



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE  
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA  
MECCANICA**

**Tesi di Laurea Magistrale in  
Ingegneria meccanica**

**IMPLEMENTAZIONE DI UN CODICE DI CALCOLO  
GENERALE PER L'ANALISI DI UGELLI A SEZIONE  
VARIABILE**

*Relatore: prof. Ernesto Benini*

*Laureando: Paolo Frigo*

ANNO ACCADEMICO: 2012 - 2013



# Indice

INTRODUZIONE	- 1 -
CAPITOLO 1	- 2 -
DEFINIZIONI UTILI	- 2 -
1.1 IL GAS IDEALE	- 2 -
1.2 DEFINIZIONI UTILI	- 3 -
1.3 LEGGI FONDAMENTALI DELLA FISICA	- 4 -
1.4 VELOCITÀ DEL SUONO	- 6 -
1.5 IL NUMERO DI MACH	- 8 -
1.6 STATI DI RISTAGNO O TOTALI	- 8 -
1.7 LA VELOCITÀ CRITICA DEL SUONO	- 10 -
CAPITOLO 2	- 12 -
MOTO ADIABATICO E ISOENTROPICO ALL'INTERNO DI CONDOTTI A SEZIONE VARIABILE	- 12 -
2.1 EQUAZIONI DI HUGONIOT	- 12 -
2.2 STATO CRITICO DI RIFERIMENTO PER I GAS IDEALI	- 16 -
2.3 PORTATA SPECIFICA E MASSIMA PORTATA	- 19 -
2.4 DEFLUSSO IN UN UGELLO CONVERGENTE	- 21 -
2.5 DEFLUSSO IN UN UGELLO CONVERGENTE-DIVERGENTE	- 22 -
CAPITOLO 3	- 24 -
L'ONDA D'URTO NORMALE	- 24 -
3.1 DESCRIZIONE DEL FENOMENO ONDA D'URTO NORMALE	- 24 -
3.2 RELAZIONI FONDAMENTALI PER L'ONDA D'URTO NORMALE	- 25 -
3.3 ONDA D'URTO NORMALE IN UN GAS IDEALE	- 25 -
3.4 DEFLUSSO ALL'INTERNO DI UN CONVERGENTE-DIVERGENTE QUANDO SI MANIFESTA UN'ONDA D'URTO	- 29 -
CAPITOLO 4	- 31 -
ONDA D'URTO OBLIQUA E ONDE DI ESPANSIONE	- 31 -

4.1 EQUAZIONI FONDAMENTALI PER L'ONDA D'URTO OBLIQUA	- 32 -
4.2 EQUAZIONI DI RANKINE-HUGONIOT	- 33 -
4.3 LE RELAZIONI DI PRANDTL	- 35 -
4.4 EQUAZIONI UTILI PER LE ONDE D'URTO OBLIQUE	- 36 -
4.5 LE ONDE DI ESPANSIONE	- 37 -
CAPITOLO 5	- 41 -
IMPLEMENTAZIONE DEL CODICE DI CALCOLO	- 41 -
5.1 CONDIZIONI AL CONTORNO DEL PROBLEMA	- 41 -
5.2 DETERMINAZIONE DELLE PRESSIONI DI SCARICO DI RIFERIMENTO PER MOTO ISOENTROPICO	- 42 -
5.3 POSIZIONAMENTO DELL'ONDA D'URTO ALLA SEZIONE DI SCARICO	- 42 -
5.4 DETERMINAZIONE DELLA POSIZIONE DELL'ONDA D'URTO	- 43 -
CAPITOLO 6	- 46 -
STUDIO DEL MOTO MONODIMENSIONALE DI UN FLUIDO	- 46 -
6.1 EQUAZIONI FISICHE E DEFINIZIONI	- 46 -
6.2 COEFFICIENTI DI INFLUENZA ED EQUAZIONI RISOLUTIVE	- 50 -
6.3 METODO GENERALE DI SOLUZIONE	- 51 -
CAPITOLO 7	- 52 -
DESCRIZIONE DEL CODICE DI CALCOLO IMPLEMENTATO	- 52 -
7.1 DEFINIZIONE DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO DEL PROBLEMA	- 52 -
7.2 DETERMINAZIONE DEL COEFFICIENTE DI ATTRITO	- 53 -
7.3 RISOLUZIONE DEL CONVERGENTE SUBSONICO CON UGELLO SOFFOCATO	- 54 -
7.4 RISOLUZIONE DELL'UGELLO SOFFOCATO IN CONDIZIONI DI USCITA SUBSONICHE	- 55 -
7.5 RISOLUZIONE DELL'UGELLO SOFFOCATO IN CONDIZIONI DI USCITA SUPERSONICHE SENZA ONDE D'URTO	- 57 -
7.6 UGELLO SOFFOCATO CON LA FORMAZIONE DI ONDE D'URTO NORMALI ALL'INTERNO DEL DIVERGENTE	- 58 -

7.7 UGELLO SOFFOCATO CONDIZIONI DI USCITA SUPERSONICHE CON ONDE D'URTO OBLIQUE	- 61 -
7.8 UGELLO NON SOFFOCATO	- 62 -
7.9 RISOLUZIONE DELL'UGELLO	- 64 -
CAPITOLO 8	- 67 -
IL COEFFICIENTE DI ATTRITO	- 67 -
8.1 DEFINIZIONE DEL COEFFICIENTE DI ATTRITO	- 67 -
8.2 RELAZIONI PER IL CALCOLO DEL COEFFICIENTE DI ATTRITO	- 69 -
CAPITOLO 9	- 72 -
VALIDAZIONE DEL CODICE DI CALCOLO	- 72 -
9.1 DESCRIZIONE DELLE GEOMETRIE DA SIMULARE	- 73 -
9.2 DESCRIZIONE DELLA MESH	- 73 -
9.3 CASO DI DEFLUSSO SUBSONICO	- 74 -
9.4 CASO DI DEFLUSSO SUPERSONICO	- 83 -
9.5 CASO DI DEFLUSSO CON ONDA D'URTO NORMALE ALL'INTERNO DEL DIVERGENTE	- 88 -
9.6 CASO DI DEFLUSSO CON ONDA D'URTO OBLIQUA ESTERNA	- 96 -
9.7 CASO DI DEFLUSSO CON ONDA DI ESPANSIONE ESTERNA	- 105 -
CONCLUSIONI	- 107 -
BIBLIOGRAFIA	- 109 -



# INTRODUZIONE

L'obiettivo della presente tesi è l'implementazione di un codice di calcolo, realizzato utilizzando il linguaggio di programmazione Matlab, che permetta la descrizione del deflusso adiabatico monodimensionale a regime permanente di un fluido attraverso un ugello convergente-divergente.

Il fenomeno sarà caratterizzato dapprima in maniera semplificata, ovvero considerandolo adiabatico e isoentropico a meno della formazione di onde d'urto; si andrà successivamente a complicarlo e a generalizzarlo considerando sempre la trasformazione come adiabatica ma eliminando l'ipotesi di isoentropicità attraverso l'implementazione del fenomeno dell'attrito.

Il fluido considerato sarà, invece, sempre un gas con comportamento ideale.

Nei primi capitoli della Tesi saranno spiegati alcuni concetti teorici necessari alla completa comprensione del codice di calcolo implementato, che sarà ampiamente discusso nei capitoli finali. In conclusione, il codice sarà validato considerando due diverse geometrie e alcune condizioni al contorno ben definite, utilizzando il software di simulazione fluidodinamica CFX. La validazione mediante CFD risulta essere necessaria a causa dell'irreperibilità di dati sperimentali in letteratura.

I risultati del confronto tra il codice implementato e la fluidodinamica computazionale saranno infine discussi evidenziando pregi e difetti del lavoro svolto.

L'utilità di un codice di calcolo monodimensionale consiste nella possibilità di predire in maniera veloce le prestazioni di un ugello convergente-divergente; infatti, una simulazione fluidodinamica impiega un tempo sensibilmente maggiore per giungere a completa convergenza rispetto al tempo che impiega il codice di calcolo monodimensionale ad eseguire le integrazioni e a fornire i risultati. Si intuisce, dunque da questa considerazione, l'importanza del codice e i possibili sviluppi futuri come, per esempio, alcuni miglioramenti e perfezionamenti per arrivare ad effettuare una veloce stima delle prestazioni di un ugello di turbina a vapore.





# CAPITOLO 1

## DEFINIZIONI UTILI

### 1.1 IL GAS IDEALE

Un gas per essere considerato ideale deve rispettare l'equazione di stato

$$p \cdot V = n \cdot \mathbb{R} \cdot T \quad (1.1)$$

dove  $\mathbb{R} = 8314 \frac{J}{kg \cdot K}$  è la costante universale e  $n$  è il numero delle moli del gas in esame.

Si riporta ora l'equazione (1.1) in termini di grandezze intensive di stato, considerando la massa molare come  $M = \frac{m}{n}$  e il rapporto tra la costante universale dei gas e la massa molare appena ottenuta pari a  $R = \frac{\mathbb{R}}{M}$  ottenendo

$$p \cdot v = R \cdot T \quad (1.2)$$

Conseguenza di questa equazione di stato è che per un gas ideale la variazione di energia interna  $du$  e la variazione di entalpia  $dh$  sono funzione solo della variazione di temperatura  $dT$

$$du = c_v \cdot dT \quad (1.3)$$

$$dh = c_p \cdot dT \quad (1.4)$$

Dove  $c_v$  è il calore specifico a volume costante e  $c_p$  è il calore specifico a pressione costante. Si consideri ora l'equazione che lega l'energia interna all'entalpia

$$dh = du + d(p \cdot v) \quad (1.5)$$

Andando a sostituire all'equazione (1.5) le relazioni (1.2), (1.3) e (1.4) dopo alcuni passaggi matematici si ottiene la relazione

$$c_p = c_v + R \quad (1.6)$$

Dalla quale, considerando che  $\frac{c_p}{c_v} = k$ , si ottengono le relazioni tra i calori specifici e  $R$

$$c_p = \frac{k}{k-1} R \quad (1.7)$$

$$c_v = \frac{1}{k-1} R \quad (1.8)$$

Queste relazioni sono molto utili per le trattazioni teoriche sviluppate nei prossimi capitoli. Come ultima relazione per il gas ideale si riporta la formulazione della trasformazione isoentropica

$$p \cdot v^k = \text{costante} \quad (1.9)$$

Tale relazione descrive una trasformazione che avviene in maniera reversibile e senza scambio di calore e sarà utilizzata, come le equazioni (1.7) e (1.8) molto spesso durante le trattazioni teoriche dei prossimi capitoli.

## **1.2 DEFINIZIONI UTILI**

Come riportato nel testo di Alberto Cavallini e Lino Mattarolo (1990) il deflusso di un fluido si definisce monodimensionale quando la variazione delle grandezze termodinamiche e cinetiche durante lo stesso avviene in direzione assiale; questa ipotesi viene utilizzata nello studio dei moti di fluido in condotti quando la variazione delle proprietà del fluido in direzione normale alle linee di flusso è trascurabile rispetto alla variazione che ha luogo lungo le linee di flusso stesse.

Il moto si dirà a regime permanente quando, durante il deflusso, le grandezze termodinamiche e cinetiche non subiscono alcuna variazione in funzione della coordinata temporale.

Con riferimento ad una corrente monodimensionale a regime permanente in un tubo di flusso, le proprietà del fluido possono quindi essere descritte con riferimento ad un'unica coordinata lineare. Questa assunzione permette una semplificazione notevole delle equazioni necessarie alla definizione dei vari stati termodinamici e cinetici assunti dal fluido durante il deflusso all'interno del condotto.

### **1.3 LEGGI FONDAMENTALI DELLA FISICA**

Per risolvere i problemi inerenti allo studio del deflusso di una corrente lungo un condotto, si rivela necessaria la conoscenza di alcuni principi fisici basilari quali *l'equazione di Bernoulli*, il *Primo Principio della Termodinamica*, il *Secondo Principio della Termodinamica*, *l'equazione di continuità* e il *teorema della quantità di moto*.

