

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

Dinamica non lineare del sistema barioni-materia oscura in cosmologia

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Laureando

Guido Occhipinti

Anno Accademico 2017/2018

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | 1 |
| Approssimazione di fluido e soluzioni analitiche per le perturbazioni lineari | 3 |
| 1.1 Approssimazione di fluido per la DM | 3 |
| 1.2 Soluzioni analitiche per le perturbazioni lineari | 6 |
| 1.2.1 Caso I: $f_{DM} = 1$ | 7 |
| 1.2.2 Caso II: $0 < f_{DM} < 1$ | 8 |
| Perturbazioni non lineari | 11 |
| 2.1 Approssimazioni Lagrangiana ed Euleriana | 11 |
| 2.1.1 Teoria Lagrangiana delle perturbazioni al primo ordine per i barioni | 12 |
| 2.2 Stochastic adhesion approximation | 15 |
| 2.2.1 Soluzione del path integral per una particella libera | 20 |
| Struttura dell'IGM e della DM | 21 |
| 3.1 Struttura della distribuzione di materia oscura | 21 |
| 3.2 Struttura della distribuzione di barioni | 24 |
| Conclusioni | 27 |

Introduzione

La teoria che attualmente descrive meglio la formazione della struttura dell'universo è la *gravitazionale instability*. Questa teoria assume l'universo primordiale quasi uniforme ad eccezione di piccole deviazioni della densità rispetto a quella globale di fondo dell'universo e di fluttuazioni della velocità rispetto all'espansione di Hubble. La non uniformità della densità causa anche una perturbazione della gravità che a sua volta si riflette sulla velocità, quindi è un sistema in evoluzione con il tempo. Si suppone anche che l'universo sia composto oltre che dalla materia ordinaria (barioni) anche dalla materia oscura (DM), che è presente in quantità notevolmente maggiore dei barioni. La DM è caratterizzata da essere non collisionale e debolmente interagente, il campo gravitazionale da essa generato, poiché è molto più abbondante nel cosmo, domina la dinamica dei barioni.

L'analisi della foresta Ly α , ovvero l'insieme degli spettri di assorbimento che arriva dalle transizioni Lyman alpha dell'idrogeno neutro nella luce di quasar e galassie molto lontane, ha mostrato la presenza di strutture coerenti con le predizioni della *gravitazionale instability* nella distribuzione dell'idrogeno neutro nel cosmo rimasto dal processo di reionizzazione. Con il presente lavoro esamineremo in particolare la colonna a bassa densità della foresta Ly α , che si pensa sia generata da gas non collisionale e da fluttuazioni del *photoionized intergalactic medium* (IGM), in più sappiamo che rispecchia lo stato dell'universo a un redshift compreso tra 2 e 4. Ci aspettiamo che, a causa dell'interazione gravitazionale, dalla distribuzione dell'IGM, ricavabile dalla foresta Ly α , si possa ricostruire quella della materia oscura (DM). In questo elaborato verrà in particolare presentato un modello per l'evoluzione della struttura del gas barionico in un regime debolmente non lineare che si basa sullo sviluppo delle equazioni di Burger 3D (chiamate anche KPZ) sviluppato da S. Mattarese e R. Mohayee e presentato nell'articolo "The growth of structure in the intergalactic medium", pubblicato dal *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* nel 2002.

Questo modello si basa sul simile lavoro della "stochastic adhesion" che era stato sviluppato per superare i problemi dell'approssimazione di Zel'dovich allo scontrarsi delle particelle. La novità di questo modello è l'introduzione di un potenziale η "esterno" per la componente barionica dovuto al potenziale gravitazionale locale, all'entalpia del fluido e al potenziale di velocità (che viene assunta irrotazionale), questo ultimo termine renderebbe η non veramente esterno. Tale problema viene superato dando solo un'espressione approssimata di η , grazie all'utilizzo della teoria delle perturbazioni.

Prima di iniziare la trattazione vera e propria è utile definire alcuni concetti utilizzati in cosmologia. Andremo a considerare l'universo descritto dal modello di Friedmann-Robertson-Walker (FRW), ovvero un universo isotropo e omogeneo sottoposto all'espansione di Hubble. Inoltre considereremo la materia oscura come fredda, cioè composta da particelle non relativistiche. Poiché l'universo è in espansione le coordinate di una particella cambiano, possiamo definire un sistema di coordinate $\mathbf{x}(t)$ (chiamate comoventi) inerziale rispetto all'evoluzione di fondo come:

$$\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{x}(t) \quad (0.1)$$

dove a è il fattore di scala, che tiene conto dell'espansione dell'universo.

Possiamo anche riscrivere la velocità \mathbf{w} come:

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{r} + a\frac{d\mathbf{x}}{dt} = H\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{v} \quad (0.2)$$

dove \mathbf{v} è chiamata velocità peculiare e H è la funzione di Hubble.

Poiché il background dell'universo FRW ha una densità globalmente uniforme ρ , possiamo definire

le fluttuazioni della densità nella posizione comovente \mathbf{x} utilizzando la densità comovente globale dell'universo ρ_0 :

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0}{\rho_0} \quad (0.3)$$

dove $\rho(\mathbf{x}, t)$ è la densità locale dei barioni o della DM.

Introduciamo inoltre l'approssimazione di considerare sia i barioni sia la DM come fluidi newtoniani rispettivamente collisionale e non collisionale e di assumere le perturbazioni come adiabatiche (a entropia costante). Le equazioni che descrivono la dinamica sono allora:

- Equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

- Equazione di Eulero

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + H\mathbf{v} = -\frac{1}{a\rho} \nabla_{\mathbf{x}} P - \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \phi$$

- Equazione di Poisson cosmologica

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \phi = 4\pi a^2 G \delta\rho$$

- Equazione di stato per l'IGM

$$P_b = \frac{\rho_b k_B T}{\mu m_p} = \frac{\bar{\rho}_b k_B T_0 (1 + \delta_b)^\gamma}{\mu m_p}$$

dove P è la pressione, $\delta\rho$ prende contributi sia dai barioni sia dalla DM, ϕ è chiamato potenziale gravitazionale peculiare, γ è l'indice adiabatico, μ è il peso molecolare medio ($\sim 0,6$ per un gas completamente ionizzato con l'abondanza primordiale), m_p la massa del protone, $\bar{\rho}_b$ la densità media dei barioni e $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ è la derivata convettiva.

Nell'equazione di stato abbiamo assunto valida la relazione polinomiale tra temperatura e densità

$$T = T_0 (1 + \delta_b)^{\gamma-1} \quad (0.4)$$

dove $T_0 = T_0(z)$ è la temperatura dell'IGM a densità media e al redshift z , che è coerente per fluttuazioni di densità anche non piccole ($\delta_b < 10$), e corrisponde a una situazione in cui la temperatura è determinata dalla combinazione tra il riscaldamento dato dai raggi UV di fondo e il raffreddamento adiabatico dovuto all'espansione dell'universo.

Ci tornerà utile anche riscrivere il potenziale gravitazionale nel seguente modo

$$\varphi = \frac{2\phi}{3a^3 H^2} \quad (0.5)$$

Nel range di redshift in cui lavoreremo ($2 < z < 4$) si può fare l'approssimazione $a^3 H^2 \approx H_0^2 \Omega_{0m}$.

Approssimazione di fluido e soluzioni analitiche per le perturbazioni lineari

1.1 Approssimazione di fluido per la DM

Per il sistema composto dai barioni sappiamo che le forze non gravitazionali legano la materia in modo che si comporti seguendo un moto collettivo e non come un sistema discreto formato da singole particelle, e il sistema si possa considerare come un fluido. Poiché sulla materia oscura non possono agire forze esterne, assumendo l'approssimazione di fluido abbiamo supposto che in questo caso siano le forze gravitazionali a legare il sistema. Si potrebbe cercare di studiare la DM come un insieme discreto di particelle per vedere se la dinamica di esse è la stessa di un fluido, ma per fare questo bisognerebbe risolvere le equazioni di Boltzman legate a quelle di Einstein e sarebbe troppo complicato. Quindi per verificare la correttezza di questa approssimazione cerchiamo di capire dalle equazioni di Boltzman se la gravità, in assenza di forze esterne, spinga il sistema a comportarsi come un fluido. Dalla dinamica newtoniana segue che:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla_r \Phi \quad (1.1)$$

dove Φ è il potenziale gravitazionale che obbedisce alla equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G a^2 \rho \quad (1.2)$$

e che è uguale al potenziale gravitazionale generato dai barioni:

$$\Phi = \Phi_b = \frac{2}{3}\pi G a^2 \rho \quad (1.3)$$

Dall'equazione di Newton e dal potenziale è ora facile ottenere la Lagrangiana (a cui è già stato tolto un termine di superficie):

$$L = \frac{m}{2} a^2 \dot{\mathbf{x}}^2 - m\phi \quad (1.4)$$

Poiché l'equazione di Boltzman si ricava da un sistema Hamiltoniano, effettuiamo una trasformatata di Legendre per passare dalla Lagrangiana all'Hamiltoniana:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{p^2}{2ma^2} + m\phi(\mathbf{x}, t) \quad (1.5)$$

Ricaviamo le equazioni di Hamilton:

$$(i) \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{ma^2} \quad (ii) \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -m\nabla\phi \quad (1.6)$$

Se ora scriviamo l'equazione di Boltzman non collisionale (1.7) e utilizziamo le equazioni di Hamilton per semplificarla otteniamo:

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{ma^2} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f - m \nabla_{\mathbf{x}} \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (1.8)$$

L'ultima equazione (1.8) si chiama equazione di Vlasov e per risolverla passiamo allo sviluppo in multipoli:

$$\begin{aligned} \text{densità di energia media (ordine 0)} \quad \rho(\mathbf{x}, t) &= \frac{m}{a^3} \int d^3 p f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ \text{velocità media (ordine 1)} \quad \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rangle &= \frac{1}{N} \int d^3 p \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ \text{dove } N &= \int d^3 p f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \end{aligned}$$

D'ora in poi scriveremo semplicemente \mathbf{v} al posto di $\langle \mathbf{v} \rangle$.

Moltiplicando l'equazione (1.8) per m ed integrando in $d^3 p$ si ottiene:

$$\frac{\partial(a^3 \rho)}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.9)$$

che è proprio l'equazione di continuità per un fluido.

Moltiplicando, invece, l'equazione (1.8) per p^i ed integrando in $d^3 p$ (e utilizzando l'equazione di continuità (1.9)) si ottiene:

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + H v^i + \frac{v^j}{a} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} - \frac{1}{a \rho} \frac{\partial (\Pi^{ij} \rho)}{\partial x^j} \quad (1.10)$$

dove $\Pi^{ij} = \frac{\langle p^i p^j \rangle}{m^2 a^2} - v^i v^j$ è la dispersione di velocità.

Come è tipico delle equazioni di Boltzman l'equazione in un certo ordine dello sviluppo in momenti risulta accoppiata con l'equazione dell'ordine successivo, creando un sistema infinito di equazioni.

Per chiudere il sistema effettuiamo un troncamento imponendo che la velocità media delle singole particelle non si discosti da quella media di tutto il sistema, ovvero $\Pi^{ij} = 0$. Con questa condizione la (1.10) diventa:

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + H v^i + \frac{v^j}{a} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (1.11)$$

,
che è proprio l'equazione di Eulero per un fluido con pressione nulla.

Quindi finché $\Pi^{ij} = 0$ per tempi iniziali, vero per la materia oscura fredda (CDM) per un vasto range di scale di tempi, e il sistema rimane in regime lineare la DM può essere considerata come un fluido.

Un altro caso in cui l'equazione (1.10) è facilmente risolvibile è quando il sistema è localmente termalizzato, ovvero è all'equilibrio termico, infatti la dispersione di velocità diventa isotropa e proporzionale alla pressione $\rho\Pi^{ij} = p\delta^{ij}$ e si ottiene l'equazione di Eulero per un fluido con pressione non nulla. Abbiamo così verificato che utilizzando delle condizioni iniziali abbastanza generiche, cioè vere per scale di tempi molto grandi, possiamo considerare la materia oscura come un fluido.

1.2 Soluzioni analitiche per le perturbazioni lineari

Adesso analizziamo un caso in cui possiamo approssimare le equazioni per il gas barionico (fluido collisionale) e per la materia oscura non collisionale a equazioni lineari. Affiché si realizzi tale situazione è necessario avere piccole perturbazioni della densità barionica, condizione soddisfatta assumendo il parametro di densità $\Omega = 1$ e un numero d'onda di Jeans k_J indipendente dal tempo. Restringiamo quindi l'analisi a un universo piatto senza una costante cosmologica ovvero l'universo di Einstein-de Sitter. Assumeremo anche, inizialmente, che la dipendenza della temperatura dell'IGM dal redshift sia lineare (in prima approssimazione è valido senza gravi conseguenze nella generalità delle soluzioni nel range di redshift considerato), ovvero $T_0 \propto (1+z)$.

