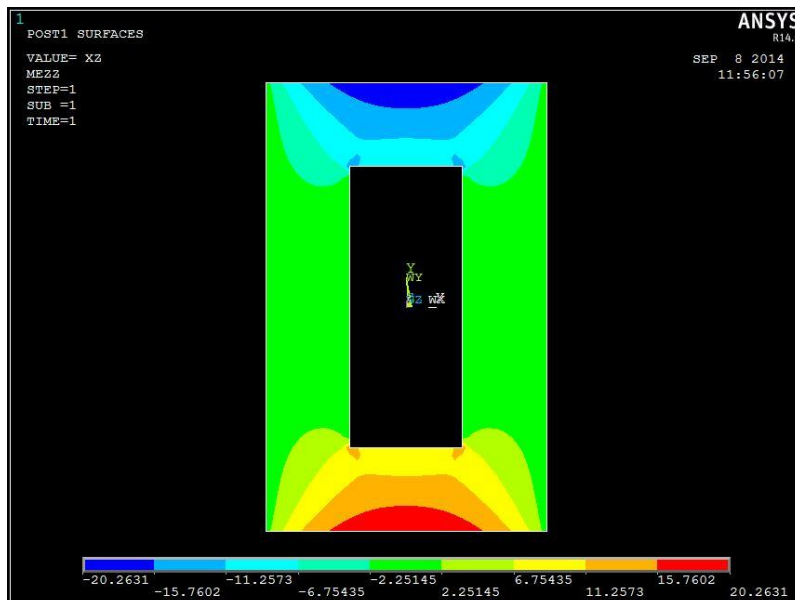


Figura 4.11. Contour Plot tensione  $\tau_{xz}$  in mezzeria su trave da 15 mm

I valori specifici della tensione nei nodi del *path 1* sono di seguito riportati nella *Tabella 4.11*.

S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM
0	-0,20871	17,667	-19,164	33,667	-18,687
0,75	-2,2204	18,333	-19,355	34,333	-18,4
1,5	-4,2321	19	-19,546	35	-18,112
2,25	-5,5891	19,667	-19,693	35,75	-17,725
3	-6,9462	20,333	-19,841	36,5	-17,337

S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM	S	SXZ - FEM
3,75	-8,0642	21	-19,948	37,25	-16,878
4,5	-9,1822	21,667	-20,055	38	-16,418
5,25	-10,125	22,333	-20,125	38,75	-15,883
6	-11,068	23	-20,195	39,5	-15,348
6,75	-11,883	23,667	-20,229	40,25	-14,731
7,5	-12,698	24,333	-20,263	41	-14,114
8,25	-13,406	25	-20,263	41,75	-13,406
9	-14,114	25,667	-20,263	42,5	-12,698
9,75	-14,731	26,333	-20,229	43,25	-11,883
10,5	-15,348	27	-20,195	44	-11,068
11,25	-15,883	27,667	-20,125	44,75	-10,125
12	-16,418	28,333	-20,055	45,5	-9,1822
12,75	-16,878	29	-19,948	46,25	-8,0642
13,5	-17,337	29,667	-19,841	47	-6,9462
14,25	-17,725	30,333	-19,693	47,75	-5,5891
15	-18,112	31	-19,546	48,5	-4,2321
15,667	-18,4	31,667	-19,355	49,25	-2,2204
16,333	-18,687	32,333	-19,164	50	-0,20871
17	-18,925	33	-18,925		

Tabella 4.11. Valori di tensione SXZ sul path 1. Trave spessore 15 mm

#### 4.7.3.Path 2

Il contour plot della componente tensionale  $\tau_{yz}$  è di seguito riportato in *Figura 4.12*.

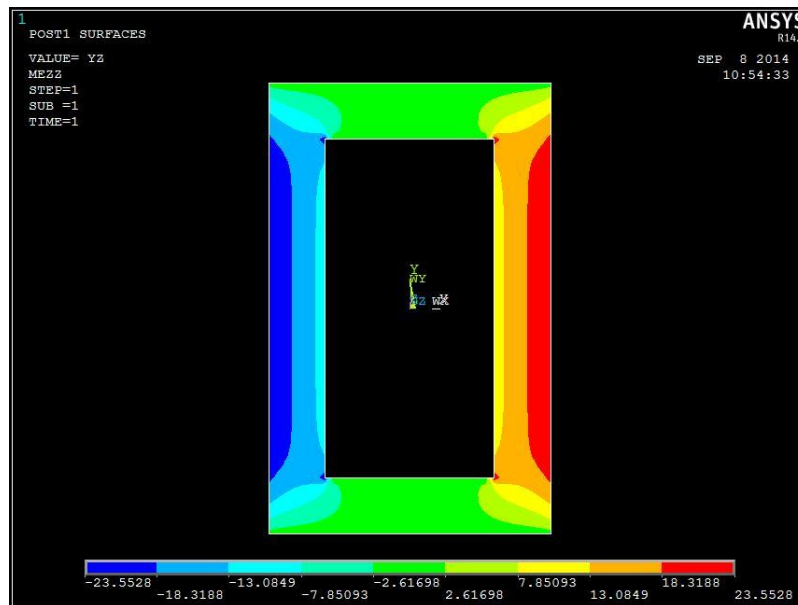


Figura 4.12. Contour Plot tensione  $\tau_{yz}$  in mezzeria su trave da 15 mm

I valori specifici della tensione nei nodi del *path 2* sono di seguito riportati nella *Tabella 4.12*.

S	SYZ - FEM	S	SYZ - FEM	S	SYZ - FEM
0	-0,21236	26	-20,874	57	-20,543
0,75	-2,221	27	-20,959	58	-20,367
1,5	-4,2297	28	-21,016	59	-20,192
2,25	-5,5886	29	-21,073	60	-19,947
3	-6,9474	30	-21,111	61	-19,703
3,75	-8,0651	31	-21,15	62	-19,373
4,5	-9,1828	32	-21,174	63	-19,043
5,25	-10,127	33	-21,199	64	-18,61
6	-11,071	34	-21,215	65	-18,178
6,75	-11,887	35	-21,231	65,75	-17,778
7,5	-12,704	36	-21,24	66,5	-17,379
8,25	-13,414	37	-21,249	67,25	-16,913
9	-14,125	38	-21,253	68	-16,447
9,75	-14,746	39	-21,258	68,75	-15,907
10,5	-15,366	40	-21,258	69,5	-15,366
11,25	-15,907	41	-21,258	70,25	-14,746
12	-16,447	42	-21,253	71	-14,125
12,75	-16,913	43	-21,249	71,75	-13,414
13,5	-17,379	44	-21,24	72,5	-12,704
14,25	-17,778	45	-21,231	73,25	-11,887
15	-18,178	46	-21,215	74	-11,071
16	-18,61	47	-21,199	74,75	-10,127
17	-19,043	48	-21,174	75,5	-9,1828
18	-19,373	49	-21,15	76,25	-8,0651
19	-19,703	50	-21,111	77	-6,9474
20	-19,947	51	-21,073	77,75	-5,5886
21	-20,192	52	-21,016	78,5	-4,2297
22	-20,367	53	-20,959	79,25	-2,221
23	-20,543	54	-20,874	80	-0,21236
24	-20,666	55	-20,79		
25	-20,79	56	-20,666		

Tabella 4.12. Valori di tensione SYZ sul path 2. Trave spessore 15 mm

#### 4.7.4. Confronto teoria - FEM

Di seguito vengono riportati due grafici dove vengono messi a confronto i valori teorici calcolati mediante la formula di Bredt, e i valori risultanti dall'analisi FEM al calcolatore. In particolare il *Grafico 4.11* rappresenta la tensione tangenziale  $\tau_{xz}$  lungo il *path 1*, mentre il *Grafico 4.12* rappresenta la tensione tangenziale  $\tau_{yz}$  lungo il *path 2*.



Grafico 4.11. Andamento della tensione  $S_{XZ}$  lungo il path 1. Trave spessore 15 mm