*l'equazione di Bernoulli*

$$\frac{du^2}{2} + g \cdot dz + v \cdot dp + \delta R + \delta L' = 0 \quad (1.10)$$

Dove  $u$  è la velocità del fluido,  $g$  è l'accelerazione gravitazionale,  $v$  è il volume specifico del fluido,  $p$  è la pressione del fluido,  $L'$  è il lavoro netto e  $R$  è il lavoro delle forze dissipative riferito all'unità di massa del fluido. Questo ultimo termine è nullo solo se il moto è isoentropico, ossia se la trasformazione avviene in maniera reversibile. In caso contrario è sempre positivo.

*Primo Principio della Termodinamica*

$$\delta Q = dh + \frac{du^2}{2} + g \cdot dz + \delta L' = 0 \quad (1.11)$$

Dove  $Q$  è il calore scambiato,  $h$  è l'entalpia del fluido mentre i restanti termini hanno lo stesso significato dell'equazione di Bernoulli.

*Secondo Principio della Termodinamica*

$$ds \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (1.12)$$

Dove  $s$  è l'entropia del fluido e  $T$  è la temperatura dello stesso.

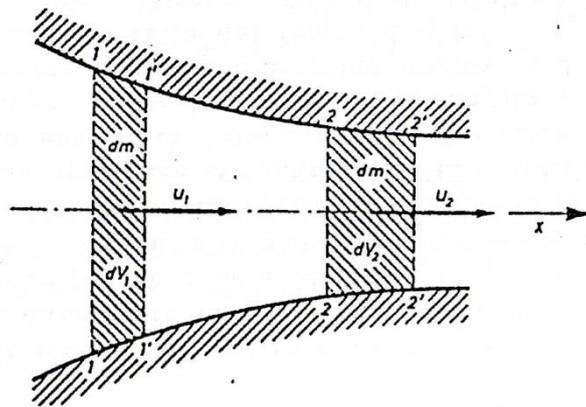
*Equazione di continuità*

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (1.13)$$

Questa equazione definisce che in condizioni di deflusso monodimensionale a regime permanente la portata di massa si conserva.

*Teorema della quantità di moto*

Si consideri un fluido in moto a regime permanente monodimensionale; dalla figura 1.1 si nota come il fluido compreso nelle sezioni 1-1 e 2-2 nel tempo  $d\tau$  si sia spostato nelle sezioni 2-2 e 2-2'.



**Figura 1.1** *Variatione della quantità di moto nel deflusso monodimensionale e a regime permanente in un tubo di flusso ad asse rettilineo. Alberto cavallini e Lino Mattarolo(1990)*

La somma delle forze agenti sul volumetti di fluido dovrà essere pari alla variazione della quantità di moto. Si ha dunque

$$\sum F_x \cdot d\tau = dm \cdot (u_2 - u_1) \quad (1.14)$$

Cioè essendo  $\frac{dm}{d\tau} = \rho \cdot A \cdot u = W$  :

$$\sum F_x = W(u_2 - u_1) \quad (1.15)$$

Dove  $\sum F_x$  è la risultante delle componenti di tutte e forze che agiscono nel fluido compreso tra le sezioni di controllo.

## 1.4 VELOCITÀ DEL SUONO

La velocità del suono è la velocità con la quale si propaga un'onda di pressione infinitesima all'interno di un mezzo fluido; per ricavare una equazione matematica per la determinazione della velocità del suono, si considera un condotto rettilineo alla cui estremità sinistra è presente uno stantuffo che si muove con velocità  $du$ . Tale stantuffo produrrà un'onda di pressione che si muoverà verso l'estremità destra del condotto con la velocità del suono  $c$  caratteristica del fluido. Come si può notare in figura 1.2, considerando il fluido inizialmente in quiete, l'onda infinitesima di pressione indurrà un aumento della velocità, della pressione e della densità in ogni sezione raggiunta.

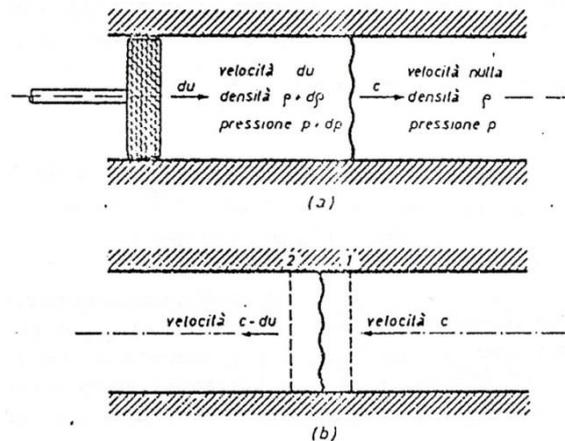


Figura 1.2: Propagazione di un'onda infinitesima di pressione:

a) rispetto ad un osservatore in quiete

b) rispetto ad un osservatore solidale con il fronte d'onda

Alberto Cavallini e Lino Mattarolo (1990)

Prendendo come riferimento una sezione sul fronte d'onda ad una certa distanza dallo stantuffo, si possono scrivere le equazioni di continuità e di conservazione della quantità di moto all'interno di un volume di controllo:

*equazione di continuità:*

$$\rho \cdot c \cdot A = (\rho + d\rho) \cdot (c - du) \cdot A \quad (1.17)$$

trascurando gli infinitesimi di ordine superiore si ottiene:

$$\rho \cdot du = d\rho \cdot c \quad (1.18)$$

*equazione della quantità di moto:*

$$p \cdot A - (p + dp) \cdot A = \rho \cdot c \cdot A \cdot ((c - du) - c) \quad (1.19)$$

da cui, eseguendo le dovute semplificazioni, si ottiene

$$dp = \rho \cdot c \cdot du \quad (1.20)$$

andando ora a sostituire all'equazione (1.18) l'equazione (1.20) appena trovata si ottiene la velocità del suono:

$$c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{TRASF.}} \quad (1.21)$$

Per interpretare correttamente la (1.21), essendo la densità variabile non solo in funzione della pressione, si deve trovare la costante della trasformazione su cui avviene la trasformazione. Come riportato nel testo di Alberto Cavallini e Lino Mattarolo (1990), analizzando le proprietà dei fluidi usuali si riconosce che le variazioni di volume specifico per effetto di una variazione di pressione infinitesima nell'usuale campo di frequenze per i "suoni" sono essenzialmente adiabatiche. Essendo poi infinitesima la variazione di pressione, il processo sarà anche reversibile, cioè isoentropico. Si definisce perciò come velocità del suono l'espressione

$$c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s} \quad (1.22)$$

Considerando l'isoentropica di un gas ideale  $p \cdot v^k = costante$  si ricava l'espressione:

$$c = \sqrt{kRT} \quad (1.23)$$

Dove  $k$  vale 1.4 nel caso di aria,  $R$  è il rapporto tra la costante universale dei gas e la massa molare del gas in considerazione e vale  $287 \frac{J}{kg \cdot K}$  (per l'aria) mentre  $T$  è ovviamente la temperatura.

Da quest'ultima equazione si nota come, nell'ipotesi di gas ideale, la velocità del suono dipenda fortemente dal mezzo e dalla temperatura in cui si propaga l'onda di pressione.

## **1.5 IL NUMERO DI MACH**

Un parametro utile per la definizione dello stato dinamico di un fluido dei problemi di gasdinamica è il numero di mach locale, simbolo  $M$ , definito come rapporto tra la velocità locale del fluido  $u$  ed il valore  $c$  della velocità locale del suono:

$$M = \frac{u}{c} \quad (1.24)$$

Con riferimento al numero di Mach locale si distinguono il *moto subsonico* e il *moto supersonico*, a seconda che il valore dello stesso sia rispettivamente minore o maggiore dell'unità. Nel caso particolare in cui il numero di Mach sia unitario, la velocità locale del fluido è pari a quella del suono e il *moto* si definisce *sonico*.

## **1.6 STATI DI RISTAGNO O TOTALI**

Come riportato nel testo di Alberto cavallini e Lino Mattarolo (1990) gli stati di ristagno sono delle grandezze definite in funzione degli stati termodinamici e dei carichi cinetici locali del fluido; si dividono in *entalpia totale*, *pressione totale*, *densità totale* e sono molto utili per lo studio di un fluido in movimento all'interno di un condotto.

*Entalpia totale:*

$$h_0 = h + \frac{c^2}{2} \quad (1.25)$$

L'entalpia totale del fluido in un determinato punto è definita come l'entalpia statica sommata a metà del quadrato della velocità del fluido in quel punto. L'entalpia totale è pari all'entalpia che avrebbe il fluido se fosse portato a velocità nulla mediante un processo adiabatico.

*Temperatura totale:*

$$T_0 = T + \frac{c^2}{2c_p} \quad (1.26)$$

la temperatura totale del fluido in un determinato punto è pari alla temperatura del fluido in quel punto sommata al quadrato della sua velocità rapportata al doppio del calore specifico, a pressione costante. Considerando l'espressione della velocità del suono, ricordando l'equazione (1.7) e tenendo conto dell'equazione (1.24) l'equazione (1.26) diventa

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \quad (1.27)$$

che definisce il rapporto tra la temperatura totale e la temperatura statica in un determinato punto in funzione del rapporto tra i calori specifici e il quadrato del numero di Mach.

*Pressione totale:*

ricordando l'equazione di stato dei gas ideali e l'espressione della trasformazione isoentropica per i gas ideali, la relazione tra la pressione di ristagno  $p_0$  e la pressione statica  $p$  per un gas con tale comportamento è pari a:

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (1.29)$$

e per la (1.27) si ottiene

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (1.30)$$

*Densità totale:*

anche in questo caso, ricordando l'equazione di stato dei gas ideali e l'espressione della trasformazione isoentropica per i gas ideali, la relazione tra la densità di ristagno  $\rho_0$  e la densità statica  $\rho$  per un gas con tale comportamento è pari a:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (1.32)$$

e per la (1.27) si ottiene

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (1.33)$$

Le relazioni determinate in questo paragrafo permettono di individuare lo stato di ristagno associato ad un particolare stato locale del moto.

Le grandezze di ristagno possono essere pensate anche come proprietà locali e se applicate a sezioni diverse qualsiasi 1 e 2 del condotto si avrà

$$h_{01} = h_{02}; \quad T_{01} = T_{02}$$

se il moto è adiabatico ed inoltre

$$p_{01} = p_{02}; \quad \rho_{01} = \rho_{02}$$

se il deflusso è isoentropico.

## **1.7 LA VELOCITÀ CRITICA DEL SUONO**

Si consideri il Primo Principio della Termodinamica (1.11) in condizioni adiabatiche, con scambio di lavoro e variazione di energia potenziale nulli:

$$h + \frac{u^2}{2} = h_0 = \text{costante} \quad (1.34)$$

ricordando l'equazione (1.7) per i gas ideali e la definizione di velocità del suono per gas ideali, la (1.34) può essere riscritta come

$$\frac{2}{k-1} c^2 + u^2 = \text{cost} \quad (1.35)$$

da quest'ultima relazione si nota come la velocità del suono  $c$  e la velocità del fluido  $u$  locali sono correlate tra di loro; infatti si osserva come all'aumentare della velocità locale del fluido la velocità del suono locale diminuisca e viceversa. Ci sarà dunque un particolare valore della velocità del suono tale per cui  $c = u = c^*$ . Tale valore della velocità del suono  $c^*$  viene definito come velocità del suono critica ed è pari a:

$$c^* = \sqrt{\frac{2}{k+1} kRT_0} \quad (1.36)$$

e dipende dunque dalle condizioni di ristagno e dalle caratteristiche fisiche del gas.

## CAPITOLO 2

# MOTO ADIABATICO E ISOENTROPICO ALL'INTERNO DI CONDOTTI A SEZIONE VARIABILE

In questo capitolo è esaminato il moto adiabatico di un fluido all'interno di condotti a sezione variabile quando siano assenti fenomeni che introducono irreversibilità (ossia causano aumenti di entropia), quali, per esempio, l'attrito. Questo primo approccio è molto utile in quanto permette di creare uno strumento di calcolo fortemente semplificato, ma al contempo molto robusto, i cui risultati potranno essere utilizzati come termine di paragone per codici successivi, più sofisticati e aventi validità estesa, se non addirittura generalizzata.

