

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, EDILE, AMBIENTALE
DICEA

Laurea Magistrale in
Ingegneria Civile
Indirizzo: Idraulica

FORMULAZIONE LAGRANGIANA DEL PROBLEMA DEL CONTATTO APPLICATO A FAGLIE GEOLOGICHE

Relatore: Dr. Ing. Janna Carlo

Laureando: Franceschini Andrea
Matricola: 1057345

ANNO ACCADEMICO 2013–2014

Indice

Elenco delle figure	VII
Elenco delle tabelle	XI
1 Introduzione	1
2 Problema strutturale	5
2.1 Equazioni della poro elasticità	5
2.2 Legame costitutivo trasversalmente isotropo	9
2.3 Disaccoppiamento delle soluzioni di flusso e strutturale	12
3 Soluzione agli elementi finiti del problema	13
3.1 Introduzione del metodo FE	13
3.1.1 Metodo dei residui pesati e Principio dei Lavori Virtuali	14
3.2 Applicazione al problema strutturale	14
3.2.1 Funzioni di interpolazione	14
3.2.2 Calcolo delle deformazioni	15
3.2.3 Matrice di rigidezza del materiale e calcolo delle tensioni	16
3.2.4 Calcolo dei termini LN e DLN	18
3.3 Matrice di rigidezza del metodo agli elementi finiti	19
3.4 Imposizione della forzante	21
3.4.1 Metodo del gradiente infinito	21
3.4.2 Metodo del gradiente	24
3.5 Metodo risolutivo utilizzato	26
3.6 Imposizione delle condizioni al contorno	27
4 Elementi di interfaccia	29
4.1 Trattazione analitica del vincolo	30
4.2 Funzioni di interpolazione	30

4.3	Sistema di riferimento locale	30
4.4	Vincoli introdotti dalle faglie	33
4.5	Contributo al principio variazionale	34
4.5.1	Matrice locale per IE	35
4.6	Scorrimento ad attrito	38
4.6.1	Lavoro virtuale derivato dallo scorrimento con attrito	39
4.7	Comportamento idraulico della faglia	41
5	Soluzione del problema strutturale con discontinuità	43
5.1	Tattamento dei moltiplicatori disattivi	47
5.2	Criteri di uscita	47
5.2.1	Considerazioni in merito alla norma dell'energia	48
5.3	Valori iniziali e serie di step successivi	48
5.4	Comportamento in caso di rotazione	50
6	Algoritmo per elementi di interfaccia	51
6.1	Pseudo-codice	53
6.2	Inizio di un nuovo time step	56
6.3	Tattamento numerico del criterio di rottura	57
6.4	Tattamento dell'asimmetria dello jacobiano	58
7	Test case	59
7.1	Mesh e costanti fisiche del materiale	59
7.1.1	Costanti fisiche del materiale	60
7.1.2	Condizioni al contorno ed elementi di interfaccia	63
7.2	Termini dello jacobiano in caso di scorrimento	64
7.3	Tattamento numerico delle condizioni di vincolo	68
7.4	Proprietà della matrice e convergenza	69
7.4.1	Andamento della convergenza	70
7.5	Risultati	71
7.6	Apertura della faglia	87
7.7	Variazione di pressione	101
7.7.1	Commenti	101
7.8	Rotazione della faglia	115
7.8.1	Faglia trascorrente	115
7.8.2	Risultati	118

8	Esempio realistico	133
8.1	Simulazione di flusso e parametri caratteristici	134
8.1.1	Parametri fisici del materiale	135
8.1.2	Storia delle estrazioni di portata	136
8.2	Risultati	138
8.3	Confronto con algoritmo esplicito	157
9	Conclusioni	167
	Bibliografia	169

Elenco delle figure

2.1	Principio delle tensioni efficaci	6
2.2	Fase di carico e scarico	11
4.1	Elemento di interfaccia 2D triangolare, inserito in una mesh 3D tetraedrica	29
4.2	Elemento di interfaccia 2D, indicante le aree afferenti a ciascun nodo . . .	32
4.3	Criterio di rottura di Mohr – Coulomb	35
4.4	Sistema di riferimento di un elemento di interfaccia, posto nella superficie top 1) o bottom 2)	36
6.1	Diagramma a blocchi della routine per il trattamento dei nodi di interfaccia	55
6.2	Criterio di rottura implementato	58
7.1	Mesh analizzata	60
7.2	Storia di carico, nell'esempio analizzato	61
7.3	Posizione e caratteristiche degli elementi di interfaccia utilizzati	62
7.4	Jacobiano dell'esempio in analisi, a faglia continua. Si sono indicati i quat- tro blocchi che compongono la matrice. La matrice è simmetrica in quanto nessun elemento della faglia è plasticizzato	70
7.5	Profili di convergenza, per la prima parte della simulazione	73
7.6	Profili di convergenza, per la seconda parte della simulazione	74
7.7	Andamento della deformata	75
7.8	Andamento della deformata	76
7.9	Andamento della deformata	77
7.10	Andamento della deformata	78
7.11	Andamento della tensione normale	79
7.12	Andamento della tensione normale	80
7.13	Andamento della tensione normale	81
7.14	Andamento della tensione normale	82
7.15	Andamento del modulo della tensione tangenziale	83

7.16	Andamento del modulo della tensione tangenziale	84
7.17	Andamento del modulo della tensione tangenziale	85
7.18	Andamento del modulo della tensione tangenziale	86
7.19	Andamento della deformata	89
7.20	Andamento della deformata	90
7.21	Andamento della deformata	91
7.22	Andamento della deformata	92
7.23	Andamento della tensione normale	93
7.24	Andamento della tensione normale	94
7.25	Andamento della tensione normale	95
7.26	Andamento della tensione normale	96
7.27	Andamento del modulo della tensione tangenziale	97
7.28	Andamento del modulo della tensione tangenziale	98
7.29	Andamento del modulo della tensione tangenziale	99
7.30	Andamento del modulo della tensione tangenziale	100
7.31	Storia di carico, nell'esempio analizzato	101
7.32	Andamento della deformata	103
7.33	Andamento della deformata	104
7.34	Andamento della deformata	105
7.35	Andamento della deformata	106
7.36	Andamento della tensione normale	107
7.37	Andamento della tensione normale	108
7.38	Andamento della tensione normale	109
7.39	Andamento della tensione normale	110
7.40	Andamento del modulo della tensione tangenziale	111
7.41	Andamento del modulo della tensione tangenziale	112
7.42	Andamento del modulo della tensione tangenziale	113
7.43	Andamento del modulo della tensione tangenziale	114
7.44	Angolo d'attrito di incipiente movimento, in funzione di inclinazione della faglia e rapporto di Poisson	117
7.45	Andamento della deformata	120
7.46	Andamento della deformata	121
7.47	Andamento della deformata	122
7.48	Andamento della deformata	123
7.49	Andamento della tensione normale	124
7.50	Andamento della tensione normale	125

7.51	Andamento della tensione normale	126
7.52	Andamento della tensione normale	127
7.53	Andamento del modulo della tensione tangenziale	128
7.54	Andamento del modulo della tensione tangenziale	129
7.55	Andamento del modulo della tensione tangenziale	130
7.56	Andamento del modulo della tensione tangenziale	131
8.1	Pianta della mesh in analisi. Si notano immediatamente le posizioni dei 3 pozzi, tutti nella regione rossa, corrispondente alla proiezione dell'acquifero	134
8.2	Discretizzazione della faglia	135
8.3	Discretizzazione 3D del dominio	135
8.4	Tensione verticale iniziale σ_{z0} , agente sul piano di faglia	136
8.5	Andamento delle estrazioni nel tempo. Nota: il tempo è misurato in anni, con anno 0 l'inizio della simulazione	137
8.6	Andamento della pressione nell'acquifero, al 7° time step	137
8.7	Andamento del volume cumulato nel dominio, al variare del tempo	138
8.8	Andamento della subsidenza	141
8.9	Andamento della subsidenza	142
8.10	Andamento della subsidenza	143
8.11	Andamento della subsidenza	144
8.12	Andamento della tensione normale. Time step 1 – 5	145
8.13	Andamento della tensione normale. Time step 6 – 10	146
8.14	Andamento del modulo della tensione tangenziale. Time step 1 – 5	147
8.15	Andamento del modulo della tensione tangenziale. Time step 6 – 10	148
8.16	Apertura normale al piano di faglia. Time step 1 – 5	149
8.17	Apertura normale al piano di faglia. Time step 6 – 10	150
8.18	Apertura normale al piano di faglia. Time step 11 – 15	151
8.19	Apertura normale al piano di faglia. Time step 16 – 20	152
8.20	Movimento nel piano di faglia. Time step 1 – 5	153
8.21	Movimento nel piano di faglia. Time step 6 – 10	154
8.22	Movimento nel piano di faglia. Time step 11 – 15	155
8.23	Movimento nel piano di faglia. Time step 16 – 20	156
8.24	Time step 4. Confronto tra risultati del codice esplicito e implicito, in termini di sforzo normale, scorrimenti in direzione normale al piano di faglia ed elementi plasticizzati a sforzo normale	160

8.25	Time step 4. Confronto tra risultati del codice esplicito e implicito, in termini di sforzo tangenziale, scorrimenti nel piano di faglia ed elementi plasticizzati a sforzo di taglio	161
8.26	Time step 7. Confronto tra risultati del codice esplicito e implicito, in termini di sforzo normale, scorrimenti in direzione normale al piano di faglia ed elementi plasticizzati a sforzo normale	162
8.27	Time step 7. Confronto tra risultati del codice esplicito e implicito, in termini di sforzo tangenziale, scorrimenti nel piano di faglia ed elementi plasticizzati a sforzo di taglio	163
8.28	Time step 12. Confronto tra risultati del codice esplicito e implicito, in termini di spostamenti ortogonali alla faglia e nel piano di faglia	164
8.29	Confronto tra risultati del codice esplicito e implicito, in termini di media integrale e deviazione standard degli spostamenti di faglia	165

Elenco delle tabelle

7.1	Numero di iterazioni e residuo di uscita, per tutti i time step della simulazione	71
7.2	Numero di nodi attivi a taglio e sforzo normale, per tutti i time step della simulazione	72
7.3	Numero di nodi attivi a taglio e sforzo normale, per tutti i time step della simulazione a tensione litostatica ridotta	87
7.4	Numero di nodi attivi a taglio e sforzo normale, per tutti i time step della simulazione, in caso di depressurizzazione di parte del cubetto	102
7.5	Numero di nodi attivi a taglio e sforzo normale, per tutti i time step della simulazione, in caso di faglia inclinata	119
8.1	Parametri fisici del materiale	136
8.2	Numero di nodi attivi a taglio e sforzo normale, per tutti gli anni della simulazione	139

Capitolo 1

Introduzione

L'oggetto di questo lavoro di tesi è lo studio dell'influenza e del comportamento di una frattura, in un corpo solido tridimensionale. Tale interruzione della continuità del corpo, che, in natura, può essere rappresentato da una faglia geologica in un giacimento, non può essere simulata con i tradizionali elementi finiti (FE), a causa delle condizioni di compatibilità, che impongono la continuità del campo di spostamento, ma richiede l'introduzione di speciali elementi finiti, in letteratura chiamati elementi di interfaccia (IE). Questo tipo di elementi sono stati sviluppati a partire da Goodman et al. [1968] e successivamente utilizzati e ulteriormente sviluppati in Janna [2007]; Ferronato et al. [2008]; Aagaard et al. [2013]; Jha and Juanes [2014]. Lavorando con una griglia discretizzata a elementi finiti tetraedrici, per esempio, gli elementi di interfaccia sono triangolari, ovvero sono composti da due triangoli uguali, che riproducono le due facce opposte della faglia. Un evidente vantaggio di questa formulazione è che, lavorando nell'ipotesi di piccoli spostamenti, sono note a priori le coppie dei nodi di contatto. Ogni elemento ha, dunque, 6 nodi, a due a due coincidenti, quando il corpo è continuo. Se, viceversa, il corpo, in quell'intorno, è soggetto a un sistema di forze tale da provocare un movimento relativo tra le due facce, l'elemento cessa la sua azione e non vi è più alcun vincolo tra i nodi adiacenti.

Questi elementi sono quindi in grado di simulare la continuità, se la faglia è in compressione, la libertà di movimento, se lo sforzo agente è di trazione, e anche le situazioni intermedie quando la faglia è chiusa a sforzo normale, ma libera di scorrere tangenzialmente, secondo una legge d'attrito.

La trattazione numerica di questo problema, nell'implementazione agli elementi finiti, avviene con due metodologie completamente diverse tra loro.

La prima, più semplice, è l'approccio penalty, trattato in Bathe [2006]; Zienkiewicz and Taylor [2000b]; Janna [2007]; Ferronato et al. [2008], che simula il contatto attraverso delle molle elastiche, estremamente rigide, che simulano la continuità ed evitano la com-

penetrazione dei corpi. In caso di apertura della faglia, tale rigidità si annulla. Ogni coppia di nodi è collegata con due molle, una per lo sforzo normale e una per lo sforzo di taglio, di rigidità K_N e K_T rispettivamente. Per realizzare correttamente il comportamento del corpo continuo, però, occorrerebbe una rigidità infinita, che non può essere realizzata, dovendo essere $K_N, K_T \in \mathbb{R}$. Inoltre, valori eccessivi di K_N e K_T sono causa di malcondizionamento della matrice di rigidità, come evidenziato in Ferronato et al. [2012].

Quest'ultimo si rivela essere il maggior difetto del metodo penalty. I principali pregi, invece, sono la semplicità di implementazione e il non dover introdurre nuove incognite nel classico problema agli elementi finiti. Durante l'assemblaggio della matrice globale è sufficiente aggiungere il contributo locale dell'elemento di interfaccia per simulare la discontinuità. Al momento dell'apertura totale o parziale della faglia, a sforzo normale o a taglio, si ha l'annullamento di una parte di questo contributo. Infine, la matrice globale, che si ottiene risolvendo il problema non – lineare con uno schema alla Newton – Raphson, è simmetrica e definita positiva.

L'altro approccio, analizzato e sviluppato in questo lavoro di tesi, è quello lagrangiano, che tratta la discontinuità rappresentata della faglia come una condizione ulteriore di vincolo nella minimizzazione del funzionale associato alle equazioni dell'equilibrio indefinito di Cauchy, ovvero del potenziale energetico [Bathe, 2006; Bertsekas, 1996; Simo and Hughes, 2000; Zienkiewicz and Taylor, 2000b]. I moltiplicatori di Lagrange, funzioni incognite introdotte per trattare il problema come un ottimo libero, hanno un corrispettivo fisico, rappresentano cioè le tensioni locali di contatto tra elementi di faglia. Le tensioni, dunque, che con l'approccio penalty sono calcolate come $\sigma_N = K_N \cdot \Delta u_N$ e $\tau = K_T \cdot \Delta u_T$, ora sono delle incognite, al pari degli spostamenti.

Il problema di ottimo vincolato comporta una matrice tangente, secondo uno schema alla Newton – Raphson, composta dalla classica matrice di rigidità, più degli ulteriori blocchi dovuti alle nuove incognite rappresentate dai moltiplicatori di Lagrange. In simboli, si ha la seguente matrice a blocchi:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} \\ \tilde{\mathbf{B}}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

in cui \mathbf{K} è la classica matrice di rigidità FE, mentre \mathbf{B} e $\tilde{\mathbf{B}}^T$ sono i blocchi relativi ai moltiplicatori di Lagrange. Si noti che, per com'è strutturata la matrice, essa avrà autovalori sia negativi che positivi, sarà cioè una matrice di punto sella, non più risolvibile con l'algoritmo del gradiente coniugato preconditionato (PCG), descritto in Gambolati [2003]; Nocedal and Wright [2006]. La soluzione di sistemi tipo (1.1) richiede l'uso di

algoritmi proiettivi per sistemi indefiniti [Saad and Schultz, 1986] o di metodi diretti [Schenk and Gärtner, 2004].

Un ulteriore aspetto, caratteristico del problema in analisi, come si può osservare dalla (1.1), è la non simmetria della matrice \mathbf{G} , in quanto $\mathbf{B} \neq \tilde{\mathbf{B}}$. Tale non simmetria è tipica di ogni problema in cui è presente una dissipazione di energia. Infatti, fintanto che lo spostamento relativo nel piano di faglia è impedito, \mathbf{G} è simmetrica e $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}$. Qualora, invece, si innesca un moto ad attrito, $\mathbf{B} \neq \tilde{\mathbf{B}}$ e si perde la simmetria.

L'analisi e la simulazione del comportamento delle faglie è un tema di grande interesse nell'ambito dell'ingegneria petrolifera, dell'idrologia sotterranea e delle geoscienze in genere. Spesso, infatti, i giacimenti naturali, di gas o altri fluidi, sono confinati lateralmente o attraversati da faglie. Nel momento in cui vi si estrae o vi si inietta un fluido, provocando un'alterazione dello stato tensionale profondo, si può accidentalmente attivare parte della faglia, causandone prima scorrimento a taglio, poi anche apertura completa. L'attivazione delle faglie può, per esempio, comportare la fuga di fluido, specialmente nel caso di iniezione, come nello stoccaggio di riserve di gas naturale, o di CO_2 , in giacimenti esausti [Ferronato et al., 2010b].

Nella stima della subsidenza da estrazione di fluidi da giacimenti sotterranei, inoltre, la corretta simulazione delle faglie è di fondamentale importanza, potendo avere un forte impatto sulla stima degli spostamenti superficiali come analizzato in Ferronato et al. [2008].

Oltre al già citato metodo penalty, alcuni autori propongono di simulare le faglie come uno strato di materiale simile a quello circostante [Griffith, 1985; Rutqvist et al., 2007], soggetto a un criterio di plasticizzazione, tipo Mohr – Coulomb [Labuz and Zang, 2012] o Drucker – Prager [Drucker and Prager, 1952]. Quando lo stato tensionale, in corrispondenza della faglia, raggiunge la superficie di plasticizzazione, nello spazio delle tensioni principali, si ha l'accumulo di deformazioni plastiche, con scorrimenti simili a quelli che si hanno in natura. Tale metodo richiede la caratterizzazione del materiale secondo i classici criteri della meccanica, ovvero con un valore di E e ν , se lineare elastico, o con più parametri, se non – lineare o ipoplastico. Deve essere, inoltre, caratterizzato il criterio di rottura. Per esempio, il criterio di Drucker – Prager, necessita di due parametri, ovvero angolo d'attrito ϕ e coesione c . Il principale pregio del metodo è la possibilità di utilizzare normali elementi finiti in tutto il dominio.

Nel caso del metodo penalty, occorre definire i due parametri che caratterizzano la faglia, ovvero una rigidità assiale K_N e una nel piano tangente la faglia K_T . La calibrazione di K_N e K_T deve essere effettuata con cautela, cercando il giusto equilibrio tra necessità numeriche ed esigenze di simulare correttamente la continuità.

Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, invece, non serve alcun parametro fisico per gli elementi di interfaccia, ma si devono scegliere soltanto le costanti del criterio di rottura.

Risulta evidente che minore è la quantità di parametri da scegliere, maggiore è la generalità del metodo e più affidabili sono i risultati. I parametri “peggiori” sono quelli che non hanno un diretto corrispettivo fisico, quali il modulo di Young E della faglia o la rigidezza K_N normale alla faglia. Certamente, questo aspetto è un punto a favore del metodo di Lagrange.

Sicuramente, da un punto di vista implementativo, l’uso di moltiplicatori di Lagrange necessita di uno sforzo maggiore, richiedendo l’introduzione di nuove incognite e una modifica sostanziale della matrice di rigidezza, con la perdita della simmetria. Questi svantaggi sono tuttavia ampiamente bilanciati dalla stabilità e dall’accuratezza del metodo, che permettono l’uso di step di carico abbastanza ampi, con una conseguente riduzione dei tempi di calcolo.

Capitolo 2

Problema strutturale

2.1 Equazioni della poro elasticità

In un mezzo poroso saturo, la reazione al carico esterno è offerta sia dalle tensioni dalla matrice solida che dalla pressione del fluido intergranulare. La ripartizione dello stato tensionale, tra le due componenti, si effettua grazie al *Principio di Terzaghi* [Bishop, 1959; Lancellotta, 2004]. Il criterio ha tale nome in quanto fu indagato, per primo, da Karl von Terzaghi. Un altro modo, per indicare lo stesso criterio, è *Principio delle tensioni efficaci*, in quanto le tensioni della matrice granulare sono dette efficaci. Solo le tensioni efficaci contribuiscono alla deformazione del mezzo poroso.

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \alpha_B \mathbf{i} p \quad (2.1)$$

In cui:

- $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^T = [\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z, \hat{\tau}_{yz}, \hat{\tau}_{xz}, \hat{\tau}_{xy}]$ è la forma vettoriale del tensore dello stress totale [Pa];
- $\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]$ è la forma vettoriale del tensore dello stress efficace [Pa];
- p è la pressione neutra, agente nei pori del mezzo [Pa], negativa, secondo la convenzione della *Scienza delle Costruzioni*, in quanto di compressione;
- $\mathbf{i}^T = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$ è la forma vettoriale del δ di Kronecker;
- α_B è il coefficiente di Biot: $\alpha_B = 1 - \frac{C_r}{C_b}$, che tiene conto della compressibilità dei grani. Nella definizione di tale coefficiente, più avanti chiamato semplicemente α , si sono indicate con C_r e C_b , rispettivamente, la compressibilità dei grani e il modulo

della deformazione volumetrica *bulk module*, in condizioni drenate, che, in caso di materiale isotropo elastico lineare, vale $C_b = \frac{3(1-2\nu)}{E}$.

Nella ricerca dell'equilibrio del minimo volume rappresentativo dell'intero corpo solido poroso, detto *Representative Elementary Volume (REV)* [Lancellotta, 2004], si ottiene che le tensioni totali rappresentano l'intero sforzo agente sul REV, mentre le tensioni efficaci sono l'integrale delle forze di contatto, mediate sull'area della sezione considerata. In sostanza, le reali tensioni che si scambiano i grani della matrice solida sono ben superiori alle tensioni efficaci, essendo l'area di contatto tra grani ben inferiore all'area di una qualsiasi delle facce del REV. La pressione neutra, infine, è la pressione del fluido interstiziale, con le convenzioni di segno della meccanica strutturale.

Un semplice modo per ricavare la (2.1) è rappresentato in figura 2.1. Imponendo l'equilibrio in direzione normale alla sezione XX, risulta la seguente espressione (2.2).

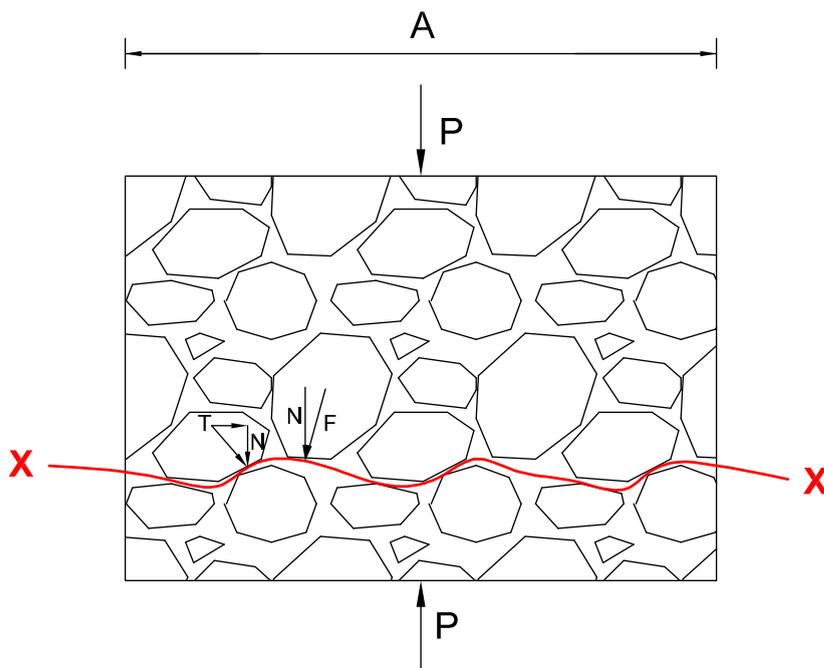


Figura 2.1: Principio delle tensioni efficaci

$$\begin{aligned}
 P &= \sum N - p(A - A_c) \\
 \hat{\sigma} &= \frac{P}{A} = \frac{\sum N}{A} - p \frac{(A - A_c)}{A} \approx \sigma - p
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Nella (2.2), si è trascurata l'area di contatto intergranulare A_c e si è introdotto il concetto di “tensione efficace”, pari a $\frac{\Sigma N}{A}$. Da qui, si capisce facilmente come la tensione efficace non sia la reale tensione intergranulare, pari a $\sigma_c = \frac{\Sigma N}{A_c}$.

Il concetto di REV è in evidente contrasto con la ricerca di un sistema di equazioni differenziali, valevoli, a rigore, in ogni punto del mezzo analizzato. L'espressione “*ogni punto*”, infatti, potrebbe riferirsi al fluido o al solido, che si comportano in modo completamente diverso, obbedendo a equazioni diverse. Tale contrasto è tipico di ogni materiale non omogeneo. La soluzione è la definizione del REV, ovvero del minimo volume che non risente, nel suo comportamento, delle due fasi di cui è composto e che sottostà alle equazioni del mezzo poroso, inteso come “*mezzo poroso omogeneo*”.

Nelle definizioni dei termini della (2.1), si sono introdotte sole 6 componenti di tensione, quando un generico tensore doppio, nello spazio tridimensionale, ne ha 9. Il tensore delle tensioni risulta simmetrico, quindi con sole 6 componenti, se si escludono momenti concentrati. In tale ipotesi, si ha il *Principio di Reciprocità delle Tensioni Tangenziali*, come in Corradi dell'Acqua [2010], che, in formule, diventa:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{xy} &= \hat{\tau}_{yx} & \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \hat{\tau}_{yz} &= \hat{\tau}_{zy} & \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \hat{\tau}_{zx} &= \hat{\tau}_{xz} & \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Le equazioni dell'equilibrio indefinito, dette di Cauchy, applicate alle tensioni totali, sono le (2.4).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\tau}_{zx}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\tau}_{zy}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \hat{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\tau}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\sigma}_z}{\partial z} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dove, con F_x , F_y e F_z , si intendono le forze di volume. Le forze di volume si misurano in $[\frac{N}{m^3}]$. Uno stato tensionale, che rispetta le (2.4) è detto *staticamente ammissibile*.

Dall'equilibrio al contorno del corpo, si hanno le (2.5).

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x n_x + \hat{\tau}_{yx} n_y + \hat{\tau}_{zx} n_z &= f_x \\ \hat{\tau}_{xy} n_x + \hat{\sigma}_y n_y + \hat{\tau}_{zy} n_z &= f_y \\ \hat{\tau}_{xz} n_x + \hat{\tau}_{yz} n_y + \hat{\sigma}_z n_z &= f_z \end{aligned} \quad (2.5)$$

In cui, f_x , f_y e f_z sono forze di superficie, applicate alla frontiera del corpo. Le forze di superficie si misurano in $[\frac{N}{m^2} = \text{Pa}]$. Con n_x , n_y e n_z , si intendono le 3 componenti della normale alla superficie del corpo, di segno positivo se uscente.

Le equazioni di Chaucy si possono formulare in termini di tensioni efficaci e pressioni, nota la (2.1). Così si hanno le (2.6).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x &= \alpha \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y &= \alpha \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= \alpha \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Supponendo che l'estrazione, o l'iniezione, di un fluido, nella matrice porosa, avvenga a partire da uno stato equilibrato, si considerano solo termini incrementali delle grandezze fisiche rappresentate. Le forze di volume sono un contributo costante nel tempo, almeno per i fenomeni oggetto del presente lavoro, quindi possono essere eliminate dal sistema (2.6), che diventa, quindi, il sistema (2.7).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \alpha \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \alpha \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \alpha \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nell'ipotesi semplificativa di piccoli spostamenti, si definiscono le deformazioni, secondo la (2.8).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

In cui u , v e w sono le tre componenti dello spostamento lungo gli assi coordinati. Uno stato deformativo, che rispetta le (2.8), è detto *cinematicamente ammissibile*.

Indicando con \mathbf{L} la matrice simbolica, che compare nella definizione delle deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$, le (2.4) possono scriversi come segue, dove, con \mathbf{F} , si intende il vettore delle forze

di volume.

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

Il *Principio dei Lavori Virtuali* afferma che, in un corpo in equilibrio, per ogni spostamento virtuale, il lavoro virtuale interno è pari al lavoro virtuale esterno, a patto che lo stato tensionale sia staticamente ammissibile e lo stato deformativo sia cinematicamente ammissibile [Corradi dell'Acqua, 2010]. In formule, si ha la seguente equazione (2.10).

$$\delta L_{ve} = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} dV + \int_\Gamma \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Gamma = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta L_{vi} \quad (2.10)$$

Nella (2.10), con V si intende il volume del corpo e con Γ la sua frontiera.

2.2 Legame costitutivo trasversalmente isotropo

Il problema dell'equilibrio consiste nelle sei equazioni differenziali di congruenza (2.8) e in tre equazioni differenziali di equilibrio (2.7), in cui compaiono quindici incognite, ovvero tre spostamenti, sei deformazioni e sei tensioni. Servono, dunque, sei equazioni che leghino deformazioni e tensioni, ossia un legame costitutivo.

Il modello di materiale utilizzato in questa tesi è un modello di comportamento ipoplastico incrudente, con isteresi, come descritto in Janna et al. [2012]. Ciò significa che la risposta agli incrementi di carico è diversa, se in fase di incremento o di decremento di carico. Considerando realisticamente rappresentativa la prova edometrica, si può assumere come parametro chiave, per la descrizione del materiale, la compressibilità verticale, detta $C_m(\sigma_z)$, che lega incrementi di deformazioni a incrementi di tensione $d\varepsilon_z = C_m d\sigma_z$.

La prova edometrica è caratterizzata da:

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \varepsilon_z \\ \sigma_x &= \sigma_y \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nella (2.11), per ε_v si intende la deformazione volumetrica, somma delle tre componenti assiali $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$.

La matrice costituente tangente, per un materiale trasversalmente isotropo, presenta 5 parametri. Indicando con 3 la direzione verticale, i parametri sono:

- E_3 : modulo elastico in direzione verticale;
- ν_{13} : modulo di Poisson, che lega deformazioni verticali e orizzontali, nel piano di normale 2;

- $\beta = \frac{E_1}{E_3}$: rapporto tra modulo elastico orizzontale e verticale;
- $\gamma = \frac{\nu_{12}}{\nu_{13}}$: rapporto tra modulo di Poisson, che lega deformazioni nel piano orizzontale tra loro, e modulo di Poisson, che lega deformazioni nel piano orizzontale a deformazioni nel piano verticale;
- $\eta = \frac{G_{12}}{G_{13}}$: rapporto tra modulo di taglio nel piano orizzontale e modulo di taglio in direzione verticale.

La matrice di cedevolezza tangente, ovvero $\mathbf{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$, è la seguente:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} \frac{1}{E_3} & -\frac{\gamma}{\beta} \frac{\nu_{13}}{E_3} & -\frac{1}{\beta} \frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\gamma}{\beta} \frac{\nu_{13}}{E_3} & \frac{1}{\beta} \frac{1}{E_3} & -\frac{1}{\beta} \frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\beta} \frac{\nu_{13}}{E_3} & -\frac{1}{\beta} \frac{\nu_{13}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{\eta}{\beta} \frac{1+\gamma\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{\eta}{\beta} \frac{1+\gamma\nu_{13}}{E_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{1}{\beta} \frac{1+\gamma\nu_{13}}{E_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Assumendo di parametrizzare, in quanto caratteristici del materiale, i parametri β , γ e η , così come il modulo di Poisson ν_{13} , poco variabile, resta da determinare il modulo di elasticità in direzione verticale E_3 in funzione della C_m . Le (2.11) diventano:

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{\beta} \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_x - \frac{1}{\beta} \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_y + \frac{1}{E_3} \sigma_z = \varepsilon_v \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{1}{\beta} \frac{1}{E_3} \sigma_x - \frac{\gamma}{\beta} \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_y - \frac{1}{\beta} \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_z - \frac{\gamma}{\beta} \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_x + \frac{1}{\beta} \frac{1}{E_3} \sigma_y - \frac{1}{\beta} \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_z = 0 \quad (2.14)$$

Dalla (2.14) si può ricavare σ_x in funzione di σ_z :

$$\left(\frac{1}{\beta} \frac{1}{E_3} - \frac{\gamma}{\beta} \frac{\nu_{13}}{E_3} \right) \sigma_x = \frac{1}{\beta} \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_z \rightarrow \sigma_x = \sigma_z \frac{\frac{1}{\beta} \frac{\nu_{13}}{E_3}}{\frac{1}{\beta} \frac{1}{E_3} - \frac{\gamma}{\beta} \frac{\nu_{13}}{E_3}} = \frac{\nu_{13}}{1 - \gamma\nu_{13}} \sigma_z \quad (2.15)$$

Sostituendo la (2.15) nella (2.13) si ottiene:

$$\varepsilon_z = -\frac{2}{\beta} \frac{\nu_{13}}{E_3} \frac{\nu_{13}}{1 - \gamma\nu_{13}} \sigma_z + \frac{1}{E_3} \sigma_z = \frac{\sigma_z}{E_3} \left(1 - \frac{1}{\beta} \frac{2\nu_{13}^2}{1 - \gamma\nu_{13}} \right) \quad (2.16)$$

Che, in termini incrementali, permette di ricavare la relazione tra E_3 e C_m .

$$d\varepsilon_z = \frac{d\sigma_z}{E_3} \left(1 - \frac{1}{\beta} \frac{2\nu_{13}^2}{1 - \gamma\nu_{13}} \right) \quad (2.17)$$

Immediatamente, dalla (2.17) e dalla definizione di C_m , si ha:

$$C_m(\sigma_z) = \frac{1}{E_3} \left(1 - \frac{1}{\beta} \frac{2\nu_{13}^2}{1 - \gamma\nu_{13}} \right) \quad (2.18)$$

Invertendo la (2.18), infine, si arriva alla relazione cercata, che definisce l'unica grandezza assunta variabile della matrice tangente.

$$E_3 = \frac{1}{C_m(\sigma_z)} \left(1 - \frac{1}{\beta} \frac{2\nu_{13}^2}{1 - \gamma\nu_{13}} \right) \quad (2.19)$$

Si rappresenta, ora, nel piano semi-logaritmico tensione efficace/indice dei vuoti, il comportamento del materiale, come descritto in Lancellotta [2004]. In fase di scarico, il materiale ha una rigidezza C_s superiore a quella in fase di carico C_c , pari a $C_s = C_R C_c$, con C_R rapporto di ricompressione. Si passa, dunque, da terreno normalconsolidato, a terreno sovraconsolidato. Finché non si supera nuovamente la tensione efficace di normalconsolidazione σ_{z0} , ovvero il massimo raggiunto nella storia del materiale, la rigidezza resta C_s . In figura 2.2, si rappresenta quanto descritto.

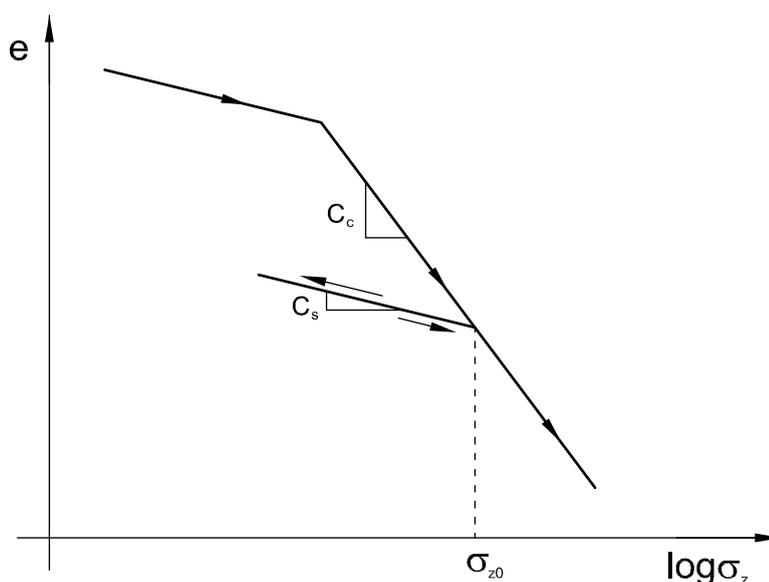


Figura 2.2: Fase di carico e scarico

La compressibilità C_m è legata alle pendenze, nel grafico $\sigma_z - e$, dalla relazione che

lega indice dei vuoti e deformazione volumetrica ε_v :

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_z = \frac{de}{1 + e_0} \quad (2.20)$$

Quindi, la relazione che lega C_m e C_c , o C_s , è la seguente, dove si è utilizzata la definizione $d\varepsilon_v = C_m d\sigma_z$:

$$\begin{aligned} de &= C_c d(\log \sigma_z) \\ C_m &= \frac{C_c}{\ln(10) (1 + e_0) \sigma_z} \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.3 Disaccoppiamento delle soluzioni di flusso e strutturale

Nella trattazione finora svolta, si è assunto di conoscere a priori il campo di pressione, generato da una qualche azione sul fluido interstiziale. Tuttavia, i due fenomeni di flusso e deformazione avvengono contemporaneamente e dovrebbero, in linea teorica, essere trattati assieme. Tale approccio, sviluppato in Biot [1941], detto accoppiato, però, risulta più complesso e, a livello numerico, decisamente più malcondizionato [Ferronato et al., 2010a]. L'esperienza mostra che quanto si ottiene con un approccio disaccoppiato, ovvero risolvendo il problema di flusso prima e quello strutturale poi, non si discosta molto da quanto ottenuto con un modello accoppiato, soprattutto allontanandosi dagli istanti iniziali della simulazione [Ferronato, 1998].

Nell'ambito di questa tesi si è adottato un modello disaccoppiato. Si calcola il campo di pressione con un codice di calcolo agli elementi finiti, che risolve il problema della filtrazione [Ferronato, 1998; Baù et al., 2000; Janna, 2007]:

$$K_x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = S_h \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.22)$$

In cui $S_h = \gamma_w (n\beta + C_m)$ è il termine di storage elastico, variabile con lo stato tensionale, attraverso la porosità n , la compressibilità verticale C_m e la compressibilità dell'acqua β .

La variazione di tensione efficace σ_z viene stimata utilizzando la (2.1), assumendo il carico totale esterno costante:

$$d\sigma_z = \alpha dp \quad (2.23)$$

Il campo di pressione così ottenuto diventa la forzante esterna per il codice che risolve le equazioni strutturali.

Capitolo 3

Soluzione agli elementi finiti del problema

3.1 Introduzione del metodo FE

Il sistema composto dalle equazioni differenziali dell'equilibrio (2.7), dalle equazioni differenziali della congruenza (2.8) e dalle equazioni algebriche del legame costitutivo (2.12) non è risolvibile analiticamente, se non in pochi casi, di domini semplici e regolari. Per poter risolvere tale sistema in un caso reale, ossia in presenza di domini geometricamente irregolari, con materiali non omogenei e condizioni al contorno non regolari nello spazio, bisogna ricorrere a tecniche numeriche, quali il metodo agli Elementi Finiti (FE), presentato in Zienkiewicz and Taylor [2000a]; Gambolati [2003].

Il metodo di risoluzione di equazioni differenziali agli elementi finiti si basa sulla rappresentazione della soluzione in un sottospazio di \mathbb{R}^N , con N numeri di nodi, in cui viene discretizzato il dominio. La scelta della base del sottospazio risiede, essenzialmente, nell'ordine delle funzioni interpolanti, che consentono di estendere la soluzione trovata, dai nodi, a tutto il dominio. Così, si passa dalle incognite originarie, che sono funzioni, alle incognite del metodo, che sono valori nodali, in quanto le funzioni di interpolazione sono note a priori. Il grande vantaggio è che, così, si arriva a scrivere un sistema lineare, o linearizzato, di equazioni del tipo $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$, che può essere risolto per ottenere gli spostamenti incogniti.

Nel problema in analisi, le incognite diventano i soli spostamenti nodali, in quanto le deformazioni, note le (2.8), sono univocamente determinate e le tensioni derivano da queste, secondo il legame costitutivo.

3.1.1 Metodo dei residui pesati e Principio dei Lavori Virtuali

Si intende risolvere il sistema differenziale:

$$Au(x) = f(x) \quad (3.1)$$

Nella (3.1), A è un operatore differenziale, u è la funzione incognita e f è la forzante.

Nel caso di un sistema lineare, del tipo $\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, la soluzione si può ottenere ortogonalizzando il residuo $\mathbf{b} - \mathbf{K}\mathbf{x}$ rispetto a una qualsiasi base completa dello spazio di dimensione pari all'ordine della matrice. Così, per il sistema differenziale (3.1), utilizzando funzioni w_i , dette funzioni peso o funzioni test, si può ortogonalizzare il residuo, ottenendo la (3.2).

$$\int_R (Au_n - f) w_i dR = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

Se le funzioni test sono uguali alle funzioni base, ossia $w_i = \xi_i$, metodo prende il nome di *Metodo di Galerkin* [Zienkiewicz and Taylor, 2000a; Gambolati, 2003]. Ovviamente, sono possibili anche altre scelte per le funzioni test w_i . Nella (3.2), con R si intende il dominio di integrazione.

Nel caso in analisi, data la natura fisica del problema, si può utilizzare direttamente il *Principio dei Lavori Virtuali*, equazione (2.10). Riscrivendo la (2.10), si ha:

$$\delta L_{vi} - \delta L_{ve} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} dV - \int_\Gamma \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Gamma = 0 \quad (3.3)$$

3.2 Applicazione al problema strutturale

Definito per sommi capi il metodo, serve ora analizzare, in dettaglio, le varie scelte effettuate, nell'ambito della soluzione del problema strutturale in analisi.

3.2.1 Funzioni di interpolazione

In questa tesi, si lavora con discretizzazione tetraedrica di un solido $3D$. Le funzioni base sono lineari.

$$\xi_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V_e} \quad (3.4)$$

La determinazione dei coefficienti, in (3.4), si effettua imponendo il rispetto della condizione $\xi_i = 1$, nel nodo i , e $\xi_i = 0$ altrove. Trattandosi di funzioni a supporto locale, basta che si verifichi la condizione $\xi_i = 0$ negli altri 3 nodi dell'elemento finito.

Per il calcolo del volume di un tetraedro, si può ricorrere al calcolo del determinante di una matrice, ovvero:

$$V_e = \frac{1}{6} \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \right| \quad (3.5)$$

Sostituendo, per esempio, la prima colonna della matrice con 3 generiche coordinate x, y e z , si ottiene:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 & x_4 \\ y & y_2 & y_3 & y_4 \\ z & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Il determinante della matrice (3.6) è nullo, se le coordinate rappresentano uno qualsiasi dei punti $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ o $P_4 = (x_4, y_4, z_4)$, avendo sostituito la prima colonna, mentre è pari a $6V_e$, se $P = (x, y, z) = P_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Da questa osservazione si possono facilmente ricavare i termini delle funzioni base dell'equazione (3.4) [Gambolati, 2003].

Il problema in analisi si presta a una semplice soluzione scegliendo gli spostamenti come incognite. Dunque, si hanno 3 incognite per nodo. In forma vettoriale, si può scrivere lo spostamento di un punto qualsiasi nel tetraedro, come:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Le matrici \mathbf{N}_i sono pari alla matrice identità, moltiplicata per la funzione base ξ_i , ovvero $\mathbf{N}_i = \xi_i \mathbf{I}_3$. Gli spostamenti \mathbf{u}_i sono vettori a 3 componenti u, v e w , che rappresentano lo spostamenti nelle 3 direzioni dello spazio. In simboli, si ha:

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

3.2.2 Calcolo delle deformazioni

Si possono ora calcolare, dalla (3.7), le deformazioni dell'elemento, ricordando che $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$. Infatti, mentre gli spostamenti variano all'interno dell'elemento, secondo la (3.7), la

deformazione è costante, essendo costante la derivata di una funzione lineare. L'equazione di congruenza $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ può essere scritta, per coerenza verso la (3.7), come una matrice composta da 2 blocchi 3×3 .

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Le matrici \mathbf{L}_1 e \mathbf{L}_2 , che compaiono nella (3.9), sono:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Si noti che, grazie alla scelta dell'ordine delle tensioni tangenziali τ , nel passaggio da forma tensoriale a forma vettoriale (si veda la definizione, nel paragrafo 2.1), così come per le deformazioni, equazione (2.8), si hanno due matrici simmetriche, ossia $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_1^T$ e $\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_2^T$.

Le deformazioni sono, perciò, calcolabili come un prodotto tra matrici, secondo l'equazione simbolica (3.12).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1\mathbf{N}_1 & \mathbf{L}_1\mathbf{N}_2 & \mathbf{L}_1\mathbf{N}_3 & \mathbf{L}_1\mathbf{N}_4 \\ \mathbf{L}_2\mathbf{N}_1 & \mathbf{L}_2\mathbf{N}_2 & \mathbf{L}_2\mathbf{N}_3 & \mathbf{L}_2\mathbf{N}_4 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3.12)$$

Il campo di deformazioni così ottenuto, qualunque sia il campo di spostamenti, è sicuramente *cinematicamente ammissibile*, poiché sono rispettate le (2.8). Il problema diventa la ricerca di un campo di tensioni *staticamente ammissibile*, che equilibra le forze esterne applicate.

3.2.3 Matrice di rigidezza del materiale e calcolo delle tensioni

Nel metodo agli elementi finiti, occorre esprimere tutte le grandezze in funzione degli spostamenti. Per il legame tensioni – deformazioni, si utilizza la matrice $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}$, la cui

espressione esplicita può essere ricavata con alcuni passaggi dalla (2.12):

$$\mathbf{D} = A \begin{bmatrix} \beta - \nu_{13}^2 & \gamma\nu_{13}\beta + \nu_{13}^2 & \gamma\nu_{13}^2 + \nu_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma\nu_{13}\beta + \nu_{13}^2 & \beta - \nu_{13}^2 & \gamma\nu_{13}^2 + \nu_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma\nu_{13}^2 + \nu_{13} & \gamma\nu_{13}^2 + \nu_{13} & 1 - \gamma^2\nu_{13}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

con:

$$D_{44} = \frac{-2\nu_{13}^2 - \gamma\nu_{13}\beta + \beta}{2\eta}$$

$$D_{55} = \frac{-2\nu_{13}^2 - \gamma\nu_{13}\beta + \beta}{2\eta}$$

$$D_{66} = \frac{-2\nu_{13}^2 - \gamma\nu_{13}\beta + \beta}{2}$$

Tutta la dipendenza dalla C_m è concentrata nel parametro A , definito come segue:

$$A = \frac{\beta}{C_m(1 + \gamma\nu_{13})} \frac{1}{(-2\nu_{13}^2 - \gamma\nu_{13}\beta + \beta)} \left(1 - \frac{1}{\beta} \frac{2\nu_{13}^2}{1 - \gamma\nu_{13}^2} \right) \quad (3.14)$$

Per semplicità di utilizzo, la matrice (3.13) si scrive come segue:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Per uniformità con la notazione scelta nel calcolo delle deformazioni, si suddivide la matrice (3.15) in una matrice 2×2 , composta da blocchi 3×3 , con il vantaggio che i due blocchi extradiagonali sono nulli. Si ha:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} D_4 & 0 & 0 \\ 0 & D_5 & 0 \\ 0 & 0 & D_6 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

La matrice (3.15), note le definizioni (3.16) e (3.17), diventa:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Le tensioni, note le deformazioni dalla (3.12) e la matrice tangente (3.18), sono quindi:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1\mathbf{N}_1 & \mathbf{L}_1\mathbf{N}_2 & \mathbf{L}_1\mathbf{N}_3 & \mathbf{L}_1\mathbf{N}_4 \\ \mathbf{L}_2\mathbf{N}_1 & \mathbf{L}_2\mathbf{N}_2 & \mathbf{L}_2\mathbf{N}_3 & \mathbf{L}_2\mathbf{N}_4 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1\mathbf{L}_1\mathbf{N}_1 & \mathbf{D}_1\mathbf{L}_1\mathbf{N}_2 & \mathbf{D}_1\mathbf{L}_1\mathbf{N}_3 & \mathbf{D}_1\mathbf{L}_1\mathbf{N}_4 \\ \mathbf{D}_2\mathbf{L}_2\mathbf{N}_1 & \mathbf{D}_2\mathbf{L}_2\mathbf{N}_2 & \mathbf{D}_2\mathbf{L}_2\mathbf{N}_3 & \mathbf{D}_2\mathbf{L}_2\mathbf{N}_4 \end{bmatrix} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.2.4 Calcolo dei termini LN e DLN

Si calcolano, ora, per le funzioni lineari di base scelte, i vari termini indicati finora solo simbolicamente.

Note le funzioni base (3.4) e gli operatori differenziali, rappresentati nelle matrici (3.10) e (3.11), si possono calcolare i termini dei prodotti matriciali \mathbf{LN} .

$$\mathbf{L}_1\mathbf{N}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_j & 0 & 0 \\ 0 & \xi_j & 0 \\ 0 & 0 & \xi_j \end{bmatrix} = \frac{1}{6V_e} \begin{bmatrix} b_j & 0 & 0 \\ 0 & c_j & 0 \\ 0 & 0 & d_j \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Per quanto riguarda i prodotti con la matrice \mathbf{L}_2 , si ha:

$$\mathbf{L}_2\mathbf{N}_j = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_j & 0 & 0 \\ 0 & \xi_j & 0 \\ 0 & 0 & \xi_j \end{bmatrix} = \frac{1}{6V_e} \begin{bmatrix} 0 & d_j & c_j \\ d_j & 0 & b_j \\ c_j & b_j & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Noti i termini delle matrici \mathbf{LN} , si possono calcolare facilmente le tensioni. Dalla

(3.20), si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{N}_j &= \frac{1}{6V_e} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_j & 0 & 0 \\ 0 & c_j & 0 \\ 0 & 0 & d_j \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{6V_e} \begin{bmatrix} D_{11}b_j & D_{12}c_j & D_{13}d_j \\ D_{12}b_j & D_{22}c_j & D_{23}d_j \\ D_{13}b_j & D_{23}c_j & D_{33}d_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dalla (3.21), si ha:

$$\mathbf{D}_2 \mathbf{L}_2 \mathbf{N}_j = \frac{1}{6V_e} \begin{bmatrix} D_4 & 0 & 0 \\ 0 & D_5 & 0 \\ 0 & 0 & D_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & d_j & c_j \\ d_j & 0 & b_j \\ c_j & b_j & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6V_e} \begin{bmatrix} 0 & D_4d_j & D_4c_j \\ D_5d_j & 0 & D_5b_j \\ D_6c_j & D_6b_j & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

3.3 Matrice di rigidezza del metodo agli elementi finiti

Il principio variazionale, necessario per la soluzione del problema strutturale con il metodo agli elementi finiti, si ottiene applicando il *Principio dei lavori virtuali*, il quale afferma che, per un campo di spostamenti *cinematicamente ammissibile* e un campo di tensioni in equilibrio, il lavoro virtuale delle forze esterne è uguale al lavoro delle forze interne.

Il lavoro virtuale interno, in un corpo solido continuo, è dato da:

$$\delta L_{vi} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.24)$$

Il primo termine della (3.24) è immediatamente calcolabile, in quanto si conoscono le deformazioni. Dalla (3.12), infatti, si ha:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T = \delta \mathbf{u}^T \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \mathbf{L}_1 & \mathbf{N}_1 \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{N}_2 \mathbf{L}_1 & \mathbf{N}_2 \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{N}_3 \mathbf{L}_1 & \mathbf{N}_3 \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{N}_4 \mathbf{L}_1 & \mathbf{N}_4 \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Dalle (3.25) e (3.19), si calcola il lavoro virtuale interno.

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} = \delta \mathbf{u}^T \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \mathbf{L}_1 & \mathbf{N}_1 \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{N}_2 \mathbf{L}_1 & \mathbf{N}_2 \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{N}_3 \mathbf{L}_1 & \mathbf{N}_3 \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{N}_4 \mathbf{L}_1 & \mathbf{N}_4 \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{N}_1 & \mathbf{D}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{N}_2 & \mathbf{D}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{N}_3 & \mathbf{D}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{N}_4 \\ \mathbf{D}_2 \mathbf{L}_2 \mathbf{N}_1 & \mathbf{D}_2 \mathbf{L}_2 \mathbf{N}_2 & \mathbf{D}_2 \mathbf{L}_2 \mathbf{N}_3 & \mathbf{D}_2 \mathbf{L}_2 \mathbf{N}_4 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3.26)$$

Il generico termine 3×3 della matrice di rigidità \mathbf{K} , simbolicamente calcolata in (3.26), è:

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_V \mathbf{N}_i \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{N}_j dV + \int_V \mathbf{N}_i \mathbf{L}_2 \mathbf{D}_2 \mathbf{L}_2 \mathbf{N}_j dV \quad (3.27)$$

Il primo termine, che compare nella (3.27), note la (3.20), risulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_i \mathbf{L}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{N}_j &= \frac{1}{(6V_e)^2} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} b_j & D_{12} c_j & D_{13} d_j \\ D_{12} b_j & D_{22} c_j & D_{23} d_j \\ D_{13} b_j & D_{23} c_j & D_{33} d_j \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{(6V_e)^2} \begin{bmatrix} b_i D_{11} b_j & b_i D_{12} c_j & b_i D_{13} d_j \\ c_i D_{12} b_j & c_i D_{22} c_j & c_i D_{23} d_j \\ d_i D_{13} b_j & d_i D_{23} c_j & d_i D_{33} d_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Il secondo termine della (3.27), note la (3.21), risulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_i \mathbf{L}_2 \mathbf{D}_2 \mathbf{L}_2 \mathbf{N}_j &= \frac{1}{(6V_e)^2} \begin{bmatrix} 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \\ c_i & b_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & D_4 d_j & D_4 c_j \\ D_5 d_j & 0 & D_5 b_j \\ D_6 c_j & D_6 b_j & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{(6V_e)^2} \begin{bmatrix} d_i D_5 d_j + c_i D_6 c_j & c_i D_6 b_j & d_i D_5 b_j \\ b_i D_6 c_j & d_i D_4 d_j + b_i D_6 b_j & d_i D_4 c_j \\ b_i D_5 d_j & c_i D_4 d_j & c_i D_4 c_j + b_i D_5 b_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Essendo le (3.28) e (3.29) composte da soli termini costanti nel volume, è possibile calcolare analiticamente l'integrale che compare nella (3.27). Così, il termine (3.27) della matrice di rigidità \mathbf{K} è:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij} &= \frac{1}{36V_e} \left\{ \begin{bmatrix} b_i D_{11} b_j & b_i D_{12} c_j & b_i D_{13} d_j \\ c_i D_{12} b_j & c_i D_{22} c_j & c_i D_{23} d_j \\ d_i D_{13} b_j & d_i D_{23} c_j & d_i D_{33} d_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_i D_5 d_j + c_i D_6 c_j & c_i D_6 b_j & d_i D_5 b_j \\ b_i D_6 c_j & d_i D_4 d_j + b_i D_6 b_j & d_i D_4 c_j \\ b_i D_5 d_j & c_i D_4 d_j & c_i D_4 c_j + b_i D_5 b_j \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{36V_e} \begin{bmatrix} b_i D_{11} b_j + d_i D_5 d_j + c_i D_6 c_j & b_i D_{12} c_j + c_i D_6 b_j & b_i D_{13} d_j + d_i D_5 b_j \\ c_i D_{12} b_j + b_i D_6 c_j & c_i D_{22} c_j + d_i D_4 d_j + b_i D_6 b_j & c_i D_{23} d_j + d_i D_4 c_j \\ d_i D_{13} b_j + b_i D_6 c_j & d_i D_{23} c_j + c_i D_4 d_j & d_i D_{33} d_j + c_i D_4 c_j + b_i D_5 b_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Si noti che i coefficienti della matrice di rigidità del materiale (3.13) dipendono dalla storia tensionale e il sistema, che ne scaturisce, è un sistema non – lineare di equazioni.

La matrice di rigidità, così come tutte le altre matrici globali, successivamente introdotte, è memorizzata in formato *CSR*, ovvero *Compressed Sparse Row*. Questo tipo di memorizzazione richiede la conoscenza della topologia della griglia, ossia la lista dei contatti nodali. Si noti che la topologia viene creata una sola volta, essendo dipendente dalla sola geometria.

3.4 Imposizione della forzante

La forzante di pressione, data la scelta del metodo disaccoppiato, è nota a priori e può essere imposta, essenzialmente, in due modi diversi, ovvero il *Metodo del gradiente infinito* e il *Metodo del gradiente*, come in Ferronato [1998]; Gambolati et al. [2001].

3.4.1 Metodo del gradiente infinito

L'analisi del problema strutturale, secondo l'approccio disaccoppiato, prevede la conoscenza preliminare del campo di pressioni, provocato da una qualsiasi azione sul fluido interstiziale, presente nel mezzo poroso. Prima si analizza il campo di moto a mezzo poroso indeformato, poi si calcolano gli effetti delle variazioni di pressione. Le pressioni, note ai nodi della mesh, vanno interpolate secondo la (3.31).

$$p(x, y, z) = \mathbf{N}_p \mathbf{p}_e = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{bmatrix} \mathbf{p}_e \quad (3.31)$$

In cui $\mathbf{p}_e = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{bmatrix}^T$.

La (2.10), applicata alle tensioni totali, comporta la seguente equazione:

$$\delta L_{v,i} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \widehat{\boldsymbol{\sigma}} dV = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T (\boldsymbol{\sigma} - \alpha \mathbf{i} p) dV = \delta L_{v,e} \quad (3.32)$$

Riscrivendo la (3.32), tenendo solo la prima parte del termine $\delta L_{v,i}$ come vero e proprio lavoro interno e ponendo a destra del segno di uguaglianza il termine dovuto alle pressioni, si ha una nuova forza esterna, ovvero:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \alpha \mathbf{i} p dV + \delta L_{v,e} \quad (3.33)$$

Dalla (3.33), si ha la definizione del contributo al termine delle forze esterne dovuto alle pressioni:

$$\delta L_p = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\alpha} i p dV \quad (3.34)$$

Il termine δL_p va aggiunto alle classiche forze esterne di volume, di superficie e puntuali.

