

Controllo in retroazione della risposta in frequenza di un altoparlante

Luca Leonetti

25 novembre 2010

La musica aiuta a non sentire
dentro il silenzio che c'è fuori

Johann Sebastian Bach

A Giulia e alla mia famiglia, con affetto

Introduzione

In un impianto audio di alta fedeltà ben progettato l'anello debole della catena è spesso l'altoparlante. Infatti, gli altri elementi (sorgente, amplificatore ed ulteriori apparecchi elettrici ed elettronici) presentano ottimi parametri in termini di linearità, distorsione, dinamica e risposta in frequenza. Un altoparlante, invece, presenta inevitabilmente una risposta in frequenza molto limitata, una distorsione che può raggiungere facilmente valori del 10% ed una scarsa linearità.

Il processo produttivo di un altoparlante che riproduca fedelmente anche i segnali alle basse frequenze è molto costoso: richiede, infatti, tecniche di progetto sofisticate, materiali avanzati e basse tolleranze di lavorazione. Inoltre, il fenomeno della distorsione alle bassissime frequenze è impossibile da rimuovere, essendo causato dalla non linearità della sospensione della membrana.

L'obiettivo di questa tesi è progettare un sistema di controllo che migliori le caratteristiche della risposta di un altoparlante. A questo scopo utilizzeremo uno schema in retroazione, riportando il segnale di uscita all'ingresso tramite un microfono di alta precisione.

Vedremo come tale soluzione permetta di aumentare considerevolmente la banda passante della risposta in frequenza, appiattendone sia modulo sia fase, e di abbattere il fenomeno della distorsione armonica alle basse frequenze. Tale sistema permette, quindi, di migliorare la qualità dell'altoparlante senza aumentarne l'ingombro e il costo di produzione. Inoltre, rispetto all'altoparlante, il sistema retroazionato risente in modo molto minore dell'invecchiamento delle componenti e delle variazioni delle condizioni ambientali (come temperatura e umidità).

Ambiti d'impiego possibili per una soluzione di questo tipo sono: impianti audio di alta fedeltà, sistemi audio per automobili, sistemi home theatre, cinema, amplificazione di concerti, studi di registrazione.

La tesi è così strutturata:

Nel capitolo 1 si ricava un modello matematico lineare dell'altoparlante a partire dalle leggi fisiche che ne governano il funzionamento.

Poi, nel capitolo 2, è progettato il controllo in retroazione del sistema.

Tramite il software MATLAB abbiamo infine realizzato delle simulazioni dei vari sistemi; i risultati sono riassunti nel capitolo 3.

Indice

Introduzione	v
1 Modello dell'altoparlante	1
1.1 Modello SISO	2
1.1.1 Funzione di trasferimento	2
1.1.2 Modello Simulink	4
2 Controllo in retroazione	7
2.1 Schema della retroazione	7
2.2 Modello del microfono	7
2.3 Funzioni di trasferimento	9
2.4 Sintesi del compensatore	13
2.4.1 Sintesi del compensatore costante	13
2.4.2 Sintesi del compensatore non costante	16
2.4.3 Sintesi del compensatore tramite luogo delle radici	19
3 Analisi del sistema	23
3.1 Risposta in frequenza	23
3.2 Inseguimento di segnali	25
3.3 Distorsione armonica	25
3.4 Risposta ad un segnale musicale reale	27
Bibliografia	31

Capitolo 1

Modello dell'altoparlante

La membrana, o cono, costituisce la superficie rigida che muovendosi produce le compressioni e rarefazioni dell'aria che vengono percepite come suoni. Tale cono (di massa m) è mantenuto in posizione dalla sospensione esterna e dal centratore (modellati come una sospensione elastica di costante k). Il cono, nel suo spostamento, è soggetto ad un attrito viscoso dovuto all'accoppiamento acustico con l'ambiente (caratterizzato dal coefficiente b). La bobina mobile (avente resistenza R e induttanza L) è costituita da un supporto sul quale è avvolto un filo di materiale conduttore. In funzione della corrente che la percorre si produce un campo magnetico che, interagendo con quello permanente generato dal magnete, provoca lo spostamento in un senso o nell'altro della bobina stessa (il coefficiente di accoppiamento elettroacustico dovuto al campo magnetico presente al traferro è q). I parametri

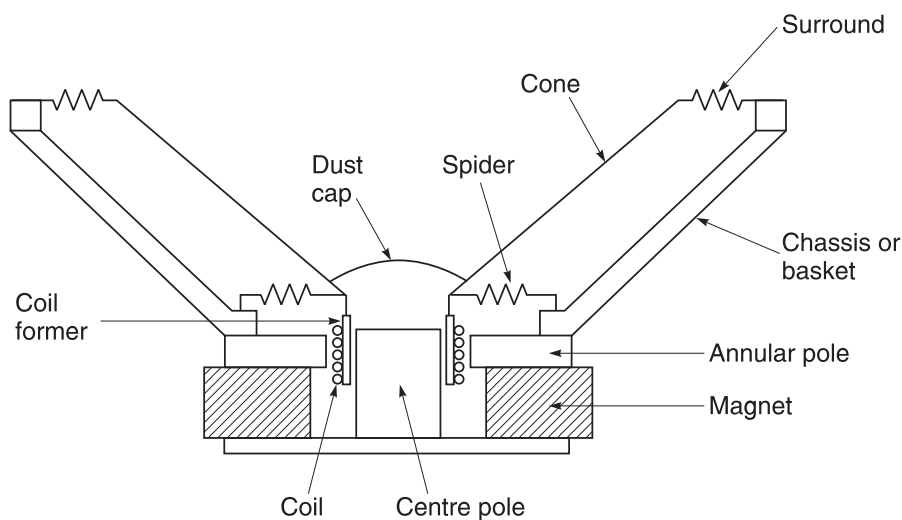


Figura 1.1: Struttura dell'altoparlante

del modello sono

$$\begin{aligned}
 R &= 4 \Omega \\
 L &= 0.1 \text{ mH} \\
 k &= 1000 \text{ N/m} \\
 b &= 20 \text{ N} \cdot \text{s/m} \\
 m &= 10 \text{ g} \\
 q &= 10 \text{ N/A} = 2\pi r N \beta
 \end{aligned}$$

dove r è il raggio delle spire della bobina, N è il numero di spire e β è l'intensità del campo magnetico.

1.1 Modello SISO

1.1.1 Funzione di trasferimento

In questo paragrafo metteremo in relazione, attraverso una opportuna funzione di trasferimento $W(s)$, la tensione d'ingresso e la pressione sonora vicino al cono. Indicheremo con $u(t)$ la tensione applicata ai capi della bobina, con $i(t)$ la corrente che la attraversa e con $x(t)$ il suo spostamento dalla posizione di equilibrio.

Consideriamo la parte elettrica del sistema il cui schema è indicato in figura 1.2. La bobina che si muove in campo elettromagnetico crea una tensione $e_s = 2\pi r N \beta v(t) = q \frac{dx(t)}{dt}$. Applicando le leggi di Kirchoff si giunge a:

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) + q \frac{dx(t)}{dt} = u(t) \quad (1.1)$$

Per modellare la parte meccanica consideriamo ora le forze agenti sul cono:

Forza	Espressione matematica	Verso
Forza elastica	$k x$	sinistra
Forza dello smorzamento viscoso	$b \dot{x}$	sinistra
Forza di inerzia	$m \ddot{x}$	sinistra
Forza di Lorentz	$q i$	destra

Dall'equilibrio di tali forze si ottiene:

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + k x(t) = q i(t) \quad (1.2)$$

Sostituendo il valore della corrente $i(t)$ dalla (1.2) nella (1.1) si ricava:

$$\frac{L m}{q} \frac{d^3x(t)}{dt^3} + \frac{L b + R m}{q} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{L k + R b + q^2}{q} \frac{dx(t)}{dt} = u(t) \quad (1.3)$$

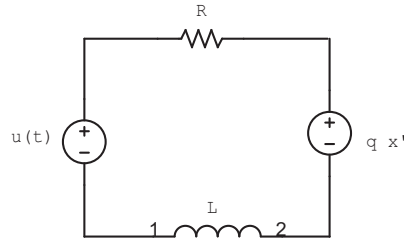


Figura 1.2: Diagramma circuitale della parte elettrica dell'altoparlante

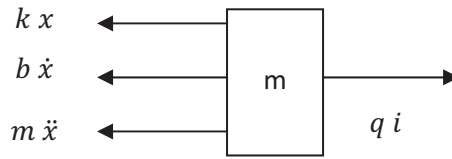


Figura 1.3: Diagramma delle forze agenti sul cono

Trasformando secondo Laplace l'equazione (1.3) e considerando il cono inizialmente in posizione di riposo, con velocità e accelerazione nulle ($x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\ddot{x}(0) = 0$) si arriva a:

$$\left(\frac{L m}{q} s^3 + \frac{L b + R m}{q} s^2 + \frac{L k + R b + q^2}{q} s \right) \mathcal{X}(s) = \mathcal{U}(s) \quad (1.4)$$

Valutiamo ora l'effetto dello spostamento della membrana sulla pressione dell'aria. L'impedenza acustica specifica Z è il rapporto tra la pressione sonora p (ovvero la variazione di pressione rispetto alla condizione di quiete) e la velocità del fluido v in un punto. Per l'aria a pressione e temperatura ambiente vale $Z = 409.8 N \cdot s \cdot m^{-3}$. In prossimità del cono l'aria ha la stessa velocità del cono ($v = \dot{x}(t)$), quindi

$$\mathcal{P}(s) = Z(s \mathcal{X}(s)) \quad (1.5)$$

Sostituiamo la (1.4) nella (1.5) e inseriamo i valori dei parametri

$$\mathcal{P}(s) = \frac{409.8 s}{10^{-7} s^3 + 4.2 \cdot 10^{-3} s^2 + 18.01 s + 400} \mathcal{U}(s) \quad (1.6)$$

La funzione di trasferimento risulta pertanto:

$$W(s) = \frac{409.8 s}{10^{-7} s^3 + 4.2 \cdot 10^{-3} s^2 + 18.01 s + 400} \quad (1.7)$$

Riordinando in forma di Bode:

$$W(s) = \frac{1.04 s}{\left(1 + \frac{s}{3.7156 \cdot 10^4}\right) \left(1 + \frac{s}{4822}\right) \left(1 + \frac{s}{22}\right)} \quad (1.8)$$

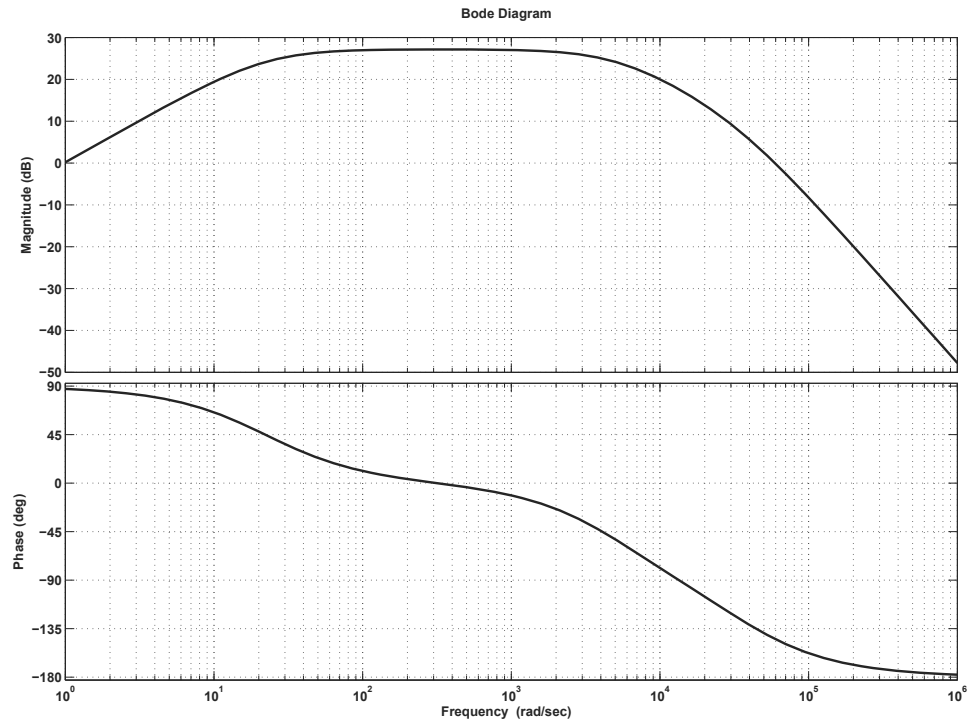


Figura 1.4: Diagramma di Bode di $W(s)$

Il diagramma di Bode è mostrato in figura 1.4. Si vede che la banda passante ai 3 dB è (espressa in frequenze e non in pulsazioni, quindi in Hz): [3 Hz, 767 Hz], l'altoparlante è quindi utilizzabile come woofer per le basse frequenze.