### 2.1 EQUAZIONI DI HUGONIOT

Per ricavare le equazioni di Hugoniot consideriamo dapprima l'equazione di continuità

$$\dot{m} = \rho \cdot u \cdot A \quad (2.1)$$

differenziando l'equazione sopra otteniamo

$$(d\rho \cdot u \cdot A) + (\rho \cdot du \cdot A) + (\rho \cdot u \cdot dA) = 0 \quad (2.2)$$

Dividendo la (2.2) per  $\rho \cdot u \cdot A$  otteniamo l'equazione della conservazione della massa in forma differenziale

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (2.3)$$

Da cui con una semplice operazione algebrica otteniamo

$$\frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} - \frac{du}{u} \quad (2.4)$$

Consideriamo ora l'equazione del Primo Principio della Termodinamica in parametri interni

$$T \cdot ds = dh - v \cdot dp \quad (2.5)$$

Considerando che il volume specifico  $v$  è pari all'inverso della densità  $\rho$  ed essendo il moto isoentropico, la variazione di entropia  $ds$  è nulla, ricordando anche la definizione di velocità del suono l'equazione (2.5) può essere scritta come

$$dh = v \cdot dp = \frac{dp}{\rho} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s \cdot \frac{d\rho}{\rho} = c^2 \frac{d\rho}{\rho} \quad (2.6)$$

Considerando infine la definizione di entalpia totale, essendo il moto adiabatico, la stessa si conserva

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2} = \text{costante} \quad (2.7)$$

Differenziando l'equazione (2.7) otteniamo

$$dh + \frac{du^2}{2} = dh + 2 \cdot u \cdot \frac{du}{2} = dh + u^2 \cdot \frac{du}{u} = 0 \quad (2.8)$$

Dunque abbiamo che

$$dh = -u^2 \frac{du}{u} \quad (2.9)$$

E, andando a sostituire alla equazione sopra l'equazione (2.6) otteniamo

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{du}{u} \quad (2.10)$$

Sostituendo, dunque, alla (2.4) l'equazione (2.10) ed eseguendo una semplice operazione algebrica di raccoglimento otteniamo la prima equazione di Hugoniot

$$\frac{dA}{A} = \frac{du}{u} \cdot (M^2 - 1) \quad (2.11)$$

Sostituendo, invece, alla (2.4) l'equazione (2.10) esplicitata in  $\frac{du}{u}$  ed eseguendo una semplice operazione algebrica di raccoglimento otteniamo la seconda equazione di Hugoniot

$$\frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} \cdot \frac{M^2 - 1}{M^2} \quad (2.12)$$

Infine, sostituendo alla (2.6) l'equazione (2.12) ed eseguendo una semplice operazione algebrica di raccoglimento otteniamo la terza equazione di Hugoniot

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dp}{\rho \cdot u^2} \cdot (M^2 - 1) \quad (2.13)$$

Si nota che tramite le tre equazioni di Hugoniot è possibile definire il segno del gradiente delle proprietà dinamiche e termodinamiche del fluido in funzione del segno del gradiente dell'area del condotto e del numero di Mach con cui il fluido defluisce.

La geometria si definisce convergente quando  $dA < 0$  e divergente quando  $dA > 0$ .

Dunque per le tre equazioni di Hugoniot si ha il comportamento in figura 2.1, riassumibile come:

*moto subsonico all'interno di un condotto di sezione convergente*

$$\begin{aligned} M &< 1 \\ dA &< 0 \\ du &> 0; d\rho < 0; dp < 0 \end{aligned}$$

In questo caso la velocità del fluido aumenta mentre la pressione e la densità diminuiscono. In queste condizioni il convergente lavora come un ugello, ossia accelera la corrente.

*moto supersonico all'interno di un condotto di sezione convergente*

$$\begin{aligned} M &> 1 \\ dA &< 0 \\ du &< 0; d\rho > 0; dp > 0 \end{aligned}$$

In questo caso invece la velocità del fluido diminuisce mentre la pressione e la densità aumentano. Il convergente lavora dunque come un diffusore, ossia rallenta la corrente.

*moto subsonico all'interno di un condotto di sezione divergente*

$$M < 1$$

$$dA > 0$$

$$du < 0; d\rho > 0; dp > 0$$

In questo caso la velocità del fluido diminuisce mentre la pressione e la densità aumentano. Il divergente lavora dunque come un diffusore.

*moto supersonico all'interno di un condotto di sezione divergente*

$$M > 1$$

$$dA > 0$$

$$du > 0; d\rho < 0; dp < 0$$

La velocità del fluido aumenta mentre la pressione e la densità diminuiscono. Il divergente lavora dunque come un ugello.

I comportamenti descritti dalle equazioni di Hugoniot si possono vedere anche in figura 2.1

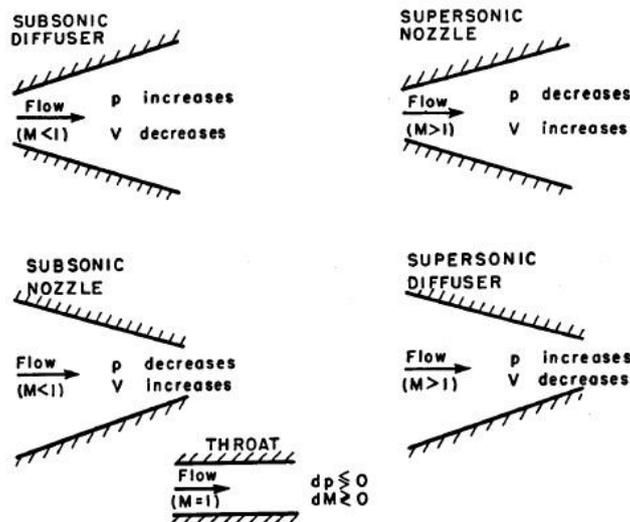


Figura 2.1 Andamento delle variabili termodinamiche e cinematiche all'interno di ugelli e diffusori al variare della sezione in funzione del numero di Mach di deflusso.

Ascher H. Sapiro (1953)

Dalle considerazioni soprascritte si deduce che se all'ingresso di un convergente si ha Mach subsonico, il Mach in uscita sarà al più sonico. Per avere in uscita un Mach supersonico sarà necessario che la geometria passi da convergente a divergente, ottenendo così un condotto di geometria convergente-divergente. In questo modo si presenterà una sezione di minimo in cui, se ci saranno le condizioni opportune, sarà raggiunto il valore Mach unitario. Successivamente nel divergente il valore di Mach potrà essere supersonico o subsonico in base alla pressione di scarico imposta a valle. Questo fenomeno sarà comunque discusso più approfonditamente nei prossimi paragrafi.

## **2.2 STATO CRITICO DI RIFERIMENTO PER I GAS IDEALI**

Nel paragrafo 1.6 si è definita la velocità critica del suono  $c^*$ . Dalla velocità critica si può definire la temperatura critica  $T^*$  come

$$T^* = \frac{c^{*2}}{k \cdot R} \quad (2.14)$$

E utilizzando la relazione (1.27) otteniamo

$$\frac{T_0}{T^*} = 1 + \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2} \quad (2.15a)$$

E dal confronto tra la (1.27) e la (2.15a) si ottiene

$$\frac{T^*}{T} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \quad (2.15)$$

Come si legge nel testo di Alberto Cavallini e Lino Mattarolo (1990) la relazione sopra riportata permette di definire la temperatura in ogni sezione conoscendo la temperatura vigente in un'altra sezione e i corrispondenti numeri di Mach. La temperatura critica così dedotta non è però sufficiente a definire uno stato termodinamico. Per questo motivo, oltre alla condizione di adiabaticità, viene imposta la condizione di isoentropicità. Le relazioni tra pressione locale e pressione critica e tra densità locale e densità critica in funzione del numero di Mach locale sono le seguenti

$$\frac{p^*}{p} = \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.16)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (2.17)$$

Se il moto è adiabatico la  $T^*$  si mantiene costante, mentre se è adiabatico ed isoentropico anche le  $p^*$  e  $\rho^*$  hanno valore costante in ogni punto.

Le relazioni tra i valori dei parametri allo stato critico e allo stato di ristagno si ottengono dalle relazioni sopra imponendo  $M=1$

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \quad (2.18)$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.19)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (2.20)$$

Che per aria  $k = 1.4$  diventano rispettivamente

$$\frac{T^*}{T_0} = 0.8333 \quad (2.21)$$

$$\frac{p^*}{p_0} = 0.5283 \quad (2.22)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = 0.6339 \quad (2.23)$$

Si vuole ora individuare una relazione in grado di fornire il rapporto tra area corrente e area critica (indicata con  $A^*$  e definita come quell'area in cui il moto considerato diventa sonico) in funzione del numero di Mach locale e del rapporto tra i calori specifici.

A tal scopo, consideriamo l'equazione di continuità tra una sezione qualsiasi e la sezione critica:

$$\dot{m} = \rho \cdot u \cdot A = \rho^* \cdot u^* \cdot A^* \quad (2.24)$$

dall'equazione sopra, effettuando una separazione di variabili si ottiene

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \cdot \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{\frac{k+1}{2 \cdot (k-1)}} \quad (2.25)$$

Che rappresenta il rapporto tra una sezione qualsiasi e la sezione critica in funzione del numero di Mach. In figura 2.2 si può osservare l'andamento della funzione (2.25); si nota come la curva possieda un minimo per Mach unitario, a conferma del fatto che tale valore del numero di Mach si può ottenere solo nella sezione di gola. Si nota inoltre che per ogni valore del rapporto di sezioni sono ammissibili due distinte condizioni di moto: una supersonica, l'altra subsonica.

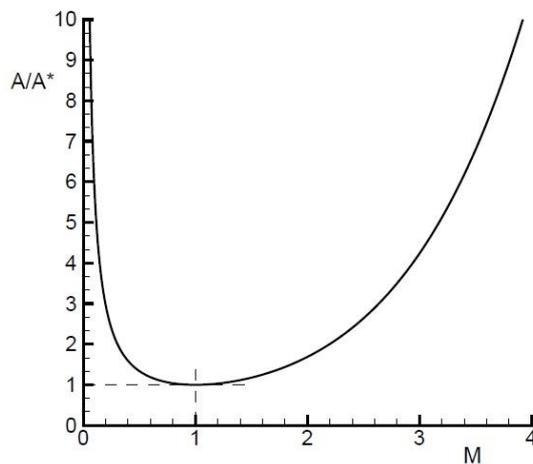


Figura 2.2 Andamento del rapporto tra l'area corrente e l'area critica al variare del numero di Mach di deflusso

Questo grafico conferma ulteriormente il concetto descritto alla fine del paragrafo 2.1, ossia che in un ugello convergente-divergente le condizioni soniche possono essere raggiunte solo nella sezione di gola e, quando si verifica tale situazione, nella sezione divergente il numero di Mach può essere supersonico o subsonico in funzione della pressione di scarico imposta a

valle dell'ugello. Considerando l'equazione (1.30) si evince che il numero di Mach locale nella generica sezione sarà correlato al valore di pressione statica locale, a sua volta dipendente dalla pressione imposta allo scarico dell'ugello.

## **2.3 PORTATA SPECIFICA E MASSIMA PORTATA**

Si consideri l'equazione di continuità

$$\dot{m} = \rho \cdot u \cdot A \quad (2.26)$$

Se si considera una variazione isoentropica della velocità del fluido fino a  $M=1$  si ottiene

$$\dot{m} = \rho^* \cdot u^* \cdot A^* \quad (2.27)$$

La portata specifica è definita come  $\frac{\dot{m}}{A}$  dunque possiamo scrivere la (2.27) come

$$\frac{\dot{m}}{A} = \rho^* \cdot u^* \cdot \frac{A^*}{A} \quad (2.28)$$

Sostituendo l'equazione (2.20) e la definizione di velocità critica si ottiene

$$\frac{\dot{m}}{A} = \rho_0 \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \sqrt{k \cdot R \cdot T^*} \cdot \frac{A^*}{A} \quad (2.29)$$

Sostituendo dunque  $\rho_0 = \frac{p_0}{R \cdot T_0}$ ,  $T^* = T_0 \cdot \frac{2}{k+1}$  e l'equazione (2.25) all'equazione (2.29) si ottiene

$$\frac{\dot{m}}{A} = \frac{p_0 \sqrt{k}}{\sqrt{R \cdot T_0}} \cdot \frac{M}{\left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \quad (2.30)$$

L'espressione (2.30) descrive la portata specifica in funzione del numero di Mach, della pressione totale, della temperatura totale e del rapporto dei calori specifici in un determinato punto del condotto.