Siano $\delta_{DM}(t, k)$ e $\delta_b(t, k)$ le trasformate di Fourier delle fluttuazioni di densità della materia oscura (DM) e dei barioni. Siano f_{DM} e $f_b = 1 - f_{DM}$ le loro distribuzioni medie di massa. Le equazioni lineari (derivate dalla combinazione delle equazioni di continuità e di Eulero) governanti l'evoluzione delle fluttuazioni di densità sono:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta_{DM}}{dt^2} + 2H\frac{d\delta_{DM}}{dt} &= \frac{3}{2}H^2(f_{DM}\delta_{DM} + f_b\delta_b) \\ \frac{d^2\delta_b}{dt^2} + 2H\frac{d\delta_b}{dt} &= \frac{3}{2}H^2(f_{DM}\delta_{DM} + f_b\delta_b) - \frac{3}{2}H^2\left(\frac{k}{k_J}\right)^2\delta_b \end{aligned} \quad (1.12)$$

dove $a(t) = t^{\frac{2}{3}}$ è il fattore di scala, $H(t) = \frac{2}{3t}$ è la funzione di Hubble e k_J è il numero d'onda comovente di Jeans dipendente dalla velocità del suono c_S e dalla densità media totale (barioni più DM) $\bar{\rho} = 3H^2/(8\pi G)$ nel seguente modo:

$$k_J = \frac{a}{c_S} \sqrt{4\pi G \bar{\rho}} = \sqrt{\frac{3aH}{2c_S}} \quad (1.13)$$

Per f_{DM} circa 1 la gravità dei barioni è trascurabile e $\delta_{DM} \propto a$. Se fosse anche $k_J = \text{cost}$, ossia $c_S^2 \propto \frac{1}{a}$, e imponessimo la condizione $\delta_b(t_i) = \frac{\delta_{DM}(t_i)}{1+k_J^2}$ a un certo istante iniziale t_i , allora questa condizione sarebbe vera anche a qualsiasi istante successivo. Assumeremo in più $\delta_{DM}(t) = \delta_b(t)$ per $t \leq t_i$, in accordo con una reionizzazione istantanea dell'IGM a t_i .

Per risolvere le equazioni (1.12) passiamo alla variabile temporale $\tau = \log(a)$, abbiamo così:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta_{DM}}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{d\delta_{DM}}{d\tau} &= \frac{3}{2}(f_{DM}\delta_{DM} + f_b\delta_b) \\ \frac{d^2\delta_b}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{d\delta_b}{d\tau} &= \frac{3}{2}(f_{DM}\delta_{DM} + f_b\delta_b) - \frac{3}{2}\kappa^2\delta_b \end{aligned} \quad (1.14)$$

dove $\kappa = \frac{k}{k_J}$.

Quando κ è costante le equazioni sono lineari e possiamo risolvere utilizzando le trasformate di Laplace.

Chiamiamo Δ_{DM} e Δ_b le trasformate di Laplace di δ_{DM} e δ_b . Le trasformate delle derivate richiedono delle condizioni iniziali, per semplicità scegliamo come istante iniziale $\tau = 1$ assumendo che per tempi precedenti la temperatura del fluido barionico sia 0 (quindi $\kappa = 0$). Prima di $\tau = 1$ $\delta_{DM} = \delta_b \propto e^\tau$, possiamo scegliere arbitrariamente $\delta_{DM}(\tau = 1) = 1$, cosicché anche le derivate prime delle densità siano uguali a 1 all'istante iniziale. Scegliere una condizione iniziale diversa da 1 per $\delta_{DM}(\tau = 1)$ equivalerebbe solamente a una traslazione delle soluzioni, quindi svolgiamo il caso più semplice (si potrebbero usare delle condizioni iniziali più generali come $\delta_{DM}(\tau = 1) = a\delta_b(\tau = 1)$, ma prima della

reionizzazione le densità di DM e barioni sono pressoché uguali pertanto possiamo restringerci al caso considerato senza perdere generalità).

$$\begin{aligned} (s^2 + \frac{1}{2}s)\Delta_{DM} &= \frac{3}{2}(f_{DM}\Delta_{DM} + f_b\Delta_b) + s + \frac{3}{2} \\ (s^2 + \frac{1}{2}s)\Delta_b &= \frac{3}{2}(f_{DM}\Delta_{DM} + f_b\Delta_b) - \frac{3}{2}k^2\Delta_b + s + \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Abbiamo quindi due equazioni lineari a due incognite facilmente risolvibili:

$$\Delta_{DM} = \frac{(s + \frac{3}{2})(\frac{3}{2}k^2 + s^2 + \frac{1}{2}s)}{(s^2 + \frac{1}{2}s)(\frac{3}{2}k^2 + s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{3}{2}) - \frac{9}{4}f_{DM}k^2}, \quad (1.16)$$

$$\Delta_b = \frac{s^2 + \frac{1}{2}s}{\frac{3}{2}k^2 + s^2 + \frac{1}{2}s}\Delta_{DM} \quad (1.17)$$

Tornando nello spazio di Fourier si possono dividere le soluzioni in tre casi distinti: $f_{DM} = 0$, $f_{DM} = 1$ e $0 < f_{DM} < 1$. Studieremo solamente gli ultimi due casi perchè nella nostra trattazione la presenza di materia oscura è sempre dominante rispetto ai barioni.

1.2.1 Caso I: $f_{DM} = 1$

In questo caso $\Delta_{DM} = \frac{1}{s-1}$ (e quindi $\delta_{DM} = e^\tau$) l'equazione (1.17) diventa quindi:

$$\Delta_b = \frac{s^2 + \frac{1}{2}s}{(s-1)(s-s_+)(s-s_-)} \quad (1.18)$$

dove s_\pm sono le radici di $\frac{3}{2}k^2 + s^2 + \frac{1}{2}s$ date da:

$$s_\pm = \frac{1}{4}(1 \pm \chi) \quad \text{con} \quad \chi^2 = 1 - 24k^2 \quad (1.19)$$

Tornando nello spazio di Fourier, per $\chi^2 > 0$ abbiamo:

$$\delta_b = \frac{e^\tau}{1+k^2} + \frac{1}{2\chi} \frac{k^2}{1+k^2} [(\chi-5)e^{-\frac{\chi}{4}\tau} + (5+\chi)e^{+\frac{\chi}{4}\tau}]e^{-\frac{\tau}{4}} \quad (1.20)$$

In cui il secondo e il terzo termine sono decrescenti ($\chi_{max}^2 = 1$). Per $\chi^2 < 0$ invece:

$$\delta_b = \frac{e^\tau}{1+k^2} + \frac{1}{\tilde{\chi}} \frac{k^2}{1+k^2} [5\sin(\frac{\tilde{\chi}}{4}\tau) + \chi\cos(\frac{\tilde{\chi}}{4}\tau)]e^{-\frac{\tau}{4}} \quad (1.21)$$

dove $\tilde{\chi}$ è la parte immaginaria di χ . La soluzione ha un comportamento ondulatorio con ampiezza che decresce come $e^{-\frac{\tau}{4}} \propto t^{-\frac{1}{6}}$ e di periodo $\frac{16\pi}{\tilde{\chi}}$. Per $\chi^2 = 0$ ovvero $k^2 = 24$:

$$\delta_b = \frac{24}{25}e^\tau + \frac{1}{20}(\tau + \frac{4}{5})e^{-\frac{\tau}{4}} \quad (1.22)$$

In tutti e tre i casi nel limite $\tau \rightarrow \infty$ vale la relazione: $\frac{\delta_b}{\delta_{DM}} = \frac{1}{1+k^2}$

1.2.2 Caso II: $0 < f_{DM} < 1$

Inanzitutto dobbiamo ricavarci δ_{DM} , per far ciò bisogna trovare i poli di Δ_{DM} (eq.1.16) che sono proprio le quattro radici del denominatore. Chiamiamo $y(s) = s^2 + \frac{s}{2} - \frac{3}{2}$ così che possiamo scrivere il denominatore come:

$$y^2 + \frac{3}{2}y(1+k^2) + \frac{9}{4}f_b k^2 \quad (1.23)$$

le sue radici sono:

$$y_{p,m} = -\frac{3}{4}(1+k^2)(1 \pm \Xi) \quad ; \quad \Xi^2 = 1 - 4f_b \frac{k^2}{(1+k^2)^2} \quad (1.24)$$

tornando nella variabile s troviamo le 4 radici:

$$\begin{aligned} s_{m,\pm} &= -\frac{1}{4}(1 \pm \chi_m) & \chi_m^2 &= 25 - 12(1+k^2)(1 \pm \Xi), \\ s_{p,\pm} &= -\frac{1}{4}(1 \pm \chi_p) & \chi_p^2 &= 25 - 12(1+k^2)(1 - \Xi) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Poiché $0 < \Xi^2 < 1 - f_b$ tutte e quattro le radici sono distinte, in più $1 < \chi_p^2 < 25$ assicura che $s_{p,\pm}$ siano reali. Invece $0 < \chi_m^2 < 1$ per $k^2 < \frac{25}{600-576f_b}$ ed altrimenti è negativo, quindi le $s_{m,\pm}$ possono essere complesse.

Per $\chi_m^2 > 0$ abbiamo le soluzioni:

$$\delta_{DM} = \frac{24k^2 + \chi_p^2 - 1}{2\chi_p(\chi_p^2 - \chi_m^2)} [(\chi_p - 5)e^{-\frac{\chi_p}{4}\tau} + (\chi_p + 5)e^{+\frac{\chi_p}{4}\tau}]e^{-\frac{\tau}{4}} + (\chi_p \leftrightarrow \chi_m) \quad (1.26)$$

dove il secondo termine è ottenuto scambiando χ_p e χ_m nel primo termine.

$$\delta_b = \frac{\chi_p^2 - 1}{2\chi_p(\chi_p^2 - \chi_m^2)} [(\chi_p - 5)e^{-\frac{\chi_p}{4}\tau} + (\chi_p + 5)e^{+\frac{\chi_p}{4}\tau}]e^{-\frac{\tau}{4}} + (\chi_p \leftrightarrow \chi_m) \quad (1.27)$$

Mentre per ottenere le soluzioni per $\chi_m^2 < 0$ basta sostituire χ_m con $i\tilde{\chi}_m$.

In questo caso la densità di DM cresce sempre come un esponenziale (perché $\chi_p^2 > 1$).

Anche la densità di barioni per $\chi_m^2 > 0$ cresce esponenzialmente, mentre per $\chi_m^2 < 0$ ha un andamento oscillante leggermente crescente. In figura (1.1) è rappresentata l'evoluzione delle densità per vari valori di f_{DM} e k .

Nella figura (1.2) sono rappresentati a differenti redshift il rapporto $\frac{\delta_b}{\delta_{DM}}$ in funzione di k e la funzione $\frac{1}{1+k^2}$, che rappresenta il limite di questo rapporto per $\tau \rightarrow \infty$. Le condizioni iniziali sono soddisfatte per redshift $z = 6$ ed è stata presa $f_{DM} = 0.9$. Si osserva che il rapporto tra le fluttuazioni di densità partendo da 1 tende poi ad oscillare attorno alla soluzione limite con ampiezze minori per z più piccoli, questa stima è buona quindi solo per redshift piccoli ($z \approx 0$). Il fatto che possiamo sempre esprimere δ_b come una convoluzione lineare di δ_{DM} è molto importante e il fattore $W_b(k, a)$ che collega le due densità prende il nome di *IGM linear filter*: $\delta_b = W_b(k, a)\delta_{DM}$.

Per completezza riportiamo le soluzioni delle perturbazioni lineari dei barioni per $f_{DM} = 1$ anche nel caso in cui si assume una dipendenza più generale della temperatura dell'IGM dal redshift: $T_0 \propto (1+z)^\alpha$, dove α è una costante che può essere scelta in base al range di redshift di interesse o ad altri fattori. La dinamica di barioni e DM è descritta sempre dalle equazioni (1.12) sostituendo però il numero d'onda comovente di Jeans k_J con il numero d'onda indipendente dal redshift \tilde{k}_J , i quali sono legati dalla relazione:

$$k_J^2 = a^{\alpha-1} \tilde{k}_J^2$$

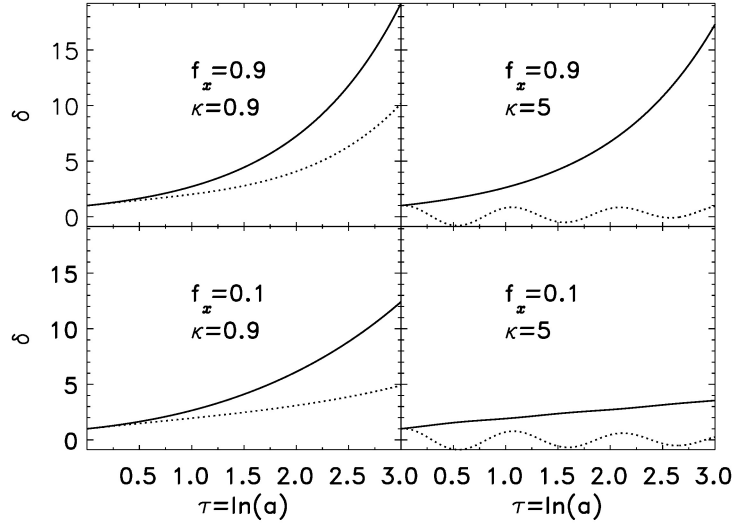


Figura 1.1: Curve di δ_{DM} (linea continua) e di δ_b (linea punteggiata) per vari valori di f_{DM} ($= f_x$) e k .