1.1.2 Modello Simulink

Per effettuare le simulazioni successive costruiamo un modello dell'altoparlante in Simulink. Per realizzarlo usiamo degli integratori per mettere in relazione x , \dot{x} , \ddot{x} e i , \dot{i} . Inoltre dall'equazione (1.1) ricaviamo:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}(-k x - b \dot{x} + q i) \quad (1.9)$$

E dalla (1.2):

$$\dot{i} = \frac{1}{L}(-q \dot{x} - R i + u) \quad (1.10)$$

Dalle equazioni (1.9) e (1.10) è immediato ricavare lo schema di figura 1.5

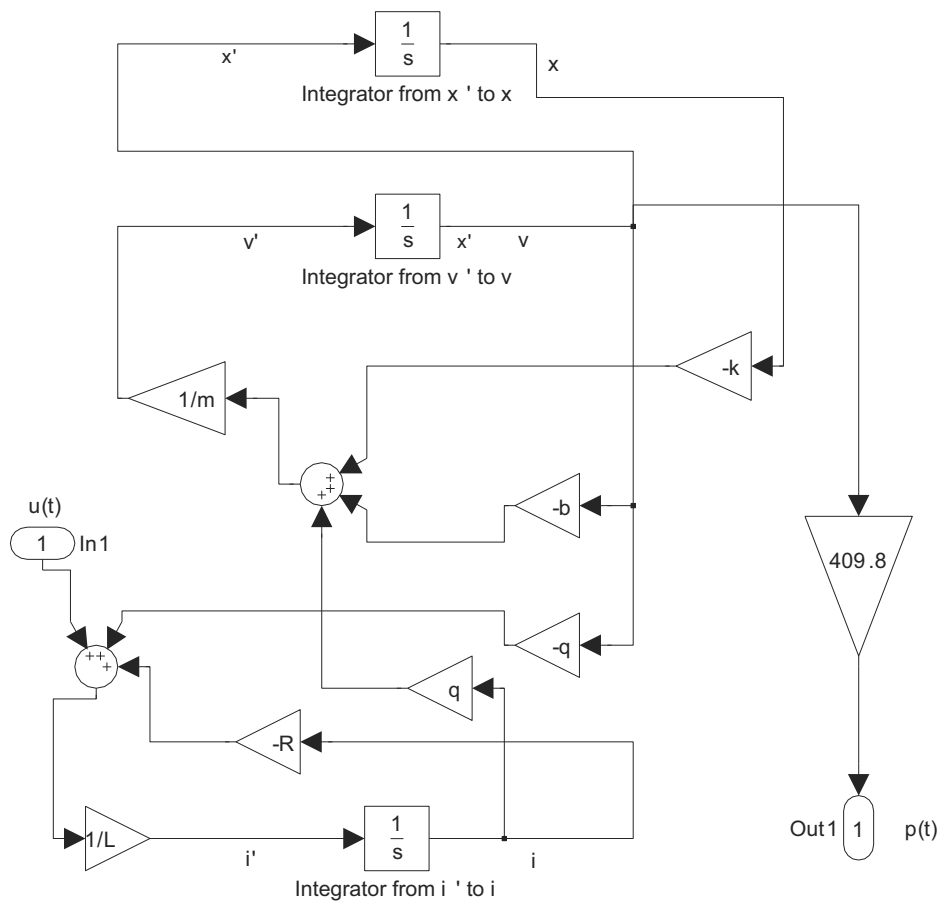


Figura 1.5: Schema Simulink dell'altoparlante

Capitolo 2

Controllo in retroazione

Vogliamo in questo capitolo progettare un controllo in retroazione dell'altoparlante che ne migliori le caratteristiche di risposta.

In campo audio la qualità di un trasduttore viene valutata dai seguenti parametri:

- risposta in frequenza
- risposta agli impulsi
- distorsione armonica

Vedremo nel capitolo 3 un'analisi dettagliata dei risultati ottenuti.

2.1 Schema della retroazione

Il controllo in retroazione viene effettuato riportando all'ingresso dell'altoparlante la sua uscita attraverso un trasduttore (microfono). Tale schema è indicato in figura 2.1.

Aggiungendo allo schema un amplificatore per il microfono ed un compensatore otteniamo lo schema rappresentato in figura 2.2.

In seguito, indicheremo con $K(s)$ la funzione di trasferimento del microfono amplificato, con $W(s)$ la funzione di trasferimento dell'altoparlante e con $C(s)$ la funzione di trasferimento del compensatore.

La retroazione di figura 2.2 può essere equivalentemente rappresentata dallo schema di figura 2.3 che useremo nel resto del capitolo.

2.2 Modello del microfono

Prima di procedere alla sintesi di un'azione di controllo in retroazione è necessario realizzare un modello matematico del microfono. Consideriamo un microfono a condensatore, il cui schema è rappresentato in figura 2.4. Il

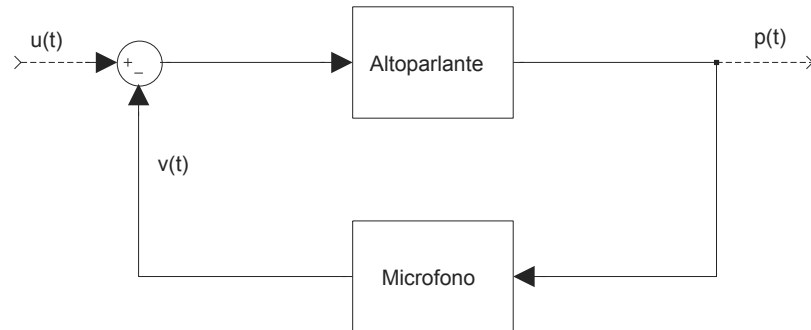


Figura 2.1: Schema della retroazione semplificato

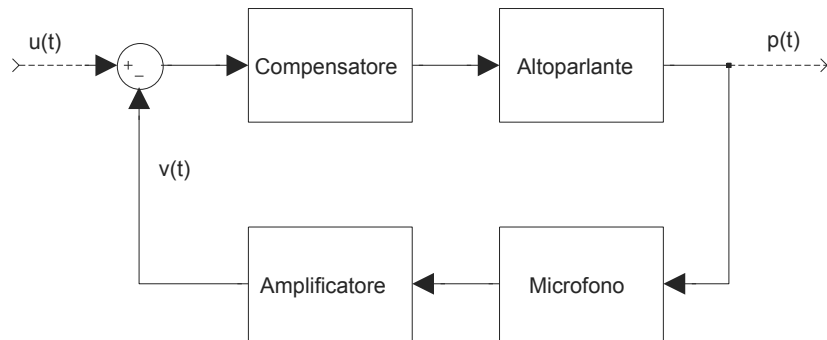


Figura 2.2: Schema della retroazione

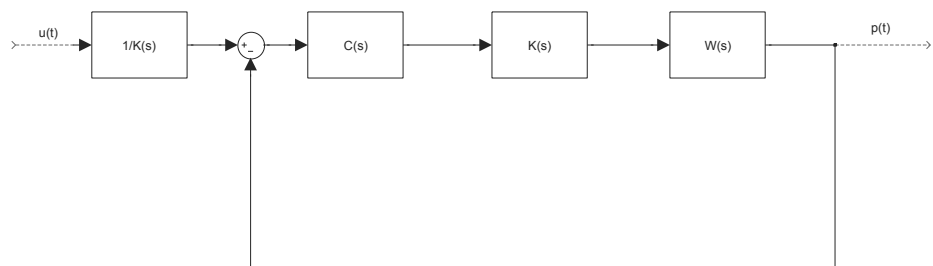


Figura 2.3: Schema della retroazione modificato

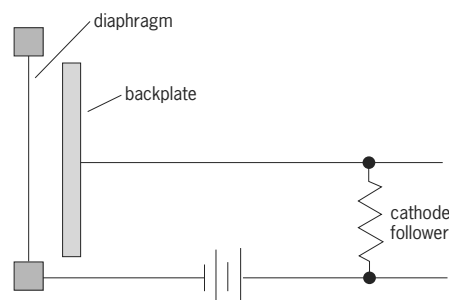


Figura 2.4: Struttura del microfono

diaframma (un foglio sottile di plastica metallizzata) e la piastra posteriore formano un condensatore, la cui capacità, variabile, è determinata dalla distanza fra le due armature. Le onde di pressione, incidendo sul diaframma ne provocano lo spostamento, modificando così la capacità del condensatore $C(t)$. La tensione ai capi del condensatore $v_c(t)$ è, in condizione statica, pari alla tensione E impressa dal generatore. Ad una variazione della capacità è associata una variazione della tensione secondo la legge $Q = C(t) \cdot v_c(t)$. Nell'intervallo delle normali frequenze audio la carica sul condensatore rimane costante, essendo la resistenza molto elevata (nell'ordine dei $G\Omega$). Il diaframma è soggetto ad una forte tensione meccanica cui si somma la rigidità provocata dall'aria posta fra esso e la piastra posteriore. La tensione di uscita $v(t)$ viene prelevata ai capi della resistenza. Esistono in commercio alcuni microfoni calibrati con procedure di laboratorio affinché presentino una risposta in frequenza perfettamente uniforme nell'intervallo di frequenze di interesse. Risulta adeguato ai nostri scopi un microfono con risposta costante (con una variazione massima di 1 dB tra i 2 Hz ed i 20000 Hz che presenti una sensibilità (rapporto tra tensione di uscita e pressione sonora in ingresso) pari a 50 mV/Pa . Nel dominio delle trasformate di Laplace il funzionamento di tale microfono è ben approssimato dalla seguente equazione:

$$\mathcal{V}(s) = \frac{0.01s}{(1 + s/5)(1 + s/240000)}\mathcal{P}(s) \quad (2.1)$$

La funzione di trasferimento risulta pertanto:

$$W_{mic}(s) = \frac{0.01s}{(1 + s/5)(1 + s/240000)} \quad (2.2)$$

Il diagramma di Bode è mostrato in figura 2.5.