Per determinare la portata specifica massima che può defluire attraverso un condotto, è possibile considerare la derivata dell'espressione (2.30) rispetto al numero di Mach  $M$  eguagliata a zero, ottenendo

$$\left(\frac{\dot{m}}{A}\right)_{MAX} = \frac{p_0 \sqrt{k}}{\sqrt{R \cdot T_0}} \cdot \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (2.31)$$

L'equazione (2.31) dimostra che la portata specifica massima si ottiene nella sezione dove il numero di Mach è unitario. Questo significa che, viste le considerazioni fatte fino ad ora, la portata specifica sarà massima nella sezione di deflusso minima ossia nella sezione di gola quando si raggiungono le condizioni soniche.

Un altro risultato interessante si ottiene andando ad esprimere la portata specifica in funzione della pressione locale, ottenendo

$$\frac{\dot{m}}{A} = \sqrt{\rho_0 \cdot p_0 \cdot \frac{2k}{k-1} \cdot \left[ \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \quad (2.32)$$

Diagrammando la funzione (2.32) appena ricavata in funzione di  $\frac{p}{p_0}$  si ottiene la figura 2.3, in cui si nota che la portata specifica di massa cresce per pressioni minori di quella critica, raggiunge un massimo per la pressione statica pari a quella critica e successivamente decresce.

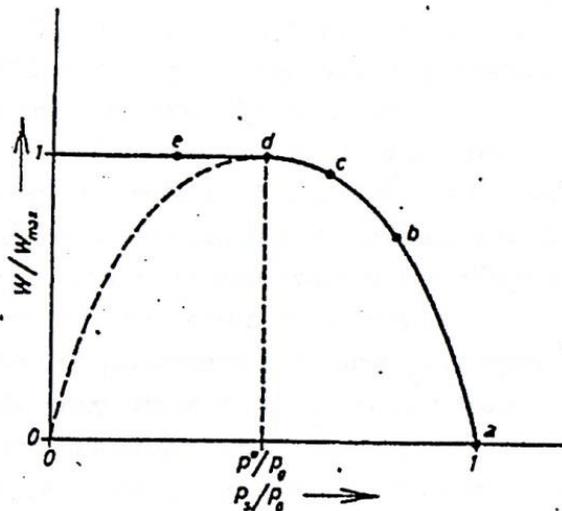


Figura 2.3 variazione della portata di massa (tratto continuo) e della portata specifica di massa (linea tratteggiata) in funzione della pressione. Alberto Cavallini, Lino Mattarolo (1990)

Volendo studiare l'andamento della portata reale, facendo riferimento alla figura 2.3, si osserva che la parte tratteggiata del grafico a sinistra di  $\frac{P^*}{P_0}$  non compete alla portata reale, infatti tale portata rimane bloccata al valore massimo consentito, seguendo il tratto continuo della curva. Questo fenomeno viene chiamato *bloccaggio della portata* ed è un concetto molto importante nella gasdinamica. Esso infatti suggerisce che una volta impostata una pressione di scarico tale per cui vengono raggiunte le condizioni soniche nella sezione di gola, la portata che fluisce sarà massima e un ulteriore decremento della pressione di scarico non indurrà un aumento della stessa che risulterà quindi bloccata.

## **2.4 DEFLUSSO IN UN UGELLO CONVERGENTE**

Il termine ugello fa sempre riferimento ad un condotto che accelera il moto indipendentemente dalla forma geometrica dello stesso. Se si tratta di un semplice convergente il moto risulta ovunque subsonico, tranne nella sezione di scarico dove può raggiungere, al più, la condizione sonica.

Si consideri un semplice convergente; a monte dello stesso sia presente un fluido con una certa pressione totale, temperatura totale, densità totale e la cui velocità iniziale sia nulla. Per studiare il comportamento che assume il fluido durante il deflusso attraverso l'ugello in esame, la pressione di scarico sarà fatta progressivamente diminuire a partire da un valore pari a quello della pressione totale in ingresso.

Nella figura 2.4 (a) si denota il comportamento del fluido; quando la pressione di scarico è pari a quella totale in ingresso, la pressione è costante lungo l'ugello e, dunque, non fluisce portata. Al diminuire della pressione di scarico si ha una progressiva diminuzione della pressione lungo l'ugello e, quindi, un aumento della portata fluente (punti ii-iii) fino al raggiungimento della pressione critica da parte della pressione di scarico. A quel punto nella sezione terminale si raggiungono le condizioni soniche, perciò la portata risulta bloccata. Se si riduce ulteriormente la pressione, alla sezione finale dell'ugello si otterrà sempre la pressione critica e la portata risulterà massima, non potendo l'una diminuire sotto al valore critico e l'altra aumentare, come confermato dalle equazioni di Hugoniot. L'aggiustamento della pressione al valore di scarico avverrà esternamente all'ugello con il fenomeno delle onde oblique di Prandtl-Mayer isoentropiche.

I concetti sopra esposti sono illustrati nelle figure 2.4 (b) e (c), dove si notano le variazioni di portata specifica, in funzione della pressione di scarico e le variazioni della pressione alla sezione terminale dell'ugello, in funzione della pressione di scarico effettivamente imposta.

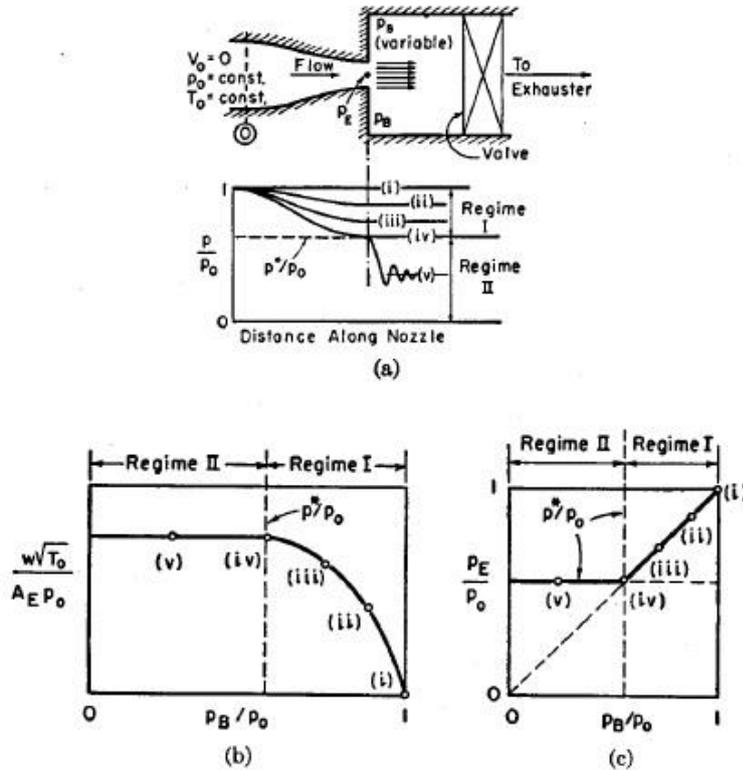


Figura 2.4 Condizioni operative di un ugello convergente al variare della pressione di scarico. Ascher H. Saphiro(1953)

## 2.5 DEFLUSSO IN UN UGELLO CONVERGENTE-DIVERGENTE

Si consideri ora un ugello convergente-divergente; a monte dello stesso, come nel caso del paragrafo precedente, sia presente un fluido con una certa pressione totale, temperatura totale, densità totale e la cui velocità iniziale sia nulla. La pressione di scarico sarà fatta progressivamente diminuire a partire da un valore pari a quello della pressione totale in ingresso. Come si può notare dalla figura 2.5 (a), anche in questo caso, quando la pressione di scarico è pari alla pressione totale in ingresso, non c'è variazione di pressione all'interno del convergente-divergente e non c'è deflusso di portata (punto 1). Al diminuire della pressione di scarico, però, la pressione presenta una diminuzione nel convergente raggiungendo sempre un minimo nella sezione di gola, aumentando successivamente nel divergente fino a raggiungere la pressione di scarico, mentre la portata fluente continua ad aumentare. Diminuendo ulteriormente la pressione di scarico, nella sezione di gola il fluido raggiunge le condizioni soniche. In queste condizioni, secondo le equazioni di Hugoniot, esistono due pressioni di scarico ottenibili isoentropicamente, una pari alla pressione legata al deflusso subsonico (2) e l'altra legata al deflusso supersonico (6). Tutte le pressioni comprese tra (2) e

(6) non sono ottenibili con una trasformazione isoentropica e saranno raggiunte per mezzo di un'onda d'urto (casi 4 e 5). La portata raggiungerà il valore massimo in corrispondenza di quella pressione di scarico che permette di pervenire alle condizioni soniche nella sezione di gola, e risulterà bloccata se si procede all'ulteriore diminuzione della pressione, in accordo con le considerazioni fatte nei paragrafi precedenti. Come nel caso di deflusso attraverso un ugello convergente, in figura 2.5 (b) si riportano gli andamenti delle pressioni sulla sezione finale del divergente in funzione delle pressioni di scarico, mentre, in figura 2.5 (d) si riporta la portata specifica in funzione della pressione di scarico. Nei prossimi capitoli sarà affrontato approfonditamente il fenomeno dell'onda d'urto. Tale fenomeno, essendo caratterizzato da forti dissipazioni, ricopre un ruolo fondamentale nella presente trattazione, che si prefigge l'obiettivo di valutare i fenomeni dissipativi associati al moto in un ugello convergente/divergente.

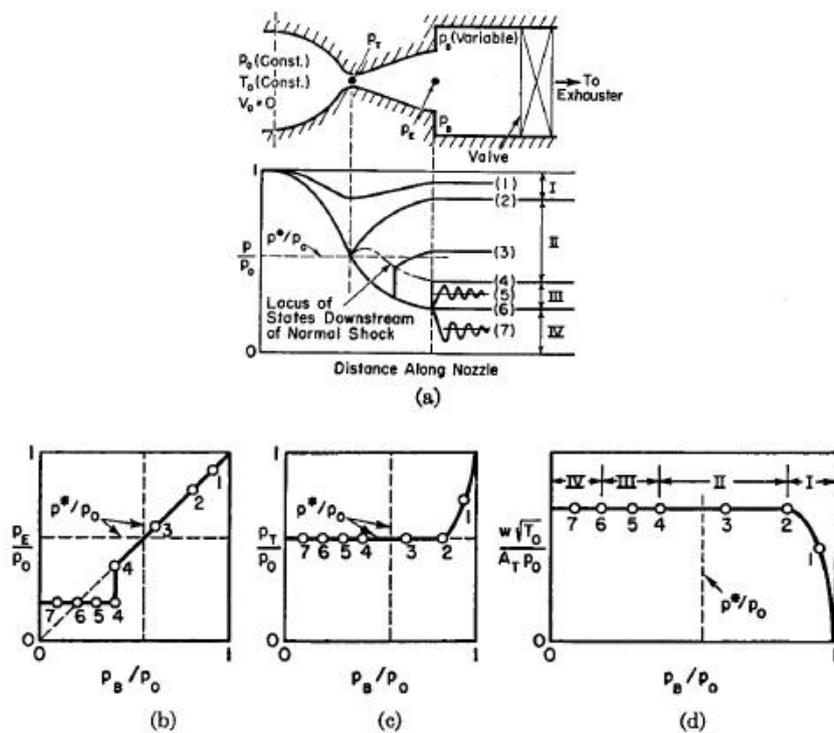


Figura 2.5 Condizioni operative per un ugello convergente-divergente al variare della pressione di scarico. Ascher H. Shapiro(1953)

# CAPITOLO 3

## L'ONDA D'URTO NORMALE

Nello studio del deflusso di un fluido attraverso un ugello convergente-divergente, si possono individuare una serie di condizioni al contorno per le quali non è ammessa alcuna soluzione costituita da moto interamente isoentropico. L'adattamento del campo di moto alle condizioni al contorno imposte può avvenire mediante diversi fenomeni dissipativi, tra i quali figura l'onda d'urto normale. In questo capitolo si discuterà tale fenomeno e si ricaveranno le equazioni che permettono il calcolo delle grandezze dinamiche e termodinamiche di un gas ideale a valle di un'onda d'urto normale, in funzione delle condizioni che vigevano nel fluido prima della stessa.