Il calcolo del contributo a δL_p di un singolo elemento può essere fatto ricordando che la deformazione, che compare nella (3.33), è data dalla (3.25). Con questo, si ha:

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\alpha} i p &= \delta \mathbf{u}_e^T \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \mathbf{L}_1 & \mathbf{N}_1 \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{N}_2 \mathbf{L}_1 & \mathbf{N}_2 \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{N}_3 \mathbf{L}_1 & \mathbf{N}_3 \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{N}_4 \mathbf{L}_1 & \mathbf{N}_4 \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{N}_p \mathbf{p}_e = \\ &= \delta \mathbf{u}_e^T \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \mathbf{L}_1 & \mathbf{N}_1 \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{N}_2 \mathbf{L}_1 & \mathbf{N}_2 \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{N}_3 \mathbf{L}_1 & \mathbf{N}_3 \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{N}_4 \mathbf{L}_1 & \mathbf{N}_4 \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_3 \mathbf{N}_p \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{p}_e = \delta \mathbf{u}_e^T \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{C}_3 \mathbf{N}_p \\ \mathbf{N}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{C}_3 \mathbf{N}_p \\ \mathbf{N}_3 \mathbf{L}_1 \mathbf{C}_3 \mathbf{N}_p \\ \mathbf{N}_4 \mathbf{L}_1 \mathbf{C}_3 \mathbf{N}_p \end{bmatrix} \mathbf{p}_e \quad (3.35) \end{aligned}$$

Il generico termine della (3.35) sarà quindi:

$$\mathbf{N}_i \mathbf{L}_1 \mathbf{C}_3 \mathbf{N}_p = \frac{1}{6V_e} \begin{bmatrix} b_i \xi_1 & b_i \xi_2 & b_i \xi_3 & b_i \xi_4 \\ c_i \xi_1 & c_i \xi_2 & c_i \xi_3 & c_i \xi_4 \\ d_i \xi_1 & d_i \xi_2 & d_i \xi_3 & d_i \xi_4 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Integrando la (3.36) nel volume dell'elemento, si ha:

$$\int_V \mathbf{N}_i \mathbf{L}_1 \mathbf{C}_3 \mathbf{N}_p dV = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} b_i & b_i & b_i & b_i \\ c_i & c_i & c_i & c_i \\ d_i & d_i & d_i & d_i \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Dalla (3.37), si può risalire all'intera matrice, che si ottiene discretizzando il termine

$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} dV$.

$$\int_V \alpha \mathbf{N}_i \mathbf{L}_1 \mathbf{C}_3 \mathbf{N}_p dV = \frac{\alpha}{24} \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 & b_1 \\ c_1 & c_1 & c_1 & c_1 \\ d_1 & d_1 & d_1 & d_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 & b_2 \\ c_2 & c_2 & c_2 & c_2 \\ d_2 & d_2 & d_2 & d_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 & b_3 \\ c_3 & c_3 & c_3 & c_3 \\ d_3 & d_3 & d_3 & d_3 \\ b_4 & b_4 & b_4 & b_4 \\ c_4 & c_4 & c_4 & c_4 \\ d_4 & d_4 & d_4 & d_4 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Moltiplicando la (3.37) per il vettore delle pressioni, si ottiene:

$$\int_V \alpha \mathbf{N}_i \mathbf{L}_1 \mathbf{C}_3 \mathbf{N}_p dV \mathbf{p}_e = \frac{\alpha}{24} \begin{bmatrix} b_i (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\ c_i (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\ d_i (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Introducendo, nella (3.39), il concetto di pressione media dell'elemento, ovvero $p_{med} = \frac{1}{4}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$, si ha:

$$\frac{\alpha}{24} \begin{bmatrix} b_i (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\ c_i (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\ d_i (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \end{bmatrix} = \frac{\alpha p_{med}}{6} \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \\ d_i \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Il termine di forza aggiuntiva, dovuta alla pressione, essendo costante il termine di pressione media dell'elemento, vale:

$$\mathbf{f}_p = \alpha \frac{p_{med}}{6} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & b_2 & c_2 & d_2 & b_3 & c_3 & d_3 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}^T \quad (3.41)$$

La (3.41) consente di avere una gradiente infinito di pressione tra due elementi vicini, fatto utile per simulare il comportamento dell'interfaccia tra due materiali idraulicamente molto diversi come, per esempio, sabbia e argilla. Questo metodo di calcolo del contributo delle pressioni è detto, proprio per questo motivo, del *Gradiente infinito*.

3.4.2 Metodo del gradiente

Come già visto capitolo 2, le equazioni dell'equilibrio indefinito, per un mezzo poroso saturo, scritte in termini di tensioni efficaci, sono le (2.7), qui riportate solo per comodità.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \alpha \frac{\partial p}{\partial x} \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \alpha \frac{\partial p}{\partial y} \\
 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \alpha \frac{\partial p}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Il gradiente della pressione può essere interpretato come una forza esterna, per unità di volume, pari a:

$$\mathbf{q} = -\alpha \nabla p \tag{3.42}$$

Il termine del lavoro virtuale dovuto alle forze di pressione, note la (3.42), l'interpolazione delle pressioni e l'interpolazione degli spostamenti, risulta essere:

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dV = -\alpha \delta \mathbf{u}_e^T \int_V \mathbf{N}^T \nabla \mathbf{N}_p dV \mathbf{p}_e \tag{3.43}$$

Sviluppando la (3.43) si ha:

$$\nabla \mathbf{N}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6V_e} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

La matrice, ottenuta dalla discretizzazione di $\alpha \delta \mathbf{u}_e^T \int_V \mathbf{N}^T \nabla \mathbf{N}_p dV$, è:

$$\alpha \mathbf{N}^T \nabla \mathbf{N}_p = \frac{\alpha}{6V_e} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 \\ \mathbf{N}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{6V_e} \begin{bmatrix} \xi_1 b_1 & \xi_1 b_2 & \xi_1 b_3 & \xi_1 b_4 \\ \xi_1 c_1 & \xi_1 c_2 & \xi_1 c_3 & \xi_1 c_4 \\ \xi_1 d_1 & \xi_1 d_2 & \xi_1 d_3 & \xi_1 d_4 \\ \xi_2 b_1 & \xi_2 b_2 & \xi_2 b_3 & \xi_2 b_4 \\ \xi_2 c_1 & \xi_2 c_2 & \xi_2 c_3 & \xi_2 c_4 \\ \xi_2 d_1 & \xi_2 d_2 & \xi_2 d_3 & \xi_2 d_4 \\ \xi_3 b_1 & \xi_3 b_2 & \xi_3 b_3 & \xi_3 b_4 \\ \xi_3 c_1 & \xi_3 c_2 & \xi_3 c_3 & \xi_3 c_4 \\ \xi_3 d_1 & \xi_3 d_2 & \xi_3 d_3 & \xi_3 d_4 \\ \xi_4 b_1 & \xi_4 b_2 & \xi_4 b_3 & \xi_4 b_4 \\ \xi_4 c_1 & \xi_4 c_2 & \xi_4 c_3 & \xi_4 c_4 \\ \xi_4 d_1 & \xi_4 d_2 & \xi_4 d_3 & \xi_4 d_4 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Dall'integrazione della (3.45) nel volume dell'elemento, si ottiene:

$$\int_V \alpha \mathbf{N}^T \nabla \mathbf{N}_p dV = \frac{\alpha}{24} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Il termine di forza aggiuntiva, dovuta alla pressione, è il prodotto della matrice (3.46)

per il vettore pressione.

$$\mathbf{f}_p = -\alpha \frac{1}{24} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Si noti che, in (3.47), rispetto a quanto ottenuto con il metodo del gradiente infinito, ossia l'equazione (3.41), si ottiene un'espressione in cui non compare il termine di pressione media.

Naturalmente, si dimostra facilmente l'equivalenza dei due metodi, grazie all'applicazione del *Teorema di Gauss – Green*.

3.5 Metodo risolutivo utilizzato

Grazie al metodo FE, si passa dal *Principio dei Lavori Virtuali*, equazione (3.3), a una scrittura “discretizzata”, delle equazioni dell'equilibrio.

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \, dV - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.48)$$

La (3.48) rappresenta un sistema di equazioni non – lineare, che dovrà necessariamente essere risolto iterativamente. In questa tesi, si è scelto di utilizzare il metodo di Newton – Raphson, secondo cui, la (3.48), diventa:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i - \left[\frac{\partial \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \, dV}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}_i} \right]^{-1} \left(\int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i) \, dV - \mathbf{f} \right) \quad (3.49)$$

Nella (3.49) compare la derivata dell'integrale delle tensioni rispetto agli spostamenti, che risulta essere la matrice di rigidità (3.26). La (3.49) può quindi essere riscritta come

segue:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i + [\mathbf{K}(\mathbf{u}_i)]^{-1} \left(\mathbf{f} - \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i) dV \right) \quad (3.50)$$

In cui \mathbf{K} rappresenta lo jacobiano del sistema non – lineare.

3.6 Imposizione delle condizioni al contorno

Ogni problema differenziale necessita di opportune condizioni al contorno che devono essere imposte numericamente.

Le condizioni al contorno si dividono, in generale, in tre categorie:

- di Dirichlet: sulla funzione u ;
- di Neumann: sulle derivate della funzione $\frac{\partial u}{\partial n}$, con n generica direzione;
- di Cauchy o miste: sulla funzione e sulle sue derivate.

Il metodo agli elementi finiti, utilizzato in questa tesi, prende in considerazione solo condizioni di Dirichlet e di Neumann. Con riferimento al problema strutturale, le generiche condizioni di Dirichlet sono spostamenti imposti, mentre le condizioni di Neumann sono forze applicate. Nel caso specifico, le condizioni di Neumann sono inglobate nella forzante esterna, quindi sommate alle variazioni di pressione \mathbf{f}_p , per formare la forza complessiva \mathbf{f} .

Le condizioni di Dirichlet, invece, si applicano modificando la matrice di rigidezza (3.26). Infatti, scelto il valore dello spostamento di alcuni nodi e imposto tale valore nella soluzione di partenza u_0 , di volta in volta aggiornata dal ciclo di Newton – Raphson, serve imporre un incremento nullo $\Delta u_i = 0$, sugli stessi nodi. Ciò può essere ottenuto annullando i termini extradiagonali, sulle righe e colonne in corrispondenza dei nodi di Dirichlet, e assegnando valore 1 al termine diagonale. La condizione $\Delta u_i = 0$, viene quindi realizzata annullando il termine noto, in corrispondenza del nodo. Questo espediente consente, senza variare ordine e topologia della matrice, di avere sostanzialmente un'equazione in meno, per ogni grado di libertà bloccato.

Capitolo 4

Elementi di interfaccia

Gli elementi finiti tradizionali si basano sull'imposizione della condizione di continuità del campo di spostamento. Intendendo simulare una discontinuità in tale campo, si rende necessario utilizzare un nuovo tipo di elemento finito, che consenta un movimento relativo tra le parti del corpo, rendendo discontinuo il campo di spostamento.

Gli elementi di interfaccia sono particolari elementi finiti, con 6 nodi, a spessore nullo, che servono a simulare le discontinuità nel campo di spostamento. Presentano due facce, una definita *Top*, l'altra *Bottom*. Questi elementi sono un'evoluzione di quelli presentati in Goodman et al. [1968]. In figura 4.1, si ha la rappresentazione di un elemento di interfaccia, con le due facce, di top e bottom, sdoppiate solo per motivi grafici.

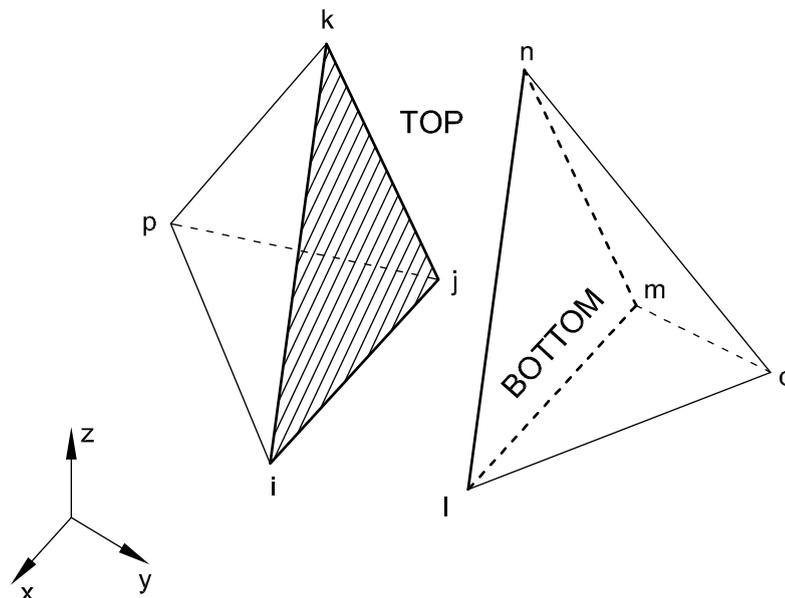


Figura 4.1: Elemento di interfaccia 2D triangolare, inserito in una mesh 3D tetraedrica

4.1 Trattazione analitica del vincolo

Il problema di ottimo vincolato della funzione $\mathbf{f}(x, y, \dots)$ si può affrontare con i moltiplicatori di Lagrange, modificando la funzione e trasformando il problema in un problema di ottimo libero [Bathe, 2006; Bertsekas, 1996]. Intendendo con $\mathbf{g}(x, y, \dots) = \mathbf{0}$ il vincolo, che, nel caso in analisi, è la continuità, la nuova funzione risulta la seguente.

$$\mathbf{L}(x, y, \dots, \lambda) = \mathbf{f}(x, y, \dots) + \lambda \cdot \mathbf{g}(x, y, \dots) \quad (4.1)$$

Nella (4.1), si sono aggiunte al problema le nuove incognite, ossia i moltiplicatori di Lagrange.

Quindi, basta trovare il minimo non vincolato della (4.1), come di un classico funzionale.

4.2 Funzioni di interpolazione

Le funzioni base, definite sui nodi, interpolano sia spostamenti che tensioni. Nella formulazione adottata si usano funzioni base costanti a tratti, ovvero pari a 1 nell'area di influenza di ciascun nodo e pari a 0 altrove. In questo modo l'elemento vero e proprio è rappresentato da un nodo e dall'area afferente di forma variabile, mentre i triangoli diventano un supporto per la determinazione dell'area di influenza e del sistema di riferimento di ciascun nodo.

Tale scelta è stata operata per garantire una maggiore compatibilità tensionale tra elementi finiti classici, in cui deformazioni e tensioni sono costanti elemento per elemento, e nuovi elementi di interfaccia. Altre formulazioni degli elementi di interfaccia [Janna, 2007], invece, utilizzano funzioni lineari, offrendo tensioni linearmente variabili sulla faccia del tetraedro, che creando uno squilibrio locale.

4.3 Sistema di riferimento locale

I moltiplicatori di Lagrange sono definiti in un sistema di riferimento locale, mentre gli spostamenti nodali si riferiscono a una terna globale. Risulta, quindi, necessario definire delle matrici ortogonali di rotazione, per passare da una terna all'altra. Indicando con λ i moltiplicatori nel sistema locale e con λ_g gli stessi nel sistema globale, si hanno le seguenti relazioni.

$$\lambda = \mathbf{R}^T \lambda_g \quad (4.2a)$$

$$\lambda_g = \mathbf{R}\lambda \quad (4.2b)$$

Con \mathbf{R} matrice di rotazione ortogonale, ossia tale che $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ e $\det(\mathbf{R}) = 1$.

Introdotta la matrice di rotazione, secondo le (4.2), serve definire il sistema locale di riferimento. Indicando con \mathbf{x}_p le coordinate del generico nodo p dell'elemento di interfaccia, si può definire la normale \mathbf{n} al piano di faglia, orientata da top a bottom. Se i nodi della faccia del top dell'elemento di interfaccia sono ordinati secondo la regola della mano destra, ovvero i , j e k , visti dal bottom, la normale, calcolata secondo la (4.3) è diretta da top a bottom.

$$\mathbf{n} = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \quad (4.3)$$

Detti \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 i versori della terna globale, utilizzando la (4.3), si può definire un sistema di riferimento locale, caratterizzato dai seguenti 3 versori:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \\ \mathbf{e}'_2 &= \begin{cases} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{n} \times \mathbf{e}_1\|} & \text{se } \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_2 \geq 0 \\ -\frac{\mathbf{n} \times \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{n} \times \mathbf{e}_1\|} & \text{se } \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_2 < 0 \end{cases} \\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Nel caso di faglia verticale, ovvero con normale dell'elemento di interfaccia parallela all'asse x e $\mathbf{n} \times \mathbf{e}_1 = 0$, il sistema di riferimento locale risulta definito da:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \text{sign}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}'_2 &= \text{sign}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Le direzioni locali sono facilmente identificabili come normale, la prima, e giacenti nel piano di faglia, la seconda e la terza. Per comodità, le direzioni vengono nominate N , T_1 e T_2 . La terna formata da N , T_1 e T_2 è ortonormale destrorsa.

La matrice di rotazione, secondo la classica definizione dell'algebra lineare, è composta, per colonne, dai vettori della base del dominio, scritti nella base del codominio. In questo caso, il dominio è il sistema locale e il codominio il sistema globale:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Gli spostamenti risultano dalla seguente interpolazione, in cui si è utilizzata \mathbf{I}_3 , matrice

identità 3×3 .

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_1 \mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} \varphi_1 \mathbf{I}_3 & \varphi_2 \mathbf{I}_3 & \varphi_3 \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \varphi_1 \mathbf{I}_3 & \varphi_2 \mathbf{I}_3 & \varphi_3 \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \mathbf{u}_e \quad (4.7)$$

Come anticipato, le funzioni introdotte φ_i , a supporto locale, valgono 1, se il punto è all'interno dell'area afferente al nodo i , mentre valgono 0 altrove. In tal modo, non ci sono interazioni tra funzioni di forma di nodi adiacenti. Per capire meglio il concetto di area afferente al nodo, si riporta la figura (4.2), in cui, per ogni nodo, è indicata, con un tratteggio diverso, l'area afferente. Per costruzione, ciascuna area vale $\frac{A_e}{3}$, con A_e area dell'elemento.

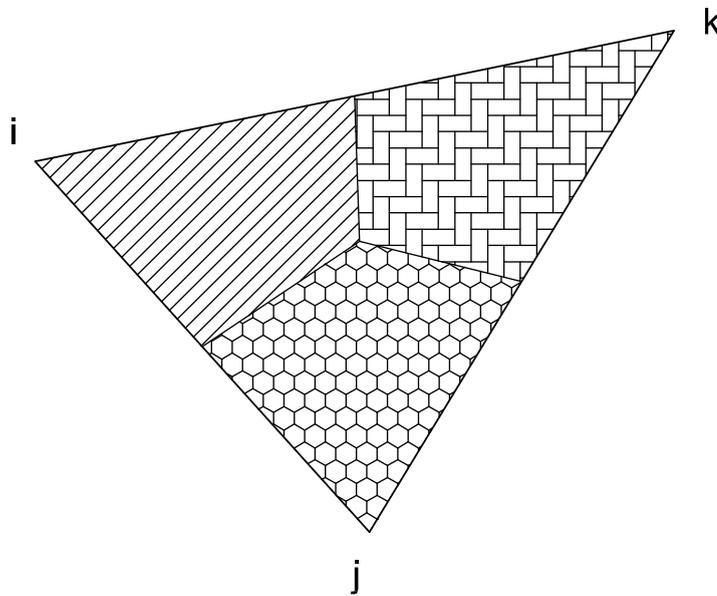


Figura 4.2: Elemento di interfaccia 2D, indicante le aree afferenti a ciascun nodo

Gli spostamenti sono quelli, in ordine, del top e del bottom, ovvero:

$$\mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{T,1} \\ \mathbf{u}_{T,2} \\ \mathbf{u}_{T,3} \\ \mathbf{u}_{B,1} \\ \mathbf{u}_{B,2} \\ \mathbf{u}_{B,3} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

I moltiplicatori di Lagrange, interpolati con le stesse funzioni, risultano, utilizzando come sopra una notazione matriciale:

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}_2 \boldsymbol{\lambda}_e = \begin{bmatrix} \varphi_1 \mathbf{I}_3 & \varphi_2 \mathbf{I}_3 & \varphi_3 \mathbf{I}_3 \\ -\varphi_1 \mathbf{I}_3 & -\varphi_2 \mathbf{I}_3 & -\varphi_3 \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_e \quad (4.9)$$

Il vettore delle tensioni, ovvero dei moltiplicatori di Lagrange, è il seguente:

$$\boldsymbol{\lambda}_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Si noti come si sia implicitamente assunto l'equilibrio nell'elemento di interfaccia, ovvero non si definiscono due tensioni differenti, per ogni nodo di top e bottom, ma solo una, essendo la seconda sempre uguale alla prima, per il *Principio di azione/reazione*.

4.4 Vincoli introdotti dalle faglie

I vincoli geometrici da rispettare, funzione dello stato tensionale agente sulla faglia e variabili a seconda della condizione di elemento chiuso, elemento che scorre ad attrito e, infine, elemento completamente aperto, sono i seguenti:

$$\sigma_N \leq 0 \wedge \tau \leq \tau_L \longrightarrow \begin{cases} u_{T,N} = u_{B,N} \\ u_{T,T_1} = u_{B,T_1} \\ u_{T,T_2} = u_{B,T_2} \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\sigma_N \leq 0 \wedge \tau > \tau_L \longrightarrow \begin{cases} u_{T,N} = u_{B,N} \\ \tau = \tau_L \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\sigma_N > 0 \longrightarrow \text{libero} \quad (4.13)$$

In cui σ_N è la tensione agente ortogonalmente al piano di faglia, mentre è τ il modulo della tensione tangenziale al piano stesso. La tensione tangenziale limite, valore oltre il quale τ non può sussistere, è indicata con τ_L .

La condizione iniziale, nell'analisi del problema, è di elemento chiuso. Le tre disuguaglianze (4.11), (4.12) e (4.13) servono per stabilire la condizione di apertura. In caso di richiusura, il controllo è sia tensionale che geometrico. Infatti, il caso $\sigma_N < 0$ non può

verificarsi e si ha richiusura dell'elemento solo in caso di compenetrazione delle due facce libere di muoversi. Quando, invece, $\tau < \tau_L$, ma posizione diversa da quella originale, l'elemento continua a scorrere. Il nodo non è più attivo a taglio solo se torna nella posizione di partenza con tensione tangenziale compatibile, ossia $\tau \leq \tau_L$.

Il criterio di rottura scelto, in questo lavoro di tesi, è quello di Mohr – Coulomb, consistente in una retta che divide il campo delle tensioni ammissibili da quelle non ammissibili, come descritto in Labuz and Zang [2012]. Indicando con $|\tau|$ il modulo della tensione tangenziale e con $|\sigma_N|$ il modulo della tensione normale, si ha:

$$|\tau| \leq c + \mu |\sigma_N| \quad (4.14)$$

Il caso di uguaglianza, la (4.14) fornisce la tensione limite τ_L .

$$|\tau_L| = c + \mu |\sigma_N| \quad (4.15)$$

Il criterio (4.14) richiede due parametri: la coesione c e la tangente dell'angolo d'attrito $\mu = \tan \phi$, caratteristici del materiale. Trattando il problema in termini più generali, si ha la seguente funzione di snervamento.

$$F(\sigma) = |\tau| + \psi = 0 \quad (4.16)$$

con

$$\psi = \begin{cases} 0 & \text{se } \sigma \geq 0 \\ \sigma \tan \phi - c & \text{se } \sigma < 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

La regione con $F < 0$ rappresenta gli stati ammissibili. Con $F = 0$ si ha scorrimento per attrito, mentre stati con $F > 0$ non possono sussistere. In figura 4.3 è riportata la rappresentazione grafica del criterio di rottura adottato.

4.5 Contributo al principio variazionale

Il lavoro virtuale interno è definito, per un corpo solido continuo, come l'integrale delle tensioni, per ogni deformazione virtuale compatibile.

Secondo il *Principio dei Lavori Virtuali* [Corradi dell'Acqua, 2010], offre contributo al lavoro virtuale una qualunque variazione, compatibile con i vincoli, di una grandezza indipendente. Per tale ragione, finché i moltiplicatori rispettano la continuità, unico vincolo che riguarda la faglia, contribuiscono al lavoro virtuale interno, sia in termini di variazioni virtuali di spostamenti, che di valore dei moltiplicatori. Quindi, la presenza di

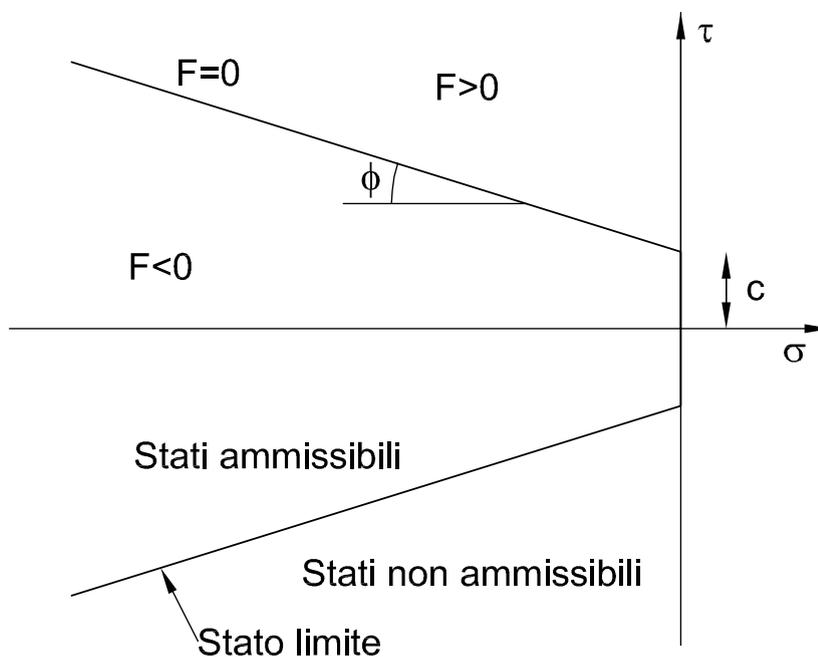


Figura 4.3: Criterio di rottura di Mohr – Coulomb

una discontinuità varia il principio variazionale [Cescotto and Charlier, 1993; Bathe, 2006], la cui minimizzazione è il *Principio dei Lavori Virtuali*. A livello matematico, quindi, il contributo al lavoro virtuale interno, dovuto al vincolo, trattato secondo Lagrange, risulta:

$$\delta L_{vi,\lambda} = \int_A \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\lambda}_g dA + \int_A \delta \boldsymbol{\lambda}_g^T \mathbf{u} dA \quad (4.18)$$

L'integrale è esteso a tutta la superficie di ogni faglia analizzata. Si hanno possibili variazioni sia dei moltiplicatori di Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$, che sono incognite a tutti gli effetti, che di spostamento \mathbf{u} . Questo giustifica i due contributi, presenti, a rigore, solo finché il corpo è continuo.

In seguito, si analizzerà il contributo, offerto al lavoro interno, nel caso di scorrimento ad attrito. Nel caso, invece, di corpo aperto, non si ha contributo.

4.5.1 Matrice locale per IE

Note le matrici di interpolazione per gli elementi di interfaccia, fornite, per gli spostamenti, dalla (4.7), e per le tensioni, dalla (4.9), si possono calcolare i due termini del lavoro

virtuale interno, relativi agli IE espressi nella (4.18).

$$\begin{aligned} \lambda_g = \tilde{\mathbf{R}}\lambda &= \begin{bmatrix} -\mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \mathbf{I}_3 & \varphi_2 \mathbf{I}_3 & \varphi_3 \mathbf{I}_3 \\ -\varphi_1 \mathbf{I}_3 & -\varphi_2 \mathbf{I}_3 & -\varphi_3 \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \lambda_e = \\ &= \begin{bmatrix} -\mathbf{R}\varphi_1 & -\mathbf{R}\varphi_2 & -\mathbf{R}\varphi_3 \\ \mathbf{R}\varphi_1 & \mathbf{R}\varphi_2 & \mathbf{R}\varphi_3 \end{bmatrix} \lambda_e \end{aligned} \quad (4.19)$$

In cui il segno negativo davanti a \mathbf{R} è dovuto alla scelta del top come riferimento, come rappresentato in figura 4.4.

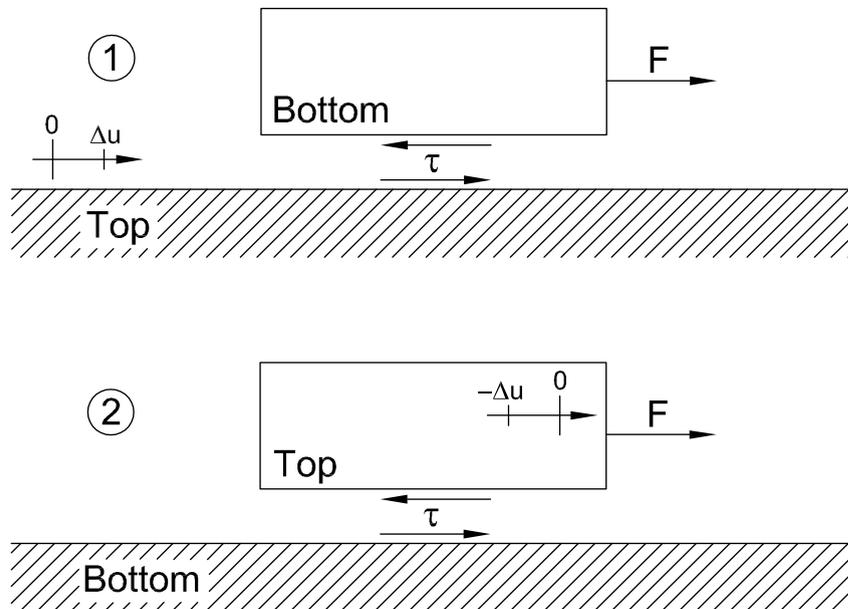


Figura 4.4: Sistema di riferimento di un elemento di interfaccia, posto nella superficie top 1) o bottom 2)

Secondo questa scelta, interessa lo spostamento relativo del bottom rispetto al top. Il top è anche la faccia su cui si calcolano i valori dei moltiplicatori di Lagrange, che vengono poi riportati sul bottom, in base al *Principio di azione/reazione*.

Il calcolo della componente del lavoro, per unità di area, dovuta alle tensioni, ovvero ai moltiplicatori di Lagrange, nel caso d'esempio, è:

$$L_a = \tau \cdot \Delta u \quad (4.20)$$

Il segno di Δu , in (4.20) è opposto a seconda che si scelga la configurazione 1 o 2, di figura 4.4. Infatti, mentre in 1 il bottom si muove verso sinistra, quindi nel verso positivo della coordinata, in 2, il bottom si muove nel verso opposto, essendo il top a muoversi verso sinistra. Scegliendo di analizzare la prima configurazione, si ha:

$$L_{a1} = \tau \cdot \Delta u \quad (4.21)$$

Scegliendo la seconda configurazione, si ha:

$$L_{a2} = -\tau \cdot (-\Delta u) \quad (4.22)$$

Si osservi, che, com'è ovvio aspettarsi, il lavoro è sempre lo stesso, essendo la (4.21) equivalente alla (4.22).

Dopo aver specificato il sistema di riferimento locale dei moltiplicatori, si può esplicitare il termine del lavoro virtuale interno, dovuto agli elementi di interfaccia, ovvero la (4.18).

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\lambda}_g &= \delta \mathbf{u}_e^T \begin{bmatrix} \varphi_1 \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \varphi_2 \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \varphi_3 \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \varphi_1 \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \varphi_2 \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \varphi_3 \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{R}\varphi_1 & -\mathbf{R}\varphi_2 & -\mathbf{R}\varphi_3 \\ \mathbf{R}\varphi_1 & \mathbf{R}\varphi_2 & \mathbf{R}\varphi_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_e = \\ &= \delta \mathbf{u}_e^T \begin{bmatrix} -\varphi_1 \mathbf{R}\varphi_1 & -\varphi_1 \mathbf{R}\varphi_2 & -\varphi_1 \mathbf{R}\varphi_3 \\ -\varphi_2 \mathbf{R}\varphi_1 & -\varphi_2 \mathbf{R}\varphi_2 & -\varphi_2 \mathbf{R}\varphi_3 \\ -\varphi_3 \mathbf{R}\varphi_1 & -\varphi_3 \mathbf{R}\varphi_2 & -\varphi_3 \mathbf{R}\varphi_3 \\ \varphi_1 \mathbf{R}\varphi_1 & \varphi_1 \mathbf{R}\varphi_2 & \varphi_1 \mathbf{R}\varphi_3 \\ \varphi_2 \mathbf{R}\varphi_1 & \varphi_2 \mathbf{R}\varphi_2 & \varphi_2 \mathbf{R}\varphi_3 \\ \varphi_3 \mathbf{R}\varphi_1 & \varphi_3 \mathbf{R}\varphi_2 & \varphi_3 \mathbf{R}\varphi_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_e \quad (4.23) \end{aligned}$$

Poiché le funzioni base sono costanti, a tratti, e i prodotti misti si annullano, la (4.23) si semplifica in:

$$\delta \mathbf{u}_e^T \begin{bmatrix} -\mathbf{R}\varphi_1^2 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & -\mathbf{R}\varphi_2^2 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{R}\varphi_3^2 \\ \mathbf{R}\varphi_1^2 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{R}\varphi_2^2 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{R}\varphi_3^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_e \quad (4.24)$$

Noti i valori degli integrali dei prodotti delle funzioni base:

$$\int_A \varphi_i \varphi_j dA = \begin{cases} \frac{A}{3} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases} \quad (4.25)$$

integrando sull'area dell'elemento di interfaccia la (4.24), si ottiene la matrice \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \int_A \begin{bmatrix} -\mathbf{R}\varphi_1^2 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & -\mathbf{R}\varphi_2^2 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{R}\varphi_3^2 \\ \mathbf{R}\varphi_1^2 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{R}\varphi_2^2 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{R}\varphi_3^2 \end{bmatrix} dA = \frac{A}{3} \begin{bmatrix} -\mathbf{R} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & -\mathbf{R} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & -\mathbf{R} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{R} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

che permette di scrivere la (4.18) in forma discretizzata:

$$\delta L_{vi,\lambda} = \delta \mathbf{u}_e^T \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\lambda}_e + \delta \boldsymbol{\lambda}_e^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{u}_e \quad (4.27)$$

D'ora in poi, il pedice \mathbf{e} , indicante i valori nodali delle incognite, sarà, per maggiore semplicità di lettura, trascurato.

4.6 Scorrimento ad attrito

Uno dei principali problemi, che si riscontrano nell'analisi degli elementi finiti di interfaccia è la ripartizione della tensione τ_L , lungo i due versori del piano di faglia. Il criterio di rottura, infatti, fornisce solo la somma vettoriale di τ_{T_1} e τ_{T_2} .

Per superare tale problema esistono più approcci. In Aagaard et al. [2013]; Jha and Juanes [2014], per esempio, si tratta la non-linearità dovuta alla ripartizione della tensione tangenziale, nelle due componenti, riscalando le componenti di tensione note, secondo la (4.28), e calcolando la variazione di spostamento dei nodi, assumendo che la perturbazione del moltiplicatore di Lagrange interessi solo i due nodi di faglia. Così si risolve iterativamente un sottosistema, finché si arriva a una soluzione che rispetta il criterio di rottura scelto.

$$\Delta \boldsymbol{\lambda}_i = (1 - \delta_i) \boldsymbol{\lambda}_i \left(\frac{\tau_f - \tau}{\tau} \right) \quad (4.28)$$

Nella (4.28), δ_i è la delta di Kronecker, che consente di variare le sole componenti di tensione tangenziale, non quelle normali, mentre τ è il modulo della tensione tangenziale.

Il valore τ_f , infine, è il valore ammissibile, derivato dal criterio di rottura utilizzato.

In questo lavoro di tesi, si adotta il *Principio di Massima Dissipazione Plastica*, esposto in Wriggers [2006]; Simo and Hughes [2000]; Corradi dell'Acqua [2010], qui esteso al caso di scorrimento ad attrito, secondo il quale deve valere la seguente disuguaglianza.

$$(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^*)^T \mathbf{u}_r \geq 0 \quad (4.29)$$

In cui:

- $\boldsymbol{\tau}$: tensione tangenziale che agisce nel caso di scorrimento;
- $\boldsymbol{\tau}^*$: un qualunque stato tensionale tangenziale ammissibile;
- $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_B - \mathbf{u}_T$: lo scorrimento relativo tra le due facce.

Essenzialmente, la (4.29) implica che la tensione tangenziale, che si esplica tra le due facce, nel momento in cui i due piani di faglia scorrono reciprocamente, è quella, tra tutte le ammissibili, che offre il massimo lavoro della forza d'attrito, ovvero la massima dissipazione, da cui il nome del criterio, originariamente nato per la ripartizione della tensione in campo plastico.

Nel presente lavoro, le tensioni τ_{T_1} e τ_{T_2} , che massimizzano il lavoro dissipativo, sono disposte in modo da avere la risultante τ_L contraria al vettore \mathbf{u}_r . Calcolando il lavoro come prodotto scalare di due vettori, ossia $L = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}_r = |\tau| \cdot |u_r| \cos\theta$, con θ angolo compreso tra i due vettori, affinché sia massimo il lavoro dissipativo, si ha $\cos\theta = -1$ e, quindi, $\theta = \pi$. Il vettore delle tensioni, quindi, risulta con la stessa direzione del vettore scorrimento relativo, ma verso opposto. La (4.29) nel caso in analisi diventa:

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_L \frac{\mathbf{u}_r}{\|\mathbf{u}_r\|} \quad (4.30)$$

4.6.1 Lavoro virtuale derivato dallo scorrimento con attrito

Fintanto che il corpo è chiuso, il contributo dei moltiplicatori di Lagrange al lavoro virtuale interno è dato dalla (4.18). Quando il corpo è completamente aperto, si liberano i gradi di libertà dei nodi di top e bottom adiacenti e tale situazione comporta, a livello matematico, l'esclusione dalla condizione di vincolo dei rispettivi moltiplicatori di Lagrange. A livello numerico, in questo caso, i λ non sono più trattati come incognite, ma come valori fissati.

Nel caso intermedio, di corpo continuo a sforzo normale, ma discontinuo a taglio, con $\tau = \tau_L$ e libero di scorrere, la trattazione prevede che i moltiplicatori di Lagrange relativi al taglio siano funzione degli spostamenti, secondo la (4.30). Si è interessati, ora,

a calcolare il contributo al lavoro virtuale interno dei moltiplicatori vincolati dal *Principio di Massima Dissipazione Plastica*.

Innanzitutto si definisce il vettore \mathbf{u}_r , scorrimento relativo tra le due facce:

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{R}^T \mathbf{C}^T \mathbf{u} \quad (4.31)$$

in cui \mathbf{C} è una matrice 6×3 , che serve per il calcolo dello scorrimento relativo tra top e bottom, a partire dagli spostamenti nodali.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Il vettore \mathbf{u} è un vettore a 6 componenti, con i 3 spostamenti del top e i 3 spostamenti del bottom espressi nel sistema di riferimento assoluto e \mathbf{R} è la matrice di rotazione.

Si possono calcolare, ora, per un singolo nodo di interfaccia, le tensioni tangenziali, espresse simbolicamente dalla (4.30), ovvero:

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_L \frac{\mathbf{u}_r}{\sqrt{\mathbf{u}_r^T \mathbf{u}_r}} = \tau_L \frac{\mathbf{R}^T \mathbf{C}^T \mathbf{u}}{\sqrt{(\mathbf{R}^T \mathbf{C}^T \mathbf{u})^T (\mathbf{R}^T \mathbf{C}^T \mathbf{u})}} \quad (4.33)$$

Nel calcolo della norma dello spostamento relativo, compare la matrice $\mathbf{H} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Per calcolare il contributo al lavoro virtuale interno, dovuto ai moltiplicatori di Lagrange tangenziali, quando il corpo scorre ad attrito, si adotta la seguente scrittura, per il vettore tensione:

$$\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v}_n + c) \frac{\mathbf{R}^T \mathbf{C}^T \mathbf{u}}{\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u}}} \quad (4.35)$$

in cui:

$$\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} -\tan \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Dalla (4.36), risulta immediato il significato di $(\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v}_n + c)$, pari alla tensione tangenziale limite (4.15). Il segno meno, che compare nella (4.36), è dovuto al fatto che la tensione normale, agente sul piano di faglia, è sempre negativa, in quanto di compressione $\sigma_N < 0$.

Calcolando l'incremento di lavoro virtuale, dovuto a una variazione virtuale di spostamento, si ha l'equazione:

$$\begin{aligned} \delta L_{vi,u} &= \int_{A_\lambda} \delta \mathbf{u}_r^T \boldsymbol{\tau} dA_\lambda = \delta (\mathbf{R}^T \mathbf{C}^T \mathbf{u})^T A_\lambda \boldsymbol{\tau} = \\ &= \delta \mathbf{u}^T (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v}_n + c) A_\lambda \frac{\mathbf{C} \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{C}^T \mathbf{u}}{\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u}}} = \\ &= \delta \mathbf{u}^T (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v}_n + c) A_\lambda \frac{\mathbf{H} \mathbf{u}}{\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u}}} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Poiché $\boldsymbol{\tau}$ non è variabile indipendente, il contributo al lavoro virtuale dovuto alla sua variazione non viene tenuto in conto.

In questo modo, si individua univocamente la tensione tangenziale nel caso di scorrimento. L'unico limite si evidenzia nel momento in cui $\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$, che accade per ogni nodo, la prima volta in cui $|\tau|$ supera τ_L . In questo caso, il criterio di ripartizione delle tensioni tangenziali consiste, semplicemente, nello scalare i valori dei moltiplicatori di Lagrange nel piano di faglia, in modo che $\lambda_{T_1}^2 + \lambda_{T_2}^2 = \tau_L^2$.

Numericamente, la condizione $\Delta \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$ è molto gravosa, in quanto porta i termini delle (4.35) e (4.37) a divergere verso $+\infty$. Serve, quindi, evitare tale evenienza, con appositi criteri di tolleranza. Se $\Delta \mathbf{u} < toll$, non si calcola la (4.35), scalando le tensioni tangenziali sul valore limite, mentre i contributi della (4.37) vengono semplicemente trascurati.

Un'ultima nota riguarda il vettore $\boldsymbol{\tau}$, utilizzato regolarmente dall'equazione (4.33) in poi. Tale vettore, di 3 componenti, ha sempre la prima componente nulla, trattandosi di elementi chiusi a sforzo normale, che non hanno scorrimento relativo in direzione normale al piano di faglia.

4.7 Comportamento idraulico della faglia

A livello fisico, la faglia può essere di tipo *sealing* o *non-sealing*. Una faglia di tipo *sealing* è barriera idraulica al moto del fluido, quindi non consente la propagazione delle variazioni

di pressione. Viceversa, una faglia di tipo *non-sealing* ha soltanto effetti meccanici. Per quanto riguarda la propagazione del fluido, è come se non esistesse.

Numericamente, per una coppia di nodi top/bottom, di una faglia di tipo *non-sealing*, si mediano le forze agenti, dovute a variazioni di pressione, sui due nodi, così da avere gli stessi effetti in entrambi i lati della faglia. Se, invece, la faglia è di tipo *sealing*, i nodi “dirimpettai” possono avere forze esterne diverse, dovute al differente comportamento idraulico delle due parti del mezzo poroso.

Capitolo 5

Soluzione del problema strutturale con discontinuità

Nel capitolo 2 si è analizzato teoricamente il problema strutturale, nel capitolo 3 si è presentato il metodo risolutivo, infine, nel capitolo 4 si sono introdotti gli elementi finiti di interfaccia. In questo capitolo, si uniscono le varie parti, per arrivare alla soluzione del problema strutturale, con presenza di elementi di interfaccia.

Il lavoro virtuale interno, sommando i contributi offerti dalle (2.10) e (4.18), diventa:

$$\delta L_{vi} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_A \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\lambda}_g dA + \int_A \delta \boldsymbol{\lambda}_g^T \mathbf{u} dA \quad (5.1)$$

Introducendo nella (5.1) anche il contributo degli elementi attivi a scorrimento ad attrito offerto dalla (4.37), si ha l'equazione completa del lavoro virtuale interno:

$$\delta L_{vi} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_A \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\lambda}_g dA + \int_A \delta \boldsymbol{\lambda}_g^T \mathbf{u} dA + \int_{A_\lambda} \delta \Delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\tau} dA_\lambda \quad (5.2)$$

in cui si è indicata con A_λ l'area della faglia che scorre ad attrito.

La (5.2), discretizzata, diventa, considerando le equazioni (3.26), (4.27) e (4.37):

$$\delta L_{vi} = \delta \mathbf{u}^T \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dV + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\lambda} + \delta \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}^T \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}^T (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v}_n + c) A_\lambda \frac{\mathbf{H} \mathbf{u}}{\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u}}} \quad (5.3)$$

Il lavoro virtuale esterno, invece, è molto più semplicemente, dato da:

$$\delta L_{ve} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (5.4)$$

L'uguaglianza tra la (5.3) e la (5.4) deve valere per ogni variazione virtuale, secondo

il *Principio dei Lavori Virtuali*. Si ottengono, quindi, 2 equazioni vettoriali, che formano il seguente sistema:

$$\begin{cases} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dV + \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda} + (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v}_n + c) A_\lambda \frac{\mathbf{H}\mathbf{u}}{\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{H}\mathbf{u}}} = \mathbf{f} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{u} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.5)$$

La seconda equazione vettoriale impone le condizioni di congruenza. Infatti, nodo per nodo, $\mathbf{B}^T \mathbf{u} = \mathbf{0}$ comporta l'uguaglianza tra spostamenti del top e del bottom, di ciascun nodo della faglia.

Il sistema che ne risulta è non – lineare e quindi va risolto iterativamente. Come si è già accennato nel paragrafo 3.5, in questo lavoro di tesi, si utilizza l'algoritmo di Newton – Raphson. Per prima cosa, il sistema non – lineare è riscritto in forma canonica:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dV + \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda} + (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v}_n + c) A_\lambda \frac{\mathbf{H}\mathbf{u}}{\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{H}\mathbf{u}}} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{B}^T \mathbf{u} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.6)$$

L'applicazione dell'algoritmo iterativo scelto richiede la conoscenza delle derivate delle due funzioni $\mathbf{F}_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ e $\mathbf{F}_2(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$, del sistema non – lineare, rispetto a entrambe le variabili indipendenti \mathbf{u} e $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{F}_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{K}(\mathbf{u}) + (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v}_n + c) A_\lambda \frac{\mathbf{H}\mathbf{u}^T \mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{H}\mathbf{u}\mathbf{u}^T \mathbf{H}}{(\mathbf{u}^T \mathbf{H}\mathbf{u})^{\frac{3}{2}}} \quad (5.7a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \mathbf{F}_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{B} + A_\lambda \frac{\mathbf{H}\mathbf{u}}{\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{H}\mathbf{u}}} \mathbf{v}_n^T \quad (5.7b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{F}_2(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{B}^T \quad (5.7c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \mathbf{F}_2(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} \quad (5.7d)$$

La soluzione delle (5.5), con l'algoritmo di Newton – Raphson, comporta le seguenti definizioni di jacobiano e residuo:

$$\mathbf{J}_{t+1}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Dove:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{11} &= \mathbf{K}(\mathbf{u}_{t+1}^i) + \left(\boldsymbol{\lambda}_{t+1}^i{}^T \mathbf{v}_n + c \right) A_\lambda \frac{\mathbf{H}\mathbf{u}_{t+1}^i{}^T \mathbf{H}\mathbf{u}_{t+1}^i - \mathbf{H}\mathbf{u}_{t+1}^i \mathbf{u}_{t+1}^i{}^T \mathbf{H}}{\left(\mathbf{u}_{t+1}^i{}^T \mathbf{H}\mathbf{u}_{t+1}^i \right)^{\frac{3}{2}}} \\ \mathbf{J}_{12} &= \mathbf{B} + A_\lambda \frac{\mathbf{H}\mathbf{u}_{t+1}^i}{\sqrt{\mathbf{u}_{t+1}^i{}^T \mathbf{H}\mathbf{u}_{t+1}^i}} \mathbf{v}_n{}^T \\ \mathbf{J}_{21} &= \mathbf{B}^T \\ \mathbf{J}_{22} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_{t+1}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{t+1} - \int_V \boldsymbol{\sigma}_{t+1}^i dV - \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}_{t+1}^i \\ -\mathbf{B}^T \mathbf{u}_{t+1}^i \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Si noti che lo jacobiano (5.8) può anche essere non simmetrico. La non simmetria è dovuta agli elementi che, scorrendo ad attrito, dissipano energia. La notazione indica nel pedice $t + 1$ il time step attuale e nell'apice i l'iterazione non – lineare attuale, come descritto in Zienkiewicz and Taylor [2000b]. Si indica u_t la soluzione a convergenza e si assume implicitamente che $u_{t+1}^0 = u_t$.

Trattando il problema dello scorrimento ad attrito, come descritto in Aagaard et al. [2013]; Jha and Juanes [2014], invece, lo jacobiano risulta sempre simmetrico, con autovalori positivi e negativi, ovvero una matrice di punto sella.

Nonostante lo jacobiano (5.8) contenga dei termini dovuti al lavoro virtuale delle tensioni tangenziali, nel caso in cui qualche nodo scorra nel piano di faglia, nel residuo (5.9), non c'è traccia di tali termini. Infatti, a termine noto si assemblano le tensioni di Lagrange, integrate sull'area, ovvero il prodotto $\mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}_{t+1}^i$. Questa scrittura è sempre valida, qualunque sia la condizione da cui deriva il calcolo della tensione, ossia a corpo continuo, aperto a scorrimento o aperto del tutto. Quindi, con il prodotto $\mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}_{t+1}^i$ si tiene sempre conto, in modo corretto, del contributo di tutti i moltiplicatori di Lagrange, in ogni situazione.

Il termine $\int_V \boldsymbol{\sigma}_{t+1}^i dV$ risulta pari a $\mathbf{K}\mathbf{u}_{t+1}^i$ solo se il materiale è linearmente elastico. La matrice $\mathbf{K}(\mathbf{u}_{t+1}^i)$ è la matrice di rigidezza tangente, i cui termini sono la (3.30), derivata dal calcolo del contributo al lavoro virtuale interno delle tensioni (2.10), in cui la matrice elastica \mathbf{D} , che lega incrementi di tensione a incrementi di deformazione, è la (3.13). Si

ricorda che la matrice \mathbf{D} è definita, in modo simbolico, come:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (5.10)$$

Il *Principio di Massima Dissipazione Plastica* offre due contributi dello jacobiano (5.8). Si analizzano, ora, le matrici locali che, assemblate, formano i due contributi. La prima matrice locale, che ha posizione (1, 1) in (5.8), ossia la posizione di \mathbf{K} , è una matrice 6×6 , da assemblare, nelle 4 posizioni 3×3 , relative alle intersezioni di righe e colonne dei 3 gradi di libertà dei nodi di top e bottom. Nella posizione (1, 2) di (5.8), si ha una matrice locale 6×3 , da assemblare nelle intersezioni delle 3 righe dei 3 gradi di libertà, dei nodi di top e bottom, con le 3 colonne, relative al moltiplicatore di Lagrange associato.

Lo schema iterativo è, considerando lo jacobiano (5.8) e il residuo (5.9), il seguente:

$$\mathbf{J}_{t+1}^i \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}_{t+1}^i = \mathbf{r}_{t+1}^i \quad (5.11)$$

Il contributo per aggiornare la soluzione è dato da:

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}_{t+1}^i = \mathbf{J}_{t+1}^{i-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{t+1} - \int_V \boldsymbol{\sigma}_{t+1}^i dV - \mathbf{B} \boldsymbol{\lambda}_{t+1}^i \\ -\mathbf{B}^T \mathbf{u}_{t+1}^i \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

La nuova soluzione si calcola come:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{t+1}^{i+1} &= \mathbf{u}_{t+1}^i + \Delta \mathbf{u}_{t+1}^i \\ \boldsymbol{\lambda}_{t+1}^{i+1} &= \boldsymbol{\lambda}_{t+1}^i + \Delta \boldsymbol{\lambda}_{t+1}^i \end{aligned} \quad (5.13)$$

Nel calcolo del residuo, si tiene conto di tutto il carico applicato al corpo e non del solo incremento di carico dallo step precedente a quello attuale, come avviene, invece, in alcune formulazioni. Questa metodologia è stata adottata perché risente meno, rispetto a quella che analizza la risposta al solo ultimo incremento di carico, dell'accumulo di eventuali errori.

In caso di corpo continuo, lo jacobiano diventa simmetrico:

$$\mathbf{J}_{t+1}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{u}_{t+1}^i) & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Si noti che nello jacobiano (5.14) compare una sola matrice \mathbf{B} , che è sufficiente per calcolare entrambi i contributi al lavoro virtuale, dovuti sia a variazioni di spostamenti che a variazioni di tensioni.

5.1 Trattamento dei moltiplicatori disattivi

Particolare attenzione va posta nel trattare i moltiplicatori di Lagrange disattivi, che rappresentano il venir meno della condizione di vincolo. Fisicamente, si tratta della situazione di faglia aperta o faglia che scorre nel suo piano. Venendo meno il vincolo, si hanno tre conseguenze:

- non serve più la condizione di congruenza, parte \mathbf{B}^T dello jacobiano (5.14);
- non serve più calcolare il lavoro dei moltiplicatori, parte \mathbf{B} dello jacobiano (5.14). In caso di scorrimento, il lavoro delle forze d'attrito, infatti, è calcolato con il nuovo jacobiano (5.8);
- serve annullare il relativo incremento $\Delta\lambda$, in modo che il valore scelto, in caso di faglia aperta, o ricavato, in caso di faglia che scorre, resti tale.

Le parti da eliminare, nella matrice (5.14), quindi, sono la riga e la colonna del moltiplicatore disattivo. La terza condizione, viene realizzata imponendo un coefficiente diagonale unitario, che modifica il blocco nullo dello jacobiano, in posizione (4, 4) e annullando la corrispondente componente del termine noto, analogamente a quanto viene fatto per imporre le condizioni di Dirichlet, come descritto nel paragrafo 3.6.

5.2 Criteri di uscita

Per determinare quando il ciclo non – lineare di Newton – Raphson (5.12) è arrivato a convergenza, si possono usare diverse norme, sempre normalizzate al loro stesso valore di entrata nel ciclo stesso, quindi al valore di inizio time step. Norme utilizzabili sono:

1. norma euclidea dell'incremento di spostamento $\|\Delta\mathbf{u}_{t+1}^i\|$;
2. norma euclidea della prima parte del residuo (5.9), ovvero delle forze sbilanciate $\|\mathbf{f}_{t+1} - \int_V \boldsymbol{\sigma}_{t+1}^i dV - \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}_{t+1}^i\|$;
3. norma dell'energia di deformazione, ossia la somma di prodotto scalare delle forze sbilanciate per l'incremento di spostamento $(\mathbf{f}_{t+1} - \int_V \boldsymbol{\sigma}_{t+1}^i dV - \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}_{t+1}^i) \cdot \Delta\mathbf{u}_{t+1}^i$ e prodotto scalare della seconda parte del termine noto, ovvero gli scorrimenti relativi tra top e bottom, e l'incremento di tensione $(-\mathbf{B}^T \mathbf{u}_{t+1}^i) \cdot \Delta\boldsymbol{\lambda}_{t+1}^i$. Sommando i due termini, si ha $(\mathbf{f}_{t+1} - \int_V \boldsymbol{\sigma}_{t+1}^i dV - \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}_{t+1}^i) \cdot \Delta\mathbf{u}_{t+1}^i + (-\mathbf{B}^T \mathbf{u}_{t+1}^i) \cdot \Delta\boldsymbol{\lambda}_{t+1}^i$.

Si noti che la terza norma cresce come il prodotto delle altre due. Così, se le prime due sono lineari, la terza è quadratica.

In questa tesi, si è scelto di utilizzare, come criterio di uscita dallo schema iterativo, la seconda norma, ovvero quella sulle forze sbilanciate. Il valore di uscita è stato scelto pari a $toll = 10^{-8}$.

5.2.1 Considerazioni in merito alla norma dell'energia

Trattando di un problema strutturale classico, senza elementi di interfaccia, con materiale non dissipativo, risolto agli elementi finiti, risulta banale la considerazione sulla positività della norma dell'energia, essendo la matrice di rigidezza simmetrica e definita positiva. In questo caso, però, analizzando la situazione a corpo continuo, lo jacobiano (5.14) risulta simmetrico, ma indefinito. La norma dell'energia, quindi, potendosi scrivere come nella (5.15), può assumere valore negativo.

$$\begin{aligned}
\Delta E_{t+1}^i &= \left(\mathbf{f}_{t+1} - \int_V \boldsymbol{\sigma}_{t+1}^i dV - \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}_{t+1}^i \right)^T \Delta \mathbf{u}_{t+1}^i + (-\mathbf{B}^T \mathbf{u}_{t+1}^i)^T \Delta \boldsymbol{\lambda}_{t+1}^i = \\
&= \Delta \mathbf{u}_{t+1}^i{}^T \left(\mathbf{f}_{t+1} - \int_V \boldsymbol{\sigma}_{t+1}^i dV - \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}_{t+1}^i \right) + \Delta \boldsymbol{\lambda}_{t+1}^i{}^T (-\mathbf{B}^T \mathbf{u}_{t+1}^i) = \quad (5.15) \\
&= \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}_{t+1}^i{}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{t+1}^i \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}_{t+1}^i
\end{aligned}$$

La matrice (5.14), nel caso non ci siano elementi aperti a scorrimento, è simmetrica e indefinita, quindi non si può affermare $\Delta E_{t+1}^i \geq 0$. Quando anche un solo elemento scorre a taglio, si perde persino la simmetria.

5.3 Valori iniziali e serie di step successivi

La corretta soluzione del sistema (5.5) necessita, ovviamente, dell'assegnazione di opportuni valori iniziali delle variabili \mathbf{u}_0 e $\boldsymbol{\lambda}_0$.

Per quanto riguarda $\boldsymbol{\lambda}_0$, il suo valore viene determinato in base alla profondità delle faglie. Per quanto concerne gli spostamenti, invece, si adotta l'ipotesi di corpo inizialmente indeformato e quindi $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$. I valori di \mathbf{u} e $\boldsymbol{\lambda}$ per i successivi time step saranno pari al valore finale dello step precedente, ossia $\mathbf{u}_{t+1}^0 = \mathbf{u}_t$ e $\boldsymbol{\lambda}_{t+1}^0 = \boldsymbol{\lambda}_t$.

