

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi Civita”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Titolo

La simmetria $SO(4)$ del problema di Kepler

Relatore

Prof. Francesco Fassò

Laureando

Federico Arrighi

Anno Accademico 2021/2022

Introduzione

Quello di Kepler è un problema di grande importanza all'interno della fisica: grazie ad esso si giunge ad una descrizione dettagliata dei moti dei pianeti e grazie alla sua versione quantizzata si riesce a modellizzare l'atomo idrogenoide. La particolare dipendenza da $\frac{1}{r^2}$ della forza di attrazione gravitazionale o elettrostatica porta tale sistema ad avere delle simmetrie "nascoste" che si traducono nella presenza di cinque integrali primi indipendenti fra di loro e nella formazione di orbite periodiche nel caso classico e nella degenerazione nel numero quantico orbitale l nel caso atomico. Tali simmetrie "nascoste" sono interpretabili come una simmetria del sistema (nello spazio delle fasi e non in quello delle configurazioni) sotto un'azione di $SO(4)$, "più grande" della semplice simmetria per rotazioni nello spazio delle configurazioni data dalla centralità del potenziale.

Vi sono diverse spiegazioni dell'esistenza di tale simmetria, associate a diversi metodi di "regolarizzazione" (proposti da Moser, Ligon-Schaaf, Kustaanheimo-Stiefel), i quali permettono anche di trattare i moti di collisione come un qualsiasi altro moto e rendere completo il flusso del campo vettoriale di Kepler.

Nella presente tesi si vuole discutere la tecnica proposta da Moser.

Indice

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Introduzione | iii |
| 1 Il problema di Kepler | 1 |
| 1.1 Formulazione hamiltoniana | 1 |
| 1.2 Curva odografa | 2 |
| 1.3 Generalizzazione a n dimensioni | 3 |
| 2 Regolarizzazione | 5 |
| 2.1 Regolarizzazione alla Moser | 5 |
| 2.1.1 Geodetiche sulla sfera e proiezione stereografica | 5 |
| 2.1.2 Dimostrazione del teorema 2.1 | 7 |
| 2.1.3 Regolarizzazione | 11 |
| 2.1.4 Interpretazione geometrica per $n = 2$ | 11 |
| 3 Quantità conservate | 15 |
| 3.1 Mappa momento | 15 |
| 3.1.1 Generatore infinitesimo, azioni simplettiche ed Hamiltoniane | 15 |
| 3.1.2 Definizione della mappa momento | 16 |
| 3.1.3 Mappa momento per l'azione sollevata di $SO(n)$ su $T^*\mathbb{R}^m$ | 17 |
| 3.2 Integrali primi di Kepler | 18 |
| 3.2.1 Derivazione di momento angolare e vettore di Laplace-Runge-Lenz | 18 |
| 3.2.2 Caso tridimensionale | 19 |

Capitolo 1

Il problema di Kepler

Si definisce il problema di Kepler in ambito hamiltoniano e se ne derivano alcune proprietà.

1.1 Formulazione hamiltoniana

Il problema di Kepler in 3 dimensioni, che emerge in fisica dallo studio di un sistema soggetto alla forza gravitazionale o elettrostatica, è descritto da un sistema Hamiltoniano sul cotangente dello spazio delle configurazioni $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ovvero $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^3 \ni (q, p)$, munito della forma simplettica $\omega = dq \wedge dp = \sum_{i=1}^3 dq_i \wedge dp_i$. Scegliendo adeguate unità di misura, la Hamiltoniana che lo definisce è:

$$H(q, p) = \frac{\|p\|^2}{2} - \frac{1}{\|q\|}, \quad (q, p) \in T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$$

dove con $\|\cdot\|$ si indica la norma euclidea. Le equazioni del moto sono:

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\frac{q}{\|q\|^3}. \quad (1.1)$$

Siccome lo spazio delle configurazioni non contiene l'origine, corrispondente alle collisioni, e siccome le orbite di collisione tendono all'origine in tempi finiti, il campo vettoriale X_H non è completo. Il tempo quindi non agisce sullo spazio delle fasi come un sottogruppo ad un parametro di diffeomorfismi. Questa problematica può essere oltrepassata tramite le cosiddette tecniche di *regolarizzazione*.

È noto che gli integrali primi del sistema sono l'energia, in quanto l'Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, il vettore momento angolare:

$$L(q, p) := q \times p, \quad (1.2)$$

in quanto il potenziale è centrale, e il vettore di Laplace-Runge-Lenz:

$$A(q, p) := p \times L(q, p) - \frac{q}{\|q\|}. \quad (1.3)$$

Esso è detto anche *vettore eccentricità* in quanto il suo modulo quadro è uguale all'eccentricità e delle orbite kepleriane.

Nel sottoinsieme dello spazio delle fasi ad energia negativa:

$$P_- := \{(q, p) \in T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) : H(q, p) < 0\} \quad (1.4)$$

i moti con momento angolare non nullo sono periodici e le loro traiettorie sono ellissi. La conservazione del vettore di Laplace-Runge-Lenz, il quale punta verso il pericentro della traiettoria ellittica, implica la chiusura della stessa e la periodicità del flusso. Questo è dovuto alla forma speciale del potenziale,

dipendente dalle coordinate come $\|q\|^{-1}$, che fornisce quindi una maggiore simmetria al sistema rispetto ad un generico potenziale centrale. Tale simmetria si traduce nell'aggiunta di un integrale primo indipendente e alla conseguente formazione di orbite chiuse.

Si ricorda che, dal teorema di Bertrand (una dimostrazione del quale può essere trovata in [Arn10]), vi sono due soli campi di forza (analitici) centrali conservativi per i quali tutti i moti limitati sono periodici: quello kepleriano e quello elastico. In tutti gli altri campi centrali vi sono sia moti limitati periodici che non periodici.

La geometria dell'ellisse sulla quale si svolge il moto è determinata dagli integrali primi: la traiettoria appartiene ad un piano ortogonale alla direzione individuata dal vettore momento angolare, il semiasse maggiore a è funzione solo dell'energia $a = \frac{1}{\sqrt{-2H}}$ mentre l'eccentricità e è funzione sia dell'energia che del momento angolare $e = \sqrt{1 - \frac{L^2}{a^2}}$. L'orientazione dell'ellisse nel piano è individuata dal vettore di Laplace-Runge-Lenz.

I sette integrali primi H, L, A non sono indipendenti fra di loro. Siccome lo spazio delle fasi del problema è di dimensione sei e il flusso del campo vettoriale di Kepler è non nullo, al massimo cinque di queste costanti del moto sono indipendenti.

Andando a calcolare le relazioni di commutazione degli integrali primi:

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k, \quad \{A_i, A_j\} = -2H \epsilon_{ijk} L_k, \quad \{L_i, A_j\} = \epsilon_{ijk} A_k, \quad (1.5)$$

(dove $i, j = 1, 2, 3$, con $\{\cdot, \cdot\}$ si indicano le parentesi di Poisson fra funzioni definite sullo spazio delle fasi e con ϵ il simbolo di Levi-Civita) si nota che, introducendo in P_- il vettore di Laplace-Rouge-Lenz modificato:

$$\tilde{A}(q, p) := \frac{A(q, p)}{\sqrt{-2H(q, p)}} = \nu A, \quad \nu := \frac{1}{\sqrt{-2H}} \quad (1.6)$$

la restrizione all'insieme di livello di energia negativa dello spazio delle fasi delle funzioni L_i e \tilde{A}_i generano l'algebra di Lie $\mathfrak{so}(4)$ con prodotto dell'algebra dato dalle parentesi di Poisson ([Gyö68] sembra essere il primo a notare questo fatto). Infatti, le relazioni algebriche fra le L_i e \tilde{A}_i ristrette a P_- sono (siccome H commuta con L_i e A_j):

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k, \quad \{L_i, \tilde{A}_j\} = \epsilon_{ijk} \tilde{A}_k, \quad \{\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\} = \epsilon_{ijk} L_k, \quad (1.7)$$

con $i, j = 1, 2, 3$.

Questo è un primo indizio del gruppo di simmetria globale del problema di Kepler regolarizzato per energie negative, che si vedrà essere $SO(4)$.

1.2 Curva odografa

Si introduce il concetto di curva odografa, per prima volta definito in [Ham47] (ulteriori dettagli sono disponibili in [Mar12], [Mil83]). Esso sarà utile per tentare di intuire l'idea che può stare alla base della costruzione di Moser, come spiegato all'inizio di 2.1.