### **3.1 DESCRIZIONE DEL FENOMENO ONDA D'URTO NORMALE**

L'onda d'urto normale è una discontinuità nelle grandezze dinamiche e termodinamiche che si instaura nel condotto quando le condizioni di scarico non sono raggiungibili mediante un moto puramente isoentropico. Da questa affermazione si deduce che l'onda d'urto è un fenomeno irreversibile lungo il quale la pressione totale e la densità totale non si conservano. Come si legge nel testo di Ascher H. Shapiro (1953) un indizio sulla natura della discontinuità in esame è fornito dalle fotografie realizzate con la tecnica *schlieren* (striatura). Da queste fotografie si nota la formazione di onde d'urto così sottili che i cambiamenti in pressione e velocità che avvengono attraverso l'onda accadono in una distanza infinitesima rispetto alla lunghezza del condotto; attraverso l'onda lo scambio termico è, per questo motivo, trascurabile. Inoltre, nel passaggio da una parte all'altra dell'onda non avviene scambio di lavoro. Da queste considerazioni si evince che attraverso l'onda d'urto l'entalpia totale si conserva.

### **3.2 RELAZIONI FONDAMENTALI PER L'ONDA D'URTO NORMALE**

Supponiamo che le condizioni a monte e a valle del fenomeno vengano descritte rispettivamente con il pedice  $x$  e  $y$ . Non essendoci scambio di lavoro e di calore attraverso l'onda d'urto e considerando la variazione di energia potenziale trascurabile, il Primo Principio della Termodinamica si può scrivere come

$$h_x + \frac{u_x^2}{2} = h_y + \frac{u_y^2}{2} = h_0 \quad (3.1)$$

essendo poi la discontinuità di spessore infinitesimo, la sezione deve essere la stessa in entrambi i lati dell'onda d'urto. Dall'equazione di continuità otteniamo

$$\frac{\dot{m}}{A} = \rho_x \cdot u_x = \rho_y \cdot u_y \quad (3.2)$$

per il teorema della quantità di moto attraverso l'onda d'urto si ottiene

$$p_x - p_y = \frac{\dot{m}}{A} (u_y - u_x) \quad (3.3)$$

Queste tre equazioni sono espresse in funzione delle quattro variabili  $u, p, \rho$  e  $h$  ed è perciò necessario conoscere l'equazione di stato del fluido affinché sia possibile determinare le proprietà a valle, note quelle a monte dell'onda d'urto.

### **3.3 ONDA D'URTO NORMALE IN UN GAS IDEALE**

Come riportato nel paragrafo precedente, per determinare le proprietà a valle dell'onda d'urto conoscendo quelle a monte è necessario conoscere l'equazione di stato del fluido. Consideriamo allora il fluido come gas ideale, la cui equazione di stato è

$$p \cdot v = R \cdot T \quad (3.4)$$

combinando le equazioni (3.2) e (3.3) si ottiene

$$\frac{p_x}{\rho_x \cdot u_x} - \frac{p_y}{\rho_y \cdot u_y} = u_y - u_x \quad (3.5)$$

Ricordando l'equazione di stato dei gas ideali, moltiplicando e dividendo entrambi i membri dell'equazione per  $k$  si ottiene

$$\frac{c_x^2}{u_x} - \frac{c_y^2}{u_y} = k \cdot (u_y - u_x) \quad (3.6)$$

E moltiplicando entrambi i membri per  $u_x \cdot u_y$  otteniamo

$$c_x^2 \cdot u_y - c_y^2 \cdot u_x = k \cdot u_x \cdot u_y \cdot (u_y - u_x) \quad (3.7)$$

dal Primo Principio della Termodinamica, sfruttando le proprietà del gas ideale, otteniamo

$$c_p \cdot T_0 = c_p \cdot T + \frac{u^2}{2} \quad (3.8)$$

da cui moltiplicando entrambi i membri per  $(k - 1)$  e ricordando la relazione tra il calore specifico a pressione costante e  $R$  per un gas ideale si ottiene

$$k \cdot R \cdot T_0 = k \cdot R \cdot T + \frac{k - 1}{2} u^2 \quad (3.9)$$

ricordando ora la definizione di velocità del suono si ottiene

$$c_0^2 = c^2 + \frac{k - 1}{2} u^2 \quad (3.10)$$

Sostituendo la (3.10) alla (3.7) otteniamo quindi

$$\left( c_0^2 - \frac{k - 1}{2} u_x^2 \right) u_y - \left( c_0^2 - \frac{k - 1}{2} u_y^2 \right) u_x = k u_x u_y (u_y - u_x) \quad (3.11)$$

Dalla (3.11) raccogliendo  $c_0^2$  ed eseguendo alcuni passaggi algebrici otteniamo

$$c_0^2 = u_x \cdot u_y \cdot \frac{k + 1}{2} \quad (3.12)$$

Da cui ricordando la definizione di velocità critica del suono si ricava

$$c^{*2} = u_x \cdot u_y \quad (3.13)$$

Da cui si ottiene

$$\frac{u_x}{c^*} \cdot \frac{u_y}{c^*} = 1 \quad (3.14)$$

Da cui, ricordando la definizione di numero di Mach critico, otteniamo

$$\bar{M}_y = \frac{1}{\bar{M}_x} \quad (3.15)$$

La relazione (3.15) è molto importante in quanto  $\bar{M}$  ha lo stesso andamento del numero di Mach locale. Dunque l'equazione afferma che se il moto a monte dell'onda d'urto è supersonico, a valle sarà subsonico e viceversa. Si può dimostrare, anche se non verrà fatto in questa sede, che l'onda d'urto può avvenire solo da moto supersonico a subsonico (il viceversa porterebbe a violare il secondo principio della termodinamica).

Dalla relazione (3.15) si può ricavare il valore del numero di Mach dopo l'onda d'urto conoscendo il rispettivo valore a monte della stessa. A questo scopo, si sostituisce alla (3.15) la relazione tra numero di Mach critico e numero di Mach locale, ottenendo

$$M_y^2 = \frac{M_x^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2 \cdot k}{k-1} \cdot M_x^2 - 1} \quad (3.16)$$

Per un gas ideale, ricordando che la trasformazione è adiabatica, grazie all'equazione dell'energia applicata agli stati x ed y si ottiene

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_x^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_y^2} \quad (3.17)$$

E per la (3.16)

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_x^2\right) \cdot \left(\frac{2k}{k-1} M_x^2 - 1\right)}{\frac{(k+1)^2}{2 \cdot (k-1)} M_x^2} \quad (3.18)$$

Espressione che fornisce la temperatura a valle dell'onda d'urto conoscendo il numero di Mach e la temperatura a monte della stessa.

Si consideri ora il teorema della quantità di moto nella seguente forma

$$p_y + \left(\frac{\dot{m}}{A} \cdot u_y\right) = p_x + \left(\frac{\dot{m}}{A} \cdot u_x\right) \quad (3.19)$$

Per l'equazione di continuità  $\frac{\dot{m}}{A} = \rho_x \cdot u_x = \rho_y \cdot u_y$ , dunque otteniamo

$$p_y + (\rho_y \cdot u_y^2) = p_x + (\rho_x \cdot u_x^2) \quad (3.20)$$

Sostituendo all'equazione (3.20) l'equazione di stato dei gas ideali in forma

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T} \quad (3.21)$$

e ricordando la definizione di velocità del suono e di numero di Mach, si ottiene

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{1+k \cdot M_x^2}{1+k \cdot M_y^2} \quad (3.22)$$

Sostituendo alla (3.22) la (3.16) si ottiene

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{2 \cdot k}{k+1} M_x^2 - \frac{k-1}{k+1} \quad (3.23)$$

Espressione che fornisce la pressione a valle dell'onda d'urto conoscendo il numero di Mach e la pressione a monte della stessa.

Consideriamo ora l'equazione (3.21). Possiamo scrivere dunque

$$\frac{\rho_y}{\rho_x} = \frac{p_y}{R \cdot T_y} \cdot \frac{R \cdot T_x}{p_x} \quad (3.24)$$

Sostituendo alla (3.21) le equazioni (3.23) e (3.16) si ottiene

$$\frac{\rho_y}{\rho_x} = \frac{k+1}{2} \cdot \frac{M_x^2}{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_x^2} \quad (3.25)$$

Espressione che fornisce la densità a valle dell'onda d'urto conoscendo il numero di Mach e la densità a monte della stessa.

Infine l'onda d'urto non avviene a pressione di ristagno costante, non essendo questa isoentropica. Si consideri dunque l'espressione che relaziona la pressione totale alla pressione statica in funzione del numero di Mach. Allora possiamo scrivere

$$\frac{p_{0y}}{p_{0x}} = \frac{p_y}{p_x} \cdot \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_y^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}{\left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_x^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} \quad (3.26)$$

Sostituendo alla (3.26) la (3.23) e la (3.16) otteniamo infine

$$\frac{p_{0y}}{p_{0x}} = \left(\frac{\frac{k+1}{2} \cdot M_x^2}{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_x^2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \cdot \left(\frac{2 \cdot k}{k+1} M_x^2 - \frac{k-1}{k+1}\right)^{\frac{1}{1-k}} \quad (3.27)$$

Espressione che fornisce la pressione totale a valle dell'onda d'urto conoscendo il numero di Mach e la pressione totale a monte della stessa.

In conclusione le espressioni (3.16), (3.23), (3.25), (3.27) permettono di ricavare i rapporti tra le grandezze a monte e a valle dell'onda d'urto in funzione del solo numero di Mach e sono molto utili per risolvere i problemi di gasdinamica che coinvolgono tale fenomeno.

### **3.4 DEFLUSSO ALL'INTERNO DI UN CONVERGENTE-DIVERGENTE QUANDO SI MANIFESTA UN'ONDA D'URTO**

Dopo aver discusso ampiamente nel paragrafo precedente il fenomeno dell'onda d'urto normale, in questo paragrafo si vuole analizzare il deflusso di un gas ideale attraverso un ugello convergente-divergente quando la pressione imposta allo scarico sia tale da impedire il deflusso isoentropico attraverso il divergente. Allo scopo si riporta in figura 3.1 la stessa figura utilizzata nel paragrafo 2.5 e si considerano le pressioni comprese tra i punti (2) e (6).

Decrementando la pressione di scarico dal punto (2) si verifica un'onda d'urto normale all'interno del divergente. Mano a mano che la pressione decrementa dal punto (2) verso il punto (4) l'onda d'urto si sposta dalla sezione di gola verso lo scarico.

Si nota che a monte e a valle dell'onda d'urto il moto prosegue in maniera isoentropica.

Nei punti compresi tra (4) e (6) non avviene onda d'urto normale, dato che in (4) l'onda d'urto è già posizionata alla sezione di scarico e dunque non ha modo di spostarsi ulteriormente a valle.

Pertanto, in questi casi, l'aggiustamento delle proprietà del fluido avviene esternamente all'ugello, con *onde d'urto oblique di compressione*. Per le pressioni minori del punto (6) l'aggiustamento delle proprietà avviene esternamente all'ugello mediante *onde di espansione* di Prandtl-Mayer. Le onde di espansione, a differenza delle onde d'urto, sono isoentropiche e non inducono, quindi, perdite per irreversibilità nel processo.