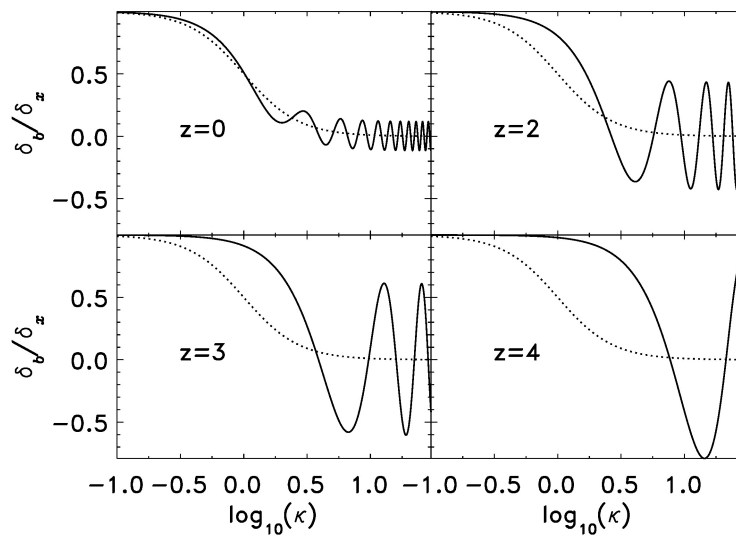


Figura 1.2: Curve di $\frac{\delta_b}{\delta_{DM}}$ (linea continua) e di $\frac{1}{1+k^2}$ (linea punteggiata) in funzione di k a vari redshift.

Riportiamo, dopo una breve ricapitolazione dei risultati precedenti, le soluzioni (in funzione del fattore di scala a invece che del suo logaritmo τ), ottenute con il metodo di Green, dall'articolo "The growth of structure in the intergalactic medium" di *S. Matarrese e R. Mohayee (2002)*

- caso $f_{DM} = 1$ e $\alpha = 1$

$$\delta_b = \frac{a}{1+k^2} + \frac{1}{2\chi} \frac{k^2}{1+k^2} [(\chi-5)a^{-\frac{\chi}{4}} + (5+\chi)a^{+\frac{\chi}{4}}] a^{-\frac{1}{4}} \quad (1.28)$$

$$\delta_{DM} = a \quad (1.29)$$

$$W_b(k, a) = \frac{1}{1+k^2} \left\{ 1 + \frac{k^2}{2\chi} [(\chi-5)a^{-\frac{\chi}{4}} + (5+\chi)a^{+\frac{\chi}{4}}] a^{-\frac{5}{4}} \right\} \quad (1.30)$$

dove $\chi^2 = 1 - 24k^2$.

- caso $0 < f_{DM} < 1$:

$$\delta_{DM} = \frac{24k^2 + \chi_p^2 - 1}{2\chi_p(\chi_p^2 - \chi_m^2)} [(\chi_p - 5)a^{-\frac{\chi_p}{4}} + (\chi_p + 5)a^{+\frac{\chi_p}{4}}] a^{-\frac{1}{4}} + (\chi_p \leftrightarrow \chi_m) \quad (1.31)$$

$$\delta_b = \frac{\chi_p^2 - 1}{2\chi_p(\chi_p^2 - \chi_m^2)} [(\chi_p - 5)a^{-\frac{\chi_p}{4}} + (\chi_p + 5)a^{+\frac{\chi_p}{4}}] a^{-\frac{1}{4}} + (\chi_p \leftrightarrow \chi_m) \quad (1.32)$$

$$W_b(k, a) = \frac{\chi_p^2 - 1}{24k^2 + \chi_p^2 - 1} + (\chi_p \leftrightarrow \chi_m) \quad (1.33)$$

dove χ_p e χ_m sono definiti come sopra.

Entrambe le soluzioni sono riportate per i χ positivi, per quelli negativi è sufficiente utilizzare la sostituzione $\chi = i\tilde{\chi}$.

- caso $f_{DM} = 1$ e $\alpha = 1$

$$\delta_b(\mathbf{k}, a) = y^{-\tilde{\alpha}} [A_1 J_{\tilde{\alpha}} + A_2 J_{-\tilde{\alpha}}] + [24\tilde{\alpha}^2 y^{-5\tilde{\alpha}} S_{5\tilde{\alpha}-1, \tilde{\alpha}}(y)] \delta_{DM}(\mathbf{k}, a) \quad (1.34)$$

dove $\tilde{\alpha} = 1/[2(1-\alpha)]$, $y = \sqrt{24\tilde{\alpha}}(k/\tilde{k}_J)a^{1/4\tilde{\alpha}}$, le $J_{\tilde{\alpha}}$ sono le funzioni di Bessel e le $S_{\mu, \tilde{\alpha}}$ le funzioni di Lommel. Imponendo le condizioni iniziali si trova anche un'espressione per $A_{1,2}$ del tipo $A_{1,2} = B_{1,2}\delta_{DM}(\mathbf{k}, a_i)$, dove le B_i sono esprimibili in termini delle funzioni di Lommel e Bessel.

$$\delta_{DM} = a \quad (1.35)$$

$$W_b(k, a) = y^{-\tilde{\alpha}} [A_1 J_{\tilde{\alpha}} + A_2 J_{-\tilde{\alpha}}] + [24\tilde{\alpha}^2 y^{-5\tilde{\alpha}} S_{5\tilde{\alpha}-1, \tilde{\alpha}}(y)] \quad (1.36)$$

Nel caso $f_{DM} = 1$ è opportuno cambiare la condizione iniziale (che avevamo imposto arbitrariamente) da $\delta_{DM}(\mathbf{x}, \tau = 1) = 1$ a $\delta_{DM}(\mathbf{x}, a = e) = e\delta_0(\mathbf{x})$, ottenendo:

$$\delta_{DM}(\mathbf{x}, a) = a\delta_0(\mathbf{x}); \quad \delta_0(\mathbf{x}) = \nabla^2 \varphi_0(\mathbf{x}) \quad (1.37)$$

dove $\varphi_0(\mathbf{x})$ è il potenziale gravitazionale riscaldato.

Perturbazioni non lineari

2.1 Approssimazioni Lagrangiana ed Euleriana

Da ora ci restringeremo al caso $f_{DM} = 1$ perchè è più semplicemente risolvibile analiticamente, per trattare il caso più generico è sufficiente ripercorrere gli stessi passaggi. Finché le fluttuazioni delle densità sono molto piccole ($\delta \ll 1$) l'approssimazione lineare funziona bene, appena però le fluttuazioni aumentano si passa a un regime debolmente non lineare.

Con la nostra scelta della variabile temporale (il fattore di scala a) l'equazione di Eulero, sia per la DM che per i barioni, poiché si passa da una situazione a $\mathbf{u} \approx \text{cost}$ a una in cui agisce un potenziale, diventa semplicemente:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Da} = -\nabla\eta \quad (2.1)$$

dove $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{da} = \frac{\mathbf{v}}{a\dot{a}}$ e il potenziale η è differente per i due diversi fluidi. Inoltre su entrambi agiscono solo forze conservative, quindi in assenza di una vorticità iniziale il flusso rimane irrotazionale (almeno fino a un'urto tra particelle di DM); possiamo allora esprimere la velocità peculiare come il gradiente di un potenziale $\mathbf{u} = \nabla\Phi$. Il modello dinamico che vogliamo presentare si basa sul sostituire il potenziale η con un potenziale fittizio ottenuto utilizzando la teoria Euleriana delle perturbazioni lineari.

Per ottenere questa stima di η procediamo applicando la divergenza da entrambi i lati dell'equazione di eulero linearizzata (2.1), otteniamo così $\nabla^2\eta = -\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}$ che (utilizzando l'equazione di continuità linearizzata $\dot{\delta} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = 0$) diventa $\nabla^2\eta \approx \ddot{\delta}$.

Passando allo spazio di Fourier, per i barioni notiamo che possiamo scrivere $\delta_b = W_b(k, a)\delta_{DM}$, da cui:

$$\eta_b(k, a) = [a\ddot{W}_b(k, a) + 2\dot{W}_b(k, a)]\varphi_0(k) = \varepsilon(k, a)\varphi_0(k) \quad (2.2)$$

Mentre per la DM implica immediatamente $\eta_{DM} = 0$. Quindi le equazioni di Eulero per le due componenti diventano:

$$\frac{Du_{DM}}{Da} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{Du_b}{Da} = -\nabla\eta \quad (2.4)$$

L'equazione per la DM corrisponde all'approssimazione di Zel'dovich, la cui soluzione è conosciuta: gli elementi di massa si muovono lungo linee rette con velocità costante dovuta alle fluttuazioni locali della forza gravitazionale nella loro posizione Lagrangiana iniziale \mathbf{q} : $\mathbf{u}_{DM}(\mathbf{x}(\mathbf{q}, a), a) = -\nabla_{\mathbf{q}}\varphi_0(\mathbf{q})$. L'equazione del moto è quindi:

$$\mathbf{x}_{DM} = \mathbf{q} - a\nabla_{\mathbf{q}}\varphi_0(\mathbf{q}) \quad (2.5)$$

Nella traiettoria dei barioni entra invece anche un termine di forza:

$$\mathbf{x}_b = \mathbf{q} - a\nabla_{\mathbf{q}}\varphi_0(\mathbf{q}) - \int_0^a d\tau \int_0^\tau d\tau' \nabla_{\mathbf{x}}\eta(\mathbf{x}(\mathbf{q}, \tau'), \tau') \quad (2.6)$$

Abbiamo ristretto gli integrali a partire da 0 perchè prima della reionizzazione $\eta_b(\mathbf{x}, a < a_i) = 0$. Di seguito ci è utile trasformare l'equazione di Eulero (2.4) nell'equazione di Hamilton-Jacobi per il potenziale di velocità Φ_b attraverso la sostituzione $\mathbf{u} = \nabla\Phi$:

$$\frac{\partial\Phi_b}{\partial a} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_b)^2 = -\eta_b \quad (2.7)$$

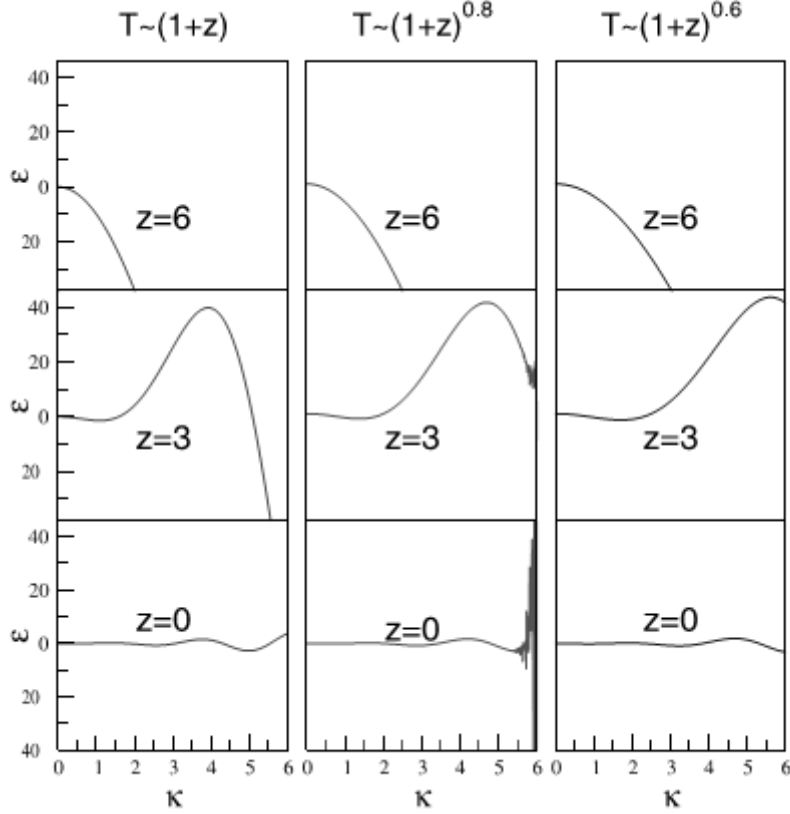


Figura 2.1: Grafico di $\varepsilon = \eta/\varphi_0$ rispetto a $\kappa = k/k_j$ a differenti redshift e per diversi valori di α nella relazione tra temperatura e redshift, il redshift di reionizzazione è $z_i = 7$

Adesso cercheremo di applicare un'approssimazione Lagrangiana al moto dei barioni, inanzitutto possiamo scrivere la traiettoria di un qualsiasi elemento di massa come:

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, a) = \mathbf{q} + \mathbf{S}(\mathbf{q}, a) \quad (2.8)$$

dove \mathbf{S} è il vettore di spostamento, che collega la posizione Lagrangiana a quella Euleriana. Finchè l'evoluzione del fluido considerato è lontana dal regime fortemente non lineare si può pensare che le coordinate nei due sistemi di riferimento siano vicine tra loro e che quindi \mathbf{S} sia piccolo. Ora è utile fare una piccola digressione sull'applicazione dell'approssimazione Lagrangiana al primo ordine.