Definizione 1.1. *La curva odografa del moto di una particella in uno spazio affine è la curva, disegnata nello spazio vettoriale V associato allo spazio affine, dal vettore velocità v della particella, come funzione del tempo.*

Proposizione 1.1. *Le curve odografe del problema di Keplero a momento angolare non nullo sono circonferenze, o archi di circonferenze, in generale non centrate nell'origine.*

Dimostrazione. Si scelga un sistema di riferimento ortogonale canonico di \mathbb{R}^3 tale per cui L sia parallelo all'asse z : $L = (0, 0, \|L\|)$. La conservazione di L fa sì che i vettori $q(t)$ e $p(t)$ appartengano sempre al piano xy . Indicando (r, ϑ) le coordinate polari del piano xy si ha:

$$q = r(\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0)$$

$$p = (\dot{r} \cos \vartheta - r\dot{\vartheta} \sin \vartheta, \dot{r} \sin \vartheta + r\dot{\vartheta} \cos \vartheta, 0)$$

$$L = (0, 0, r^2 \dot{\vartheta})$$

Siccome $t \rightarrow \vartheta(t)$ è una funzione strettamente monotona del tempo essa ammette inversa $\vartheta \rightarrow \tilde{t}(\vartheta)$. Si può quindi definire $\tilde{p}(\vartheta) := p(\tilde{t}(\vartheta))$ da cui:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'(\vartheta) &= \frac{p'(\tilde{t}(\vartheta))}{\vartheta'(t)} = \\ &= -\frac{r}{r^3}(\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0) \frac{r^2}{\|L\|} = -\frac{1}{\|L\|}(\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0). \end{aligned}$$

Integrando:

$$\tilde{p}(\vartheta) = \frac{1}{\|L\|}(-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0) + c, \quad c \in \mathbb{R}^3. \quad (1.8)$$

Dove $c = \tilde{p}(0) - (0, \frac{1}{\|L\|}, 0)$ La (1.8) mostra la tesi, infatti si ha:

$$\tilde{p}(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\|L\|} \\ 0 \end{pmatrix} + c$$

da cui $t \rightarrow p(t) = \tilde{p}(\vartheta(t))$ appartiene ad una circonferenza di centro c e di raggio:

$$R = \frac{1}{\|L\|}.$$

Tale circonferenza è la curva odografa del problema di Keplero. □

1.3 Generalizzazione a n dimensioni

Tolto il concetto di curva odografa, quanto detto in precedenza può essere naturalmente generalizzato al caso n -dimensionale. Lo spazio delle fasi del problema di Kepler n -dimensionale è $T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n$ munito della forma simplettica $\omega = dq \wedge dp = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ e l'Hamiltoniana che definisce il problema è $H : T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$H(q, p) = \frac{\|p\|^2}{2} - \frac{1}{\|q\|}, \quad (q, p) \in T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

Le equazioni del moto sono la naturale generalizzazione a n dimensioni di quelle del problema tridimensionale; mentre gli integrali primi, oltre all'energia, sono le componenti della generalizzazione a n dimensioni del momento angolare $L(q, p) = q \wedge p$, matrice antisimmetrica di componenti:

$$L(q, p)_{ij} = q_i p_j - q_j p_i \quad i, j = 1, \dots, n \quad (1.9)$$

e del vettore di Laplace-Runge-Lenz:

$$A(q, p)_k = -(p \cdot q)p_k + \|p\|^2 q_k - \frac{q_k}{\|q\|}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.10)$$

Nel caso di $n = 3$, utilizzando

$$q(p \cdot p) - p(p \cdot q) = p \times (q \times p), \quad (1.11)$$

si trova la forma (1.3) del vettore eccentricità.

Sia:

$$S_- := \{(q, p) \in T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : H(q, p) < 0\}, \quad (1.12)$$

il sottoinsieme dello spazio delle fasi a energia negativa.

Per ogni $E < 0$ è utile definire per il seguito:

$$S_-(E) := \{(q, p) \in T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : H(q, p) = E\}. \quad (1.13)$$

Per le funzioni L_{ij} e A_k valgono su S_- le regole di commutazione:

$$\{L_{ij}, A_k\} = \delta_{jk}A_i - \delta_{ik}A_j, \quad \{A_i, A_j\} = -2HL_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.14)$$

Siccome le funzioni L_{ij} e A_k commutano con H , dopo l'introduzione del vettore eccentricità modificato $\tilde{A}_k = \frac{A_k}{\sqrt{-2H}}$, le regole di commutazione diventano:

$$\{L_{ij}, \tilde{A}_k\} = \delta_{jk}\tilde{A}_i - \delta_{ik}\tilde{A}_j, \quad \{\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\} = L_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.15)$$

La restrizione a S_- delle funzioni L_{ij} e \tilde{A}_k munite delle parentesi di Poisson, genera un'algebra di Lie isomorfa a $\mathfrak{so}(n+1)$. Questo si può vedere prendendo matrici M $(n+1) \times (n+1)$ di componenti M_{ij} dove $M_{ij} = L_{ij}$ per $j = 1, \dots, n$ e $M_{n+1 i} = -M_{i n+1} = \tilde{A}_i$.

Capitolo 2

Regolarizzazione

In questo capitolo si presenta uno dei metodi di regolarizzazione del problema di Kepler, dovuto a Moser ([Mos70], [MZ05]). Altre tecniche di regolarizzazione sono state proposte da Ligon-Schaaf ([LS76], [CD97]) (lo stesso metodo è stata utilizzato indipendentemente da Györgyi in [Gyö68]) e Kustaanheimo-Stiefel ([SK65], [Fon07]). I primi due metodi di regolarizzazione citati, tramite una mappa esplicita, legano il moto di Kepler n -dimensionale a geodetiche su di una sfera S^n immersa in \mathbb{R}^{n+1} . L'ultimo vale solo per $n = 3$ e costruisce una corrispondenza fra il problema di Kepler spaziale e la cosiddetta "riduzione simplettica" sotto un'azione di S^1 di un oscillatore armonico quadridimensionale. Tutte queste costruzioni rendono esplicita la simmetria del sistema.

2.1 Regolarizzazione alla Moser

Moser in [Mos70] propone una regolarizzazione che si basa sul mappare lo spazio delle fasi $T^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ del problema di Kepler n -dimensionale sul fibrato cotangente di una sfera immersa in \mathbb{R}^{n+1} , tramite il sollevamento cotangente dell'inverso della proiezione stereografica, con la peculiarità che i momenti del moto p e non le coordinate q vengono mandati nelle coordinate sulla sfera. La restrizione di tale mappa a ogni insieme di livello di energia negativa manda una riparametrizzazione temporale dei moti Kepleriani sulle geodetiche della sfera.

Fock in [Foc35] (una traduzione dell'articolo si può trovare in [Sin05]) sembra essere stato il primo a legare il problema di Kepler (in questo caso nella sua versione quantizzata) con la proiezione stereografica, al fine di rendere esplicita la simmetria $SO(4)$.

Nel caso classico, può essere che il fatto di utilizzare tale mappa a tale scopo possa essere stato suggerito dalla proprietà della proiezione stereografica di essere l'unica proiezione che manda circonferenze sulla sfera in circonferenze nel piano. Infatti, siccome la curva odografa del problema di Kepler è proprio una circonferenza, grazie a tale proprietà essa viene mappata dall'inverso della proiezione su circonferenze sulla sfera, che per un certo valore dell'energia del moto kepleriano sono cerchi massimi. Dunque, siccome il moto geodetico su di una sfera tridimensionale è invariante sotto le rotazioni quadridimensionali, allora così si potrebbe spiegare la possibile intuizione sottostante al fatto di legare, mediante la proiezione stereografica, il moto geodetico con quello kepleriano al fine di mostrare la simmetria $SO(4)$ del problema.

2.1.1 Geodetiche sulla sfera e proiezione stereografica

Sia $S^n = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\xi\|^2 = 1\}$ la sfera unitaria in \mathbb{R}^{n+1} . Si userà la notazione $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Tramite il prodotto scalare euclideo $T\mathbb{R}^{n+1}$ viene identificato con $T^*\mathbb{R}^{n+1}$. Allo stesso modo il fibrato tangente alla sfera TS^n è identificato con il fibrato cotangente ad essa T^*S^n .

Il flusso geodetico sulla sfera è descritto dalla restrizione a $\|\xi\| = 1$ dell'equazione $\xi'' + \|\xi'\|^2\xi = 0$ (si veda, ad esempio, [CB97]). Si può scrivere tale equazione come un sistema del primo ordine in

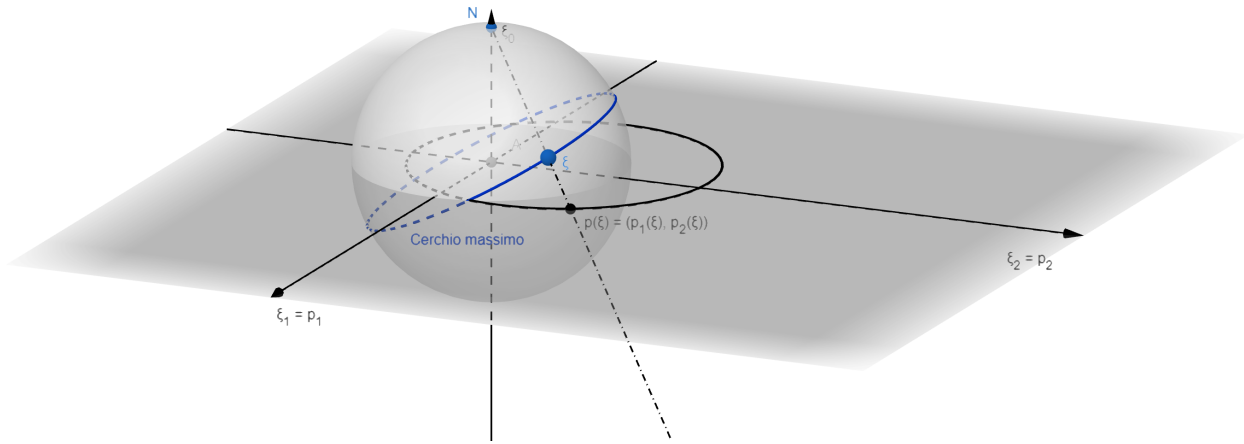


Figura 2.1: Proiezione stereografica nel caso $n = 2$. In blu vi è rappresentata una geodetica sulla sfera, le linee tratteggiate indicano la proiezione stereografica di S_0^2 sul piano $p_1 p_2$. Infine in nero è visualizzata l'immagine della geodetica attraverso la proiezione stereografica, che resta una circonferenza (in generale non centrata nell'origine). Questa circonferenza si vedrà poi essere la curva odografa del moto kepleriano.