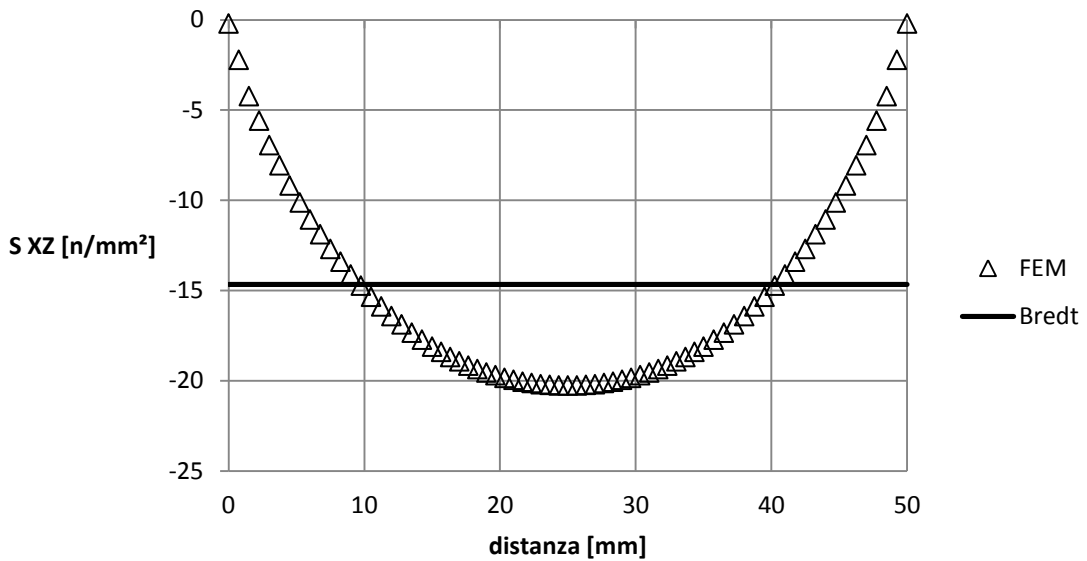
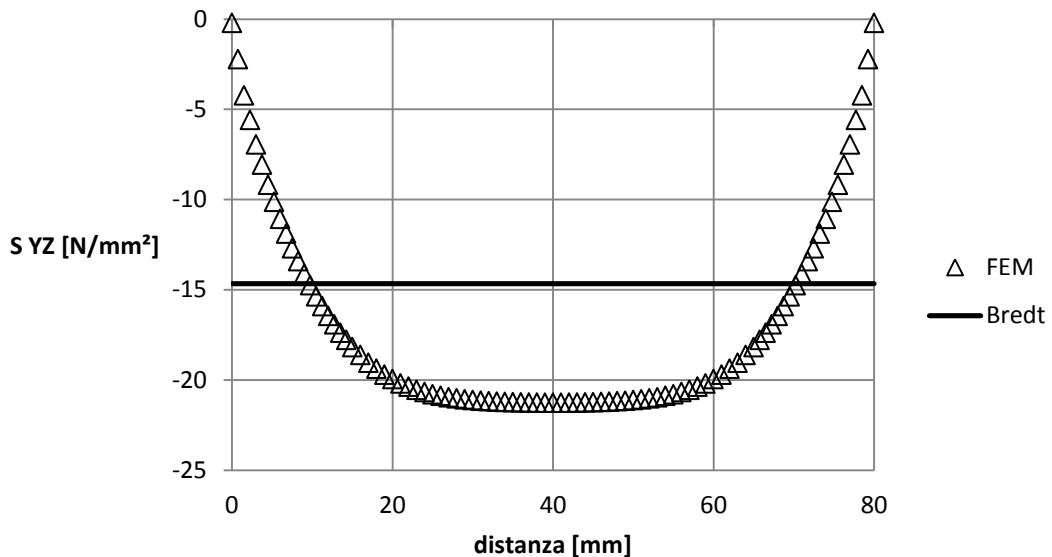


Grafico 4.12. Andamento della tensione  $S_{YZ}$  lungo il path 2. Trave spessore 15 mm



#### 4.6.5. Commenti

Con uno spessore di 15 mm rapportato alle dimensioni di 50 e 80 mm, definire la sezione "a spessore sottile" significa commettere un'approssimazione non trascurabile. Lo testimoniano le mappe tensionali dei contour plot dove si vede chiaramente la variabilità della componente tensionale lungo le direzioni dello spessore e della lunghezza. Il tutto è poi ulteriormente confermato dai grafici sopra-riportati dove si vede chiaramente che l'andamento della tensione lungo il *path 1* non rimane mai costante, cosa che avviene invece per un piccolo tratto di circa 20 mm del *path 2*, probabilmente dovuto al fatto che il tracciato risulta essere più lungo e quindi il rapporto spessore/lunghezza che ne deriva è minore.

## 4.8. Considerazioni sugli errori dei risultati

Dopo aver preso in esame singolarmente le varie sezioni è possibile fare un altro tipo di considerazione, relativa all'errore percentuale tra i valori di tensione calcolati mediante la formula di Bredt e i dati derivanti dall'analisi agli elementi finiti.

Considerando come veritiero il risultato derivante dall'analisi FEM, l'errore percentuale è stato calcolato tramite la relazione:

$$Err_{\%} = 100 \frac{X_{FEM} - X_{Bredt}}{X_{FEM}}$$

Dove  $X_{FEM}$  è il valore calcolato con l'analisi al calcolatore, e  $X_{Bredt}$  è il valore derivante dalla teoria di Bredt.

In seguito è stata calcolata la media dei valori di tensione derivanti dall'analisi FEM lungo tutto il path

$$\overline{S kZ} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S kZ_i$$

Con  $k$  coordinata  $x$  o  $y$ ,  $n$  numero di valori lungo il path.

In modo simile è stata calcolata la media degli stessi dati di tensione, però questa volta considerandone solo una quota parte, cioè quei valori in cui tale grandezza rimaneva, per un certo periodo, ragionevolmente costante.

Infine è stato calcolato l'errore percentuale anche su queste grandezze mediate.

Di seguito, in *Tabella 4.13* e *Tabella 4.14* è riportato quanto detto, rispettivamente, per il *path 1* e per il *path 2*.