Il sistema di Newton – Raphson, con questi nuovi contributi, diventa quindi:

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}_{t+1}^i = \mathbf{J}_{t+1}^{i-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{t+1} - \int_V \boldsymbol{\sigma}_{t+1}^i dV - \mathbf{B} (\boldsymbol{\lambda}_{t+1}^i - \boldsymbol{\lambda}_0) \\ -\mathbf{B}^T (\mathbf{u}_{t+1}^i - \mathbf{u}_t) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Si noti che, in (5.16), il termine $\int_V \boldsymbol{\sigma}_{t+1}^i dV$ non è stato modificato, essendo necessario l'integrale delle tensioni, dall'inizio della simulazione al time step corrente, per equilibrare la forzante applicata \mathbf{f}_{t+1} , che è cumulativa di tutti gli incrementi, dall'inizio al time step corrente.

Per quanto riguarda lo stato dei nodi in scorrimento, all'inizio di un nuovo time step, vengono considerati tutti chiusi a taglio.

Se, nel corso delle iterazioni non – lineari, qualche elemento scorre ad attrito, secondo il *Principio di Massima Dissipazione Plastica*, vengono aggiunti allo jacobiano (5.8) i seguenti contributi:

$$\Delta \mathbf{J}_{t+1}^i = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{J}_{11} & \Delta \mathbf{J}_{12} \\ \Delta \mathbf{J}_{21} & \Delta \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Dove:

$$\Delta \mathbf{J}_{11} = \left((\boldsymbol{\lambda}_{t+1}^i)^T \mathbf{v}_n + c \right) A_\lambda \frac{\mathbf{H} (\mathbf{u}_{t+1}^i - \mathbf{u}_t)^T \mathbf{H} (\mathbf{u}_{t+1}^i - \mathbf{u}_t) - \mathbf{H} (\mathbf{u}_{t+1}^i - \mathbf{u}_t) (\mathbf{u}_{t+1}^i - \mathbf{u}_t)^T \mathbf{H}}{\left((\mathbf{u}_{t+1}^i - \mathbf{u}_t)^T \mathbf{H} (\mathbf{u}_{t+1}^i - \mathbf{u}_t) \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Delta \mathbf{J}_{12} = A_\lambda \frac{\mathbf{H} (\mathbf{u}_{t+1}^i - \mathbf{u}_t)}{\sqrt{(\mathbf{u}_{t+1}^i - \mathbf{u}_t)^T \mathbf{H} (\mathbf{u}_{t+1}^i - \mathbf{u}_t)}} \mathbf{v}_n^T$$

$$\Delta \mathbf{J}_{21} = \mathbf{0}$$

$$\Delta \mathbf{J}_{22} = \mathbf{0}$$

Si noti come, in (5.17), si sia utilizzata l'ultima soluzione a convergenza solo per gli spostamenti \mathbf{u}_{t+1} .

Il significato fisico dei termini che compaiono nella (5.16) è il seguente:

- $\boldsymbol{\lambda}_0$: tensioni iniziali agenti sul piano di faglia. Step per step, il valore iniziale viene equilibrato dall'applicazione del vettore dei moltiplicatori $\boldsymbol{\lambda}$;
- \mathbf{u}_t : spostamenti cumulati fino al time step precedente, che comportano la ricerca della congruenza rispetto all'ultima configurazione equilibrata raggiunta.

5.4 Comportamento in caso di rotazione

Risulta utile approfondire la mancanza di ogni matrice di rotazione nei contributi dovuti al *Principio di Massima Dissipazione Plastica*, che compaiono nelle (5.7). Partendo dalla considerazione che la matrice di rigidità tangente \mathbf{K} deriva, essenzialmente, dal tensore delle tensioni, ed estendendo il ragionamento al caso dello jacobiano (5.8), ricordando che le tensioni sono rappresentate nel sistema di riferimento locale dell'elemento di interfaccia, si ha la seguente scrittura.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{g}}^T \mathbf{J} \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{g}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{g}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\lambda} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{g}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\lambda} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{g}}^T \mathbf{K} \mathbf{R}_{\mathbf{g}} & \mathbf{R}_{\mathbf{g}}^T \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{R}_{\mathbf{g}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.18)$$

In cui $\mathbf{R}_{\mathbf{g}}$ è la matrice di rotazione globale, composta da tante matrici locali quanti sono i nodi della mesh e \mathbf{I}_{λ} è una matrice unitaria, di ordine pari al numero di incognite associate ai moltiplicatori di Lagrange.

Applicando la rotazione del sistema di riferimento globale alla (5.17), si ha:

$$\begin{bmatrix} \tau_L A_{\lambda} \mathbf{R}_{\mathbf{g}}^T \frac{\mathbf{H}(\mathbf{R}_{\mathbf{g}}\mathbf{u})^T \mathbf{H}(\mathbf{R}_{\mathbf{g}}\mathbf{u}) - \mathbf{H}(\mathbf{R}_{\mathbf{g}}\mathbf{u})(\mathbf{R}_{\mathbf{g}}\mathbf{u})^T \mathbf{H}}{((\mathbf{R}_{\mathbf{g}}\mathbf{u})^T \mathbf{H}(\mathbf{R}_{\mathbf{g}}\mathbf{u}))^{\frac{3}{2}}} \mathbf{R}_{\mathbf{g}} & A_{\lambda} \mathbf{R}_{\mathbf{g}}^T \frac{\mathbf{H}(\mathbf{R}_{\mathbf{g}}\mathbf{u})}{\sqrt{(\mathbf{R}_{\mathbf{g}}\mathbf{u})^T \mathbf{H}(\mathbf{R}_{\mathbf{g}}\mathbf{u})}} \mathbf{v}_{\mathbf{n}}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Nella (5.19), si è aggiunta, prima di ogni vettore \mathbf{u} , la matrice di rotazione $\mathbf{R}_{\mathbf{g}}$, in quanto si passa da vecchio a nuovo sistema di riferimento. Si è fatta la sostituzione $\tau_L = (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{v}_{\mathbf{n}} + c)$ e non si è considerato il vettore \mathbf{u}_0 solo per ridurre la scrittura.

Prima di sviluppare i calcoli, ricordando che ogni matrice di rotazione è ortogonale, ovvero $\mathbf{R}_{\mathbf{g}}^T = \mathbf{R}_{\mathbf{g}}^{-1}$, si noti che $\mathbf{R}_{\mathbf{g}}^T \mathbf{H} \mathbf{R}_{\mathbf{g}} = \mathbf{H}$, essendo \mathbf{H} data dalla (4.34). Dalla (5.19), si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \tau_L A_{\lambda} \frac{\mathbf{H} \mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u} - \mathbf{H} \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{H}}{(\mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u})^{\frac{3}{2}}} & A_{\lambda} \frac{\mathbf{H} \mathbf{u}}{\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u}}} \mathbf{v}_{\mathbf{n}}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

La (5.20) risulta identica alle aggiunte dovute al *Principio di Massima Dissipazione Plastica*, che compaiono nelle (5.7). Risulta, dunque, corretta l'assenza di matrici di rotazione locale in (5.20).

Capitolo 6

Algoritmo per elementi di interfaccia

Lo scopo di questo capitolo è un'approfondita analisi dell'algoritmo implementato nel codice agli *Elementi Finiti*, che tratta le condizioni di vincolo riguardanti gli elementi di interfaccia, rappresentanti la discontinuità della faglia.

Per ogni ciclo di Newton – Raphson, prima di assemblare il residuo (5.9), del sistema linearizzato, si analizzano gli elementi di interfaccia, sia a livello tensionale che geometrico, per verificare i vincoli di continuità (4.11), (4.12) e (4.13) e quelli tensionali, dati dal criterio di Mohr – Coulomb, ovvero la (4.14). Esaminati i vari λ , tensioni locali, e \mathbf{u}_r , movimenti relativi delle due facce, si determinano i nodi aperti e si eliminano dal sistema le rispettive equazioni. Nel caso di elementi che scorrono a taglio, si determinano le aggiunte allo jacobiano, date dalla (4.37), e le correzioni alle tensioni tangenziali, secondo il *Principio di Massima Dissipazione Plastica*, equazione (4.35), tutto ciò se lo scorrimento relativo \mathbf{u}_r è superiore a una data tolleranza. In caso di compenetrazione, o di riposizionamento del nodo di top sul bottom, infine, si ha la riattivazione dei moltiplicatori, rispettivamente, a sforzo normale e a taglio, inserendo, nel sistema, le corrispondenti equazioni.

Per ogni nodo di interfaccia, si hanno le 3 componenti di λ_{t+1}^i e i 6 spostamenti di top e bottom, sempre relativi allo spostamento cumulato fino all'ultimo time step, ovvero $\mathbf{u}_{t+1}^i - \mathbf{u}_t$.

Il seguente elenco numerato rappresenta la sequenza di controlli cui è soggetto ciascun nodo di interfaccia, all'interno del codice. Gli indici rappresentano le istruzioni condizionali IF indicate nel diagramma di flusso di figura 6.1.

1. **Controllo sull'indice di plasticità a sforzo normale.** Se il nodo, dal ciclo non – lineare precedente, risulta plasticizzato a sforzo normale, si passa al controllo geometrico, altrimenti si va al controllo tensionale.

2. **Controllo sull'apertura geometrica della faglia.** La verifica dell'apertura geometrica della faglia si effettua con il calcolo della differenza tra gli spostamenti relativi totali (da inizio simulazione) di top e bottom. In caso di elemento non compenetrato viene imposto $\lambda = 0$ e indice di plasticità "vero". In caso di compenetrazione, invece, si chiude l'elemento a taglio e a sforzo normale, lasciando invariata la sua posizione. In ogni caso, il controllo è finito e si torna al programma principale.
3. **Controllo sulla tensione normale.** In caso di tensione di trazione, il nodo di interfaccia viene aperto, imponendo $\lambda = 0$ e indice di plasticità "vero". In questo caso, si esce dal controllo e si torna al programma principale. Se, invece, la tensione è di compressione, si passa al successivo controllo, riguardante le posizioni nel piano tangente la faglia.
4. **Controllo sulla tensione tangenziale e sullo spostamento reciproco.** Se la tensione tangenziale, con le tolleranze descritte in seguito, è superiore alla tensione tangenziale limite o i nodi di top e bottom hanno maturato uno spostamento relativo "abbastanza" grande, si aggiorna lo stato del moltiplicatore assegnando "vero" all'indice di plasticità a taglio e si passa al successivo controllo. Viceversa, se non si rispettano le condizioni del controllo, l'indice di plasticità tagliante è "falso" e si esce dal controllo, tornando al programma principale, con un nodo di interfaccia completamente chiuso, ovvero con una condizione di continuità dei nodi di top e bottom. Ciò avviene se la tensione tangenziale è inferiore al valore limite e il movimento relativo tra i nodi di top e bottom è "piccolo", e cioè si è nella posizione di partenza con tensione ammissibile.
5. **Controllo sullo scorrimento reciproco top/bottom.** Se i nodi di top e bottom si sono mossi reciprocamente, di una quantità superiore a una tolleranza scelta in funzione dello spostamento medio di top e bottom cumulato nello step corrente, si calcolano il contributo allo jacobiano secondo la (5.17) e le nuove tensioni tangenziali secondo la (4.35) e si torna al programma principale. In caso contrario, ovvero di tensione tangenziale superiore al valore limite, ma in assenza di scorrimento relativo, i termini (4.37) tendono a ∞ e le (5.17) non possono essere applicate. Si noti che tale condizione si verifica per ogni prima apertura a taglio di un nodo di interfaccia. Per superare queste situazioni è stato predisposto il controllo che segue.
6. **Controllo sul modulo della tensione tangenziale.** Questo controllo viene effettuato quando si ha il nodo di interfaccia plasticizzato a taglio, ma con scorrimento relativo al di sotto di una prefissata tolleranza. Se il modulo della tensione tan-

genziale è superiore a una data tolleranza, le tensioni si riscalgano sul valore della tensione limite τ_L . In caso contrario, non potendo dividere le componenti per il modulo della tensione tangenziale (che è troppo piccolo), si impongono entrambe le tensioni tangenziali nulle. Questo caso, teoricamente, non si dovrebbe mai realizzare; si tratta solo di un'accortezza per evitare problemi numerici con tensioni molto basse.

6.1 Pseudo-codice

Si riporta, per maggior chiarezza, uno pseudocodice che implementa quanto descritto sopra. Nella figura 6.1, infine, c'è il diagramma a blocchi della routine.

```

1: !ciclo su tutte le ncf incognite di Lagrange
2: Do  $i = 1, ncf$ 
3:    $imat = lam2mat(i)$  !indice di materiale associato alla faglia
4:    $inod = lam2nod(1,i)$  !nodo del top corrispondente al moltiplicatore  $i$ 
5:    $jnod = lam2nod(2,i)$  !nodo del bottom corrispondente al moltiplicatore  $i$ 
6:   call ruota_SR( $R(i), u(jnod) - u(inod), DU$ )
7:   If ( $NPLAS(i)$ ) Then
8:     If ( $DU(1) > - toll\_sp(imat)$ ) Then
9:        $NPLAS(i) = .true.$ 
10:       $TPLAS(i) = .true.$ 
11:      Do  $j = 1, 3$ 
12:         $lambda(j,i) = 0.d0$ 
13:      End Do
14:    Else
15:       $NPLAS(i) = .false.$ 
16:       $TPLAS(i) = .false.$ 
17:    End If
18:  Else
19:    If ( $sigma > toll\_tens(imat)$ ) Then
20:       $NPLAS(i) = .true.$ 
21:       $TPLAS(i) = .true.$ 
22:      Do  $j = 1, 3$ 
23:         $lambda(j,i) = 0.d0$ 
24:      End Do
25:    Else

```

```

26:     NPLAS(i) = false.
27:     If (NRcycle = 1) Then
28:         TPLAS(i) = false.
29:     End If
30:     tau = sqrt(lambda(2,i)**2 + lambda(3,i)**2)
31:     tlim = abs(lambda(1,i))*tan(phi(imat)) + coes(imat)
32:     incr_tau = 0.d0
33:     If (NRcycle = 1) Then
34:         incr_tau = -tau*toll_tau
35:     End If
36:     If ((incr_tau = 0.d0)  $\wedge$  (tau > tlim)  $\wedge$  (tau < tlim*(1.d0+toll_tau)) Then
37:         incr_tau = -tau*toll_tau
38:     End If
39:     If ((incr_tau = 0.d0)  $\wedge$  (tau < tlim)  $\wedge$  (tau > tlim*(1.d0-toll_tau)) Then
40:         incr_tau = +tau*toll_tau
41:     End If !correzione tau secondo tolleranza relativa
42:     uT(inod) = u(inod)-u0(inod)
43:     uB(inod) = u(inod)-u0(inod)
44:     sc_rel = norm_eul(3,uB-uT) !scorrimento relativo top/bottom
45:     sc_mean = norm_eul(3,(uB+uT)/2.d0) !scorrimento cumulato medio
46:     If ((tau+incr_tau  $\geq$  tlim)  $\vee$  (sc_rel > toll_sc*sc_mean)) Then
47:         If (sc_rel > toll_sc*sc_mean) Then
48:             calcolo e assemblaggio aggiunta jacobiano
49:             calcolo tensioni tangenziali secondo MDP
50:         Else
51:             Do j = 1, 2
52:                 tens_T(j) = lambda(j+1,i)
53:             End Do
54:             If (norm_eul(2,tens_T) > toll_tens(imat)) Then
55:                 calcolo tensioni tangenziali scalando tens_T
56:             Else
57:                 annullo tensioni tangenziali
58:             End If
59:         End If
60:         TPLAS(i) = true.
61:     Else

```

```

62:     TPLAS(i) = .false.
63:     End If
64: End If
65: End If
66: End Do

```

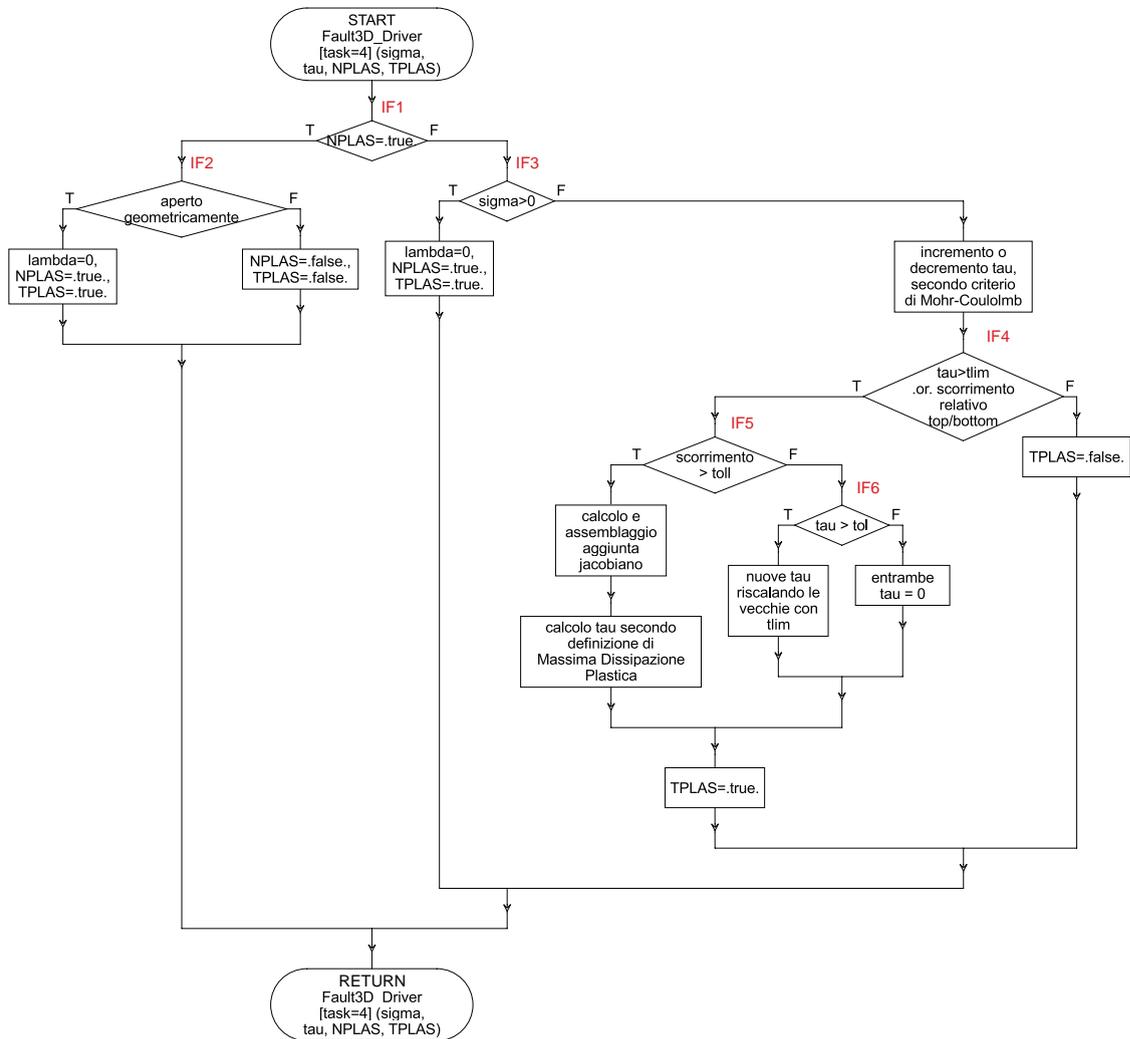


Figura 6.1: Diagramma a blocchi della routine per il trattamento dei nodi di interfaccia

Per spiegare meglio la posizione dell'algoritmo appena descritto, nel codice generale, si riporta uno pseudo – codice del main del codice geostrutturale.

- 1: Calcolo delle tensioni iniziali sulla faglia λ_0
- 2: **Do** $i = 1, ntime_step$
- 3: Input forze esterne, di pressione, nodali (condizioni di Neumann) \mathbf{f}_{t+1}
- 4: **while** $res_i \leq toll$
- 5: Assemblaggio della matrice di rigidezza tangente
- 6: Calcolo dell'integrale delle tensioni
- 7: **call** Fault_driver
- 8: Assemblaggio prima parte termine noto $\mathbf{f}_{1t+1}^i = \mathbf{f}_{t+1} - \int_V \boldsymbol{\sigma}_{t+1}^i dV - \mathbf{B}\lambda_{t+1}^i + \mathbf{B}\lambda_0$
- 9: Calcolo seconda parte termine noto $\mathbf{f}_{2t+1}^i = -\mathbf{B}^T (\mathbf{u}_{t+1}^i - \mathbf{u}_t)$
- 10: Imposizione delle condizioni al contorno di Dirichlet e annullamento dei gradi di libertà associati a moltiplicatori disattivi
- 11: Soluzione del sistema $\mathbf{J}_{t+1}^i \Delta \mathbf{x}_{t+1}^i = \mathbf{f}_{t+1}^i$
- 12: Aggiornamento spostamenti $\mathbf{u}_{t+1}^{i+1} = \mathbf{u}_{t+1}^i + \Delta \mathbf{u}_{t+1}^i$ e tensioni $\lambda_{t+1}^{i+1} = \lambda_{t+1}^i + \Delta \lambda_{t+1}^i$
- 13: Calcolo del residuo $res_{t+1}^i = \frac{\|\Delta \mathbf{x}_{t+1}^i\|}{\|\mathbf{f}_{t+1}^0\|}$
- 14: **End while**
- 15: **End Do**

6.2 Inizio di un nuovo time step

Arrivati a convergenza al precedente time step, con una serie di nodi di interfaccia aperti a taglio e altri a sforzo normale, sorge il problema di come iniziare il nuovo time step. In particolare, il problema riguarda lo stato degli elementi che scorrono a taglio. Risulta conveniente ripartire con tutti gli elementi richiusi, ovvero che simulano la continuità. In caso la forzante esterna del nuovo time step sia diretta come quella del precedente, al primo ciclo non – lineare, gli elementi che erano aperti tornano ad aprirsi subito. Viceversa, se la forzante cambia direzione, risulta complicato, per gli elementi che scorrevano, richiudersi ed, eventualmente, cominciare a scorrere in direzione opposta. Tale procedura è del tutto equivalente al “trial elastic step” che viene eseguito per risolvere problemi elasto – plastici del continuo.

Il criterio di Mohr – Coulomb, infatti, prevede che possano esistere elementi continui in condizione di incipiente movimento, ovvero in cui vale la (4.15).

6.3 Trattamento numerico del criterio di rottura

Il criterio di rottura scelto, rappresentato dalla (4.14), che diventa la (4.15) in caso di scorrimento, numericamente, provoca difficoltà di convergenza, trattandosi di un passaggio netto da condizioni ammissibili a stati non ammissibili. Inoltre, si aggiunge l'ulteriore difficoltà della variazione di stato dei moltiplicatori, da incognite a valori dipendenti dagli spostamenti, con conseguente correzione della matrice tangente di Newton – Raphson, che da (5.14) diventa la (5.8). Per rendere tale passaggio più gradevole, la curva di Mohr – Coulomb è stata trasformata in un'area, come rappresentato in figura 6.2, in modo che, se l'elemento è chiuso, resta tale anche per valori di $|\tau|$ di poco superiori a τ_L , mentre se scorre, resta aperto a taglio anche se $|\tau|$ è leggermente inferiore a τ_L . Il comportamento che ne risulta è leggermente isteretico.

Per esempio, con un angolo di attrito $\phi = 30^\circ$ e coesione nulla $c = 0$, scelta una tolleranza del 5% sul valore di τ_L , si ha:

$$\tau_{L,new} = \tau_L \cdot (1 \pm 0.05) \quad (6.1)$$

La (6.1) comporta un angolo critico che in apertura vale:

$$\arctan(\tan \phi \cdot (1 + 0.05)) = 31.225^\circ \quad (6.2)$$

In richiusura, invece, vale:

$$\arctan(\tan \phi \cdot (1 - 0.05)) = 28.744^\circ \quad (6.3)$$

La tolleranza può essere facilmente vista come un incremento, o un decremento, fittizio di tensione tangenziale, senza toccare il vincolo di Mohr – Coulomb.

Nel caso di prima iterazione non – lineare, si inizia con la condizione di corpo continuo a taglio, quindi si vuole sia verificato $\tau = \tau_L$, come condizione limite di $\tau \leq \tau_L$. Per agevolare tale confronto, si riduce fittiziamente la tensione tangenziale agente τ di un 5%.

In merito al controllo sullo sforzo normale, per la verifica alla compenetrazione $u_r [1] > -toll_{sc}$, si usa una tolleranza negativa, che tende a mantenere l'elemento aperto. Dato che tale verifica si esegue solo su elementi già aperti, questo è a favore della stabilità. Con la stessa ottica, il controllo sulle tensioni di trazione $\sigma_N > toll_{tens}$, si esegue con una tolleranza positiva, in modo da ammettere piccole trazioni.

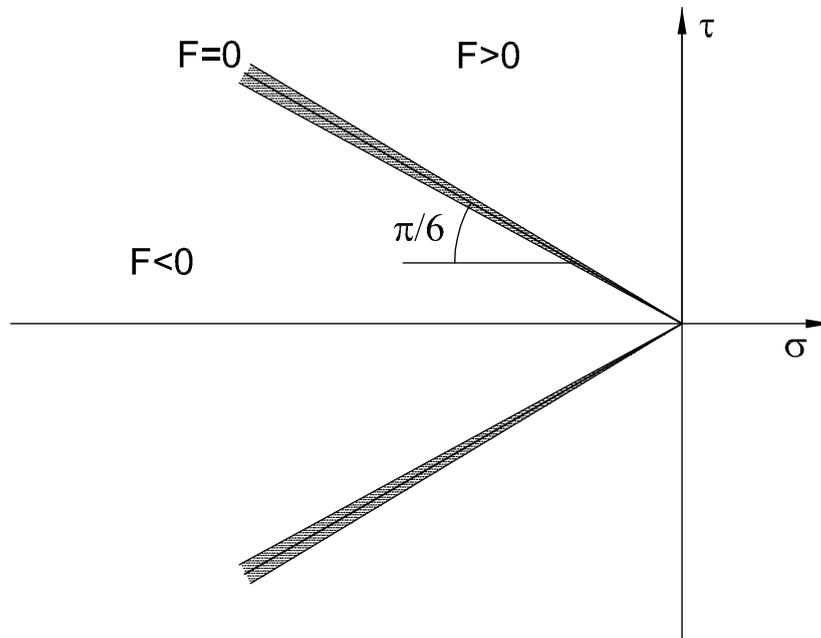


Figura 6.2: Criterio di rottura implementato

6.4 Trattamento dell'asimmetria dello jacobiano

Lo jacobiano (5.8), nel caso più generale, non è simmetrico. Per facilitare il calcolo dello jacobiano, svolto ogni ciclo non – lineare, si parte dallo jacobiano simmetrico (5.14), con le matrici rettangolari \mathbf{B} e \mathbf{B}^T calcolate una sola volta, prima del primo time step. Di volta in volta, si assemblano i vari contributi (se presenti) in \mathbf{B} , mentre \mathbf{B}^T resta sempre la stessa. A matrice (5.8) completa, si impongono le condizioni di Dirichlet, composte da veri e propri vincoli, sui nodi dei classici elementi finiti, e dai moltiplicatori bloccati, individuati grazie alla serie di controllo sopra descritti.

La matrice di rigidezza tangente \mathbf{K} va assemblata di volta in volta completamente, dipendendo questa, secondo le (3.13) e (3.14), dagli spostamenti cumulati finora. Questo semplifica l'eventuale aggiunta dei termini derivati dalla (4.37), ovvero la seconda parte della prima delle (5.7).

Capitolo 7

Test case

L'obiettivo di questo capitolo è l'applicazione, a un semplice test-case, di quanto presentato e sviluppato in precedenza. Si è scelto di analizzare un corpo a forma di parallelepipedo, con una faglia verticale, che si estende per quasi tutta l'altezza del corpo stesso. Il parallelepipedo ha dimensione $5m$ lungo x , $10m$ lungo y e $15m$ lungo z . La mesh è strutturata e la lunghezza del lato corto di ogni triangolo, con cui è discretizzata ciascuna faccia, così come dello spigolo minore dei tetraedri, è $0.5m$. Il corpo discretizzato è rappresentato in figura 7.1.

La scelta della geometria è dovuta al fatto che, con la storia di carico che si intende applicare, suddivisa in 20 time step e rappresentata in figura 7.2, la faglia risulta sollecitata in tutte le modalità, trovandosi, in un primo tempo, chiusa, poi aperta a taglio, verso metà simulazione con sforzo normale molto basso e, infine, scarica, ma in scorrimento nel suo piano. La combinazione di carichi verticale e orizzontale è tale per cui la faglia arriva a tensioni normali molto basse, quindi in condizioni molto vicine all'apertura.

Le pressioni generate, sulla faccia di normale x , sono pari a $5000Pa$ mentre, sulla faccia di normale z , sono pari a $18000Pa$. Tali pressioni risultano, rispettivamente, di compressione e di taglio per la faglia. Nella figura 7.2, gli sforzi sono integrati sull'area di applicazione e contraddistinti da N e T per il loro effetto sulla faglia.

7.1 Mesh e costanti fisiche del materiale

La mesh senza la presenza di faglie, sarebbe composta da 7161 nodi e 36000 tetraedri. La duplicazione di alcuni nodi a causa della faglia porta il numero di nodi a 7749 nodi, mentre il numero di tetraedri rimane invariato.

Gli elementi di interfaccia a 6 nodi sono 1080, quelli a 4 e 5 nodi sono 20 più 20. Gli elementi di interfaccia di "cucitura" sono fondamentali in un caso reale, in cui le faglie non

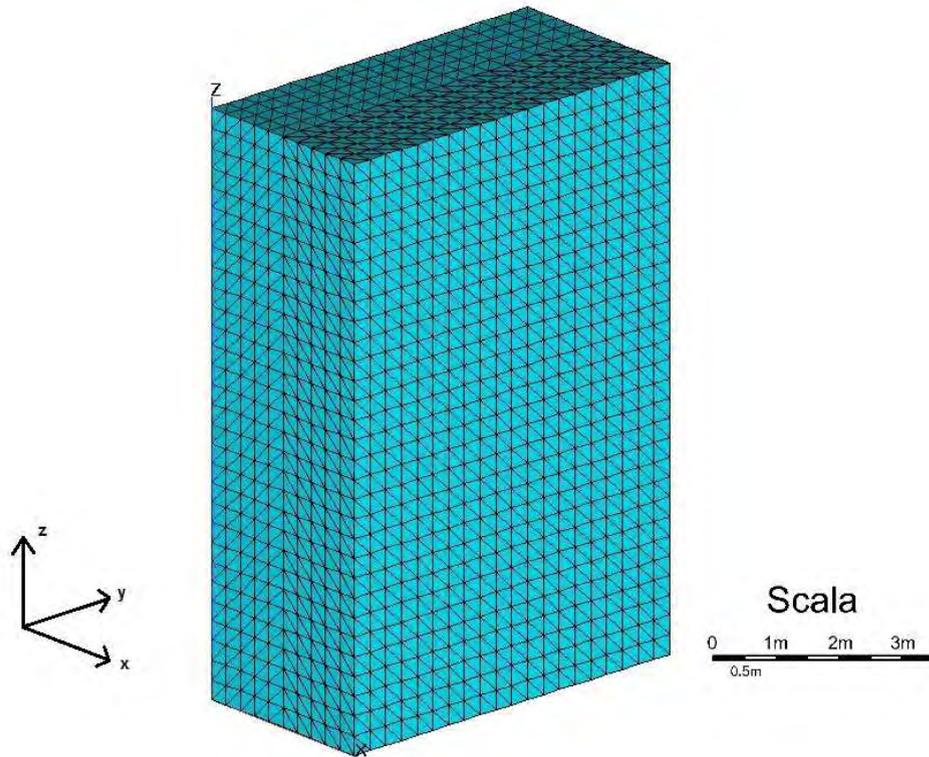


Figura 7.1: Mesh analizzata

si estendono all'infinito. Nel complesso, quindi, ci sono 1120 elementi di interfaccia, con 588 nodi attivi e rispettivo moltiplicatore di Lagrange. Nella figura 7.3 è rappresentato quanto descritto.

7.1.1 Costanti fisiche del materiale

Nell'analisi in corso, il materiale è assunto isotropo, omogeneo e lineare elastico. Dall'isotropia discendono i valori delle costanti β , γ e η , definite nel paragrafo 2.2. I valori (7.1) sono validi, così come ogni altro parametro, per tutto il corpo, essendo questo assunto omogeneo.

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ \gamma = 1 \\ \eta = 1 \end{cases} \quad (7.1)$$

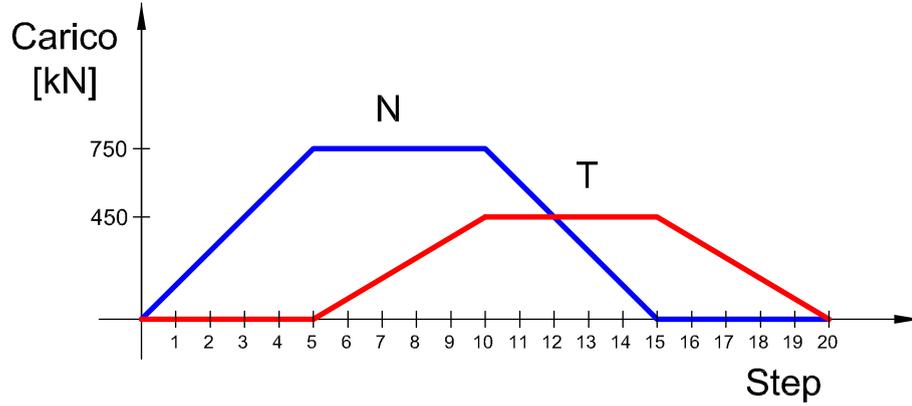


Figura 7.2: Storia di carico, nell'esempio analizzato

Per quanto riguarda la linearità elastica, i parametri E_3 e ν_{13} , qui semplicemente E e ν , sono quelli caratteristici di un terreno a 150/200m di profondità, con:

$$\begin{cases} E = 200\text{MPa} \\ \nu = 0.25 \end{cases} \quad (7.2)$$

Dalle (7.2), applicando la (2.18), con i parametri scelti (7.1), si ha il valore di C_m :

$$C_m(\sigma_z) = \frac{1}{E_3} \left(1 - \frac{1}{\beta} \frac{2\nu_{13}^2}{1 - \gamma\nu_{13}} \right) = 4.1667 \cdot 10^{-9} \text{Pa}^{-1} \quad (7.3)$$

Per il solo fatto di trovarsi a 150/200m di profondità, la faglia è soggetta a una tensione di compressione, qui stimata in $\sigma_x = \sigma_y = 1000\text{Pa}$ in direzione orizzontale, mentre in direzione verticale, si ha $\sigma_z = 3000\text{Pa}$. Il secondo valore, per com'è posizionata la faglia, non ha alcuna influenza, in quanto la normale è diretta lungo x .

Si assume, infatti, che il tensore delle tensioni, presente per il solo peso proprio del terreno soprastante, sia diagonale, ovvero che le direzioni scelte siano principali, in modo da poter calcolare facilmente le tensioni agenti sul piano di faglia. Una rotazione del sistema di riferimento scelto, rispetto a quello principale, nel piano orizzontale di normale z , comporta l'introduzione di un angolo ϑ , angolo tra il versore dell'asse x e il versore dell'asse principale e_1 , cui è associata σ_1 . Per semplificare le successive analisi, però, si assume $\vartheta = 0$, quindi sistema di riferimento coincidente con quello principale.

Il tensore delle tensioni è quindi:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \cos^2 \vartheta + \sigma_2 \sin^2 \vartheta & (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \vartheta \cos \vartheta & 0 \\ (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \vartheta \cos \vartheta & \sigma_1 \sin^2 \vartheta + \sigma_2 \cos^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

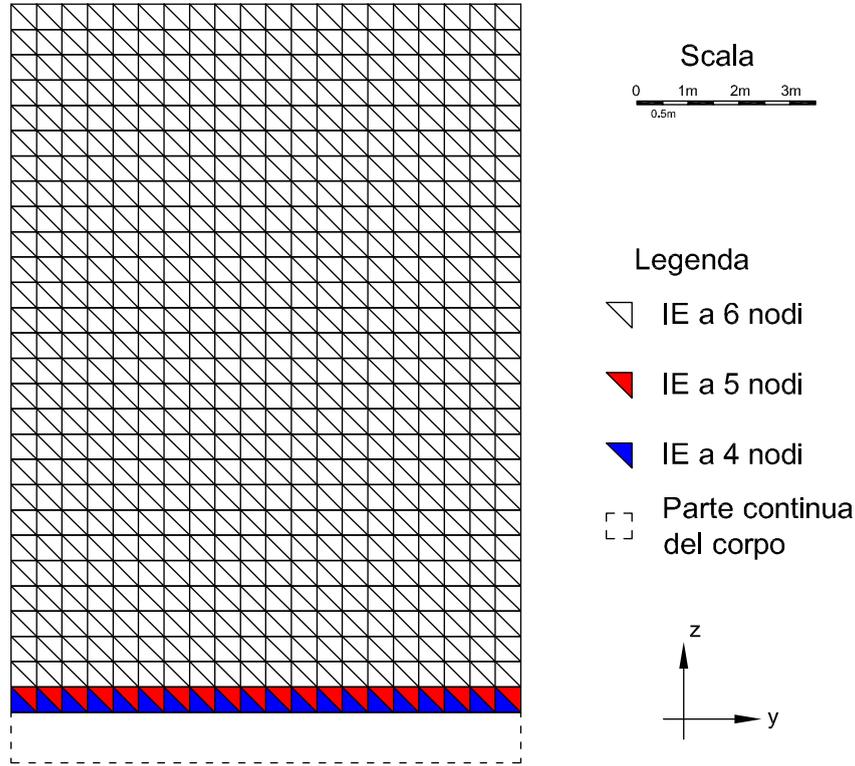


Figura 7.3: Posizione e caratteristiche degli elementi di interfaccia utilizzati

Nota la normale all'elemento di interfaccia, le tensioni si calcolano dalla (7.4), in base al *Tetraedro di Cauchy* [Corradi dell'Acqua, 2010], ottenendo:

$$\sigma_N = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x n_x \\ \sigma_y n_y \\ \sigma_z n_z \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

Nota la tensione σ_z , le tensioni σ_x e σ_y si hanno dalla (2.15), ricavata per un materiale isotropo. Con il valore scelto $\nu = 0.25$, si ha la seguente (7.6).

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_z = \frac{1}{3} \sigma_z \quad (7.6)$$

Ecco che si spiega il rapporto 3 a 1 tra i valori di σ_z e σ_x , prima presentati.

Nel caso in analisi, la normale agli elementi di interfaccia è, semplicemente:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Secondo le (7.5) e (7.7), si ha che la tensione agente sul piano di faglia è $\sigma_N = \sigma_x$.

Infine, per quanto riguarda i parametri caratteristici della faglia, si hanno i seguenti valori.

$$\begin{cases} \phi = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \\ c = 0 \end{cases} \quad (7.8)$$

7.1.2 Condizioni al contorno ed elementi di interfaccia

In merito alle condizioni al contorno, si noti che il corpo è composto, essenzialmente, da due parti, una carica e una scarica. La base di quella scarica, così come la “schiena” è vincolata: la base non può muoversi lungo z , mentre la “schiena” è bloccata lungo x . Anche la base della parte caricata è vincolata in z . Per quanto riguarda l’asse y , si vincolano solo alcuni nodi alla base del corpo.

Serve particolare cura nell’imporre le condizioni al contorno in nodi di elementi di interfaccia, in quanto si può incorrere nella singolarità dello jacobiano (5.8). Infatti, ponendosi nel caso esemplificativo di matrice di rotazione unitaria, ovvero di sistema di riferimento locale coincidente, almeno localmente, con quello globale, si ha la seguente espressione (7.9), rappresentante alcune righe della matrice \mathbf{B}^T .

$$\begin{bmatrix} \dots & & \textit{top} & & \dots & \textit{bottom} & & \dots \\ \dots & -A_e & 0 & 0 & \dots & A_e & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -A_e & 0 & \dots & 0 & A_e & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & -A_e & \dots & 0 & 0 & A_e & \dots \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Si noti che vincolando i gradi di libertà, lungo x , dei nodi corrispondenti, di top e bottom, si ha la seguente riduzione:

$$\begin{bmatrix} \dots & & \textit{top} & & \dots & \textit{bottom} & & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -A_e & 0 & \dots & 0 & A_e & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & -A_e & \dots & 0 & 0 & A_e & \dots \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

La (7.10) ha una riga nulla. Essendo la parte bassa a destra, dello jacobiano (5.8), nulla per costruzione, con elemento di faglia continuo, lo jacobiano ha una riga nulla. Dunque è singolare, causa vincoli mal posti, non causa vincoli mancanti.

Questo fatto si può facilmente spiegare fisicamente: il moltiplicatore associato alla coppia di nodi vincolati può assumere qualsiasi valore nell’intervallo $\lambda \in [-\infty, \infty]$, con corpo comunque equilibrato, in quanto i nodi sono bloccati. A livello matematico, questo

significa che il kernel della matrice non è vuoto, ossia la matrice ha determinante nullo e infinite soluzioni (ogni valore di λ).

Utilizzando funzioni base a supporto nodale, gli elementi a 5 e 4 nodi presentano, a tutti gli effetti, un contributo ridotto di, rispettivamente, 1 o 2 nodi. I moltiplicatori dei nodi non duplicati non esistono, così come le corrispondenti righe di \mathbf{B}^T . A livello implementativo, si è scelto di trattare questi elementi come quelli a 6 nodi, con la differenza che 1 o 2 nodi del bottom sono gli stessi del top. In seguito, al momento di attribuire il moltiplicatore al nodo, tali nodi non vengono presi in considerazione.

Con questo ragionamento, i nodi attivi, cui è associato un moltiplicatore di Lagrange e la possibilità di muoversi reciprocamente, nella faglia di figura 7.3, sono 588.

Per l'esempio in analisi, quindi, si è in grado di calcolare l'esatto ordine dello jacobiano (5.8). Infatti, i nodi sono 7749, mentre i moltiplicatori sono 588. A ogni incognita sono associati 3 gradi di libertà, quindi l'ordine è:

$$3 \cdot (n_n + n_\lambda) = 3 \cdot (7749 + 588) = 25011 \quad (7.11)$$

Trattandosi di una matrice di punto sella, con autovalori di segno opposto, non si può adottare, per la soluzione del sistema linearizzato (5.12), il gradiente coniugato preconditionato. Si deve ricorrere ad altri metodi proiettivi [Saad and Schultz, 1986] o a metodi risolutivi diretti. In questo lavoro di tesi, si usa il solutore *PARDISO* [Schenk and Gärtner, 2004], implementata nella libreria *Intel MKL*, che risolve il sistema in modo diretto.

La matrice (5.8) presenta, a corpo continuo, n_n autovalori positivi, poiché la matrice \mathbf{K} è simmetrica definita positiva. I restanti n_λ autovalori, associati ai moltiplicatori di Lagrange sono, invece, negativi.

7.2 Termini dello jacobiano in caso di scorrimento

Nel paragrafo 4.6.1 si è presentata l'aggiunta alla matrice di rigidezza, dovuta all'adozione del *Principio di Massima Dissipazione Plastica*, ma non si è approfondita la sua importanza. Si tratta, infatti, di un'analisi di sensibilità, che può essere realizzata solo in presenza di un caso applicativo.

Si è analizzata la storia di carico con e senza il contributo in analisi, ovvero la (4.37), giungendo alla conclusione che, senza il contributo aggiuntivo (4.37), non si arriva a convergenza, ossia non si trova una soluzione equilibrata e congruente. La tensione tangenziale limite τ_L è ripartita, in alternativa all'applicazione del principio di *Massima*

Dissipazione Plastica, in base all'ultimo aggiornamento degli spostamenti in possesso. Tuttavia, nel caso in cui lo scorrimento avvenga prevalentemente in una direzione, basta un piccolo spostamento, nella direzione ortogonale, per far variare la direzione della τ e provocare una serie di oscillazioni, che si autoalimentano, facendo divergere la soluzione.

Il contributo (4.37), invece, ha un effetto stabilizzante. Fino al momento dell'innescarsi dell'oscillazione, i due metodi presentano lo stesso andamento, ma dal punto critico, in poi, l'aggiunta di (4.37) rende l'algoritmo stabile e convergente.

Per capire l'effetto della rigidezza aggiunta dal *Principio di Massima Dissipazione Plastica*, si presenta un esempio numerico, che simula la situazione critica.

Si abbia uno spostamento, in metri, nel piano di faglia, finora cumulato, così ripartito:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Secondo la (7.12), il punto in analisi non presenta spostamenti nel top, mentre il bottom si è spostato solo in direzione T_1 . Proprio nella situazione in cui, in direzione T_2 , non si ha variazione di posizione, con il metodo semplificato sopra esposto, si genera, prima o poi, un piccolo spostamento in direzione T_2 che innesca delle oscillazioni, in grado di amplificarsi nel corso delle iterazioni non – lineari. La matrice che compare a secondo termine nella prima delle (5.7), considerando la (7.12), diventa la (7.13), in cui si sono assunti i valore $\tau_L = 5000\text{N}$ e $A_\lambda = 1\text{m}^2$.

$$\tau_L A_\lambda \frac{\mathbf{H}\mathbf{u}^T\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{H}\mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{H}}{(\mathbf{u}^T\mathbf{H}\mathbf{u})^{\frac{3}{2}}} = \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 & -5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5000 & 0 & 0 & -5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5000 & 0 & 0 & 5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5000 & 0 & 0 & 5000 \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

Si ipotizza, ora, un incremento di spostamento uguale nelle direzioni T_1 e T_2 , critico per

il metodo semplificato, pari a:

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

Il prodotto tra la (7.13) e la (7.12) offre le forze esterne, che provocherebbero tale incremento di spostamento, in assenza di altre fonti di rigidità.

$$\mathbf{f}_{\Delta \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 & -5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5000 & 0 & 0 & -5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5000 & 0 & 0 & 5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5000 & 0 & 0 & 5000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -500 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

Dalla (7.15), si ha che le forze esterne, in grado di provocare lo spostamento (7.14), sono nulle in direzione T_1 , ma pari a $f_{T_2} = 500\text{N}$, nell'altra direzione. Il rapporto tra le forze, nel caso in analisi, tende a $+\infty$, indicando come un incremento di spostamento in direzione T_2 sia estremamente sfavorito, a livello energetico.

Questo effetto è stabilizzante e tende a far convergere l'algoritmo di Newton – Raphson, che, invece, con il metodo semplificato di ripartizione della τ_L , non converge. Sperimentalmente, gli ordini di grandezza dei termini della matrice di rigidità \mathbf{K} sono gli stessi di quelli dovuti al contributo della (4.37).

Si calcola, ora, il prodotto matriciale che compare nella seconda derivata delle (5.7), ovvero il contributo del *Principio di Massima Dissipazione Plastica* nella posizione (1, 2) dello jacobiano (5.8).

$$\mathbf{u} \mathbf{v}_n^T = \begin{bmatrix} u_{T,x} \\ u_{T,y} \\ u_{T,z} \\ u_{B,x} \\ u_{B,y} \\ u_{B,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tan \phi & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{T,x} \tan \phi & 0 & 0 \\ -u_{T,y} \tan \phi & 0 & 0 \\ -u_{T,z} \tan \phi & 0 & 0 \\ -u_{B,x} \tan \phi & 0 & 0 \\ -u_{B,y} \tan \phi & 0 & 0 \\ -u_{B,z} \tan \phi & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Huv}_n^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u_{T,x} \tan \phi & 0 & 0 \\ -u_{T,y} \tan \phi & 0 & 0 \\ -u_{T,z} \tan \phi & 0 & 0 \\ -u_{B,x} \tan \phi & 0 & 0 \\ -u_{B,y} \tan \phi & 0 & 0 \\ -u_{B,z} \tan \phi & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (u_{B,y} - u_{T,y}) \tan \phi & 0 & 0 \\ (u_{B,z} - u_{T,z}) \tan \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -(u_{B,y} - u_{T,y}) \tan \phi & 0 & 0 \\ -(u_{B,z} - u_{T,z}) \tan \phi & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.17}
\end{aligned}$$

Si noti che nella (7.17) sono nulli i termini delle colonne corrispondenti alle componenti tangenziali al piano di faglia del moltiplicatore di Lagrange. Se tali termini fossero non nulli, andrebbero comunque annullati, in quanto le equazioni corrispondenti ai gradi di libertà T_1 e T_2 vengono eliminate dal sistema.

Nel caso in esame, la (7.17), da dividersi per $\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u}}$ e moltiplicarsi per A_λ , diventa la seguente, in cui si ricorda che l'angolo d'attrito scelto è $\phi = 30^\circ$:

$$\frac{A_\lambda}{\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u}}} \mathbf{Huv}_n^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.5774 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.5774 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.18}$$

Si ipotizzi un incremento di tensione normale pari all'1% della tensione normale attuale, pari a $\sigma_N = 8660\text{Pa}$, che offre $\tau_L = 5000\text{Pa}$. L'incremento è pari a $\Delta\sigma_N = 86.6\text{Pa}$. Il sistema di forze esterne, che dovrebbe equilibrare tale incremento di forza interna, risulta

dal prodotto:

$$\mathbf{f}_{\Delta\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.5774 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.5774 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 86.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

Dalla (7.19) si capisce come, per equilibrare un incremento di tensione normale al piano di faglia, in assenza di altre fonti di rigidità, servirebbe una forza esterna di $f_{\Delta\lambda} = 50\text{N}$, applicata in verso opposto nei nodi di top e bottom, nella direzione T_1 , in cui si è accumulato tutto lo spostamento nel piano di faglia, come dalla (7.12).

7.3 Trattamento numerico delle condizioni di vincolo

Quando un nodo di faglia registra una tensione tangenziale che viola il criterio di Mohr – Coulomb (4.14) viene meno la continuità, con conseguente libertà di movimento relativo tra i nodi di top e bottom. Tendendo a ∞ il contributo, dovuto alla (4.37), che compare nello jacobiano (5.8) quando $\Delta\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$, si ha che tale aggiunta non si può assemblare per ogni nodo aperto a taglio, ma solo per le coppie di nodi che hanno maturato uno scorrimento relativo significativo. Serve, quindi, scegliere una tolleranza, oltre la quale calcolare il contributo. Si preferisce rendere adimensionale tale criterio, assemblando l'aggiunta se il movimento relativo supera una data parte del movimento medio, accumulato nel time step corrente, dei nodi di top e bottom. In questo esempio, la tolleranza adimensionale è posta pari a 5%.

La condizione $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$ si verifica regolarmente alla prima apertura, nel corso delle iterazioni non – lineari, di un elemento continuo a taglio.

Una volta aperto a taglio, un nodo può richiudersi solo se torna nella posizione iniziale, ovvero se, nel corso delle iterazioni non – lineari, si registrano, con lo stesso criterio di assemblaggio dell'aggiunta allo jacobiano (5.8), sovrapposizioni tra i nodi di top e bottom, con tensioni compatibili con il criterio di rottura scelto.

Nel caso in cui si registri una compenetrazione di due nodi, liberi di muoversi, serve ripristinare il contatto. Si noti che questo è l'unico modo per riattivare il contatto, in seguito alla sua rottura, in quanto, una volta liberati i nodi di top e bottom, la tensione normale sempre vale $\sigma_N = 0$, quindi non si può rilevare una tensione di compressione.

Se i due nodi si compenetrano, quindi, si riattivano le tre componenti del rispettivo moltiplicatore, a sforzo normale e a taglio.

Come si fa per le tensioni tangenziali (si veda il paragrafo 6.3), anche in questo caso il criterio viene rilassato numericamente, al fine di mantenere lo stato attuale dei nodi di Lagrange. Quindi, se un nodo è aperto a sforzo normale, si accettano anche piccole compenetrazioni $\Delta u_n < -toll_{sc}$, mentre se è chiuso, si tollerano piccole tensioni di trazione $\sigma_N > toll_{tens}$. Nell'esempio in analisi, il valore di tolleranza sugli spostamenti è $toll_{sc} = 10^{-8}$, mentre quella sulle tensioni è $toll_{tens} = 10^{-6}$.

Tale compenetrazione viene corretta, nelle iterazioni non – lineari, grazie al contributo della seconda parte del residuo, nel sistema di Newton – Raphson, ovvero della (5.9). La parte $-\mathbf{B}^T (\mathbf{u}_{t+1}^i - \mathbf{u}_t)$, infatti, impone la continuità, finché i nodi sono continui, e corregge le posizioni errate, che si realizzano in seguito all'imposizione di un vincolo, precedentemente assente.

7.4 Proprietà della matrice e convergenza

In figura 7.4, si rappresenta la matrice (5.8), ricavata per la prima iterazione non – lineare del primo time step. Essendo il corpo continuo, la matrice (5.8) è, in realtà, la (5.14). Si evidenziano facilmente i 4 blocchi, ossia il blocco (1, 1), matrice di rigidità tangente \mathbf{K} , il blocco (1, 2), matrice di rotazione e integrazione sull'area \mathbf{B} , il blocco (2, 1), matrice \mathbf{B}^T , trasposta di \mathbf{B} , non essendoci elementi che scorrono a taglio, e, infine, il blocco nullo (2, 2).

Nell'esempio in analisi, ponendo come numero limite alle iterazioni non – lineari di Newton – Raphson $n_{NR} = 25$, si arriva a convergenza in quasi tutti i time step. Si ricorda che la tolleranza di uscita è $toll = 10^{-8}$, applicata alla norma della prima parte del termine noto, ovvero alle forze sbilanciate, normalizzato al valore dello stesso a inizio time step. Nel caso non si raggiunga la convergenza, si dimezza automaticamente il time step, con una procedura di *back stepping*, in modo da trovare la massima dimensione dell'intervallo che offre convergenza. La tabella 7.1 mostra il numero di iterazioni e il residuo relativo di uscita per ogni time step. Si può notare che il *back stepping* si è reso necessario solo al 19-esimo time step.

Finché il corpo è continuo, ovvero nei primi 6 time step, essendo lo jacobiano (5.8) costante, il problema è lineare e la convergenza si raggiunge in 2 iterazioni, come da figura 7.5a.

Dalla tabella 7.1, si può notare come in una decina di iterazioni si raggiungano sempre residui inferiori alla tolleranza, quindi trovi la soluzione, equilibrata e congruente.

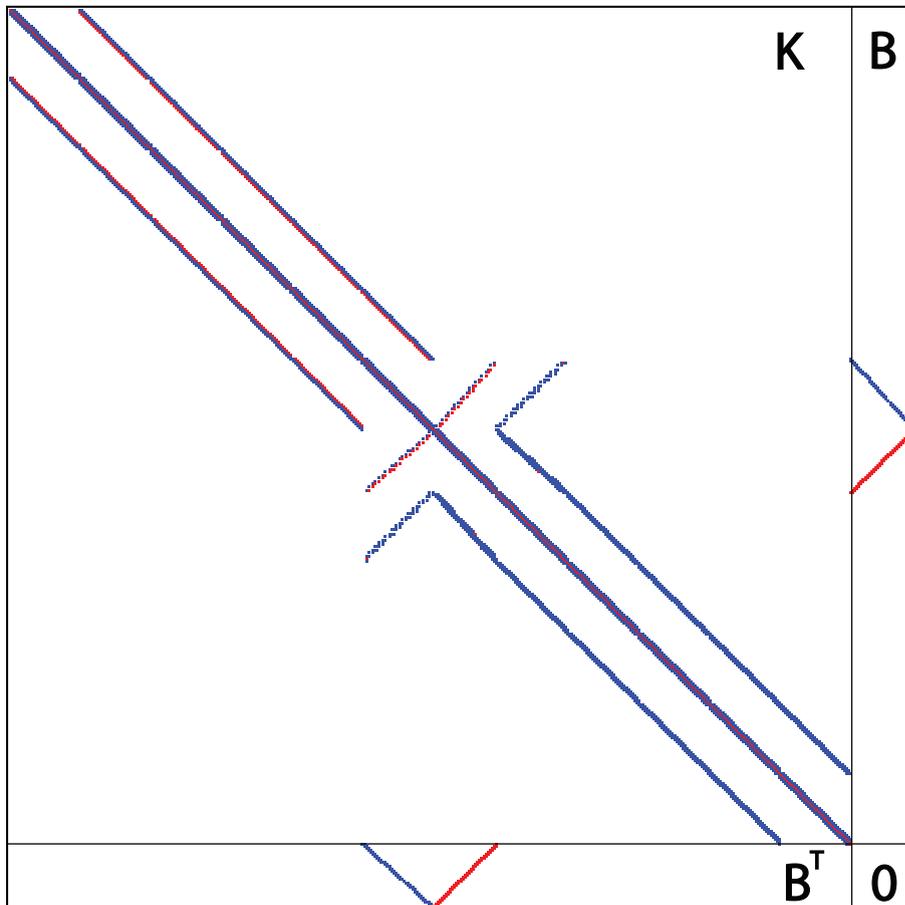


Figura 7.4: Jacobiano dell'esempio in analisi, a faglia continua. Si sono indicati i quattro blocchi che compongono la matrice. La matrice è simmetrica in quanto nessun elemento della faglia è plasticizzato

Dalla tabella 7.2, si ha che gli elementi aperti a taglio diminuiscono bruscamente, dal time step 15 al time step 16, causa l'incremento di carico, che varia segno. Il numero di nodi attivi a taglio, successivamente, invece, aumenta, perché, a fronte di uno sforzo normale costante, il carico verticale, che equilibra l'integrale delle tensioni viene meno, quindi il corpo tende a tornare allo stato originario, riattivano sempre più elementi a scorrimento.

7.4.1 Andamento della convergenza

Fintanto che varia il numero di elementi aperti a taglio e sforzo normale, vi è una discontinuità nello jacobiano, poiché cambia il numero di incognite, e non si può avere convergenza quadratica, ma solo una variazione del residuo, che non segue alcuna regola. Nel momento in cui si stabilizza il numero di elementi aperti a sforzo normale e a scorrimento, resta la

Time step	Numero di iterazioni	Residuo di uscita
1	2	2.4070E-14
2	2	2.7780E-14
3	2	3.2025E-14
4	2	3.7426E-14
5	2	4.4517E-14
6	2	7.7440E-14
7	7	6.5784E-10
8	11	1.7752E-10
9	13	1.7813E-09
10	9	4.1869E-10
11	9	4.3192E-09
12	12	1.0943E-09
13	11	3.1966E-12
14	9	4.5985E-13
15	6	2.2413E-13
16	9	4.0196E-09
17	10	1.8731E-09
18	11	7.4800E-11
19	9 / 10	1.5538E-13 / 6.2558E-11
20	6	5.0760E-11

Tabella 7.1: Numero di iterazioni e residuo di uscita, per tutti i time step della simulazione

non – linearità, dovuta all’applicazione del *Principio di Massima Dissipazione Plastica*, che comporta la correzione dello jacobiano (5.14), derivata da (4.37). Da questo punto, si innesca la convergenza quadratica, che può essere persa solo a causa di elementi che cambiano stato.