$$T^*\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \ni (\xi, \eta):$$

$$\begin{cases} \xi' = \eta \\ \eta' = -\|\eta\|^2 \xi \end{cases} \quad (2.1)$$

Il sistema (2.1) ammette la sottovarietà invariante descritta dalle condizioni $\|\xi\| = 1$ e $\xi \cdot \eta = 0$, ovvero il fibrato cotangente T^*S^n della sfera. T^*S^n è una varietà simplettica con due forma simplettica la restrizione a T^*S^n della due forma simplettica $d\xi \wedge d\eta = \sum_{i=0}^n d\xi_i \wedge d\eta_i$ definita su $T^*\mathbb{R}^{n+1}$. Una semplice verifica mostra che la restrizione a T^*S^n del sistema di equazioni (2.1) è il sistema hamiltoniano con Hamiltoniana $\tilde{H} : T^*S^n \rightarrow \mathbb{R}$ data da:

$$\tilde{H}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \|\xi\|^2 \|\eta\|^2. \quad (2.2)$$

Si consideri ora la sfera S^n in \mathbb{R}^{n+1} privata del polo Nord:

$$S_0^n = \{\xi \in T^*\mathbb{R}^{n+1} : \|\xi\| = 1, \xi_0 \neq 1\}.$$

Il fibrato cotangente $T^*S_0^n$ è identificabile con $S_0^n \times \mathbb{R}^n$. Nel seguito sarà particolarmente rilevante il fibrato cotangente unitario:

$$T_1^*S_0^n = \{(\xi, \eta) \in T^*S_0^n : \|\eta\| = 1\}.$$

La proiezione stereografica è la mappa :

$$\sigma : S_0^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \xi \rightarrow \sigma(\xi) =: p$$

definita dalle equazioni:

$$p_i = \frac{\xi_i}{1 - \xi_0}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

ed è un diffeomorfismo.

In figura 2.1 è rappresentata, nel caso $n = 2$, l'immagine sul piano di un cerchio massimo sulla sfera S^2 tramite la proiezione stereografica.

Vale il seguente:

Teorema 2.1.

- i.) Ogni insieme di livello $S_-(E)$ di energia $E < 0$ del problema di Kepler è diffeomorfo tramite un diffeomorfismo φ_E a $T_1^*S_0^n$.
- ii.) Per ogni $E < 0$, dopo un riscaldamento temporale, la restrizione del flusso del problema di Kepler ad $S_-(E)$ è coniugato dal diffeomorfismo φ_E^{-1} al flusso geodetico a velocità unitaria su S_0^n .

Si noti che il flusso geodetico su S^n , vista come sottovarietà immersa in \mathbb{R}^{n+1} , è invariante sotto l'azione di $SO(n+1)$ su \mathbb{R}^{n+1} . Il teorema rende quindi evidente la simmetria nascosta del problema di Kepler e, in particolare, chiarisce l'invarianza sotto il gruppo di Lie $SO(4)$ del problema di Kepler spaziale regolarizzato. Essa inoltre fornisce le quantità conservate previste, come si vedrà nel capitolo 3.

Inoltre, il teorema fornisce anche la possibilità di "regolarizzare" il problema di Kepler, aggiungendo alla costruzione il polo nord della sfera e le geodetiche passanti per esso, corrispondenti ai moti di collisione.

2.1.2 Dimostrazione del teorema 2.1

Dimostrazione. Al fine di dimostrare il punto i.) si solleva la proiezione stereografica (2.3) ai fibrati cotangenti. Si mostrerà poi che la restrizione di tale sollevamento a $T_1^*S_0^n$ è un diffeomorfismo φ fra $T_1^*S_0^n$ e l'insieme di livello di energia $-\frac{1}{2}$ del problema di Kepler; l'estensione ad ogni altro insieme di livello di energia negativa sarà poi banale.

Sollevamento cotangente della proiezione stereografica

Lemma 2.1. *Il sollevamento cotangente di σ è il diffeomorfismo:*

$$T^*\sigma : T^*S_0^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad (\xi, \eta) \rightarrow T^*\sigma(\xi, \eta) =: (p, q)$$

dato da:

$$\begin{cases} p_i = \frac{\xi_i}{1 - \xi_0} \\ q_i = \eta_i(1 - \xi_0) + \xi_i\eta_0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

L'inversa $T^*\sigma^{-1}$ di tale diffeomorfismo è la mappa:

$$T^*\sigma^{-1} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow T^*S_0^n, \quad (p, q) \rightarrow T^*\sigma^{-1}(p, q) =: (\xi, \eta)$$

data da:

$$\begin{cases} \xi_0 = \frac{\|p\|^2 - 1}{\|p\|^2 + 1}, & \xi_k = \frac{2q_k}{\|p\|^2 + 1} \\ \eta_0 = q \cdot p, & \eta_k = \frac{\|p\|^2 + 1}{2}q_k - (p \cdot q)p_k \end{cases} \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

$T^*\sigma$ è un *simplettomorfismo* se su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ si prende come 2-forma simplettica $\tilde{\omega} = -dq \wedge dp$.

Dimostrazione. Il sollevamento cotangente di σ è la mappa:

$$T^*\sigma : T^*S_0^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad (\xi, \eta) \rightarrow T^*\sigma(\xi, \eta) =: (p, q),$$

definita come:

$$(T^*\sigma)(\xi, \eta) = (\sigma(\xi), T_\xi^*\sigma \cdot \eta),$$

dove $T_\xi^*\sigma = (T_{\sigma(\xi)}\sigma^{-1})^*$ è la duale algebrica dell'inversa di $T_\xi\sigma$.

Per prima cosa si calcola l'inversa di σ . Elevando al quadrato l'espressione per p_i , definita in (2.3), sommando su i da 1 a n e ricordando che $\|\xi\| = 1$, si trova:

$$\|p\|^2 = \frac{1 - \xi_0^2}{(1 - \xi_0)^2}.$$

Risolvendo questa equazione per ξ_0 , che per $\xi \in S_0^n$ ha un'unica soluzione, si giunge a:

$$\xi_0 = \frac{\|p\|^2 - 1}{\|p\|^2 + 1}.$$

Per quanto riguarda invece le componenti ξ_k con $k = 1, \dots, n$ si scrive, sempre da (2.3): $\xi_k = p_k(1 - \xi_0)$ e si sostituisce l'espressione appena trovata per ξ_0 ottenendo:

$$\xi_k = p_k \left(1 - \frac{\|p\|^2 - 1}{\|p\|^2 + 1} \right) = \frac{2p_k}{\|p\|^2 + 1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

A questo punto si deve sollevare tale diffeomorfismo ai fibrati cotangenti ai due spazi. Per fare ciò prima si solleva la mappa ai fibrati tangenti e successivamente se ne prende il duale. Sia $\psi := \sigma^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow S_0^n$. Allora la mappa tangente di ψ nel punto $p \in \mathbb{R}^n$ è quella mappa lineare:

$$T_p\psi : T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\psi(p)}S_0^n = \mathbb{R}^n, \quad q \rightarrow T_p\psi \cdot q$$

data da:

$$T_p\psi \cdot q = \psi'(p)q,$$

dove $\psi'(p)$ è la matrice jacobiana di ψ calcolata nel punto p :

$$\psi'(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial p_1}(p) & \dots & \frac{\partial \xi_1}{\partial p_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial p_1}(p) & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial p_n}(p) \\ \frac{\partial \xi_0}{\partial p_1}(p) & \dots & \frac{\partial \xi_0}{\partial p_n}(p) \end{pmatrix} \in M_{(n+1) \times n}(\mathbb{R}),$$

con, per $i, k = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial p_i}(p) = \frac{4p_i}{(\|p\|^2 + 1)^2}, \quad \frac{\partial \xi_k}{\partial p_i}(p) = \frac{2\delta_{ki}(\|p\|^2 + 1) - 4p_k p_i}{(\|p\|^2 + 1)^2}$$

Allora $\forall (\xi, \eta) \in T^*S_0^n$ si ha $T_\xi^* \sigma \cdot \eta = (T_{\sigma(\xi)}\psi)^* \cdot \eta = \psi'(\sigma(\xi))^T \eta$, da cui:

$$T^* \sigma(\xi, \eta) = (\sigma(\xi), \psi'(\sigma(\xi))^T \eta). \quad (2.6)$$