S	1 mm				2 mm				3 mm				5 mm				10 mm				15 mm										
	SKZ-FEM	SKZ-Bredt	SKZ-FEM	SKZ-Bredt	SKZ-FEM	SKZ-Bredt	SKZ-FEM	SKZ-Bredt	SKZ-FEM	SKZ-Bredt	SKZ-FEM	SKZ-Bredt	SKZ-FEM	SKZ-Bredt	SKZ-FEM	SKZ-Bredt	SKZ-FEM	SKZ-Bredt	SKZ-FEM	SKZ-Bredt	SKZ-FEM	SKZ-Bredt	SKZ-FEM	SKZ-Bredt	SKZ-FEM	SKZ-Bredt	SKZ-FEM	SKZ-Bredt	SKZ-FEM	SKZ-Bredt	
0	1,3022	-129,2	10019,06%	0	-0,094	66,77	-70708%	0	-0,2768	46,05	-16538,2%	0	-0,3437	29,63	-8520,1%	0	-0,2429	17,86	-7253,1%	0	-0,2087	14,65	-6920,2%	0	-0,2087	14,65	-6920,2%	0	-0,2087	14,65	-6920,2%
0,13	-12,379	-129,2	943,43%	0,25	-7,932	66,77	-741,86%	0,38	-6,2378	46,05	-640,66%	0,63	-4,8412	29,63	-512,04%	0,71	-5,1382	17,86	-563,73%	0,75	-2,2204	14,65	-559,88%	0,75	-2,2204	14,65	-559,88%	0,75	-2,2204	14,65	-559,88%
0,25	-26,059	-129,2	395,67%	0,5	-15,769	66,77	-323,44%	0,75	-12,159	46,05	-278,76%	1,25	-9,3387	29,63	-217,28%	1,43	-9,1382	17,86	-247,53%	1,5	-4,2321	14,65	-246,21%	1,5	-4,2321	14,65	-246,21%	1,5	-4,2321	14,65	-246,21%
0,38	-38,266	-129,2	237,55%	0,75	-22,524	66,77	-196,45%	1,13	-17,078	46,05	-169,66%	1,88	-12,782	29,63	-131,81%	2,14	-8,512	17,86	-160,64%	2,25	-5,5891	14,65	-162,15%	2,25	-5,5891	14,65	-162,15%	2,25	-5,5891	14,65	-162,15%
0,5	-50,473	-129,2	155,91%	1	-29,279	66,77	-128,06%	1,5	-21,997	46,05	-109,36%	2,5	-16,224	29,63	-82,63%	2,86	-8,5642	17,86	-108,51%	3	-6,9462	14,65	-110,94%	3	-6,9462	14,65	-110,94%	3	-6,9462	14,65	-110,94%
0,63	-61,855	-129,2	108,82%	1,25	-35,461	66,77	-88,30%	1,88	-26,389	46,05	-74,52%	3,13	-19,166	29,63	-54,60%	3,57	-9,996	17,86	-78,64%	3,75	-8,0642	14,65	-81,69%	3,75	-8,0642	14,65	-81,69%	3,75	-8,0642	14,65	-81,69%
0,75	-73,238	-129,2	76,37%	1,5	-41,642	66,77	-60,55%	2,25	-30,781	46,05	-69,62%	3,75	-22,108	29,63	-54,00%	4,29	-11,428	17,86	-56,26%	4,5	-9,1822	14,65	-59,57%	4,5	-9,1822	14,65	-59,57%	4,5	-9,1822	14,65	-59,57%
0,88	-86,378	-129,2	49,54%	1,75	-47,360	66,77	-40,99%	2,63	-34,53	46,05	-33,37%	4,38	-24,479	29,63	-21,04%	5	-12,656	17,86	-41,10%	5,25	-10,125	14,65	-44,71%	5,25	-10,125	14,65	-44,71%	5,25	-10,125	14,65	-44,71%
1	-99,521	-129,2	29,79%	2	-53,078	66,77	-25,80%	3	-38,28	46,05	-20,31%	5	-26,85	29,63	-10,35%	5,71	-13,883	17,86	-28,62%	6	-11,088	14,65	-32,38%	6	-11,088	14,65	-32,38%	6	-11,088	14,65	-32,38%
1,50	-114,88	-129,2	12,44%	2,52	-53,086	66,77	-9,31%	3,88	-43,001	46,05	-7,30%	5,8	-32,903	29,63	-2,52%	6,43	-14,945	17,86	-19,49%	6,75	-11,883	14,65	-23,30%	6,75	-11,883	14,65	-23,30%	6,75	-11,883	14,65	-23,30%
2,52	-130,24	-129,2	0,82%	3,84	-69,093	66,77	3,36%	4,76	-47,723	46,05	3,50%	6,6	-30,956	29,63	4,28%	7,14	-16,008	17,86	11,56%	7,5	-12,608	14,65	15,39%	7,5	-12,608	14,65	15,39%	7,5	-12,608	14,65	15,39%
3,88	-127,03	-129,2	-1,68%	4,76	-68,782	66,77	2,92%	5,64	-48,587	46,05	5,22%	7,4	-32	29,63	7,41%	7,86	-16,913	17,86	-5,58%	8,25	-13,406	14,65	-9,29%	8,25	-13,406	14,65	-9,29%	8,25	-13,406	14,65	-9,29%
4,84	-123,82	-129,2	-4,32%	5,68	-68,471	66,77	2,48%	6,52	-49,452	46,05	6,87%	8,2	-33,044	29,63	10,33%	8,57	-17,82	17,86	0,21%	9	-14,114	14,65	3,81%	9	-14,114	14,65	3,81%	9	-14,114	14,65	3,81%
5,8	-122,5	-129,2	-5,44%	6,6	-68,216	66,77	2,12%	7,4	-49,515	46,05	6,99%	9	-33,49	29,63	11,53%	9,29	-18,575	17,86	3,87%	9,75	-14,711	14,65	0,54%	9,75	-14,711	14,65	0,54%	9,75	-14,711	14,65	0,54%
6,76	-121,19	-129,2	-6,58%	7,52	-67,962	66,77	1,75%	8,28	-49,577	46,05	7,11%	9,8	-33,936	29,63	12,69%	10	-19,311	17,86	7,63%	10,5	-15,348	14,65	4,53%	10,5	-15,348	14,65	4,53%	10,5	-15,348	14,65	4,53%
7,72	-120,17	-129,2	-7,49%	8,44	-67,703	66,77	1,37%	9,16	-49,511	46,05	7,02%	10,6	-34,108	29,63	13,13%	10,8	-19,963	17,86	10,55%	11,3	-15,883	14,65	7,73%	11,3	-15,883	14,65	7,73%	11,3	-15,883	14,65	7,73%
8,68	-119,15	-129,2	-8,41%	9,36	-67,445	66,77	1,00%	10	-49,485	46,05	6,94%	11,4	-34,28	29,63	13,56%	11,5	-20,596	17,86	13,30%	12	-16,418	14,65	10,76%	12	-16,418	14,65	10,76%	12	-16,418	14,65	10,76%
9,64	-118,24	-129,2	-9,24%	10,3	-67,223	66,77	0,67%	10,9	-49,43	46,05	6,83%	12,2	-34,344	29,63	13,73%	12,3	-21,073	17,86	15,26%	12,8	-16,878	14,65	13,19%	12,8	-16,878	14,65	13,19%	12,8	-16,878	14,65	13,19%
10,6	-117,33	-129,2	-10,09%	11,2	-67,001	66,77	0,34%	11,8	-49,376	46,05	6,73%	13	-34,408	29,63	13,89%	13	-21,55	17,86	17,14%	13,5	-17,337	14,65	15,49%	13,5	-17,337	14,65	15,49%	13,5	-17,337	14,65	15,49%
11,6	-116,42	-129,2	-10,84%	12,1	-66,802	66,77	0,05%	12,7	-49,324	46,05	6,63%	13,8	-34,432	29,63	13,95%	13,8	-21,894	17,86	18,44%	14,3	-17,725	14,65	17,34%	14,3	-17,725	14,65	17,34%	14,3	-17,725	14,65	17,34%
12,5	-115,73	-129,2	-11,61%	13	-66,613	66,77	-0,24%	13,6	-49,273	46,05	6,54%	14,6	-34,456	29,63	14,01%	14,5	-22,238	17,86	19,70%	15	-18,112	14,65	19,10%	15	-18,112	14,65	19,10%	15	-18,112	14,65	19,10%
13,5	-115,04	-129,2	-12,38%	14	-66,446	66,77	-0,49%	14,4	-49,228	46,05	6,45%	15,4	-34,480	29,63	14,07%	15,3	-22,476	17,86	20,55%	15,7	-18,4	14,65	20,37%	15,7	-18,4	14,65	20,37%	15,7	-18,4	14,65	20,37%
14,4	-114,35	-129,2	-13,16%	14,9	-66,280	66,77	-0,74%	15,3	-49,184	46,05	6,37%	16,2	-34,504	29,63	14,13%	16	-22,714	17,86	21,38%	16,3	-18,687	14,65	21,59%	16,3	-18,687	14,65	21,59%	16,3	-18,687	14,65	21,59%
15,4	-113,78	-129,2	-14,02%	15,8	-66,141	66,77	-0,98%	16,2	-49,146	46,05	6,29%	17	-34,528	29,63	14,18%	16,8	-22,873	17,86	21,93%	17	-18,925	14,65	22,58%	17	-18,925	14,65	22,58%	17	-18,925	14,65	22,58%
16,4	-113,21	-129,2	-14,89%	16,7	-66,002	66,77	-1,17%	17,1	-49,109	46,05	6,22%	17,8	-34,552	29,63	14,24%	17,5	-23,031	17,86	22,47%	17,7	-19,164	14,65	23,54%	17,7	-19,164	14,65	23,54%	17,7	-19,164	14,65	23,54%
17,3	-112,75	-129,2	-15,86%	17,6	-65,891	66,77	-1,44%	18	-49,079	46,05	6,17%	18,6	-34,576	29,63	14,29%	18,3	-23,134	17,86	22,81%	18,3	-19,355	14,65	24,30%	18,3	-19,355	14,65	24,30%	18,3	-19,355	14,65	24,30%
18,3	-112,29	-129,2	-16,93%	18,6	-65,780	66,77	-1,51%	18,8	-49,048	46,05	6,11%	19,4	-34,600	29,63	14,34%	19	-23,237	17,86	23,13%	19	-19,546	14,65	25,04%	19	-19,546	14,65	25,04%	19	-19,546	14,65	25,04%
19,2	-111,94	-129,2	-18,09%	19,5	-65,696	66,77	-1,64%	19,7	-49,026	46,05	6,06%	20,2	-34,624	29,63	14,38%	19,8	-23,302	17,86	23,37%	19,7	-19,693	14,65	25,60%	19,7	-19,693	14,65	25,60%	19,7	-19,693	14,65	25,60%
20,2	-111,6	-129,2	-19,24%	20,4	-65,612	66,77	-1,77%	20,6	-49,003	46,05	6,02%	21	-34,648	29,63	14,43%	20,5	-23,366	17,86	23,58%	20,3	-19,841	14,65	26,15%	20,3	-19,841	14,65	26,15%	20,3	-19,841	14,65	26,15%
21,2	-111,37	-129,2	-20,38%	21,3	-65,557	66,77	-1,85%	21,5	-48,988	46,05	5,99%	21,8	-34,672	29,63	14,48%	21,3	-23,405	17,86	23,70%	21	-19,948	14,65	26,55%	21	-19,948	14,65	26,55%	21	-19,948	14,65	26,55%
22,1	-111,14	-129,2	-21,52%	22,2	-65,501	66,77	-1,94%	22,4	-48,973	46,05	5,96%	22,6	-34,697	29,63	14,53%	22	-23,444	17,86	23,93%	21,7	-20,055	14,65	26,94%	21,7	-20,055	14,65	26,94%	21,7	-20,055	14,65	26,94%
23,1	-110,92	-129,2	-22,66%	23,2	-65,473	66,77	-1,99%	23,2	-48,966	46,05	5,95%	23,4	-34,727	29,63	14,58%	22,8	-23,464	17,86	23,90%	22,3	-20,215	14,65	27,30%	22,3	-20,215	14,65	27,30%	22,3	-20,215	14,65	27,30%
24	-110,93	-129,2	-23,60%	24,1	-65,445	66,77	-2,03%	24,1	-48,958	46,05	5,93%	24,2	-34,757	29,63	14,63%	23,5	-23,485	17,86	23,96%	23	-20,395	14,65	27,45%	23	-20,395	14,65	27,45%	23	-20,395	14,65	27,45%
25	-110,91	-129,2	-24,60%	25	-65,445	66,77	-2,03%	25	-48,958	46,05	5,93%	25	-34,787	29,63	14,68%	24,3	-23,491	17,86	23,98%	23,7	-20,229	14,65	27,57%	23,7	-20,229	14,65	27,57%				