Nelle figure 7.5 e 7.6 si riportano tutti i profili di convergenza dei vari time step. Si nota facilmente la convergenza quadratica, tipica del metodo iterativo di Newton – Raphson. Per il solo time step 19 si è reso necessario un back step; in altri termini, per arrivare a convergenza, è stato necessario suddividere in due parti uguali l’incremento di carico, simulando due istanti temporali $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \frac{\Delta t}{2}$.

Nei primi 6 time step, essendo il corpo continuo, il problema è lineare e la convergenza si ottiene in 2 iterazioni. Non si rappresentano tutti i profili di convergenza per i primi 6 time step, essendo tutti uguali, ma soltanto quello del primo time step.

7.5 Risultati

Si riportano, nelle seguenti figure 7.7, 7.8, 7.9 e 7.10, le varie deformate, amplificate di un fattore $1.5 \cdot 10^3$, per facilitare la comprensione, per tutti i time step in analisi.

Time step	Nodi che scorrono a taglio	Nodi aperti a sforzo normale
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	42	0
8	103	0
9	168	0
10	218	0
11	277	0
12	361	0
13	487	0
14	588	0
15	588	0
16	57	0
17	324	0
18	463	0
19	567	0
20	588	0

Tabella 7.2: Numero di nodi attivi a taglio e sforzo normale, per tutti i time step della simulazione

Successivamente, nelle figure 7.11, 7.12, 7.13 e 7.14, si illustrano gli andamenti della tensione normale, agente sul piano di faglia, nel corso della simulazione.

Così come per le tensioni normali σ_N , si riporta l'andamento, sul piano di faglia, del modulo delle tensioni tangenziali $|\tau| = \sqrt{\tau_{T_1}^2 + \tau_{T_2}^2}$, nelle figure 7.15, 7.16, 7.17 e 7.18.

Dalle immagini delle deformate, si capisce subito come, nonostante il materiale sia lineare elastico, la configurazione finale, con pari carico di quella iniziale, in particolar modo scarica, risulti diversa da quella di partenza. Ciò causa la non – linearità introdotta dalle faglie, ossia dalle disequazioni (4.11), (4.12) e (4.13).

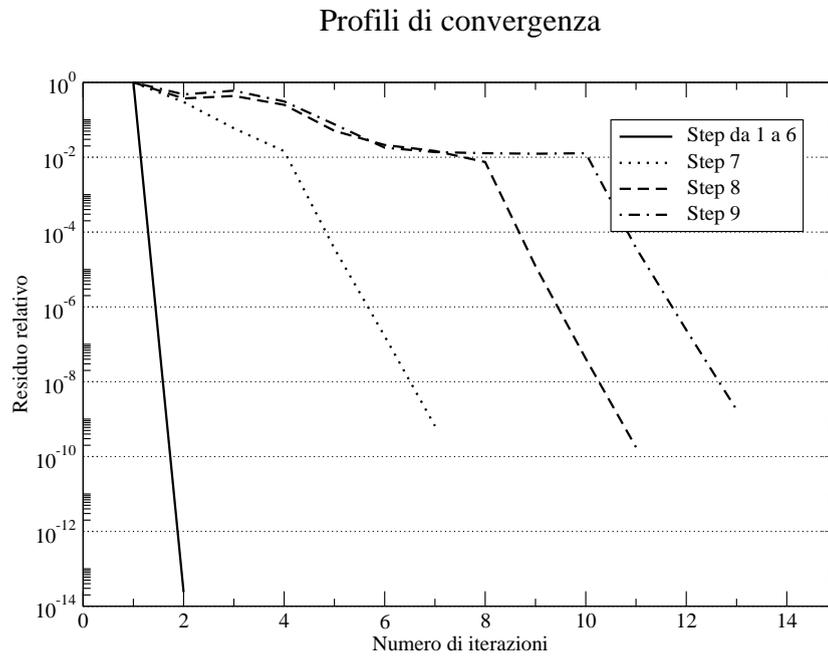
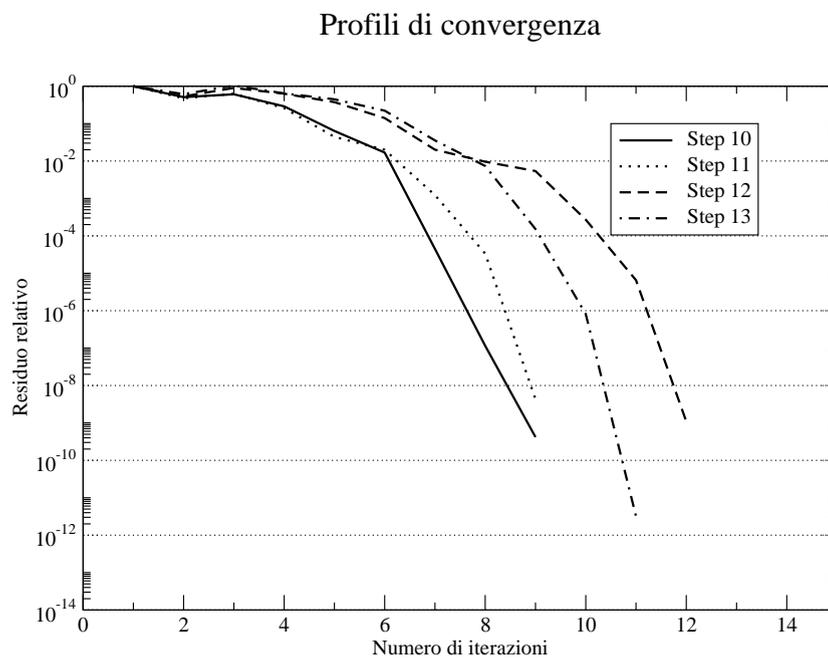
(a) *Time step 1/6-9.*(b) *Time step 10-13.*

Figura 7.5: Profili di convergenza, per la prima parte della simulazione

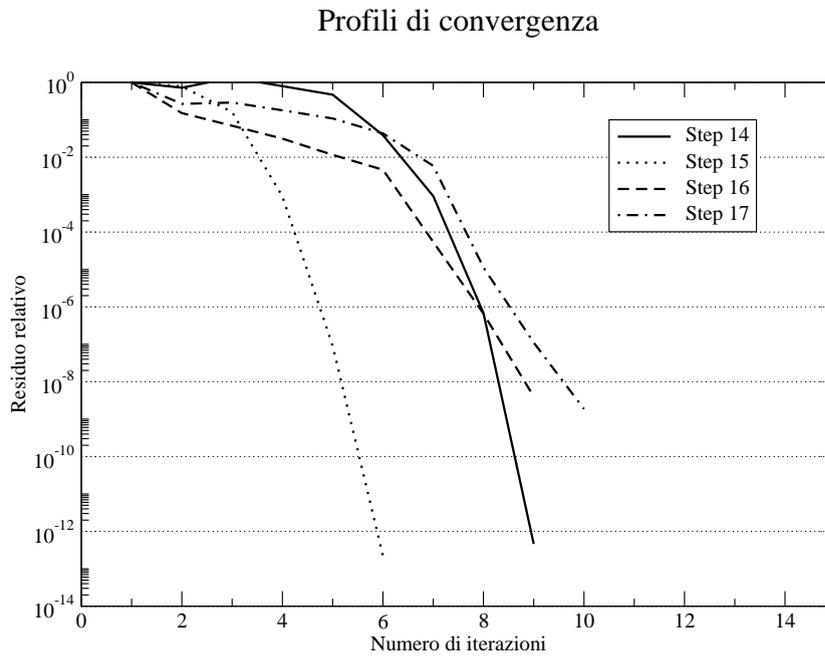
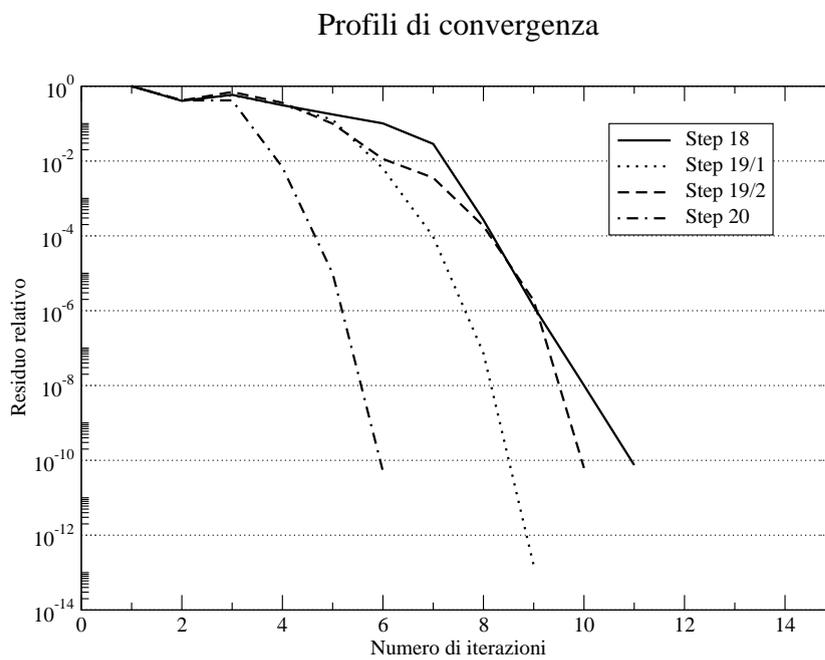
(a) *Time step 14-17.*(b) *Time step 18-20.*

Figura 7.6: Profili di convergenza, per la seconda parte della simulazione

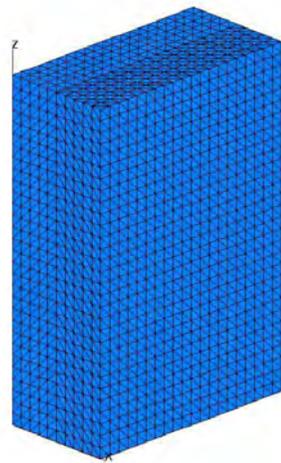
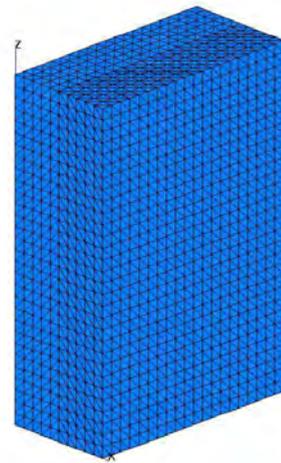
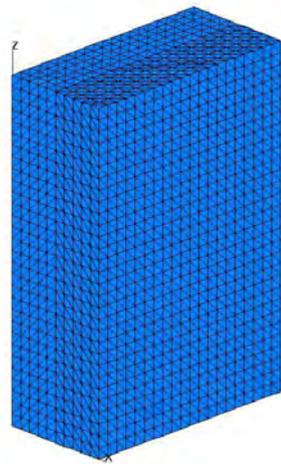
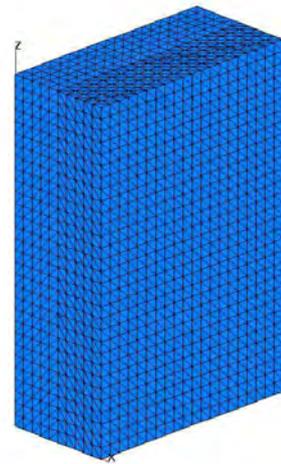
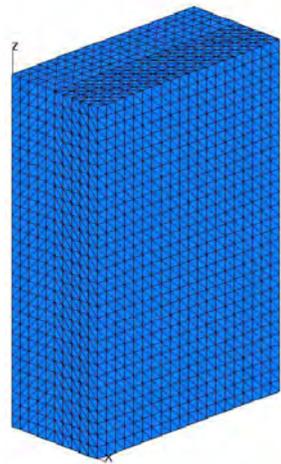
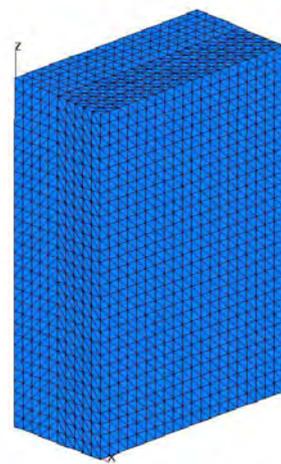
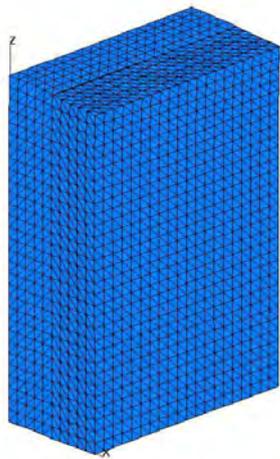
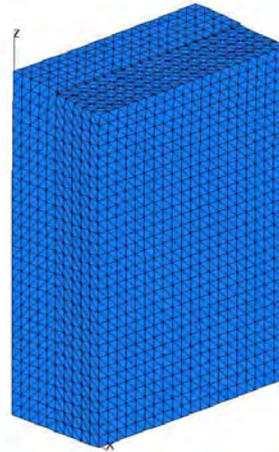
(a) *Time step 1.*(b) *Time step 2.*(c) *Time step 3.*(d) *Time step 4.*(e) *Time step 5.*(f) *Time step 6.*

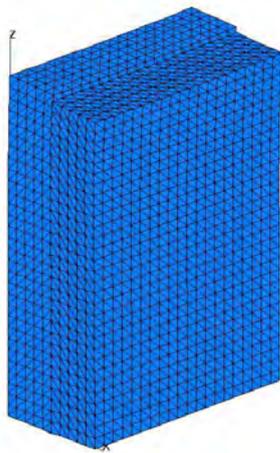
Figura 7.7: Andamento della deformata



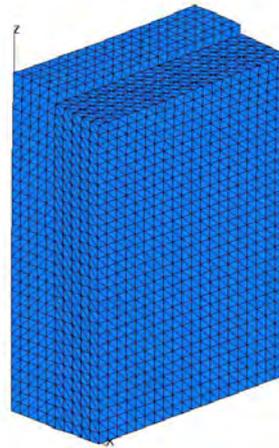
(a) *Time step 7.*



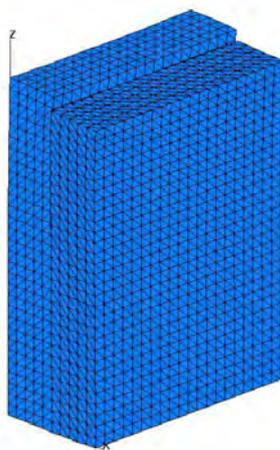
(b) *Time step 8.*



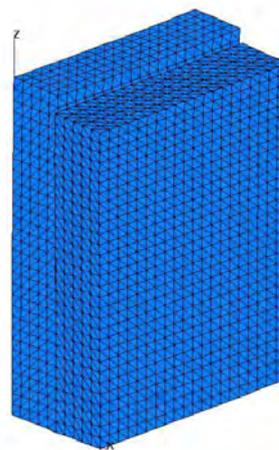
(c) *Time step 9.*



(d) *Time step 10.*

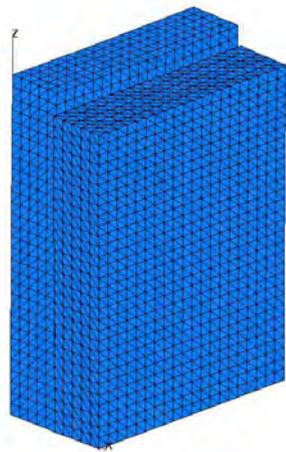


(e) *Time step 11.*

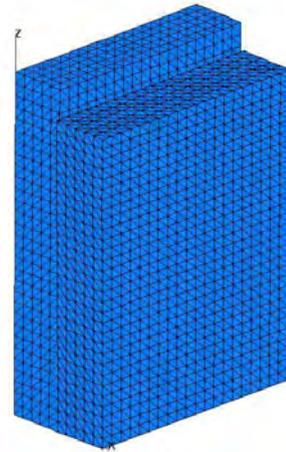


(f) *Time step 12.*

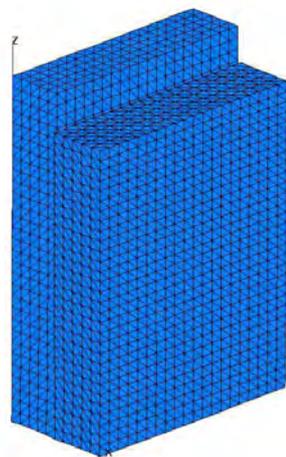
Figura 7.8: Andamento della deformatata



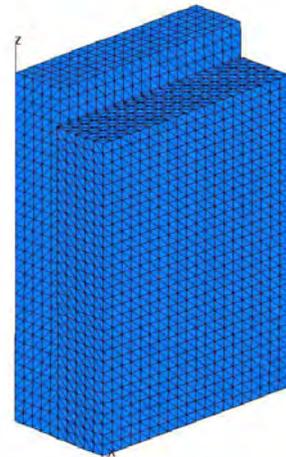
(a) *Time step 13.*



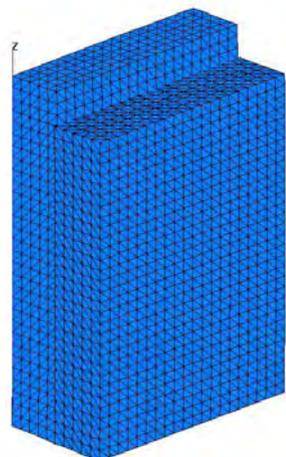
(b) *Time step 14.*



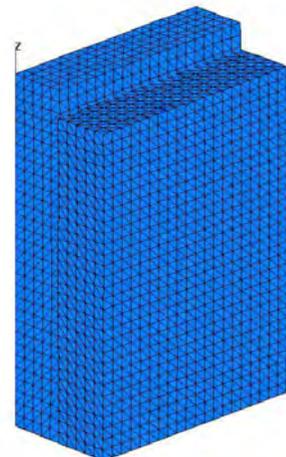
(c) *Time step 15.*



(d) *Time step 16.*

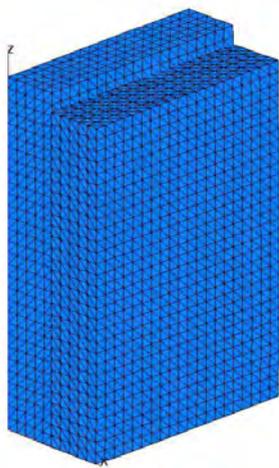


(e) *Time step 17.*

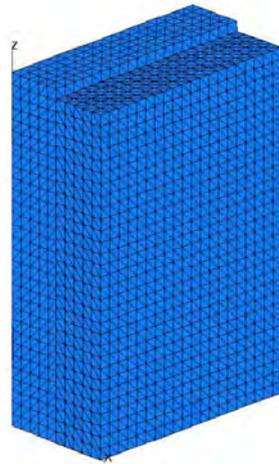


(f) *Time step 18.*

Figura 7.9: Andamento della deformatata

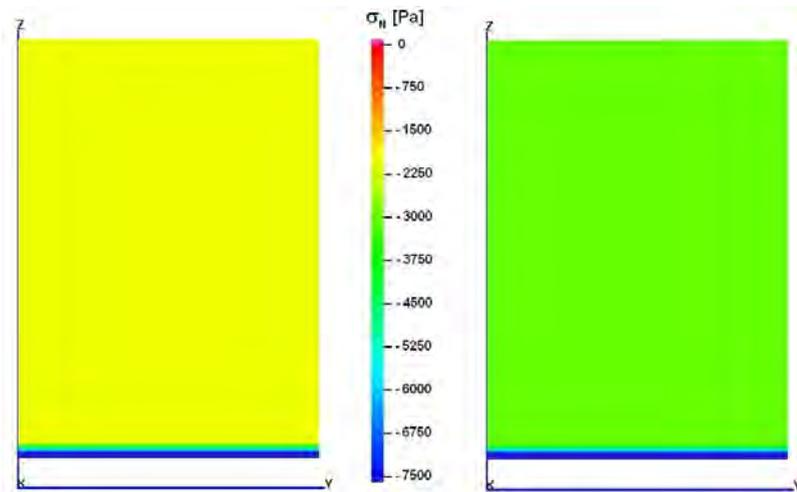


(a) *Time step 19.*

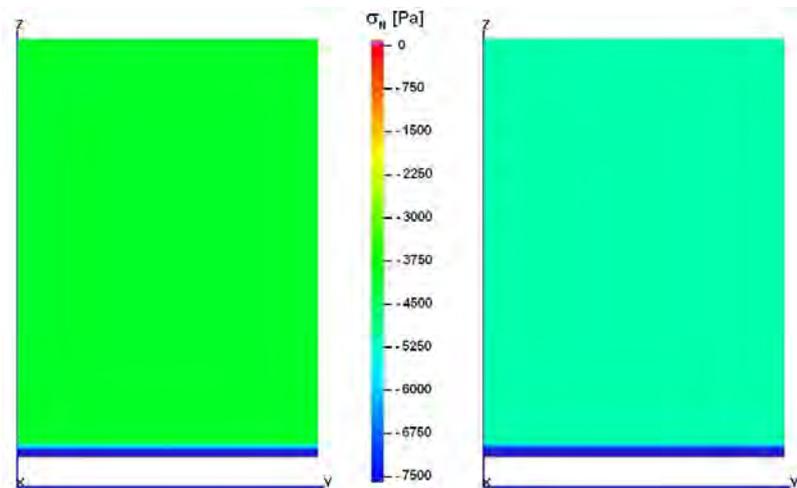


(b) *Time step 20.*

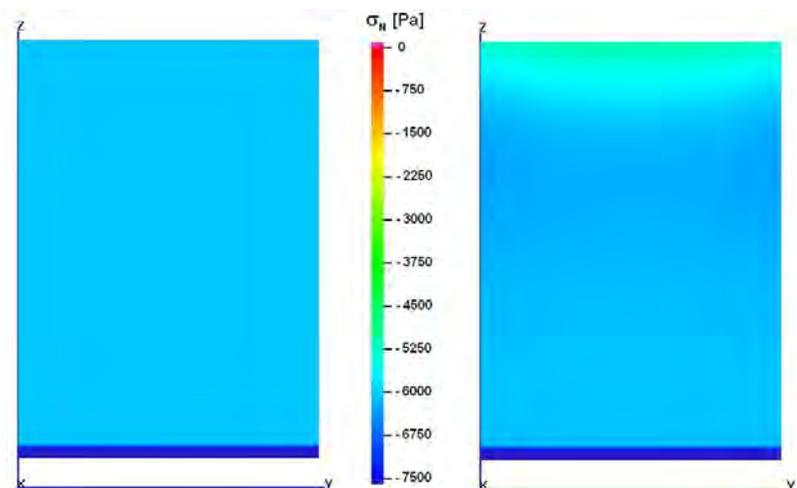
Figura 7.10: Andamento della deformata



(a) Time step 1, 2.



(b) Time step 3, 4.



(c) Time step 5, 6.

Figura 7.11: Andamento della tensione normale

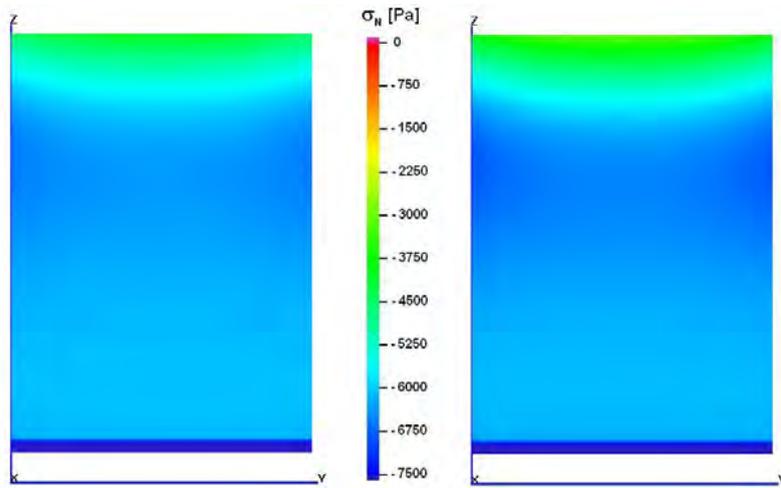
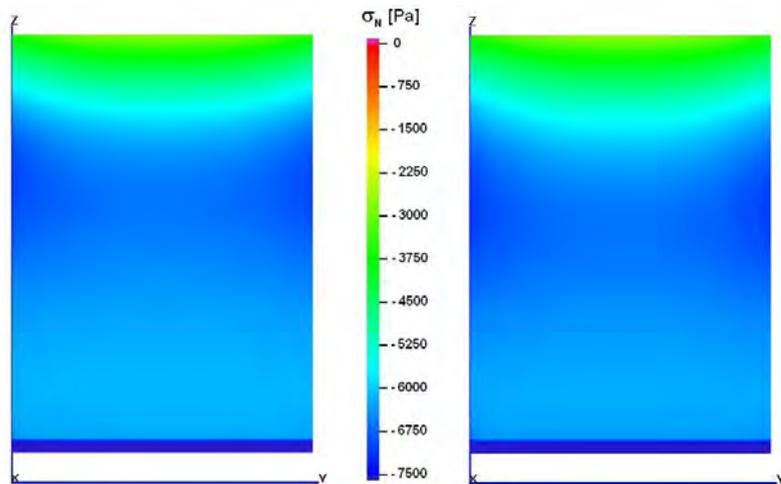
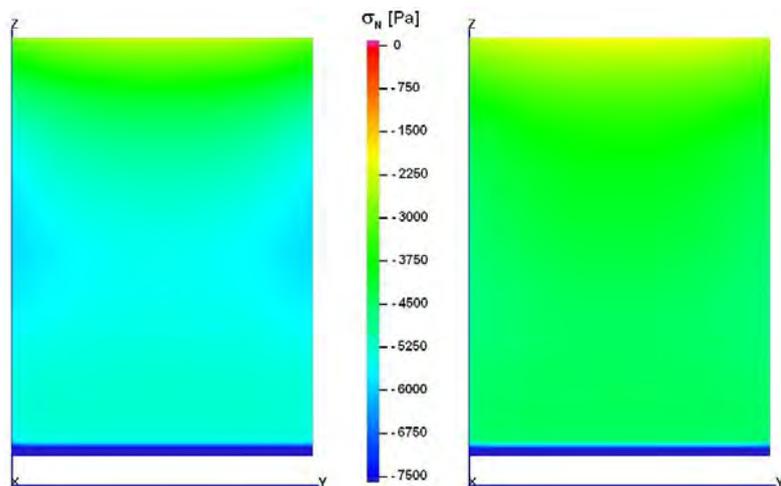
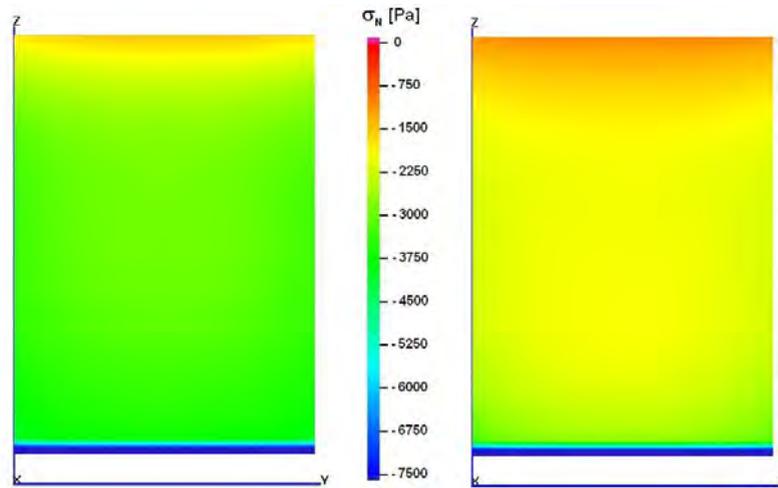
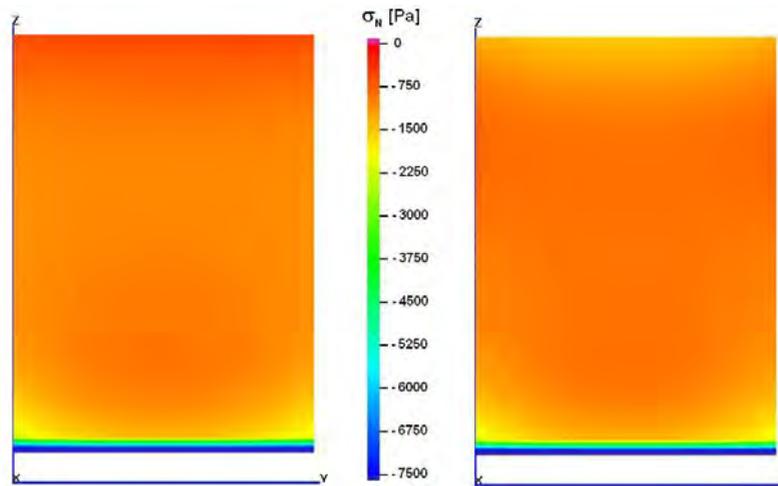
(a) *Time step 7, 8.*(b) *Time step 9, 10.*(c) *Time step 11, 12.*

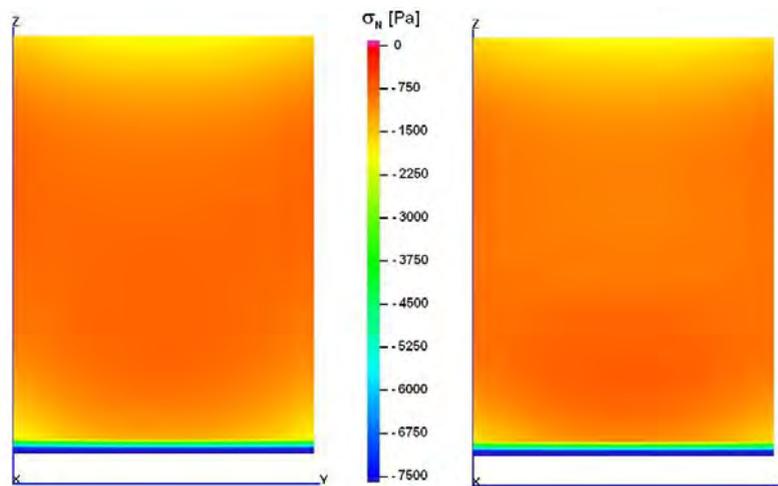
Figura 7.12: Andamento della tensione normale



(a) Time step 13, 14.

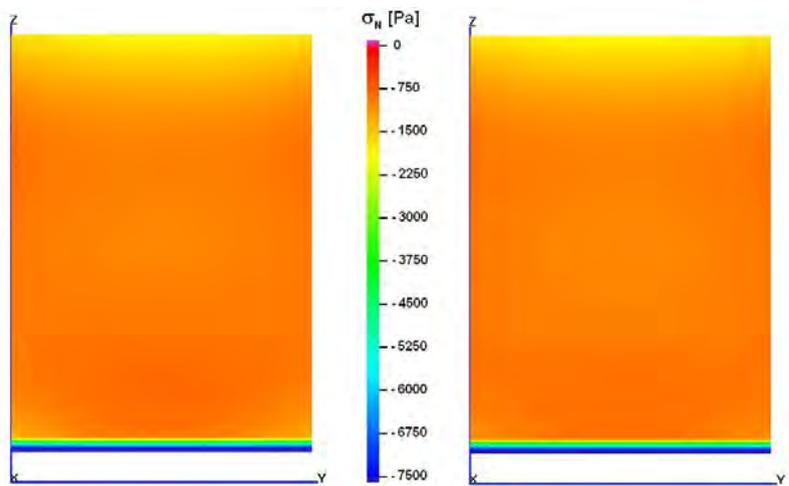


(b) Time step 15, 16.



(c) Time step 17, 18.

Figura 7.13: Andamento della tensione normale



(a) *Time step 19, 20.*

Figura 7.14: Andamento della tensione normale

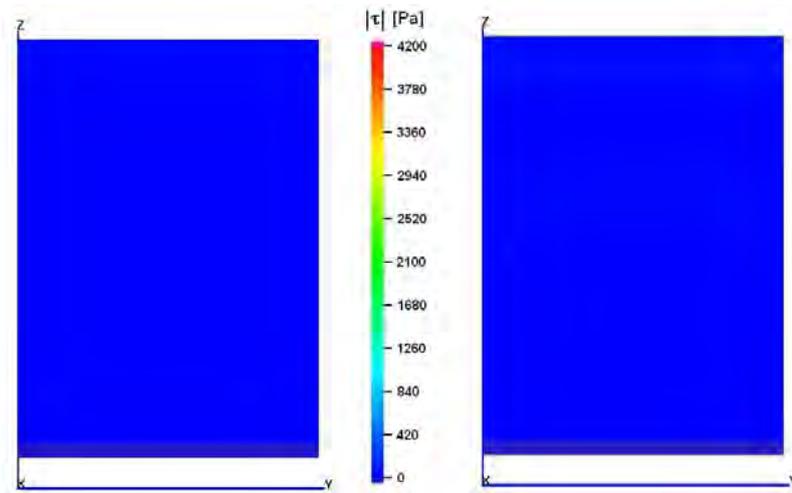
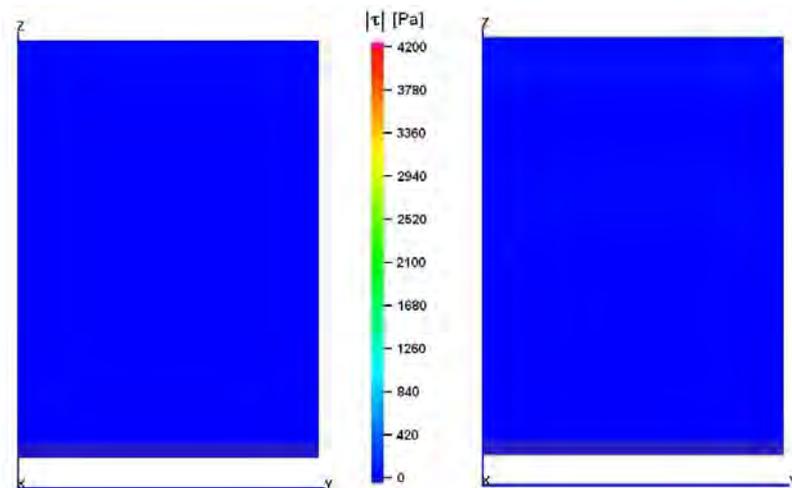
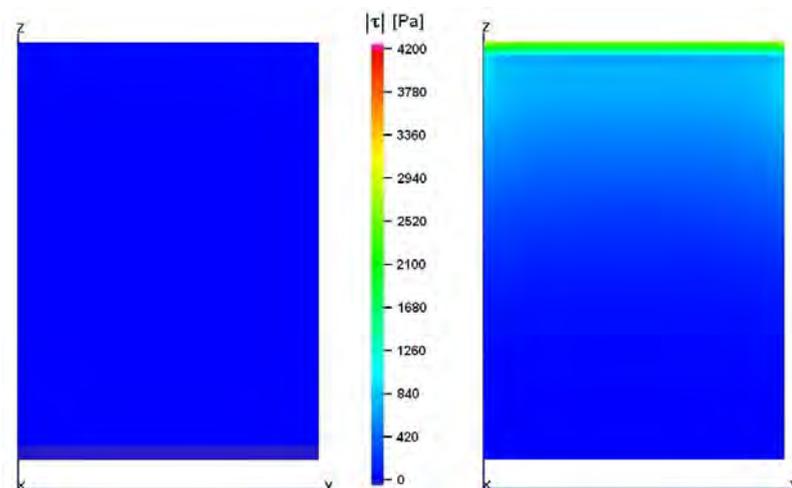
(a) *Time step 1, 2.*(b) *Time step 3, 4.*(c) *Time step 5, 6.*

Figura 7.15: Andamento del modulo della tensione tangenziale

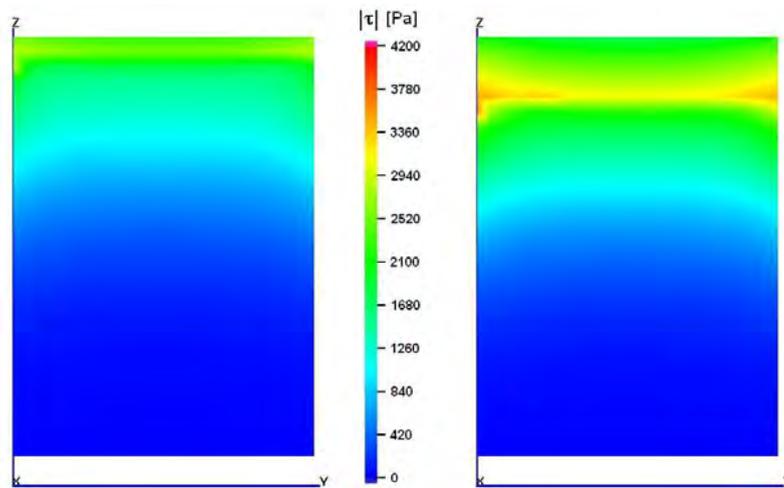
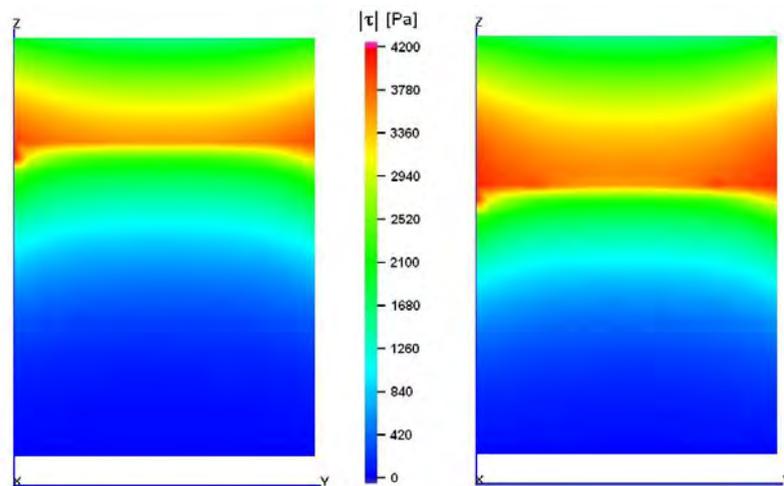
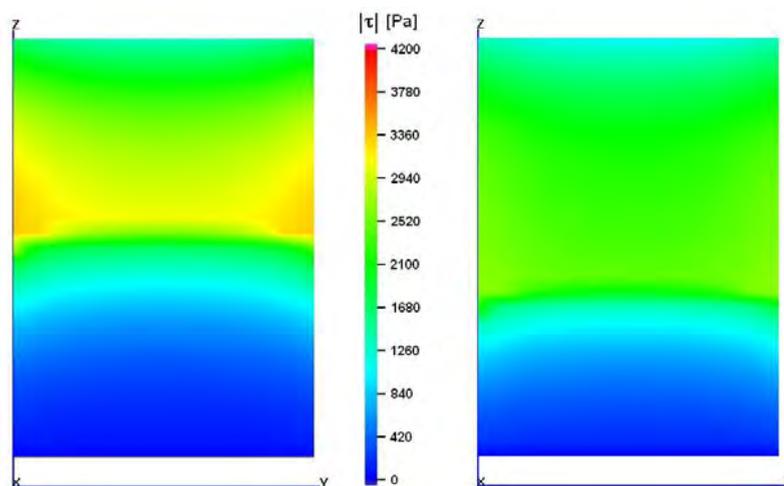
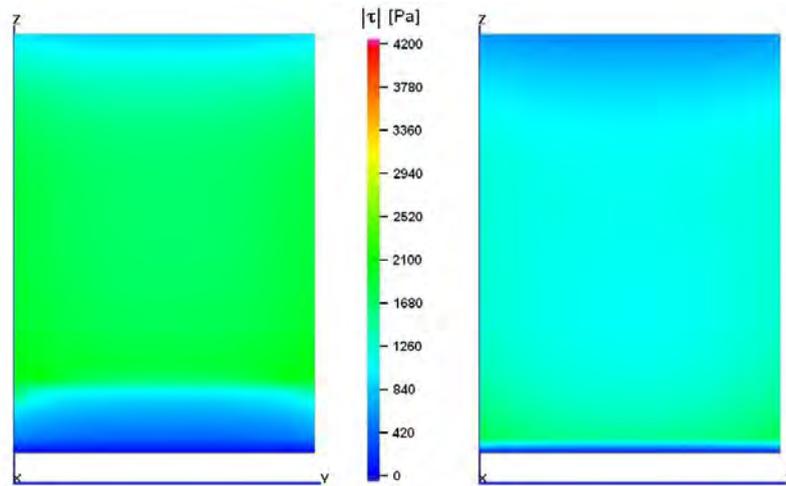
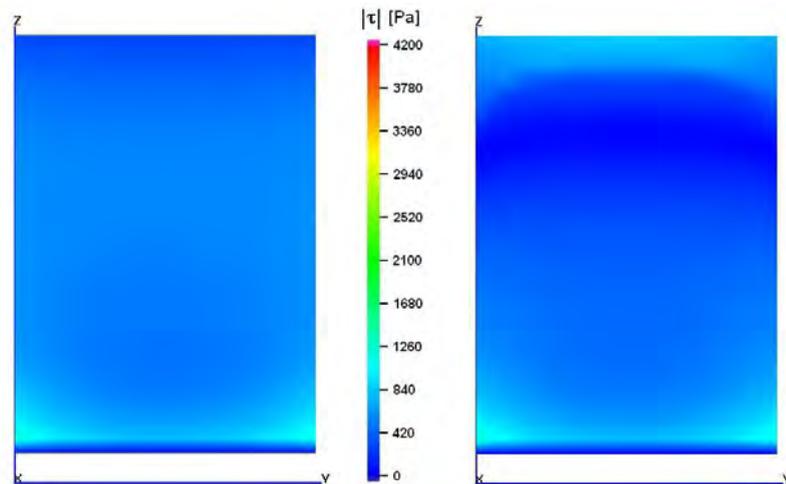
(a) *Time step 7, 8.*(b) *Time step 9, 10.*(c) *Time step 11, 12.*

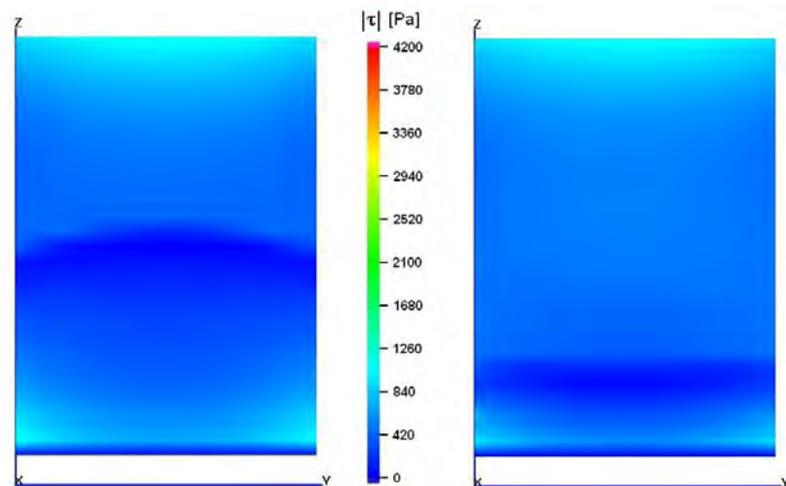
Figura 7.16: Andamento del modulo della tensione tangenziale



(a) Time step 13, 14.

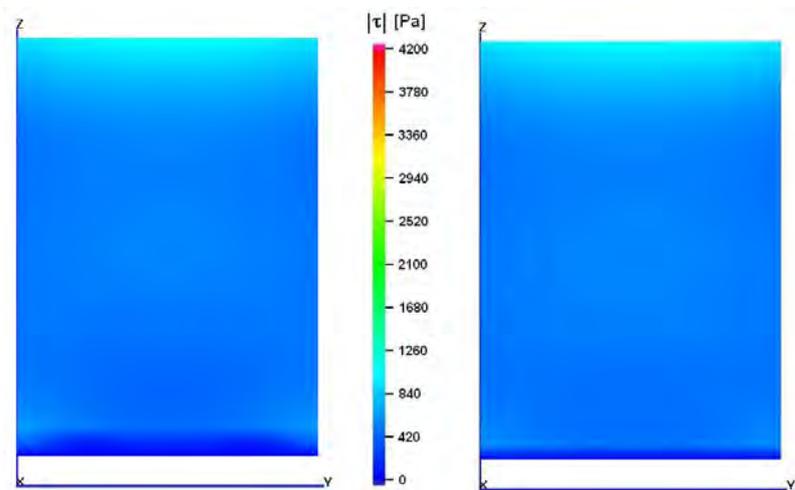


(b) Time step 15, 16.



(c) Time step 17, 18.

Figura 7.17: Andamento del modulo della tensione tangenziale



(a) *Time step 19, 20.*

Figura 7.18: Andamento del modulo della tensione tangenziale

7.6 Apertura della faglia

Per indagare a fondo il comportamento degli elementi di interfaccia, alla stessa mesh appena analizzata, rappresentata in figura 7.1, si è ridotta, di un fattore 10, la tensione litostatica. La storia di carico è sempre quella di figura 7.2. Passando da $\sigma_z = 3000\text{Pa}$ e $\sigma_x = \sigma_y = 1000\text{Pa}$ a $\sigma_z = 300\text{Pa}$ e $\sigma_x = \sigma_y = 100\text{Pa}$, la faglia, nella seconda parte della simulazione, si apre. In tabella 7.3, si riportano gli elementi aperti a taglio e a sforzo normale, per tutti i 20 time step.

Time step	Nodi che scorrono a taglio	Nodi aperti a sforzo normale
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	21	0
7	54	0
8	128	0
9	208	0
10	274	0
11	358	0
12	479	0
13	588	0
14	588	0
15	588	184
16	588	44
17	588	39
18	588	50
19	588	52
20	588	57

Tabella 7.3: Numero di nodi attivi a taglio e sforzo normale, per tutti i time step della simulazione a tensione litostatica ridotta

Partendo dalla tabella 7.3, si può commentare il comportamento del corpo e, in particolare, della faglia. Finché lo sforzo normale è sufficiente per tener chiusa la faglia, il comportamento è sostanzialmente identico a quello della precedente simulazione, con tensione litostatica superiore, riportato in tabella 7.2. Ciò causa lo sforzo normale esterno ben superiore alla tensione litostatica. Quando viene meno il carico orizzontale esterno, lasciando agente sulla faglia il solo stato tensionale preesistente, però, il comportamento, rispetto alla precedente simulazione, si differenzia molto. Infatti, tutti gli elementi sono in scorrimento nel piano e alcuni, in numero via via crescente, sono aperti.

Per arrivare a convergenza, in alcuni time step, si deve ricorrere al *back stepping*, dimezzando l'incremento di carico. I time step interessati da questa procedura di adattamento dell'intervallo di carico sono il 7°, l'11° e il 12°. La convergenza è quadratica, anche in caso di elementi aperti.

Come per la precedente simulazione, si riportano le rappresentazioni grafiche delle deformate, amplificate di un fattore $1.5 \cdot 10^3$, nelle figure 7.19, 7.20, 7.21 e 7.22. Dalla seconda delle 7.22, si nota immediatamente come, rispetto all'ultimo step della simulazione precedente, figura 7.10, la configurazione finale sia praticamente identica a quella iniziale. Riducendo lo sforzo normale, infatti, si riduce anche la non – linearità dovuta alle faglie.

Nelle figure 7.23, 7.24, 7.25 e 7.26, si riportano gli andamenti della tensione normale, sul piano di faglia. Si noti come, negli ultimi 5 time step, tutta la faglia sia, essenzialmente, scarica. Infine, nelle figure 7.27, 7.28, 7.29 e 7.30, si rappresenta il modulo della tensione tangenziale. Le scale a colori delle tensioni sono le stesse delle figure relative al precedente esempio, così da rendere più semplice un confronto.

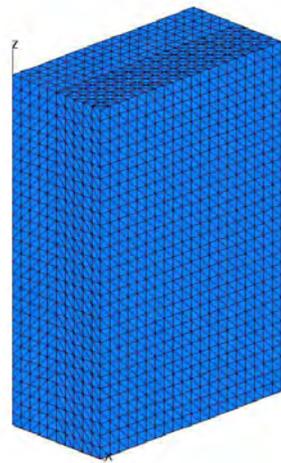
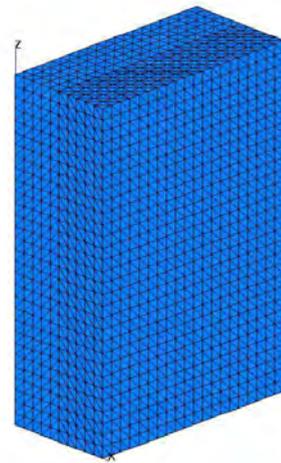
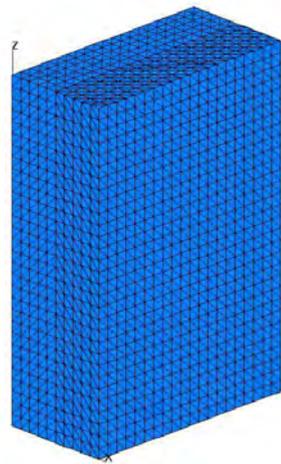
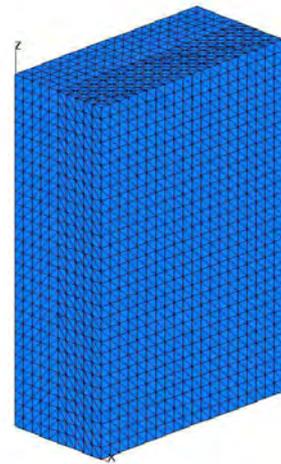
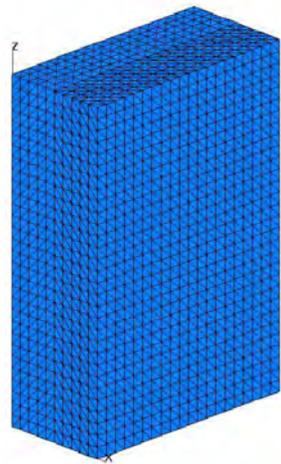
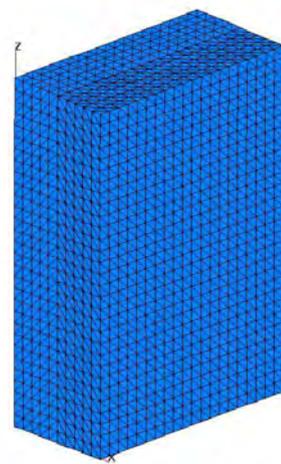
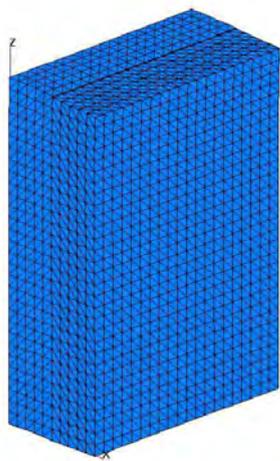
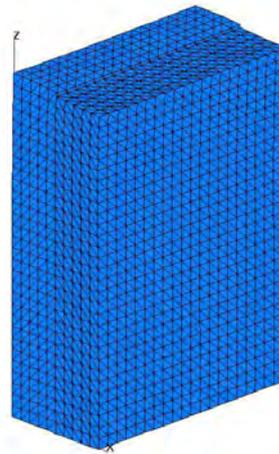
(a) *Time step 1.*(b) *Time step 2.*(c) *Time step 3.*(d) *Time step 4.*(e) *Time step 5.*(f) *Time step 6.*

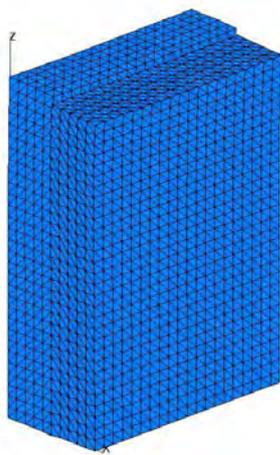
Figura 7.19: Andamento della deformata



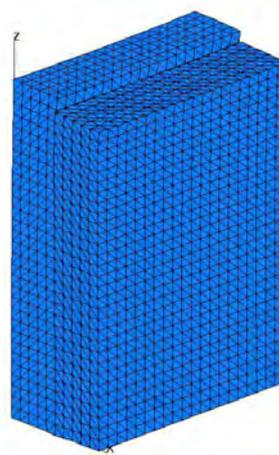
(a) *Time step 7.*



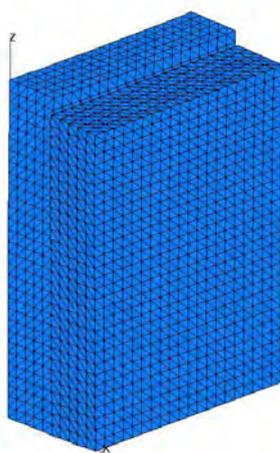
(b) *Time step 8.*



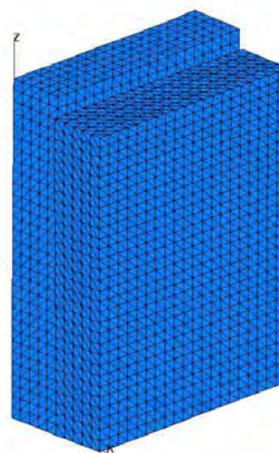
(c) *Time step 9.*



(d) *Time step 10.*



(e) *Time step 11.*



(f) *Time step 12.*

Figura 7.20: Andamento della deformata

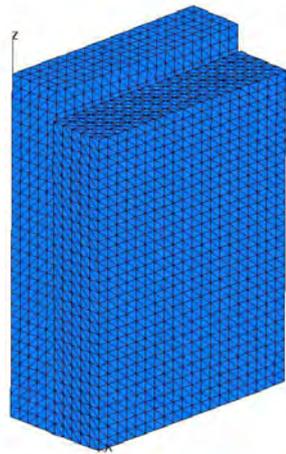
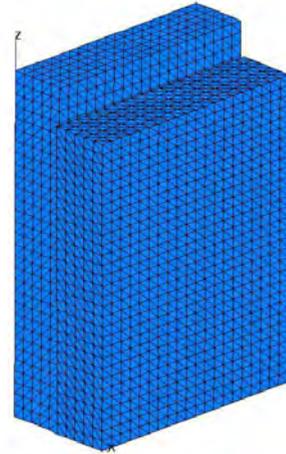
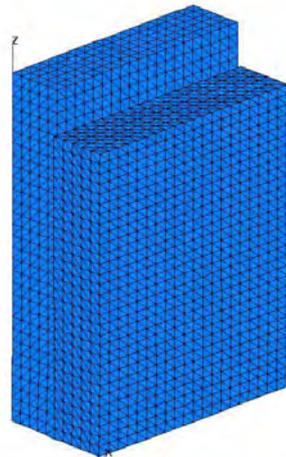
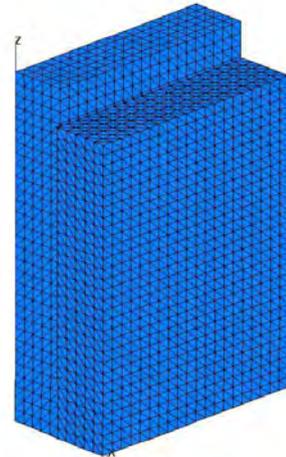
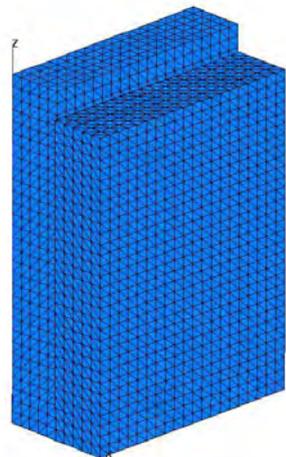
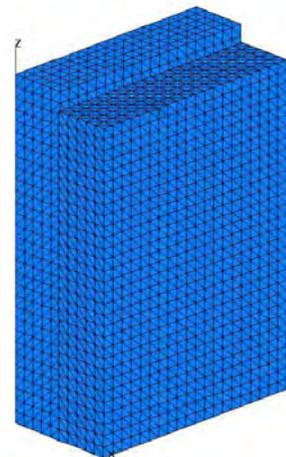
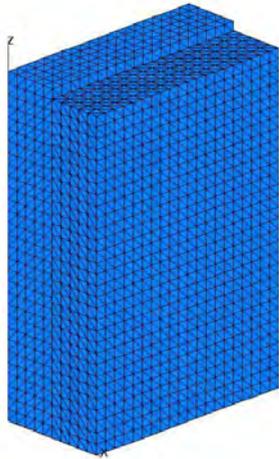
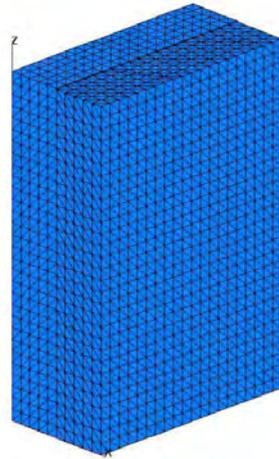
(a) *Time step 13.*(b) *Time step 14.*(c) *Time step 15.*(d) *Time step 16.*(e) *Time step 17.*(f) *Time step 18.*