Per calcolare $\psi'(p)^T$ si utilizza il fatto che la proiezione stereografica è una mappa conforme (per definizione e proprietà delle mappe conformi si veda, ad esempio, [Car76]). Grazie a ciò si può affermare che la matrice jacobiana $\psi'(p)$ soddisfa:

$$\psi'(p)^T \psi'(p) = \lambda(p)^2 \mathbf{1}_n, \quad (2.7)$$

per una qualche funzione $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $p \rightarrow \lambda(p)$. Svolgendo il prodotto:

$$\begin{aligned} (\psi'(p)^T \psi'(p))_{ij} &= \sum_{l=0}^n \psi'(p)_{li} \psi'(p)_{lj} = \sum_{l=0}^n \frac{\partial \xi_l(p)}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_l(p)}{\partial p_j} = \\ &= \frac{\partial \xi_0(p)}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_0(p)}{\partial p_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \xi_l(p)}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_l(p)}{\partial p_j} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{16p_i p_j}{(\|p\|^2 + 1)^4} + \sum_{l=1}^n \frac{(2\delta_{li}(\|p\|^2 + 1) - 4p_l p_i)(2\delta_{lj}(\|p\|^2 + 1) - 4p_l p_j)}{(\|p\|^2 + 1)^4} = \\
 &= \frac{16p_i p_j}{(\|p\|^2 + 1)^4} + \frac{4\delta_{ij}(\|p\|^2 + 1)^2 - 16p_i p_j(\|p\|^2 + 1) + 16\|p\|^2 p_i p_j}{(\|p\|^2 + 1)^4} = \\
 &= \frac{4}{(\|p\|^2 + 1)^2} \delta_{ij}.
 \end{aligned}$$

Si trova dunque che $\lambda(p) = \frac{2}{\|p\|^2 + 1}$ e quindi:

$$\psi'(p)^T \psi'(p) = \left(\frac{2}{\|p\|^2 + 1} \right)^2 \mathbf{1}_n \quad (2.8)$$

Utilizzando la (2.8), si vede che l'equazione $q = \psi'(p)^T \eta$ è risolta da:

$$\eta = \left(\frac{\|p\|^2 + 1}{2} \right)^2 \psi'(p) q.$$

Esplicitando le componenti di η si trova, per η_0 :

$$\begin{aligned}
 \eta_0 &= \left(\frac{\|p\|^2 + 1}{2} \right)^2 \psi'(p)_{0i} q_i = \\
 &= \left(\frac{\|p\|^2 + 1}{2} \right)^2 \frac{4p_i}{(\|p\|^2 + 1)^2} q_i = p_i q_i
 \end{aligned}$$

e per η_k con $k = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
 \eta_k &= \left(\frac{\|p\|^2 + 1}{2} \right)^2 \frac{2\delta_{ki}(\|p\|^2 + 1) - 4p_k p_i}{(\|p\|^2 + 1)^2} q_i = \\
 &= \frac{(\|p\|^2 + 1)}{2} q_k - p_k (p_i q_i).
 \end{aligned}$$

Questo prova la (2.5).

Per dimostrare la (2.4) si inverte la relazione appena trovata per n_k e notando che:

$$\|p\|^2 + 1 = \frac{2p_i}{\xi_i} = \frac{2}{1 - \xi_0},$$

si ha:

$$q_i = \frac{2\eta_i}{\|p\|^2 + 1} + \frac{2\eta_0}{\|p\|^2 + 1} \frac{\xi_i}{1 - \xi_0} = \eta_i(1 - \xi_0) + \eta_0 \xi_i.$$

□

Restrizione a $T_1^* S_0^n$

Grazie al lemma 2.1 si è trovato un diffeomorfismo simplettico $T^* \sigma$ dal fibrato cotangente della sfera unitaria privata del polo nord a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, che contiene lo spazio delle fasi del problema di Kepler.

Si consideri ora l'insieme di livello $\tilde{H}^{-1}(\frac{1}{2}) \subset T^* S_0^n$, ovvero $T_1^* S_0^n$. Sia:

$$\varphi : T_1^* S_0^n \rightarrow \varphi(T_1^* S_0^n) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad (\xi, \eta) \rightarrow \varphi(\xi, \eta) := T^* \sigma|_{T_1^* S_0^n}(\xi, \eta) \quad (2.9)$$

la restrizione di $T^* \sigma$ a $T_1^* S_0^n$, che è un diffeomorfismo. Si mostra ora che $\varphi(T_1^* S_0^n) = f^{-1}(\frac{1}{2})$ con

$$f := \tilde{H} \circ T^* \sigma^{-1} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Esplicitamente, $\forall (\xi, \eta) \in T_1^* S_0^n$, dalla (2.5) si ha:

$$f(\varphi(\xi, \eta)) = (\tilde{H} \circ T^* \sigma^{-1})(\varphi(\xi, \eta)) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \eta_j^2 = \frac{1}{2}.$$

E dunque $\varphi(T_1^* S_0^n) = f^{-1}(\frac{1}{2})$.

Inoltre si ha che l'insieme di livello $f^{-1}(\frac{1}{2})$ corrisponde all'insieme di livello di energia $-\frac{1}{2}$ del problema di Kepler. Infatti:

$$f(p, q) = \frac{1}{2} \left((q \cdot p)^2 + \frac{(\|p\|^2 + 1)^2}{4} \|q\|^2 + (q \cdot p)^2 \|p\|^2 - (\|p\|^2 + 1)(q \cdot p)^2 \right)$$

da cui:

$$f(p, q) = \frac{(\|p\|^2 + 1)^2 \|q\|^2}{8} \tag{2.10}$$

Ora, notando che:

$$f(q, p) = \frac{(\|p\|^2 + 1)\|q\|^2}{8} = \frac{1}{2} \iff \frac{\|p\|^2 + 1}{2} \|q\| = 1,$$

e dividendo per $\|q\|$ (passaggio possibile in quanto $q = 0$ non è soluzione di $f = \frac{1}{2}$), si giunge a:

$$\frac{\|p\|^2}{2} - \frac{1}{\|q\|} = -\frac{1}{2},$$

cioè $f^{-1}(\frac{1}{2}) = H^{-1}(-\frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n$ con H hamiltoniana del problema di Kepler.

Dunque il primo punto del teorema è dimostrato per $E = -\frac{1}{2}$ in quanto la funzione $\varphi_{-\frac{1}{2}} := \varphi$, con φ definita in (2.9), è un diffeomorfismo e mappa $T_1^* S_0^n$ nell'insieme di livello di energia $-\frac{1}{2}$ del problema di Kepler.

Si passa ora a dimostrare il secondo punto del teorema.

Coniugazione di flussi

La mappa f è la funzione hamiltoniana coniugata alla (2.2) da $T^* \sigma$. Le equazioni del moto per f sono:

$$p'_i = \frac{\partial f(p, q)}{\partial q_i}, \quad q'_i = -\frac{\partial f(p, q)}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.11}$$

Ci si restringe ora a $f^{-1}(\frac{1}{2})$. Siccome le equazioni (2.11) dipendono solo dal gradiente di f , possiamo sostituire a f una qualsiasi $u(f)$, con $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $u'(\frac{1}{2}) = 1$; in quanto su $f = \frac{1}{2}$ il gradiente di f e di $u(f)$ coincidono. Prendendo $u(f) = \sqrt{2f} - 1$ si produce la Hamiltoniana $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con:

$$k(p, q) = \frac{(\|p\|^2 + 1)\|q\|}{2} - 1.$$

La restrizione a $f^{-1}(\frac{1}{2})$ delle (2.11) coincide dunque con la restrizione a $k^{-1}(0)$ delle equazioni:

$$p'_i = \frac{\partial k(p, q)}{\partial q_i}, \quad q'_i = -\frac{\partial k(p, q)}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.12}$$

Perciò, se X_k è il campo vettoriale hamiltoniano di k , la restrizione del flusso di X_k all'insieme di livello per cui $k = 0$ è coniugato da φ^{-1} alla restrizione del flusso geodetico su $T_1^* S_0^n$.

Riscaldamento di X_k

Si indichi con T il fibrato cotangente ad \mathbb{R}^n privato della sezione zero, ovvero:

$$T = \{(p, q) \in T^*\mathbb{R}^n : q \neq 0\}. \quad (2.13)$$

Riscaldando il campo vettoriale $X_k = \left(\frac{\partial k}{\partial q}(p, q), -\frac{\partial k}{\partial p}(p, q)\right)$ al campo vettoriale¹ $-\frac{1}{\|q\|}X_k$, definito su T , si ha che la restrizione a $k = 0$ di $-\frac{1}{\|q\|}X_k$ corrisponde alla restrizione a $h = -\frac{1}{2}$ del campo vettoriale hamiltoniano X_h di hamiltoniana $h : T \rightarrow \mathbb{R}$ data da:

$$h(p, q) := \frac{1}{2}\|p\|^2 - \frac{1}{\|q\|}. \quad (2.14)$$

Infatti:

$$h(p, q) = \frac{1}{\|q\|} \left(\frac{\|p\|^2}{\|q\|} - 1 \right) = \frac{k(p, q)}{\|q\|} - \frac{1}{2}.$$

L'Hamiltoniana (2.14) su $(p, q) \in h^{-1}(-\frac{1}{2})$ genera le equazioni del moto del problema di Kepler. In sintesi si ha quindi che:

$$\varphi^* \left(-\|q\|X_h \Big|_{h^{-1}(-\frac{1}{2})} \right) = X_{\tilde{H}}|_{T_1 S_0^n},$$

dove con φ^*X , con X campo vettoriale, si indica il pull-back di X tramite φ .

Ponendo dunque $E = h = -\frac{1}{2}$ e $\varphi_E^{-1} := \varphi^{-1}$ si è mostrato che il campo vettoriale $-\|q\|X_h$ ristretto a $E = -\frac{1}{2}$ è coniugato da φ_E^{-1} al flusso geodetico su $T_1^*S_0^n$.