2.1.1 Teoria Lagrangiana delle perturbazioni al primo ordine per i barioni

La conservazione della massa implica $dM = \rho(\mathbf{x}(\mathbf{q}, a), a)d^3x = \rho(\mathbf{x}(\mathbf{q}, 0), 0)d^3x = \rho_o(\mathbf{q})d^3q$, dove ρ_o è la densità barionica al tempo $a = 0$. Se dividiamo per la densità barionica globale comoviente otteniamo $1 + \delta(\mathbf{x}(\mathbf{q}, a), a)d^3x = 1 + \delta_o(\mathbf{q})d^3q$, poiché dai risultati dello studio del regime lineare le fluttuazioni di densità per $a = 0$ sono nulle, otteniamo:

$$1 + \delta(\mathbf{x}(\mathbf{q}, a), a) = \frac{1}{\det \frac{\partial x_i}{\partial q_k}} = \frac{1}{J} = \frac{1}{1 + \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{S}} = 1 - \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{S} + O(\mathbf{S}^2) \quad (2.9)$$

dove J è il determinante dello Jacobiano della trasformazione delle coordinate Lagrangiane alle Euleriane, calcolato grazie l'equazione (2.8), e nell'ultima uguaglianza è stato sfruttata la piccolezza di \mathbf{S} . Prendendo la divergenza dell'equazione di Eulero per i barioni otteniamo:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{S}}_b = -\frac{3}{2a}[\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{S}}_b + \frac{\delta_{DM}}{a} + \frac{1}{(\gamma - 1)ak_j^2} \nabla_{\mathbf{x}}^2 (1 + \delta_b)^{\gamma-1}] \quad (2.10)$$

Dall'equazione (2.9) possiamo ricavarci $\delta(\mathbf{x}(\mathbf{q}, a), a) = -\nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{S} + O(\mathbf{S}^2)$ e sostituirlo in (2.10), tenendo solamente i fattori di ordine 1 in \mathbf{S} :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \ddot{\mathbf{S}}_b + \frac{3}{2a} \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{S}}_b - \frac{3}{2a^2} \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{S}_{DM} &= \frac{3}{2a^2 k_J^2} \nabla_{\mathbf{q}}^2 \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{S}_b \underbrace{(1 - \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{S})^{\gamma-2}}_1 \\ \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \ddot{\mathbf{S}}_b + \frac{3}{2a} \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{S}}_b - \frac{3}{2a^2} \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{S}_{DM} &= \frac{3}{2a^2 k_J^2} \nabla_{\mathbf{q}}^2 \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{S}_b \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nel primo e secondo termine è stato possibile sostituire $\nabla_{\mathbf{x}}$ con $\nabla_{\mathbf{q}}$ perchè:

$$\nabla_{\mathbf{x}} = J \nabla_{\mathbf{q}} = (1 + \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{S}) \nabla_{\mathbf{q}}$$

ed essendo il tutto nuovamente applicato ad \mathbf{S} al primo ordine rimane solo il primo termine della parentesi che moltiplica $\nabla_{\mathbf{q}}$, cioè 1. Inoltre generalmente la posizione Euleriana \mathbf{x} è raggiunta nello stesso momento sia dai barioni sia dalla DM, che partono però da posizioni Lagrangiane diverse \mathbf{q}_b e \mathbf{q}_{DM} . Però siccome abbiamo supposto che il vettore di spostamento sia molto piccolo possiamo assumere in prima approssimazione che anche le posizioni Lagrangiane di partenza siano le stesse e abbiamo quindi posto $\mathbf{q}_b = \mathbf{q}_{DM} = \mathbf{q}$.

Avevamo già assunto in precedenza che il flusso fosse irrotazionale, ne deriva che $\nabla \times \dot{\mathbf{S}} = 0$ (al primo ordine in \mathbf{S}). Questo ci permette di esprimere $\mathbf{S} = \nabla_{\mathbf{q}} \Psi$ e, sostituendo nell'equazione (2.11), di ridurla all'equazione differenziale scalare:

$$\ddot{\Psi}_b + \frac{3}{2a} \dot{\Psi}_b - \frac{3}{2a^2 k_J^2} \nabla_{\mathbf{q}}^2 \Psi_b = \frac{3}{2a^2} \Psi_{DM}, \quad (2.12)$$

che può essere risolta tramite le trasformate di Laplace come abbiamo fatto per le perturbazioni lineari, usando la ben conosciuta soluzione $\Psi_{DM} = -a\varphi_0$. La soluzione dell'equazione (2.12) può essere posta nello spazio di Fourier nella forma $\Psi_b = -a\psi_b$ con $\psi_b(\mathbf{k}, a) = W_b(\mathbf{k}, a)\varphi_0(\mathbf{k})$, dove W_b è l'*IGM linear filter* calcolato in precedenza.

Per riportare questo risultato nello spazio Lagrangiano è necessario calcolare la trasformata di Fourier di $\delta_{DM}(\mathbf{q}, a) = a\nabla^2\varphi_0$ che risulta essere $\delta_{DM}(\mathbf{k}, a) = a\frac{k^2}{(2\pi)^{3/2}}\varphi_0$. Scrivendo l'*IGM linear filter* come $W_b(\mathbf{k}, a) = \frac{\delta_b(\mathbf{x}, a)}{\delta_{DM}(\mathbf{x}, a)}$ e antitrasformando $\psi_b(\mathbf{k}, a)$ si trova:

$$\psi_b(\mathbf{q}, a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k} \frac{\delta_b(\mathbf{k}, a)}{k^2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}$$

Da cui si osserva la seguente relazione:

$$\nabla^2 \psi_b(\mathbf{q}, a) = \frac{1}{a} \delta_b(\mathbf{q}, a) \quad (2.13)$$

Grazie a questi risultati possiamo riscrivere le traiettorie dei barioni nel seguente modo:

$$\mathbf{x}_b(\mathbf{q}, a) = \mathbf{q} - a\nabla_{\mathbf{q}}\psi_b(\mathbf{q}, a) \quad (2.14)$$

Mentre la DM si muoveva lungo linee rette a velocità costante, i barioni sono accelerati lungo traiettorie curvilinee da una forza data dalla combinazione di tre differenti termini: la forza gravitazionale locale dovuta alla DM (che è la componente dominante), il gradiente di pressione per il gas e la forza locale di trascinamento di Hubble. In realtà l'ultima componente è solamente una forza apparente dovuta alla scelta di un sistema di riferimento non inerziale.

Segue immediatamente la velocità peculiare dei barioni:

$$\mathbf{u}_b(\mathbf{x}(\mathbf{q}, a), a) = \nabla_{\mathbf{q}}(a\dot{\psi}_b(\mathbf{q}, a) + \psi_b(\mathbf{q}, a)) \quad (2.15)$$

che, al contrario della DM, devia dalla velocità iniziale. Si può osservare che la velocità appena stimata grazie all'approssimazione Lagrangiana rimane irrotazionale nello spazio Euleriano solo se

ci restringiamo al primo ordine rispetto il vettore di spostamento, questo non risulta comunque un problema finché rimaniamo in regimi debolmente non lineari dove l'approssimazione al primo ordine può considerarsi corretta. Per non avere problemi di questo tipo si può utilizzare l'approccio Euleriano fornito dalle equazioni (2.4) e (2.6) che si possono considerare corrette ma di difficile risoluzione, l'approssimazione Lagrangiana sopra descritta invece è un utile mezzo per ottenere le traiettorie dei barioni seppur approssimate.

Ora che conosciamo le traiettorie dei barioni possiamo ottenere il loro campo di densità attraverso la conservazione della massa $1 + \delta_b(\mathbf{x}, a) = \|\det(\frac{\partial \mathbf{x}_b(\mathbf{q}, a)}{\partial \mathbf{q}})\|^{-1}$. Se usiamo l'approssimazione Lagrangiana e quindi l'equazione (2.14) per le traiettorie risulta:

$$1 + \delta_b(\mathbf{x}(\mathbf{q}, a), a) = \{\det[\delta^{ij} - a \frac{\partial^2 \psi_b(\mathbf{q}, a)}{\partial q_i \partial q_j}]\}^{-1} \quad (2.16)$$

Il tensore degli sforzi $\frac{\partial^2 \psi_b(\mathbf{q}, a)}{\partial q_i \partial q_j}$ può essere localmente diagonalizzato lungo gli assi principali, la cui direzione può generalmente dipendere dal tempo, diversamente da quanto succede per la DM (come descritto nella teoria di Zel'Dovich). Se chiamiamo λ_i i suoi autovalori:

$$1 + \delta_b(\mathbf{x}(\mathbf{q}, a), a) = \prod_{i=1}^3 [1 - a\lambda_i(\mathbf{q}, a)]^{-1} \quad (2.17)$$

da cui si nota che si forma una singolarità caustica (o *shell-crossing*) al tempo finito $a_{sc}(\mathbf{q}) = 1/\lambda_G(\mathbf{q}, a)$, dove $\lambda_G(\mathbf{q}, a)$ è il più grande degli autovalori del tensore degli sforzi. La dipendenza degli autovalori dal tempo, che a piccole scale diventa oscillatoria, comporta che un dato elemento di massa può avere le condizioni necessarie alla singolarità più di una volta lungo lo stesso asse principale. Questa singolarità è una conseguenza del fatto che se due o più particelle provenienti da posizioni lagrangiane differenti arrivano alla stessa posizione Euleriana nello stesso istante di tempo allora lo Jacobiano $\|\det(\frac{\partial \mathbf{x}_b(\mathbf{q}, a)}{\partial \mathbf{q}})\|$, e quindi anche il tensore degli sforzi, non è più ben definito. Questa singolarità avviene attraverso un collasso unidimensionale e viene chiamata *pancake*, perchè ha la forma di un elissoide oblato.

L'approssimazione Lagrangiana non descrive più correttamente le traiettorie dei barioni dopo lo *shell-crossing*, infatti comporterebbe la diffusione dei *pancakes* mentre sappiamo che in realtà la gravità tende a stabilizzarli. Per superare questo problema è stato introdotto un modello stocastico, presentato nella prossima sezione. E' interessante notare che queste singolarità, dove analiticamente la densità tenderebbe a ∞ , sono proprio i siti preferenziali per la formazione delle galassie e possono essere pensate come delle buche di potenziale dove i barioni tendono a cadere.

2.2 Stochastic adhesion approximation

Il modello discusso nella sezione precedente si basa su un'approssimazione delle forze esercitate sul fluido di barioni dalla gravità e dalla contiguità delle linee di flusso del fluido che causa un gradiente di pressione. L'ultima componente è la più importante su piccole scale e ha l'effetto di diminuire le fluttuazioni dovute alla forza di gravità esercitata dalla DM, prevenendo l'avvenimento dello *shell-crossing*. In questo modello viene presa in considerazione anche la pressione del fluido ma solamente con un'approssimazione lineare. Quando il sistema entra in un regime non lineare (dove l'approssimazione sulla pressione non è più completamente corretta), ovvero quando due o più particelle diventano molto vicine nello spazio, possono avvenire fenomeni caustici, come descritto precedentemente, che possono portare una singola linea di flusso a dividersi in diverse. Per prevenire questo fenomeno non fisico si introduce un termine di viscosità cinematica all'equazione di Eulero, come è già stato fatto con successo per estendere la validità del modello di Zel'dovich nel caso della DM (Gurbatov, Saichev & Shandorin 1985), per tenere conto dell'azione della pressione nel rendere più stabili i flussi. Questo modello si basa su una generalizzazione dell'equazione di Burger tridimensionale per forti turbolenze, che è la più semplice equazione che descriva la creazione e la successiva rifusione di vortici.