Figura 7.21: Andamento della deformata



(a) *Time step 19.*



(b) *Time step 20.*

Figura 7.22: Andamento della deformata

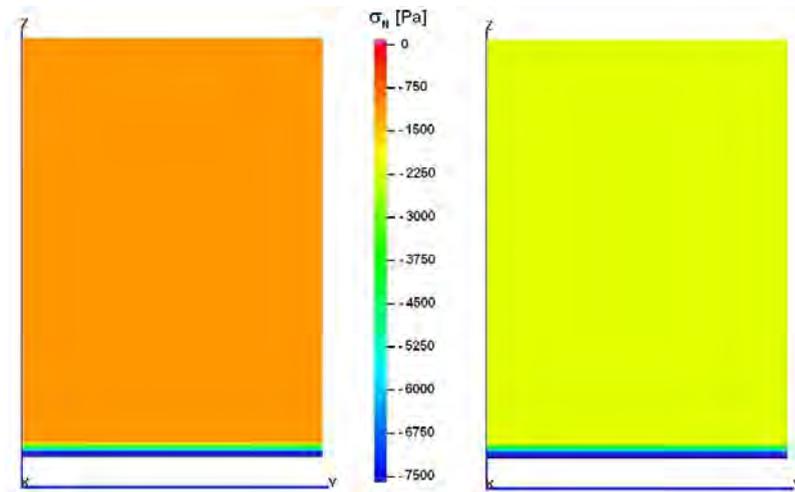
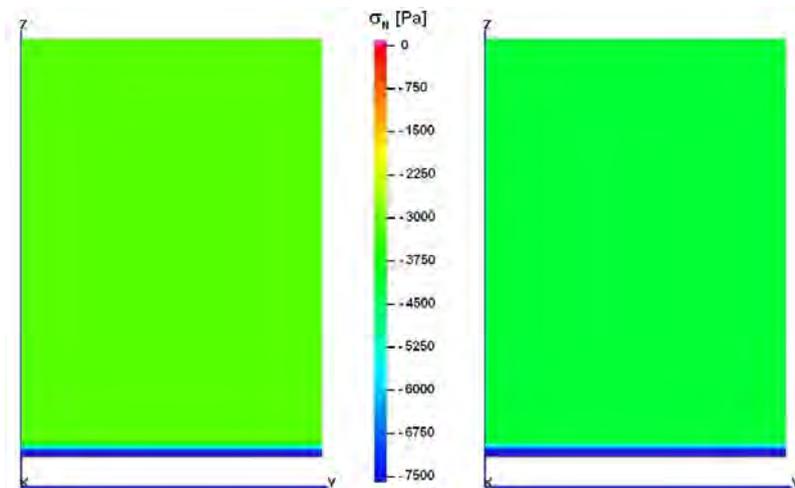
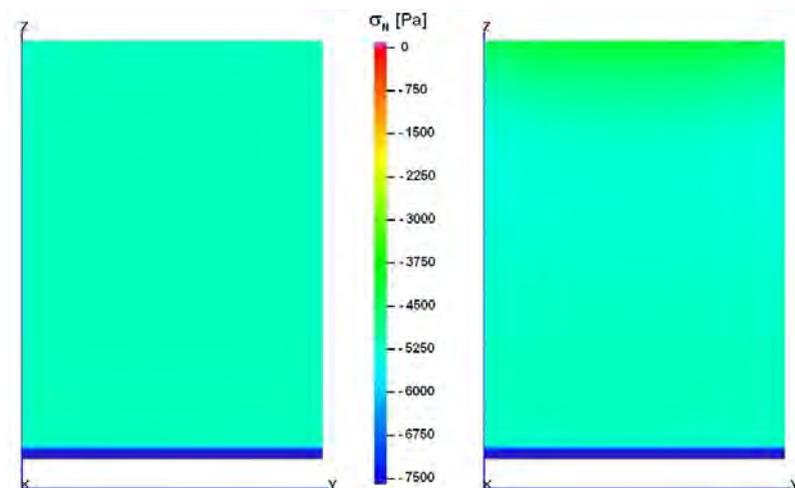
(a) *Time step 1, 2.*(b) *Time step 3, 4.*(c) *Time step 5, 6.*

Figura 7.23: Andamento della tensione normale

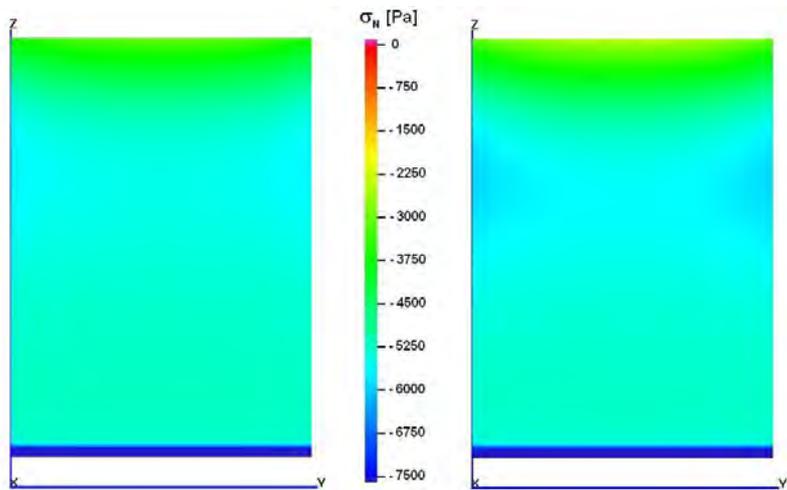
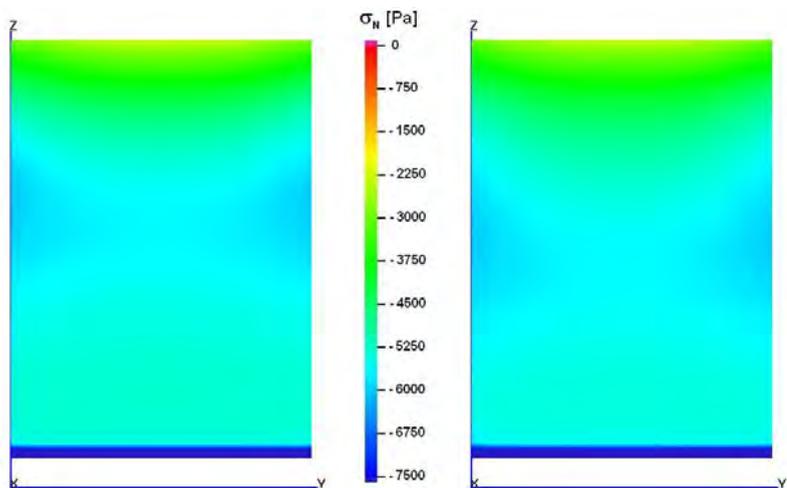
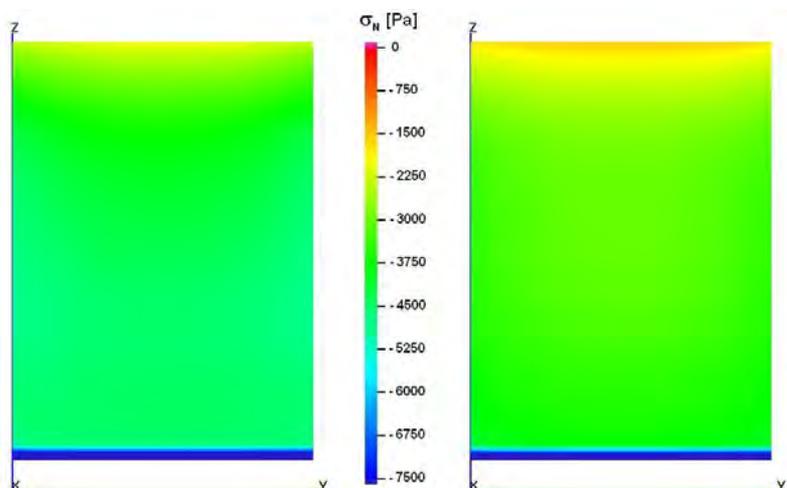
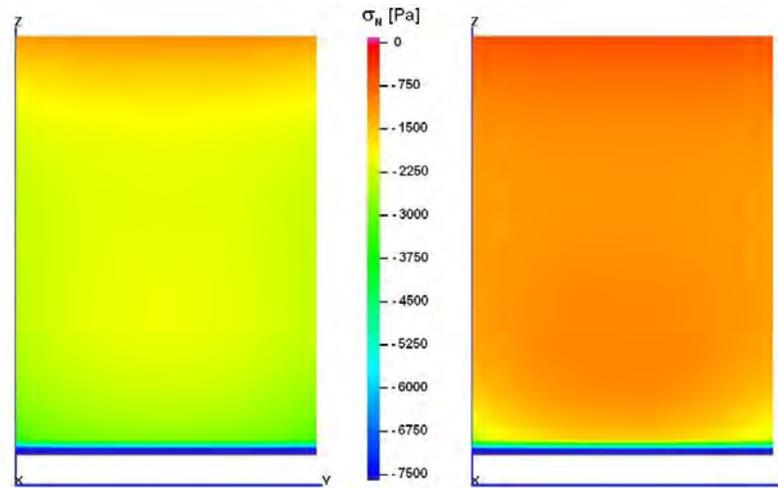
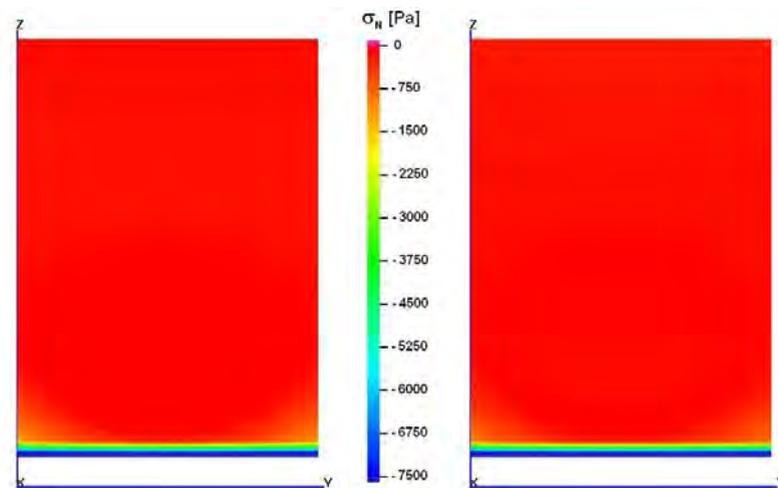
(a) *Time step 7, 8.*(b) *Time step 9, 10.*(c) *Time step 11, 12.*

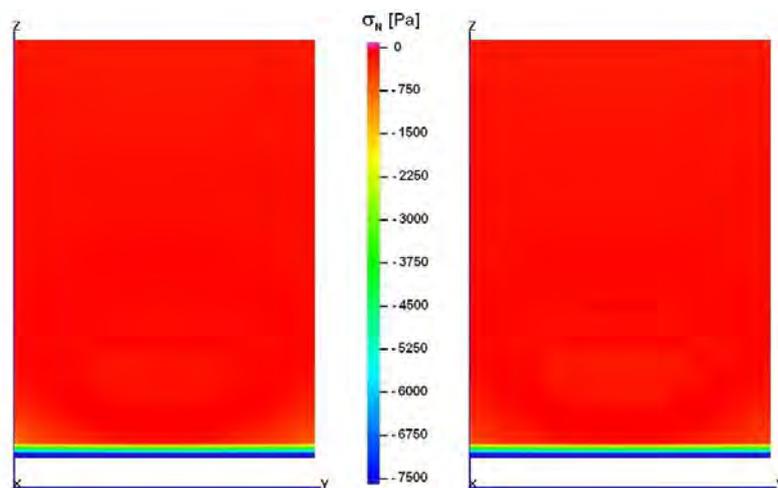
Figura 7.24: Andamento della tensione normale



(a) Time step 13, 14.

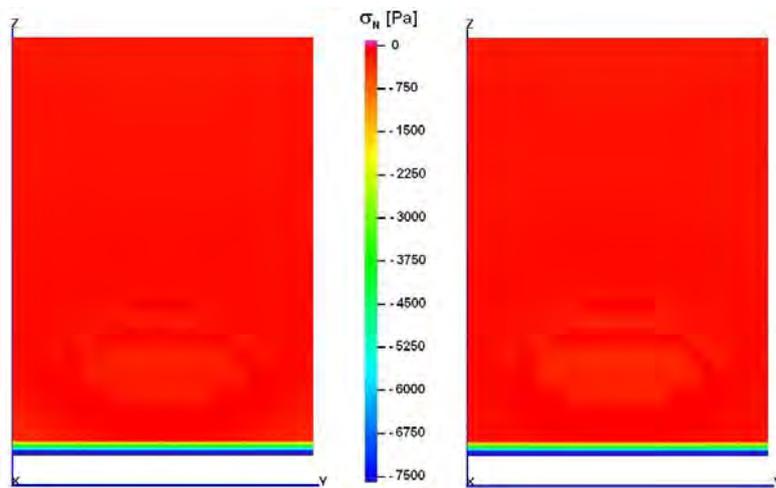


(b) Time step 15, 16.



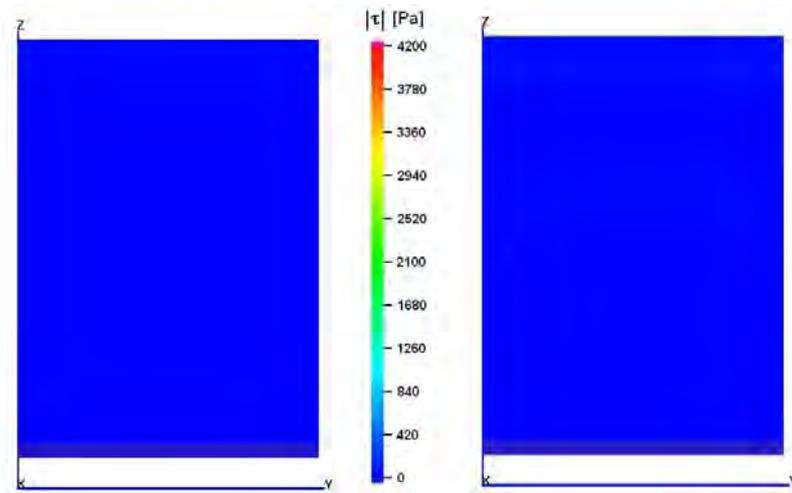
(c) Time step 17, 18.

Figura 7.25: Andamento della tensione normale

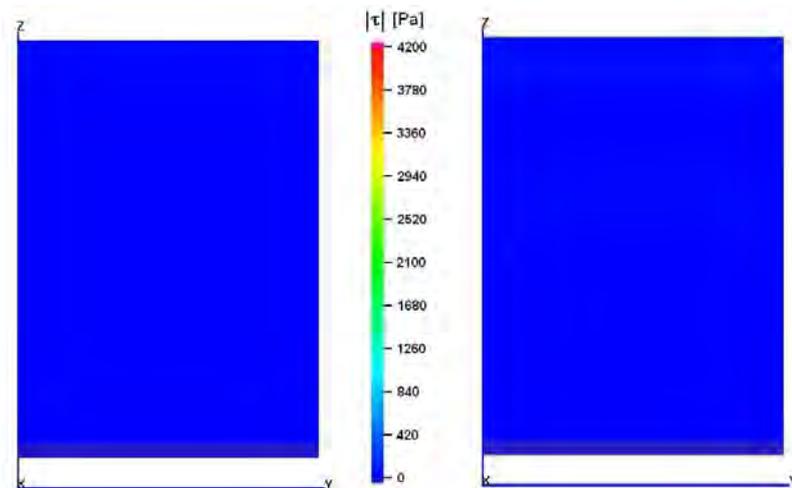


(a) *Time step 19, 20.*

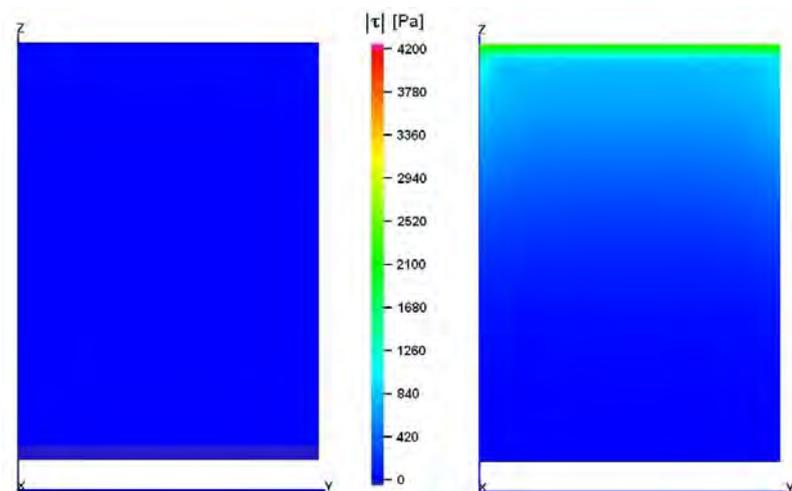
Figura 7.26: Andamento della tensione normale



(a) Time step 1, 2.



(b) Time step 3, 4.



(c) Time step 5, 6.

Figura 7.27: Andamento del modulo della tensione tangenziale

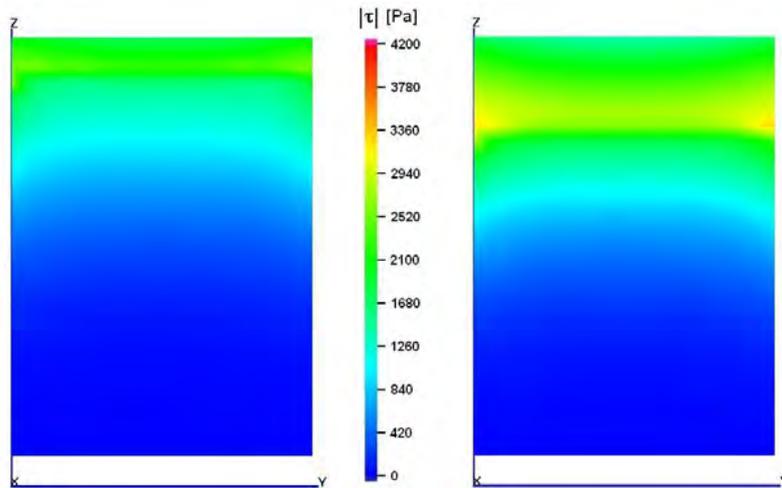
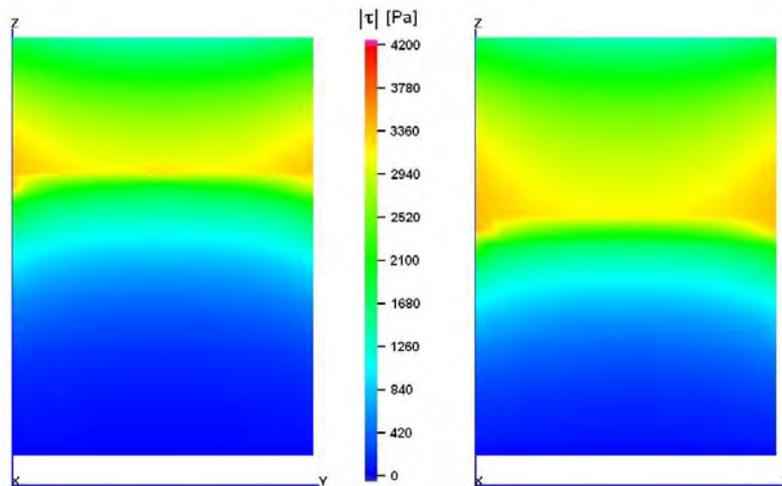
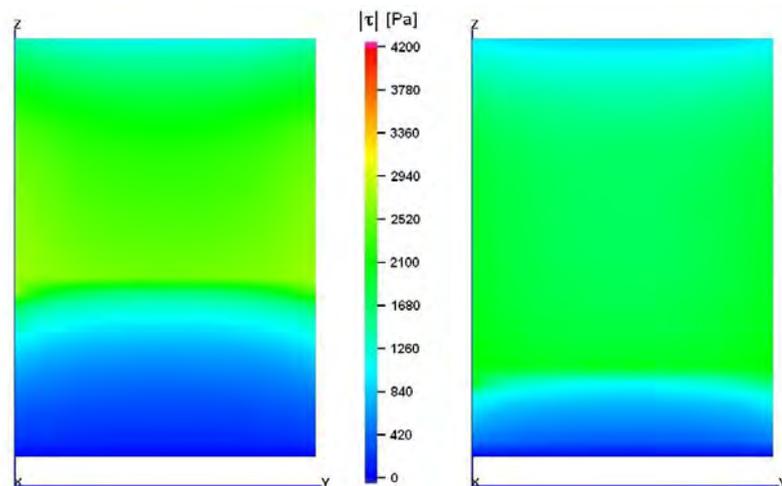
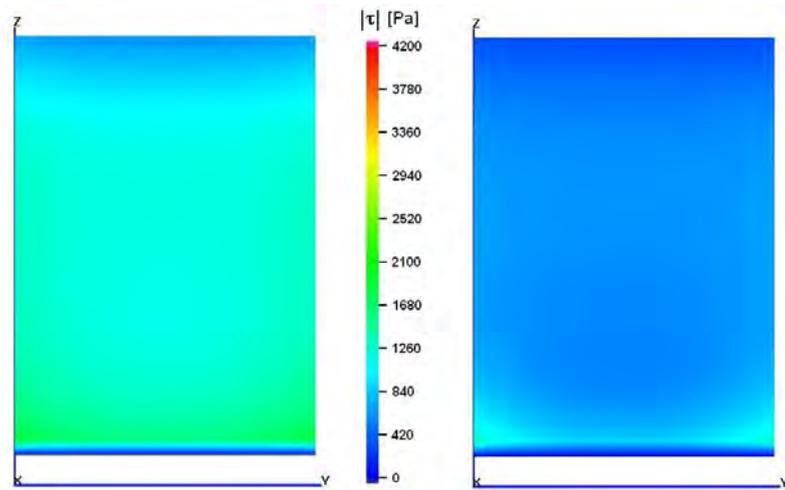
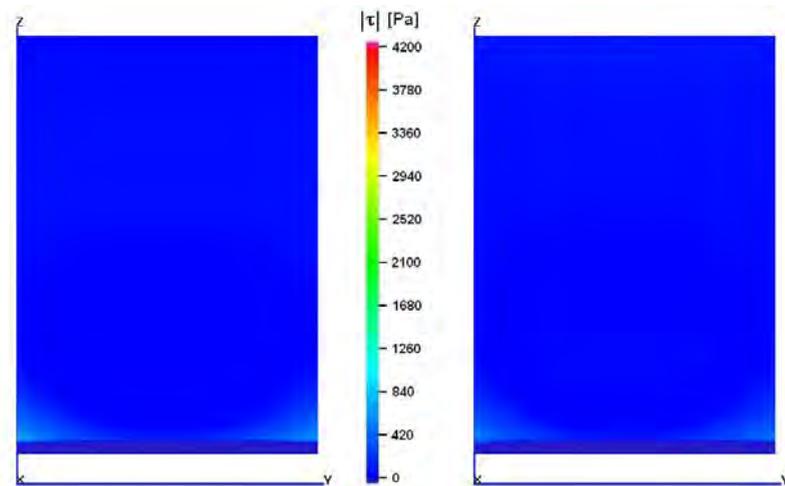
(a) *Time step 7, 8.*(b) *Time step 9, 10.*(c) *Time step 11, 12.*

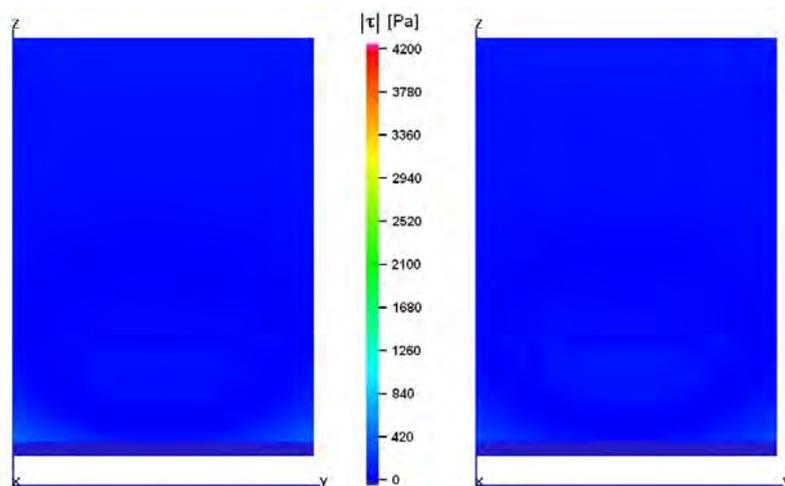
Figura 7.28: Andamento del modulo della tensione tangenziale



(a) Time step 13, 14.

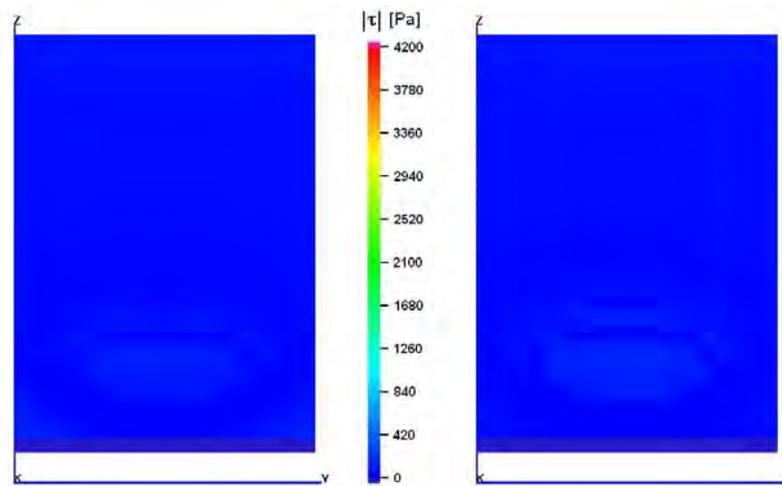


(b) Time step 15, 16.



(c) Time step 17, 18.

Figura 7.29: Andamento del modulo della tensione tangenziale



(a) *Time step 19, 20.*

Figura 7.30: Andamento del modulo della tensione tangenziale

7.7 Variazione di pressione

Alla stessa mesh rappresentata in figura 7.1, si applica, ora, una variazione di pressione uniforme, in una parte del solido non vincolato. La variazione di pressione imposta è linearmente crescente nella prima parte della simulazione e linearmente decrescente, fino al valore nullo, nella seconda parte. L'intera storia di carico, suddivisa in 200 time step, è rappresentata in figura 7.31. Il valore massimo di depressione raggiunto è $\Delta p = 9000\text{Pa}$. Tale valore di depressione provoca tensioni normali sulla faglia molto vicine alla condizione di apertura, ovvero $\sigma_N = 0$. La tensione normale alla faglia, dovuta al tensore litostatico, è, come nel primo esempio, $\sigma_x = 1000\text{Pa}$.

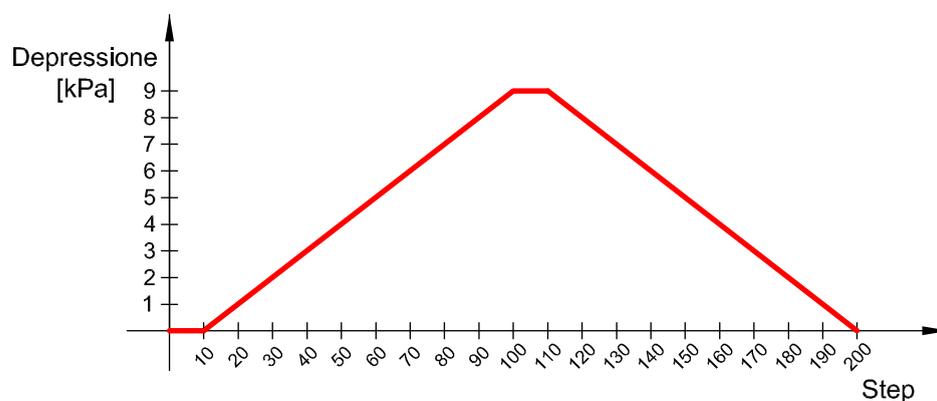


Figura 7.31: Storia di carico, nell'esempio analizzato

Nonostante la suddivisione in molti time step, per alcuni passi di carico è necessario effettuare un back step. Nella maggior parte dei time step, si raggiunge la convergenza in 5/6 iterazioni non – lineari, avendo fissato un residuo di uscita pari a $tol = 10^{-8}$.

Nelle successive figure si rappresentano gli stati tensionali sulla faglia, in alcuni time step. Inoltre, si rappresentano le deformate della mesh, amplificate di un fattore $5 \cdot 10^3$.

7.7.1 Commenti

Dalle immagini 7.36, 7.37, 7.38 e 7.39, che rappresentano le tensioni normali, e dalle 7.40, 7.41, 7.42 e 7.43, che rappresentano le tensioni tangenziali, si possono fare alcune osservazioni. La tensione normale, nella parte di faglia interessata dalla diminuzione di pressione, si riduce. Viceversa, appena sopra e sotto il “giacimento”, si ha un incremento di tensione normale, che arriva a 2.5 volte il valore iniziale. Per quanto concerne il modulo della tensione tangenziale, si rileva come inizi a crescere, dai contorni del “giacimento”, per poi propagarsi in tutta la faglia.

Nella seconda parte della simulazione, quando si scarica la depressione, la tensione normale si comporta in modo abbastanza simmetrico, tornando a valere tanto quanto all'inizio della simulazione, ovvero $\sigma_N \approx 1\text{kPa}$. La tensione tangenziale, invece, non si comporta in modo simmetrico. Si ha, infatti, a fine simulazione, uno stato tensionale diverso dal valore nullo iniziale. Questo giustifica anche le deformate finali, figura 7.35, diverse dalla mesh indeformata. Tutto questo è causato dagli elementi di interfaccia, essendo il materiale lineare elastico, in particolare, dalle disuguaglianze (4.11), (4.12) e (4.13).

La rottura a taglio si propaga, dal contorno del “giacimento”, fino a tutta la faglia, iniziando dal 3° time step, fino al 10°, in cui si ha il massimo numero di elementi aperti a scorrimento, per la fase di carico. Nella fase di scarico, iniziano ad aprirsi elementi a taglio dal 13° time step, fino al 20°, in cui si ha il numero massimo di elementi discontinui a taglio, per la fase di scarico. In tabella 7.4, è riportato lo stato di tutti i nodi, nel corso della simulazione, per un time step ogni 10.

Time step	Nodi che scorrono a taglio	Nodi aperti a sforzo normale
10	0	0
20	1	0
30	55	0
40	88	0
50	134	0
60	159	0
70	173	0
80	187	0
90	154	0
100	190	0
110	0	0
120	1	0
130	15	0
140	28	0
150	68	0
160	101	0
170	110	0
180	113	0
190	125	0
200	142	0

Tabella 7.4: Numero di nodi attivi a taglio e sforzo normale, per tutti i time step della simulazione, in caso di depressurizzazione di parte del cubetto

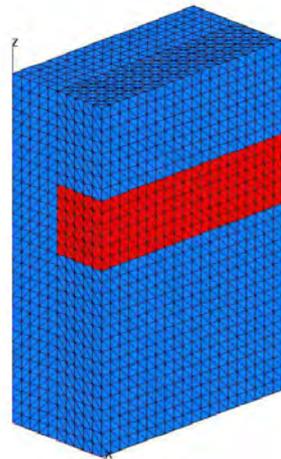
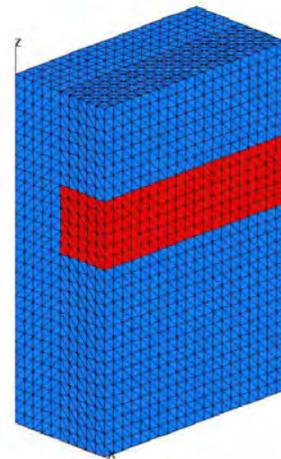
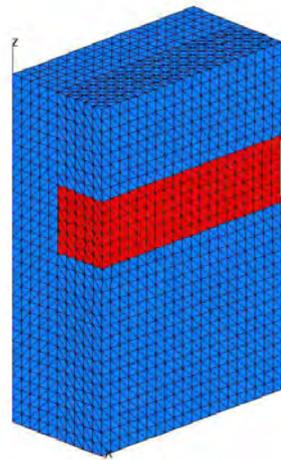
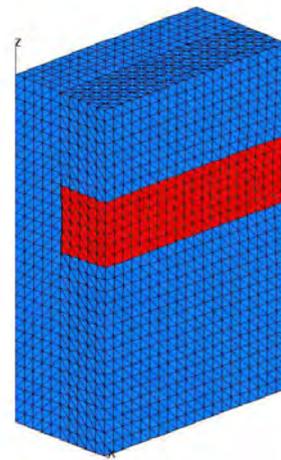
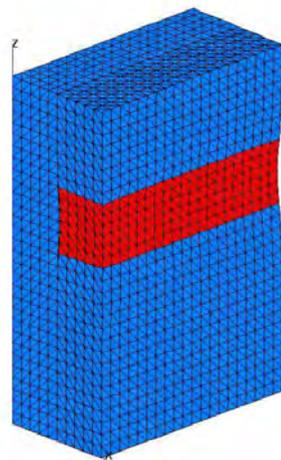
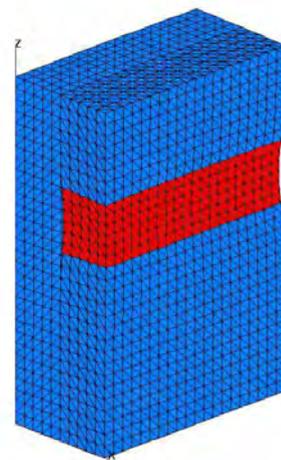
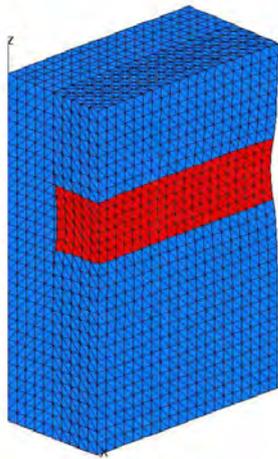
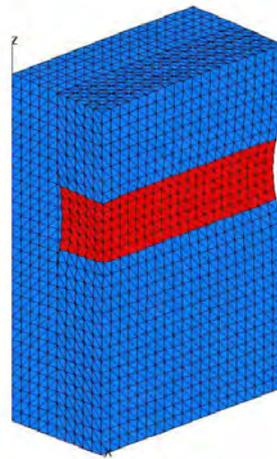
(a) *Time step 10.*(b) *Time step 20.*(c) *Time step 30.*(d) *Time step 40.*(e) *Time step 50.*(f) *Time step 60.*

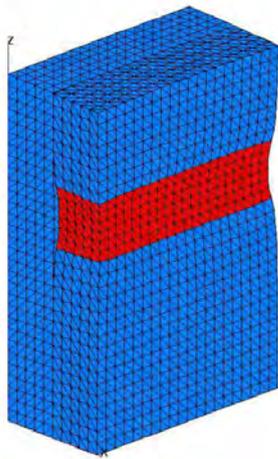
Figura 7.32: Andamento della deformata



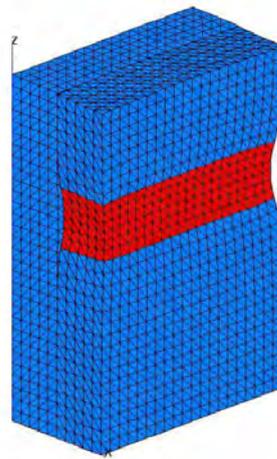
(a) *Time step 70.*



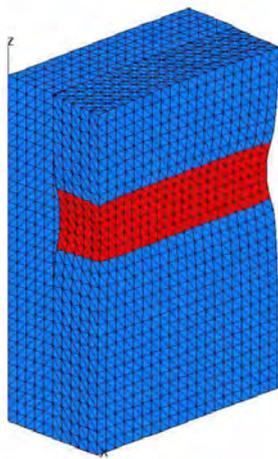
(b) *Time step 80.*



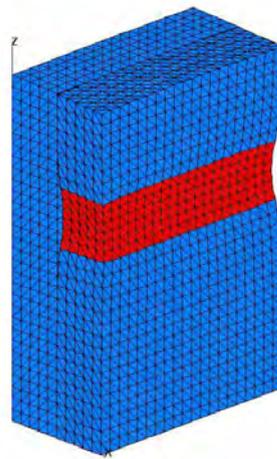
(c) *Time step 90.*



(d) *Time step 100.*



(e) *Time step 110.*



(f) *Time step 120.*

Figura 7.33: Andamento della deformata

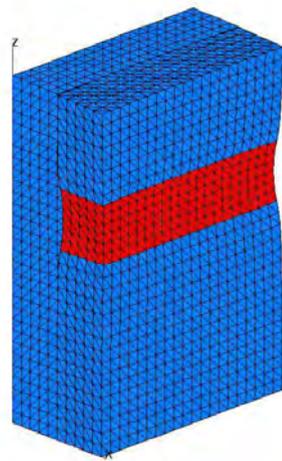
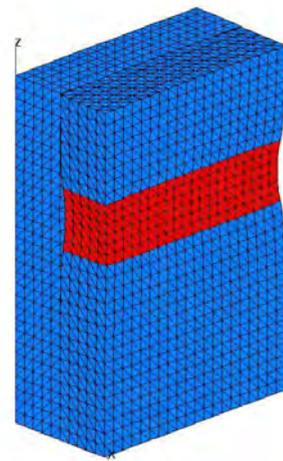
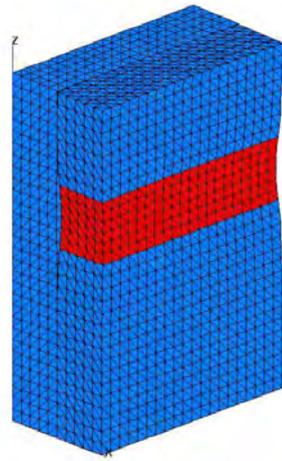
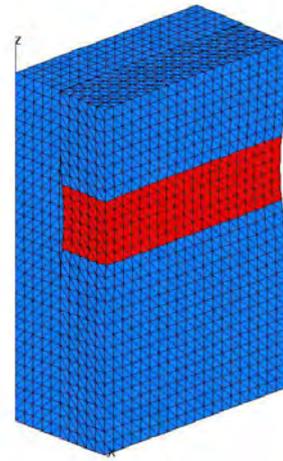
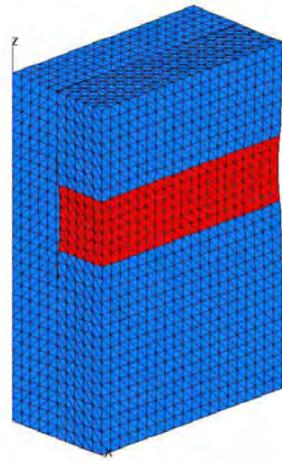
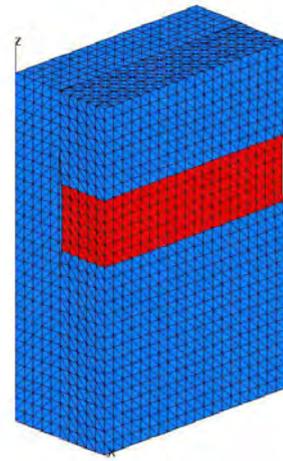
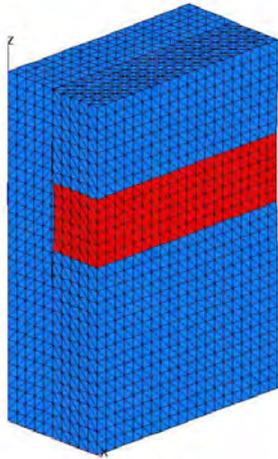
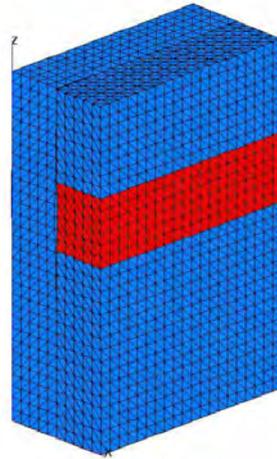
(a) *Time step 130.*(b) *Time step 140.*(c) *Time step 150.*(d) *Time step 160.*(e) *Time step 170.*(f) *Time step 180.*

Figura 7.34: Andamento della deformatata

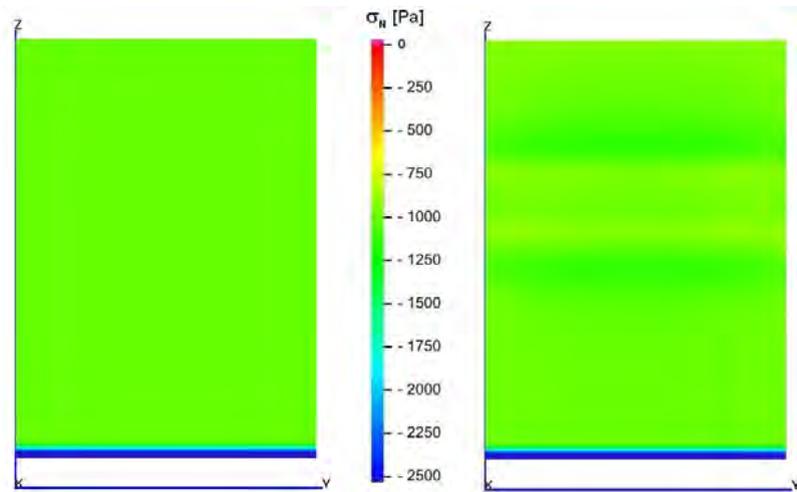


(a) *Time step 190.*

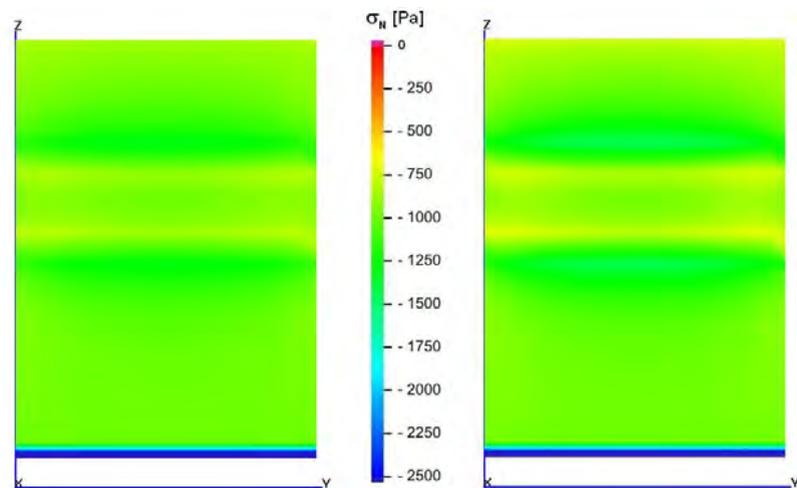


(b) *Time step 200.*

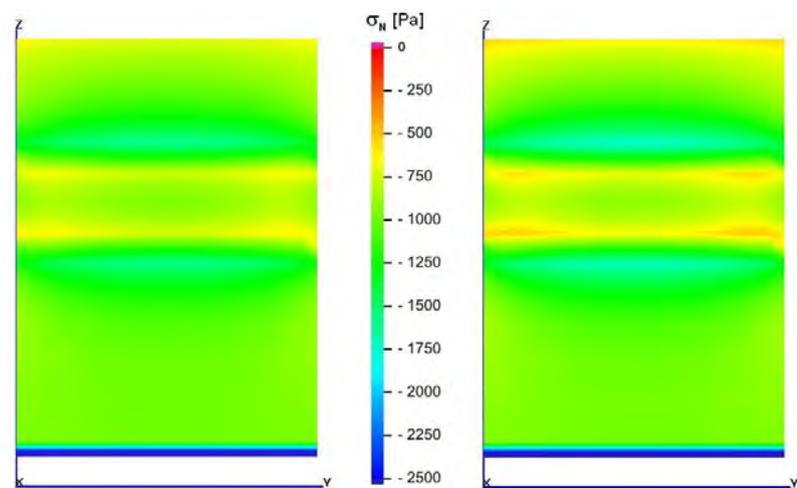
Figura 7.35: Andamento della deformata



(a) Time step 10, 20.

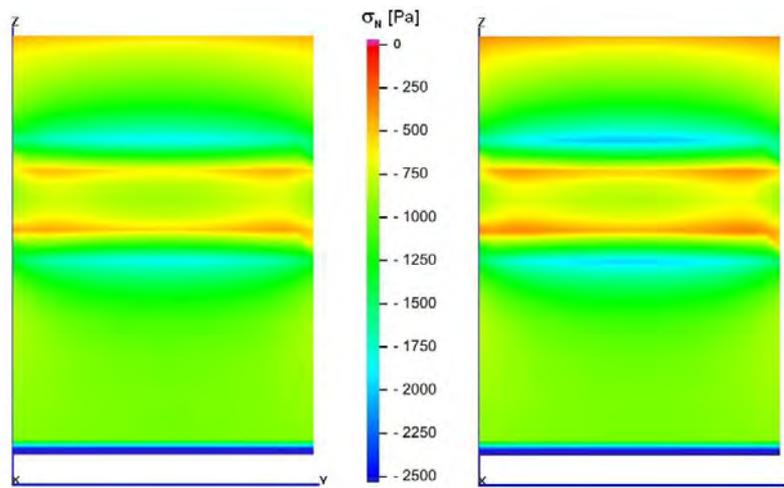


(b) Time step 30, 40.

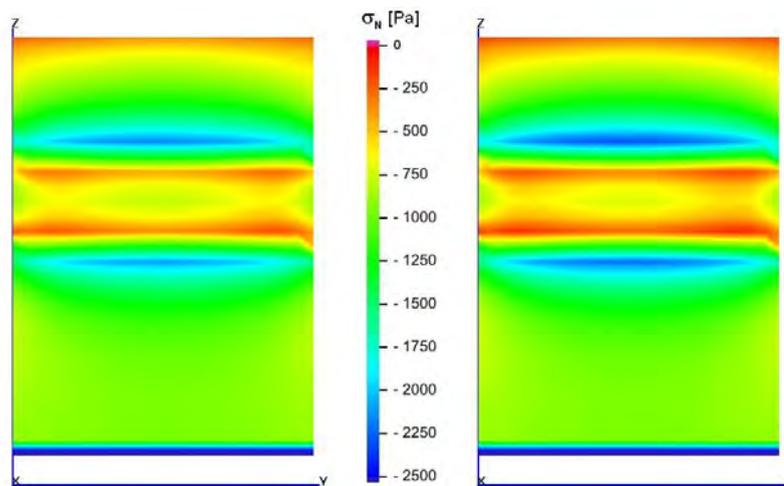


(c) Time step 50, 60.

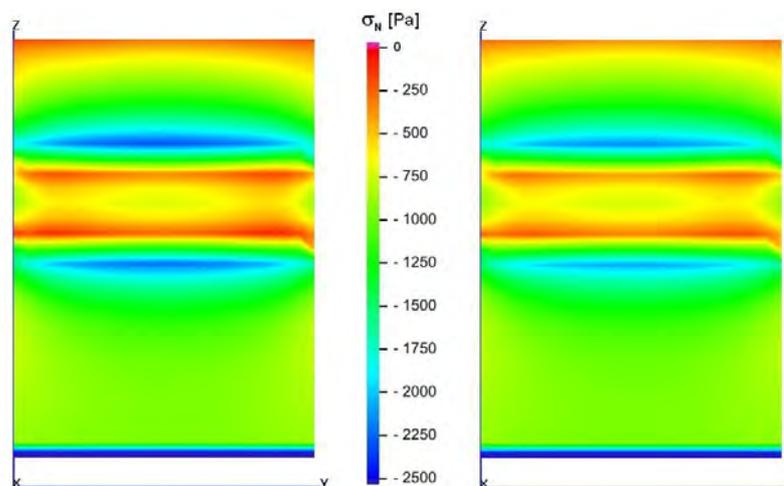
Figura 7.36: Andamento della tensione normale



(a) Time step 70, 80.

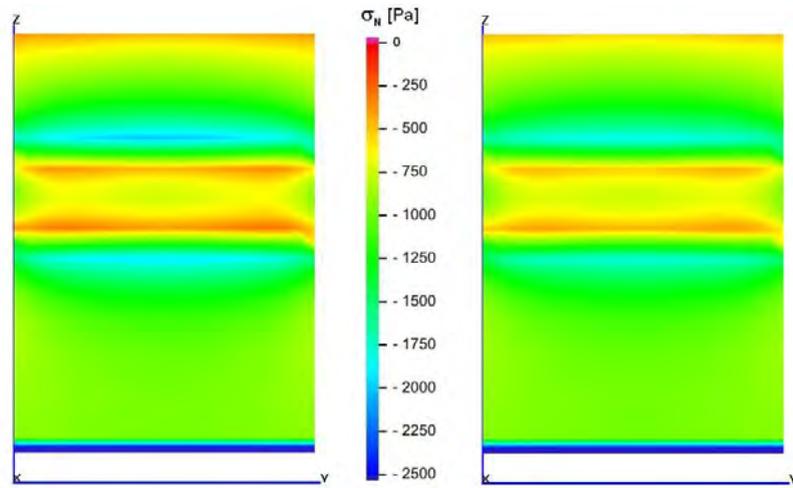


(b) Time step 90, 100.

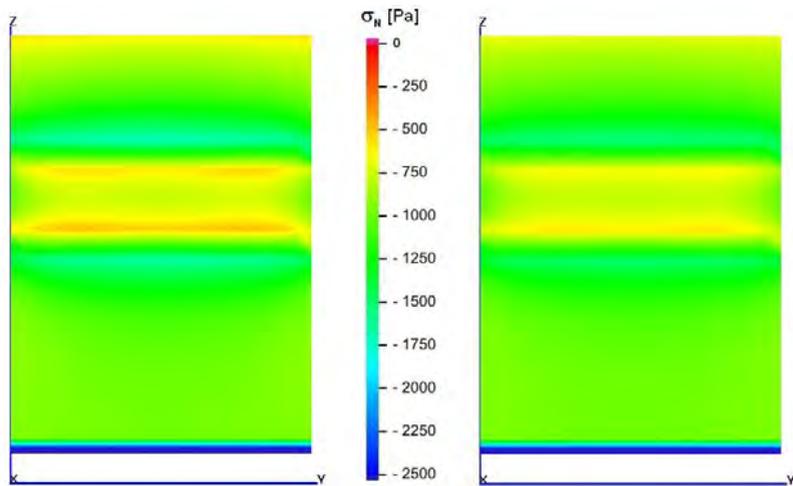


(c) Time step 110, 120.

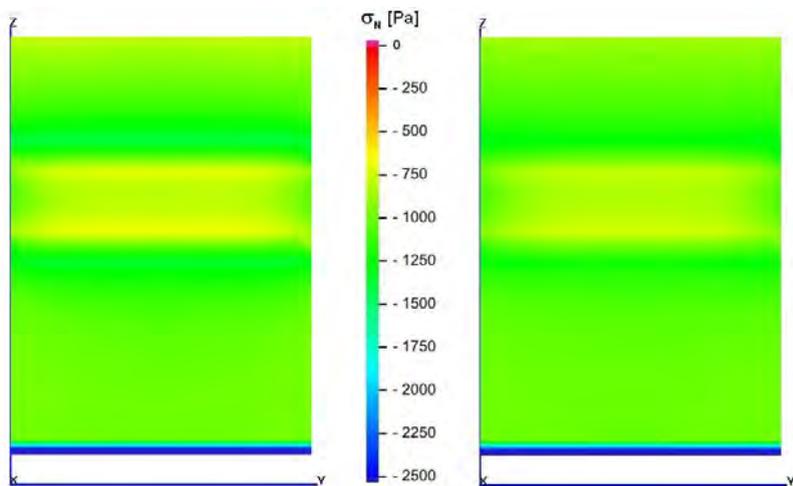
Figura 7.37: Andamento della tensione normale



(a) Time step 130, 140.

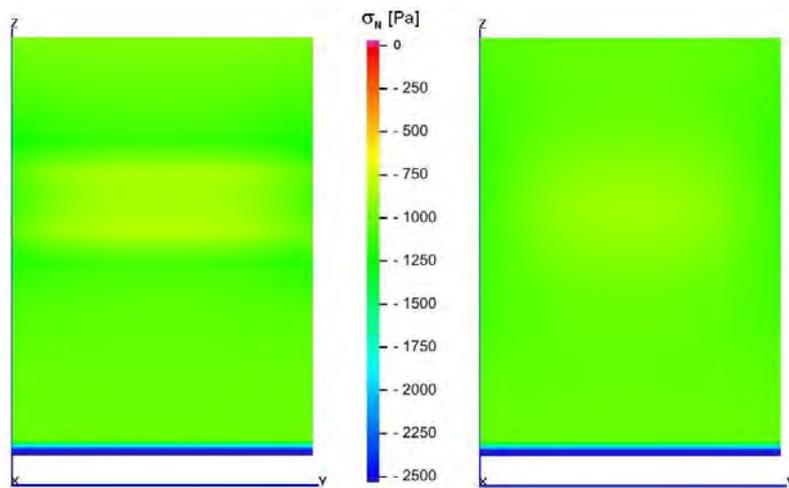


(b) Time step 150, 160.



(c) Time step 170, 180.

Figura 7.38: Andamento della tensione normale



(a) *Time step 190, 200.*

Figura 7.39: Andamento della tensione normale

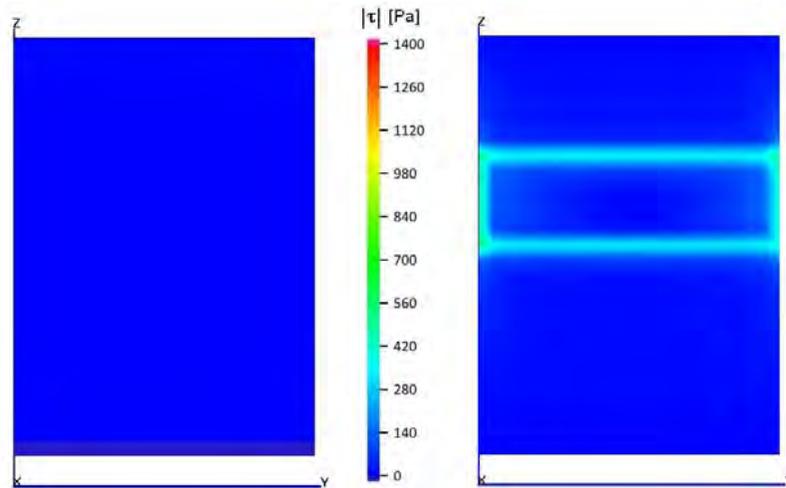
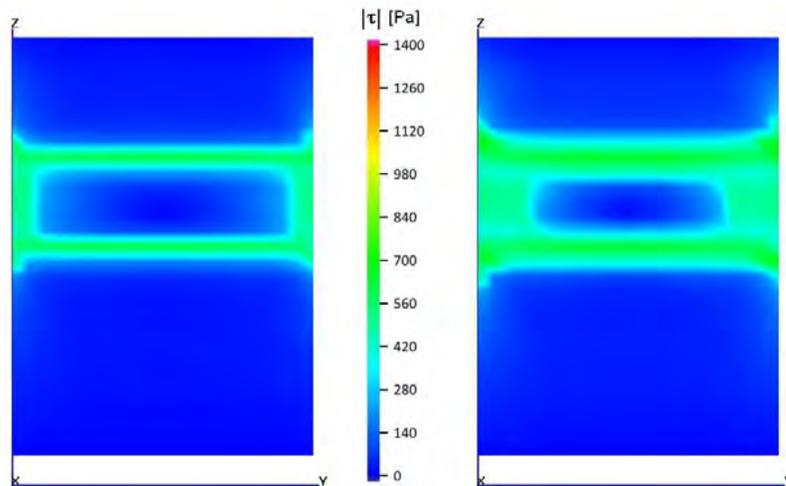
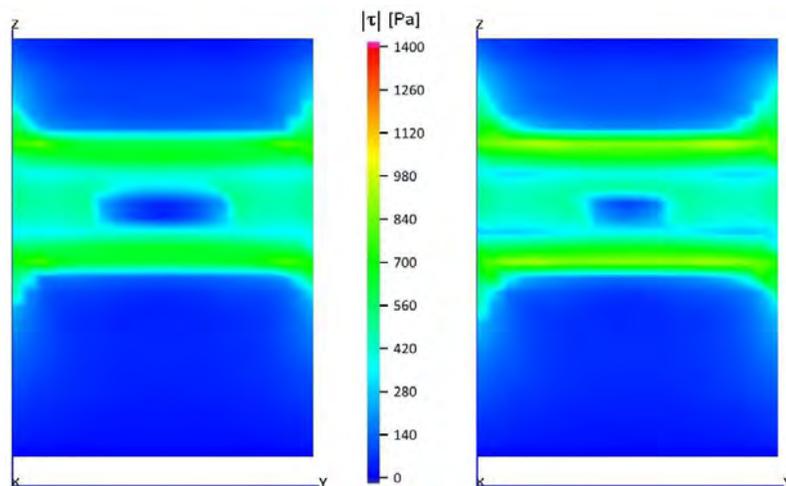
(a) *Time step 10, 20.*(b) *Time step 30, 40.*(c) *Time step 50, 60.*

Figura 7.40: Andamento del modulo della tensione tangenziale

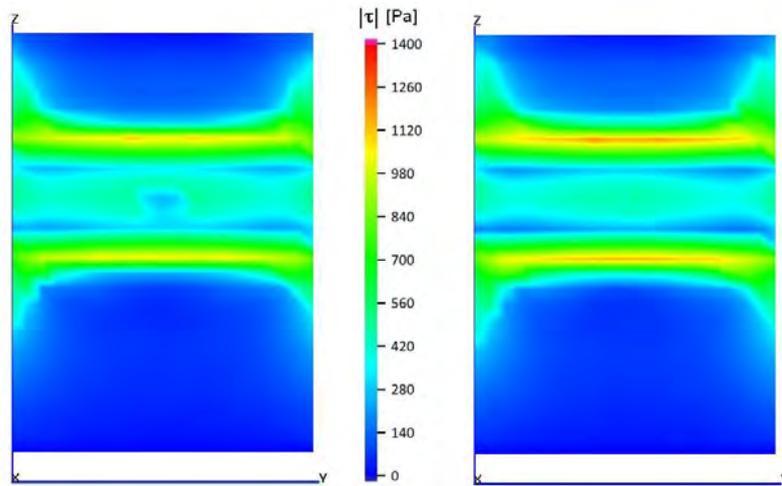
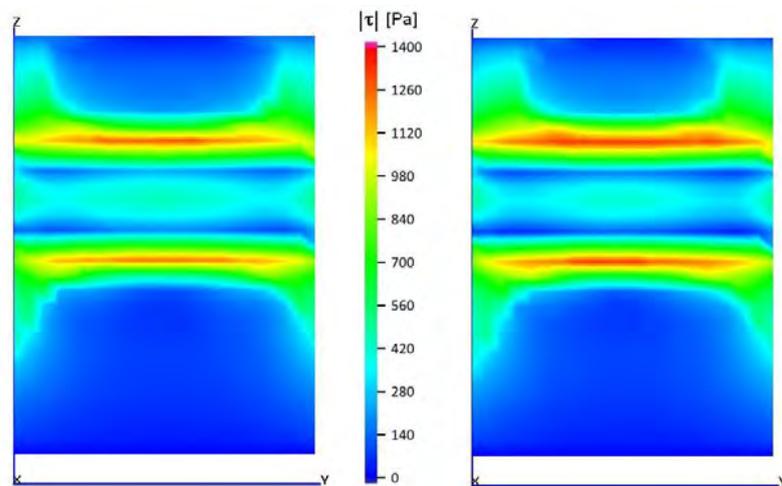
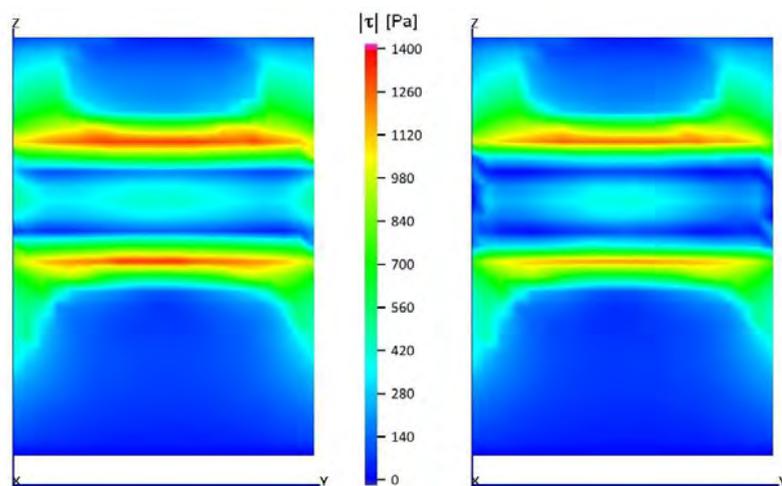
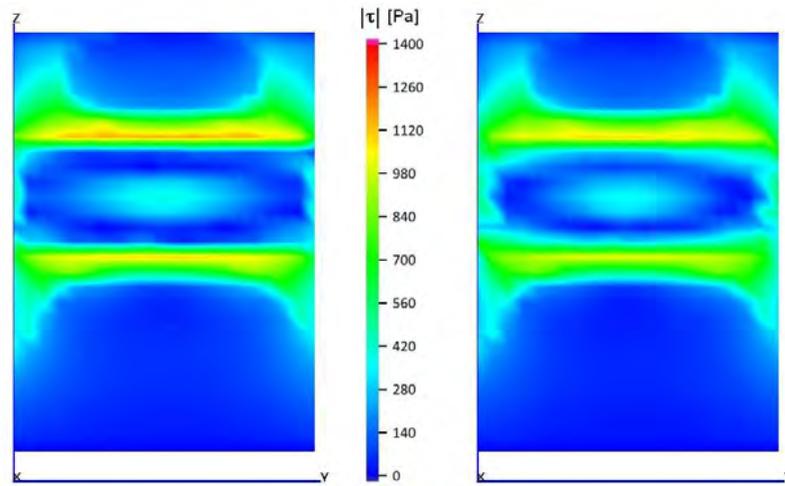
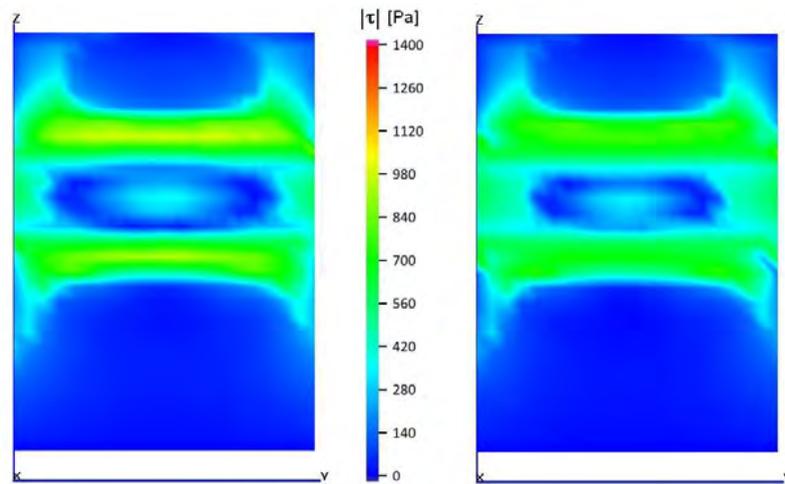
(a) *Time step 70, 80.*(b) *Time step 90, 100.*(c) *Time step 110, 120.*

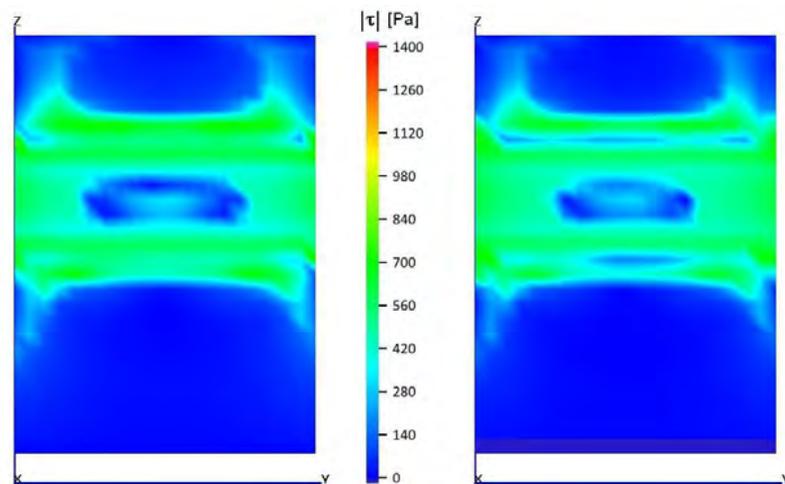
Figura 7.41: Andamento del modulo della tensione tangenziale



(a) Time step 130, 140.