Il caso generale di energia $E = -\frac{1}{2\lambda^2}$ si riduce al caso trattato mediante il cambio di variabili:

$$\begin{cases} q \rightarrow \lambda^2 q \\ p \rightarrow \frac{p}{\lambda} \\ t \rightarrow \lambda^3 t. \end{cases} \quad (2.15)$$

□

2.1.3 Regolarizzazione

Il flusso geodetico su $T_1^*S_0^n$ è contenuto nel flusso geodetico su $T_1^*S^n$. Dunque aggiungendo alla costruzione fino a qui fatta i moti mancanti, ovvero quelli passanti per il polo nord, si ha una possibile interpretazione dei moti di collisione. Infatti, i moti kepleriani associati alle geodetiche passanti per il polo nord sono ellissi degeneri che giacciono su rette passanti per l'origine. In questo caso il vettore tangente unitario η al polo nord può essere interpretato come la definizione di una direzione a $q = 0$. Ciò può essere utile per studiare i moti che passano vicini alle collisioni. Curiosamente, quando nelle applicazioni si vuole regolarizzare il problema di Kepler si preferisce la costruzione di Kustaanheimo-Stiefel rispetto a quella di Moser e non ne è chiaro il motivo.

2.1.4 Interpretazione geometrica per $n = 2$

Nel caso di $n = 2$ si ha che la mappa φ^{-1} coniuga il problema di Kepler piano ristretto a $S_-(-\frac{1}{2})$ al flusso geodetico su $T_1^*S_0^2$. È possibile quindi, in questo caso, cercare di fornire un'interpretazione geometrica dei risultati.

Durante tutta la seguente discussione ci si porrà sull'insieme di livello $S_-(-\frac{1}{2})$.

¹L'aggiunta del segno meno è giustificata dal fatto che la mappa (2.4) è antisimplettica rispetto alla struttura canonica di $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ data dalla 2-forma simplettica $\omega = dq \wedge dp$

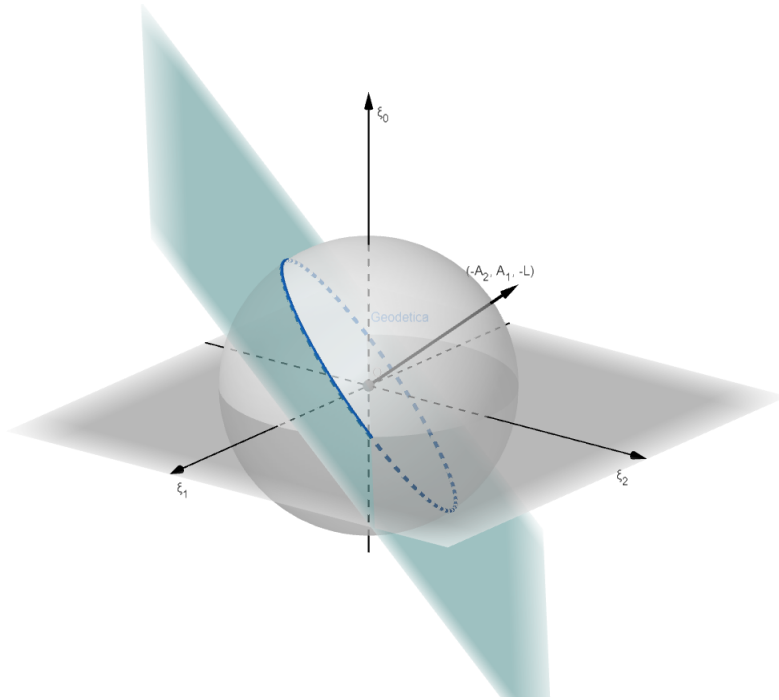


Figura 2.2: Rappresentazione del vettore $N = (-A_2, A_1, -L)$, del piano perpendicolare (in azzurro) e del moto geodetico corrispondente (in blu).

Una geodetica $s \rightarrow (\xi(s), \eta(s)) \in T_1^*S_0^2$ è determinata dal piano in $\mathbb{R}^3 \ni S_0^2$ sul quale giace, il quale è ortogonale al vettore costante $\xi(s) \times \eta(s)$ durante tutto il moto. Se $(\xi, \eta) = (T^*\sigma)^{-1}(q, p)$ si trova:

$$\begin{aligned} \xi_2\eta_0 - \xi_0\eta_2 &= \frac{2p_2}{\|p\|^2 + 1}(q \cdot p) - \frac{\|p\|^2 - 1}{\|p\|^2 + 1}q_1 \left(\frac{\|p\|^2 + 1}{2}q_2 - (q \cdot p)p_2 \right) = \\ &= -\frac{\|p\|^2 - 1}{2}q_2 + (q \cdot p)p_2 = -A_2. \\ \xi_0\eta_1 - \xi_1\eta_0 &= \frac{\|p\|^2 - 1}{2}q_1 - \frac{\|p\|^2 - 1}{\|p\|^2 + 1}(q \cdot p)p_1 - \frac{2p_1}{\|p\|^2 + 1}(q \cdot p) = \\ &= \frac{\|p\|^2 - 1}{2}q_1 - (q \cdot p)p_1 = A_1. \\ \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 &= \frac{2p_1}{\|p\|^2 + 1} \left(\frac{\|p\|^2 + 1}{2}q_2 - ((q \cdot p)p_2) \right) - \frac{2p_2}{\|p\|^2 + 1} \left(\frac{\|p\|^2 + 1}{2} - (q \cdot p)p_1 \right) = \\ &= p_1q_2 - p_2q_1 = -L. \end{aligned}$$

Perciò il vettore normale al piano delle geodetiche è $N(q, p) = (-A_2(q, p), A_1(q, p), -L(q, p))$ ed è costante lungo i moti kepleriani.

Il moto geodetico con dati iniziali $(\xi(0), \eta(0))$ si svolge quindi su di un piano ortogonale al vettore $N(q(\xi(0), \eta(0)), p(\xi(0)))$ (figura 2.2).

Da questo tipo di rappresentazione è chiaro come facendo tendere il momento angolare a zero, il cerchio massimo su cui ha luogo il moto geodetico tende ad essere verticale. Aggiungendo il polo Nord alla sfera si avrebbe quindi, per $L = 0$, una geodetica che corrisponde ai moti di collisione.

Si vogliono ora rappresentare in $T_1^*S_0^2$ vari insiemi di moti kepleriani:

- i.) Una geodetica percorsa con il verso contrario.* Si vede dalle formule (2.5) che questa situazione si ottiene cambiando il segno a q . Questo corrisponde, nelle orbite kepleriane, a considerare una stessa ellisse, ma ruotata di π nel piano e percorsa al contrario (figura 2.3).

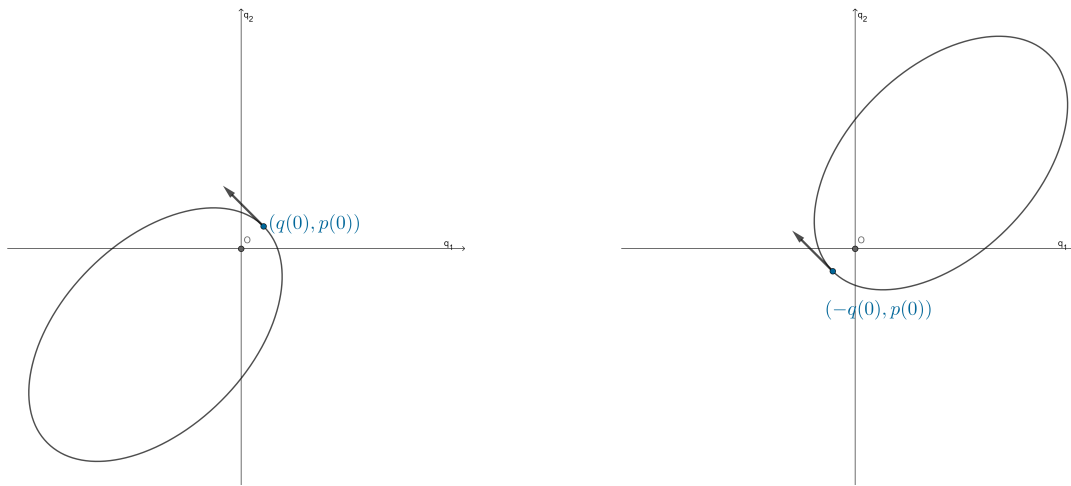


Figura 2.3: Rappresentazione di due ellissi kepleriane con posizioni iniziali opposte e ruotate di π l'una rispetto all'altra, corrispondenti alla stessa geodetica percorsa in versi opposti.