L'equazione di Burger per la DM è:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Da} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.18)$$

Secondo il modello di adesione risulta che la DM si muove seguendo i risultati dell'approssimazione di Zel'dovich finché cade nei *pancake*, dove le varie particelle si uniscono grazie alla forza viscosa. Dopo essersi formati, i *pancake* diventeranno filamenti e questi infine diventeranno nodi. La grossezza di queste strutture è governata dal coefficiente di viscosità cinematica ν ($\propto \nu^{1/2}$ per motivi dimensionali) e diventano infinitamente sottili quando $\nu \rightarrow 0$.

L'equazione di Burger per l'IGM è:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Da} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla \eta \quad (2.19)$$

dove il coefficiente di viscosità cinematica è assunto piccolo ma non zero (se è nullo ritorniamo al caso svolto precedentemente) e l'equazione è chiamata "forced Burger equation of non-linear diffusion".

Nel caso collisionale (barioni) c'è un motivo in più per tenere conto di ν : il fluido risente realmente di una forza viscosa di taglio, dovuta alle collisioni tra le varie particelle, seppure molto piccola in confronto alle forze in considerazione (la gravità generata dalla DM). Per la materia oscura il termine viscoso invece è puramente fittizio, serve a simulare l'effetto di unificazione dovuto alla gravità. Per essere più precisi, poiché la viscosità cinematica è inversamente proporzionale alla densità locale del fluido, ν dovrebbe dipendere sia dallo spazio sia dal tempo ma, grazie alla sua piccollezza, anche tenendola costante si riproduce lo stesso risultato qualitativo.

Anche in questo caso è conveniente passare a un'equazione simil-Bernoulli per il potenziale di velocità:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 = \nu \nabla^2 \Phi - \eta \quad (2.20)$$

Per trovare una soluzione sono necessarie le condizioni di fondo e la statistica del rumore η . Il potenziale iniziale è $\Phi_0(\mathbf{q}) = -\varphi_0(\mathbf{q})$, mentre la statistica del rumore è uguale a quella del potenziale gravitazionale lineare, che assumiamo essere un campo casuale Gaussiano. Quindi anche η è un processo Gaussiano, sia nel tempo sia nello spazio, con media zero e la sua funzione di autocorrelazione, che in statistica è definita come $E[\eta(\mathbf{x}, a)\eta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, a')]$, può essere calcolata nel seguente modo.

Per svolgere questa stima è utile ricordare l'equazione (2.2) sviluppata grazie a (1.37), trasposta nello spazio di Fourier:

$$\eta(k, a) = [a\ddot{W}_b(k, a) + 2\dot{W}_b(k, a)]\varphi_0(k) = \varepsilon(k, a)\varphi_0(k) = \varepsilon(k, a)\frac{\delta_0(k)}{k^2}$$

dove W_b è l'*IGM linear filter* e δ_0 la fluttuazione della densità della DM al tempo iniziale $a = 1$. Da questa relazione possiamo trovare la seguente espressione:

$$\begin{aligned}\eta(\mathbf{x}, a)\eta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, a') &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{r})} \varepsilon(k, a)\varepsilon(k', a') \frac{\delta_0(k)}{k^2} \frac{\delta_0(k')}{k'^2} = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \varepsilon(k, a)\varepsilon(k', a') \frac{\delta_0(k)}{k^2} \frac{\delta_0(k')}{k'^2} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dk \int_{-1}^1 dy e^{ikry} k^2 \varepsilon(k, a)\varepsilon(k, a') \frac{\delta_0^2(k)}{k^4} = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} dk \varepsilon(k, a)\varepsilon(k, a') \frac{\delta_0^2(k)}{k^2} \frac{\sin(kr)}{kr}\end{aligned}$$

dove $\frac{\sin(kr)}{kr}$ è la funzione sferica di Bessel di ordine 0 $j_0(kr)$ e si è tenuto conto del fatto che ε dipende solo dal modulo di \mathbf{k} . Se ora facciamo la media sull'ensemble di φ_0 e ci ricordiamo che il "power spectrum" di un campo è uguale al valore medio del quadrato del campo stesso, ovvero in questo caso $P_\delta(k) = \langle \delta_0^2(k) \rangle$, possiamo scrivere l'autocorrelazione come

$$\langle \eta(\mathbf{x}, a)\eta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, a') \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk}{k^2} \varepsilon(k, a)\varepsilon(k, a') P_\delta(k) j_0(kr) \quad (2.21)$$

dove $P_\delta(k)$ è il "linear power spectrum" delle fluttuazioni di densità della DM (estrapolato nel presente). Dalla formula (2.21) si possono dedurre le seguenti proprietà del processo stocastico η (dall'articolo "The growth of structure in the intergalactic medium" di *S. Matarrese e R. Mohayee (2002)*):

- E' un processo Gaussiano casuale colorato (non bianco) sia nello spazio che nel tempo;
- E' omogeneo e isotropo nello spazio ma non nel tempo, poiché la sua funzione di autocorrelazione dipende solo da $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ ma non da $|a - a'|$;
- Su piccole scale η oscilla rapidamente rispetto al tempo per tutti gli $\alpha \leq 1$ con un periodo che generalmente dipende dal numero d'onda;
- La non separabilità dello spazio e del tempo nella sua funzione di autocorrelazione implica che η si comporti come un processo stocastico sia nel tempo che nello spazio. Cioè l'evoluzione temporale del rumore in ogni dato punto dello spazio non può essere predetta solamente sulla base delle condizioni iniziali locali, perchè il rumore dipende dalla reionizzazione del campo Gaussiano φ_0 su tutto lo spazio Lagrangiano attraverso l'evoluzione temporale dell'*IGM linear filter*.

L'equazione (2.20), nel caso in cui il potenziale η è rumore bianco nel tempo, è stata estensivamente studiata in Fisica della Materia, dove è chiamata equazione di Kardar-Parisi-Zhang (KPZ). In questo campo l'equazione descrive l'evoluzione di una superficie dovuta alla deposizione casuale di particelle, il coefficiente di viscosità cinematica sarà sostituito dalla temperatura, e il potenziale di velocità Φ dall'altezza al di sopra di una superficie inizialmente liscia che a causa del rumore casuale diverrà ruvida.

Tornando alla nostra situazione, per risolvere l'equazione KPZ è necessario effettuare la trasformazione non lineare di Hopf-cole $\Phi = -2\nu \log U$ così da ottenere un'equazione lineare alle derivate parziali. Questa sostituzione trasforma (2.20) nell'equazione lineare di diffusione con in aggiunta un potenziale moltiplicativo (il secondo termine del membro di destra dell'equazione seguente), chiamata anche "random heat equation":

$$\frac{\partial U(\mathbf{x}, a)}{\partial a} = \nu \nabla^2 U(\mathbf{x}, a) + \frac{\eta(\mathbf{x}, a)}{2\nu} \quad (2.22)$$

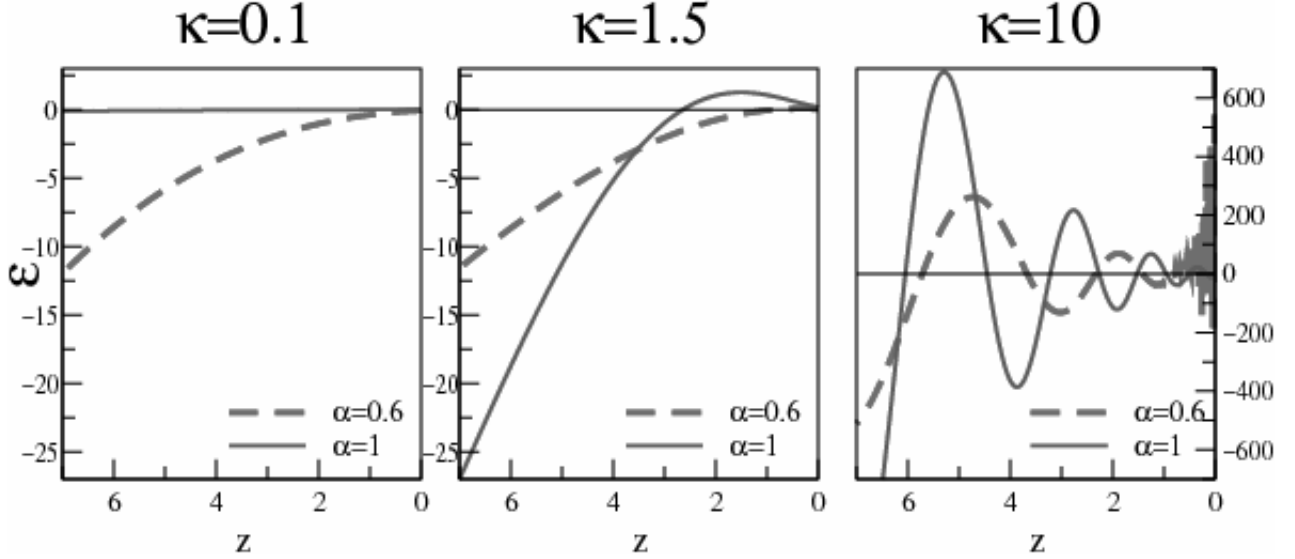


Figura 2.2: Grafico di $\varepsilon = \eta/\varphi_0$ rispetto a z per vari modelli di evoluzione della temperatura media dell'IGM, $\kappa = k/k_J$

La trasformazione di Hopf-Cole implica che possiamo riscrivere la velocità dei barioni nel seguente modo:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi = -2\nu\frac{\nabla U}{U} \quad (2.23)$$

Ora è utile ottenere l'espressione del "transition kernel" $K(\mathbf{x}, a|\mathbf{q}, 0)$ che rappresenta la probabilità che una particella sia in \mathbf{x} al tempo a dato che fosse in \mathbf{q} al tempo $a = 0$, e che al tempo iniziale ($a = 0$), ovvero $K(\mathbf{x}, 0|\mathbf{q}, 0)$, corrisponde alla particolare soluzione della "random heat equation" ottenuta da una delta di Dirac $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{q})$, infatti in un intervallo di tempo nullo la particella non si può essere mossa dalla sua posizione iniziale \mathbf{q} . Questo ha una soluzione formale data in termini della formula dei *path-integral* di Feynman-Kac, ovvero:

$$K(\mathbf{x}, a|\mathbf{q}, 0) = \int_{\mathbf{q}}^{\mathbf{x}(a)} [D\mathbf{x}](\tau) e^{-S/2\nu} \quad (2.24)$$

dove S è l'azione data da

$$S[\mathbf{x}] = \int_0^a d\tau L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \tau) = \int_0^a d\tau \left[\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \eta(\mathbf{x}, \tau) \right] \quad (2.25)$$

dove L è la Lagrangiana di una particella che si muove nel potenziale η . Si può pensare al "transition kernel" come la probabilità condizionata di trovare una particella in \mathbf{x} sapendo che era inizialmente nella posizione Lagrangiana \mathbf{q} .

Per comprendere meglio la soluzione data dai *path-integral* si può fare un'analogia con un problema di meccanica quantistica. Cambiando la variabile temporale da a a ia e con la sostituzione $2\nu \rightarrow \hbar$ l'equazione (2.22) diventa l'equazione di Schrödinger per una particella di massa unitaria soggetta al potenziale η . Secondo la rappresentazione per *path-integral* della meccanica quantistica la soluzione è ottenuta integrando su tutti i possibili cammini che collegano il punto iniziale a quello finale, dove ogni cammino è pesato dall'azione $S[\mathbf{x}]$ calcolata su di esso. Una volta conosciuto il kernel la soluzione della "random heat equation" è ottenuta attraverso l'equazione di Chapman-Kolmogorov. Questa equazione è una semplice conseguenza del teorema di Bayes sulla probabilità condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)} \quad (2.26)$$

da cui, poiché si può scrivere $P(A)$ come $P(A) = \int dB P(A, B)$,

$$P(A) = \int dB P(B)P(A|B) \quad (2.27)$$

Tornando nel nostro contesto l'equazione di Chapman-Kolmogorov equivale a integrare il prodotto tra la funzione iniziale U_0 e il "transition kernel" su tutto lo spazio Lagrangiano:

$$U(\mathbf{x}, a) = \int d^3\mathbf{q} U_0(\mathbf{q}) K(\mathbf{x}, a|\mathbf{q}, 0) \quad (2.28)$$

Nel nostro caso il potenziale iniziale è $U_0(\mathbf{q}) = e^{-\Phi_0(\mathbf{q})/2\nu} = e^{\varphi_0(\mathbf{q})/2\nu}$. Abbiamo quindi:

$$U(\mathbf{x}, a) = \int d^3\mathbf{q} e^{\varphi_0(\mathbf{q})/2\nu} \int_{\mathbf{q}}^{\mathbf{x}(a)} [D\mathbf{x}(\tau)] e^{-S/2\nu} \quad (2.29)$$

Nel limite di viscosità nulla (corrispondente al limite classico nel nostro analogo quantistico) il contributo dominante ai *path-integral* viene dal cammino "classico", cioè quello che soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange (perchè corrisponde a un minimo nell'azione S):

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{da} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = 0 \quad (2.30)$$

che nel nostro caso corrisponde semplicemente alla seconda legge di Newton, $\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla\eta$. Quindi le traiettorie dei barioni lungo il cammino classico sono:

$$\mathbf{x}_{cl}(\mathbf{q}, a) = \mathbf{q} + a\mathbf{u}_0(\mathbf{q}) - \int_0^a d\tau \int_0^\tau d\tau' \nabla\eta(\mathbf{x}(\mathbf{q}, \tau'), \tau') \quad (2.31)$$

dove \mathbf{u}_0 è una velocità iniziale generica. E' importante notare che ci sono ancora infinite traiettorie classiche che uniscono i due punti $(\mathbf{q}, 0)$ e (\mathbf{x}, a) , grazie alla libertà di scelta della velocità iniziale.