s	2 mm			2 mm			2 mm			2 mm			20 mm			15 mm							
	SVZ-FEM	SVZ-Bredt	Err %	s	SVZ-FEM	SVZ-Bredt	Err %	s	SVZ-FEM	SVZ-Bredt	Err %	s	SVZ-FEM	SVZ-Bredt	Err %	s	SVZ-FEM	SVZ-Bredt	Err %				
0	0,6545	-129,2	19836,27%	0	0,1128	-66,77	-13285,6%	0	0,3024	-46,05	-15127,6%	0	0,3459	-29,63	8667,05%	0	0,2436	-17,86	7230,1%	0	0,2124	-16,65	6799,6%
0,13	-12,905	-129,2	-900,90%	0,25	-8,0532	-66,77	-729,15%	0,30	-6,2708	-46,05	-634,40%	0,63	-8,8556	-29,63	-510,22%	0,71	-2,6901	-17,86	-563,80%	0,75	-2,221	-16,65	-559,70%
0,25	-26,465	-129,2	-388,06%	0,5	-15,894	-66,77	-320,11%	0,75	-12,238	-46,05	-276,28%	1,25	-9,3654	-29,63	-216,38%	1,43	-5,1365	-17,86	-247,65%	1,5	-4,2297	-16,65	-246,41%
0,38	-38,725	-129,2	-333,55%	0,75	-22,733	-66,77	-193,73%	1,13	-17,212	-46,05	-167,56%	1,88	-12,819	-29,63	-131,14%	2,14	-6,8494	-17,86	-160,71%	2,25	-5,5886	-16,65	-162,18%
0,5	-50,985	-129,2	-153,34%	1	-29,573	-66,77	-125,79%	1,5	-22,185	-46,05	-107,59%	2,5	-16,273	-29,63	-82,08%	2,86	-8,5623	-17,86	-108,55%	3	-6,9474	-16,65	-110,90%
0,63	-62,605	-129,2	-106,32%	1,25	-35,876	-66,77	-86,12%	1,88	-26,627	-46,05	-72,96%	3,13	-19,217	-29,63	-54,19%	3,57	-9,9932	-17,86	-76,69%	3,75	-8,0651	-16,65	-81,67%
0,75	-74,235	-129,2	-74,02%	1,5	-42,179	-66,77	-58,31%	2,25	-31,069	-46,05	-48,23%	3,75	-22,162	-29,63	-33,70%	4,29	-11,424	-17,86	-56,31%	4,5	-9,1828	-16,65	-59,56%
0,88	-87,959	-129,2	-46,80%	1,75	-48,179	-66,77	-38,59%	2,63	-34,945	-46,05	-31,79%	4,38	-24,551	-29,63	-20,69%	5	-12,651	-17,86	-41,15%	5,25	-10,127	-16,65	-44,68%
1	-101,69	-129,2	-27,02%	2	-54,178	-66,77	-23,25%	3	-38,821	-46,05	-18,63%	5	-26,941	-29,63	-9,98%	5,71	-13,878	-17,86	-28,67%	6	-11,071	-16,65	-32,35%
2,11	-119,6	-129,2	8,00%	3,09	-63,538	-66,77	-5,73%	4,06	-44,14	-46,05	-4,33%	5	-29,348	-29,63	-0,96%	6,43	-14,538	-17,86	-15,54%	6,75	-11,587	-16,65	-23,26%
3,23	-137,5	-129,2	6,06%	4,17	-72,138	-66,77	7,44%	5,17	-49,459	-46,05	6,80%	7	-31,755	-29,63	6,69%	7,14	-15,908	-17,86	-15,62%	7,5	-12,704	-16,65	-15,33%
4,94	-147,21	-129,2	5,88%	5,28	-72,088	-66,77	7,87%	6,17	-50,12	-46,05	8,11%	8	-32,703	-29,63	9,40%	7,86	-16,903	-17,86	-5,64%	8,25	-14,614	-16,65	-8,23%
5,46	-136,91	-129,2	5,66%	6,34	-72,037	-66,77	7,31%	7,23	-50,78	-46,05	9,31%	9	-33,65	-29,63	11,95%	8,57	-17,808	-17,86	0,28%	9	-14,125	-16,65	-3,73%
6,57	-138,11	-129,2	6,48%	7,43	-72,415	-66,77	7,79%	8,29	-50,934	-46,05	9,58%	10	-33,966	-29,63	12,71%	9,29	-18,567	-17,86	3,82%	9,75	-14,746	-16,65	0,64%
7,69	-139,3	-129,2	7,47%	8,51	-72,793	-66,77	8,27%	9,34	-51,088	-46,05	9,86%	11	-34,241	-29,63	13,47%	10	-19,325	-17,86	7,60%	10,5	-15,366	-16,65	4,65%
8,8	-140,64	-129,2	8,16%	9,6	-73,126	-66,77	8,69%	10,4	-51,183	-46,05	10,02%	12	-34,328	-29,63	13,69%	11	-20,135	-17,86	11,31%	11,3	-15,907	-16,65	7,89%
9,91	-141,97	-129,2	9,02%	10,7	-73,459	-66,77	9,10%	11,5	-51,277	-46,05	10,19%	13	-34,414	-29,63	13,90%	12	-20,944	-17,86	14,74%	12	-16,447	-16,65	10,91%
11	-143,23	-129,2	9,82%	11,8	-73,771	-66,77	9,49%	12,5	-51,367	-46,05	10,35%	14	-34,498	-29,63	13,96%	13	-21,484	-17,86	16,88%	12,8	-16,913	-16,65	13,37%
12,1	-144,49	-129,2	10,61%	12,9	-74,082	-66,77	9,87%	13,6	-51,457	-46,05	10,50%	15	-34,582	-29,63	14,02%	14	-22,024	-17,86	18,92%	13,5	-17,379	-16,65	15,69%
13,3	-145,65	-129,2	11,32%	13,9	-74,371	-66,77	10,22%	14,6	-51,539	-46,05	10,64%	16	-34,668	-29,63	14,04%	15	-22,309	-17,86	20,14%	14,3	-17,778	-16,65	17,58%
14,4	-146,81	-129,2	12,02%	15	-74,66	-66,77	10,56%	15,7	-51,621	-46,05	10,79%	17	-34,75	-29,63	14,05%	16	-22,694	-17,86	21,31%	15	-18,178	-16,65	19,40%
15,5	-147,97	-129,2	12,62%	16,1	-74,925	-66,77	10,88%	16,7	-51,698	-46,05	10,92%	18	-34,836	-29,63	14,06%	17	-22,89	-17,86	21,99%	16	-18,61	-16,65	21,27%
16,6	-149,09	-129,2	13,27%	17,2	-75,191	-66,77	11,20%	17,8	-51,771	-46,05	11,04%	19	-34,918	-29,63	14,06%	18	-23,085	-17,86	22,65%	17	-19,043	-16,65	23,06%
17,7	-149,69	-129,2	13,83%	18,3	-75,431	-66,77	11,48%	18,9	-51,839	-46,05	11,16%	20	-34,978	-29,63	14,06%	19	-23,194	-17,86	23,01%	18	-19,373	-16,65	24,37%
18,8	-150,85	-129,2	14,37%	19,4	-75,674	-66,77	11,76%	19,9	-51,908	-46,05	11,28%	21	-34,979	-29,63	14,06%	20	-23,303	-17,86	23,37%	19	-19,703	-16,65	25,64%
<b>19,9</b>	<b>-151,71</b>	<b>-129,2</b>	<b>14,86%</b>	<b>20,5</b>	<b>-75,892</b>	<b>-66,77</b>	<b>12,02%</b>	<b>21</b>	<b>-51,969</b>	<b>-46,05</b>	<b>11,38%</b>	<b>22</b>	<b>-34,979</b>	<b>-29,63</b>	<b>14,06%</b>	<b>21</b>	<b>-23,363</b>	<b>-17,86</b>	<b>23,57%</b>	<b>20</b>	<b>-19,947</b>	<b>-16,65</b>	<b>26,55%</b>
<b>21,1</b>	<b>-152,57</b>	<b>-129,2</b>	<b>15,34%</b>	<b>21,6</b>	<b>-76,111</b>	<b>-66,77</b>	<b>12,27%</b>	<b>22</b>	<b>-52,033</b>	<b>-46,05</b>	<b>11,49%</b>	<b>23</b>	<b>-34,979</b>	<b>-29,63</b>	<b>14,06%</b>	<b>22</b>	<b>-23,422</b>	<b>-17,86</b>	<b>23,76%</b>	<b>21</b>	<b>-20,192</b>	<b>-16,65</b>	<b>27,44%</b>
<b>22,3</b>	<b>-153,34</b>	<b>-129,2</b>	<b>15,76%</b>	<b>22,8</b>	<b>-76,303</b>	<b>-66,77</b>	<b>12,49%</b>	<b>23,1</b>	<b>-52,086</b>	<b>-46,05</b>	<b>11,58%</b>	<b>24</b>	<b>-34,979</b>	<b>-29,63</b>	<b>14,06%</b>	<b>23</b>	<b>-23,454</b>	<b>-17,86</b>	<b>23,86%</b>	<b>22</b>	<b>-20,367</b>	<b>-16,65</b>	<b>28,06%</b>
<b>23,5</b>	<b>-154,11</b>	<b>-129,2</b>	<b>16,19%</b>	<b>23,7</b>	<b>-76,497</b>	<b>-66,77</b>	<b>12,71%</b>	<b>24,1</b>	<b>-52,141</b>	<b>-46,05</b>	<b>11,68%</b>	<b>25</b>	<b>-34,979</b>	<b>-29,63</b>	<b>14,06%</b>	<b>24</b>	<b>-23,486</b>	<b>-17,86</b>	<b>23,97%</b>	<b>23</b>	<b>-20,543</b>	<b>-16,65</b>	<b>28,68%</b>
<b>24,4</b>	<b>-154,78</b>	<b>-129,2</b>	<b>16,59%</b>	<b>24,8</b>	<b>-76,666</b>	<b>-66,77</b>	<b>12,90%</b>	<b>25,2</b>	<b>-52,189</b>	<b>-46,05</b>	<b>11,76%</b>	<b>26</b>	<b>-34,979</b>	<b>-29,63</b>	<b>14,06%</b>	<b>25</b>	<b>-23,503</b>	<b>-17,86</b>	<b>24,02%</b>	<b>24</b>	<b>-20,666</b>	<b>-16,65</b>	<b>29,10%</b>
<b>25,5</b>	<b>-155,45</b>	<b>-129,2</b>	<b>16,93%</b>	<b>25,9</b>	<b>-76,838</b>	<b>-66,77</b>	<b>13,10%</b>	<b>26,3</b>	<b>-52,237</b>	<b>-46,05</b>	<b>11,84%</b>	<b>27</b>	<b>-34,979</b>	<b>-29,63</b>	<b>14,06%</b>	<b>26</b>	<b>-23,519</b>	<b>-17,86</b>	<b>24,07%</b>	<b>25</b>	<b>-20,79</b>	<b>-16,65</b>	<b>29,52%</b>
<b>26,6</b>	<b>-156,03</b>	<b>-129,2</b>	<b>17,22%</b>	<b>27</b>	<b>-76,981</b>	<b>-66,77</b>	<b>13,26%</b>	<b>27,3</b>	<b>-52,279</b>	<b>-46,05</b>	<b>11,91%</b>	<b>28</b>	<b>-34,979</b>	<b>-29,63</b>	<b>14,06%</b>	<b>27</b>	<b>-23,528</b>	<b>-17,86</b>	<b>24,10%</b>	<b>26</b>	<b>-20,874</b>	<b>-16,65</b>	<b>29,81%</b>
<b>27,7</b>	<b>-156,6</b>	<b>-129,2</b>	<b>17,52%</b>	<b>28,1</b>	<b>-77,127</b>	<b>-66,77</b>	<b>13,42%</b>	<b>28,4</b>	<b>-52,32</b>	<b>-46,05</b>	<b>11,98%</b>	<b>29</b>	<b>-34,979</b>	<b>-29,63</b>	<b>14,06%</b>	<b>28</b>	<b>-23,537</b>	<b>-17,86</b>	<b>24,13%</b>	<b>27</b>	<b>-20,959</b>	<b>-16,65</b>	<b>30,09%</b>
<b>28,8</b>	<b>-157,08</b>	<b>-129,2</b>	<b>17,77%</b>	<b>29,1</b>	<b>-77,248</b>	<b>-66,77</b>	<b>13,56%</b>	<b>29,4</b>	<b>-52,355</b>	<b>-46,05</b>	<b>12,04%</b>	<b>30</b>	<b>-34,979</b>	<b>-29,63</b>	<b>14,06%</b>	<b>29</b>	<b>-23,541</b>	<b>-17,86</b>	<b>24,15%</b>	<b>28</b>	<b>-21,016</b>	<b>-16,65</b>	<b>30,28%</b>
<b>29,9</b>	<b>-157,56</b>	<b>-129,2</b>	<b>18,03%</b>	<b>30,2</b>	<b>-77,369</b>	<b>-66,77</b>	<b>13,70%</b>	<b>30,5</b>	<b>-52,388</b>	<b>-46,05</b>	<b>12,19%</b>	<b>31</b>	<b>-34,979</b>	<b>-29,63</b>	<b>14,06%</b>	<b>30</b>	<b>-23,545</b>	<b>-17,86</b>	<b>24,16%</b>	<b>29</b>	<b>-21,073</b>	<b>-16,65</b>	<b>30,47%</b>
<b>31,1</b>	<b>-157,95</b>	<b>-129,2</b>	<b>18,22%</b>	<b>31,2</b>	<b>-77,466</b>	<b>-66,77</b>	<b>13,80%</b>	<b>31,5</b>	<b>-52,417</b>	<b>-46,05</b>	<b>12,24%</b>	<b>32</b>	<b>-34,979</b>	<b>-29,63</b>	<b>14,06%</b>	<b>31</b>	<b>-23,548</b>	<b>-17,86</b>	<b>24,17%</b>	<b>30</b>	<b>-21,111</b>	<b>-16,65</b>	<b>30,66%</b>
<b>32,2</b>	<b>-158,33</b>	<b>-129,2</b>	<b>18,42%</b>	<b>32,4</b>	<b>-77,563</b>	<b>-66,77</b>	<b>13,91%</b>	<b>32,6</b>	<b>-52,445</b>	<b>-46,05</b>	<b>12,29%</b>	<b>33</b>	<b>-34,48</b>	<b>-29,63</b>	<b>14,07%</b>	<b>32</b>	<b>-23,55</b>	<b>-17,86</b>	<b>24,17%</b>	<b>31</b>	<b>-21,15</b>	<b>-16,65</b>	<b>30,72%</b>
<b>33,3</b>	<b>-158,62</b>	<b>-129,2</b>	<b>18,57%</b>	<b>33,5</b>	<b>-77,636</b>	<b>-66,77</b>	<b>13,99%</b>	<b>33,7</b>	<b>-52,465</b>	<b>-46,05</b>	<b>12,32%</b>	<b>34</b>	<b>-34,48</b>	<b>-29,63</b>	<b>14,07%</b>	<b>33</b>	<b>-23,551</b>	<b>-17,86</b>	<b>24,18%</b>	<b>32</b>	<b>-21,174</b>	<b>-16,65</b>	<b>30,80%</b>
<b>34,4</b>	<b>-158,91</b>	<b>-129,2</b>	<b>18,74%</b>	<b>34,6</b>	<b>-77,708</b>	<b>-66,77</b>	<b>14,07%</b>	<b>34,7</b>	<b>-52,486</b>	<b>-46,05</b>	<b>12,36%</b>	<b>35</b>	<b>-34,48</b>	<b>-29,63</b>	<b>14,07%</b>	<b>34</b>	<b>-23,552</b>	<b>-17,86</b>	<b>24,18%</b>	<b>33</b>	<b>-21,199</b>	<b>-16,65</b>	<b>30,88%</b>
<b>35,5</b>	<b>-159,1</b>	<b>-129,2</b>	<b>18,81%</b>	<b>35,7</b>	<b>-77,757</b>	<b>-66,77</b>	<b>14,13%</b>	<b>35,8</b>	<b>-52,5</b>	<b>-46,05</b>	<b>12,38%</b>	<b>36</b>	<b>-34,48</b>	<b>-29,63</b>	<b>14,07%</b>	<b>35</b>	<b>-23,552</b>	<b>-17,86</b>	<b>24,18%</b>	<b>34</b>	<b>-21,215</b>	<b>-16,65</b>	<b>30,94%</b>
<b>36,7</b>	<b>-159,29</b>	<b>-129,2</b>	<																				