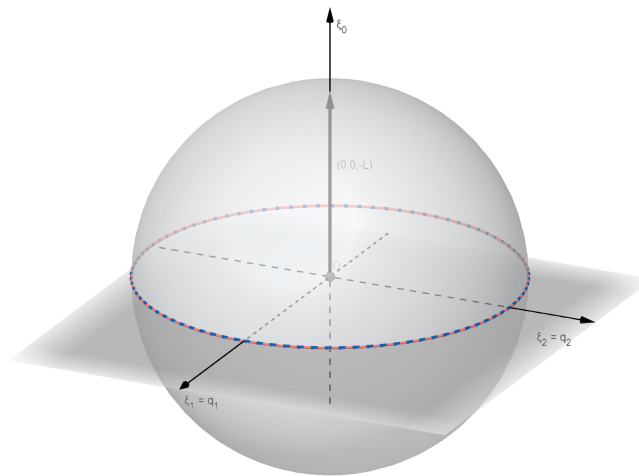


Figura 2.4: Rappresentazione dei moti circolari: in blu è disegnata la geodetica e in rosso, sovrapposta, la circonferenza su cui ha luogo il moto kepleriano.

ii.) *I moti circolari sul piano*, i quali avvengono per $A_1 = A_2 = 0$. Essi corrispondono al moto sull'equatore della sfera (figura 2.4). Questo riflette il fatto che non c'è differenza dal punto di vista dinamico tra le orbite ellittiche e quelle circolari, e che la singolarità rappresentata da queste ultime dal punto di vista dei tori bidimensionali di Liouville-Arnold è artificiale.

iii.) *Infine, tutte le ellissi kepleriane con uguale semiasse maggiore ed eccentricità, differenti solo per l'orientazione nel piano*. Siccome ci si è già messi sull'insieme di livello di energia $-\frac{1}{2}$, ciò si ottiene fissando il valore di $L \neq 0$ e lasciando variare $A = (A_1, A_2)$. Così facendo si ha, sulla sfera, che il vettore perpendicolare al piano contenente il moto varia su di una circonferenza \mathcal{C} che giace a quota $\xi_0 = L$ su una falda di un cono con asse di simmetria l'asse ξ_0 (modificando il valore di L cambierebbe la quota alla quale si trova la circonferenza). Variare il valore di A corrisponde, sullo spazio delle configurazioni di Kepler, a ruotare l'orientazione del pericentro dell'ellisse (si veda figura 2.5). Questa è una rappresentazione dei tori bidimensionali del problema di Kepler utilizzati per la costruzione delle variabili azione-angolo nell'ambito del teorema di Liouville-Arnold², in cui un angolo, tradizionalmente denotato con g , è quello formato dal vettore

²Va però ricordato che i tori di Liouville-Arnold nel problema di Kepler in realtà non sono intrinsecamente definiti

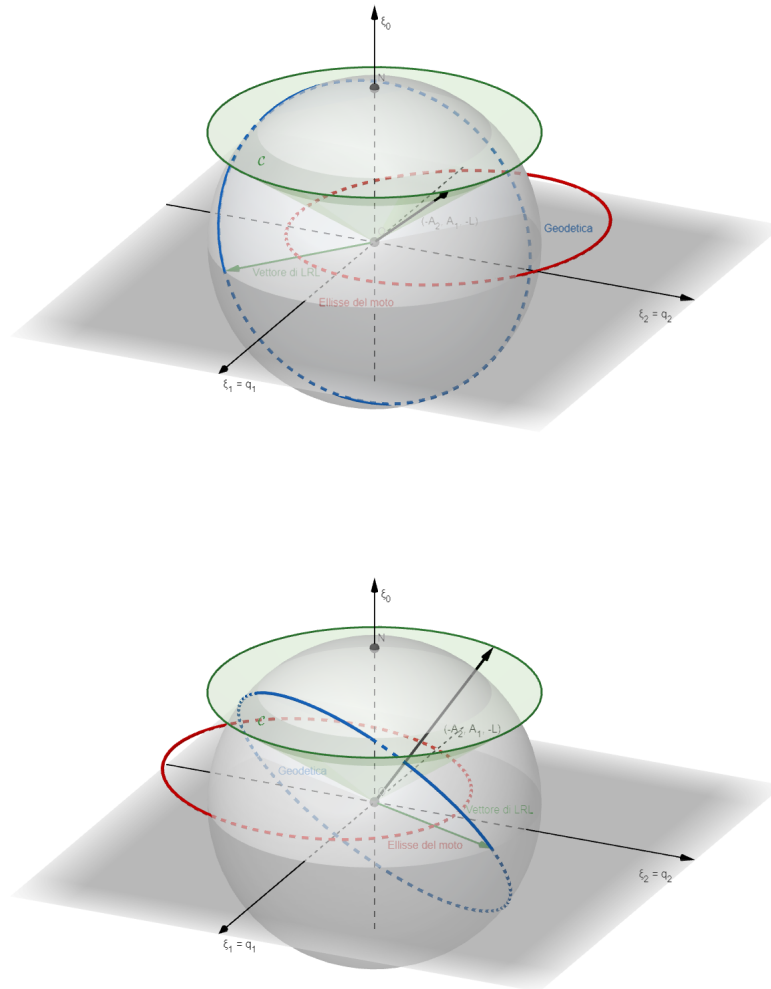


Figura 2.5: Rappresentazione a $L \neq 0$ fissato di due diversi moti per due valori differenti di $A = (A_1, A_2)$. Sono visualizzati in blu un cerchio massimo e in rosso l'ellisse kepleriana, ricavata dai valori di vettore eccentricità, energia e momento angolare. In verde sono invece rappresentati il cono su cui giace la circonferenza \mathcal{C} sulla quale prende valori il vettore N e il vettore di Laplace-Runge-Lenz (abbreviato in figura con LRL).

di Laplace-Runge-Lenz con l'asse x e l'altro, tradizionalmente denotato con l , è una coordinata sull'ellisse. Sul problema regolarizzato, questi angoli diventano la scelta di un angolo sulla circonferenza \mathcal{C} e di una coordinata sulla geodetica.

dalla dinamica in quanto quest'ultima crea solamente le orbite periodiche.

Capitolo 3

Quantità conservate

Nel capitolo 2 si è trovata una corrispondenza fra il problema di Kepler e un sistema che ammette una chiara simmetria $SO(n+1)$. Si vuole ora utilizzare la costruzione di Moser al fine di mappare gli integrali primi derivanti dalla simmetria $SO(n+1)$ del flusso geodetico negli integrali primi di Kepler. Per farlo, si introducono innanzitutto delle nozioni di base derivanti dalla geometria simplettica a riguardo della costruzione della mappa momento, la quale permette di calcolare le quantità conservate in un sistema hamiltoniano che presenta una simmetria sotto una qualche azione di un gruppo di Lie. Successivamente si utilizzano tali nozioni al fine di ricavare gli integrali primi che la simmetria $SO(n+1)$ del flusso geodetico fornisce. Infine si utilizza la costruzione di Moser per mappare tali integrali primi in quelli di Kepler.

Per ulteriori nozioni e approfondimenti su teoria di gruppi di Lie e mappa momento si veda [Fas20], [OR03], [MR02], [AM78].

3.1 Mappa momento

3.1.1 Generatore infinitesimo, azioni simplettiche ed Hamiltoniane

Definizione 3.1. *Sia:*

$$\Psi : G \times M \rightarrow M, \quad (g, m) \rightarrow \Psi(g, m)$$

l'azione di un gruppo di Lie G su una varietà M . Il generatore infinitesimo dell'azione associato al vettore $\xi \in \mathfrak{g}$ dell'algebra è il campo vettoriale ξ^M su M definito da¹:

$$\xi^M(m) := \frac{d}{dt} \Psi_{\exp(t\xi)}(m)|_{t=0}. \quad (3.1)$$

Definizione 3.2. *Un'azione di un gruppo di Lie G su una varietà simplettica (M, ω) è chiamata simplettica se, per ogni $g \in G$, la mappa:*

$$\Psi_g : M \rightarrow M, \quad m \rightarrow \Psi_g(m) := \Psi(g, m)$$

è un *simplettomorfismo*, ovvero:

$$\Psi_g^* \omega = \omega \quad \forall g \in G.$$

Esse sono caratterizzate dal fatto:

Proposizione 3.1. *Un'azione è simplettica se e solo se tutti i suoi generatori infinitesimi sono localmente Hamiltoniani*

¹Si ricorda che se si denota con $L_g : G \rightarrow G$ la traslazione a sinistra di $g \in G$ e con X_ξ il campo vettoriale invariante a sinistra associato al vettore $\xi \in \mathfrak{g}$: $X_\xi(g) = T_e L_g \cdot \xi$, allora $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ è la mappa esponenziale, definita da: $\exp(\xi) := \Phi_1^{X_\xi}(e)$.

Siccome non tutti i campi vettoriali localmente hamiltoniani sono hamiltoniani si motiva la seguente:

Definizione 3.3. *Un'azione simplettica è Hamiltoniana se tutti i suoi generatori infinitesimi sono campi vettoriali Hamiltoniani.*

3.1.2 Definizione della mappa momento

Sia Ψ un'azione simplettica ed Hamiltoniana di un gruppo di Lie G su una varietà simplettica (M, ω) . Allora, siccome per ogni $\xi \in \mathfrak{g}$ il generatore infinitesimo ξ^M è Hamiltoniano, si può scegliere una Hamiltoniana $J_\xi \in C^\infty(M)$ di ξ^M . Se M è connessa ogni scelta di J_ξ differisce dall'altra per una costante e, inoltre, è possibile scegliere tale costante in modo che la mappa $\mathfrak{g} \ni \xi \rightarrow J_\xi \in C^\infty(M)$ sia lineare. Vale infatti la seguente:

Proposizione 3.2. *Sia data un'azione Ψ Hamiltoniana su (M, ω) varietà simplettica connessa, allora esiste una mappa lineare:*

$$\mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M), \quad \xi \rightarrow J_\xi$$

tale che J_ξ è una Hamiltoniana di ξ^M .