2.3 Funzioni di trasferimento

Vogliamo ora fare un riepilogo delle funzioni di trasferimento ottenute in precedenza e che serviranno nella prossima sezione.

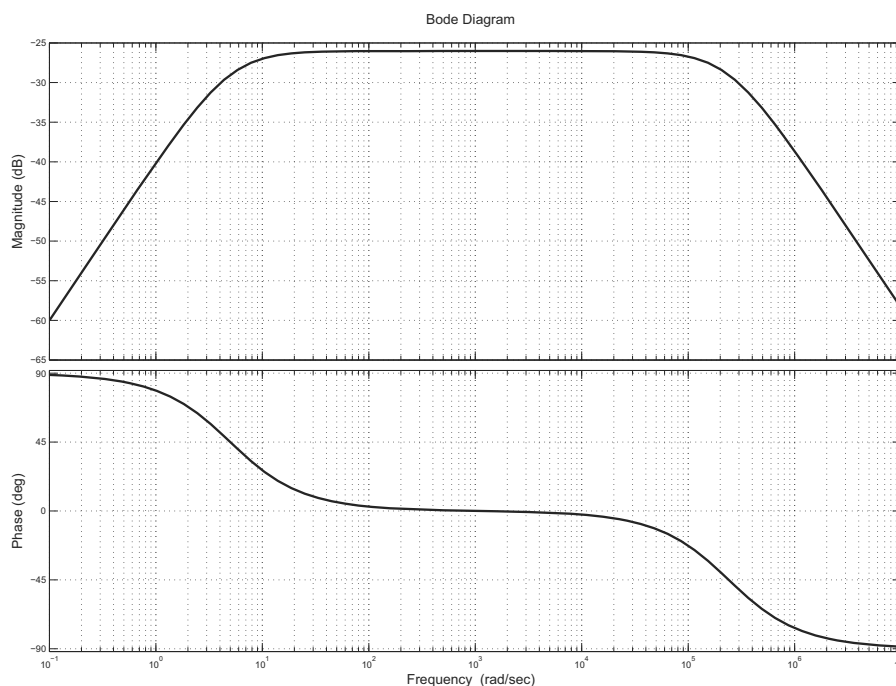


Figura 2.5: Diagramma di Bode della funzione di $W_{mic}(s)$

Con riferimento allo schema di figura 2.3:

- $W(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento dell'altoparlante.

$$W(s) = \frac{409.8 s}{10^{-7} s^3 + 4.2 \cdot 10^{-3} s^2 + 18.01 s + 400}$$

Il suo diagramma di Bode è rappresentato in figura 1.4.

- $K(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento del microfono amplificato. Usando un amplificatore con guadagno pari a 100 risulta:

$$K(s) = \frac{s}{(1 + s/5)(1 + s/240000)}$$

Il diagramma di Bode è rappresentato in figura 2.6

- $W_{lm}(s)$ è il prodotto di $W(s)$ e $K(s)$ e rappresenta la funzione di trasferimento del collegamento in serie dell'altoparlante e del microfono.

$$W_{lm} = \frac{4089 s^2}{8.333 \cdot 10^{-14} s^5 + 2.35 \cdot 10^{-8} s^4 + 8.551 \cdot 10^4 s^3 + 3.607 s^2 + 98.01 s + 400} \quad (2.3)$$

Il diagramma di Bode è rappresentato in figura 2.7. Il diagramma di Nyquist è rappresentato in figura 2.8 e 2.9. Il luogo delle radici è rappresentato in figura 2.10.

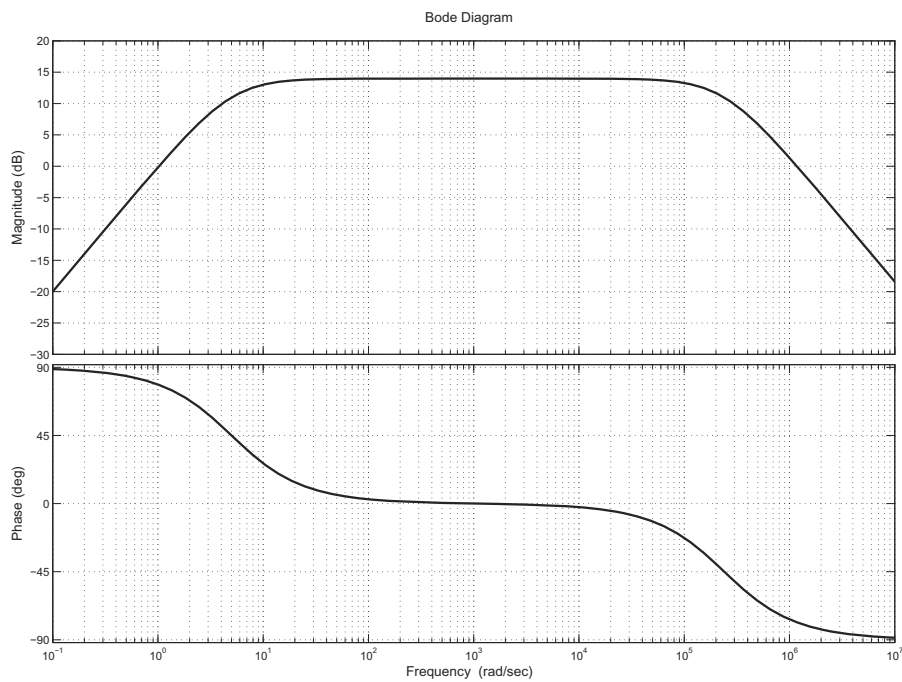


Figura 2.6: Diagramma di Bode di $K(s)$

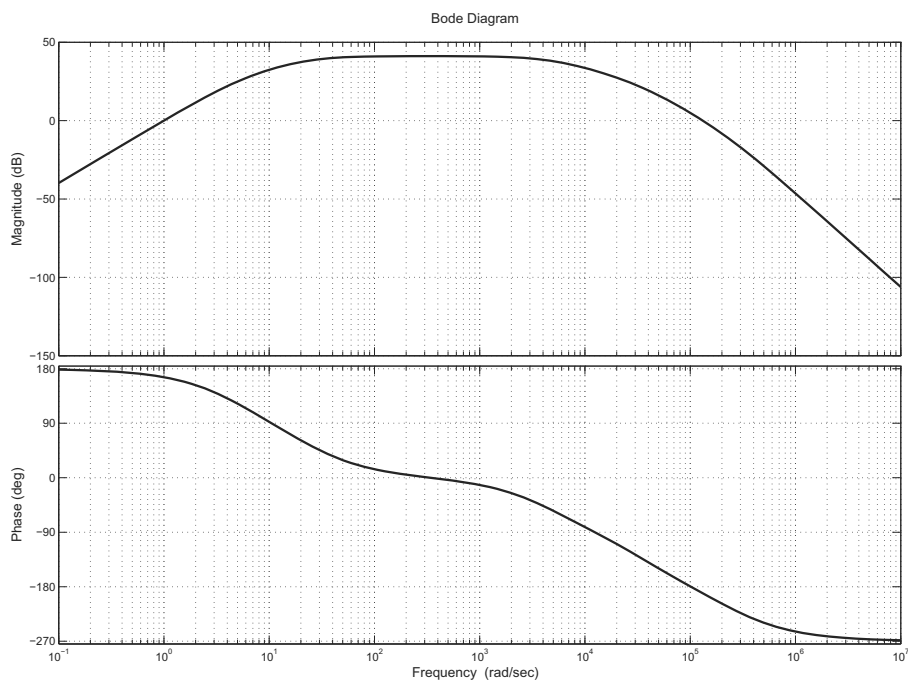
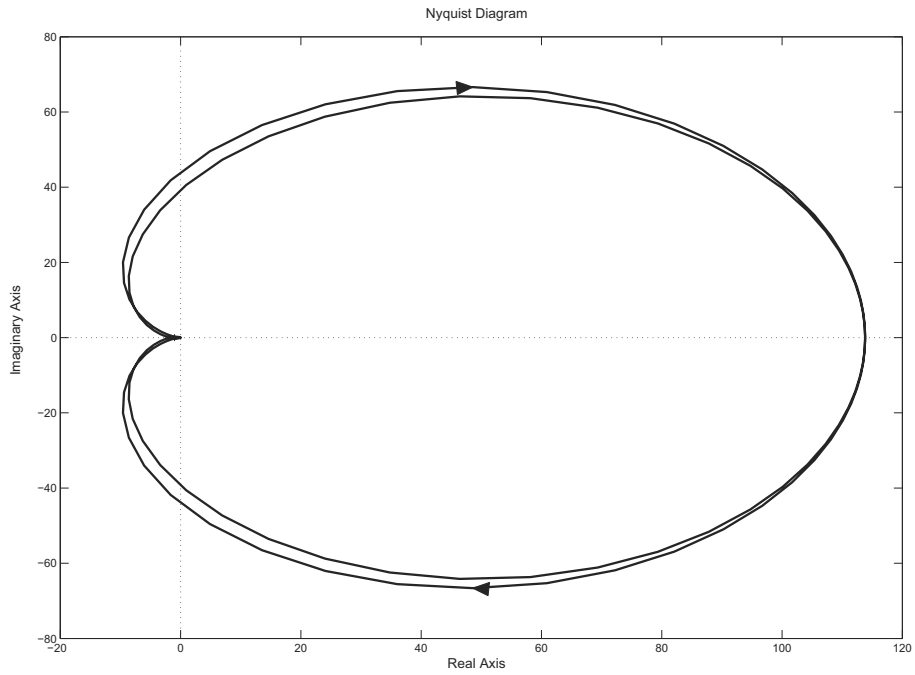
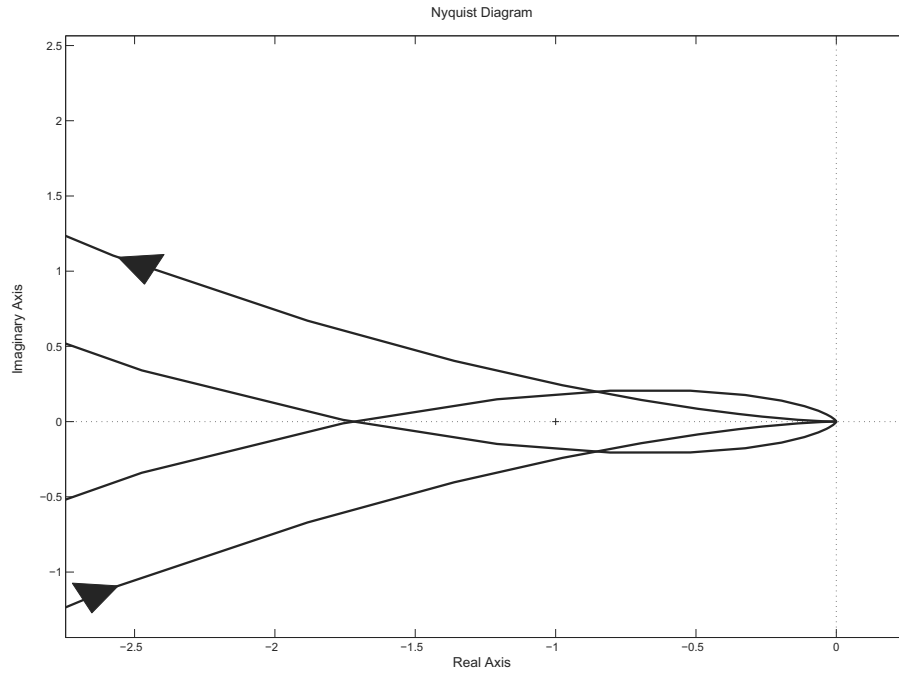
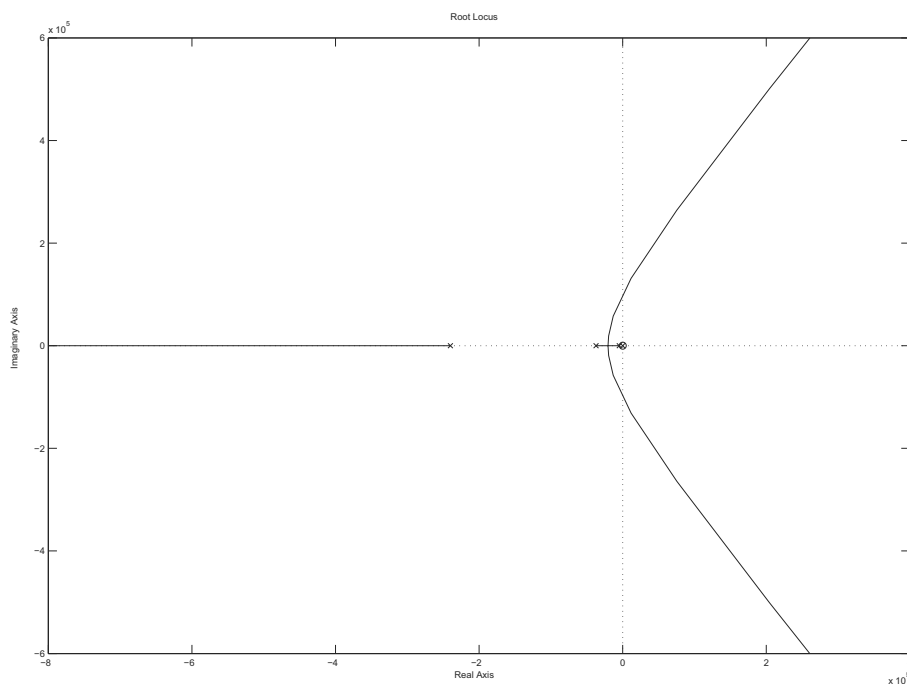