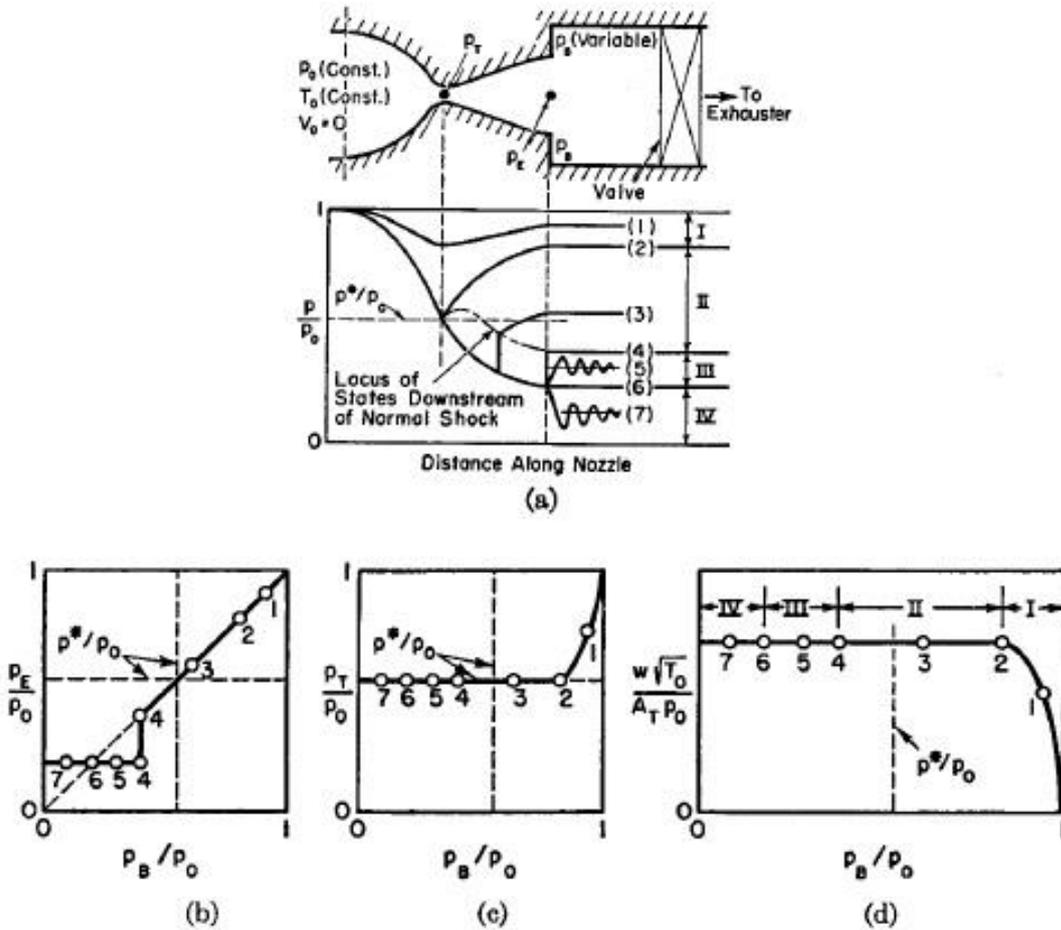


Figura 3.1 Condizioni operative per un ugello convergente-divergente al variare della pressione di scarico Ascher H. Saphiro(1953)

## CAPITOLO 4

# ONDA D'URTO OBLIQUA E ONDE DI ESPANSIONE

Si è visto nei paragrafi precedenti che in un ugello convergente-divergente, per certi valori di pressione di scarico, l'adattamento del campo di moto alle condizioni al contorno fissate impone la formazione di un'onda d'urto obliqua o di un'onda di espansione, sempre collocate esternamente all'ugello stesso. In questo capitolo si vogliono studiare i fenomeni dell'onda d'urto obliqua e dell'onda di espansione per poter descrivere il campo di moto all'interno dell'ugello, per quel range di pressioni di scarico in cui tali fenomeni si manifestano. A tal scopo viene ripresa l'analisi sviluppata nel testo di Ascher H. Saphiro (1953). Uno dei metodi più efficaci per lo studio dell'onda d'urto obliqua considera, come punto di partenza, il fenomeno dell'onda d'urto normale (v. Capitolo 3). Riferendosi alla figura 4.1 (a), si supponga che un osservatore solidale all'onda d'urto normale veda il gas allo stato 1 decelerare e comprimersi repentinamente fino allo stato 2. Ora si immagini che l'osservatore si muova lungo l'onda d'urto normale, con velocità  $V_t$ .

L'osservatore mobile percepisce le direzioni di deflusso riportate in figura 4.1 (b) dove è possibile osservare sia che il fronte dell'onda d'urto è inclinato rispetto alla direzione principale sia che il gas risulta deviato una volta attraversata l'onda.

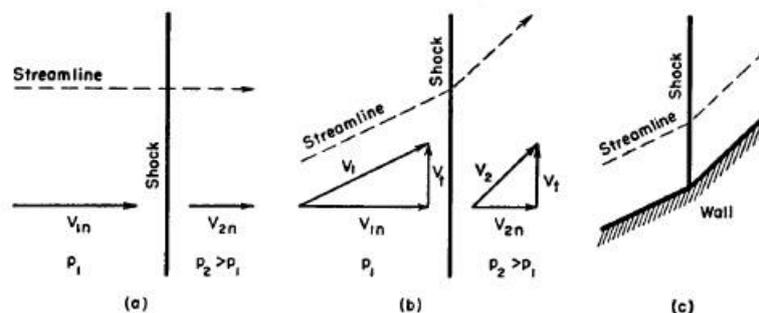


Figura 4.1 Trasformazione dell'onda d'urto normale in onda obliqua

- a) onda d'urto normale vista da un osservatore stazionario
  - b) l'osservatore muovendosi parallelamente all'onda, vede l'onda d'urto normale trasformarsi in onda d'urto obliqua
  - c) flusso descritto al punto b) interpretato come percorso prodotto da un angolo concavo di una parete
- Ascher H. Saphiro(1953)

L'onda obliqua così definita presenta un'uguale componente di velocità tangenziale a monte e valle. Le relazioni tra le proprietà del fluido ai due lati dell'onda d'urto obliqua saranno ricavate nel corso del successivo paragrafo 4.1.

#### **4.1 EQUAZIONI FONDAMENTALI PER L'ONDA D'URTO OBLIQUA**

L'onda d'urto obliqua verrà analizzata in questo paragrafo utilizzando le equazioni di continuità, della quantità di moto e il Primo Principio della Termodinamica per il deflusso attraverso la superficie dei controllo di figura 4.2.

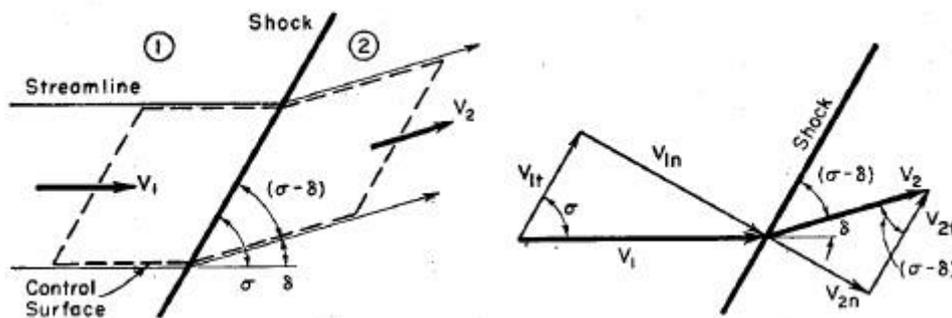


Figura 4.2 Nomenclatura per l'analisi dell'onda d'urto obliqua. Ascher H. Saphiro(1953)

*Equazione di continuità*

$$\rho_1 \cdot V_{1n} = \rho_2 \cdot V_{2n} \quad (4.1)$$

*Equazione della quantità di moto in direzione t*

$$(\rho_1 \cdot V_{1n}) \cdot V_{1t} = (\rho_2 \cdot V_{2n}) \cdot V_{2t} \quad (4.2)$$

$$V_{2t} = V_{1t} = V_t \quad (4.3)$$

*Equazione della quantità di moto in direzione n*

$$p_1 - p_2 = \rho_2 \cdot V_{2n}^2 - \rho_1 \cdot V_{1n}^2 \quad (4.4)$$

*Primo Principio della Termodinamica*

$$c_p \cdot (T_1 - T_2) = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \quad (4.5)$$

Dalla equazione (4.2) e dalla geometria dei triangoli di velocità si ottiene

$$V_2^2 - V_1^2 = (V_{2n}^2 + V_{2t}^2) - (V_{1n}^2 + V_{1t}^2) = V_{2n}^2 - V_{1n}^2 \quad (4.6)$$

considerando poi l'equazione di stato dei gas ideali

$$c_p \cdot T = c_p \cdot \left( \frac{p}{\rho \cdot R} \right) = \left( \frac{k}{k-1} \right) \cdot \left( \frac{p}{\rho} \right) \quad (4.7)$$

Il Primo Principio della Termodinamica può essere scritto come

$$\frac{k}{k-1} \cdot \left( \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \frac{V_{1n}^2 - V_{2n}^2}{2} \quad (4.8)$$

Le equazioni (4.1), (4.3), (4.4) e (4.8) definiscono completamente le relazioni tra gli stati ai due lati dell'onda.

Per esempio, supponendo che lo stato 1 sia definito completamente dai valori di  $p_1, \rho_1, V_{1n}$  e  $V_{1t}$  le quattro equazioni ricavate prima sono sufficienti per determinare  $p_2, \rho_2, V_{2n}$  e  $V_{2t}$ . Le due velocità  $V_{1n}$  e  $V_{1t}$  assieme specificano l'angolo dell'onda  $\sigma$  mentre  $V_{2n}$  e  $V_{2t}$  definiscono l'angolo  $(\sigma - \delta)$ , dunque le equazioni permettono di ottenere anche gli angoli caratteristici  $\sigma$  e  $\delta$ . Inoltre i valori di  $p$  e di  $\rho$  definiscono la velocità del suono e, quindi, i numeri di Mach  $M_1$  e  $M_2$  rispettivamente a monte e a valle dell'onda.

## **4.2 EQUAZIONI DI RANKINE-HUGONIOT**

Si vogliono ora eliminare, dalle equazioni ricavate nel paragrafo precedente, i termini legati alle velocità, ottenendo così relazioni equivalenti espresse in funzione di pressioni e densità.

Dalle equazioni (4.3), (4.4) e (4.1) si ottiene

$$p_2 - p_1 = \rho_1 \cdot V_{1n}^2 - \rho_2 \cdot V_{2n}^2 \quad (4.9)$$

Da cui si può ottenere

$$p_2 - p_1 = \rho_1 \cdot V_{1n}^2 \cdot \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{V_{2n}^2}{V_{1n}^2} \right) = \rho_1 \cdot V_{1n}^2 \cdot \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \quad (4.10)$$

Dalla (4.10) si ottengono le equazioni

$$V_{1n}^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (4.11a)$$

$$V_{2n}^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (4.11b)$$

Moltiplicando tra loro le relazioni (4.11a) e (4.11b) si ottiene

$$V_{1n} \cdot V_{2n} = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \quad (4.11c)$$

Sostituendo le equazioni (4.11a) e (4.11b) nell'equazione (4.8) si ottengono sia il rapporto tra le pressioni in funzione del rapporto tra le densità, sia il rapporto tra le densità in funzione del rapporto tra le pressioni

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad (4.12a)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{p_2}{p_1} + 1}{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_2}{p_1}} \quad (4.12b)$$

### 4.3 LE RELAZIONI DI PRANDTL

Una relazione interessante tra le componenti delle velocità a valle e a monte dell'onda d'urto può essere ricavata eliminando le pressioni e le densità dalle equazioni fondamentali. Essendo il deflusso adiabatico, possiamo scrivere l'equazione (4.5), con riferimento al termine costante  $c_p \cdot T_0$

$$c_p \cdot T_1 + \frac{V_{1n}^2 + V_{1t}^2}{2} = c_p \cdot T_2 + \frac{V_{2n}^2 + V_{2t}^2}{2} = c_p \cdot T_0 \quad (4.13)$$

Ma essendo  $c_p \cdot T = \left(\frac{k}{k-1}\right) \cdot \left(\frac{p}{\rho}\right)$  si può scrivere

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_{1n}^2 + V_{1t}^2}{2} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_{2n}^2 + V_{2t}^2}{2} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \quad (4.14)$$

Si consideri la seguente formula, espressione dell'entalpia totale in funzione della velocità critica

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{c_0^2}{k-1} = \frac{k+1}{2 \cdot (k-1)} \cdot c^{*2} \quad (4.15)$$

Sostituendo la (4.15) nella (4.14) e risolvendola per  $p_1$  e  $p_2$  si ottengono le seguenti relazioni:

$$p_1 = \rho_1 \cdot \left[ \frac{k+1}{2 \cdot k} \cdot c^{*2} - \frac{k-1}{2 \cdot k} \cdot (V_{1n}^2 + V_{1t}^2) \right] \quad (4.16a)$$

$$p_2 = \rho_2 \cdot \left[ \frac{k+1}{2 \cdot k} \cdot c^{*2} - \frac{k-1}{2 \cdot k} \cdot (V_{2n}^2 + V_{2t}^2) \right] \quad (4.16b)$$