È ora possibile inserire in un grafico tale risultati e studiare come varia l'errore percentuale al variare dello spessore.

### PATH 1

SPESSORE	Media su tutti i valori	Media sui valori *
1	-31,18%	-15,80%
2	-18,85%	-1,79%
3	-11,38%	6,01%
5	-2,81%	14,08%
10	-0,09%	23,76%
15	1,25%	27,12%

Tabella 4.15. Riassunto errori percentuali lungo path 1

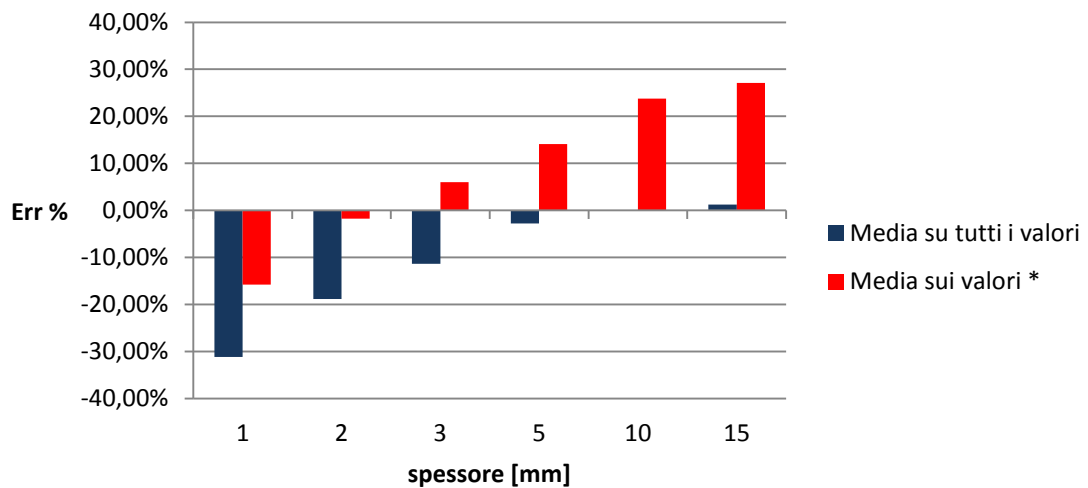


Grafico 4.13. Andamento errori percentuali lungo path 1

### PATH 2

SPESSORE	Media su tutti i valori	Media sui valori *
1	0,09%	17,22%
2	-1,78%	13,26%
3	-1,69%	11,91%
5	1,90%	14,06%
10	7,14%	24,03%
15	10,92%	30,01%