Dimostrazione. Inizialmente si osservi che, se Ψ è un'azione di un gruppo di Lie G su una (qualsiasi) varietà differenziale M , allora la mappa:

$$\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad \xi \rightarrow \xi^M$$

che associa ad un vettore ξ dell'algebra il corrispondente generatore infinitesimo è lineare. Infatti, se si indica con Ψ^m la mappa:

$$\Psi^m : G \rightarrow M, \quad g \rightarrow \Psi^m(g) := \Psi(g, m),$$

si ha:

$$\begin{aligned} \xi^M(m) &= \frac{d}{dt} \Psi_{\exp(t\xi)}(m)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \Psi^m(\exp(t\xi))|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} (\Psi^m \circ \exp(t \cdot))(\xi)|_{t=0} = T_{\exp(t\xi)} \Psi^m \cdot \frac{d}{dt} \exp(t\xi)|_{t=0} = \\ &= T_e \Psi^m \cdot X_\xi(e) = T_e \Psi^m \cdot \xi. \end{aligned}$$

Si supponga ora che l'azione sia hamiltoniana. Al fine di costruire J si scelga una base η_1, \dots, η_n di \mathfrak{g} e delle Hamiltoniane $J_{\eta_1}, \dots, J_{\eta_n}$ dei generatori infinitesimi $(\eta_1)^M, \dots, (\eta_n)^M$. Per ogni $\xi \in \mathfrak{g}$ si ha, in modo unico, $\xi = c_j \eta_j$ con $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ e dunque $\xi^M = c_j (\eta_j)^M$. Definendo allora $J_\xi := c_j J_{\eta_j}$ si ha la tesi. \square

Nelle ipotesi della proposizione 3.2, per ogni $m \in M$ la mappa $\xi \rightarrow J_\xi(m)$ è una mappa lineare $\mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ ed è dunque un elemento di \mathfrak{g}^* . Pertanto:

Definizione 3.4. *Si chiama mappa momento dell'azione Ψ la mappa:*

$$J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*, \quad m \rightarrow J(m)$$

con:

$$J(m) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi \rightarrow J_\xi(m).$$

Essa gode di un'importante proprietà:

Proposizione 3.3. *Sia Ψ un'azione Hamiltoniana su di una varietà simplettica (M, ω) . Se $H \in C^\infty(M)$ è Ψ -invariante, ovvero:*

$$H \circ \Psi_g = H \quad \forall g,$$

allora ogni mappa momento J di Ψ è costante lungo le curve integrali di X_H :

$$J \circ \Phi_t^X = J \quad \forall t.$$

Dimostrazione. Bisogna mostrare che, per ogni $\xi \in \mathfrak{g}$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha : $\langle J \circ \Phi_t^{X_H}, \xi \rangle = \langle J, \xi \rangle$, ovvero che $J_\xi \circ \Phi_t^{X_H} = J_\xi \circ$, equivalentemente, $\frac{d}{dt} J_\xi \circ \Phi_t^{X_H} = 0$. Denotando con $L_X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ la derivata di Lie di funzioni lungo il campo vettoriale X si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_\xi \circ \Phi_t^{X_H} &= (L_{X_H} J_\xi) \circ \Phi_t^{X_H} = -\omega(X_H, X_{J_\xi}) \circ \Phi_t^{X_H} = \\ &= -\omega(X_H, \xi^M) \circ \Phi_t^{X_H} = -(L_{\xi^M} H) \circ \Phi_t^{X_H}. \end{aligned}$$

A questo punto, siccome H è Ψ -invariante, allora:

$$H \circ \Psi_{\exp(t\xi)} = H, \quad \forall t, \xi$$

e quindi $\frac{d}{dt} H \circ \Phi_t^{X_H} = 0, \forall t, \xi$ da cui $L_{\xi^M} H = 0$ per ogni ξ . \square

Dunque in un sistema hamiltoniano il fatto che la Hamiltoniana del sistema sia invariante sotto una qualche azione di gruppo si traduce nell'esistenza di un integrale primo a valori in uno spazio vettoriale, ovvero il duale dell'algebra di Lie del gruppo. Questo fatto generalizza il teorema di Noether classico, che si ritrova come caso particolare quando si ha a che fare con sollevamenti cotangenti di azioni di sottogruppi ad un parametro.

3.1.3 Mappa momento per l'azione sollevata di $\text{SO}(n)$ su $T^*\mathbb{R}^m$

In 2.1.1 si è già osservato che il flusso geodetico è invariante sotto l'azione sollevata di $\text{SO}(n+1)$ su $T^*\mathbb{R}^{n+1}$. Al fine di ricavare gli integrali primi che tale simmetria fornisce si costruisce la mappa momento associata all'azione di $\text{SO}(m)$ su $T^*\mathbb{R}^m \ni (\xi, \eta)$. Per farlo consideriamo l'azione lineare su \mathbb{R}^m di $\text{SO}(m) \ni A$:

$$\Psi_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \xi \rightarrow \Psi_A(\xi),$$

data da:

$$\Psi_A(\xi) = A\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^m.$$

L'azione sollevata a $T^*\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ è:

$$\Psi_A^{T^*\mathbb{R}^m} : T^*\mathbb{R}^m \rightarrow T^*\mathbb{R}^m, \quad (\xi, \eta) \rightarrow \Psi_A^{T^*\mathbb{R}^m}(\xi, \eta),$$

ed è data da:

$$\Psi_A^{T^*\mathbb{R}^m}(\xi, \eta) = (A\xi, A^{-T}\eta), \quad (\xi, \eta) \in T^*\mathbb{R}^m.$$

$\text{SO}(m)$ è un gruppo di matrici, sottogruppo di $\text{GL}(m)$. Quindi lo spazio tangente a $\text{SO}(m)$ nell'identità, che dotato del commutatore fra matrici forma l'algebra di Lie $\mathfrak{so}(m)$, è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $L(m)$ delle matrici $m \times m$. In particolare si ha $\mathfrak{so}(m) \cong \text{skew}(m)$, dove con $\text{skew}(m)$ si indica l'insieme delle matrici antisimmetriche $m \times m$. Gli elementi di $\mathfrak{so}(m)$ verranno quindi identificati con matrici $V \in \text{skew}(m)$.

Siccome la mappa esponenziale di $\text{GL}(m)$ (e di tutti i suoi sottogruppi) è l'esponenziale di matrice, il generatore infinitesimo associato ad un vettore $V \in \mathfrak{so}(m)$ è:

$$V^{T^*\mathbb{R}^m}(\xi, \eta) = (Vq, -V^T p).$$

Per definizione della struttura simplettica su $T^*\mathbb{R}^m$ data dalla 2-forma simplettica $\omega = d\xi \wedge d\eta$, il campo vettoriale hamiltoniano con hamiltoniana J_V valutato in un punto $(\xi, \eta) \in T^*\mathbb{R}^m$ è dato da:

$$X_{J_V}(\xi, \eta) = \left(\frac{\partial J_V(\xi, \eta)}{\partial \eta}, -\frac{\partial J_V(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right).$$

Da cui la condizione $X_{J_V} = V^{T^*\mathbb{R}^m}$ implica che $J_V(\xi, \eta) = \eta \cdot V\xi$.

La mappa momento $J : T^*\mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{g}^*$ soddisfa quindi $J_V(\xi, \eta) = \eta \cdot V\xi$ per ogni $V \in \mathfrak{so}(m)$.

Ricordando che $V \in \mathfrak{so}(m) \cong \text{skew}(m)$ allora:

$$\eta \cdot V\xi = \eta_i V_{ij} \xi_j = \frac{1}{2}(\eta_i \xi_j - \eta_j \xi_i) V_{ij}$$

chiamando $F(\xi, \eta)$ la matrice (antisimmetrica) con componenti $F(\xi, \eta)_{ij} = \eta_i \xi_j - \eta_j \xi_i$ si ha:

$$\frac{1}{2}(\eta_i \xi_j - \eta_j \xi_i) V_{ij} = \frac{1}{2} \text{tr}(F^T V)$$

e, siccome su $L(m)$ l'applicazione $(A, B) \rightarrow \text{tr}(A^T B)$ con $A, B \in L(m)$ è un prodotto scalare, se si identifica $\text{skew}(m)^*$ con $\text{skew}(m)$ mediante tale prodotto, allora, moltiplicando per un fattore due e cambiando di segno si trova:

$$J(\xi, \eta) = -F(\xi, \eta),$$

da cui:

$$J(\xi, \eta)_{ij} = \xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (3.2)$$

ovvero le componenti del momento angolare in dimensione m .

3.2 Integrali primi di Kepler

Ponendo $m = n + 1$, le (3.2) sono integrali primi del flusso geodetico su T^*S^n . Grazie al teorema 2.1 il flusso geodetico ristretto a $T_1^*S_0^n$ è coniugato da φ ad una riparametrizzazione temporale del flusso del problema di Kepler con energia $H = -\frac{1}{2}$. Si passano quindi in rassegna i calcoli che permettono di derivare le componenti del momento angolare e del vettore di Laplace-Runge-Lenz a partire dalle (3.2).

3.2.1 Derivazione di momento angolare e vettore di Laplace-Runge-Lenz

Si denoti con $\tilde{J} : T_1^*S_0^n \rightarrow \mathfrak{so}(n+1)^*$ la restrizione a $T_1^*S_0^n$ della mappa momento relativa al sollevamento cotangente dell'azione di $\text{SO}(n+1)$ su $T^*\mathbb{R}^{n+1}$. Le sue componenti \tilde{J}_{ij} sono la restrizione a $T_1^*S_0^n$ delle:²

$$\tilde{J}(\xi, \eta)_{ij} = \xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i, \quad i, j = 0, 1, \dots, n,$$

ricavate in 3.1.3.