Figura 2.7: Diagramma di Bode di $W_{lm}(s)$

Figura 2.8: Diagramma di Nyquist di $W_{lm}(s)$ Figura 2.9: Ingrandimento del Diagramma di Nyquist di $W_{lm}(s)$ vicino all'origine

Figura 2.10: Luogo delle radici di $W_{lm}(s)$

2.4 Sintesi del compensatore

Nella progettazione del compensatore vogliamo *aumentare la banda passante del sistema*, ottenendo un miglioramento delle prestazioni audio e contemporaneamente permettendo di *diminuire i tempi di risposta all'impulso* mantenendo una *sovraelongazione limitata* e senza perdere la *stabilità BIBO* del sistema.

2.4.1 Sintesi del compensatore costante

Analizzando il luogo delle radici e il diagramma di Nyquist di $W_{lm}(s)$ risulta che il sistema retroazionato è instabile per ogni guadagno del compensatore $C > 0.58$. Quindi la condizione di stabilità BIBO del sistema retroazionato si traduce nella specifica $C < 0.58$.

Chiameremo in seguito ω_{a_b} la pulsazione di attraversamento del diagramma di Bode alle basse frequenze e ω_{a_a} la pulsazione di attraversamento del diagramma di Bode alle alte frequenze. Poiché nelle vicinanze di ω_{a_b} il diagramma di Bode sale con pendenza sufficiente (tornando ad abbassarsi solo nei pressi di ω_{a_a}) e, nelle vicinanze di ω_{a_a} il diagramma di Bode scende con pendenza sufficiente e successivamente non ritorna più in alto, il margine di fase contiene informazione sul picco di risonanza relativo. Essendo poi la massima sovraelongazione della risposta all'impulso legata al picco di

risonanza relativo, è possibile esprimere gli obiettivi sulla sovraelongazione come condizione sul margine di fase. Proseguiamo ora con la sintesi di due diversi compensatori per due scelte di tale parametro. Faremo un confronto dettagliato delle prestazioni nel prossimo capitolo.

Margine di fase di 90°

Scegliendo un margine di fase di 90° il sistema presenta una sovraelongazione all'impulso pari al 2%, un settling time di 0.8 ms . Tale scelta del margine di fase assicura inoltre che la stabilità del sistema sia molto robusta alle variazioni dei valori dei parametri.

Il valore del compensatore che soddisfa questa richiesta si ricava studiando il diagramma di Bode del circuito in catena aperta, indicato in figura 2.7. Infatti, affinché la fase alla pulsazione di attraversamento ω_{ab} sia di 90° (la fase alla pulsazione ω_{ab} risulta in questo caso maggiore), bisogna abbassare il grafico di 32.76 dB . Da quest'ultima considerazione risulta necessario porre $C = 0.023$. Con tale compensatore la banda passante risulta $[1, 2388]\text{ Hz}$. Il diagramma di Bode del sistema retroazionato con questo compensatore è indicato in figura 2.11 in confronto al diagramma di Bode dell'altoparlante. Per bilanciare l'attenuazione dovuta alla retroazione abbiamo posto un amplificatore costante con guadagno tale che, all'interno della banda passante, il modulo della risposta in frequenza valga 20 dB 2.12.

Margine di fase di 66.6°

Affinché il sistema abbia una sovraelongazione all'impulso del 10% scegliamo un margine di fase pari a 66.6° . In tali condizioni il sistema ha un settling time all'impulso di 0.22 ms . Anche questa scelta del margine di fase assicura che la stabilità sistema sia robusta alle variazioni dei valori dei parametri.

Come nel caso precedente, il valore del compensatore che soddisfa questa richiesta si ricava studiando il diagramma di Bode del circuito in catena aperta indicato in figura 2.7. Per avere il margine di fase richiesto bisogna abbassare il grafico di 27.53 dB . Da quest'ultima considerazione risulta necessario porre $C = 0.042$. Con tale compensatore la banda passante risulta $[1, 5920]\text{ Hz}$.

Il diagramma di Bode del sistema retroazionato con questo compensatore è indicato in figura 2.13 in confronto al diagramma di Bode dell'altoparlante. Per bilanciare l'attenuazione dovuta alla retroazione abbiamo posto un amplificatore costante con guadagno pari a 100 a monte del sistema come rappresentato in figura 2.12.

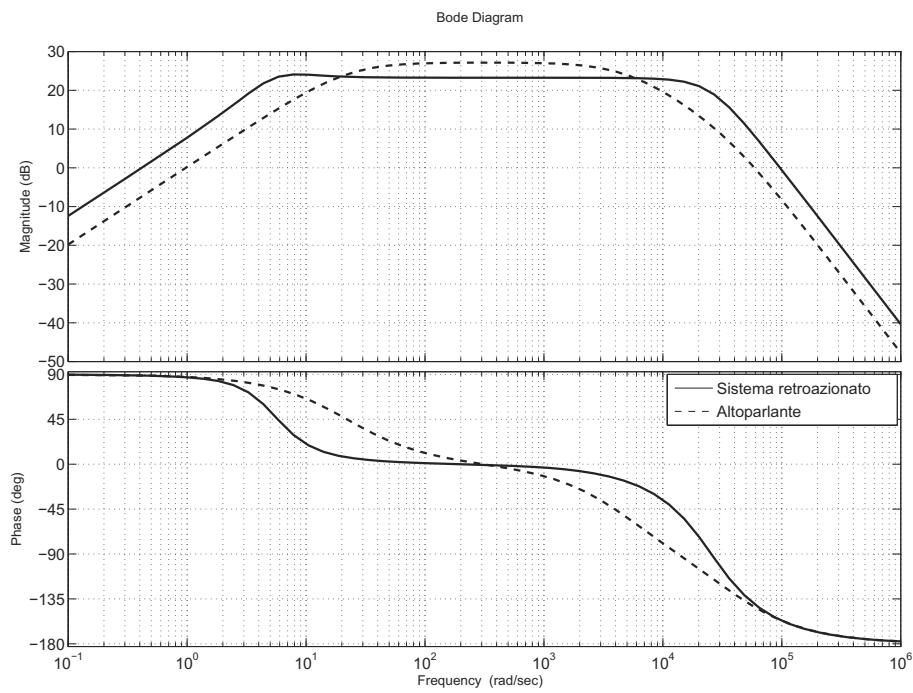


Figura 2.11: Confronto del diagramma di Bode dell'amplificatore e del sistema retroazionato con il compensatore $C = 0.023$

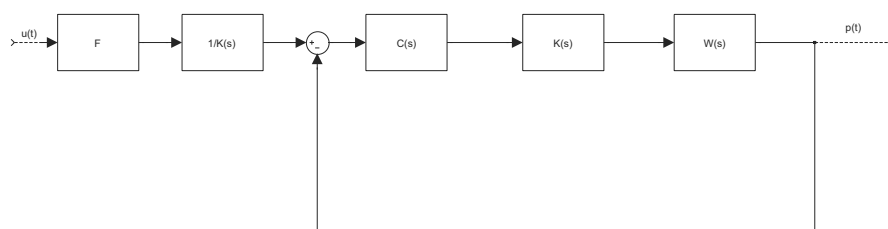


Figura 2.12: Schema della retroazione

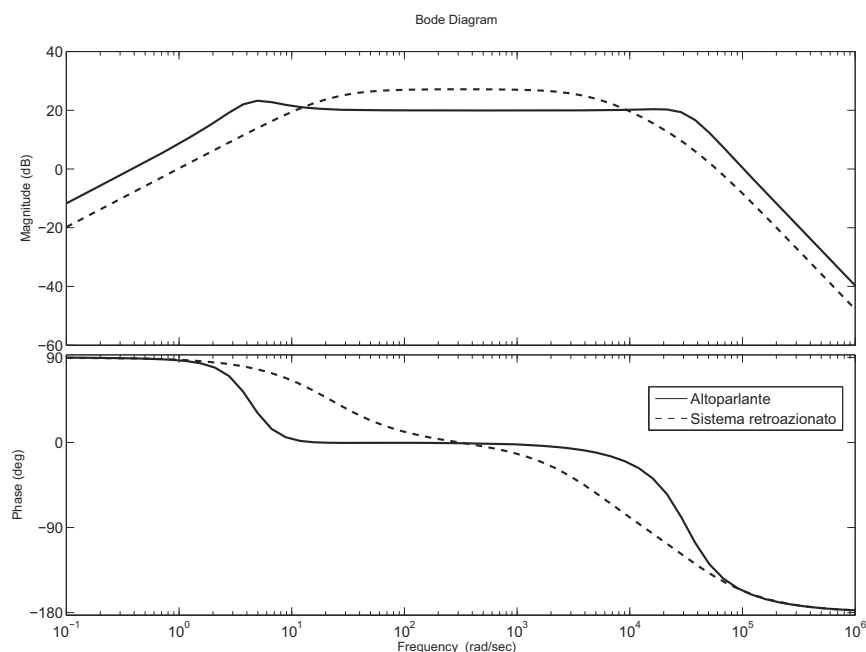


Figura 2.13: Confronto del diagramma di Bode dell'amplificatore e del sistema retroazionato con il compensatore $C = 0.042$

2.4.2 Sintesi del compensatore non costante

Useremo, per il progetto del compensatore $C(s)$, la tecnica di sintesi per tentativi.