Sostituendo le (4.16a) e (4.16b) nella (4.4) si ottiene

$$\rho_1 \cdot \left[ \frac{k+1}{2 \cdot k} \cdot (V_{1n}^2 + c^{*2}) - \frac{k-1}{2 \cdot k} \cdot V_{1t}^2 \right] = \rho_2 \cdot \left[ \frac{k+1}{2 \cdot k} \cdot (V_{2n}^2 + c^{*2}) - \frac{k-1}{2 \cdot k} \cdot V_{2t}^2 \right] \quad (4.17)$$

Introducendo ora le equazioni (4.1) e (4.3) e riducendo algebricamente otteniamo infine la relazione di Prandtl

$$V_{2n} \cdot V_{1n} = c^{*2} - \frac{k-1}{k+1} \cdot V_t^2 \quad (4.18)$$

Una ulteriore equazione utile si ricava combinando la (4.18) con la (4.11c)

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = c^{*2} - \frac{k-1}{k+1} \cdot V_t^2 \quad (4.19)$$

#### **4.4 EQUAZIONI UTILI PER LE ONDE D'URTO OBLIQUA**

In questo paragrafo verranno ricavate alcune equazioni utili per i calcoli numerici. Consideriamo la figura 4.4

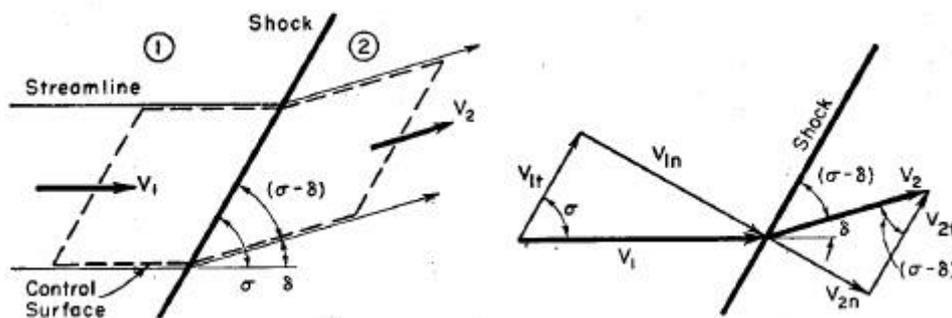


Figura 4.4 Nomenclatura per l'analisi delle onde d'urto oblique. Ascher H. Saphiro(1953)

$$V_{t1} = V_1 \cdot \cos(\sigma) \quad (4.20)$$

$$V_{t2} = V_2 \cdot \cos(\sigma - \delta) \quad (4.21)$$

$$V_{n1} = V_1 \cdot \sin(\sigma) \quad (4.22)$$

$$V_{n2} = V_2 \cdot \sin(\sigma - \delta) \quad (4.23)$$

Essendo  $V_{2t} = V_{1t}$  dalle equazioni (4.20) e (4.21)

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\cos(\sigma - \delta)}{\cos(\sigma)} \quad (4.24)$$

L'equazione di continuità mediante le equazioni (4.22) e (4.23) diventa

$$\rho_1 \cdot V_1 \cdot \sin(\sigma) = \rho_2 \cdot V_2 \cdot \sin(\sigma - \delta) \quad (4.25)$$

Da cui si ottiene

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{\text{sen}(\sigma)}{\text{sen}(\sigma - \delta)} = \frac{\cos(\sigma - \delta)}{\cos(\sigma)} \cdot \frac{\text{sen}(\sigma)}{\text{sen}(\sigma - \delta)} = \frac{\tan(\sigma)}{\tan(\sigma - \delta)} \quad (4.26)$$

Sostituendo alla (4.4) le equazioni (4.1), (4.22) e (4.23) si ottiene

$$p_2 - p_1 = \rho_1 \cdot V_{1n}^2 \cdot \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{V_{2n}^2}{V_{1n}^2}\right) = \rho_1 \cdot V_1^2 \cdot \text{sen}^2(\sigma) \cdot \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \quad (4.27)$$

Considerando che  $\rho_1 V_1^2 = k \cdot p_1 \cdot M_1^2$  possiamo scrivere il rapporto delle pressioni come

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + k \cdot M_1^2 \cdot \text{sen}^2(\sigma) \cdot \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \quad (4.28)$$

Considerando invece  $\rho_2 V_2^2 = k \cdot p_2 \cdot M_2^2$  si ottiene

$$\frac{p_1}{p_2} = 1 + k \cdot M_2^2 \cdot \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \cdot \text{sen}^2(\sigma - \delta) \quad (4.29)$$

La (4.29) si rivela di grande utilità per ricavare il numero di Mach a valle dell'onda d'urto in funzione del rapporto tra le pressioni, del rapporto tra le densità e degli angoli  $\sigma$  e  $\delta$ .

## 4.5 LE ONDE DI ESPANSIONE

Le onde di espansione di Prandtl-Mayer possono essere pensate come un ventaglio con una certa estensione angolare che espande la corrente mediante infinitesime differenze di pressione. Tale comportamento rende il fenomeno dell'onda di espansione quasi completamente isoentropico.

Consideriamo la figura 4.5:

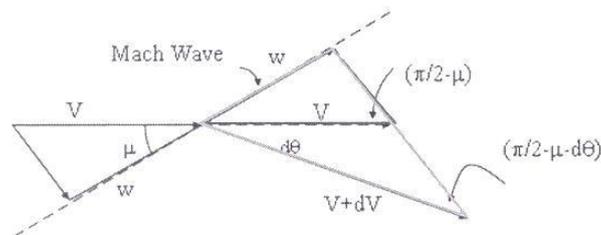


Figura 4.5 Nomenclatura per l'analisi dell'onda di espansione

Da semplici considerazioni trigonometriche, si ottiene

$$(V + dV)\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \mu - d\vartheta\right) = V\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) \quad (4.30)$$

dividendo ambo i membri per  $V\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \mu - d\vartheta\right)$  si ottiene

$$\frac{(V + dV)}{V} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \mu - d\vartheta\right)} \quad (4.31)$$

considerando che  $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{cos}x$  e considerando  $d\theta$  infinitesimo si ottiene

$$1 + \frac{dV}{V} = \frac{\text{cos}\mu}{\text{cos}\mu - d\theta\text{sen}\mu} \quad (4.32)$$

riordinando il membro a destra della (4.32), si può scrivere

$$1 + \frac{dV}{V} = \frac{1}{1 - d\theta\tan\mu} \quad (4.33)$$

ricordando l'espansione binomiale troncata al primo ordine  $\frac{1}{1 \pm \varepsilon} = 1 \mp \varepsilon$  si ottiene

$$1 + \frac{dV}{V} = 1 + d\theta\tan\mu \quad (4.34)$$

consideriamo il triangolo di Mach in figura 4.6

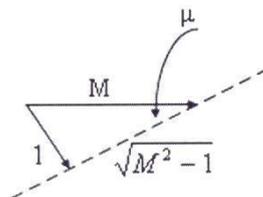


Figura 4.6 Rappresentazione del triangolo di Mach

dalla figura 4.6 si ottiene che  $\tan\mu = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$ , dunque

$$d\vartheta = \frac{\left(\frac{dV}{V}\right)}{\tan\mu} = \left(\frac{dV}{V}\right) \sqrt{M^2 - 1} \quad (4.35)$$

consideriamo ora la definizione di numero di Mach e la definizione di velocità del suono. Si ottiene

$$V = M \cdot c = M \cdot \sqrt{k \cdot R} \cdot \sqrt{T} = \text{costante} \cdot M \cdot \sqrt{T} \quad (4.36)$$

passando ai logaritmi e derivando si ottiene

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \quad (4.37)$$

considero la relazione (1.27) che lega la temperatura statica a quella totale in funzione del numero di Mach e del rapporto tra i calori specifici e, considerando la trasformazione adiabatica, si ottiene

$$T = \text{costante} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{-1} \quad (4.38)$$

Derivando la (4.38), si ottiene

$$\frac{dT}{T} = \frac{-1 \cdot \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{-2} \cdot \left(2M \frac{k-1}{2}\right) dM}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{-1}} = - \frac{(k-1)M dM}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} \quad (4.39)$$

Sostituendo la (4.39) alla (4.37) si ottiene

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{1 - (k-1)M}{2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} dM \quad (4.40)$$

Infine, sostituendo la (4.40) nella (4.35) si ottiene

$$d\vartheta = \frac{dV}{V} \sqrt{M^2 - 1} = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (4.41)$$

Integrando dunque la (4.41) tra il numero di Mach a monte e quello a valle dell'onda di espansione, si può ottenere l'estensione dell'angolo di apertura del ventaglio dell'onda stessa.

# CAPITOLO 5

## IMPLEMENTAZIONE DEL CODICE DI CALCOLO

Le equazioni viste fino ad ora possono essere implementate in un codice di calcolo, sviluppato in ambiente Matlab, per lo studio di un ugello di geometria convergente-divergente in cui fluisce gas a comportamento ideale, con moto adiabatico ed isoentropico. Il compito del codice di calcolo è permettere una verifica e un confronto dei risultati ottenuti durante la realizzazione del più complesso codice, che verrà sviluppato nel seguito, in cui verrà eliminata l'ipotesi semplificativa di isoentropicità del moto. Per questo motivo, il presente codice verrà sviluppato esclusivamente per la risoluzione di ugelli convergenti-divergenti con geometria tronco-conica. Essendo il programma di semplice scrittura, in questo capitolo si illustra solo il procedimento matematico seguito.

### **5.1 CONDIZIONI AL CONTORNO DEL PROBLEMA**

Nello studio del deflusso all'interno di un ugello, si debbono considerare una serie di condizioni al contorno che definiscono i dati del problema. Nel caso in esame, si considera l'ugello come completamente progettato, dunque si conoscono i principali parametri geometrici costituiti da: sezione di ingresso, sezione di gola, sezione di uscita e dalla lunghezza dei rispettivi tratti convergente e divergente.

Inoltre, devono essere noti i seguenti parametri termodinamici del fluido: la pressione totale all'ingresso, la temperatura totale all'ingresso, il rapporto tra i calori specifici e, infine, la pressione di scarico, che verrà opportunamente variata nel corso dello studio del comportamento dell'ugello.

## **5.2 DETERMINAZIONE DELLE PRESSIONI DI SCARICO DI RIFERIMENTO PER MOTO ISOENTROPICO**

Con i dati assegnati, è possibile ricavare le due pressioni per le quali la portata è massima e il deflusso è isoentropico, ovvero non avviene nessuna onda d'urto. A tale scopo è possibile, conoscendo il rapporto tra le aree di uscita e di gola e ricordando che la suddetta area è pari alla sezione critica, ricavare i numeri di Mach per moto supersonico e subsonico mediante l'inversione della nota equazione

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \cdot \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{\frac{k+1}{2 \cdot (k-1)}} \quad (5.1)$$

Determinati dunque i due valori del numero di Mach, si possono ricavare i valori delle pressioni di progetto subsoniche e supersoniche utilizzando la relazione

$$\frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (5.2)$$

I valori del numero di Mach e delle pressioni di progetto sono dei parametri di confronto molto utili. Nel codice di calcolo in cui verrà meno l'ipotesi di isoentropicità, questi valori verranno ricavati per via numerica.

## **5.3 POSIZIONAMENTO DELL'ONDA D'URTO ALLA SEZIONE DI SCARICO**

Altri due parametri di confronto validi sono la più piccola pressione che provoca la comparsa dell'onda d'urto normale e il corrispettivo numero di Mach. Questi ultimi vengono calcolati posizionando l'onda d'urto sulla sezione di scarico. In tale sezione, il numero di Mach è pari a quello di progetto in condizioni supersoniche ricavato al paragrafo precedente. Impostando, dunque, tale valore come quello presente a monte dell'onda d'urto, si può calcolare il valore di Mach a valle utilizzando la relazione

$$M_y^2 = \frac{M_x^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2 \cdot k}{k-1} \cdot M_x^2 - 1} \quad (5.3)$$

Ripetendo le stesse considerazioni, la pressione a valle dell'onda d'urto, si ricava con l'equazione

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{1+k \cdot M_x^2}{1+k \cdot M_y^2} \quad (5.4)$$

Qualsiasi pressione di scarico impostata compresa tra il valore della pressione appena ricavato e quello "di progetto" per moto subsonico, provocherà dunque un'onda d'urto che si posizionerà ad una certa coordinata assiale del divergente.