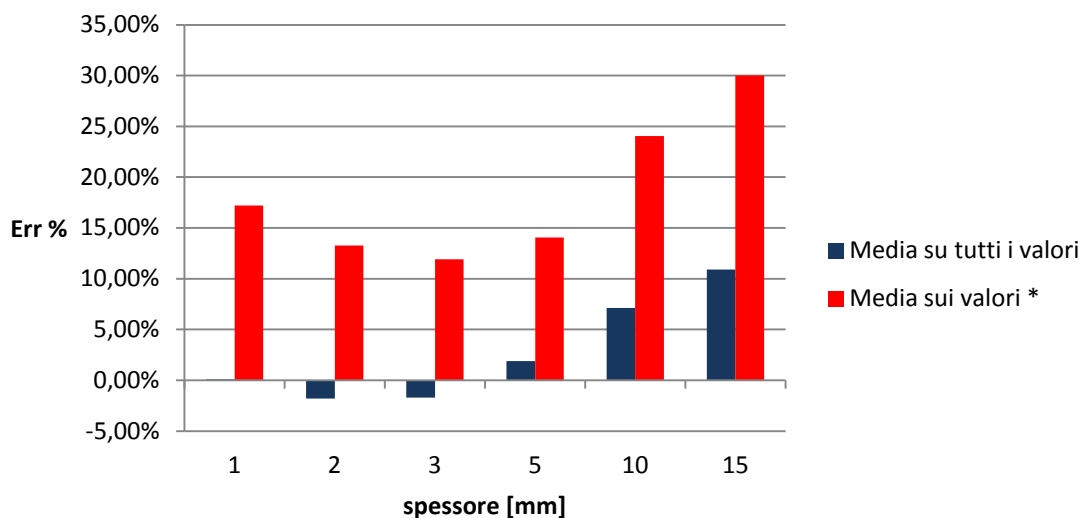


Grafico 4.14. Andamento errori percentuali lungo path 2

Dal *Grafico 4.13* si evince che, considerando sono i valori “centrali”, cioè quelli contraddistinti dall’asterisco, l’errore percentuale cresce al crescere dello spessore. Solo il caso di 1 mm non rientra nell’ipotetica linea di tendenza. La ragione di un errore così marcato può essere quella di una schematizzazione del carico non ottimale per una struttura così esile (questo fatto verrà approfondito maggiormente al **Paragrafo 4.10**). Sempre relativamente al *Grafico 4.13* si può notare che, almeno fino al valore di 15 mm, anche se gli spessori non possono considerarsi “sottili”, la media dei valori lungo l’intero path è quantomeno confrontabile con il valore teorico ricavabile mediante la trattazione di Bredt.

Dall’analisi del *Grafico 4.14* relativo al *path 2* sul lato più lungo, si nota che anche qui l’errore percentuale sulla media dei valori “centrali” tendenzialmente decresce al diminuire dello spessore. In questo caso, però si osserva che per spessori minori di 3 mm l’errore comincia a crescere al diminuire dello spessore. A questo fatto può essere ancora data una spiegazione basata sulla non ottimale schematizzazione del carico (per l’analisi di ciò si rimanda al **Paragrafo 4.10**). Relativamente poi all’errore sulla media di tutti i valori lungo il path, non si ritrova più l’andamento presente nel tracciato più corto; ma in ogni caso, anche per spessori importanti come per il caso di 15 mm, l’errore di aggira nell’intorno dell’11%.

#### 4.9. Confronto con trave a sezione quadra cava

Nel confrontare i risultati ottenuti lungo il *path 1* e lungo il *path 2* ci si è accorti di una certa differenza a livello tensionale. In linea teorica, almeno per spessori sottili, la tensione tangenziale  $\tau_{xz}$  rilevata lungo il *path 1* dovrebbe essere uguale alla tensione tangenziale  $\tau_{yz}$  rilevati lungo il *path 2*. Questo però non sembra essere confermato dai risultati dell'analisi FEM. Si è quindi voluta fare un'analisi ulteriore su una nuova sezione che presentasse la stesse dimensioni lungo la coordinata  $x$  e lungo la coordinata  $y$ , al fine di verificare se la differenza dei valori trovati in precedenza fosse relativa alla schematizzazione del problema, o se fosse proprio la situazione tensionale dei corpi analizzati.

Per far questo si è considerata la sezione di trave con spessore 2 mm già analizzata in precedenza, e si è cercato di ottenere una nuova sezione, con la stessa area racchiusa dalla linea media e con lo stesso spessore, in modo tale da poter avere due situazioni facilmente confrontabili.

La sezione già analizzata presentava  $A^* = 3744 \text{ mm}^2$ . Si è quindi scelta una sezione quadrata cava con spessore 2 mm e lati di 63 mm. In questo modo l'area racchiusa dalla linea media risulta essere:  $A^{**} = 3721 \text{ mm}^2$ , che risulta essere quantomeno paragonabile al precedente valore.

La geometria della trave è riportata in *Figura 4.13*.

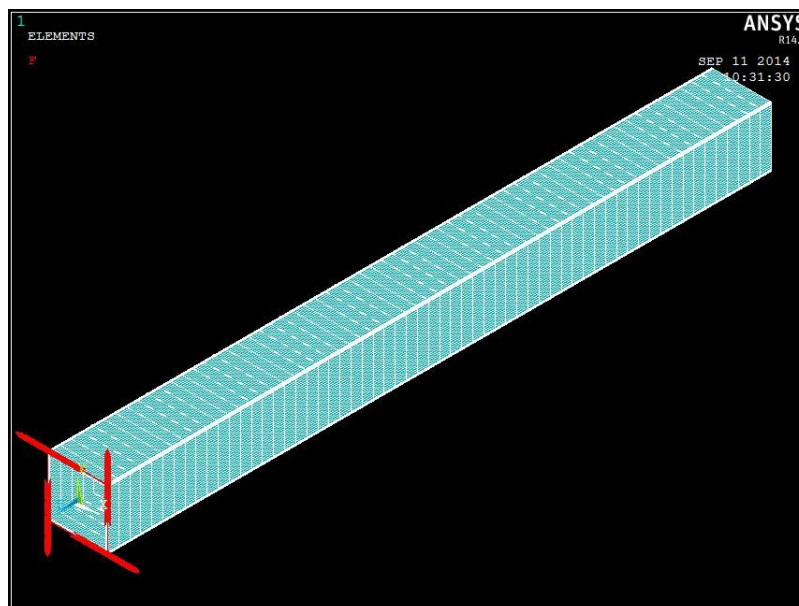
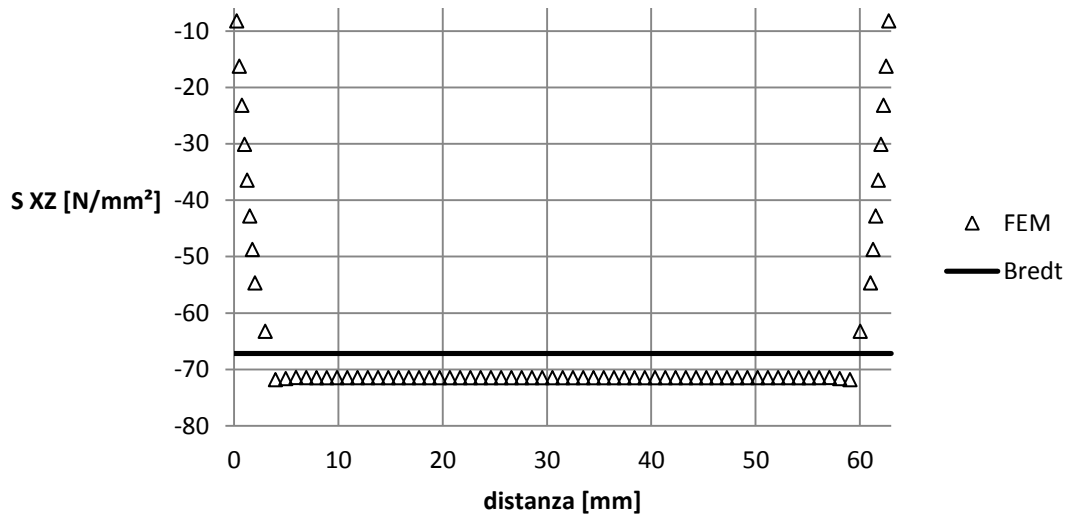


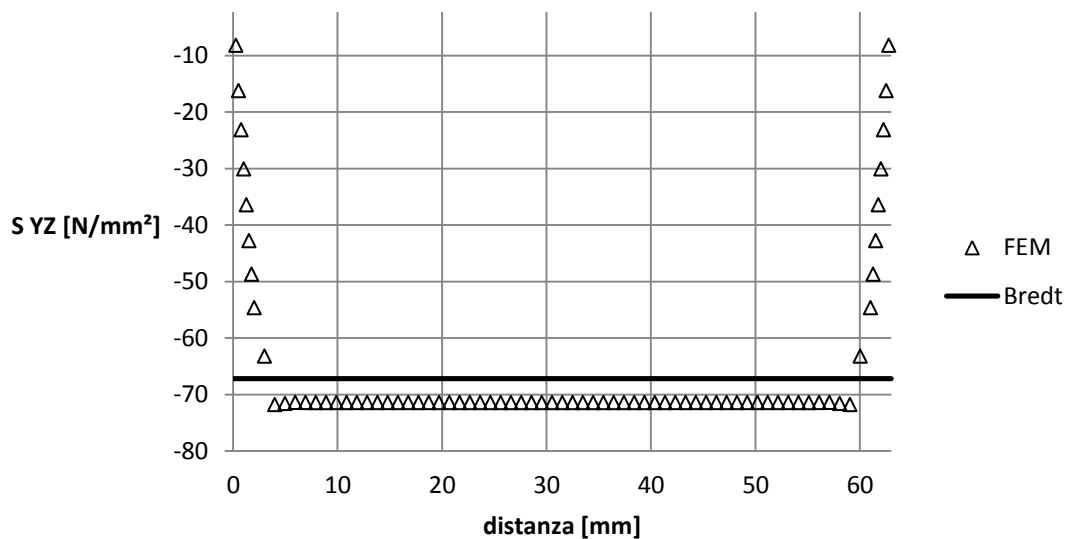
Figura 4.13. Geometria trave quadra cava

Dopo aver condotto l'analisi, le tensioni tangenziali sui due path sono risultate essere quelle riportate sul *Grafico 4.15* e *Grafico 4.16*.