Ci poniamo come obiettivi:

1. Aumentare la pulsazione di attraversamento ω_{aa} per incrementare la banda passante del sistema. Ciò comporta la diminuzione dei tempi di risposta (anche se tale parametro, in campo audio, non è importante).
2. Aumentare il margine di fase del sistema per garantirne la robustezza della stabilità e limitare i picchi di risonanza. Ciò comporta, inoltre, la diminuzione della sovraelongazione nelle risposte impulsive (anche se tale parametro, in campo audio, non è importante).
3. Mantenere la stabilità BIBO del sistema.

Nel sistema in questione il terzo criterio si riduce all'obbligo di usare, per il compensatore, solo zeri e poli a parte reale negativa. Per il criterio di Bode, infatti, se la funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)W_{lm}(s)$ non ha poli a parte reale positiva e il suo guadagno di Bode $K_B(C)K_B(W_{lm})$ è positivo, allora il risultante sistema retroazionato è BIBO stabile se e solo se il margine di fase di $C(s)W_{lm}(s)$ è positivo.

Per soddisfare l'obiettivo 1. possiamo:

- Aumentare il guadagno della funzione di trasferimento in catena aperta
- Usare degli zeri reali negativi.

Per soddisfare l'obiettivo 2. possiamo:

- Diminuire il guadagno della funzione di trasferimento in catena aperta
- Usare degli zeri reali negativi per aumentare la fase in ω_{a_a}
- Usare dei poli reali negativi per diminuire la fase in ω_{a_b} .

Nella prosecuzione bisognerà tenere presente che l'inserimento di zeri e poli, pur migliorando le prestazioni dal punto di vista della teoria del controllo, potrà creare delle deformazioni della risposta in frequenza rendendola meno lineare all'interno della banda passante.

Vogliamo che questo compensatore riunisca i pregi di entrambi i compensatori costanti che abbiamo progettato nel paragrafo 2.4.1. Richiediamo quindi:

- $\omega_{a_a} \geq 20000$, ottenendo così la banda passante e la velocità di risposta del secondo compensatore costante (maggiori che nel primo).
- Margine di fase di 90° , ottenendo così la bassa sovraelongazione e la robustezza della stabilità del primo compensatore costante (maggiori che nel secondo).

Partiamo da un compensatore preliminare costante $C'(s)$ che permetta di avere una ω_{a_a} sufficientemente elevata, lo scegliamo superiore ad entrambi i compensatori costanti: $C'(s) = 0.067$. Dal grafico di Bode del sistema in catena aperta con tale compensatore, rappresentato in figura 2.14, si vede che il margine fase alle frequenze di attraversamento vale rispettivamente 52.9° per $\omega_{a_b} = 4.44$ e 54.9° per $\omega_{a_a} = 28800$.

Cerchiamo ora di portare i margini di fase vicini ai 90° .

Posizioniamo un polo alla frequenza 4.99 vicino a quella di attraversamento ω_{a_b} e successivamente uno zero. Affinché questa rete ritardatrice comporti un margine di fase in ω_{a_b} di 90° lo zero deve avere frequenza $\omega = 15.3$.

Mettiamo ora uno zero alla frequenza 9650 (dopo la frequenza di attraversamento ω_{a_a}) e successivamente un polo. Una buona soluzione che comporta un margine di fase di $102^\circ > 90^\circ$ è porre il polo alla frequenza $\omega = 32500$. Il compensatore ottenuto ha dunque equazione:

$$C(s) = 0.067 \cdot \frac{(1 + 0.0001s)(1 + 0.066s)}{(1 + 3.1 \cdot 10^{-5}s)(1 + 0.2s)} \quad (2.4)$$

Dal grafico di Bode del sistema in catena aperta, rappresentato in figura 2.15, si vede che $\omega_{a_a} = 20600$ e il margine di fase è di 90° .

Il grafico di Bode del sistema in catena chiusa è rappresentato in figura 2.16.

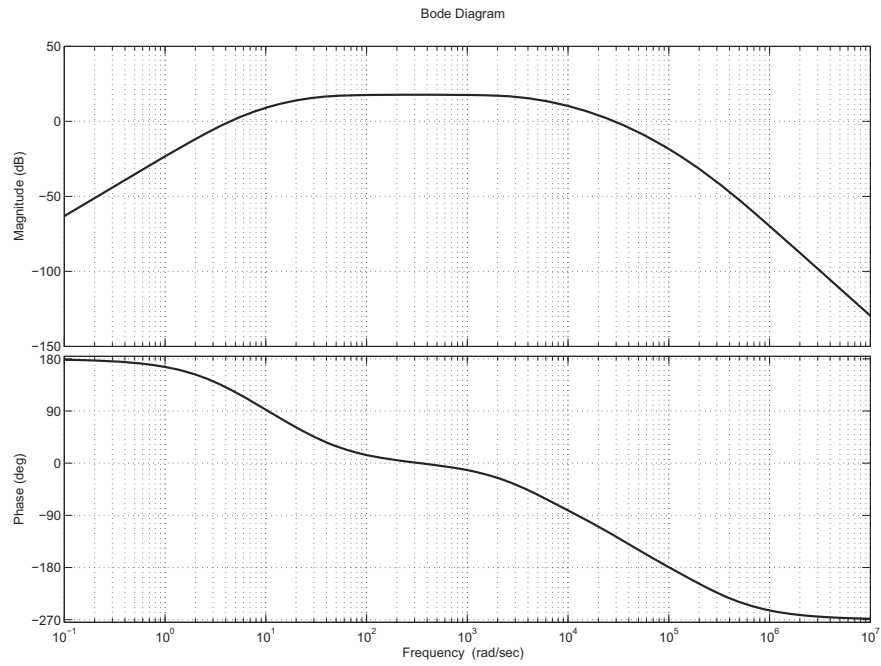


Figura 2.14: Diagramma di Bode del sistema in catena aperta con il compensatore $C'(s) = 0.067$

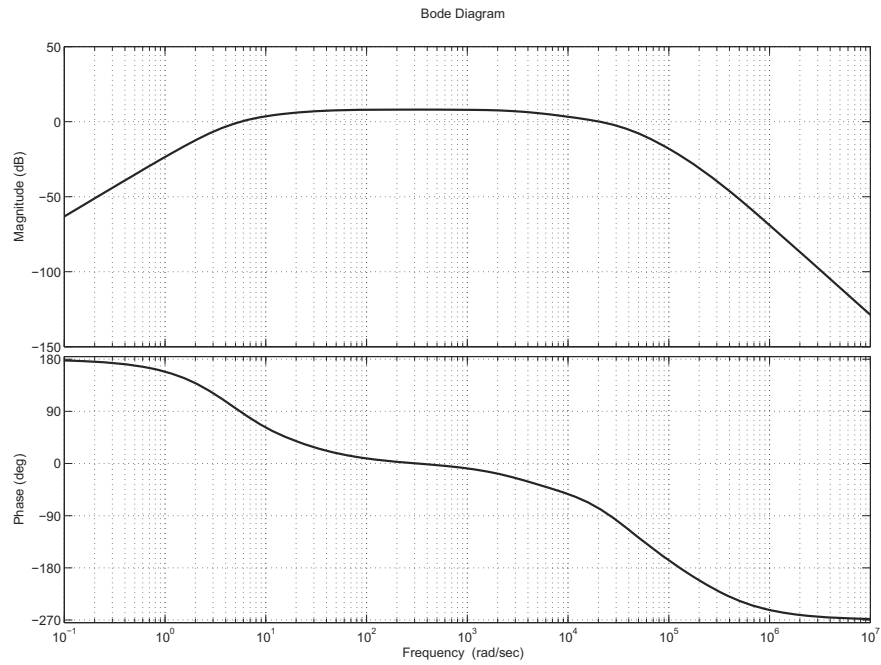


Figura 2.15: Diagramma di Bode del sistema in catena aperta con il compensatore $C(s)$

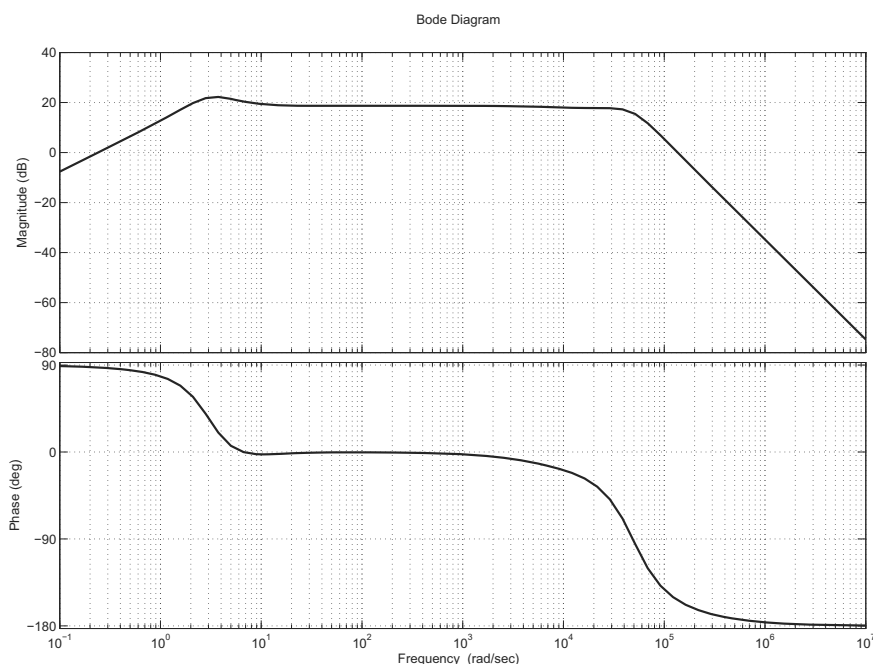


Figura 2.16: Diagramma di Bode del sistema in catena chiusa con il compensatore $C(s)$

2.4.3 Sintesi del compensatore tramite luogo delle radici

Abbiamo visto all'inizio del paragrafo 2.4 come la condizione di stabilità BIBO del sistema obblighi il guadagno di un compensatore costante ad essere minore di 0.58. Sarebbe però utile poter utilizzare un guadagno del compensatore elevato perché esso comporterebbe il considerevole vantaggio di rendere il sistema robusto alle variazioni dei parametri.

Useremo una tecnica di progetto diversa dalle precedenti, basata sul luogo delle radici, che permette di aumentare di molto il massimo guadagno che si può ottenere senza perdere la stabilità.