Sia invece: $G : H^{-1}(-\frac{1}{2}) \rightarrow \mathfrak{so}(n+1)^*$, il pull-back tramite φ di \tilde{J} :

$$G = \tilde{J} \circ \varphi^{-1}$$

dove φ è definita in (2.9).

Le componenti G_{ij} sono integrali primi del problema di Kepler per ristretto a $H^{-1}(-\frac{1}{2})$.

Per $i, j = 1, \dots, n$ si trovano le componenti del momento angolare:³

$$G(q, p)_{ij} = \frac{2p_i}{\|p\|^2 + 1} \left(\frac{\|p\|^2 + 1}{2} q_j - (q \cdot p) p_j \right) - (i \leftrightarrow j) = p_i q_j - p_j q_i \quad (3.3)$$

dove nell'ultima uguaglianza è stato utilizzato il fatto che la quantità $\frac{2(q \cdot p)}{\|p\|^2 + 1} p_i p_j$ è simmetrica per scambio degli indici i e j .

Per quanto riguarda invece le componenti $\tilde{J}_{0k} = \xi_0 \eta_k - \xi_k \eta_0$ per $k = 1, \dots, n$ si ha:

$$G(q, p)_{0k} = \frac{\|p\|^2 - 1}{\|p\|^2 + 1} \left(\frac{\|p\|^2 + 1}{2} q_k - (q \cdot p) p_k \right) - \frac{2p_k}{\|p\|^2 + 1} (q \cdot p) =$$

²Al fine di proseguire con la notazione della sezione 2.1 si chiama ξ_0 l'ultima componente di un vettore $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$.

³Con il simbolo $(i \leftrightarrow j)$ si indica la ripetizione della quantità precedente con gli indici i e j scambiati.

$$= \frac{1}{2}(\|p\|^2 - 1)q_k - \frac{p_k}{\|p\|^2 + 1}(q \cdot p)\|p\|^2 - \frac{p_k}{\|p\|^2 + 1}(q \cdot p),$$

da cui:

$$G(q, p)_{0k} = \frac{1}{2}(\|p\|^2 - 1)q_k - (q \cdot p)p_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

In questo modo si è dimostrato che le (3.3) e le (3.4) sono integrali primi solo su $H^{-1}(-\frac{1}{2})$. Ovviamente il momento angolare lo è per tutti i valori dell'energia in quanto derivante dall'invarianza per rotazioni del potenziale $-\frac{1}{\|q\|}$. Per quanto riguarda le funzioni (3.4) invece si ha che:

$$\begin{aligned} \{H, G_{0k}\}(q, p) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} \frac{\partial G(q, p)_{0k}}{\partial p_i} - \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i} \frac{\partial G(q, p)_{0k}}{\partial q_i} \right) = \\ &= \sum_{i=i}^n \left[\frac{q_i}{\|q\|^3} (p_i q_k - q_i p_k - (q \cdot p)\delta_{ik}) - p_i \left(\frac{1}{2}(\|p\|^2 - 1)\delta_{ik} - p_i p_k \right) \right] = \\ &= -\frac{p_k}{\|q\|} + \frac{\|p\|^2}{2} p_k + \frac{p_k}{2} = p_k \left(H(q, p) + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Questo calcolo mostra che le componenti di:

$$A(q, p)_k := G_{0k}(q, p) + q_k \left(H(q, p) + \frac{1}{2} \right) = \|p\|^2 q_k - (q \cdot p)p_k - \frac{q_k}{\|q\|},$$

soddisfano:

$$\begin{aligned} \{H, A_k\}(q, p) &= \{H, G_{0k}\}(q, p) + \{H, q_k\}(q, p) \left(H(q, p) + \frac{1}{2} \right) = \\ &= \{H, G_{0k}\}(q, p) - p_k \left(H(q, p) + \frac{1}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Perciò le funzioni A_k , corrispondenti alle componenti del vettore di Laplace-Runge-Lenz, sono integrali primi per ogni valore di energia.

3.2.2 Caso tridimensionale

Se $n = 3$ si ha che il sistema di Kepler regolarizzato presenta una simmetria $SO(4)$, da cui derivano le seguenti costanti del moto:

$$\begin{aligned} G(q, p)_{ij} &= p_i q_j - p_j q_i, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ A(q, p)_k &= \|p\|^2 q_k - (q \cdot p)p_k - \frac{q_k}{\|q\|}, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Le G_{ij} sono componenti di una matrice G antisimmetrica 3×3 . Nel caso tridimensionale l'algebra di Lie formata da $\text{skew}(3)$ con prodotto dato dal commutatore fra matrici è isomorfa a \mathbb{R}^3 con il prodotto vettore, con isomorfismo:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -G_{21} & G_{13} \\ G_{21} & 0 & -G_{32} \\ -G_{13} & G_{32} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{G} = \begin{pmatrix} G_{32} \\ G_{13} \\ G_{21} \end{pmatrix}.$$

Si possono quindi identificare (a meno del segno) le G_{ij} con il vettore:

$$\hat{G}(q, p) := L(q, p) = q \times p,$$

ritrovando come quantità conservata l'usuale momento angolare in tre dimensioni.

Per quanto riguarda invece le funzioni A_k , utilizzando la (1.11) si giunge, come già visto, al vettore di Laplace-Runge-Lenz:

$$A(q, p) = p \times L(q, p) - \frac{q}{\|q\|}.$$

Si conclude perciò affermando che la simmetria $SO(4)$ del problema di Kepler regolarizzato, resa esplicita grazie alla costruzione di Moser, conduce ad una naturale deduzione delle quantità conservate nel problema di Kepler spaziale, compreso il vettore di Laplace-Runge-Lenz; il quale non deriva dalla semplice invarianza per rotazioni del potenziale.

Bibliografia

- [AM78] R. Abraham e J.E. Marsden. *Foundation of Mechanics*. American Mathematical Society, 1978. ISBN: 978-0821868751.
- [Arn10] V.I. Arnold. *Metodi matematici della meccanica classica*. Editori Riuniti, 2010. ISBN: 978-88-6473-204-6.
- [Car76] M.P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976. ISBN: 978-0132125895.
- [CB97] R.H. Cushman e L.M. Bates. *Global Aspects of Classical Integrable System*. Springer Science, 1997. ISBN: 978-3-0348-9817-1.
- [CD97] R.H. Cushman e J.J. Duistermaat. “A Characterization of the Ligon-Schaaf Regularization Map.” *Communication on Pure and Applied Mathematics* 50.8 (1997), pp. 773–787. DOI: [10.1002/\(SICI\)1097-0312\(199708\)50:8<773::AID-CPA3>3.0.CO;2-3](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0312(199708)50:8<773::AID-CPA3>3.0.CO;2-3).
- [Fas20] F. Fassò. “Lie Groups and Symmetry”. unpublished. 2020.
- [Foc35] V. Fock. “Zur Theorie des Wasserstoffatoms”. *Zeitschrift für Physik* 98 (1935), pp. 145–154. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01336904>.
- [Fon07] D. Fontanari. “L’atomo d’idrogeno in un debole campo elettromagnetico, uno studio classico tramite la teoria di Nekhoroshev”. Tesi di laurea mag. Università di Padova, 2007.
- [Gyö68] G. Györgyi. “Kepler’s equation, Fock variables, Baccry’s generators and Dirac brackets.” *Il Nuovo Cimento A (1971-1996)* 53 (1968), pp. 717–736. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02721718>.
- [Ham47] W.R. Hamilton. “The hodograph or a new method of expressing in symbolic language the Newtonian law of attraction”. *Proceeding of the Royal Irish Academy* 3 (1847), pp. 344–353.
- [LS76] T. Ligon e M. Schaaf. “On the global symmetry of the classical Kepler problem”. *Reports on Mathematical Physics* 9.3 (1976), pp. 281–300.
- [Mar12] C.M. Marle. “A property of conformally Hamiltonian vector fields; application to the Kepler problem.” *AIMS Journal* 4.2 (2012). DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1011.5731>.
- [Mil83] J. Milnor. “On the Geometry of the Kepler Problem”. *The American Mathematical Monthly* 90.6 (1983), pp. 353–365. DOI: <https://doi.org/10.2307/2975570>.
- [Mos70] J.K. Moser. “Regularization of Kepler’s Problem and the Averaging Method on a Manifold.” *Communication on pure and applied mathematics* 23.4 (1970), pp. 609–636. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160230406>.
- [MR02] J. E. Marsden e T.S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*. Springer Verlag, 2002. ISBN: 978-0387986432.
- [MZ05] J. K. Moser e E. J. Zehnder. *Notes on Dynamical System*. Courant Lecture Notes in Mathematics. American Mathematical Society, 2005. ISBN: 978-0821835777.
- [OR03] J.P. Ortega e T. S. Ratiu. *Momentum Maps and Hamiltonian Reduction*. Progress in Mathematics. Springer Basel AG, 2003. ISBN: 978-1-4757-3813-1.
- [Sin05] S.F. Singer. *Linearity, Symmetry, and Prediction in the Hydrogen Atom*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 2005. ISBN: 978-0-387-24637-6.
- [SK65] E. Stiefel e P. Kustaanheimo. “Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization.” *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 218 (1965), pp. 204–219.