Possiamo espandere attorno alle traiettorie classiche tenendo i termini fino al secondo ordine nell'azione, ottenendo delle traiettorie di forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{cl} + \boldsymbol{\xi}$. Bisogna imporre anche la condizione per cui le fluttuazioni attorno alla traiettoria classica siano nulle nei punti di bordo (perchè tutti i cammini iniziano e finiscono negli stessi punti), ovvero $\boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}(a) = 0$. Otteniamo quindi:

$$S[\mathbf{x}] = S_{cl} + \int d\tau \boldsymbol{\xi}(\tau) \left(\frac{\delta S[\mathbf{x}]}{\delta \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}_{cl}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int d\tau_1 \int d\tau_2 \boldsymbol{\xi}_i(\tau_1) \boldsymbol{\xi}_j(\tau_2) \left(\frac{\delta^2 S[\mathbf{x}]}{\delta x_i(\tau_1) \delta x_j(\tau_2)} \right)_{\mathbf{x}_{cl}} \quad (2.32)$$

dove δ indica la differenziazione variazionale. L'azione classica, che è funzione solo dei punti di bordo (\mathbf{q}, \mathbf{x}) e del tempo a , può essere calcolata usando la soluzione (2.31) dell'equazione di Eulero-Lagrange. In più, poichè le traiettorie classiche derivano dall'equazione di Eulero-Lagrange, esse sono un minimo per l'azione, quindi $\left(\frac{\delta S[\mathbf{x}]}{\delta \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}_{cl}} = 0$ e si elimina il secondo termine di (2.32). Ora se inseriamo l'espansione dell'azione nell'espressione del "transition kernel" (2.24) abbiamo

$$K(\mathbf{x}, a|\mathbf{q}, 0) = e^{-S_{cl}/2\nu} \int_0^0 [D\boldsymbol{\xi}(\tau)] \exp \left\{ -\frac{1}{4\nu} \sum_{i,j=1}^3 \int_0^a d\tau \int_0^a d\tau_1 \int_0^a d\tau_2 \boldsymbol{\xi}_i(\tau_1) \boldsymbol{\xi}_j(\tau_2) \left[\frac{\delta^2 S[\mathbf{x}]}{\delta x_i(\tau_1) \delta x_j(\tau_2)} \right]_{\mathbf{x}_{cl}} \right\} \quad (2.33)$$

dove abbiamo tenuto conto che lo Jacobiano della trasformazione da \mathbf{x} a $\boldsymbol{\xi}$ è l'unità e quindi abbiamo potuto semplicemente cambiare la variabile di integrazione; con questa nuova variabile però gli estremi di integrazione diventano entrambi 0 perchè la fluttuazione è nulla nei punti di bordo. Al contrario che per gli integrali ordinari per i *path-integral* questo non è un problema, come si può vedere nel semplice caso di un particella libera riportato nella sottosezione seguente. L'uguaglianza degli estremi di integrazione implica che l'integrale può essere solo una funzione dei tempi finali $F(a)$, quindi la (2.33) può essere riscritta come $K(\mathbf{x}, a|\mathbf{q}, 0) = F(a)e^{-S_{cl}/2\nu}$.

Poichè nell'espressione della velocità il prefattore $F(a)$ si eliderà non è necessario calcolarlo, è stato però fondamentale assicurarsi che non fosse nullo. Sostituendo questi risultati in (2.29) otteniamo la soluzione della "random heat equation":

$$U(\mathbf{x}, a) = F(a) \int d^3\mathbf{q} e^{-\Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a)/2\nu}, \quad \text{dove } \Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a) = S_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a) + \Phi_0(\mathbf{q}) \quad (2.34)$$

Sostituendo nell'equazione (2.23) troviamo la seguente espressione per la velocità dei barioni:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, a) = \frac{\int d^3 \mathbf{q} e^{-\Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a)/2\nu} \nabla_{\mathbf{x}} S_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a)}{\int d^3 \mathbf{q} e^{-\Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a)/2\nu}} \quad (2.35)$$

Nel limite di potenziale η nullo finiamo nel caso di particella libera, per cui l'equazione (2.35) diventa la soluzione esatta dell'equazione di Burger 3D studiata nell'approssimazione di adesione (Shandorin & Zel'dovich 1989), lo stesso modello che abbiamo assunto valido per la DM. Il grosso problema, a cui si cercherà di trovare una soluzione nel seguito, è che di questo risultato non conosciamo l'espressione di $\nabla \eta$ in funzione di \mathbf{x} e a .

Se si riuscisse a conoscere la velocità peculiare data dall'equazione (2.35) in ogni punto dello spazio Euleriano e in ogni istante di tempo, si potrebbero ottenere le traiettorie dei barioni integrando numericamente il campo di velocità:

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, a) = \mathbf{q} + \int_0^a d\tau \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{q}, \tau), \tau) \quad (2.36)$$

e una volta note le traiettorie si può arrivare alla densità barionica grazie alla solita formula di conservazione della massa.

Nel limite di viscosità debole, che è proprio il caso di nostro interesse, si può fare un'ulteriore approssimazione espandendo il potenziale attorno ai suoi punti di minimo assoluto \mathbf{q}_s a \mathbf{x} e a fissati, ovvero

$$\Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a) = \Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \delta q_i \delta q_j \left[\frac{\partial^2 \Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a)}{\partial q_i \partial q_j} \right]_{\mathbf{q}_s}$$

Questa approssimazione è comunemente chiamata "steepest-descent approximation" e se la applichiamo all'equazione (2.34) otteniamo:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}, a) &= F(a) e^{-\Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a)/2\nu} \sum_s \int d^3 \mathbf{q} \exp \left\{ -\frac{1}{4\nu} \sum_{i,j=1}^3 \delta q_i \delta q_j \left[\frac{\partial^2 \Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a)}{\partial q_i \partial q_j} \right]_{\mathbf{q}_s} \right\} = \\ &= F(a) (4\pi\nu)^{3/2} e^{-\Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a)/2\nu} \sum_s j_s(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a) \end{aligned} \quad (2.37)$$

dove $j_s(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a) = (\det \left[\frac{\partial^2 \Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a)}{\partial q_i \partial q_j} \right]_{\mathbf{q}_s})^{-1/2}$ e la seconda uguaglianza è dovuta al fatto che l'integrale può essere considerato come gaussiano. E' possibile trovare i minimi del potenziale Φ_{cl} risolvendo la seguente equazione:

$$\nabla_{\mathbf{q}} \Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a)|_{\mathbf{q}_s} = \nabla_{\mathbf{q}} [S_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a) + \Phi_0(\mathbf{q})]_{\mathbf{q}_s} = 0 \quad (2.38)$$

Poiché $\nabla_{\mathbf{q}} S_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a) = -\mathbf{u}_0(\mathbf{q})$ (lo si può vedere più facilmente nel caso di una particella libera svolto nella sottosezione seguente) le traiettorie (2.31) passano per i minimi assoluti \mathbf{q}_s solo se sono soddisfatte le condizioni $\mathbf{u}_0(\mathbf{q}) = \nabla_{\mathbf{q}} \Phi_0(\mathbf{q})$ e $\Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a) \geq \Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a) \forall \mathbf{q} \neq \mathbf{q}_s$. Otteniamo così per i barioni la traiettoria:

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}_s, a) = \mathbf{q}_s + a \nabla_{\mathbf{q}} \Phi_0(\mathbf{q}_s) - \int_0^a d\tau \int_0^\tau d\tau' \nabla_{\mathbf{x}} \eta(\mathbf{x}(\mathbf{q}, \tau'), \tau') \quad (2.39)$$

che è uguale all'espressione trovata con l'approssimazione Euleriana nella sezione precedente (2.6), a meno della sostituzione $\Phi_0 = -\varphi_0$, come ci potevamo aspettare avendo preso il limite per ν piccola. Se ora utilizziamo la soluzione (2.37) trovata grazie a questa espansione attorno ai minimi nell'equazione (2.23) troviamo la soluzione alle equazioni di Burger nella "steepest-descent approximation" per il campo di velocità:

Calcoliamo prima il gradiente di U

$$\nabla_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}, a) = F(a) (4\pi\nu)^{3/2} \sum_s j_s(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a) \frac{\nabla_{\mathbf{x}} S_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a)}{-2\nu} e^{-\Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a)/2\nu}$$

per cui otteniamo

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, a) = -2\nu \frac{\nabla U}{U} = \sum_s w_s(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a) \nabla_{\mathbf{x}} S_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a) \quad (2.40)$$

dove w_s sono i pesi normalizzati dati dall'espressione:

$$w_s(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a) = \frac{j_s(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a) e^{-\Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a)/2\nu}}{\sum_s j_s(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a) e^{-\Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a)/2\nu}} = \frac{j_s(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a)}{\sum_s j_s(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a)} \quad (2.41)$$

l'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che, dati \mathbf{x} e a , Φ_{cl} è uguale in tutti i punti di minimo assoluto.

Poiché il gradiente nello spazio Euleriano dell'azione è uguale alla velocità lungo il cammino classico, dall'equazione (2.31), il campo di velocità derivato dall'approssimazione "steepest-descent" risulta quindi:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} S_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a) &= \mathbf{u}_{cl}(\mathbf{x}(\mathbf{q}, a), a) = \\ &= \frac{\mathbf{x} - \mathbf{q}_s}{a} - \int_0^a d\tau \nabla_{\mathbf{x}} \eta(\mathbf{x}(\mathbf{q}_s, \tau), \tau) + \frac{1}{a} \int_0^a d\tau \int_0^\tau d\tau' \nabla_{\mathbf{x}} \eta(\mathbf{x}(\mathbf{q}_s, \tau'), \tau') \end{aligned} \quad (2.42)$$

Nei tempi immediatamente successivi alla reionizzazione c'è solo un contributo al campo di velocità appena trovato, dovuto all'unico punto Lagrangiano di minimo assoluto \mathbf{q}_s del potenziale Φ_{cl} per \mathbf{x} e a fissati, quindi $\mathbf{u}(\mathbf{x}, a) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_{cl}(\mathbf{q}_s, a), a)$. Man mano che il tempo passa la mappa $\mathbf{q}_s \rightarrow \mathbf{x}$ non è più iniettiva e il numero di \mathbf{q}_s per ogni \mathbf{x} cresce. A questo punto secondo la soluzione "steepest-descent" il flusso in \mathbf{x} diventa la media pesata delle velocità, lungo le traiettorie classiche, di tutte le particelle che convergono in \mathbf{x} stesso al tempo a . Questi risultati rappresentano l'inizio dell'epoca di formazione dei *pancakes* nel modello presentato.

2.2.1 Soluzione del path integral per una particella libera

Per una particella libera il potenziale η è nullo, quindi l'equazione (2.19) si riduce al caso della "free adhesion approximation" (2.18). La traiettoria di questa particella è

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, a) = \mathbf{q} + a\mathbf{u}_0(\mathbf{q}) \quad (2.43)$$

possiamo quindi calcolare l'azione classica dall'equazione (2.25):

$$S_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a) = \int_0^a d\tau \frac{\dot{\mathbf{x}}^2(\mathbf{q}, \tau)}{2} = \frac{a\mathbf{u}_0^2(\mathbf{q})}{2} = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{q})^2}{2a} \quad (2.44)$$

Dall'equazione (2.34) possiamo ricavarci il potenziale di Hopf-Cole

$$U(\mathbf{x}, a) = F(a) \int d^3q e^{-[S_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a) + \Phi_0(\mathbf{q})]/2\nu} = \frac{1}{(4\pi\nu a)^{3/2}} \int d^3q \exp\left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{q})^2}{4a\nu} - \frac{\Phi_0(\mathbf{q})}{2\nu}\right] \quad (2.45)$$

dove il prefattore $F(a)$ è stato calcolato facendo l'integrazione gaussiana rispetto a ξ (la a viene dalla derivata seconda di S rispetto a \mathbf{x}) nell'equazione (2.33). Questa soluzione è effettivamente equivalente all'espressione standard trovata da Shandarin & Zel'dovich per la "free adhesion approximation", come avevamo anticipato.