Cominciamo le nostre considerazioni partendo dal luogo delle radici rappresentato in figura 2.10. Si nota che è possibile fare in modo che i due rami non attraversino l'asse immaginario: basta porre uno zero doppio reale a sinistra dell'ultimo polo (situato in -240000) ed i due rami si chiuderanno su tale zero. Poniamo lo zero doppio in -337000 . Ora fissiamo il guadagno al valore $K = 1000$, non ci sono problemi di stabilità: tale sistema è addirittura stabile per ogni valore del guadagno. Il luogo delle radici con indicate le radici per $k = 1000$ è rappresentato in figura 2.17, l'ingrandimento vicino all'origine è in figura 2.18. Tornando ora al diagramma di Bode ci accorgiamo che il margine di fase è troppo basso (0.034°). Proviamo quindi a vedere se abbassando il guadagno sia possibile ottenere un margine di fase minore:

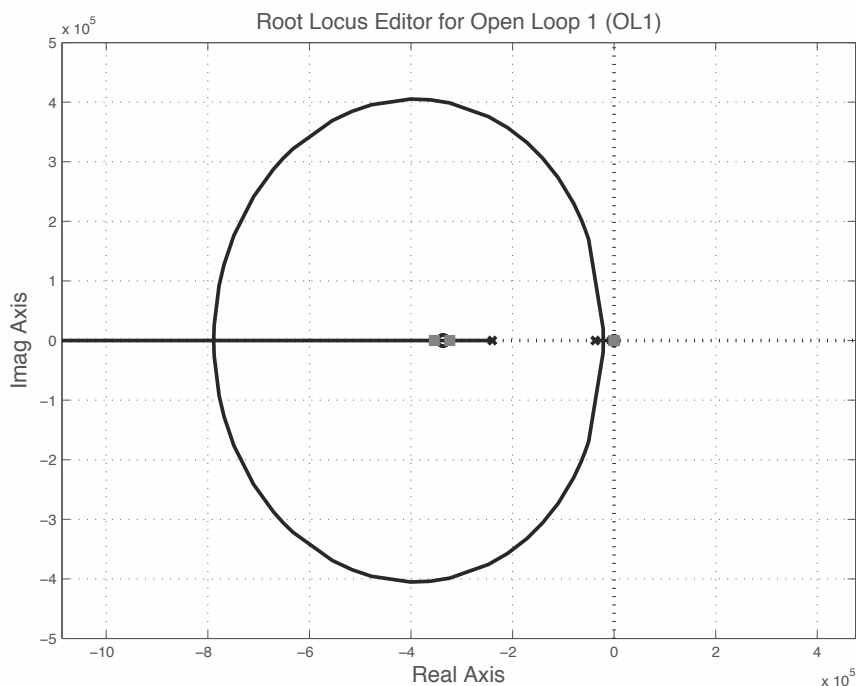


Figura 2.17: Luogo delle radici del sistema con il compensatore $C = 1000 \cdot (1 + 3 \cdot 10^{-6}s)^2$

per $K = 100$ il margine di fase è di 1.39° , per $K = 10$ è di 4.39° e per $K = 1$ è di 13.9° . Dobbiamo quindi trovare una strada alternativa. Lasciando $K = 1000$, un modo semplice per aumentare il margine di fase è porre una rete ritardatrice a frequenze basse (prima della frequenza di taglio inferiore). Per ottenere un margine di fase di 90° abbiamo posto un polo alla frequenza $\omega = 0.000134$ ed uno zero alla frequenza $\omega = 4,86$. Dobbiamo aggiungere ora due poli per ragioni di fisica realizzabilità. Un doppio polo in alta frequenza (nel nostro caso $\omega = 8660000$) garantisce che la nostra analisi non cambi molto. Infatti, pur formandosi un doppio ramo che va all'infinito tagliando l'asse immaginario, non vi sono problemi di stabilità: il ramo interseca l'asse immaginario per valori del guadagno molto più elevati dei precedenti; addirittura per il guadagno che abbiamo scelto le radici sono tutte reali, presentando quindi una distanza angolare dall'asse immaginario di 90° . Il diagramma di Bode del sistema retroazionato con questo compensatore è indicato in figura 2.19 in confronto al diagramma di Bode dell'altoparlante. Si osserva che tale compensatore ha un comportamento peggiore di quello progettato nel paragrafo 2.4.2.

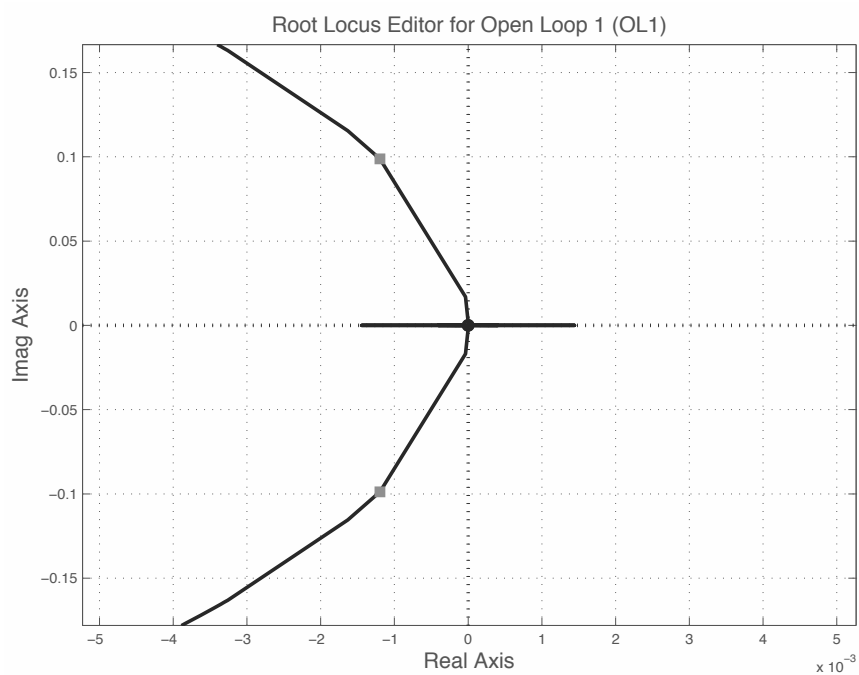


Figura 2.18: Luogo delle radici del sistema con il compensatore $C = 1000 \cdot (1 + 3 \cdot 10^{-6}s)^2$, ingrandimento vicino all'asse immaginario

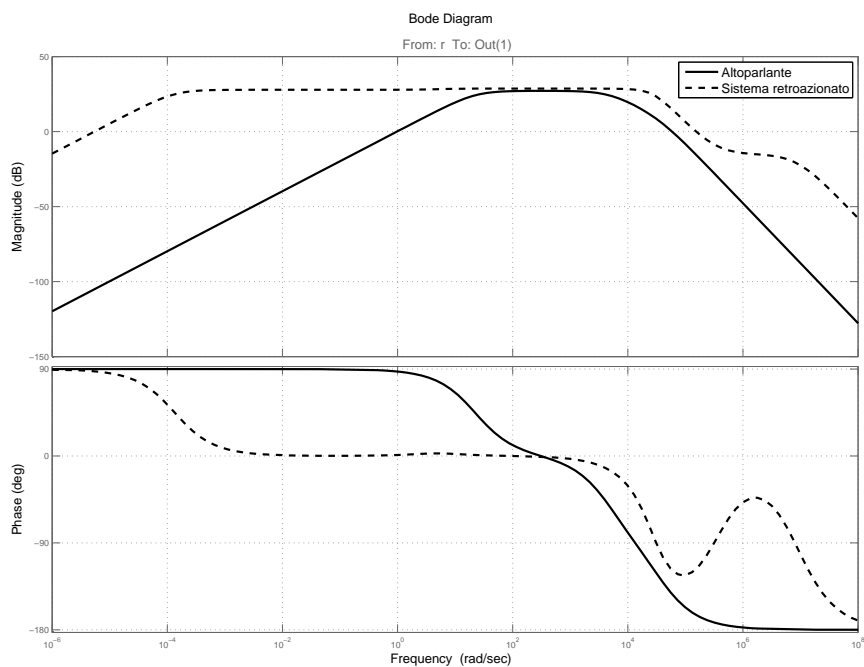


Figura 2.19: Confronto del diagramma di Bode dell'amplificatore e del sistema retroazionato con il compensatore con guadagno $K = 1000$

Capitolo 3

Analisi del sistema

In questo capitolo confronteremo le caratteristiche del sistema composto dal solo altoparlante e del sistema retroazionato che abbiamo presentato nel paragrafo 2.4.2. La funzione di trasferimento dell'altoparlante è:

$$W_l(s) = \frac{409.8 s}{10^{-7} s^3 + 4.2 \cdot 10^{-3} s^2 + 18.01 s + 400} \quad (3.1)$$

La funzione di trasferimento del sistema retroazionato risulta essere:

$$W_f(s) = \frac{1.828 \cdot 10^{20} s^5 + 4.564 \cdot 10^{15} s^4 + 4.242 \cdot 10^{19} s^3}{s^7 + 3.145 \cdot 10^5 s^6 + 1.942 \cdot 10^{10} s^5 + 7.42 \cdot 10^{14} s^4 + 4.94 \cdot 10^{18} s^3 + 8.581 \cdot 10^{20} s^2 + 3.231 \cdot 10^{21} s - 7.189 \cdot 10^6} \cdot \frac{1}{+9.904 \cdot 10^{19} s^2 + 3.464 \cdot 10^{20} s + 7.779 \cdot 10^{20}} \quad (3.2)$$

Nei prossimi grafici indicheremo con una linea continua il sistema retroazionato e con una linea tratteggiata il sistema composto dal solo altoparlante.

3.1 Risposta in frequenza

In figura 3.1 è mostrato il confronto dei diagrammi di Bode. È evidente l'aumento della banda passante, misurato in tabella 3.1.

La risposta in frequenza, nel dominio del tempo, prende la forma di una risposta all'impulso ideale (che in campo audio è più interessante della risposta al gradino, non essendo quest'ultimo inseguibile da un altoparlante), rappresentata in figura 3.2.

	Frequenza di taglio inferiore	Frequenza di taglio superiore
Altoparlante	3 Hz	767 Hz
Sistema retroazionato	1 Hz	7894 Hz

Tabella 3.1: Confronto della banda passante dell'amplificatore e del sistema retroazionato

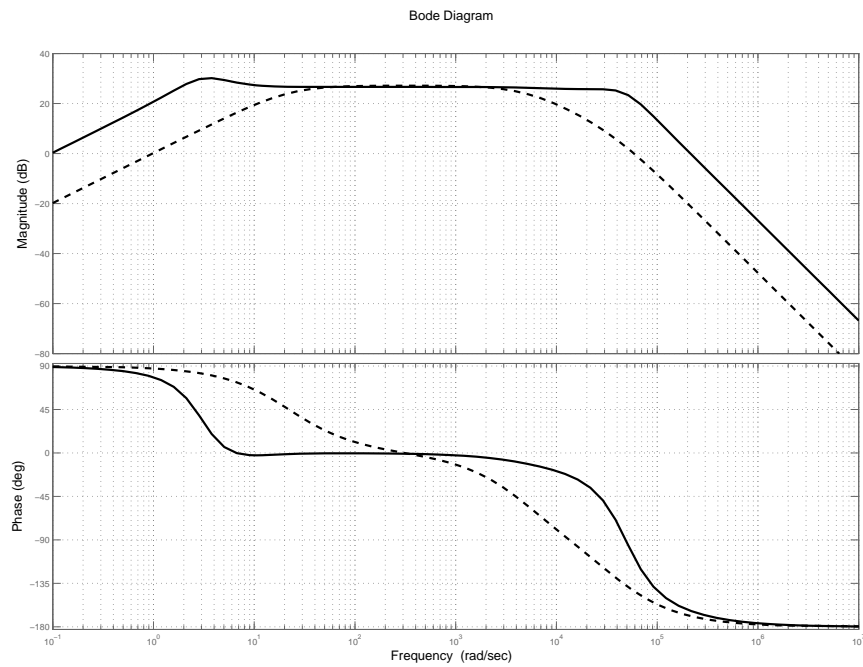


Figura 3.1: Confronto del diagramma di Bode dell'amplificatore e del sistema retroazionato