*Grafico 4.15. Andamento tensione  $\tau_{xz}$  lungo il path superiore della trave a sezione quadra*



*Grafico 4.16. Andamento della tensione  $\tau_{yz}$  lungo il path laterale della trave a sezione quadra*

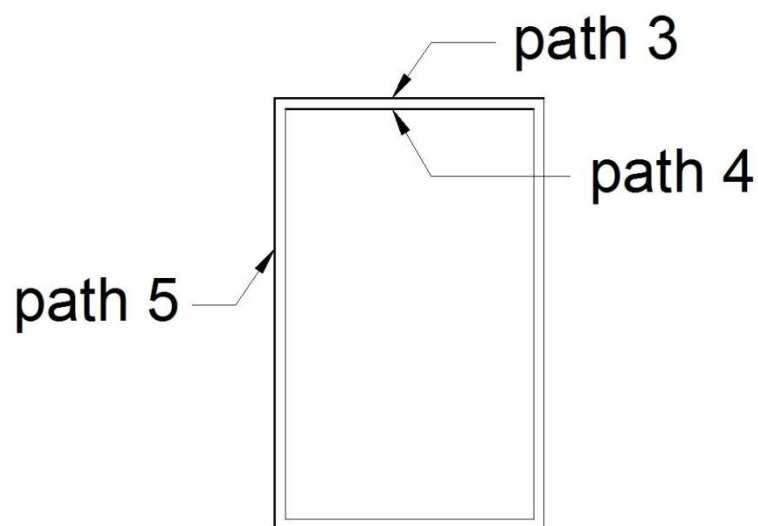


Se ne conclude quindi, che non solo le tensioni tangenziali sono perfettamente identiche (come dovrebbe essere dalla teoria), ma sono anche molto più costanti lungo i due tracciati (si confrontino questi grafici con il *Grafico 4.3* e *grafico 4.4*). Questa geometria quindi, rispecchia meglio l'andamento teorico delle tensioni, probabilmente grazie al fatto di avere i lati di uguale lunghezza.



#### 4.10. Considerazioni sulla schematizzazione del momento

Come si è già accennato in precedenza la scelta di come schematizzare il carico applicato può notevolmente influire sui risultati dell'analisi. Per gli studi sopra-riportati si è sempre di sintetizzato il momento tramite 4 serie di forze concentrate, una per spigolo (vedasi *Figura 3.8*). In precedenza però si era tentato di utilizzare solamente due serie di forze concentrate, una sullo spigolo superiore e uno su quello inferiore (*Figura 3.7*), questo però dava luogo a risultati molto strani in termini di tensioni, specialmente per spessori esigui. Di seguito si illustrano i risultati ottenuti dopo l'analisi FEM della trave con spessore 1 mm dove il carico è sintetizzato come due sole serie di forze. Sul *Grafico 4.17* è riportato l'andamento della tensione  $\tau_{xz}$  lungo il *path 3* di *Figura 4.14*. Gli andamenti delle tensioni  $\tau_{xz}$  nel *path 4* e  $\tau_{yz}$  nel *path 5* di *Figura 4.14* sono riportati, rispettivamente sul *Grafico 4.18* e *Grafico 4.19*.



*Figura 4.14. Particolare path 3, 4 e 5*

Grafico 4.17. Andamento della tensione  $S_{XZ}$  lungo path 3 sezione sp. 1 mm con schematizzazione errata del momento

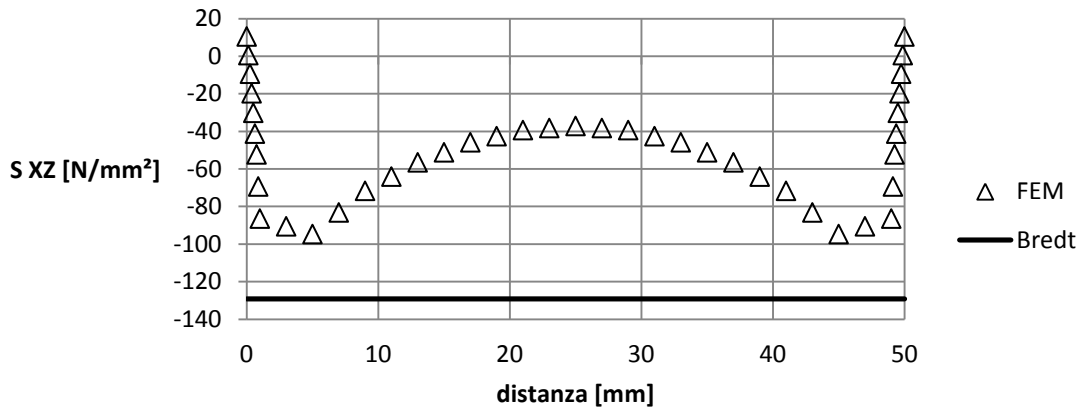


Grafico 4.18. Andamento della tensione  $S_{XZ}$  lungo path 4 sezione sp. 1 mm con schematizzazione errata del momento

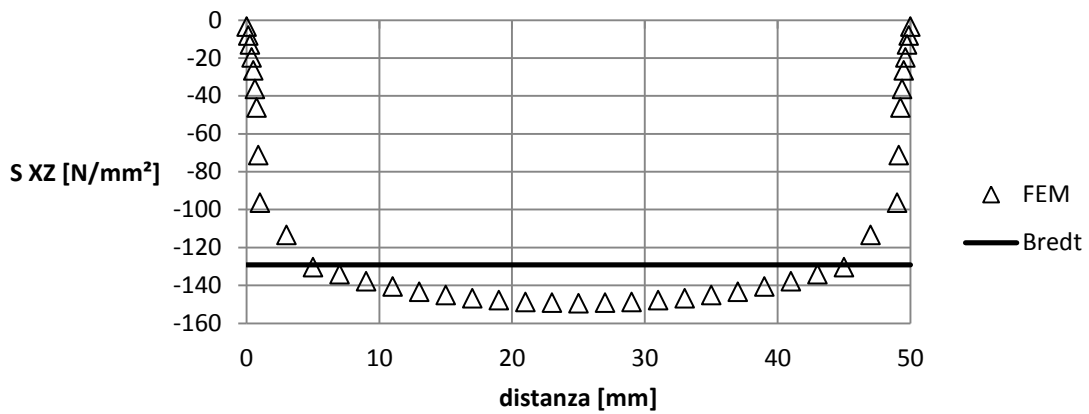
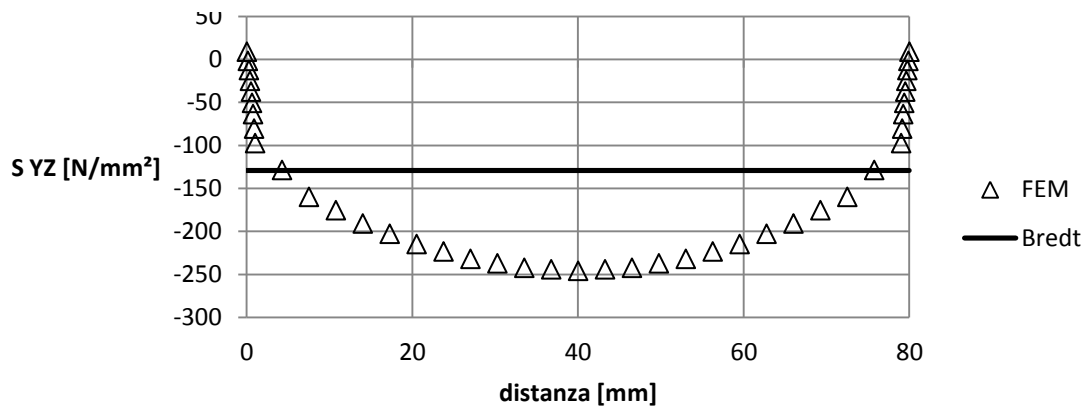
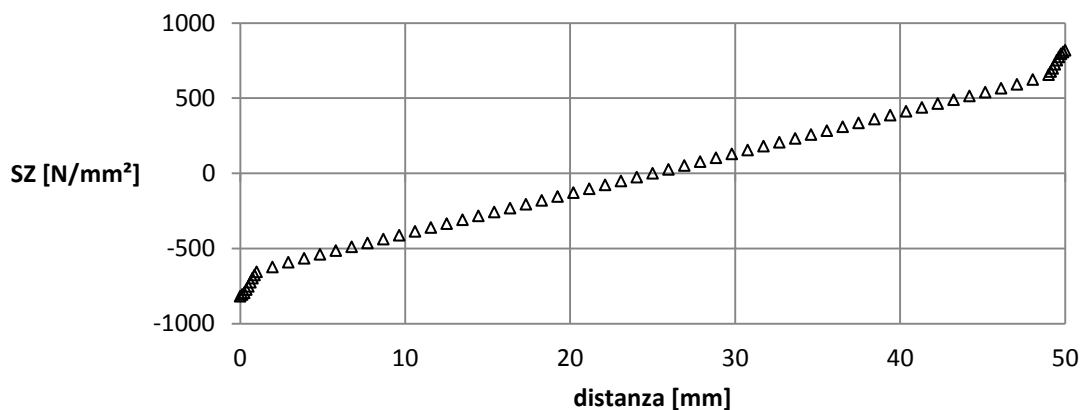