Nel limite di viscosità molto piccola, $\nu \rightarrow 0$, (che avevamo visto essere proprio il caso di interesse) possiamo passare alla "steepest-descent" approximation dove le traiettorie delle particelle devono soddisfare la condizione di passare per i minimi del potenziale classico Φ_{cl} , ovvero

$$\nabla_{\mathbf{q}}(\Phi_0 + S_{cl}) = 0 \quad (2.46)$$

utilizzando l'espressione dell'azione (2.44) si ha

$$\nabla_{\mathbf{q}}\Phi_0 - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{q}}{a} = 0 \quad (2.47)$$

che, poiché $u_0 = \nabla_{\mathbf{q}}\Phi_0$, coincide proprio con la soluzione dell'equazione di Burger (2.43), confermandone quindi la validità della "random heat equation" nel limite di nostro interesse.

Struttura dell'IGM e della DM

Per dare una descrizione della distribuzione nell'Universo dell'IGM si può, partendo dai risultati della "steepest-descent approximation" nel limite $\nu \rightarrow 0$, seguire in analogia il modello già usato in letteratura per descrivere la distribuzione della DM (ad esempio in Gurabtov, Saichev & Shandarin 1989). Iniziamo con un veloce descrizione di questo modello applicato alla DM.

3.1 Struttura della distribuzione di materia oscura

Dall'equazione di Burger che governa la dinamica della DM (2.18) si ottiene la seguente equazione per il campo di velocità tramite la "free adhesion approximation", tale risultato è simile a quanto trovato per i barioni infatti le equazioni di burger per DM e IGM si differenziavano solo per la presenza del potenziale η nella seconda.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, a) = \frac{\int d^3q \frac{\mathbf{x}-\mathbf{q}}{a} \exp\left[-\frac{\Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a)}{\nu}\right]}{\int d^3q \exp\left[-\frac{\Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a)}{\nu}\right]} \quad (3.1)$$

dove

$$\Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a) = \Phi_0(\mathbf{q}) + \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{q})^2}{2a} \quad (3.2)$$

e $\Phi_0(\mathbf{q})$ è il potenziale di velocità iniziale: $\nabla_{\mathbf{q}}\Phi_0(\mathbf{q}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$. Nel limite $\nu \rightarrow 0$ il contributo dominante all'integrale di (3.1) è dato dai punti di minimo assoluto di Φ_{cl} e quindi la soluzione diventa:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, a) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{q}_s(\mathbf{x}, a)}{a} \quad (3.3)$$

dove $\mathbf{q}_s(\mathbf{x}, a)$ sono i punti di minimo assoluto di Φ_{cl} dati \mathbf{x} e a . Possiamo supporre che Φ_0 sia un campo casuale abbastanza regolare (o più in particolare possiamo pensarlo gaussiano) senza perdere troppa generalità.

La descrizione geometrica si basa sul fatto che le coordinate del minimo assoluto di Φ_{cl} sono anche i punti dove il paraboloide

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a) = -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{q})^2}{2a} + h \quad (3.4)$$

interseca tangenzialmente l'ipersuperficie $\Phi_0(\mathbf{q})$ per la prima volta facendo crescere h da $-\infty$, come si può osservare facilmente dalla definizione di Φ_{cl} . Il paraboloide P e Φ_0 sono rappresentati in uno spazio di quattro dimensioni (oltre le 3 spaziali usuali, consideriamo anche h come una dimensione) ma per comodità con punto di intersezione ci riferiamo al punto nello spazio 3D, perchè ci interessano solamente le sue coordinate effettive e non il valore di h . Chiaramente se si alza il paraboloide aumentando h si troveranno altri punti in cui esso è tangente a Φ_0 . E' importante notare che dalle coordinate dei punti di intersezione si possono ricavare le velocità di tutte le particelle del fluido non collisionale (la DM) che arrivano al punto \mathbf{x} al tempo a grazie all'equazione (3.3). Il tipo di intersezione tra il paraboloide e l'ipersuperficie dipende dalle loro curvatures, la curvatura di P è proporzionale a $1/a$ e decresce con il tempo, invece la curvatura di Φ_0 è costante in ogni punto. Infatti per il potenziale in ogni punto ci sono tre curvatures determinate dagli autovalori del tensore di deformazione $\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial q_i \partial q_j}$, dall'articolo "The large-scale structure of the Universe in the frame of the model equation of non-linear

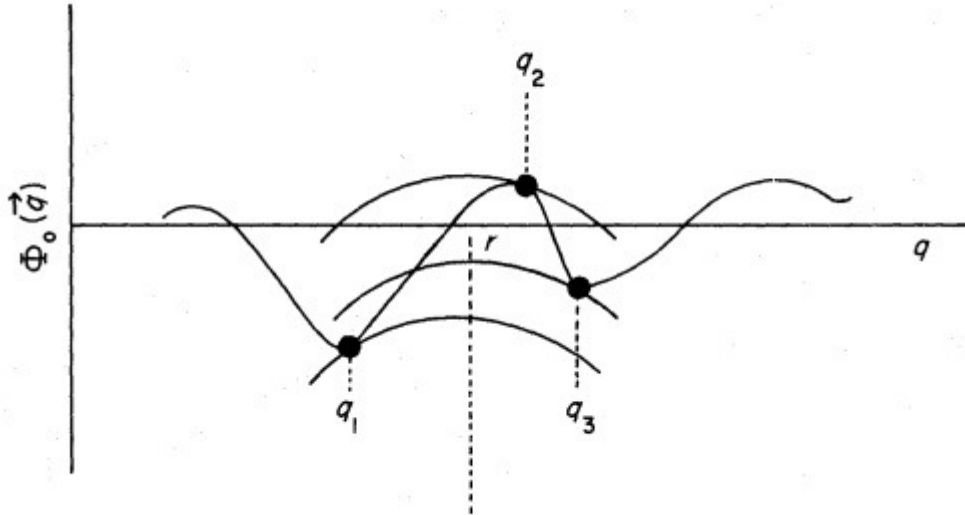


Figura 3.1: Intersezioni tra paraboloide P e l'ipersuperficie di Φ_0 per $a > a_0$ nella seconda regione

diffusion. *Gurbatov, Saichev, Shandarin 1989*" si può stimare che gli autovalori $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ abbiano un grandezza di circa σ/L_0 , dove L_0 è la scala tipica del campo di velocità iniziale e σ è la sua "rms amplitude". Chiamiamo $a_0 = L_0/\sigma$ il tempo caratteristico di sviluppo della non linearità.

Finchè la curvatura di P è maggiore di quella di Φ_0 , ovvero $a < a_0$, il paraboloide tocca il potenziale in un unico punto $\mathbf{q}_s(\mathbf{x}, a)$ per ogni dato \mathbf{x} . Questo significa che al tempo $a < a_0$ un'unica particella con coordinate \mathbf{q}_s del punto di contatto è arrivata nella posizione Euleriana \mathbf{x} (che corrisponde al vertice del paraboloide). In questa situazione, variando con continuità \mathbf{x} , il punto di contatto si muove leggermente lungo l'ipersuperficie di Φ_0 e il campo di velocità è quindi continuo.

Dopo che a supera a_0 lo spazio Euleriano si può dividere in due regioni. Se le coordinate del vertice \mathbf{x} appartengono alla prima regione il paraboloide può toccare il potenziale solo in un punto, se appartengono alla seconda ci sono tre possibili punti di contatto per differenti h (se ne è fatta una rappresentazione unidimensionale nella figura 3.1). In quest'ultimo caso c'è comunque un solo punto \mathbf{q}_s che corrisponde all' h più piccolo, ovvero quando il paraboloide interseca l'ipersuperficie solo nel punto di contatto tangenzialmente. Questo punto è associato alla particella che ha raggiunto \mathbf{x} senza problemi mentre le altre due si sono unite in un *pancake* già prima di arrivare in \mathbf{x} , la velocità del *pancake* in questo punto Euleriano è uguale alla velocità della particella singola.

Il paraboloide può anche toccare l'ipersuperficie Φ_0 in due punti simultaneamente. Questo avvenimento è degenerare infatti due particelle arrivano allo stesso momento in \mathbf{x} , in più essendoci un doppio contatto il risultato sarà 2-dimensionale: si formano delle porzioni di superficie denominate *pancakes*. Poco dopo la formazione questi *pancakes* si chiudono formando una superficie chiusa nello spazio Lagrangiano (ne è data una rappresentazione in figura 3.2). I punti dentro questa superficie non possono essere toccati dal paraboloide (perchè oltre a toccare tangenzialmente questi punti intersecherebbe Φ_0 in qualche altro punto e quindi dovrebbero avere già formato un *pancake*), la massa del *pancake* corrisponde proprio a quella delle particelle racchiuse in esso mentre la sua densità tende a ∞ nel limite $\nu \rightarrow 0$ (come abbiamo visto che accade anche per i barioni nelle singolarità del tensore degli sforzi eq-2.17).

Mentre passa il tempo queste superfici si allargano, aumentando anche la massa, e si moltiplicano, infatti ne possono venire generate più di una in differenti punti di minimo di Φ_0 .

Quando invece il paraboloide tocca l'ipersuperficie in tre punti simultaneamente le strutture che si formano hanno un'unica dimensione e corrispondono all'intersezione dei *pancakes*, sono quindi delle curve che possono essere pensate come le costole della struttura formata dai *pancakes* e sono chiamati *filamenti*. Poiché siamo in uno spazio quadridimensionale (3 spaziali + h) ci possono essere 4 punti di contatto simultanei, a cui corrispondono nella struttura che stiamo delineando i punti di intersezione

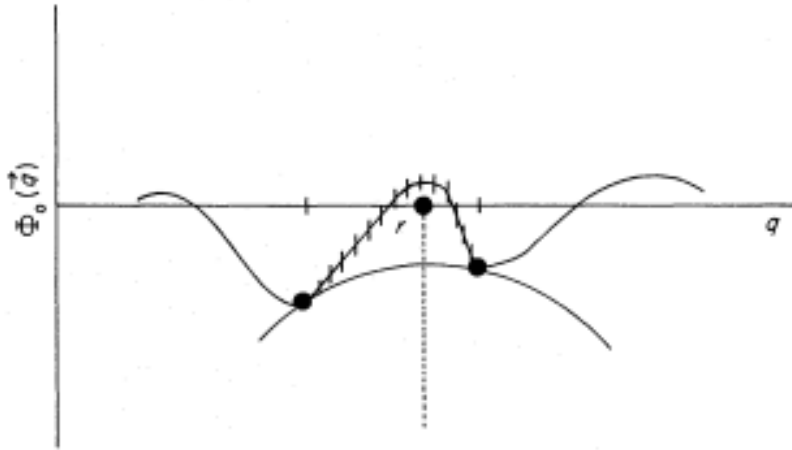


Figura 3.2: Rappresentazione unidimensionale del doppio contatto, l'intervallo di curva segnato indica le particelle contenute nel *pancake* a un dato istante

tra le costole che possono essere visti come gli *apici* della struttura (a volte vengono anche chiamati *nodi*).

Per riuscire a interpretare meglio com'è delineata questa struttura si può fare un'analogia con la struttura cellulare: si può pensare ai *pancakes* come le pareti delle cellule, alle costole e agli apici come ai luoghi di contatto tra due o tre cellule rispettivamente.

A questo punto non ci sono più cambiamenti qualitativi nella struttura (gli elementi che la compongono sono sempre quelli appena descritti) ma solo quantitativi, perchè questa struttura evolve con il passare del tempo nei seguenti modi.

Inanzitutto le "cellule" possono ingrandirsi "inghiottendo" quelle adiacenti (le cellule corrispondenti a minimi più profondi prevalgono sulle altre), in più, poiché la massa tende a migrare dagli elementi a maggiore dimensionalità a quelli a minore (*vuoto* → *pancakes* → *filamenti* → *nodi*), c'è un grande cambiamento di densità di massa tra i vari elementi della struttura. Quindi dopo molto tempo dalla reionizzazione tutta la massa è concentrata negli apici, possiamo comunque pensare che la struttura cellulare valga per un vasto periodo di tempo anche grazie al continuo riformarsi di *pancakes* e elementi successivi.