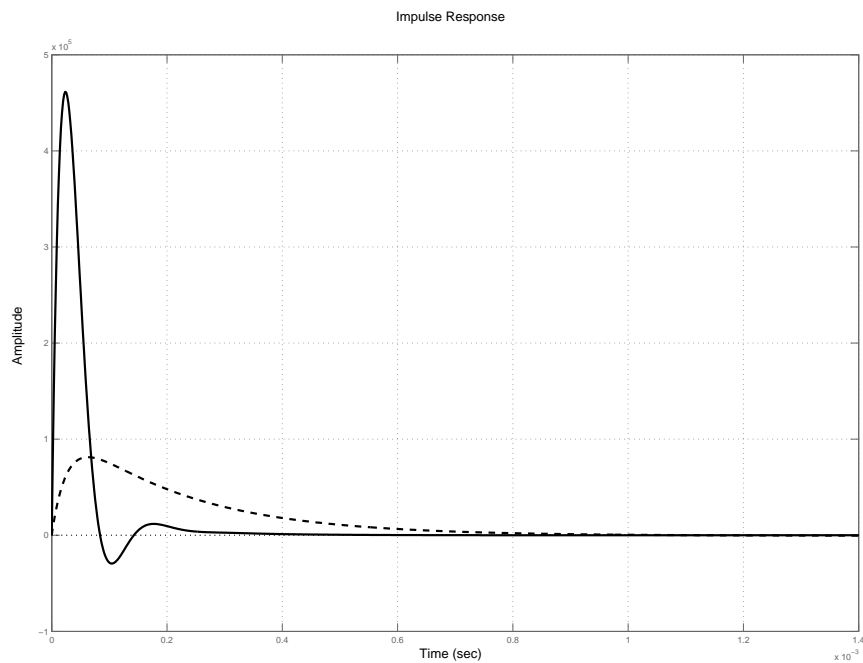


Figura 3.2: Confronto della risposta all'impulso dell'amplificatore e del sistema retroazionato

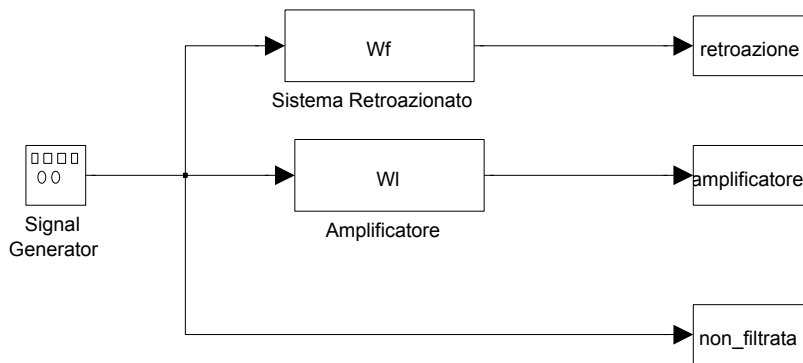


Figura 3.3: Schema Simulink utilizzato per le simulazioni

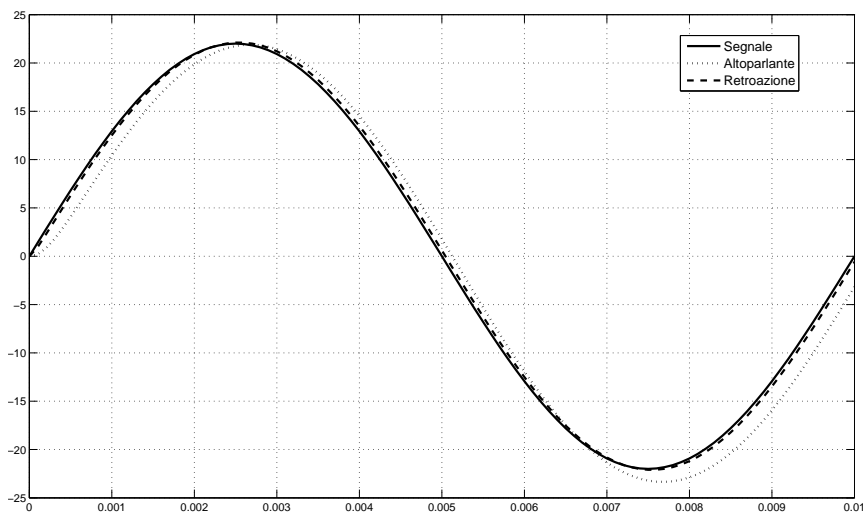


Figura 3.4: Confronto delle risposte all'onda sinusoidale

3.2 Inseguimento di segnali

Per confrontare il comportamento dei due sistemi nell'inseguimento di segnali useremo lo schema di Simulink indicato in figura 3.3. Dalle figure 3.4 e 3.5 si evince che l'onda di pressione generata dal sistema retroazionato è molto più simile al segnale d'ingresso di quanto non lo sia l'onda generata dall'altoparlante.

3.3 Distorsione armonica

Il modello del sistema che abbiamo utilizzato finora non ci permette, essendo lineare, di valutare l'effetto della retroazione sulla distorsione armonica. È risaputo, però, che la retroazione negativa diminuisce sensibilmente la di-

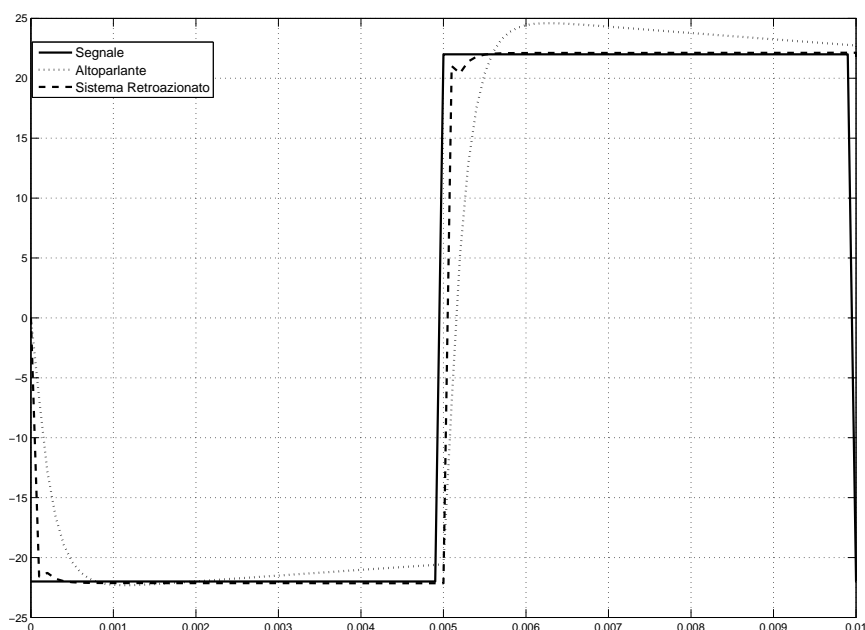


Figura 3.5: Confronto delle risposte all'onda quadra

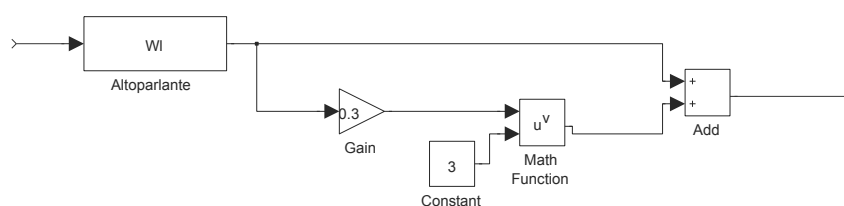


Figura 3.6: Schema Simulink dell'altoparlante distortente

storsione armonica totale (THD).

Per poter simulare la distorsione dobbiamo modificare gli schemi Simulink. Vogliamo creare un nuovo blocco, chiamato altoparlante distortente, da sostituire al blocco contenente il modello lineare dell'altoparlante. Questo blocco sarà composto dal modello dell'altoparlante usato finora con in serie un elemento distortivo di equazione $f(u) = u + \alpha u^3$. Tale blocco è rappresentato in figura 3.6. Il parametro α dovrà essere scelto di volta in volta in base all'ampiezza dell'ingresso. Si noti, inoltre, che il blocco distortivo è realistico: è la III armonica che contribuisce maggiormente alla THD e u^3 porta dentro soprattutto la III armonica. Utilizzando lo schema Simulink di figura 3.3, a cui sostituiamo il modello lineare dell'altoparlante con il modello distortente, poniamo come ingresso una sinusoide a $200Hz$. Il confronto dei segnali uscenti dall'altoparlante e dal sistema retroazionato è rappresentato in figura 3.7. Si nota che pur essendo l'altoparlante molto distortente il sistema

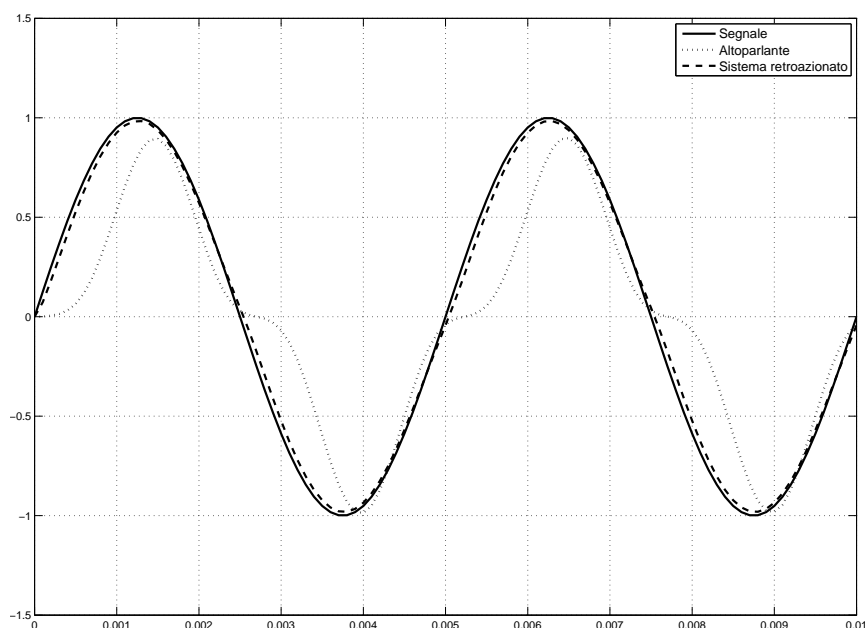


Figura 3.7: Confronto delle risposte alla sinusoide con altoparlante distortivo retroazionato

retroazionato fornisce un'uscita con una distorsione molto bassa. Possiamo calcolare la THD misurando i valori dei picchi nel grafico dello spettro dei segnali indicato in figura 3.8 e 3.9.

Per $\alpha = 0.3$ e l'ampiezza della sinusoide di ingresso di 1 V risulta:

$$\begin{aligned} \text{THD dell'altoparlante} &= 12.75\% \\ \text{THD del sistema retroazionato} &= 0.094\% \end{aligned}$$

3.4 Risposta ad un segnale musicale reale

Vogliamo ora valutare come si comportano i due sistemi quando viene dato loro in ingresso un segnale preso da un cd audio. Abbiamo scelto un passo del concerto R443 in Do maggiore di Antonio Vivaldi per ottavino, archi e basso continuo. Esso presenta il vantaggio di avere le componenti in bassa ed alta frequenza facilmente identificabili all'ascolto. In figura 3.10 è rappresentato lo spettro del segnale originario. Attraverso lo schema simulink indicato in figura 3.13 abbiamo ottenuto il segnale di uscita dei due sistemi. Li abbiamo esportati come file `.wav` per poterli ascoltare. Gli spettri sono rappresentati in figura 3.11 e 3.12. Si vede che lo spettro dell'uscita del sistema retroazionato è molto più simile al segnale di ingresso di quanto non lo sia lo spettro dell'uscita dell'altoparlante, soprattutto alle frequenze più elevate.