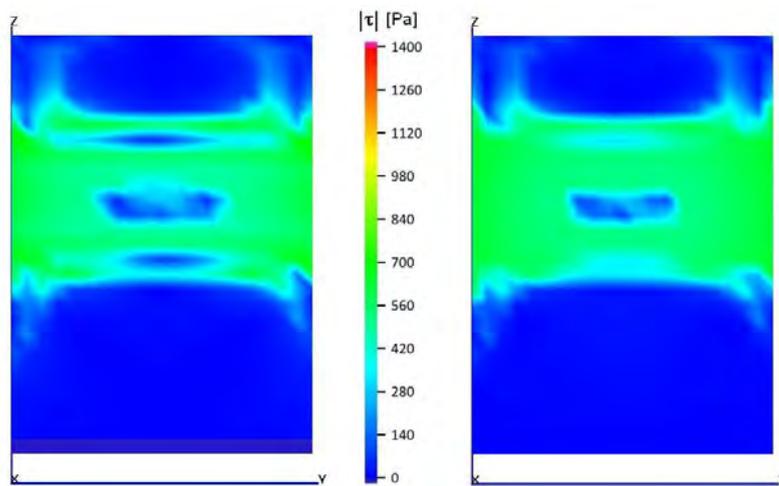


(b) Time step 150, 160.



(c) Time step 170, 180.

Figura 7.42: Andamento del modulo della tensione tangenziale



(a) *Time step 190, 200.*

Figura 7.43: Andamento del modulo della tensione tangenziale

7.8 Rotazione della faglia

Si intende analizzare il comportamento di una faglia inclinata di 45° , rispetto all'asse z . La faglia è ruotata nel piano di normale y . La mesh è simile alla precedente, ma con un numero superiore di elementi e nodi, necessari per simulare la parte inclinata. Come nel precedente caso, il piano di carico della mesh è all'altezza di 15m. La faglia, completamente passante, è inclinata solo nella metà superiore.

Il materiale è elastico lineare, con parametri $E = 176\text{MPa}$ e $\nu = 0.25$. I parametri della faglia, inclinata di $\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$, sono $\nu = 0.25$ e $\phi = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$.

La storia di carico ha lo stesso andamento di quella rappresenta in figura 7.2, ma con diversi valori. La risultante dello sforzo normale raggiunge i 75000N, per una pressione uniforme di 500Pa, mentre lo sforzo di taglio massimo vale 37500N, equivalente a una pressione di 1500Pa. La tensione verticale litostatica $\sigma_1 = 10000\text{Pa}$.

7.8.1 Faglia trascorrente

Risulta interessante analizzare il set di dati iniziali che provoca scorrimento, sul piano di faglia, in ipotesi di faglia piana uniforme, in assenza di carichi esterni. Il tensore delle tensioni sul piano di faglia è il seguente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

La normale al piano di faglia, nel caso più generale, è:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

Nel caso in cui $n_y = 0$, si può scrivere la (7.21) in funzione di θ , angolo di rotazione della faglia rispetto all'asse z , nel piano di normale y . La (7.21), nel caso di $n_y = 0$, diventa la (7.22).

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

La tensione agente sul piano di faglia è semplicemente $\mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$. Sviluppando il

prodotto, si hanno le tre componenti agenti:

$$\mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \cos \theta \\ 0 \\ -\sigma_3 \sin \theta \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

La tensione normale è la componente di \mathbf{t}_n in direzione normale, ovvero $\sigma_N = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n} = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta$. Il modulo della tensione tangenziale è $\tau = \|\mathbf{t}_n - \sigma_N \mathbf{n}\|$, come in (7.24).

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{(\mathbf{t}_n - \sigma_N \mathbf{n})^T (\mathbf{t}_n - \sigma_N \mathbf{n})} = \sqrt{\mathbf{t}_n^T \mathbf{t}_n - 2\mathbf{t}_n^T \mathbf{n} + \sigma_N \mathbf{n}^T \mathbf{n} = \mathbf{t}_n^T \mathbf{t}_n - \sigma_N^2} = \\ &= \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \theta + \sigma_3^2 \sin^2 \theta - \sigma_1^2 \cos^4 \theta - 2\sigma_1 \sigma_3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \sigma_3^2 \sin^4 \theta} \end{aligned} \quad (7.24)$$

Ipotizzando di lavorare con coesione nulla, $c = 0$, e tensione orizzontale σ_1 legata alla tensione verticale σ_3 dalla (7.6), si ha che la seguente disuguaglianza $\tau > \tau_L$, in caso di faglia trascorrente, è rispettata. Infatti, secondo il criterio di Mohr – Coulomb, ossia la (4.14), se la tensione tangenziale supera il valore $\tau_L = |\sigma| \tan \phi + c$, si ha scorrimento. In questo caso, si richiede proprio il movimento della faglia.

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)^2 \cos^4 \theta - 2\left(\frac{\nu}{1-\nu}\right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \sin^4 \theta > \\ &> \left(\left(\frac{\nu}{1-\nu}\right) \cos^2 \theta + \sin^2 \theta\right)^2 \tan^2 \phi \end{aligned} \quad (7.25)$$

Dalla (7.25), risulta evidente come non conti il valore di tensione verticale, quindi la profondità cui la faglia è collocata, ma il solo rapporto tra tensione verticale e orizzontale.

Con $\nu = 0.25$, $\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ e $\phi = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$, si ha che la disuguaglianza (7.25) non è rispettata, infatti $0.1111 \not> 0.1481$. Quindi la faglia è in equilibrio.

Cambiando l'angolo d'attrito, passando da 30° a 15° , si ha, con $\nu = 0.25$, $\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ e $\phi = \frac{\pi}{12} = 15^\circ$, che la disuguaglianza (7.25) è rispettata, essendo $0.1111 > 0.0319$. Quindi la faglia non è in equilibrio e risulta muoversi, nel suo piano, anche senza carichi esterni.

In generale, per analizzare la condizione di incipiente movimento, in funzione della disposizione della faglia e dello stato tensionale litostatico, si può trovare l'angolo d'attrito ϕ , tale per cui $|\tau| = |\sigma| \tan \phi$, al variare dell'inclinazione θ della faglia e del rapporto di Poisson ν , sempre in ipotesi di materiale isotropo. Si intende, trasformando la disuguaglianza (7.25) in un'uguaglianza e parametrizzando il rapporto di Poisson ν , studiare la funzione $\phi = f(\theta, \nu)$. La figura 7.44 rappresenta, per vari valori ν , le curve che si cercano.

Dalla figura 7.44, si nota come, per esempio, con angolo d'attrito $\phi = 30^\circ$ e rapporto di Poisson $\nu = 0.25$, non si abbia possibilità di movimento (rappresentate da punti sopra

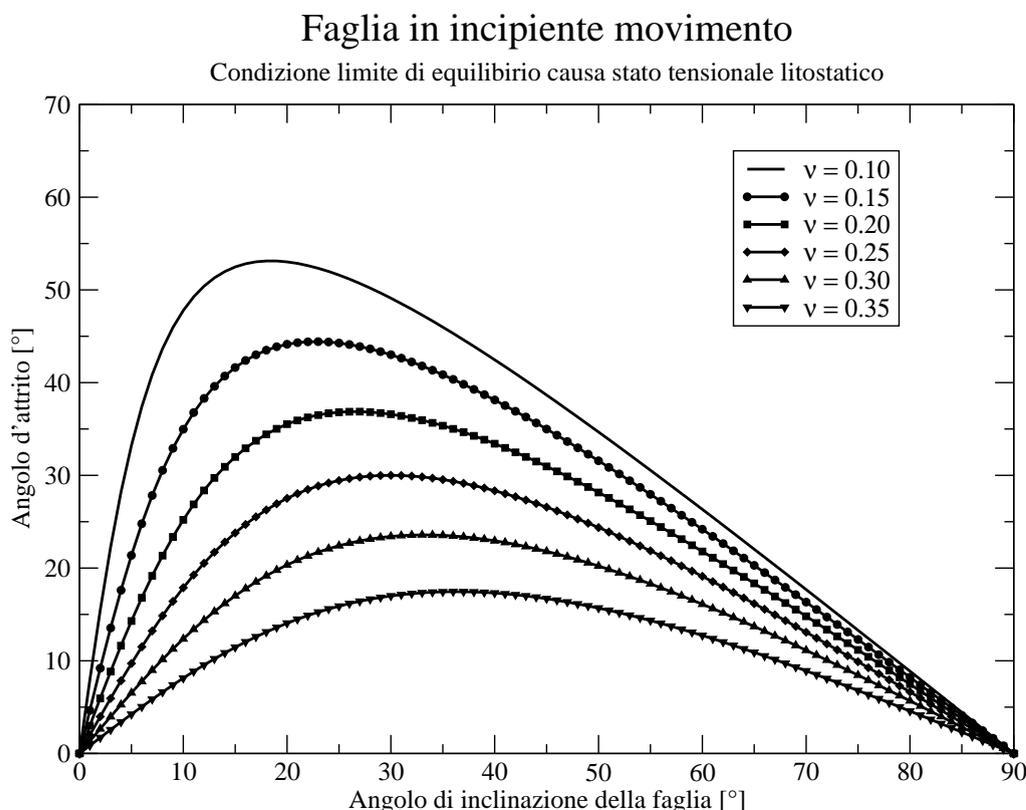


Figura 7.44: Angolo d'attrito di incipiente movimento, in funzione di inclinazione della faglia e rapporto di Poisson

la curva), per nessuna inclinazione della faglia.

Finora si è analizzata la condizione di incipiente movimento, ma non la direzione. Per individuare la direzione della tensione tangenziale $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t}_n - \sigma_N \mathbf{n}$, si trova la sua componente in direzione verticale, pari a $\tau_z = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_3$, essendo $\tau_1 = \tau_y = 0$, dove, con \mathbf{e}_3 , si intende il versore dell'asse z . La tensione tangenziale lungo z è la seguente.

$$\begin{aligned}
 \tau_z &= \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_3 = -\sigma_3 \sin \theta - \sigma_N (-\sin \theta) = -\sigma_3 \sin \theta + \sigma_N \sin \theta = \\
 &= -\sigma_3 \sin \theta + \sigma_1 \cos^2 \theta \sin \theta + \sigma_3 \sin^3 \theta = \sigma_1 \cos^2 \theta \sin \theta - \sigma_3 \cos^2 \theta \sin \theta = \\
 &= (\sigma_1 - \sigma_3) \cos^2 \theta \sin \theta = -\sigma_3 \left(\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \right) \cos^2 \theta \sin \theta
 \end{aligned} \tag{7.26}$$

Ricordando che le tensioni principali, che compaiono in (7.20), sono negative, in quanto di compressione, la (7.26) risulta positiva, essendo $\frac{1-2\nu}{1-\nu} > 0$, per via dei vincoli imposti dalla *Teoria dell'Elasticità*, come descritto in Corradi dell'Acqua [2010], ovvero $0 \leq \nu \leq 0.5$.

Quindi la faglia tende a scorrere verso l'alto, ossia nel verso positivo delle z .

Nel caso in esame, con $\nu = 0.25$ e $\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$, si ha $\frac{\tau_z}{\sigma_3} = 0.4714$.

7.8.2 Risultati

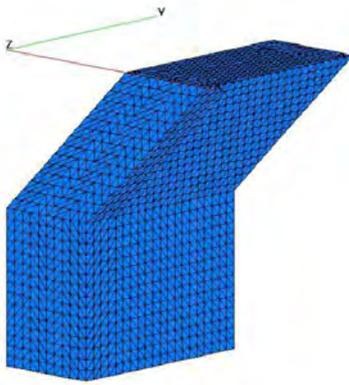
Si riportano, ora, i risultati, in termini di deformazioni, amplificate di un fattore $1.5 \cdot 10^3$, nelle figure 7.45, 7.46, 7.47 e 7.48, e tensioni sul piano di faglia, nelle figure 7.49, 7.50, 7.51 e 7.52, per la tensione normale, e nelle 7.53, 7.54, 7.55 e 7.56, per il modulo della tensione tangenziale. Si noti che le direzioni di movimento, nel momento in cui si apre la faglia a scorrimento, causa la riduzione di sforzo normale, provocata dai carichi esterni, sono determinate dalla direzione della tensione tangenziale a corpo indisturbato, infatti, nonostante i carichi siano verso il basso, la faglia scorre verso l'alto.

Nonostante la tensione litostatica sia molto superiore alle forze esterne agenti, queste sono sufficienti a creare uno stato tensionale che viola la continuità a taglio, essendo la combinazione iniziale di tensioni già vicina alla condizione critica, secondo il criterio di rottura scelto.

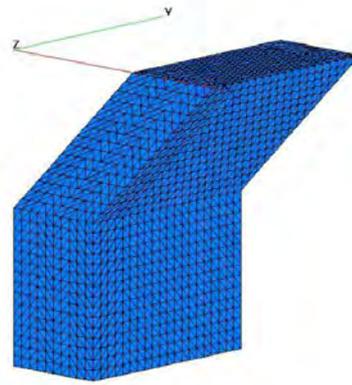
In tabella 7.5, si riporta il numero di elementi attivi a taglio e a sforzo normale, time step per time step, per tutta la simulazione. Si noti come la presenza della faglia inclinata renda poco intuitivi i risultati, frutto dell'azione combinata di carico litostatico e forzanti esterne.

Time step	Nodi che scorrono a taglio	Nodi aperti a sforzo normale
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	42	0
8	75	0
9	84	0
10	105	0
11	2	0
12	2	0
13	126	0
14	2	0
15	2	0
16	9	0
17	0	0
18	16	0
19	40	0
20	18	0

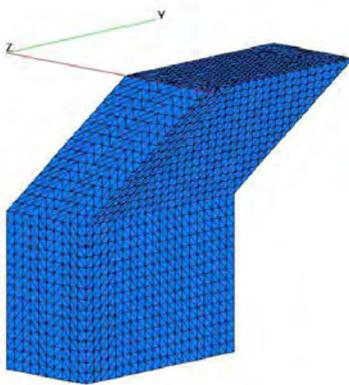
Tabella 7.5: Numero di nodi attivi a taglio e sforzo normale, per tutti i time step della simulazione, in caso di faglia inclinata



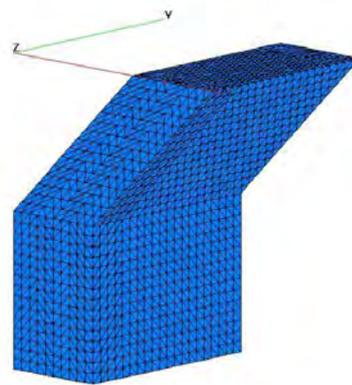
(a) *Time step 1.*



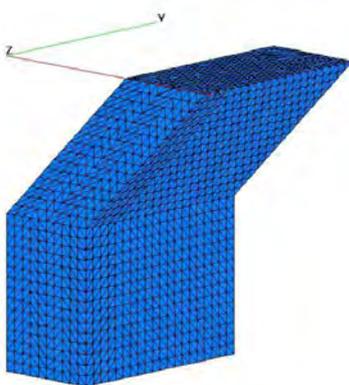
(b) *Time step 2.*



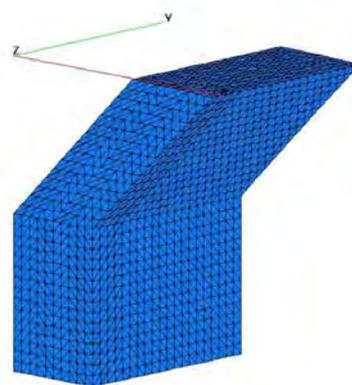
(c) *Time step 3.*



(d) *Time step 4.*



(e) *Time step 5.*



(f) *Time step 6.*

Figura 7.45: Andamento della deformata

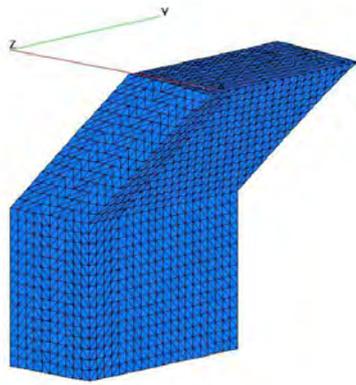
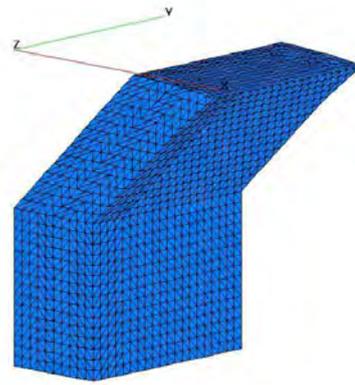
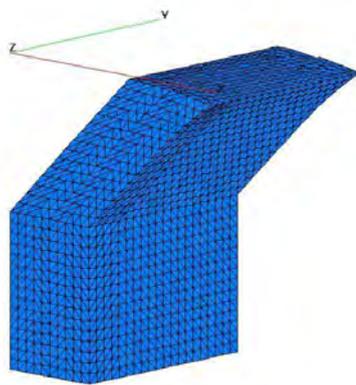
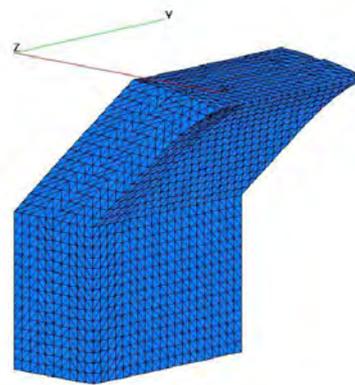
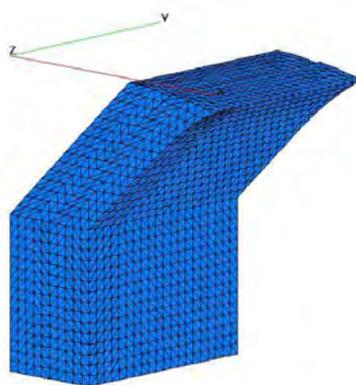
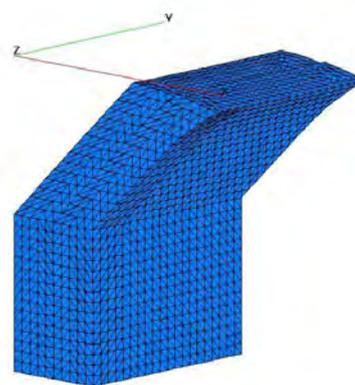
(a) *Time step 7.*(b) *Time step 8.*(c) *Time step 9.*(d) *Time step 10.*(e) *Time step 11.*(f) *Time step 12.*

Figura 7.46: Andamento della deformata

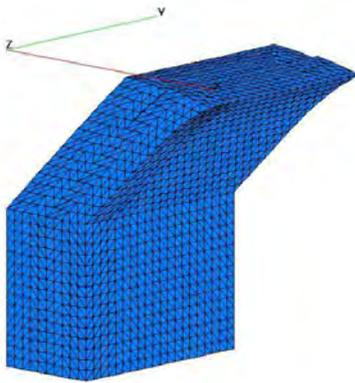
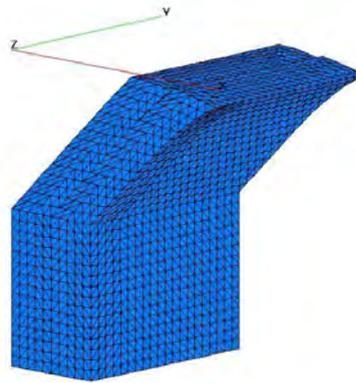
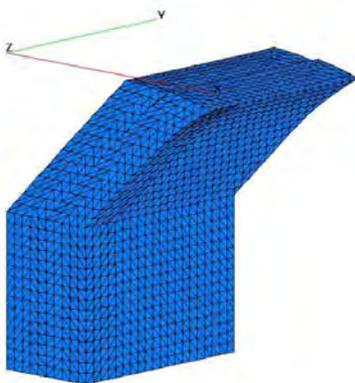
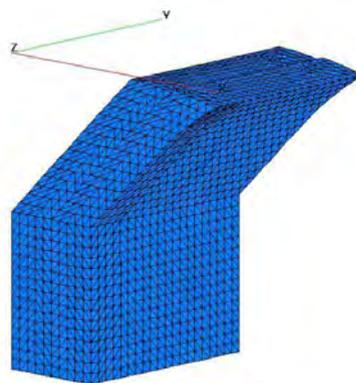
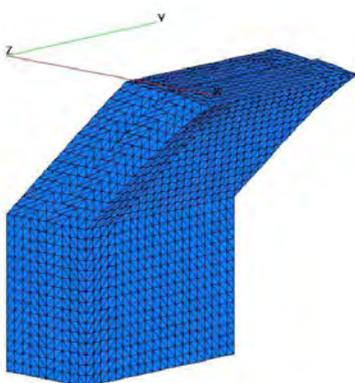
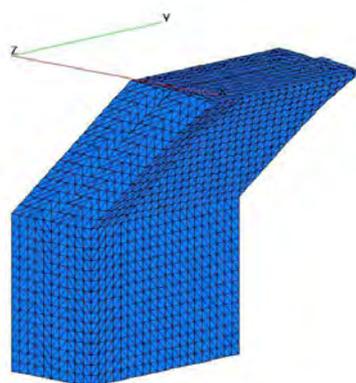
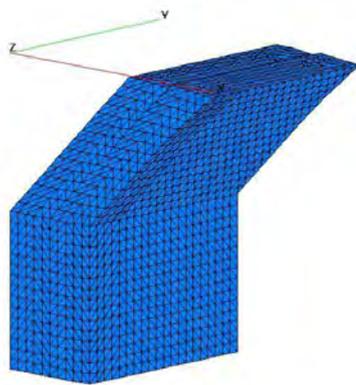
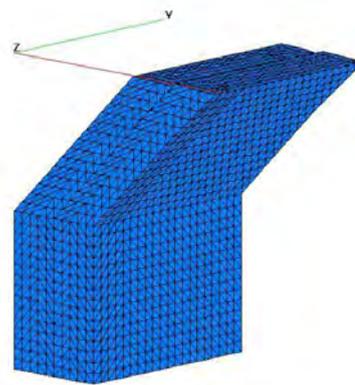
(a) *Time step 13.*(b) *Time step 14.*(c) *Time step 15.*(d) *Time step 16.*(e) *Time step 17.*(f) *Time step 18.*

Figura 7.47: Andamento della deformata



(a) *Time step 19.*



(b) *Time step 20.*

Figura 7.48: Andamento della deformata

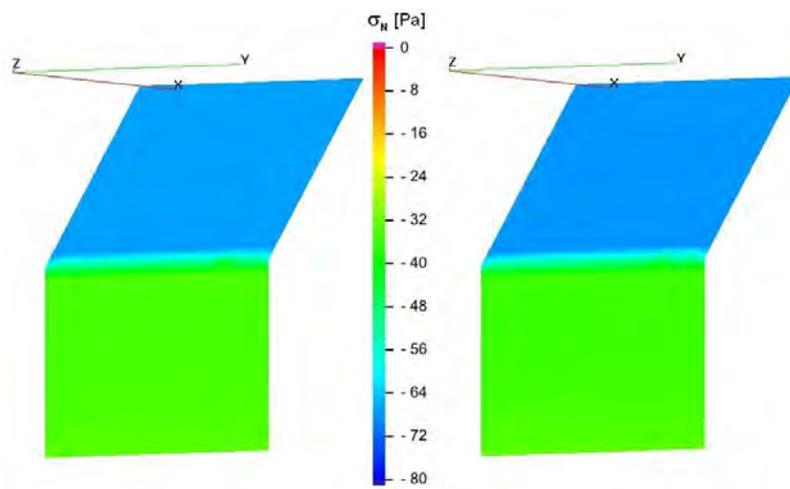
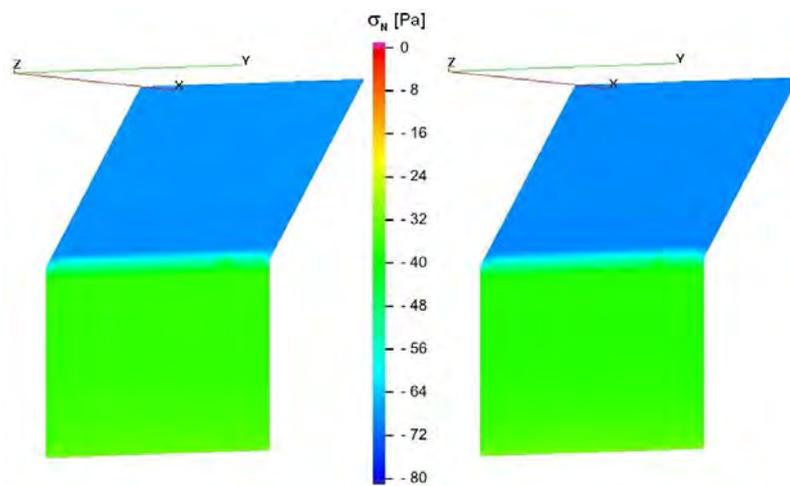
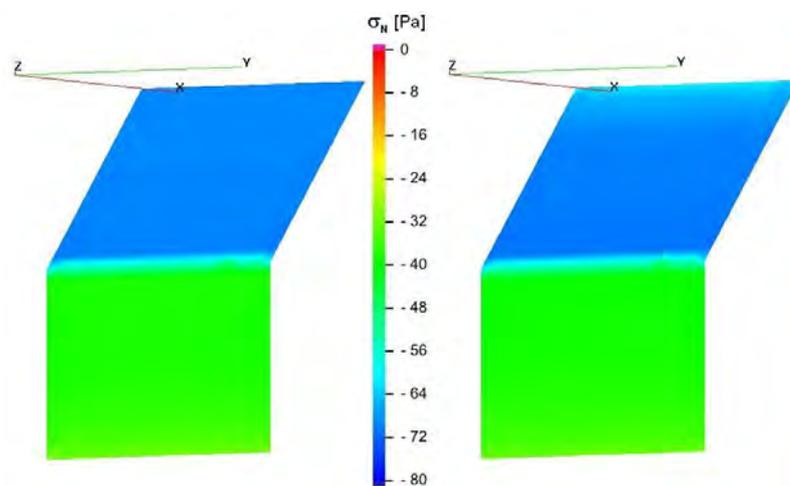
(a) *Time step 1, 2.*(b) *Time step 3, 4.*(c) *Time step 5, 6.*

Figura 7.49: Andamento della tensione normale

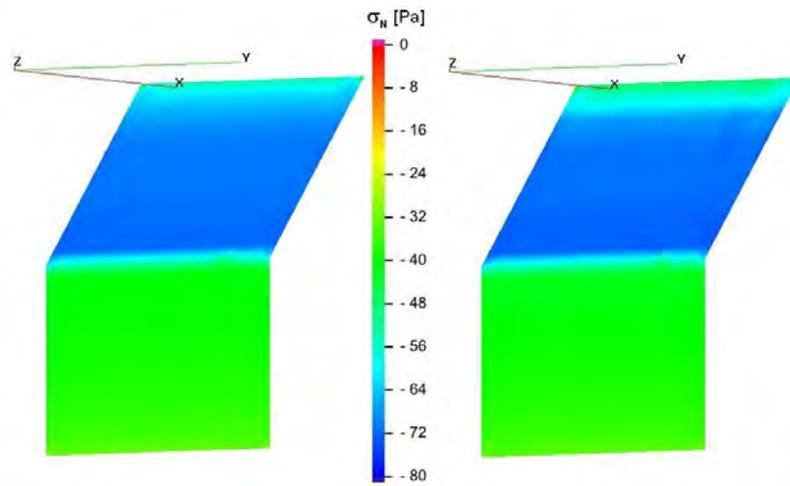
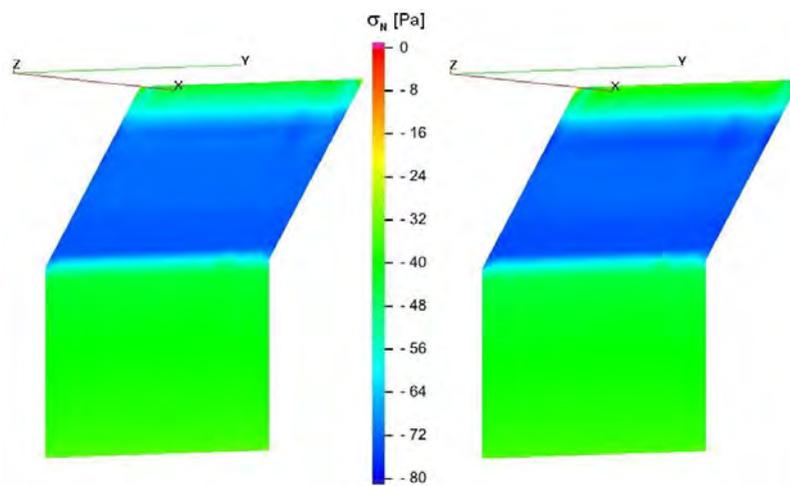
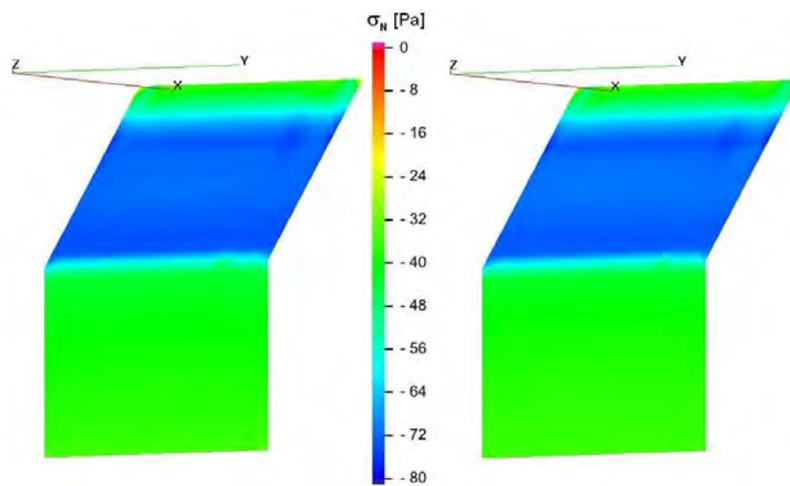
(a) *Time step 7, 8.*(b) *Time step 9, 10.*(c) *Time step 11, 12.*

Figura 7.50: Andamento della tensione normale

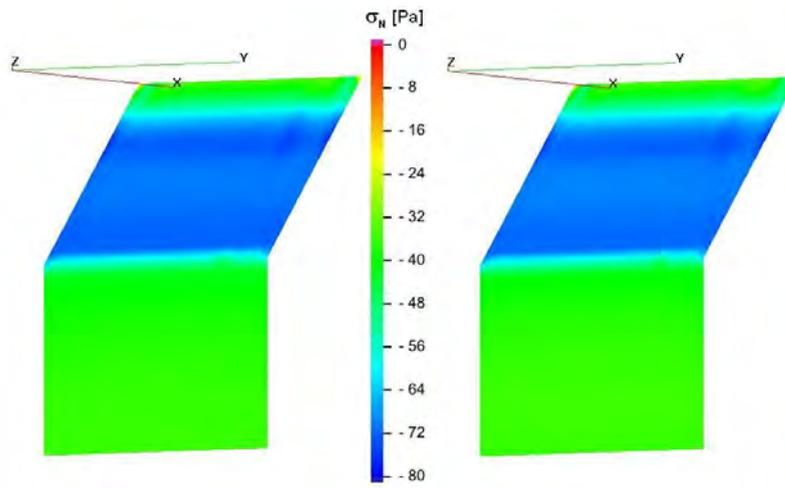
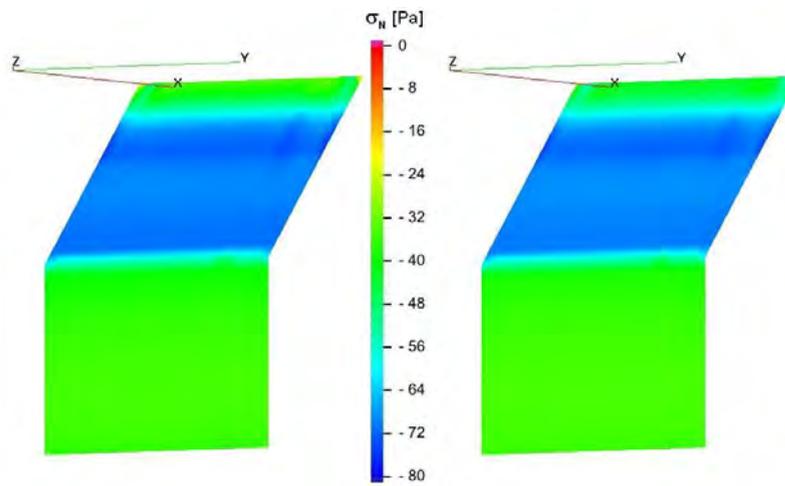
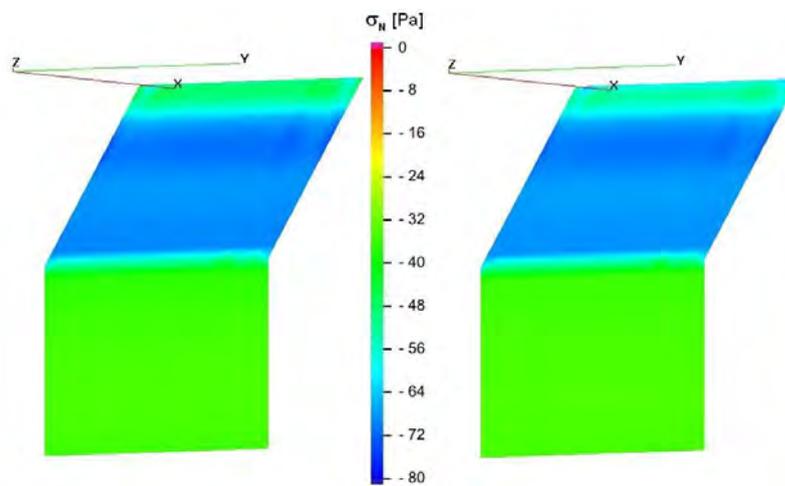
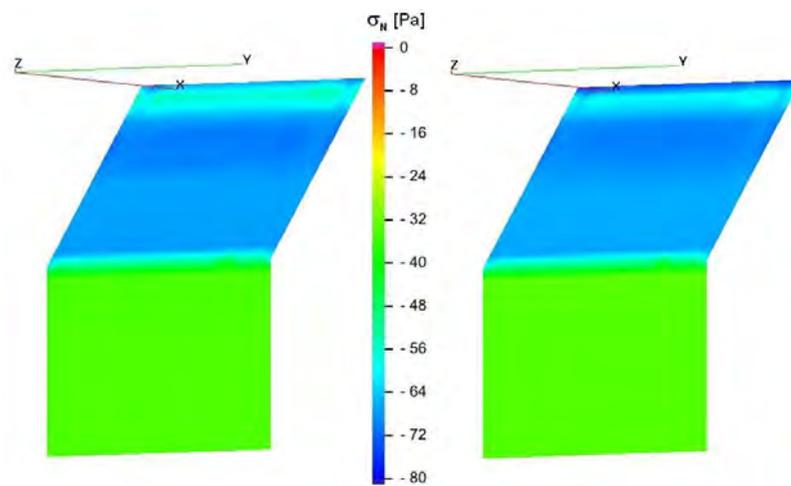
(a) *Time step 13, 14.*(b) *Time step 15, 16.*(c) *Time step 17, 18.*

Figura 7.51: Andamento della tensione normale



(a) *Time step 19, 20.*

Figura 7.52: Andamento della tensione normale

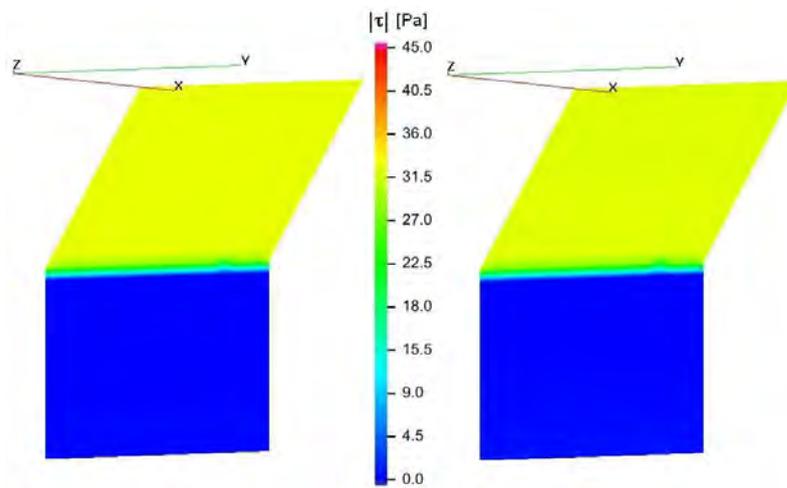
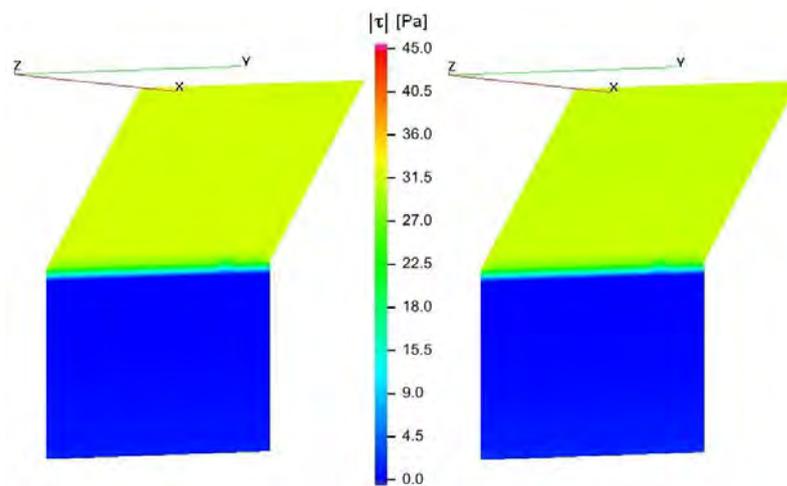
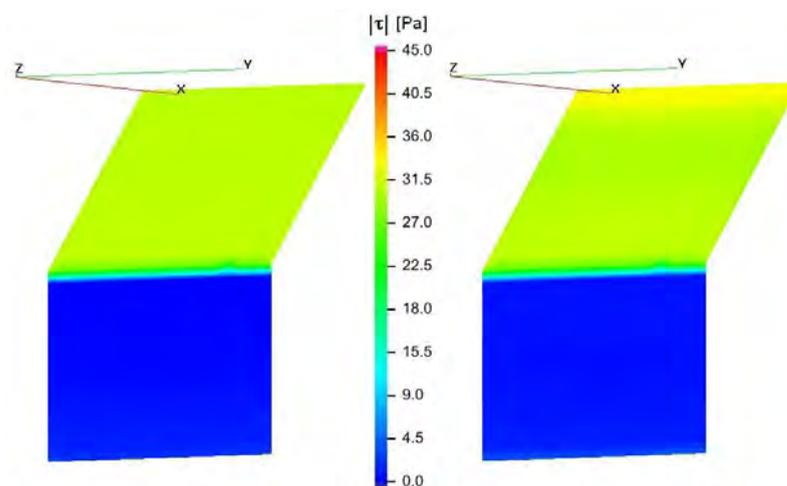
(a) *Time step 1, 2.*(b) *Time step 3, 4.*(c) *Time step 5, 6.*

Figura 7.53: Andamento del modulo della tensione tangenziale

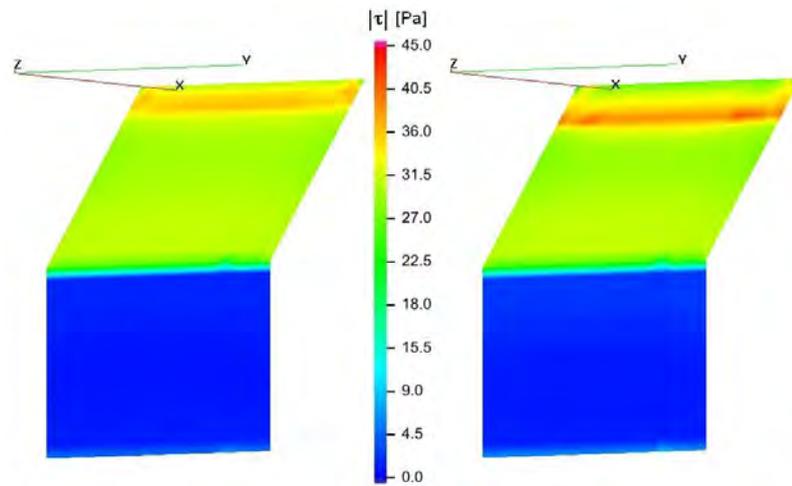
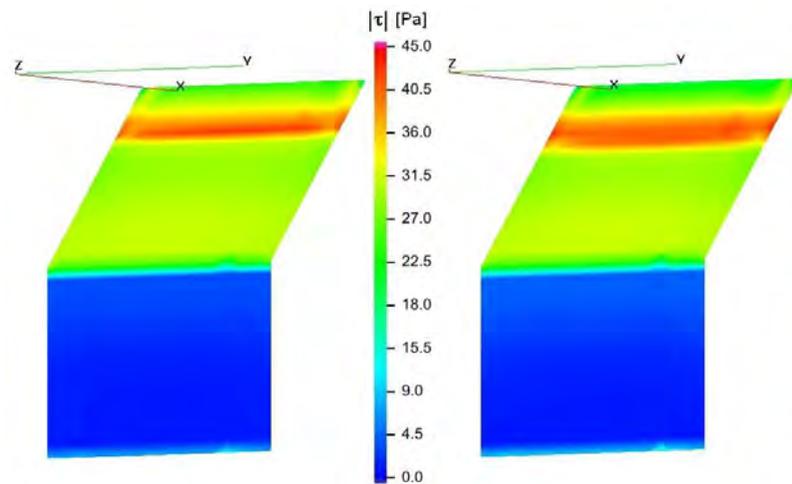
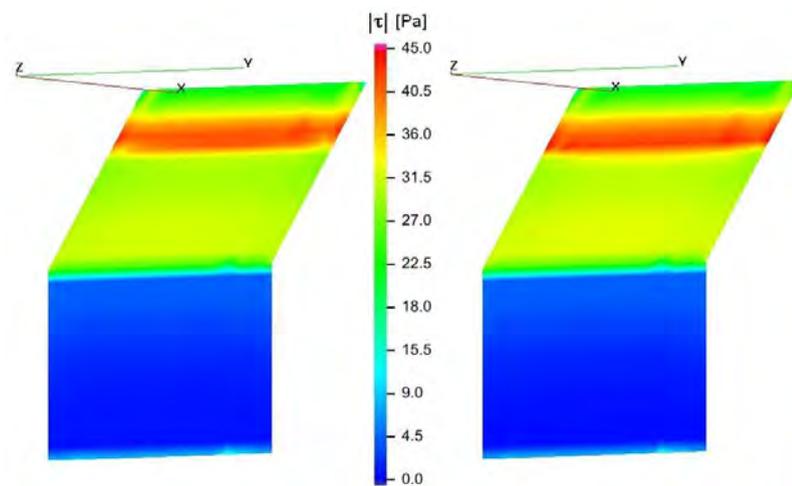
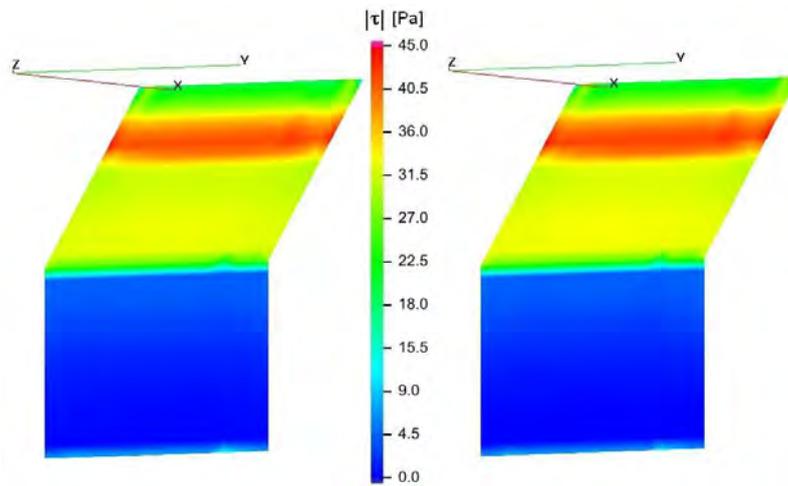
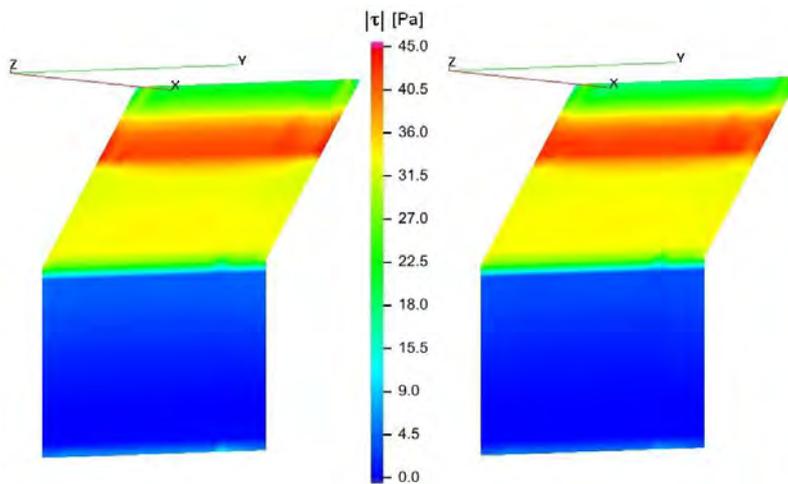
(a) *Time step 7, 8.*(b) *Time step 9, 10.*(c) *Time step 11, 12.*

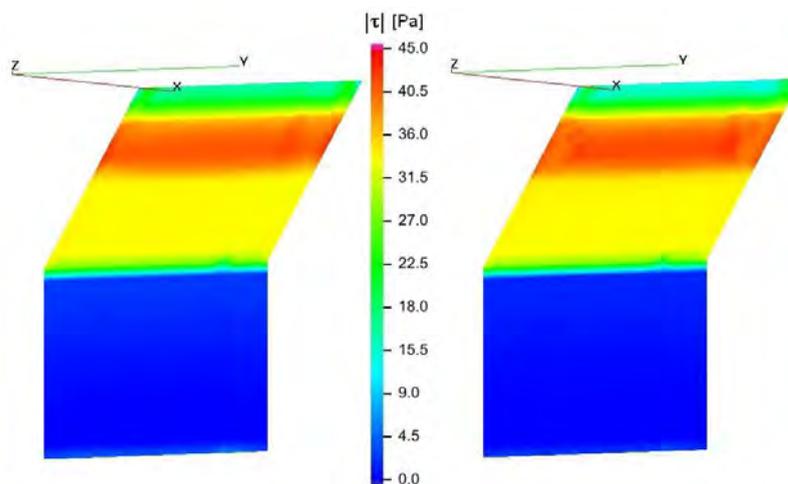
Figura 7.54: Andamento del modulo della tensione tangenziale



(a) Time step 13, 14.

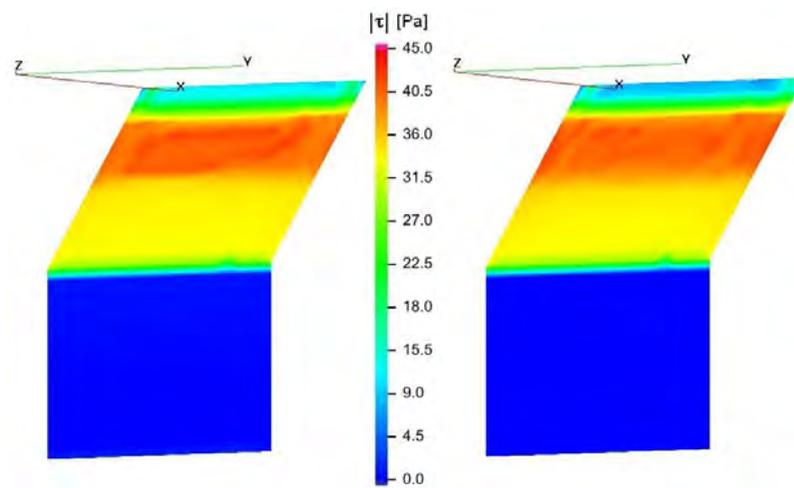


(b) Time step 15, 16.



(c) Time step 17, 18.

Figura 7.55: Andamento del modulo della tensione tangenziale



(a) *Time step 19, 20.*

Figura 7.56: Andamento del modulo della tensione tangenziale

Capitolo 8

Esempio realistico

Per meglio comprendere, in un caso realistico, tutti gli effetti della simulazione delle faglie attraverso il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si è modellato un acquifero sotterraneo superficiale che si sviluppa tra i -20m e i -50m e ha un'estensione in pianta di $20\text{km} \times 30\text{km}$. L'intera mesh ha dimensioni di $30\text{km} \times 30\text{km}$, in pianta, per un'altezza di 50m . Il complesso è composto da 3 materiali:

- un materiale roccioso molto rigido, con bassissima permeabilità, separato dalla restante parte da una faglia verticale;
- uno strato di argilla di spessore 20m , che ricopre l'acquifero. L'argilla limita molto il propagarsi delle variazioni di pressione;
- l'acquifero, da cui si estrae portata, da tre pozzi allineati.

La faglia non è completamente passante. Per maggiore realismo, la faglia è “cucita” ai lati e alla base. L'unico lato libero è quello superiore. I tre pozzi distano 5km , sia tra loro che dalla faglia.

La pianta della mesh è rappresentata in figura 8.1, dove si può notare la divisione tra materiale roccioso, a sinistra, rappresentato in blu, e argilla, a destra, in rosso. Essendo l'acquifero posto sotto lo stato di argilla, in pianta si vede solo quest'ultima. La faglia corre lungo la discontinuità.

La mesh senza faglia è composta da 256662 tetraedri, con 46560 nodi. Con l'introduzione degli elementi di interfaccia, si hanno sempre 256662 tetraedri, ma i nodi diventano 47946 . Gli elementi di interfaccia a 4 nodi sono 128 , quelli a 5 nodi sono 124 , e, infine, quelli a 6 nodi sono 2548 , per un totale di 2800 elementi finiti di interfaccia. Complessivamente, ci sono 1386 coppie di nodi cui è associato un moltiplicatore di Lagrange, ovvero coppie di nodi di faglia attivabili.

8.1 Simulazione di flusso e parametri caratteristici

Nella presente simulazione si adotta un approccio disaccoppiato, in cui, con la medesima discretizzazione del dominio, prima si calcolano le pressioni dovute all'estrazione di portata, e, poi, utilizzando queste ultime come forzanti esterne, si calcolano spostamenti e tensioni. Le faglie intervengono solo nella seconda fase.

Il materiale presenta un comportamento ipoplastico isteretico, in funzione della profondità e dello stato tensionale efficace.

Solo una volta determinato il campo di pressione si inseriscono, nella mesh formata da classici elementi finiti, gli elementi di interfaccia, rappresentanti la faglia. A livello idraulico, la faglia può essere di tipo *sealing* o *non-sealing*, come già descritto nel paragrafo 4.7. In questo caso, la faglia, sviluppata in verticale, lungo la discontinuità tra il materiale roccioso rigido e gli altri due strati, si considera di tipo *sealing*, ovvero costituente barriera idraulica alla trasmissione di fluido e pressione.