Grafico 4.19. Andamento della tensione  $S_{YZ}$  lungo path 5 sezione sp. 1 mm con schematizzazione errata del momento



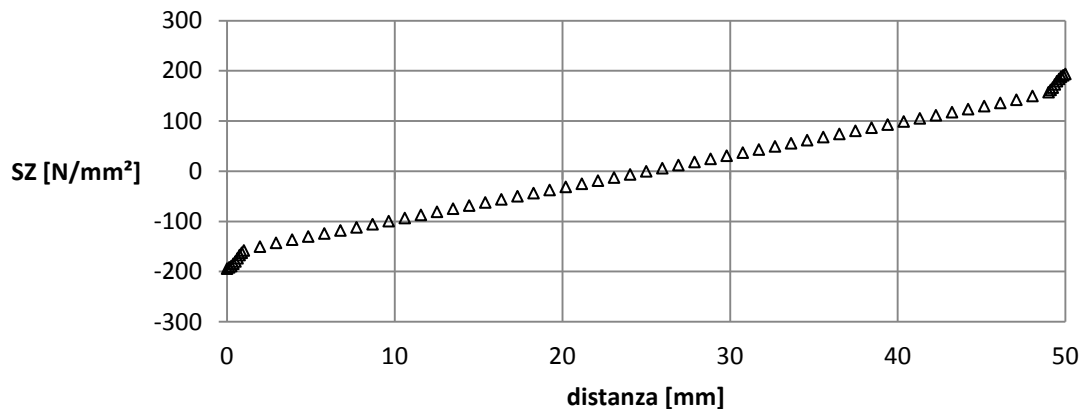
Confrontando i dati relativi al *path 3* e al *path 4* si nota distintamente come non sia per nulla verificata l'ipotesi fondamentale della costanza della tensione tangenziale lungo la direzione dello spessore, ma anzi vi sia una differenza di valori, che sulla mezzeria è superiore ai 110 MPa. Questa risulta essere una situazione palesemente assurda, in quanto tutta la trattazione teorica si basa proprio sul fatto che le tensioni possono ragionevolmente considerarsi costanti lungo lo spessore, tanto più tale dimensione è contenuta. Andando poi a plottare i vari sforzi di tensione presenti lungo il *path 3* ci si è accorti che vi era la presenza massiccia (di oltre 800 MPa) di uno sforzo normale lungo la direzione z, come è segnalato dal *Grafico 4.20*.

*Grafico 4.20. Andamento della tensione  $\sigma_z$  lungo il path superiore con schematizzazione "errata" del momento torcente con trave sp. 1 mm*



Si è quindi concluso che la schematizzazione scelta inizialmente per rappresentare il momento torcente non potesse andare bene per travi a cassone con spessore troppo sottile, in quanto l'eccessiva esilità della sezione comportava l'instaurarsi di componenti tensionali che nulla avevano a che fare con uno sforzo di torsione. Si noti come controprova il *Grafico 4.21*, dove sono riportati i valori che la tensione  $\sigma_z$  assume sullo stesso path con la schematizzazione del momento migliorata.

Grafico 4.21. Andamento della tensione  $\sigma_z$  lungo il path superiore con schematizzazione "migliorata" del momento torcente con trave sp. 1 mm

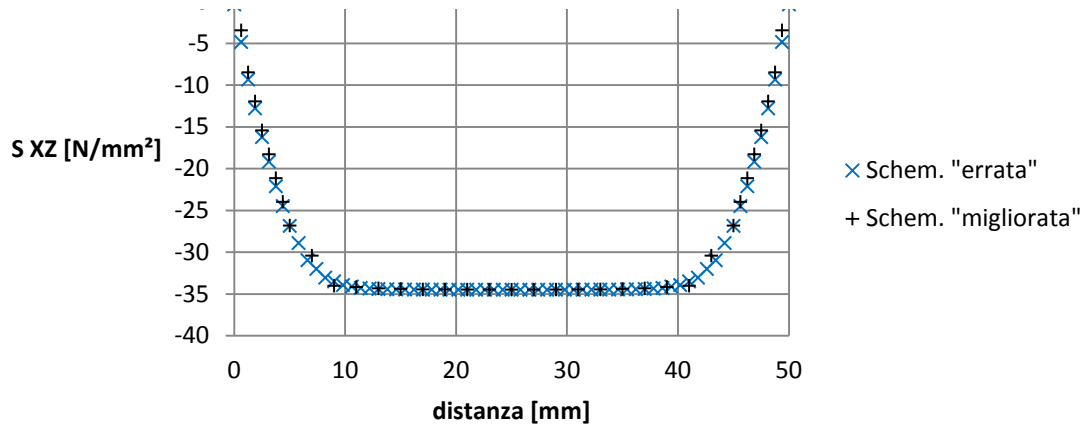


La situazione è di molto migliorata, però persiste l'esistenza della componente di sforzo normale  $\sigma_z$ , ad indicare che il problema è proprio relativo alla schematizzazione non ottimale del carico. Una strada per provare a migliorare questi risultati potrebbe essere quella di andare a sagomare una flangia all'estremità della trave, ed applicare il momento sulla stessa, in modo tale che esso sia posto in corrispondenza di un elemento "massiccio" e meno deformabile rispetto alla trave di partenza con spessore 1 mm.

Si è inoltre osservato che questo fenomeno è molto meno risentito dalle travi con spessori maggiori, infatti confrontando i valori generati dalla schematizzazione "errata" del carico si è notato che la differenza di risultati si è fatta molto meno marcata, quasi non evidente, segno del fatto che il problema della schematizzazione del carico si sente maggiormente su strutture esili.

In testimonianza di ciò si confrontino nel *Grafico 4.22*, i valori delle tensioni lungo il path dello spigolo superiore della trave con spessore 5 mm con la rappresentazione del carico "errata", con quelli trovati in precedenza con la schematizzazione "migliorata".

Grafico 4.22. Confronto tra le tensioni  $\tau_{xz}$  lungo il path 1 con trave spessore 5 mm, con le due diverse schematizzazioni del carico





## 5.CONCLUSIONI

Gli studi svolti hanno permesso di constatare la bontà della formula di Bredt per strutture a profilo chiuso a sezione sottile. Si è inoltre osservato che le ipotesi fondamentali di tale formulazione sono meglio verificate per sezioni con lati uguali, piuttosto che per sezioni con lati di lunghezze diverse, in cui, in generale, si è notato un errore leggermente più marcato sul lato maggiore, nel confronto tra teoria ed analisi FEM.

Si è inoltre osservato un problema relativo alla schematizzazione del carico di momento in quanto, soprattutto per strutture esili, il rappresentarlo tramite una sola coppia di forze, provoca delle situazioni tensionali molto diverse dalla realtà, con la comparsa di sforzi normali di notevole entità, che nulla avrebbero a che fare con una sollecitazione di puro momento torcente. Questo fatto potrebbe inoltre spiegare il perché i risultati relativi alla trave con spessore 1 mm si discostino maggiormente dalla teoria rispetto a quelli relativi alla trave da 2 mm. Probabilmente anche con la seconda schematizzazione, che vede l'utilizzo di due coppie di forze, non si riesce a simulare alla perfezione gli effetti di un momento torcente. Con spessori maggiori, invece, non si risente minimamente di tale problematica e schematizzare un momento tramite una, o più coppie di forze non va a influire sul risultato dell'analisi.

In generale, non considerando il fenomeno sopra-citato, si può affermare che le analisi FEM confermano la validità dell'utilizzo della formula di Bredt per sezioni a profilo chiuso con spessore sottile, tanto più se la tale dimensione è contenuta rispetto alle altre. In ogni caso, con la geometria in esame si è visto che, fino ad uno spessore di 15 mm, la media di tutti i valori di tensione tangenziale trovati nei lati esterni è quantomeno confrontabile con il valore teorico costante. Quello che si perde però sono i dati relativi ai valori massimi e minimi di tensione presenti in questi casi, dove la distribuzione degli sforzi taglianti non è più costante ma bensì assume un andamento con gradiente positivo verso l'asse di simmetria della sezione.





## **Bibliografia**

Quaresimin M., Zappalorto M., *Costruzione di Macchine*, CLEUP