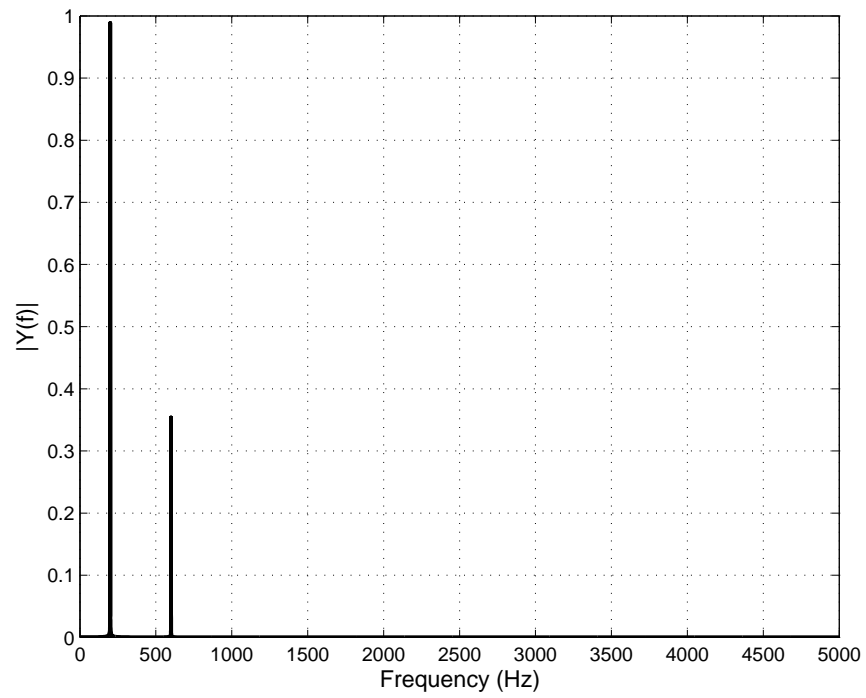


Figura 3.8: Spettro delle risposta alla sinusoide dell'altoparlante distortivo

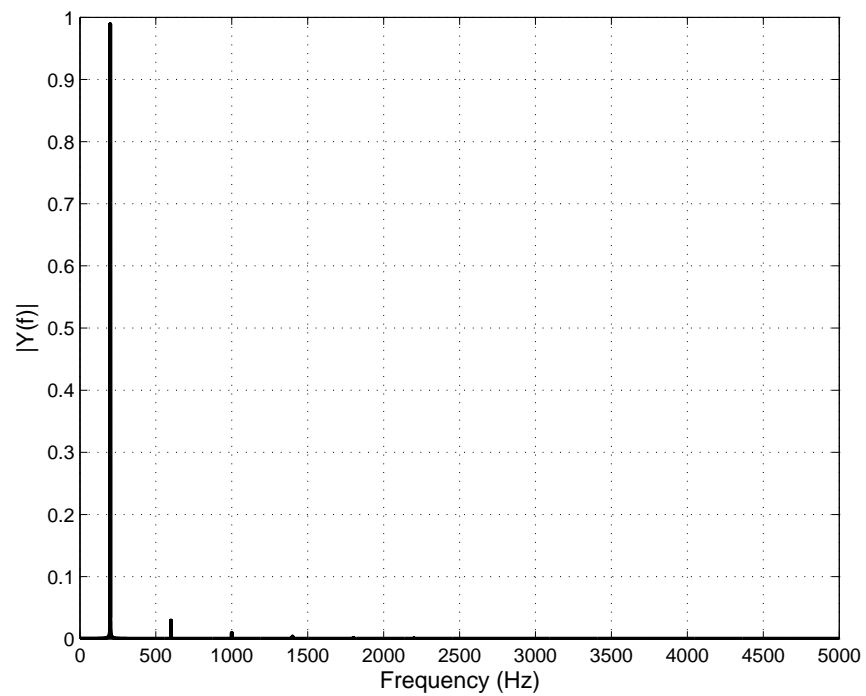


Figura 3.9: Spettro delle risposta alla sinusoide del sistema retroazionato

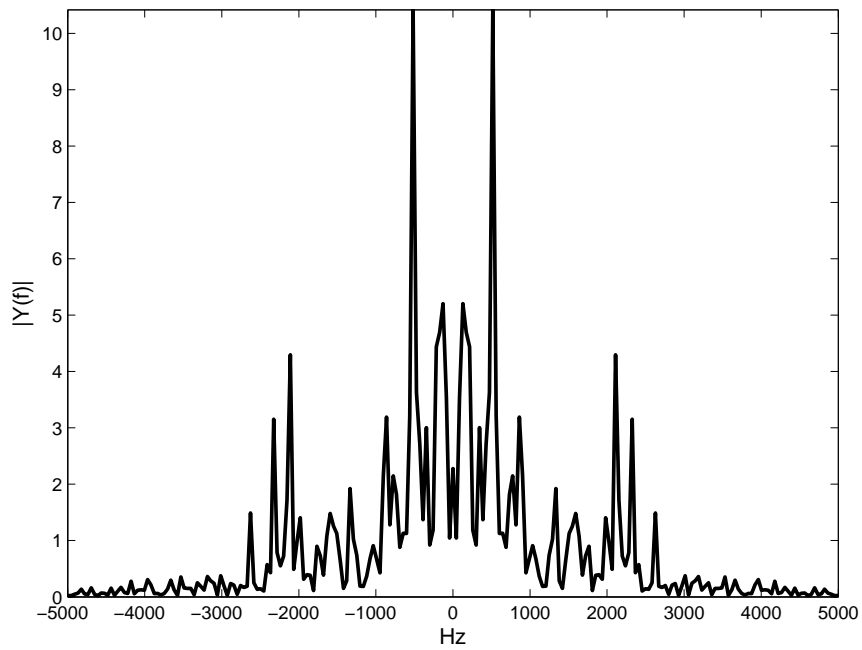


Figura 3.10: Spettro del segnale originario

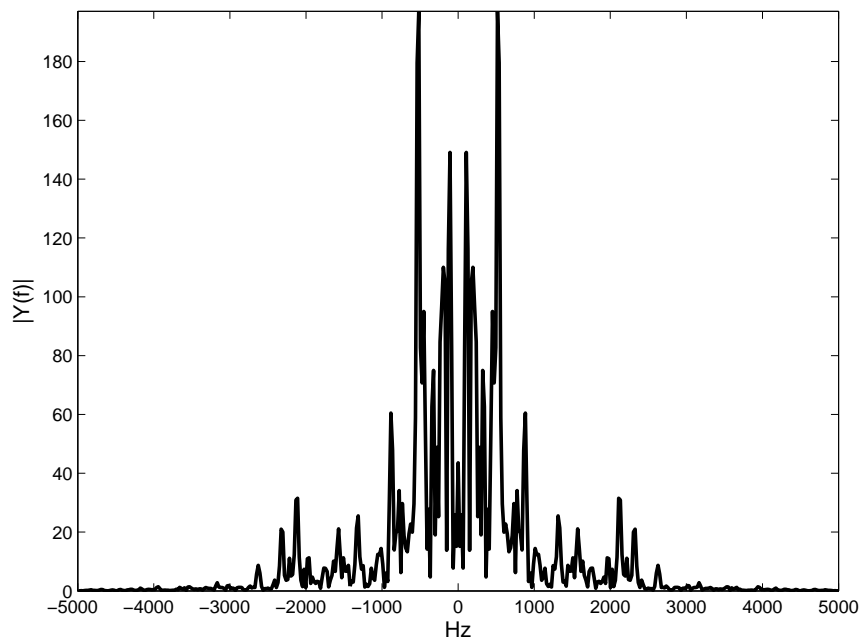


Figura 3.11: Spettro del segnale di uscita dell'altoparlante

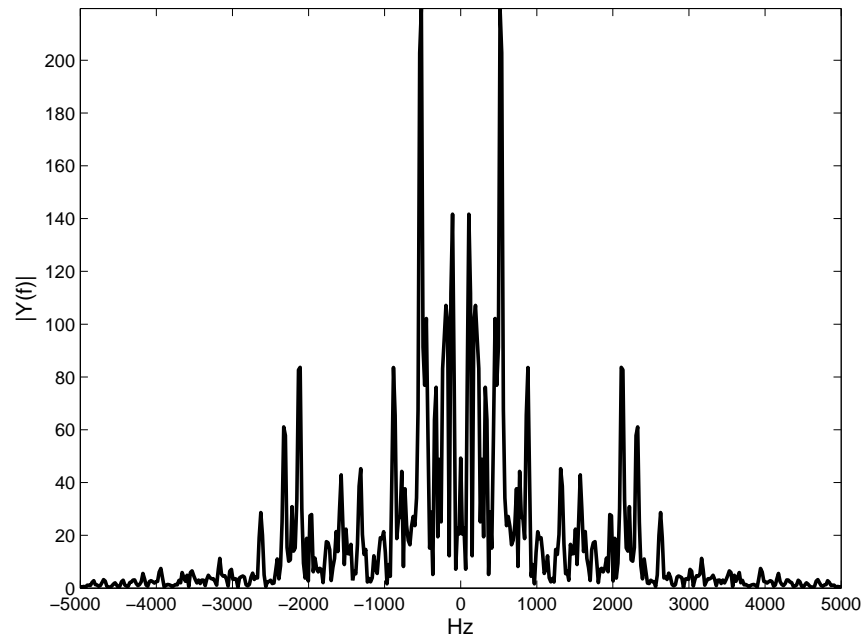


Figura 3.12: Spettro del segnale di uscita del sistema retroazionato

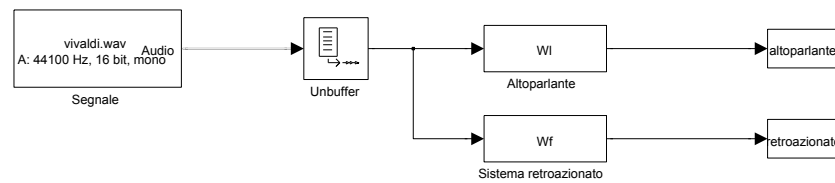


Figura 3.13: Schema Simulink utilizzato per le simulazioni

Bibliografia

- [1] Leo L. Beranek. *Acoustics*. Cambridge: Acoustic Society of America, 1993.
- [2] Mauro Bisiacco e Maria Elena Valcher. *Controlli automatici*. Padova: Libreria Progetto, 2008.
- [3] John Borwick. *Loudspeaker and Headphone Handbook*. Oxford: Focal Press, 2001.
- [4] Corrado Crescini. *Principii fondamentali di elettroacustica teorica e applicata*. Milano: Hoepli, 1939.
- [5] John Eargle. *The Microphone Book*. Oxford: Focal Press, 2005.
- [6] Roberto Guidorzi. *Teoria dei Sistemi - Esercizi e applicazioni*. Bologna: Zanichelli, 1991.
- [7] *McGraw-Hill Encyclopedia of Science and Technology*. New York: McGraw-Hill, 2007. Cap. Loudspeaker, Microphone.
- [8] Harry F. Olson. *Elements of Acoustical Engineering*. Toronto: D. Van Nostrand, 1947.
- [9] Ultrasound Padova. *Tecnologia attuale della riproduzione HIFI*. 2000. URL: http://www.ultrasound-hifi.com/Us_wh_1/main_frame_it.html.
- [10] Sybil P. Parker. *Acoustic Source Book*. New York: McGraw-Hill, 1988.