3.2 Struttura della distribuzione di barioni

Adesso andiamo ad applicare lo stesso modello all'IGM, per evitare le difficoltà di integrazione della velocità dei barioni ottenuta dalle soluzioni della "heat equation" nel capitolo precedente utilizziamo i risultati dell'approssimazione Lagrangiana (sezione 2.1). Per ogni orbita il sistema ha una variabile ciclica che corrisponde alla velocità iniziale, possiamo scriverla come

$$\mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{q}}{a} + \nabla_{\mathbf{q}}(\psi - \varphi_0) \quad (3.5)$$

dove ψ è il potenziale dei barioni definito dall'equazione (2.13). Adesso è utile espandere il potenziale esterno η al primo ordine in funzione del vettore di spostamento \mathbf{S} :

$$\eta(\mathbf{x}, a) = \eta(\mathbf{q}, a) + \nabla_{\mathbf{q}}\eta(\mathbf{q}, a) \cdot a[\mathbf{u}_0(\mathbf{q}) - \nabla_{\mathbf{q}}(\psi(\mathbf{q}, a) - \varphi_0(\mathbf{q}))] + \mathcal{O}(\mathbf{S}^2) \quad (3.6)$$

Utilizzando $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}_0 + a\nabla_{\mathbf{q}}(\varphi_0 - \psi)$ per calcolare l'azione, definita nell'equazione (2.25), e le due espressioni precedenti si ottiene al secondo ordine in \mathbf{S}

$$\Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{q})^2}{2a} - a(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \cdot \nabla_{\mathbf{q}}\dot{\psi}(\mathbf{q}, a) - \psi(\mathbf{q}, a) - a\dot{\psi}(\mathbf{q}, a) - \frac{1}{2} \int_0^a d\tau \tau^2 [\nabla_{\mathbf{q}}\dot{\psi}(\mathbf{q}, \tau)]^2 + \mathcal{O}(\mathbf{S}^3) \quad (3.7)$$

Da questo risultato si può ottenere un'espressione esplicita per j_s , necessaria per il calcolo della velocità dei barioni nella "steepest-descend approximation" (eq. 2.40-1), ovvero

$$j_s(\mathbf{q}_s, a) = \left\{ \det \left[\frac{\delta_{ij}}{a} - \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{q}, a)}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{a \partial^2 \dot{\psi}(\mathbf{q}, a)}{\partial q_i \partial q_j} \right]_{\mathbf{q}_s} \right\}^{-1/2} + \mathcal{O}(\mathbf{S}^2) \quad (3.8)$$

Richiamiamo infine le soluzioni dell'approssimazione Lagrangiana per le traiettorie classiche

$$\mathbf{x}_{cl}(\mathbf{q}_s, a) = \mathbf{q}_s - a\nabla_{\mathbf{q}}\psi(\mathbf{q}_s, a) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{u}_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_s, a) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{q}_s}{a} - a\nabla_{\mathbf{q}}\dot{\psi}(\mathbf{q}_s, a) \quad (3.10)$$

abbiamo così tutte le funzioni coinvolte nella soluzione dell'"adhesion approximation" data dall'equazione (2.40), in più sono tutte espresse in termini del potenziale dei barioni ψ .

Ora per ricostruire la struttura dei barioni seguiamo un modello analogo a quello utilizzato nella sezione precedente per la DM. Anche in questo caso $\Phi_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, a)$ descrive un'ipersuperficie tridimensionale nello spazio Lagrangiano. Però i punti di minimo assoluto di questa ipersuperficie corrispondono ai punti Lagrangiani di "primo contatto" con l'iperpiano $\Sigma_h(\mathbf{q}) = h$, dove il parametro h è fatto crescere partendo da $-\infty$, e non con un paraboloide come nel caso precedente (lavoriamo sempre in uno spazio 4-dimensionale formato dalle 3 dimensioni spaziali più h). Tutta la costruzione successiva, basata sul contatto tra ipersuperficie e iperpiano, è simile a quanto svolto per la DM.

Una volta trovati i punti di minimo $\mathbf{q}_s(\mathbf{x}, a)$, la velocità corrispondente nella posizione Euleriana \mathbf{x} e al tempo a è data dall'equazione (2.40), come somma pesata delle velocità delle singole particelle (eq. 3.10), con i pesi dati dall'equazione (2.41) e j_s calcolato tramite l'equazione (3.8) e S_{cl} grazie a (3.7).

Ai tempi primordiali l'ipersuperficie Φ_{cl} è uno stretto paraboloide con un apice in $\mathbf{q} = \mathbf{x}$, inoltre ha una curvatura molto grande e quindi c'è una corrispondenza uno a uno tra i punti degli spazi Euleriano e Lagrangiano. Con il passare del tempo diminuisce la curvatura dell'ipersuperficie e diventa sempre più probabile trovare punti \mathbf{x} tali che la condizione di contatto tra il potenziale e l'iperpiano sia valida per diversi \mathbf{q}_s simultaneamente. Per cui la mappa tra le coordinate Lagrangiane e Euleriane diventa molti a uno e la dimensione delle strutture formate è inversamente proporzionale al grado della mappa, equivalentemente a quanto descritto nella sezione precedente.

L'unico problema di questa costruzione è dovuto al fatto che l'equazione (3.7) è approssimata e quindi

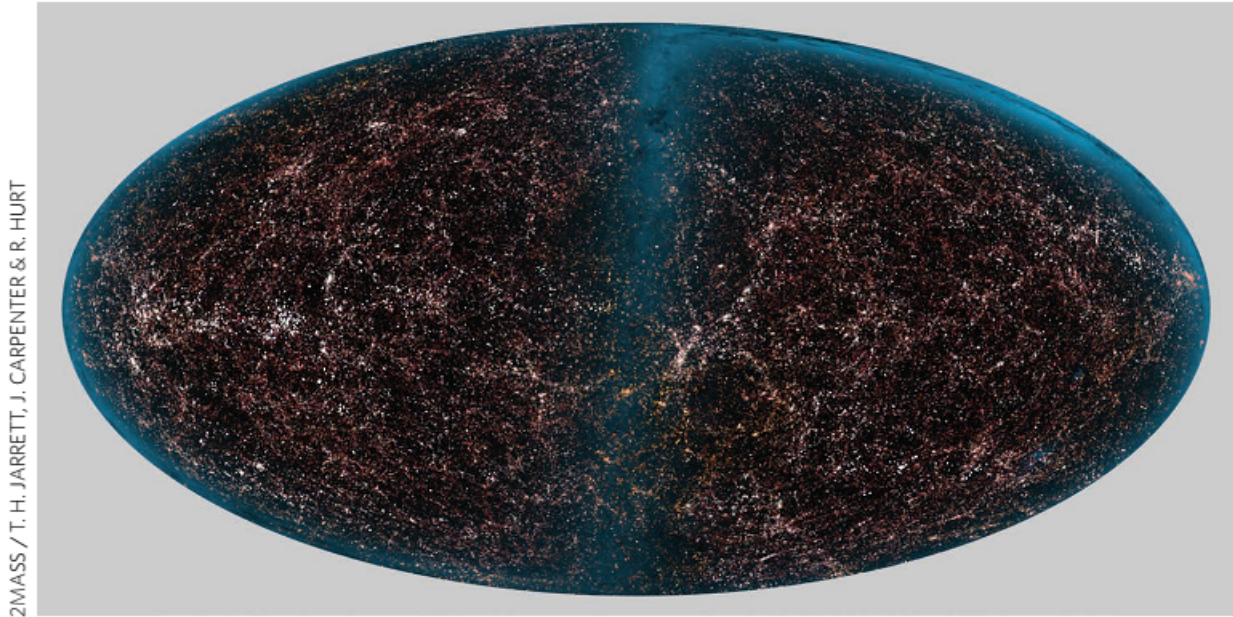


Figura 3.3: Atlante ottenuto dal Two Micron All Sky Survey (2MASS), un progetto congiunto tra la University of Massachusetts e il Infrared Processing and Analysis Center/California Institute of Technology, fondato da National Aeronautics and Space Administration e la National Science Foundation.

anche la condizione (2.38), che individua i minimi del potenziale, è solo approssimativamente soddisfatta, la costruzione appena sviluppata è allora limitata ad essere accurata al primo ordine rispetto al vettore di spostamento \mathbf{S} . Questo non risulta comunque un grosso problema, il modello qui descritto risulta essere accurato non solo per il regime lineare ma anche per quello turbolento, almeno per tempi in cui lo scheletro della struttura dell'IGM è effettivamente di interesse. Questa accuratezza è dovuta al fatto che il contributo dominante alla "steepest-descend solution" nelle regioni più dense (*pancakes*, *filamenti*, *nodi*) viene dalle "buche di potenziale più profonde", che sono proprio i punti Lagrangiani dove le particelle hanno il minor spostamento dalla loro posizione iniziale (c'è una proporzionalità inversa tra la profondità delle buche e lo spostamento). Il modello applicato, sia ai barioni sia alla DM, resta limitato dal poter prevedere solamente dove si formano *pancakes*, *filamenti* e *nodi* e non la struttura interna di queste regioni; per penetrare nella struttura è necessario un algoritmo numerico come ne sono già stati sviluppati negli anni ma di cui qui non ci occupiamo. Una conferma della validità di questa descrizione della distribuzione barionica è data dai rilevamenti cosmologici (figura 3.3), infatti si nota che le galassie si dispongono preferibilmente in grandi distese (*pancakes*) e lungo *filamenti* separati da grandi regioni vuote.

Conclusioni

Questo lavoro affronta la teoria dell'instabilità gravitazionale e in particolare illustra un modello per estendere l'approssimazione di Zel'dovich. Inizialmente viene verificato brevemente che la DM si comporti come un fluido. In seguito sono state calcolate le soluzioni analitiche della dinamica di barioni e DM nel regime lineare delle fluttuazioni di densità ($\delta \ll 1$). Per queste soluzioni si è cercato di mantenere la massima generalità, nel caso in cui si consideri il potenziale gravitazionale dei barioni trascurabile sono state riportate le soluzioni anche tenendo conto di una relazione di tipo polinomiale tra temperatura dell'IGM e redshift ($T_0 \propto (1+z)^\alpha$) ed è stato svolto anche il caso in cui l'effetto del potenziale gravitazionale generato dai barioni sia rilevante. E' possibile usare nelle più varie situazioni questi risultati generali utilizzando opportune condizioni iniziali.

Ci siamo quindi addentrati nel caso non lineare per l'IGM. In particolare è stato usato un potenziale esterno casuale per tenere conto della forza espansiva di Hubble, della forza gravitazionale locale e dei gradienti di pressione, tutti elementi trascurati nel modello di Zel'dovich. Inizialmente la dinamica dei due fluidi è stata trattata attraverso un'approssimazione Euleriana (buoni risultati ma di difficile utilizzo per la complessità di calcolo) e una Lagrangiana, grazie a cui si riesce facilmente a ottenere delle equazioni approssimate per la dinamica che hanno una buona validità finché le perturbazioni rimangono in un regime debolmente non lineare ($\delta < 1$).

E' stato poi presentato lo "stochastic adhesion model" che si basa sull'introdurre una viscosità (molto piccola) al fluido barionico. Sono state quindi risolte, utilizzando i *path-integrals* e la "steepest-descent approximation", le equazioni di Burger 3D (chiamate anche KPZ) che governano l'evoluzione del campo di velocità peculiare. Sono state così ottenute delle soluzioni approssimate della dinamica dei barioni che mantengono un'ottima validità anche in un regime moderatamente non lineare ($\delta \lesssim 5-10$). Infine è stato presentato un modello geometrico per descrivere la distribuzione della DM, che è stato poi esteso all'IGM. La struttura cellulare, che appare come una ragnatela formata da *pancake*, *filamenti* e *nod*i, delineata da questo modello è confermata sperimentalmente dall'osservazioni della foresta Lya.

Bibliografia

- [1] C. Egli. Feynman path integrals in quantum mechanics. Seminar course in theoretical physics at KTH, Stockholm, 2004.
- [2] S. Matarrese. Notes on gravitational instability. Lectures given at Scuola Normale Superiore, Pisa, 2002-2005.
- [3] S. Matarrese. Computational cosmology: A general relativistic approach. *Nature Physics*, 12:293–294, April 2016.
- [4] S. Matarrese and R. Mohayaee. The growth of structure in the intergalactic medium. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 329:37–60, 2002.
- [5] A. Nusser. Analytic solutions for coupled linear perturbations. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 317:902–906, 2000.
- [6] A.I. Saichev S.N. Gurbatov and S.F. Shandarin. The large-scale structure of the universe in the frame of model equation of non-linear diffusion. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 236:385–402, 1989.
- [7] R. van de Weygaert. Lecture course cosmic structure formation, chapter 4. University of Groningen, 2016-2017.