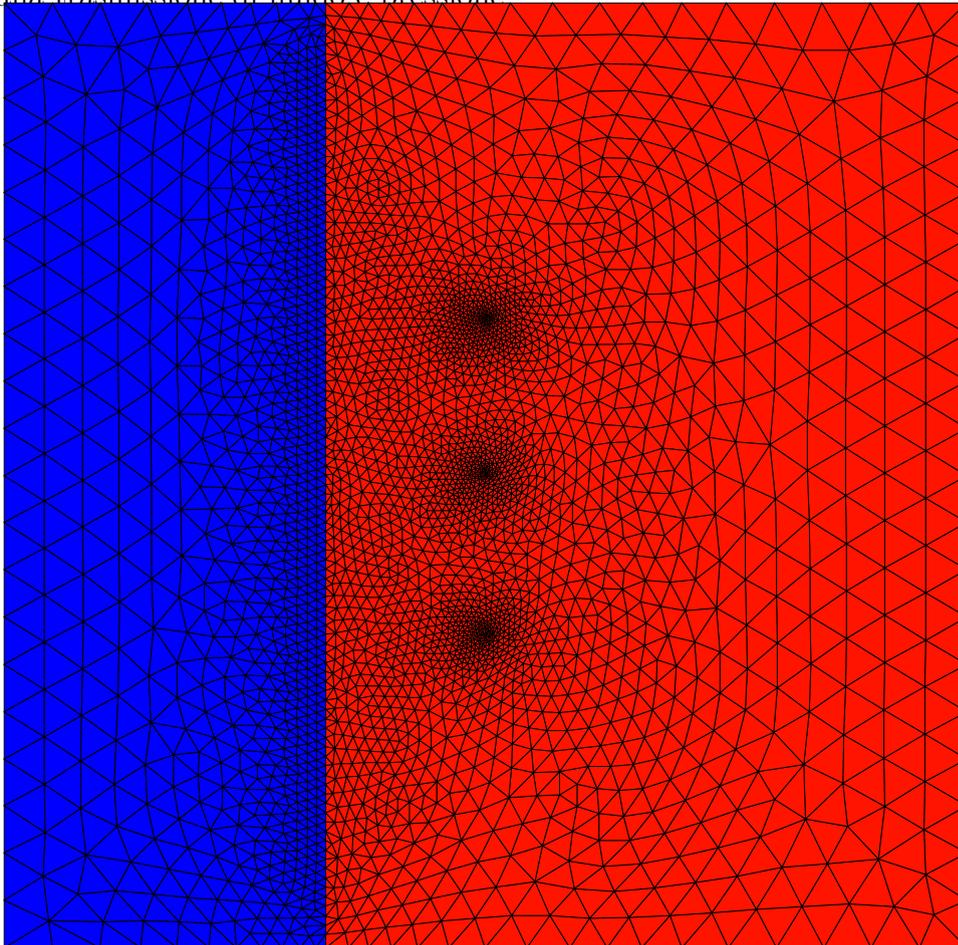


Figura 8.1: Pianta della mesh in analisi. Si notano immediatamente le posizioni dei 3 pozzi, tutti nella regione rossa, corrispondente alla proiezione dell'acquifero

In figura 8.2 si riporta la discretizzazione della faglia, più rada a livello dell'argilla e più fitta a livello dell'acquifero. L'asse verticale z è amplificato di 50 volte rispetto all'asse y orizzontale.

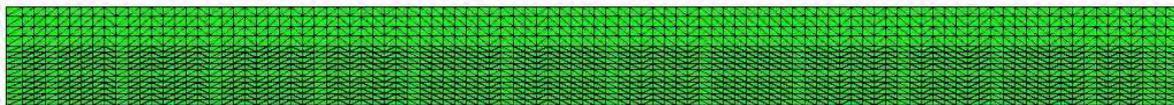


Figura 8.2: Discretizzazione della faglia

Infine, in figura 8.3, si riporta l'intera mesh, in cui si individuano i tre materiali, acquifero in verde, argilla in violetto e roccia in rosso.

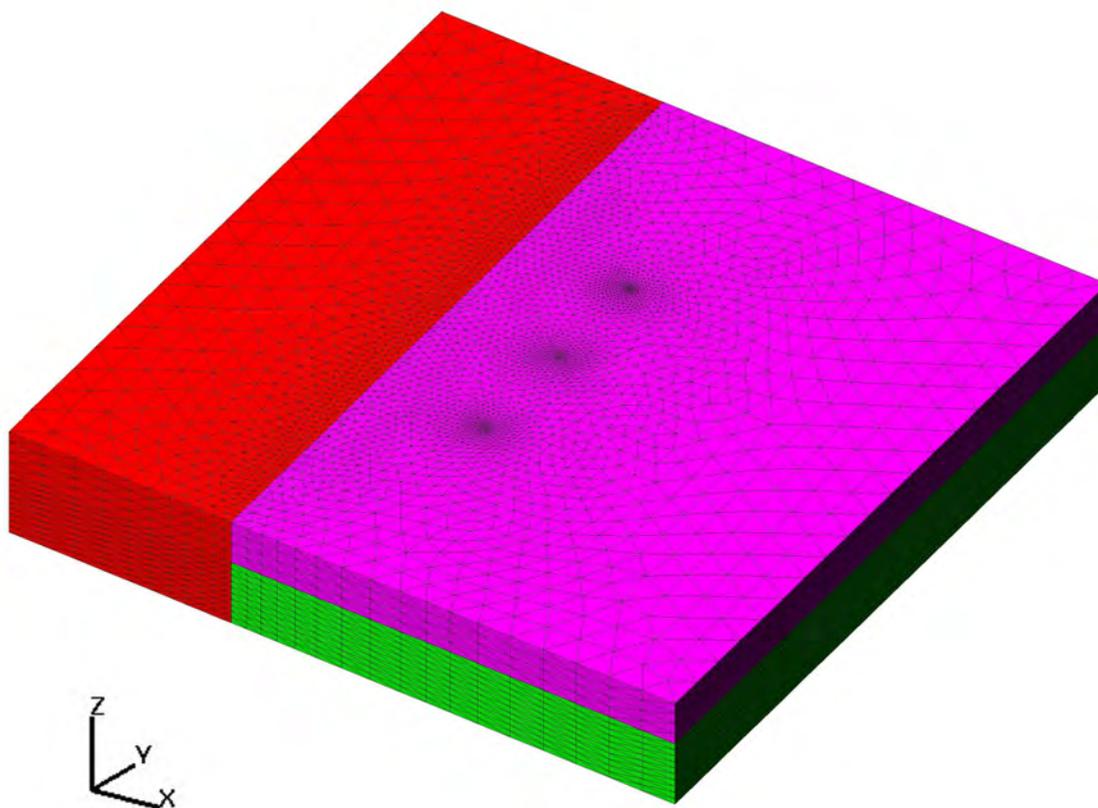


Figura 8.3: Discretizzazione 3D del dominio

8.1.1 Parametri fisici del materiale

Per quanto concerne i parametri fisici dei materiali, in tabella 8.1 si riportano i valori di permeabilità, porosità e compressibilità scelti. La comprimibilità dell'acqua è $\beta = 4.545 \cdot 10^{-10} \text{Pa}^{-1}$, il suo peso specifico è $\gamma_w = 9810 \text{N/m}^3$. Si noti come i due strati,

intorno all'acquifero, siano praticamente impermeabili. Inoltre, sempre dalla 8.1, si ha che il solo materiale non – lineare è quello che compone l'acquifero. Per tale materiale, i valori in tabella sono riferiti alla fase di carico.

Materiale	Permeabilità [m/s]	n_0	E [MPa]	ν	C_m [Pa ⁻¹]	C_R
Acquifero	10^{-4}	0.30	50	0.25	$1.667 \cdot 10^{-8}$	3.0
Argilla	10^{-10}	0.15	50	0.25	$1.667 \cdot 10^{-8}$	–
Roccia	10^{-10}	0.15	500	0.25	$1.667 \cdot 10^{-8}$	–

Tabella 8.1: Parametri fisici del materiale

I parametri fisici, che caratterizzano le faglie, in particolare il criterio di rottura di Mohr – Coulomb, sono coesione $c = 0$ e angolo d'attrito $\phi = 30^\circ$.

In figura 8.4, infine, si rappresenta l'andamento scelto per la tensione efficace verticale litostatica, agente sulla faglia. Si noti che la tensione efficace in superficie è diversa dal valore nullo, per evitare l'apertura della faglia anche senza sollecitazioni esterne.

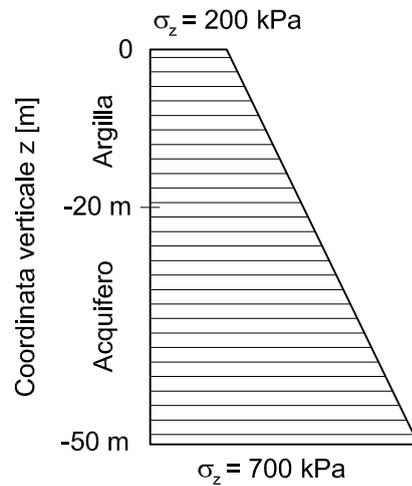


Figura 8.4: Tensione verticale iniziale σ_{z0} , agente sul piano di faglia

8.1.2 Storia delle estrazioni di portata

Da ciascuno dei tre pozzi si estrae una portata che segue l'andamento rappresentato in figura 8.5. Il valore di portata estratta al colmo è $Q_{max} = 300\text{L/s} = 9.47 \cdot 10^6\text{m}^3/\text{y}$.

Le condizioni al contorno sono di Dirichlet, ovvero di variazione di pressione nulla, solo sul lato verticale di destra, nella figura 8.1. In tutto il resto del bordo si impongono condizioni naturali di Neumann, ossia di flusso nullo, eccetto nei nodi simulanti i pozzi, in cui si impone la portata che si vuole estrarre.

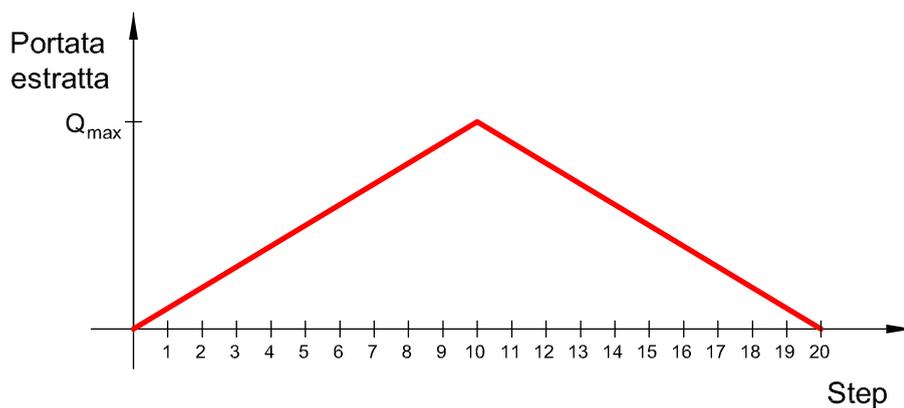


Figura 8.5: Andamento delle estrazioni nel tempo. Nota: il tempo è misurato in anni, con anno 0 l'inizio della simulazione

Per capire come si distribuisce la pressione nell'acquifero, si riporta, in figura 8.6, l'andamento delle variazioni di pressione al 7° time step. L'argilla è investita dalle depressioni con uno scarto temporale rispetto all'acquifero, mentre la roccia non ne risente completamente.

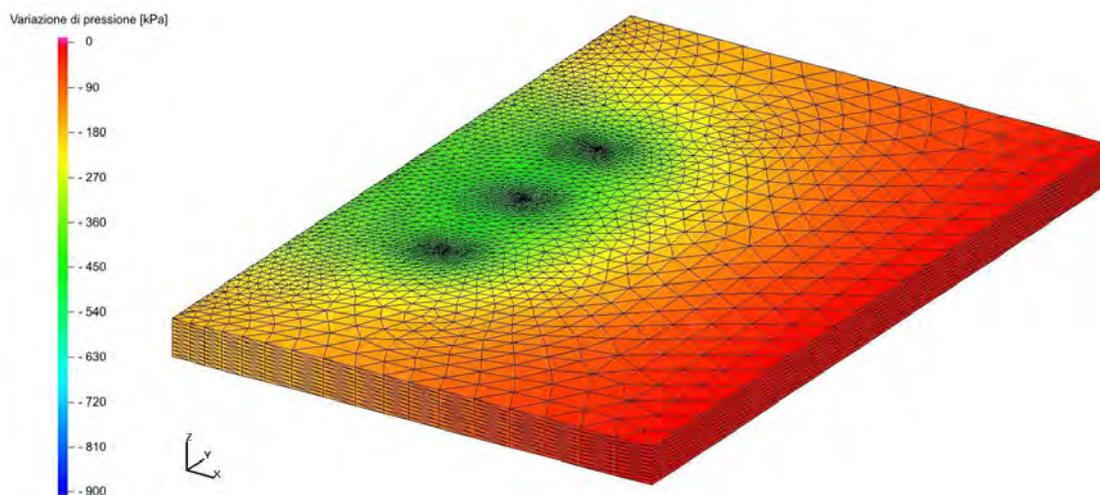


Figura 8.6: Andamento della pressione nell'acquifero, al 7° time step

Nella successiva figura 8.7, si rappresenta l'andamento del volume cumulato, nell'intero dominio, nei vari anni della simulazione. Si noti che il segno è sempre negativo, ossia il volume decresce, causa l'estrazione di portata.

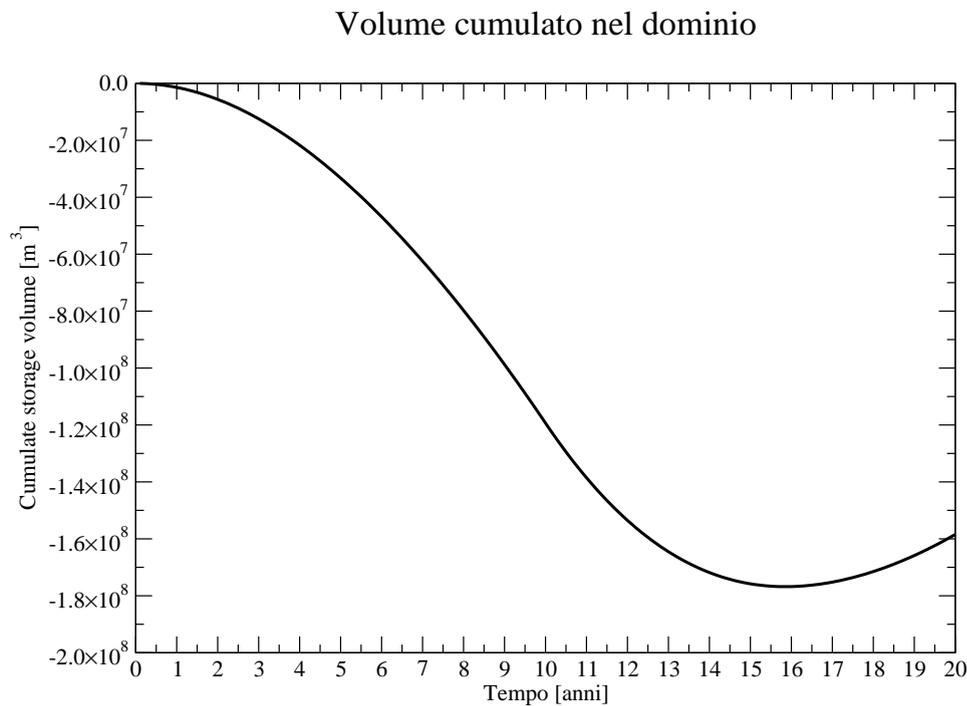


Figura 8.7: Andamento del volume cumulato nel dominio, al variare del tempo

8.2 Risultati

Si riportano, nelle figure 8.8, 8.9, 8.10 e 8.11, una serie di immagini rappresentanti le deformate, colorate per importanza dello spostamento verticale, ovvero per subsidenza, a ogni time step.

In seguito, si riportano gli andamenti della tensione normale, figure 8.12 e 8.13, e del modulo della tensione tangenziale, figure 8.14 e 8.15, per i soli primi 10 time step, dato che dall'11° time step, la faglia è completamente aperta, quindi $\sigma_N = 0$ e $|\tau| = 0$. Infine, per ogni time step, si riportano gli scorrimenti ortogonali al piano di faglia, positivi in apertura, nelle figure 8.16, 8.17, 8.18 e 8.19, e il modulo dello scorrimento nel piano di faglia, nelle figure 8.20, 8.21, 8.22 e 8.23.

Si noti che gli andamenti degli spostamenti ortogonali al piano di faglia, così come le distribuzioni di tensioni tangenziali, risentono della discretizzazione della faglia, figura 8.2. Infatti, i nodi dove convergono più lati si comportano diversamente da quelli con meno lati afferenti. Ciò è dovuto al fatto che nel dominio sono continui gli spostamenti, ma non le loro derivate, che risultano costanti, all'interno del singolo elemento finito, ma presentano dei salti discreti tra elementi contigui.

Per quanto riguarda l'andamento generale dei movimenti nel piano di faglia, prima si attivano alcuni elementi a taglio, a livello dell'argilla, poi lo scorrimento interessa tutta la faglia. Solo a questo punto, cominciano ad aprirsi completamente alcuni elementi, fino ad arrivare alla completa apertura di tutta la faglia. Nella seconda parte della simulazione, si ha che la riduzione di depressione non è sufficiente per far richiudere la faglia, ma soltanto per far riavvicinare le due facce. Si noti che, nonostante si abbia il picco di estrazione al 10° anno, solo dal 15° anno la faglia riduce i suoi movimenti nel piano e la sua apertura. Infatti, solo dal 15° anno si ha un aumento del volume cumulato nel giacimento, grazie alla ricarica laterale, dopo i vari anni di estrazione, che ne fanno decrescere il valore anche oltre l'anno di massima estrazione, come si può notare dalla figura 8.7.

In tabella 8.2, si riporta il numero di elementi attivi a taglio e aperti a sforzo normale, per ogni anno di estrazione.

Anno	Nodi che scorrono a taglio	Nodi aperti a sforzo normale
1	118	0
2	1106	0
3	1362	0
4	1386	0
5	1386	18
6	1386	395
7	1386	733
8	1386	992
9	1386	1290
10	1386	1385
11	1386	1386
12	1386	1386
13	1386	1386
14	1386	1386
15	1386	1386
16	1386	1386
17	1386	1386
18	1386	1386
19	1386	1386
20	1386	1386

Tabella 8.2: Numero di nodi attivi a taglio e sforzo normale, per tutti gli anni della simulazione

Si è eseguito un test anche con acquifero composto da materiale elastico, ovvero con indice di ricompressione unitario $C_R = 1$. In fase di apertura della faglia, gli andamenti di tutte le grandezze sono identici. L'unica differenza si ha in fase di scarico sulla faglia, ot-

tenendo aperture e scorrimenti più piccoli rispetto al modello con materiale non – lineare. Ciò è dovuto alla rigidità maggiore, in fase di scarico, dei materiali ipoplastici.

In merito alla convergenza, sono necessari diversi back step per arrivare a convergenza, specialmente quando cominciano ad aprirsi elementi a sforzo normale. Nel momento in cui si individua l'esatto passo temporale, la convergenza è comunque quadratica, ricordando che oltre alle faglie, in questo esempio, è presente anche la non – linearità del materiale.

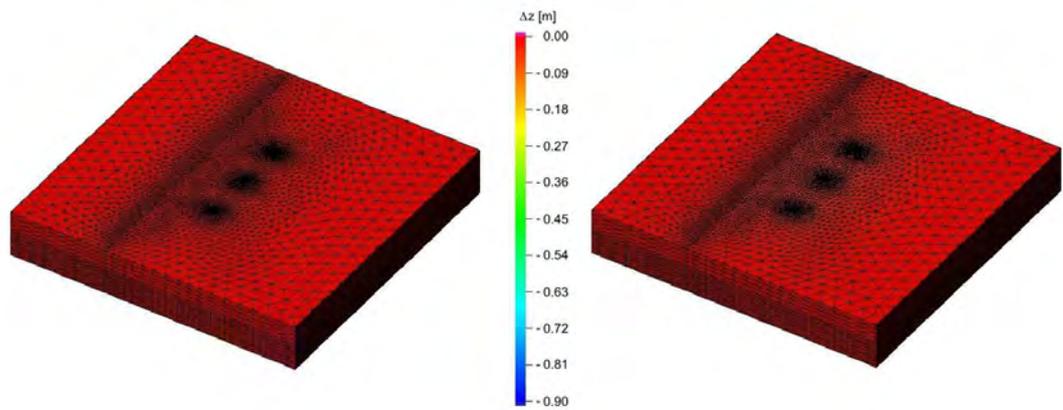
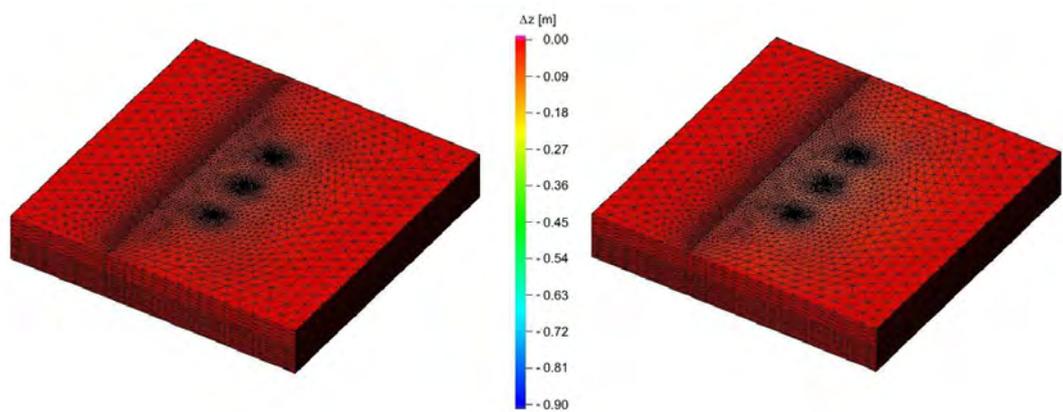
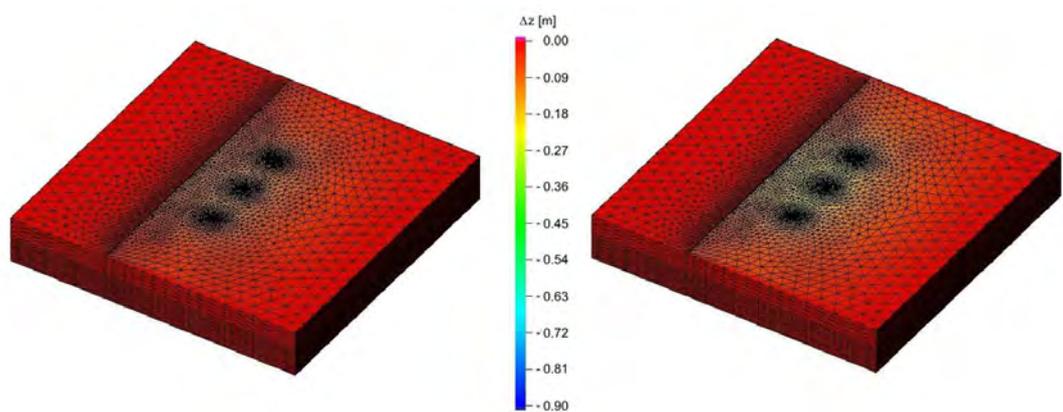
(a) *Time step 1, 2.*(b) *Time step 3, 4.*(c) *Time step 5, 6.*

Figura 8.8: Andamento della subsidenza

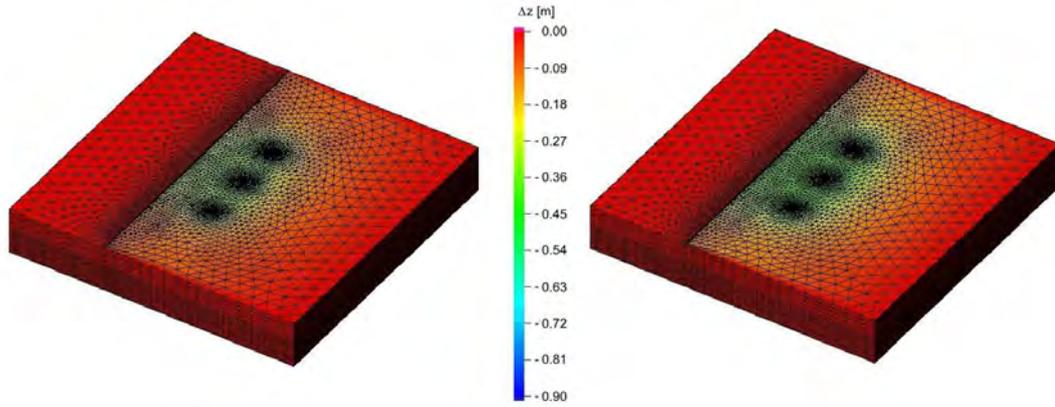
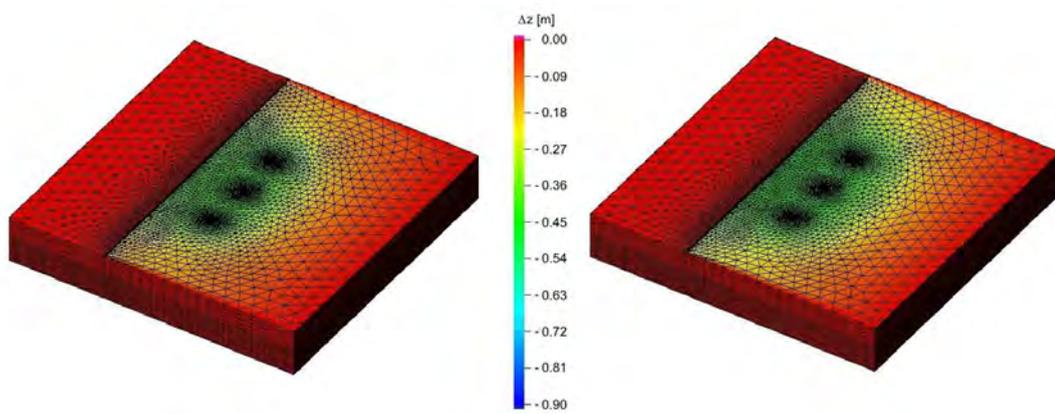
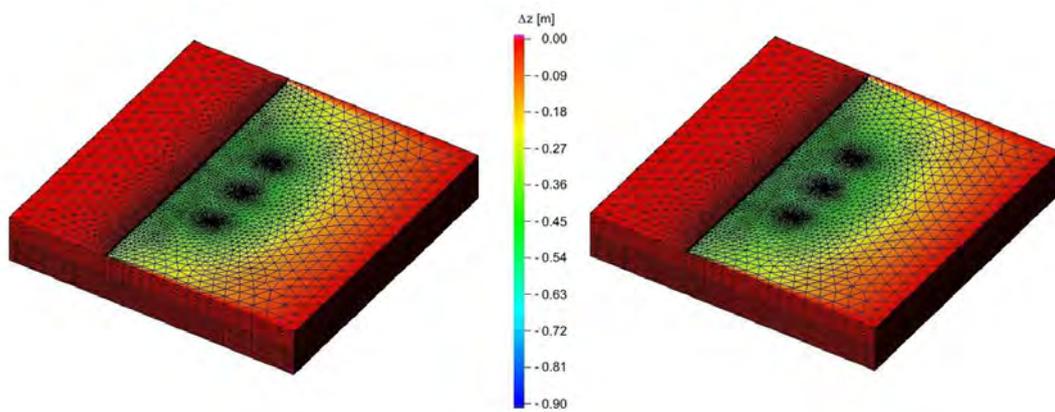
(a) *Time step 7, 8.*(b) *Time step 9, 10.*(c) *Time step 11, 12.*

Figura 8.9: Andamento della subsidenza

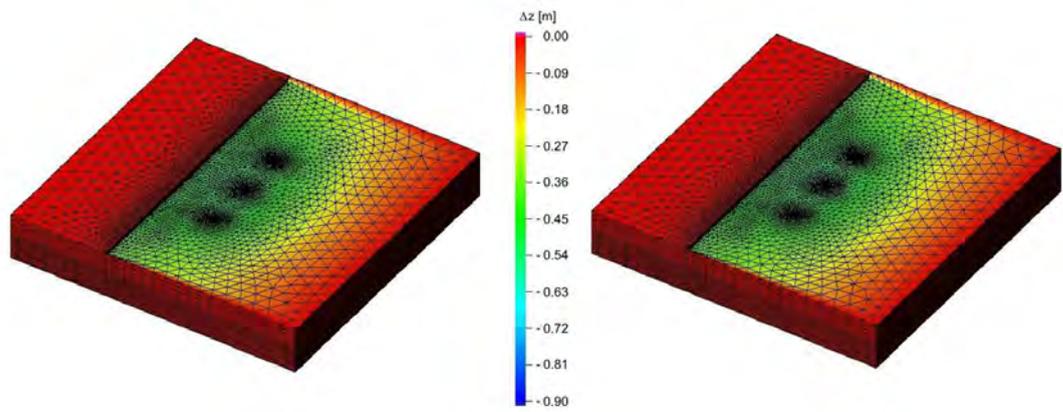
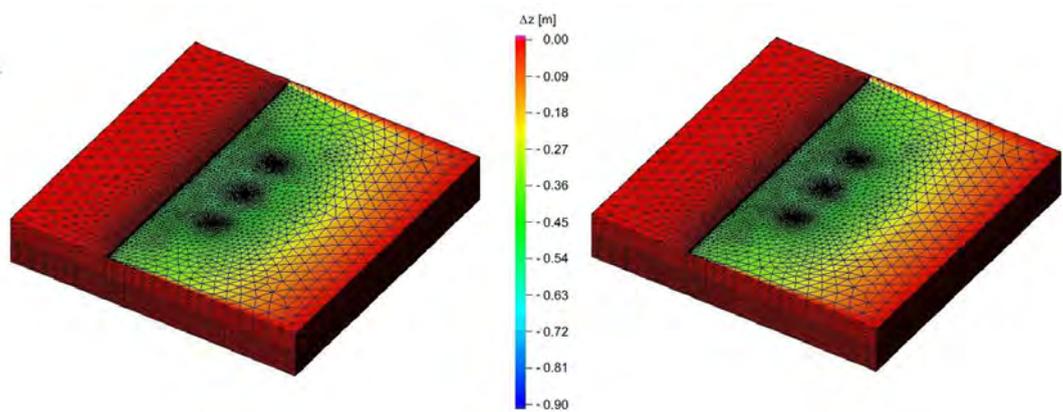
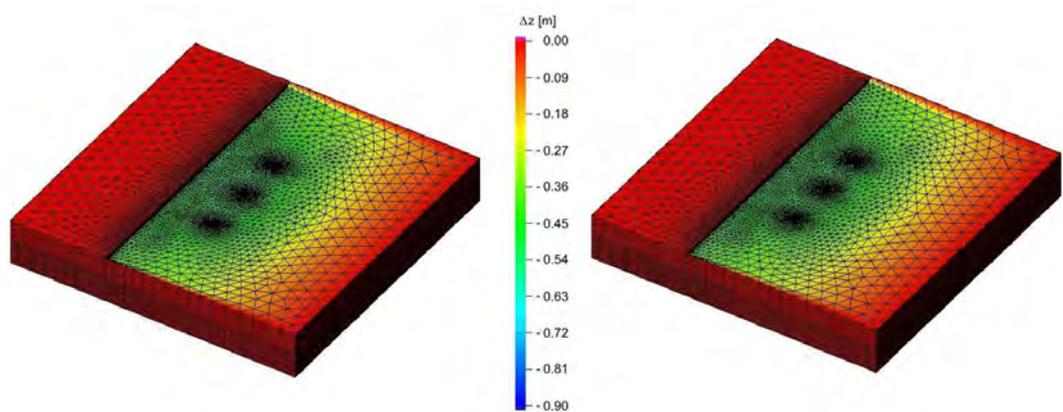
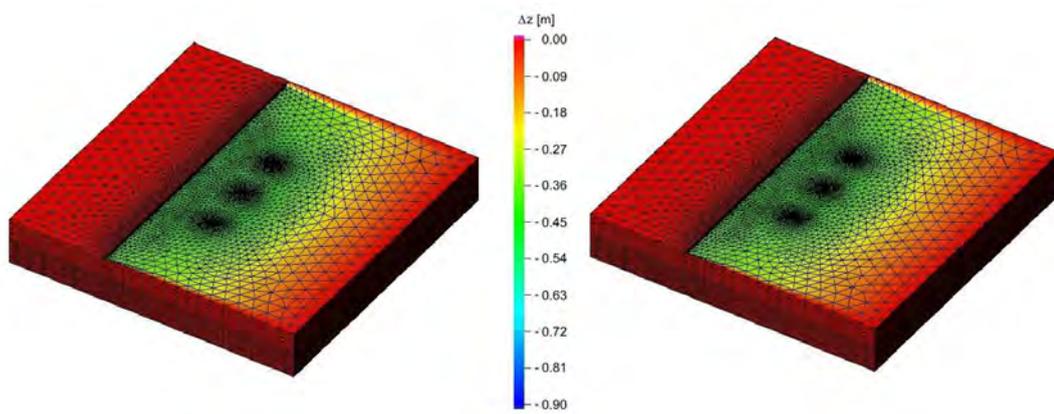
(a) *Time step 13, 14.*(b) *Time step 15, 16.*(c) *Time step 17, 18.*

Figura 8.10: Andamento della subsidenza



(a) *Time step 19, 20.*

Figura 8.11: Andamento della subsidenza

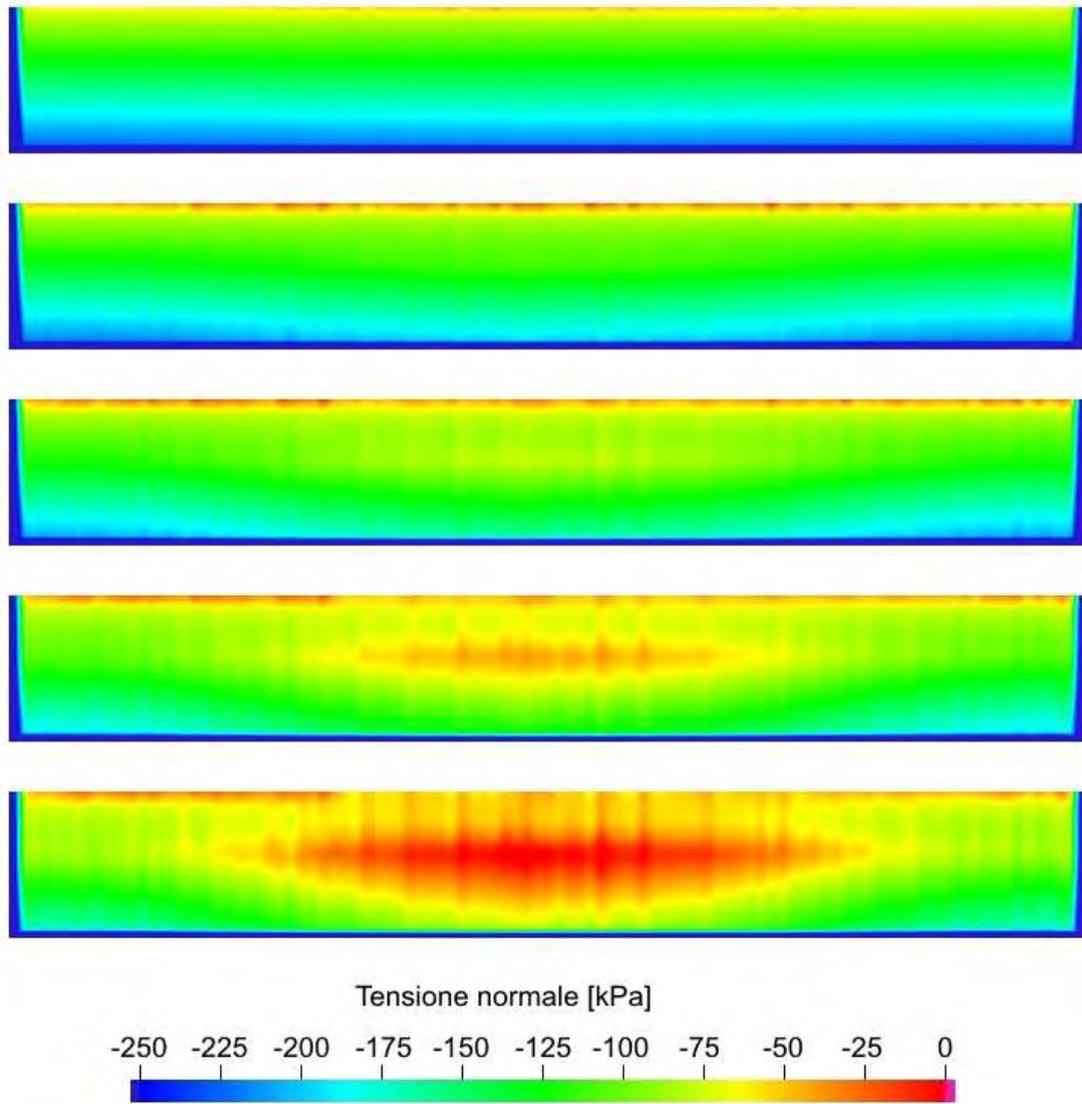


Figura 8.12: Andamento della tensione normale. Time step 1 – 5

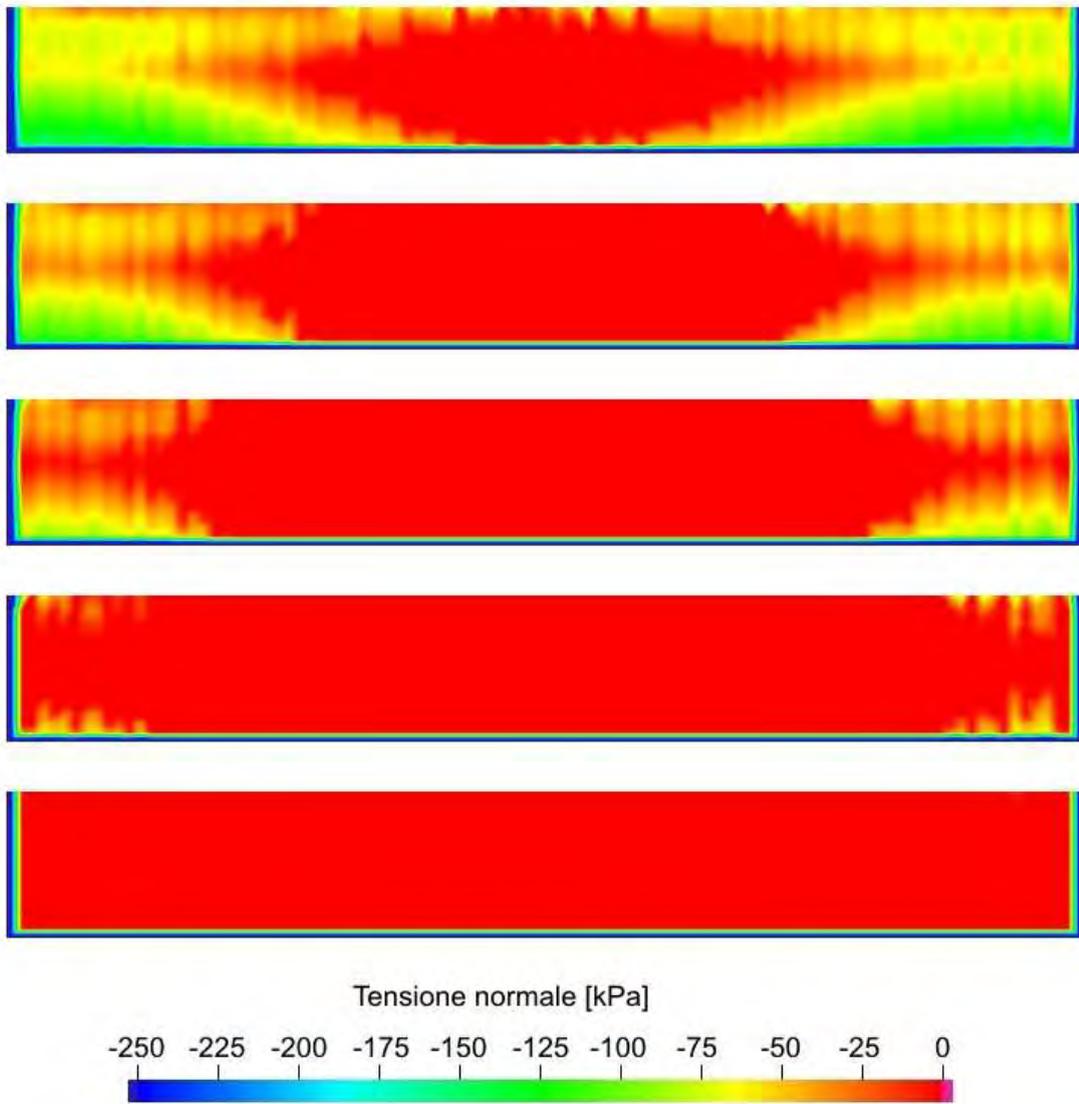


Figura 8.13: Andamento della tensione normale. Time step 6 – 10

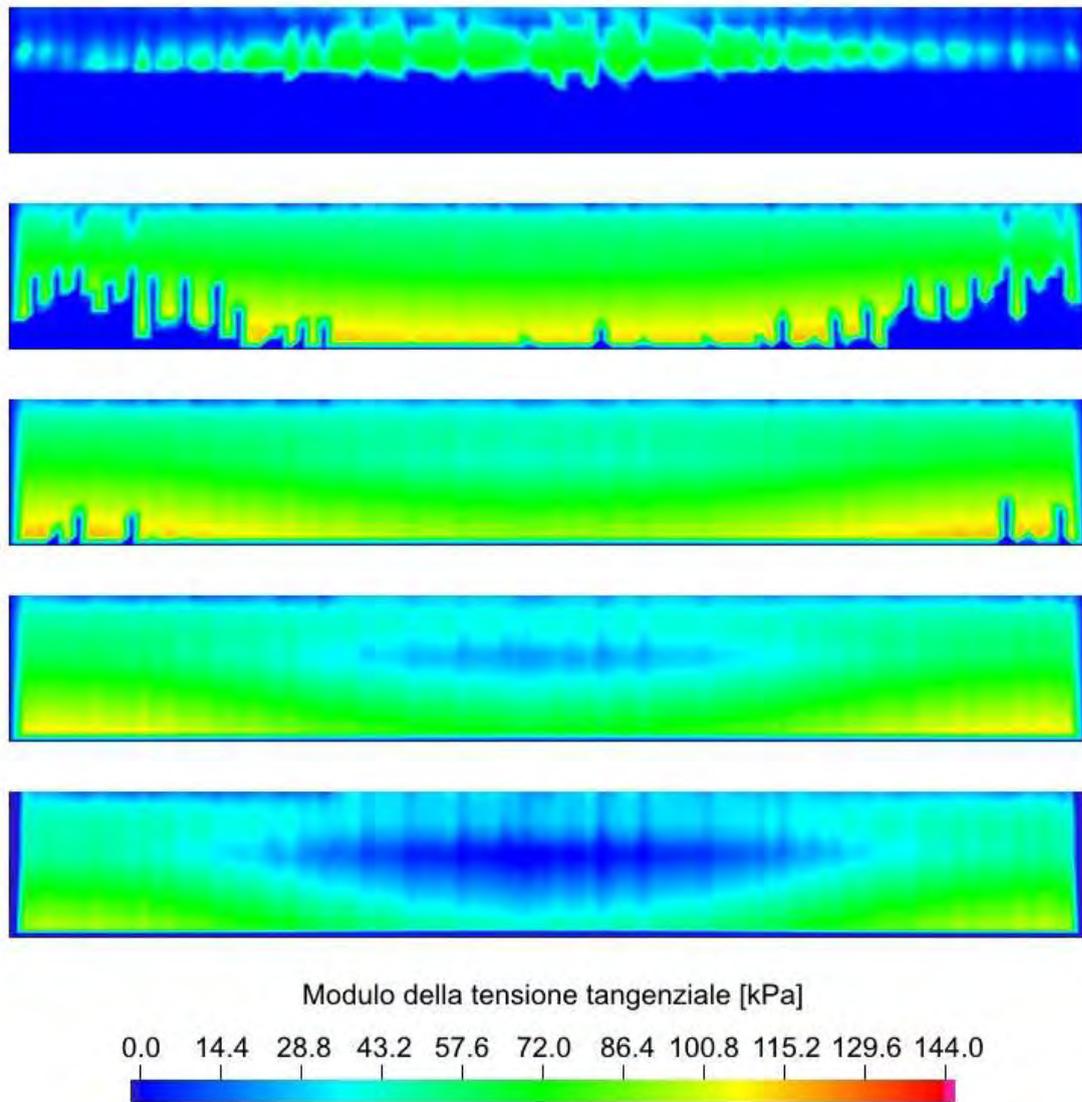


Figura 8.14: Andamento del modulo della tensione tangenziale. Time step 1 – 5

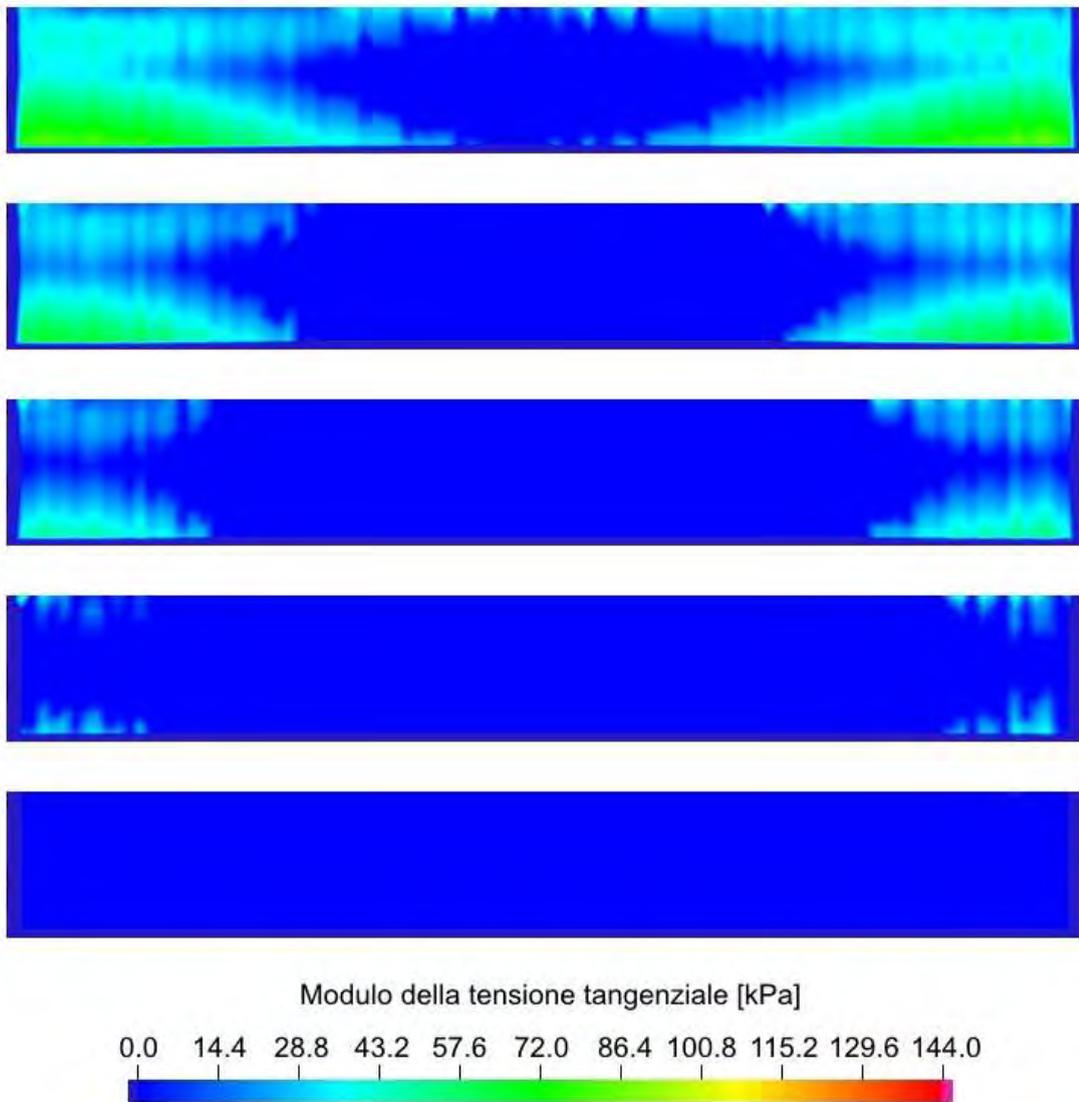


Figura 8.15: Andamento del modulo della tensione tangenziale. Time step 6 – 10

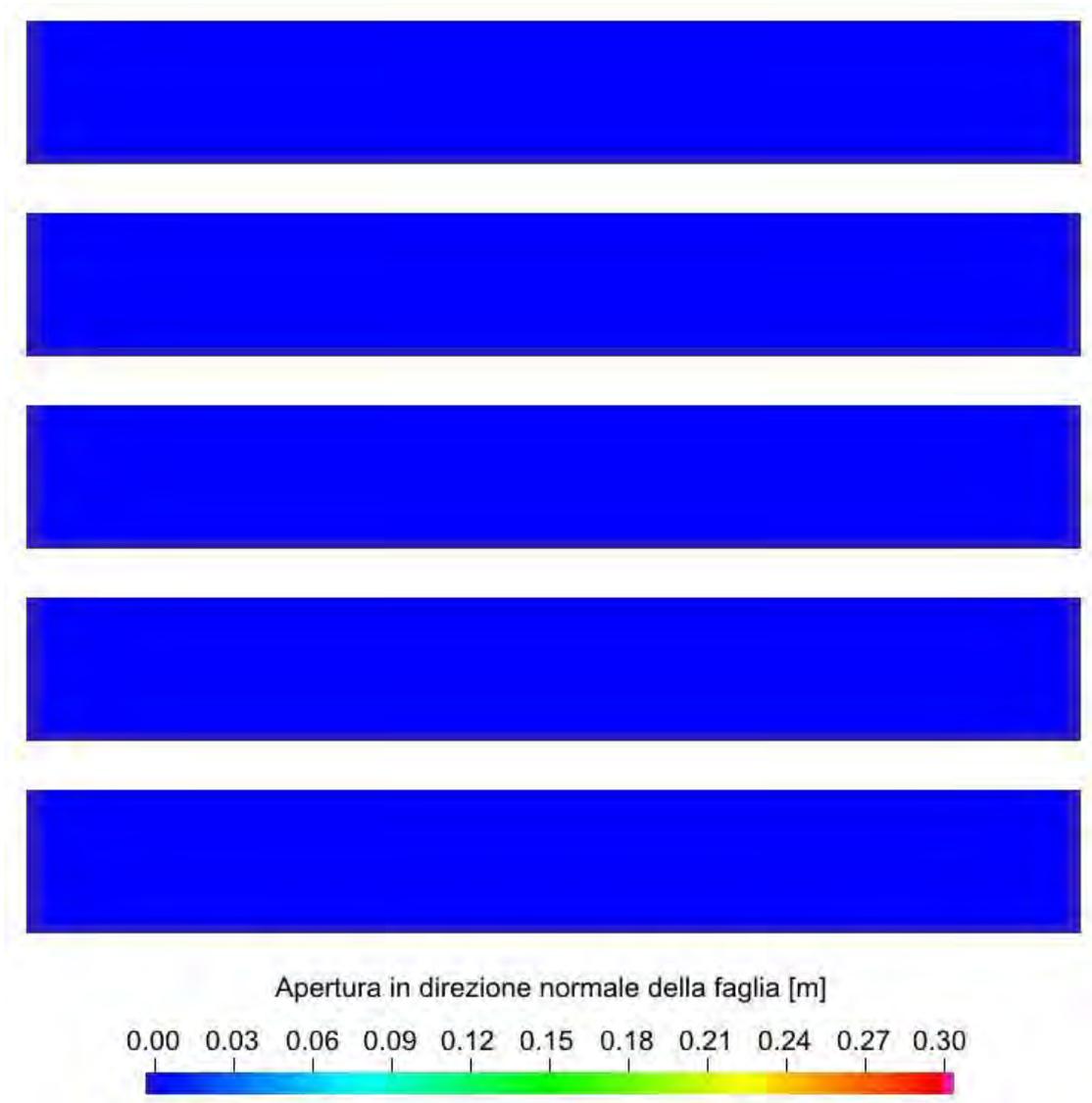


Figura 8.16: Apertura normale al piano di faglia. Time step 1 – 5

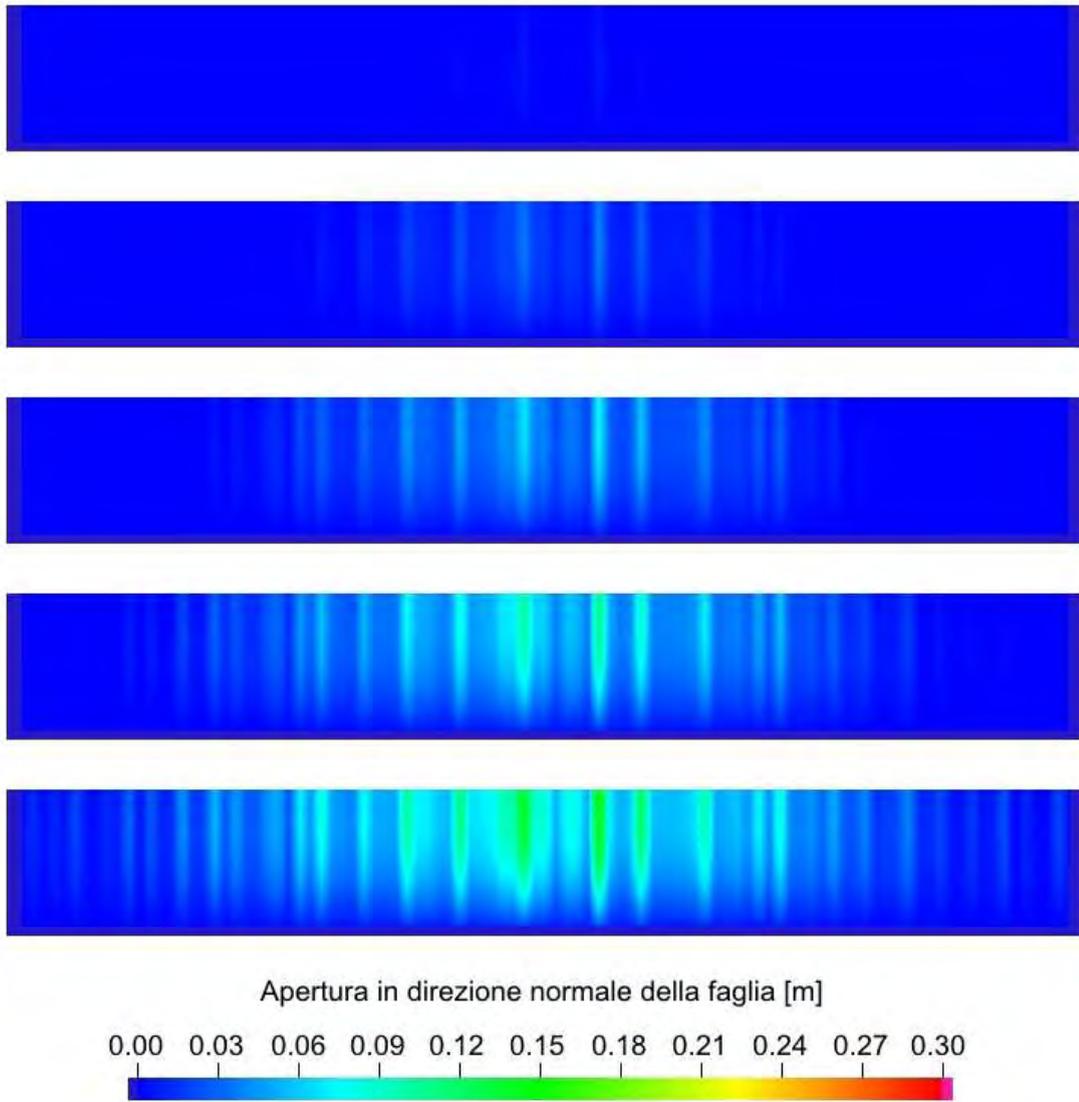


Figura 8.17: Apertura normale al piano di faglia. Time step 6 – 10

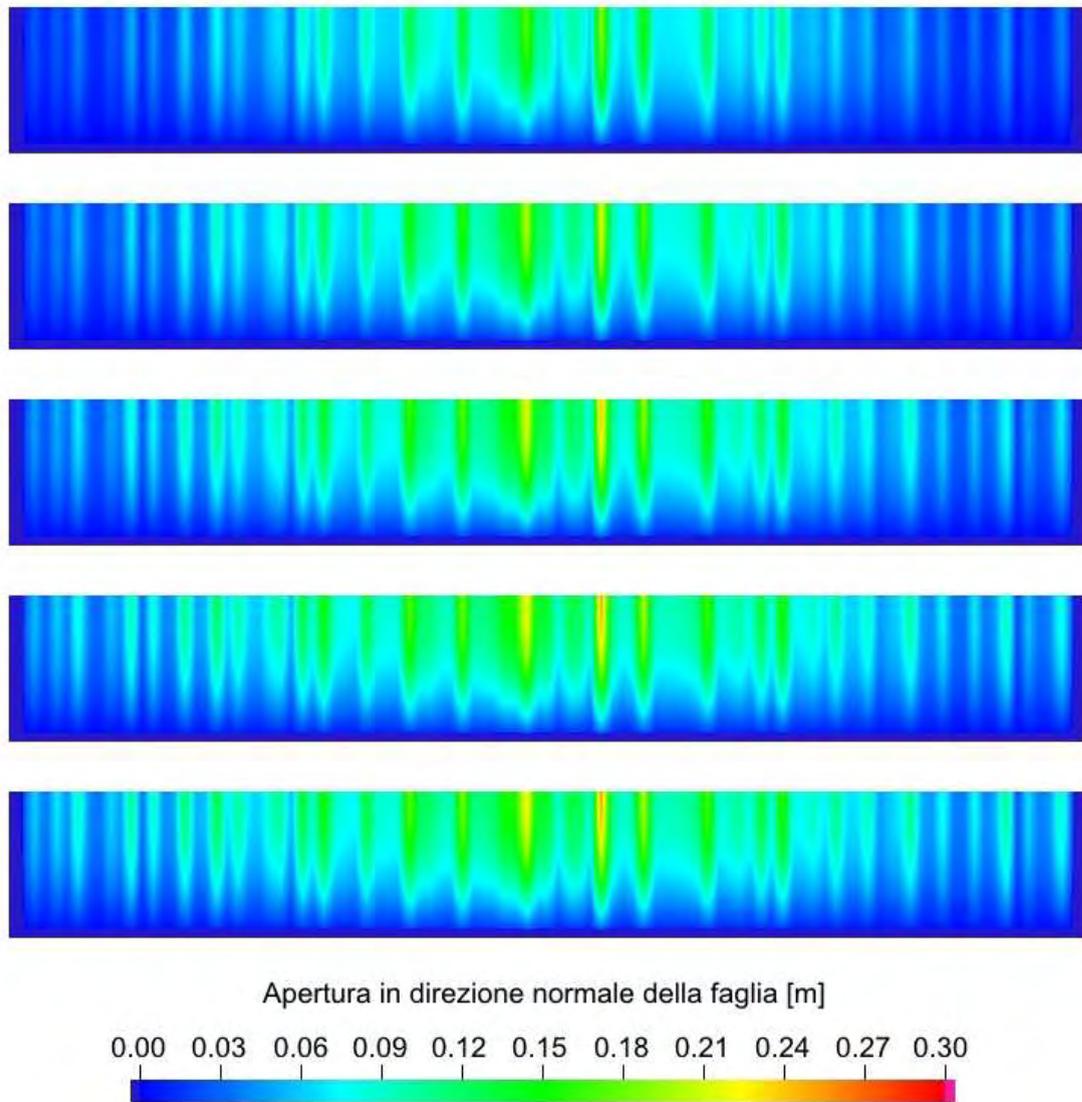


Figura 8.18: Apertura normale al piano di faglia. Time step 11 – 15

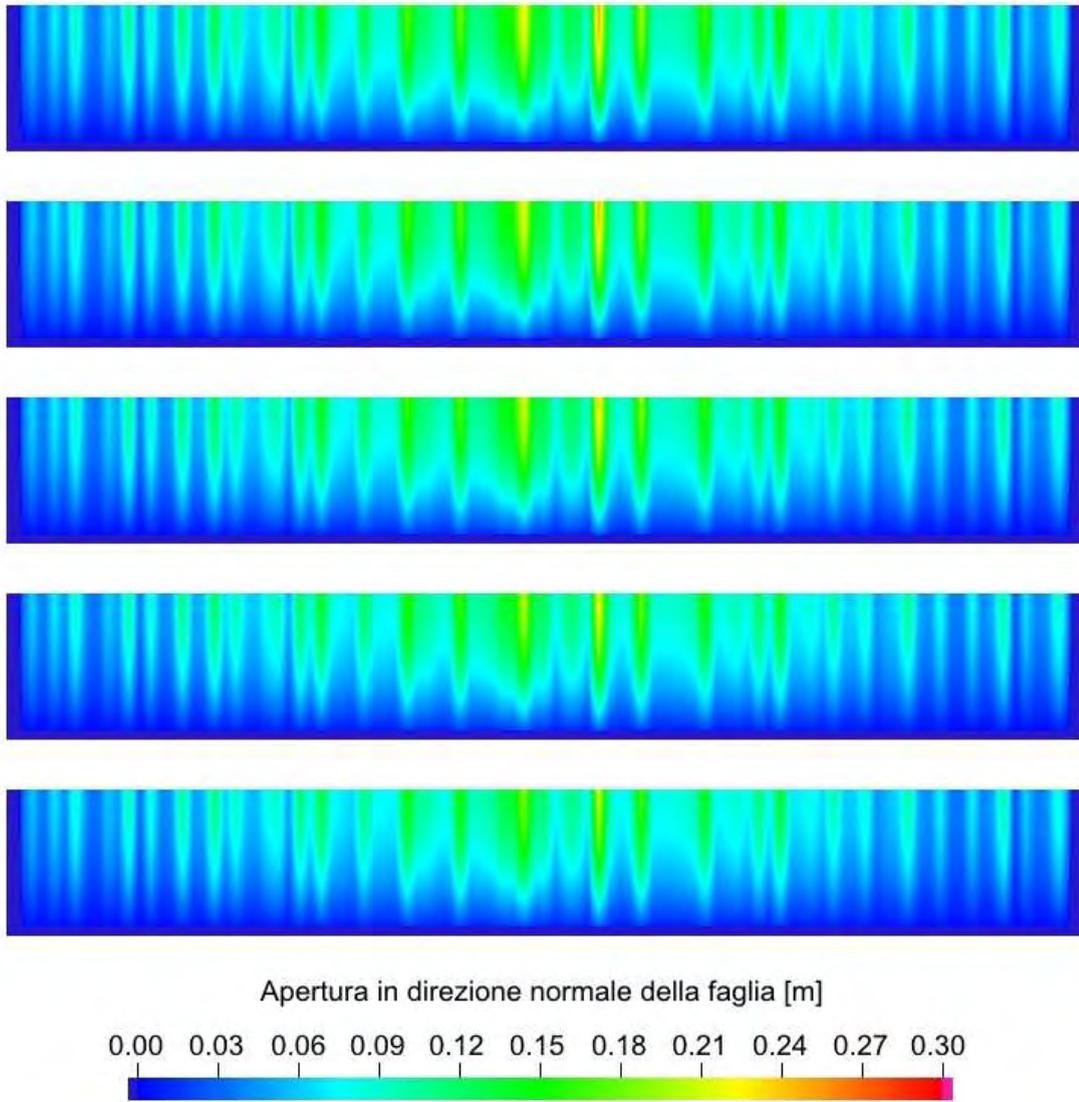


Figura 8.19: Apertura normale al piano di faglia. Time step 16 – 20

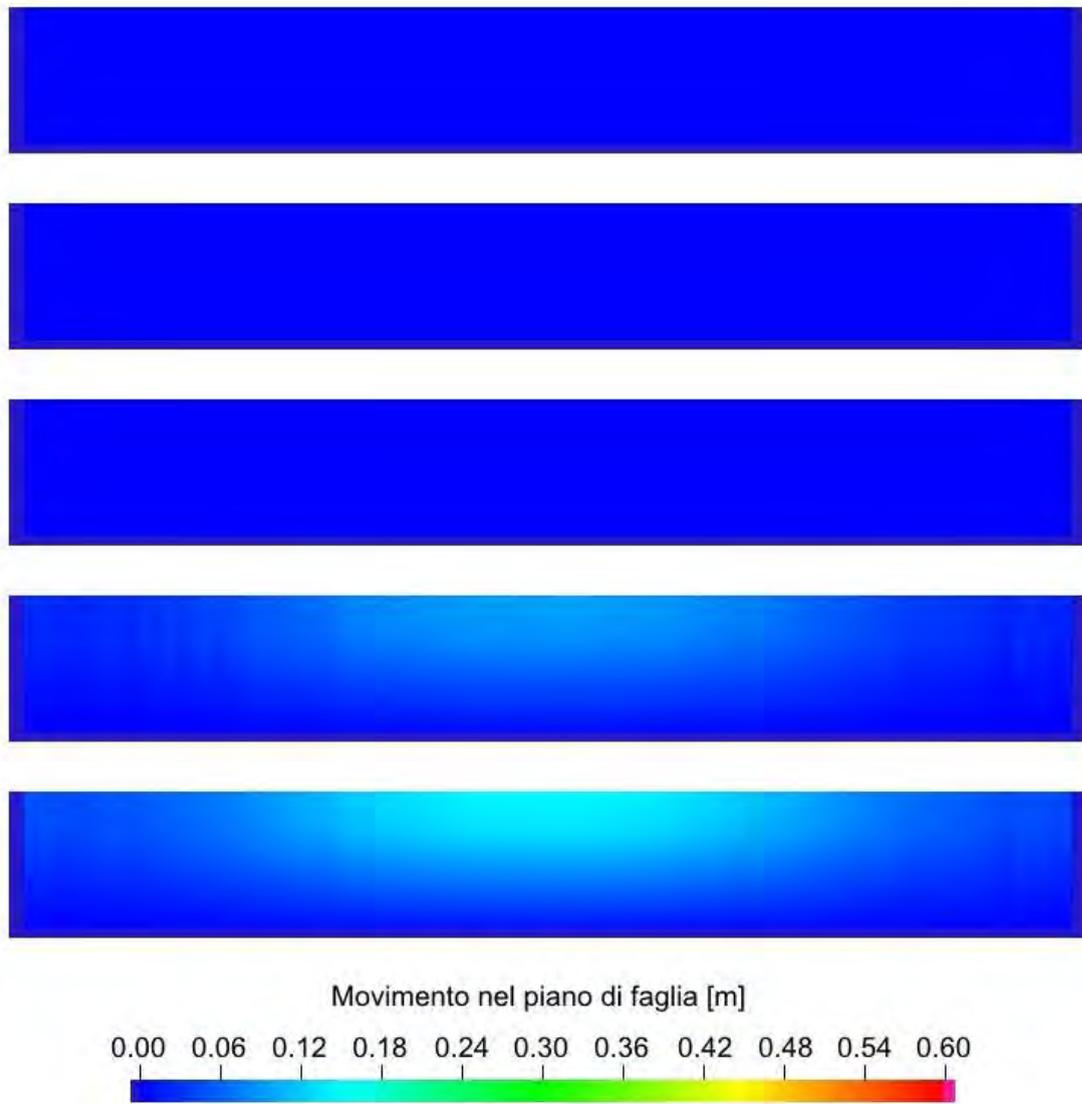


Figura 8.20: Movimento nel piano di faglia. Time step 1 – 5

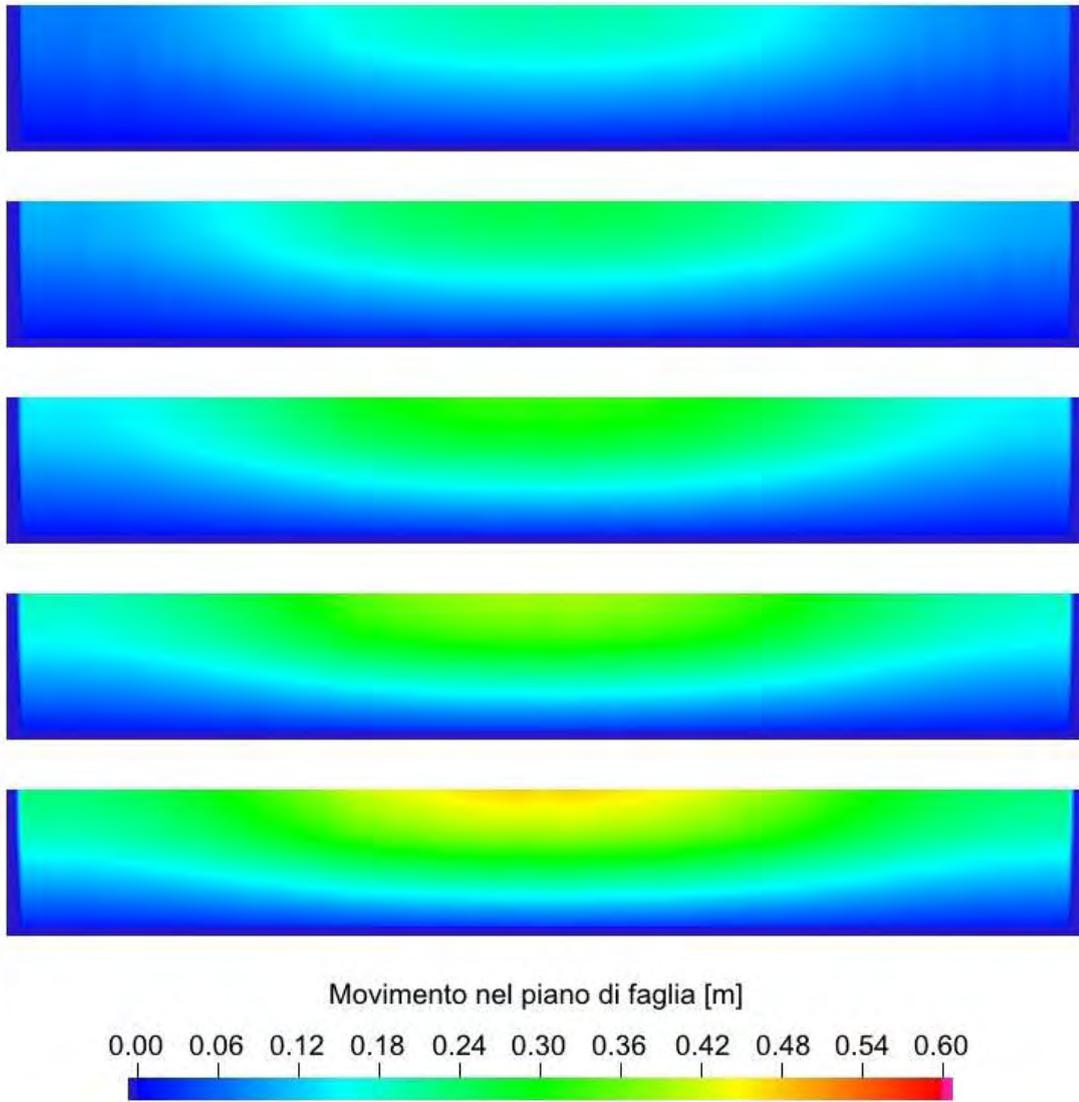


Figura 8.21: Movimento nel piano di faglia. Time step 6 – 10

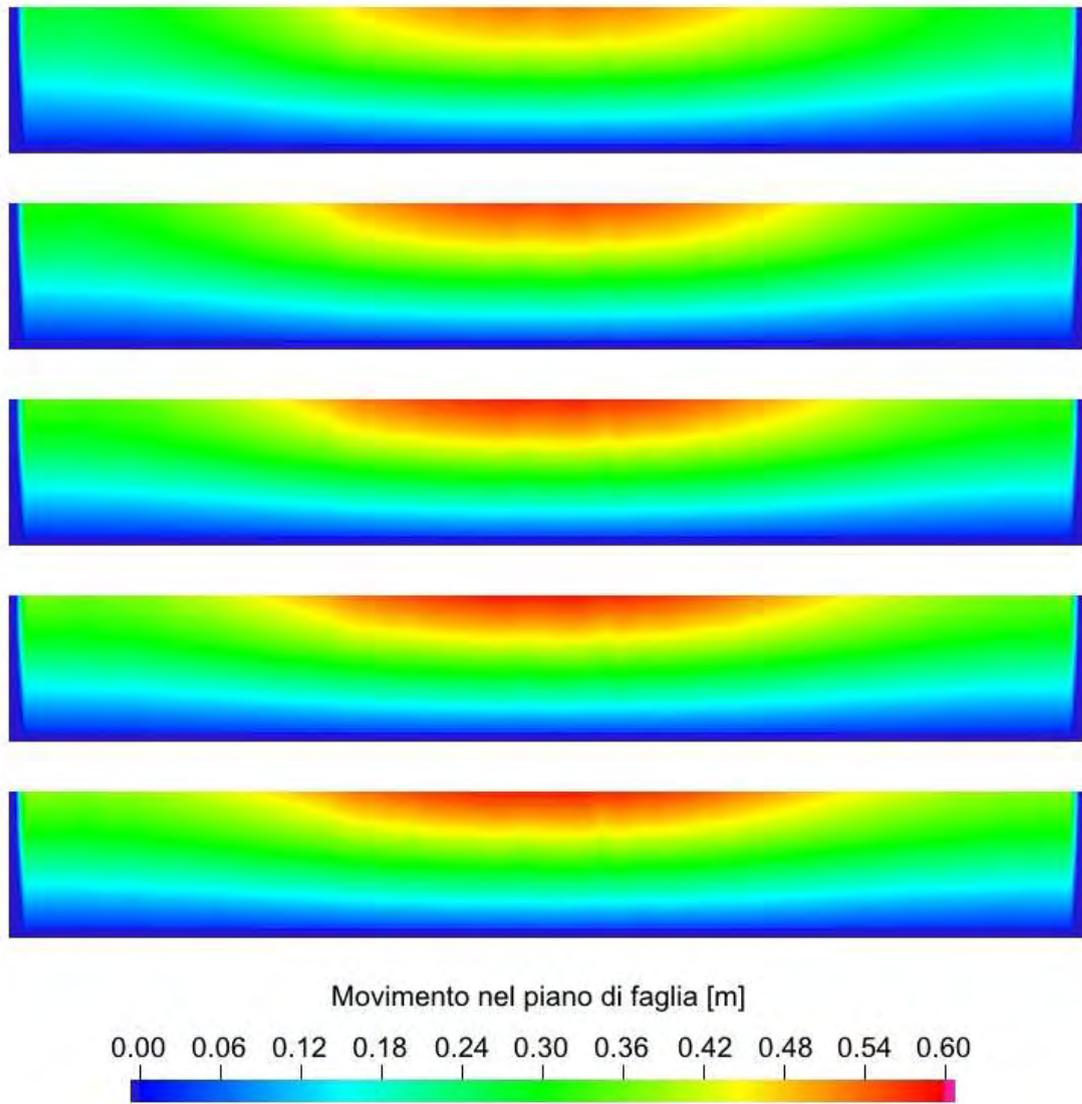


Figura 8.22: Movimento nel piano di faglia. Time step 11 – 15

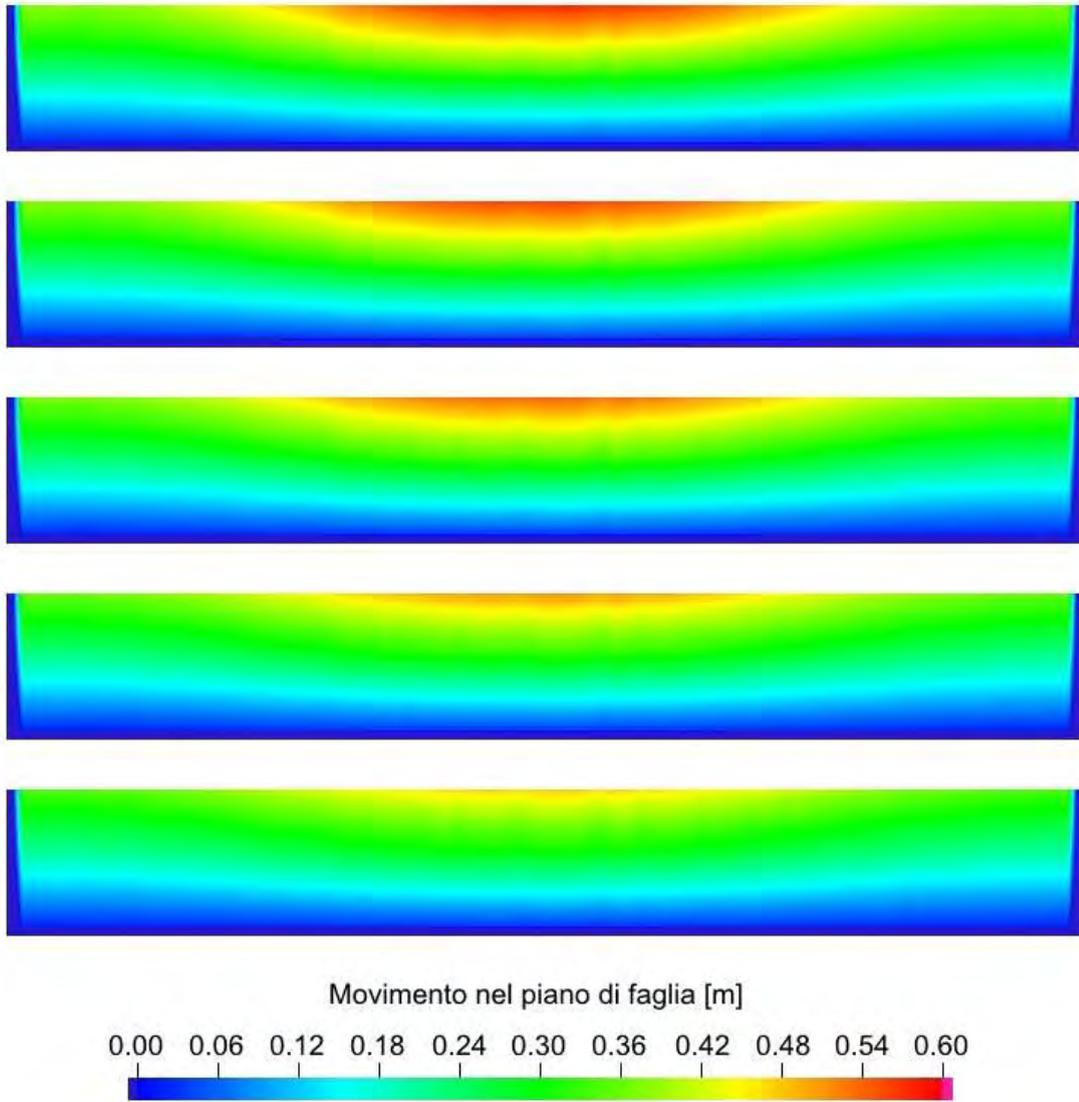


Figura 8.23: Movimento nel piano di faglia. Time step 16 – 20

8.3 Confronto con algoritmo esplicito

Le non – linearità dovute al materiale ipoplastico e alle faglie possono anche essere trattate in modo esplicito. Assumendo che la non – linearità più forte sia imputabile alle faglie, si suddivide ogni time step in più sottopassi, in cui si trascura la non – linearità di materiale e si considera soltanto quella dovuta agli elementi di interfaccia. In sostanza, scegliendo opportunamente gli intervalli Δt , in modo che il materiale non cambi molto le sue caratteristiche durante ogni passo, restano da trattare solo le faglie. Si inizia il primo sotto step con l'ultima soluzione trovata, che, inizialmente, è quella di corpo continuo. Ottenuta la soluzione del problema linearizzato si analizzano, a posteriori, i risultati. Così, per esempio, gli elementi che risultano in trazione vengono aperti e, nel successivo sotto step, non sono assemblati. Non si utilizza un approccio lagrangiano, ma un approccio penalty, come in Janna [2007], con delle molle estremamente rigide, per simulare la continuità.

Con un codice agli elementi finiti, che implementa quanto appena descritto, si intende analizzare lo stesso esempio test. Tutti i parametri fisici sono gli stessi, ma si introducono due nuove costanti, prima non necessarie, ovvero le rigidità penalty, ortogonalmente e nel piano di faglia, pari a $K_N = K_T = 10^{12}\text{Pa/m}$. Si eseguono passi temporali di 45 giorni, in cui si considera materiale elastico linearizzato, con le caratteristiche raggiunte al precedente time step. Ogni time step è suddiviso in 10 sotto step, in cui si analizza in comportamento delle faglie.

Con le successive figure 8.24, 8.25, 8.26, 8.27 e 8.28, si intende effettuare un confronto, per alcuni time step, tra i risultati ottenuti, con il codice implicito, presentato in questa tesi, e quello esplicito, sopra esposto. Si analizza prima il 4° time step, riportando, in figura 8.24, le tensioni normali, le aperture in direzione ortogonale al piano di faglia e gli elementi plasticizzati a sforzo normale, ovvero completamente aperti. In figura 8.25, invece, si analizza la situazione tensionale e di scorrimento nel piano di faglia. Nelle figure 8.26 e 8.27, si compiono gli stessi confronti per il 7° time step. Dal 10° time step in poi, però, la faglia è completamente aperta, con tensioni ovunque nulle e tutti gli elementi in movimento relativo. Risulta, dunque, interessante fare un confronto sui soli spostamenti, ortogonali al piano e nel piano, della faglia. Questo confronto, per il 12° time step, è effettuato in figura 8.28.

In generale, le soluzioni ottenute con il metodo penalty, trattato in esplicito, riportate sempre a sinistra, risultano meno regolari, con bruschi salti di tensione tra elementi contigui.

Nel 4° time step, figura 8.24, le tensioni normali hanno andamenti simili secondo i due codici, a meno della fascia superficiale, in cui, secondo il codice esplicito ci sono alcuni

elementi aperti, in quanto in trazione. In merito a ciò, si nota come anche il codice implicito, nelle iterazioni di Newton – Raphson, evidenzia alcuni elementi che si aprono, ma che, causa compenetrazione, nelle successive iterazioni si richiudono, arrivano chiusi a convergenza. Il codice esplicito, invece, rivela maggiori difficoltà nel richiudere i vari elementi aperti. I movimenti ortogonali al piano di faglia, segnalati dal codice esplicito, che, invece, non ci sono nei risultati del codice implicito, sono dovuti all'azione combinata della presenza di alcuni elementi aperti in superficie e alle molle, che non hanno rigidità infinita. Sempre nel 4° time step, figura 8.25, gli elementi in scorrimento, individuati dal modello penalty, sembrano distribuiti casualmente, mentre, secondo il codice implicito, tutti gli elementi sono in scorrimento nel piano. Gli scorrimenti sono dello stesso ordine di grandezza, anche se, quelli del codice esplicito sono meno regolari, in quanto risentono maggiormente degli effetti di mesh. Circa le tensioni, si noti che, utilizzando la stessa scala di colori dei risultati dell'implicito, non si riescono a visualizzare correttamente tutti i valori raggiunti dal codice esplicito. In particolare, ci sono alcuni elementi chiusi con tensioni normali molto elevate. Ciononostante, la distribuzione di tensioni è simile.

Le stesse osservazioni possono essere fatte per il 7° time step, figure 8.26 e 8.27, in cui si accentua la “casualità” della distribuzione tra elementi plasticizzati a sforzo normale ed elementi continui. Per quanto riguarda gli scorrimenti ortogonali al piano, ovvero l'apertura della faglia, i risultati sono ben diversi, ottenendo aperture, con il codice esplicito superiori ai 30cm, mentre il codice implicito evidenzia aperture fino a un massimo di 10cm. L'andamento delle tensioni normali, tuttavia, è simile. Per quanto riguarda le tensioni tangenziali, si rileva che, secondo il codice esplicito, restano alcuni elementi chiusi a taglio, assorbendo tensioni molto elevate, a differenza di quanto accade nell'implicito, dove tutti gli elementi sono plasticizzati, quindi in movimento nel piano di faglia. Nonostante la differenza nelle tensioni, gli scorrimenti sono molto simili.

Nel 12° time step di figura 8.28, infine, si può notare come, mentre gli scorrimenti nel piano di faglia siano simili, secondo i due diversi approcci, quelli ortogonali al piano abbiano distribuzioni differenti. Infatti, secondo i risultati dell'esplicito, le aperture sono molto più concentrate, mentre l'implicito offre aperture un po' più distribuite, pur risentendo degli effetti di mesh, nel calcolo delle aperture della faglia. In particolare, le aperture sono minori dove si concentrano più lati dei triangoli.

Un'ultima osservazione riguarda tutti i time step della simulazione. Mentre secondo il codice implicito dal 10° time step, in poi, tutti gli elementi sono aperti, per il codice esplicito, alcuni restano continui per tutta la simulazione, assorbendo tensioni molto elevate.

Si riportano, infine, nella figura 8.29, gli andamenti della media integrale e della de-

viazione standard degli scorrimenti della faglia, ortogonali e tangenziali, per ogni anno di simulazione. Per quanto riguarda i movimenti ortogonali alla faglia, figura 8.29a, si noti come le aperture medie, calcolate dai due codici, siano ben differenti, tanto che, secondo il codice implicito, la faglia si apre, mediamente, di una quantità doppia, rispetto a quanto calcolato dal codice penalty esplicito. Le deviazioni standard sono ancor più diverse. Infatti, mentre lo scarto quadratico medio del codice implicito resta sempre inferiore alla media, quello del codice esplicito cresce indefinitamente, giustificando, in termini quantitativi, la minor regolarità delle immagini analizzate. Lo stesso si noti per gli spostamenti nel piano di faglia, immagine 8.29b, in cui la deviazione standard dei risultati del codice esplicito è di un ordine di grandezza superiore a quella degli spostamenti del codice implicito. I due valori medi di spostamento nel piano di faglia, invece, sono simili.

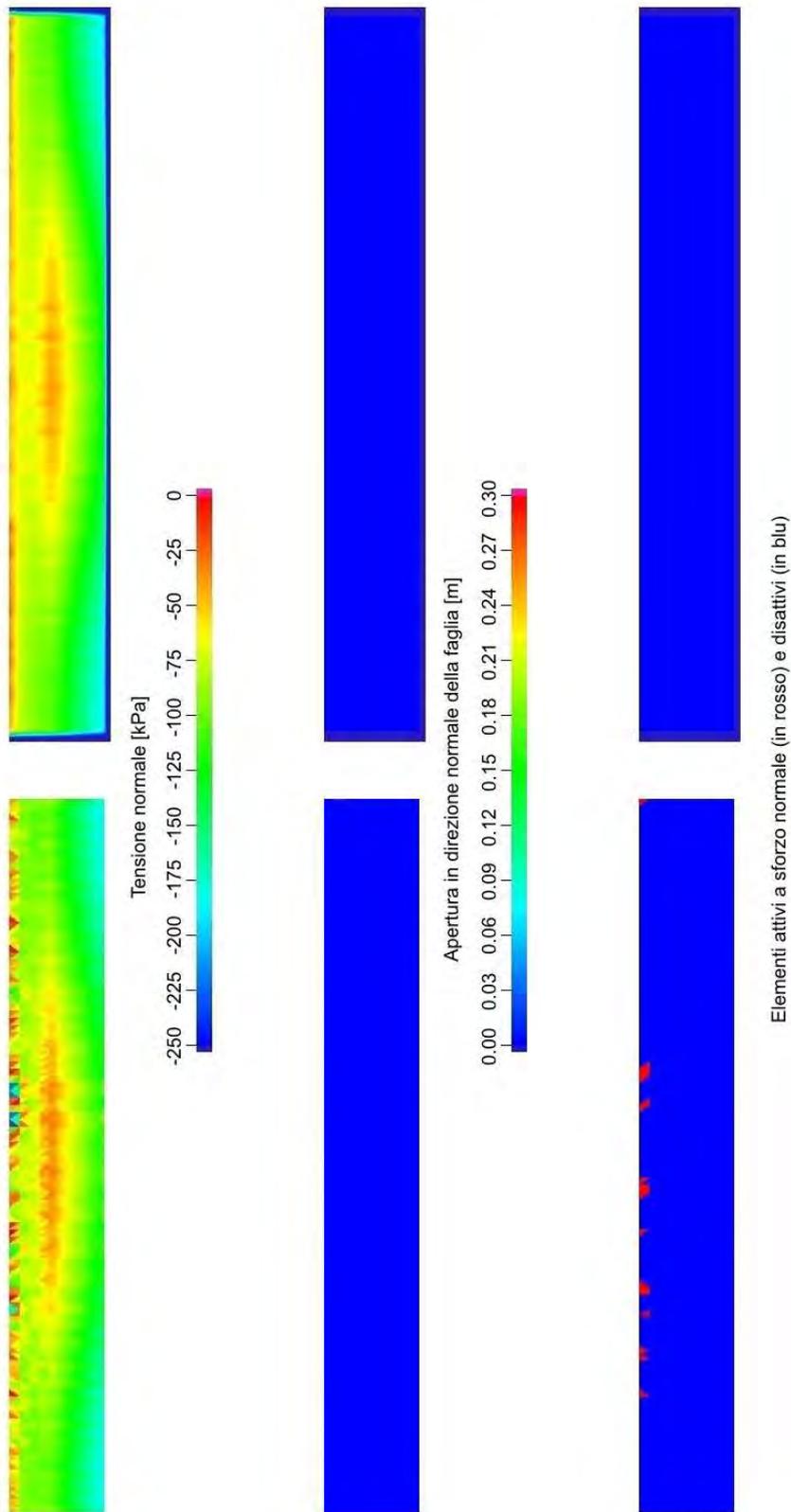


Figura 8.24: Time step 4. Confronto tra risultati del codice esplicito e implicito, in termini di sforzo normale, scorrimenti in direzione normale al piano di faglia ed elementi plasticizzati a sforzo normale

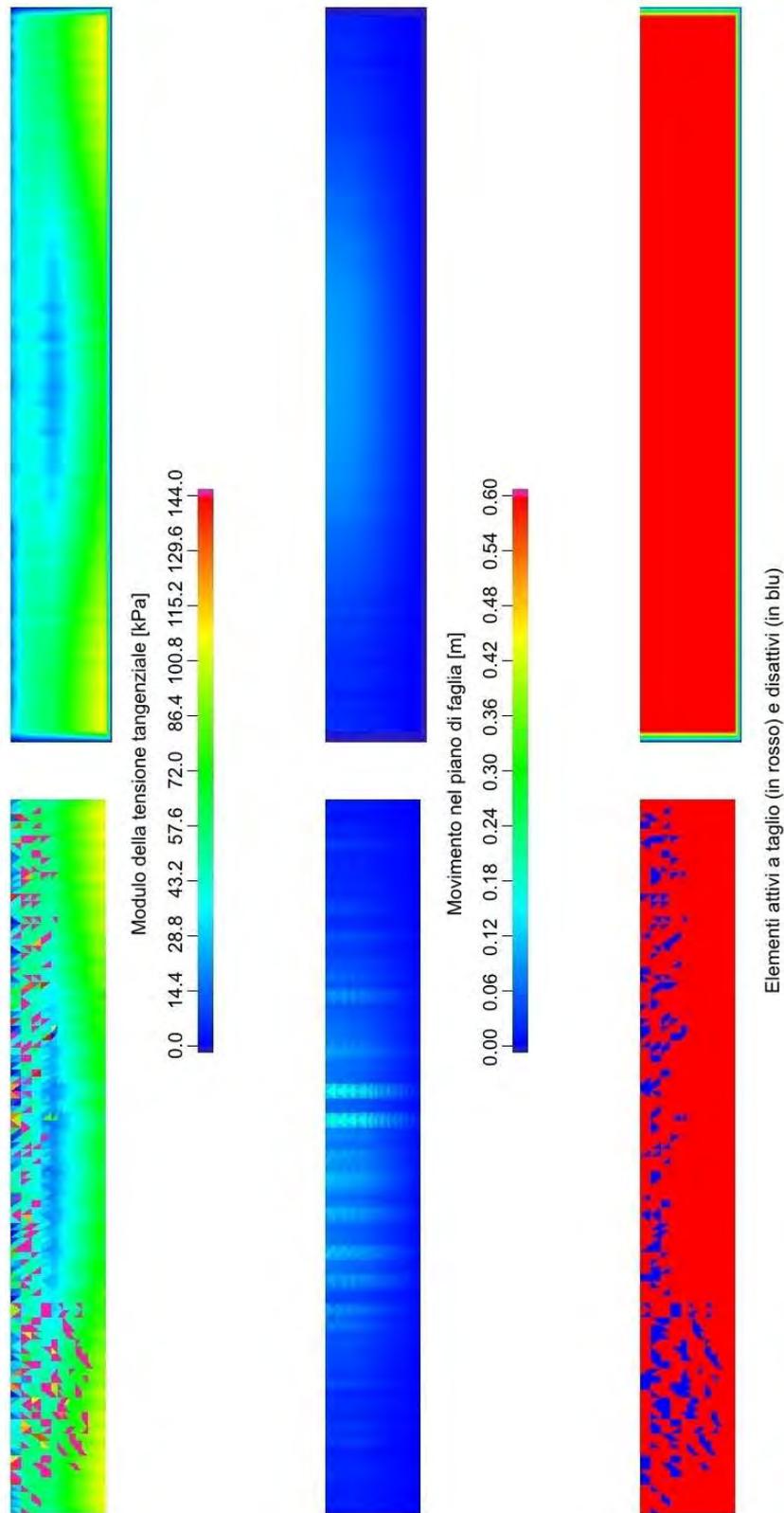


Figura 8.25: Time step 4. Confronto tra risultati del codice esplicito e implicito, in termini di sforzo tangenziale, scorrimenti nel piano di faglia ed elementi plasticizzati a sforzo di taglio

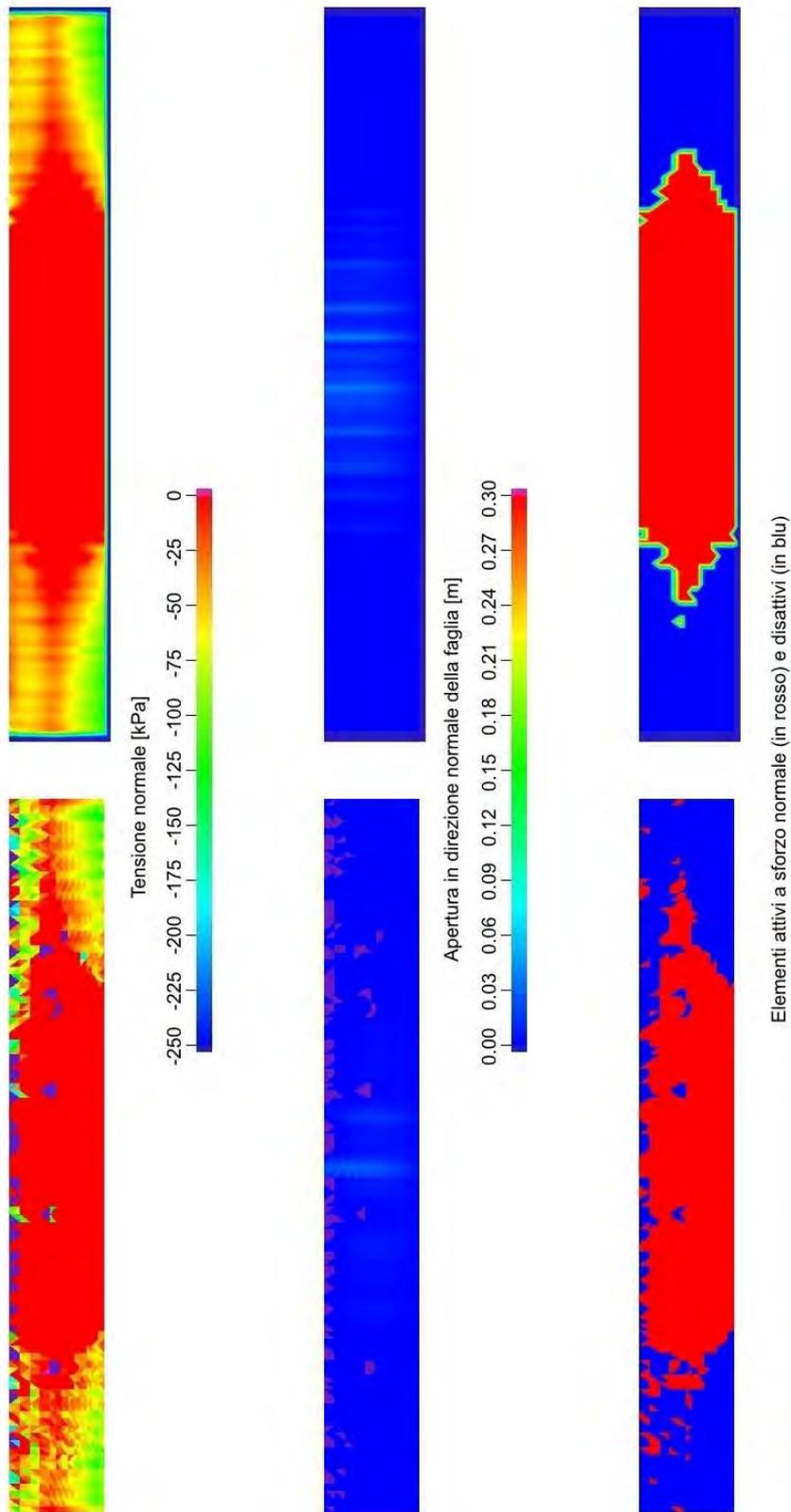


Figura 8.26: Time step 7. Confronto tra risultati del codice esplicito e implicito, in termini di sforzo normale, scorrimenti in direzione normale al piano di faglia ed elementi plasticizzati a sforzo normale

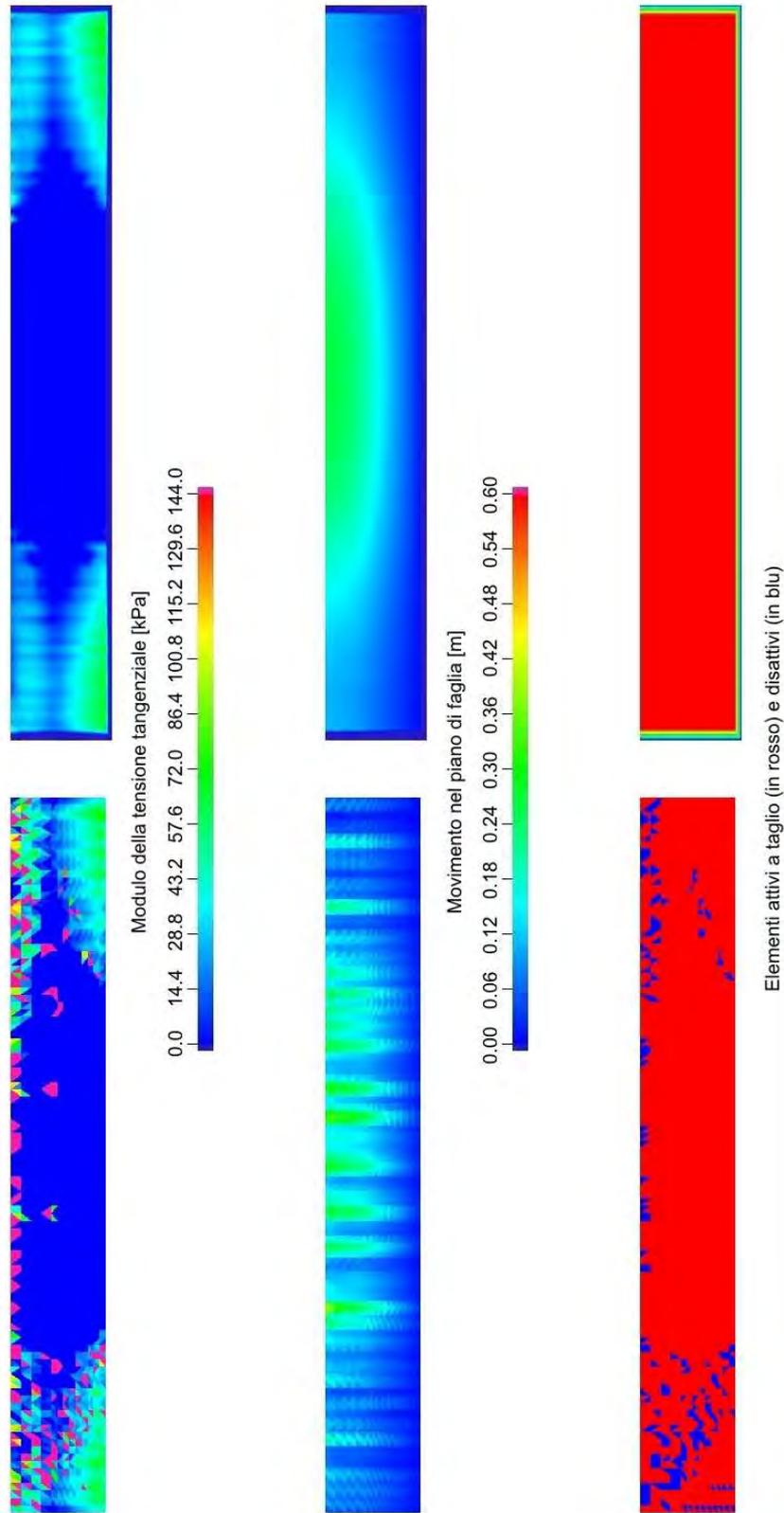


Figura 8.27: Time step 7. Confronto tra risultati del codice esplicito e implicito, in termini di sforzo tangenziale, scorrimenti nel piano di faglia ed elementi plasticizzati a sforzo di taglio

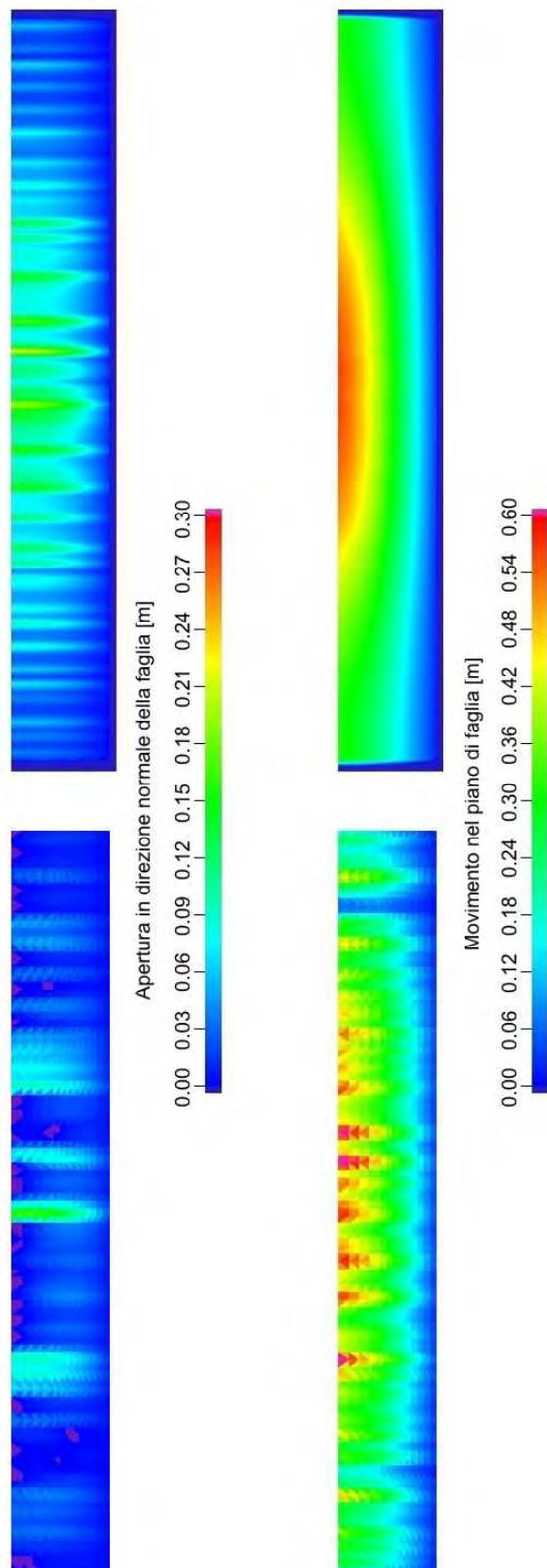
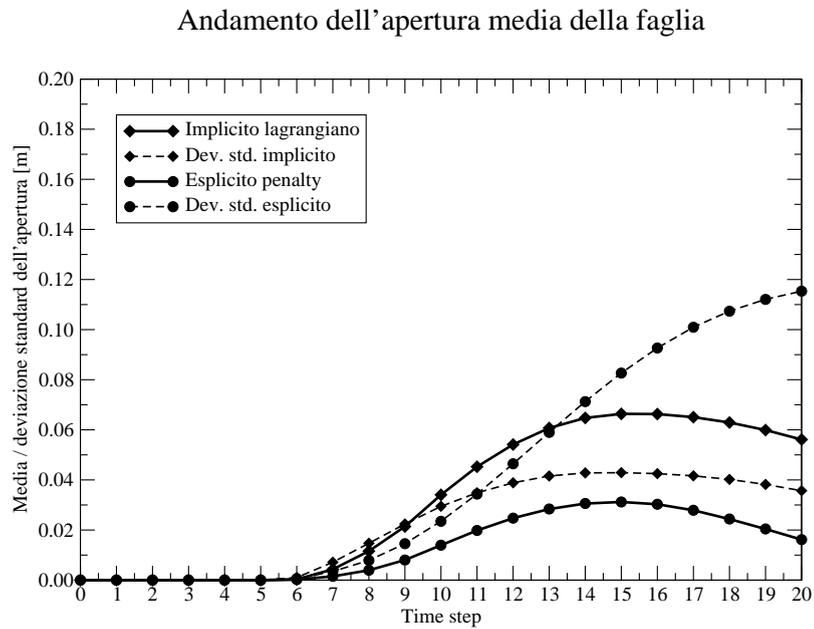
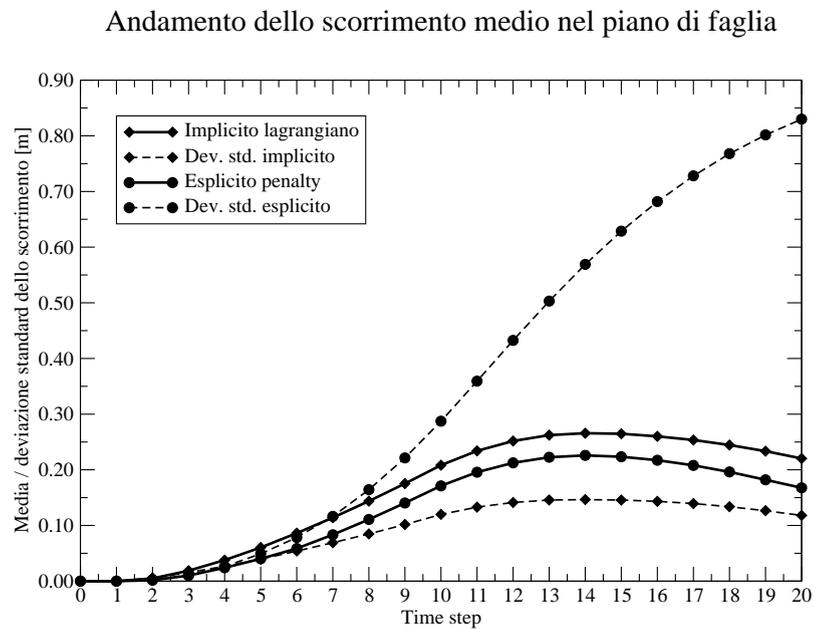


Figura 8.28: Time step 12. Confronto tra risultati del codice esplicito e implicito, in termini di spostamenti ortogonali alla faglia e nel piano di faglia



(a) Confronto in termini di media integrale e deviazione standard dello spostamento ortogonale alla faglia.



(b) Confronto in termini di media integrale e deviazione standard dello spostamento nel piano di faglia.

Figura 8.29: Confronto tra risultati del codice esplicito e implicito, in termini di media integrale e deviazione standard degli spostamenti di faglia

Capitolo 9

Conclusioni

In questa tesi si è analizzato l'approccio lagrangiano al problema della discontinuità nel campo di spostamenti, introdotta, per esempio, dalle faglie in un giacimento. I classici elementi finiti (FE) non sono in grado, per costruzione, di simulare un campo di spostamenti discontinuo. Per riprodurre una faglia si introducono, allora, speciali elementi finiti bidimensionali, a spessore nullo, detti *Elementi Finiti di Interfaccia* (IE), in grado di simulare la continuità/discontinuità in funzione dello stato tensionale attuale. Le funzioni base sono state scelte nodali, ovvero non nulle solo nell'area afferente al nodo, così che ogni nodo di faglia risulti indipendente dagli altri. Altri approcci si basano, invece, su funzioni di interpolazione lineari a tratti, creando uno squilibrio locale di tensione. Una mesh tetraedrica, infatti, ha tensioni costanti elemento per elemento. Con funzioni nodali gli elementi di interfaccia possono avere tensioni costanti, anche se su elementi finiti di forma diversa. In sostanza, si cerca una rappresentazione dello stato tensionale reale in due sottospazi dello stesso ordine, ma con basi diverse. Se si fossero invece scelte funzioni lineari, per rappresentare le tensioni sugli IE, si sarebbero utilizzati sottospazi di ordine diverso, rendendo più difficoltosa la rappresentazione discretizzata dello stato tensionale reale.

Rispetto al metodo penalty [Janna, 2007], per superare il problema della discontinuità in una griglia di elementi finiti solidi, i moltiplicatori di Lagrange introducono nel sistema nuove incognite e modificano la matrice del sistema in modo tale che quest'ultima non sia più definita positiva e, in caso di scorrimento, neppure simmetrica. Nel migliore dei casi, la matrice si presenta come una matrice di punto sella, simmetrica ma con autovalori positivi e negativi. In presenza di attrito il sistema diventa non simmetrico, con conseguente aumento del costo computazionale per la soluzione.

La maggior fonte di non-linearità è rappresentata dall'oscillazione di alcuni elementi tra uno stato di apertura e chiusura. Una volta individuato il set di elementi in apertura

e/o scorrimento, generalmente dopo qualche ciclo di Newton – Raphson, la convergenza è quadratica. Nei casi analizzati, utilizzando un passo temporale adeguato, la convergenza viene raggiunta in al più una decina di iterazioni.

La maggior differenza tra il metodo penalty e il metodo di Lagrange risulta essere la ripartizione della tensione tangenziale nel piano di faglia. Nel primo caso la tensione viene ripartita secondo il vettore opposto allo spostamento cumulato, nel secondo si applica il *Principio di Massima Dissipazione Plastica*, secondo cui la direzione la tensione tangenziale è funzione dello spostamento ancora incognito.

Determinante, per raggiungere la convergenza, è risultata essere la scelta di opportune tolleranze nell'applicazione del criterio di rottura scelto, ossia quello di Mohr – Coulomb. Le disuguaglianze, che appaiono nel criterio di rottura, sono state trasformate in *regioni di accettabilità*, per rendere più graduale e stabile il passaggio da elemento continuo a elemento in scorrimento, e viceversa.

Nei vari test analizzati, l'accuratezza dei risultati ottenuti con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange è risultata di molto superiore a quella del metodo penalty, sia in termini di spostamento relativo che di tensioni sulla superficie di faglia. Soprattutto, si è potuto osservare come la scelta del passo temporale possa influire unicamente sulla convergenza o meno dello schema di Newton – Raphson, ma non modifichi minimamente il risultato trovato. Mentre il problema di una convergenza difficile può essere facilmente superato con l'implementazione di tecniche di back – step, la dipendenza dei risultati dal passo temporale, tipica del metodo penalty in un ciclo esplicito, richiede un intervento importante da parte dell'operatore.

Bibliografia

- B. T. Aagaard, M. G. Knepley, and C. A. Williams. A domain decomposition approach to implementing fault slip in finite-element models of quasi-static and dynamic crustal deformation. *J. Geophys. Res. Solid Earth*, 118:3059–3079, 2013. doi: 10.1002/jgrb.50217.
- D. Baù, G. Gambolati, and P. Teatini. Waterdrive Dynamics and Enhanced Land Subsidence over Productive Gas Fields: Application to Dosso degli Angeli Reservoir, Ravenna, Italy. *Theory, Modeling and Field Investigation in Hydrology: A Special Volume in Honor of Shlomo P. Neuman's 60th Birthday: Boulder, Colorado, Geological Society of America*, Special Paper 348:129–149, 2000. doi: 10.1002/nag.131.
- K.-J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2006.
- D. P. Bertsekas. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1996.
- M. A. Biot. General Theory of Three – Dimensional Consolidation. *J. Appl. Phys.*, 12: 155–164, 1941. doi: 10.1063/1.1712886.
- A. W. Bishop. The principle of effective stress. *Teknisk Ukeblad*, 106 (39):859–863, 1959. Text of lecture to NGI 1955.
- S. Cescotto and R. Charlier. Frictional contact finite elements based on mixed variational principles. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 36:1681–1701, 1993. doi: 10.1002/nme.1620361005.
- L. Corradi dell'Acqua. *Meccanica delle Strutture. Il comportamento dei mezzi continui*, volume 1. McGraw-Hill, Milano, second edition, 2010.
- D. C. Drucker and W. Prager. Soil mechanics and plastic analysis for limit design. *Quarterly of Applied Mathematics*, 10:157–165, 1952.

- M. Ferronato. Studio modellistico del comportamento deformativo di ammassi rocciosi in prossimità di giacimenti. Master's thesis, Università degli Studi di Padova, Padova, 1998. Tesi di Laurea in Ingegneria Civile, Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate.
- M. Ferronato, G. Gambolati, C. Janna, and P. Teatini. Numerical modelling of regional faults in land subsidence prediction above gas/oil reservoirs. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 32:633–657, 2008. doi: 10.1002/nag.640.
- M. Ferronato, N. Castelletto, and G. Gambolati. A fully coupled 3-D mixed finite element model of Biot consolidation. *Journal of Computational Physics*, 229:4813–4830, 2010a. doi: 10.1016/j.jcp.2010.03.018.
- M. Ferronato, G. Gambolati, C. Janna, and P. Teatini. Geomechanical issues of anthropogenic CO₂ sequestration in exploited gas fields. *Energy Conversion and Management*, 51:1918–1928, 2010b. doi: 10.1016/j.enconman.2010.02.024.
- M. Ferronato, C. Janna, and G. Pini. Parallel solution to ill-conditioned FE geomechanical problems. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 36:422–437, 2012. doi: 10.1002/nag.1012.
- G. Gambolati. *Lezioni di Metodi Numerici per Ingegneria e Scienze Applicate*. Cortina, Padova, second edition, 2003.
- G. Gambolati, M. Ferronato, P. Teatini, R. Deidda, and G. Lecca. Finite element analysis of land subsidence above depleted reservoirs with pore pressure gradient and total stress formulations. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 25:307–327, 2001. doi: 10.1002/nag.131.
- R. E. Goodman, R. L. Taylor, and Breeke T. L. A model for the mechanics of jointed rock. *Journal of Soil Mechanics and Foundation Division (ASCE)*, 94:637–659, 1968.
- D. V. Griffith. Numerical modelling of interfaces using conventional finite element. In *Proceedings of the 5th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, pages 837–844, Nagoya, Japan, 1985.
- C. Janna. *Modellazione del comportamento meccanico delle faglie regionali per il confinamento geologico della CO₂ antropica*. PhD thesis, Università degli Studi di Padova, Padova, 2007. Tesi di Dottorato di Ricerca in Scienze dell'Ingegneria Civile e Ambientale, XX ciclo.

- C. Janna, N. Castelletto, M. Ferronato, G. Gambolati, and P. Teatini. A geomechanical transversely isotropic model of the Po River basin using PSInSAR derived horizontal displacement. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 51:105–118, 2012. doi: 10.1016/j.ijrmms.2012.01.015.
- B. Jha and R. Juanes. Coupled multiphase flow and poromechanics: A computational model of pore pressure effects on fault slip and earthquake triggering. *Water Resour. Res.*, 50:3776–3808, 2014. doi: 10.1002/2013WR015175.
- J. F. Labuz and A. Zang. Mohr–Coulomb Failure Criterion. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 45:975–979, 2012. doi: 10.1007/s00603-012-0281-7.
- R. Lancellotta. *Geotecnica*. Zanichelli, Bologna, third edition, 2004.
- J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York, second edition, 2006. doi: 10.1007/978-0-387-40065-5-5.
- J. Rutqvist, J.T. Birkholzer, and Chin-Fu Tsang. Coupled reservoir-geomechanical analysis of the potential for tensile and shear failure associated with CO₂ injection in multilayered reservoir-caprock systems. *Int. J. Rock. Mech. Mining Sci.*, 2007. doi: 10.1016/j.ijrmms.2007.04.006.
- Y. Saad and M. H. Schultz. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear system. *Siam J. Sci. Stat. Comput.*, 7(3):856–869, 1986.
- O. Schenk and K. Gärtner. Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with PARDISO. *Future Generation Computer Systems*, 20(3):475–487, 2004. doi: 10.1016/j.future.2003.07.011. Selected numerical algorithms.
- J.C. Simo and T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer, New York, second edition, 2000.
- P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. Springer, Heidelberg, second edition, 2006.
- O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method. 1: The basis*, volume 1. Butterworth and Heneimann, Barcelona, fifth edition, 2000a.
- O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method. 2: Solid Mechanics*, volume 2. Butterworth and Heneimann, Barcelona, fifth edition, 2000b.