## **5.4 DETERMINAZIONE DELLA POSIZIONE DELL'ONDA D'URTO**

L'ultima funzione implementata in questo primo codice consiste nel calcolo della posizione esatta, all'interno del divergente, dell'onda d'urto normale. Per determinare tale posizione è stato implementato un procedimento matematico descritto nel testo di Alberto Cavallino e Mario Sovrano(1978); sia  $l'$  la distanza assiale tra la sezione di gola e l'onda d'urto normale e  $A'$  il valore della sezione in cui avviene l'onda d'urto normale. Si consideri l'equazione di continuità per fluidi comprimibili, rispettivamente prima e dopo l'onda d'urto normale

$$\frac{\dot{m}}{A^*} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_{01}}{\sqrt{T_0}} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (5.5)$$

$$\frac{\dot{m}}{A^*_2} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_{02}}{\sqrt{T_0}} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (5.6)$$

Essendo il numero di Mach unitario, la portata è bloccata al suo valore massimo. Inoltre, il moto è isoentropico sia a monte che a valle dell'onda d'urto, dunque, semplificando le due equazioni (5.5) e (5.6) otteniamo l'uguaglianza

$$A^*_2 \cdot p_{02} = A_g \cdot p_{01} \quad (5.7)$$

Alla luce di questa uguaglianza si può scrivere

$$\frac{A_u p_s}{A_2^* p_{02}} = \frac{A_u p_s}{A_g p_{01}} = \frac{A_u p_s}{A^* p_{01}} \quad (5.8)$$

Moltiplicando ora le relazioni (2.25) e (1.30) otteniamo

$$\frac{A_u p_s}{A^* p_0} = \frac{1}{M_s} \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_s^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \cdot \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_s^2 \right)^{\frac{-k}{k-1}} \quad (5.9)$$

Da cui, invertendo, si ricava il numero di Mach alla sezione di scarico.

Ora, mediante la relazione

$$\frac{p_{02}}{p_s} = \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_s^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (5.10)$$

Otengo il rapporto tra la pressione di scarico e la pressione totale a valle dell'onda d'urto. Essendo nota la pressione totale a monte dell'onda d'urto e avendo calcolato la pressione totale a valle della stessa, utilizzando la (3.27) opportunamente invertita si ottiene il numero di Mach a monte dell'onda d'urto. Mediante la (3.16), è possibile ricavare il numero di Mach a valle dell'onda d'urto. Ricordando che il moto considerato è perfettamente isoentropico, con la sola eccezione dell'onda d'urto, si può scrivere

$$\frac{A'}{A_g} = \frac{1}{M_x} \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_x^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (5.11)$$

Da cui si ricava agevolmente la posizione dell'onda d'urto

$$l' = \frac{\sqrt{\frac{A'}{A_g} - 1}}{\sqrt{\frac{A_u}{A_g} - 1}} \cdot l \quad (5.12)$$

Dove  $l$  è la lunghezza del tratto divergente.

# CAPITOLO 6

## STUDIO DEL MOTO MONODIMENSIONALE DI UN FLUIDO

Nei capitoli precedenti si è sempre parlato di deflusso monodimensionale di un gas ideale a regime permanente, sotto le ipotesi di trasformazioni adiabatiche e isoentropiche (a meno del fenomeno dell'onda d'urto). A questo punto si vuole generalizzare quanto fatto finora, mantenendo l'ipotesi di deflusso adiabatico monodimensionale di gas ideale a regime permanente, ma eliminando la condizione di isoentropicità attraverso il condotto. Questa generalizzazione è necessaria, poiché nei problemi pratici, spesso, oltre alla variazione di sezione lungo il condotto, si presentano fenomeni di attrito piuttosto che fenomeni di scambio di calore o di lavoro che non potrebbero essere studiati con le definizioni ricavate nei capitoli precedenti. Nel caso specifico del codice di calcolo implementato, oltre alla variazione di sezione del condotto, è necessario prendere in esame anche il fenomeno di attrito; il procedimento matematico che permette di ricavare le relazioni adatte allo studio del problema è riportato nel paragrafo seguente.

### **6.1 EQUAZIONI FISICHE E DEFINIZIONI**

L'analisi seguente è tratta dal testo di Ascher H. Saphiro (1953). Si riporta di seguito il procedimento adattato alla risoluzione di un problema in cui il deflusso di gas ideale è adiabatico, senza scambio di lavoro, avviene in un condotto dove le sezioni sono variabili ed è presente il fenomeno dell'attrito.

Consideriamo il deflusso in un condotto tra due sezioni poste ad una distanza infinitesima  $dx$ . Le definizioni e le equazioni fisiche vengono espresse in forma differenziale logaritmica, poiché questo procedimento permette una facile separazione delle variabili.

*Equazione di stato:*

Come visto fino ad ora, per un gas perfetto l'equazione di stato è pari a

$$p = \rho \cdot R \cdot T \quad (6.1)$$

Che in forma logaritmica diventa

$$\log p = \log \rho + \log R + \log T \quad (6.2)$$

Quindi, differenziando ambo i membri otteniamo

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (6.3)$$

*Velocità del suono:*

L'espressione della velocità del suono in un gas ideale, come già illustrato, è pari a

$$c^2 = k \cdot R \cdot T \quad (6.4)$$

Passando ai logaritmi

$$\frac{dc}{c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dT}{T} \quad (6.5)$$

*Definizione del numero di Mach:*

Dalla definizione del numero di Mach e dall'equazione (6.4) otteniamo

$$M^2 = \frac{V^2}{c^2} = \frac{V^2}{k \cdot R \cdot T} \quad (6.6)$$

Che in forma logaritmica diventa

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{dV^2}{V^2} - \frac{dT}{T} \quad (6.7)$$

*Equazione di continuità (senza immissioni o prelievi di portata)*

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 \quad (6.8)$$

*Primo Principio della Termodinamica (per trasformazioni adiabatiche, con en. potenziale costante e senza scambio di lavoro)*

$$\frac{dT}{T} + \frac{k-1}{2} \cdot M^2 \cdot \frac{dV^2}{V^2} = 0 \quad (6.9)$$

*Equazione della quantità di moto*

La somma delle forze agenti sul materiale all'interno del volume di controllo sono uguali all'incremento della quantità di moto del fluido che fluisce attraverso il volume di controllo. Otteniamo dunque

$$p \cdot A - (p + dp)(A + dA) - r_w \cdot dA_w = w(V + dV) - w \cdot V \quad (6.10)$$

Nella espressione sopra  $r_w$  rappresenta la tensione a taglio dell'attrito agente sull'area del condotto  $dA_w$ , mentre  $w$  è la portata. La tensione a taglio è relazionata al coefficiente di attrito  $f$  attraverso l'equazione

$$r_w = f \cdot \rho \cdot \frac{V^2}{2} \quad (6.11)$$

Dalla definizione di diametro idraulico  $D$  otteniamo

$$\frac{dA_w}{A} = \frac{4 \cdot dx}{D} \quad (6.12)$$

Sostituendo dunque le equazioni (6.11) e (6.12) nella equazione (6.10) e ricordando che  $\rho \cdot V^2 = k \cdot p \cdot M^2$  otteniamo

$$\frac{dp}{p} + \frac{dA}{A} + \frac{k \cdot M^2}{2} \cdot \frac{dV^2}{V^2} + \frac{k \cdot M^2}{2} \cdot 4 \cdot f \cdot \frac{dx}{D} = 0 \quad (6.13)$$

*Temperatura e pressione totale*

La temperatura e la pressione totale sono parametri molto utili per problemi che coinvolgono il deflusso monodimensionale. La temperatura totale può essere espressa come

$$T_0 = T \cdot \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2\right) \quad (6.14)$$

o, in forma differenziale, come

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{dT}{T} + \frac{\frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \cdot \frac{dM^2}{M^2} \quad (6.15)$$

Mentre la pressione totale può essere espressa come

$$p_0 = p \cdot \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (6.16)$$

o in forma differenziale come

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{\frac{k \cdot M^2}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2} \frac{dM^2}{M^2} \quad (6.17)$$

*Secondo Principio della Termodinamica:*

Per un gas perfetto la variazione di entropia all'interno di un volume di controllo è pari a

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT}{T} - \frac{k-1}{k} \frac{dp}{p} \quad (6.18)$$

che in termini di temperatura e pressione totali diventa

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT_0}{T_0} - \frac{k-1}{k} \frac{dp_0}{p_0} \quad (6.19)$$

## **6.2 COEFFICIENTI DI INFLUENZA ED EQUAZIONI RISOLUTIVE**

Nel paragrafo precedente sono state individuate nove relazioni indipendenti tra i parametri differenziali, chiamate equazioni (6.3), (6.5), (6.7), (6.8), (6.9), (6.13), (6.15), (6.17), (6.18). Essendoci undici variabili differenziali, due possono essere scelte come variabili indipendenti e nove come variabili dipendenti. Come variabili indipendenti sono state scelte quelle più facili da ottenere nella pratica, come indicato sotto

*Variabili indipendenti:*

$$\frac{dA}{A}, \quad 4 \cdot f \cdot \frac{dx}{D}$$

*Variabili dipendenti*

$$\frac{dM^2}{M^2}, \quad \frac{dV}{V}, \quad \frac{dc}{c}, \quad \frac{dT}{T}, \quad \frac{d\rho}{\rho}, \quad \frac{dp}{p}, \quad \frac{dT_0}{T_0}, \quad \frac{dp_0}{p_0}, \quad \frac{ds}{c_p}$$

per ottenere ogni variabile dipendente in termini dei due parametri indipendenti si può utilizzare un qualsiasi metodo di risoluzione di un sistema di n equazioni lineari algebriche.

Per esempio, per eliminazione, per  $\frac{dM^2}{M^2}$  si ottiene l'equazione

$$\frac{dM^2}{M^2} = -\frac{2\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)}{1-M^2} \frac{dA}{A} + \frac{kM^2\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)}{1-M^2} 4f \frac{dx}{D} \quad (6.20)$$

i coefficienti moltiplicativi delle variabili indipendenti vengono chiamati coefficienti di influenza poiché indicano l'influenza di ogni variabile indipendente su ogni parametro dipendente.

Oltre alle relazioni differenziali è possibile ottenere dalle equazioni precedentemente illustrate, le seguenti relazioni integrali

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{A_1 M_1}{A_2 M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (6.21)$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (6.22)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{A_1 V_1}{A_2 V_2} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} \quad (6.23)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_{02}}{T_{01}} \cdot \frac{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_2^2} \quad (6.24)$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (6.25)$$

queste formule sono state ricavate scrivendo l'equazione di continuità fra sezioni 1 e 2 e introducendo la definizione di Mach assieme all'equazione di stato dei gas ideali e all'espressione della velocità del suono.

### **6.3 METODO GENERALE DI SOLUZIONE**

Grazie alle equazioni ricavate nel paragrafo 6.2, fornite le condizioni iniziali come dati del problema, sarà possibile ricavare il numero di Mach in ogni sezione mediante una integrazione numerica dell'equazione (6.20). Successivamente, conoscendo il numero di Mach in ogni sezione, sarà semplice ricavare qualsiasi altra grandezza termodinamica incognita semplicemente risolvendo le equazioni integrali (6.21), (6.22), (6.23), (6.24), (6.25), oppure applicando le note correlazioni tra stati totali, stati statici e numeri di Mach.

Mediante le equazioni del paragrafo precedente è possibile, dunque, ricavare un codice di calcolo che permette la descrizione del deflusso di un gas a comportamento ideale attraverso un ugello a sezione variabile (convergente-divergente) con presenza di attrito.

L'equazione (6.18) risulta essere l'equazione cardine dell'intero codice sviluppato all'interno della tesi. Tale equazione sarà infatti integrata lungo tutta la lunghezza dell'ugello convergente-divergente, permettendo di ricavare il numero di Mach in ogni sezione. Come è ovvio, l'intervallo di integrazione numerica, ossia la distanza tra le varie sezioni considerate, dovrà essere il più piccolo possibile.

# CAPITOLO 7

## DESCRIZIONE DEL CODICE DI CALCOLO IMPLEMENTATO

In questo capitolo sarà descritta l'implementazione del codice di calcolo generale per l'analisi del deflusso di un gas ideale all'interno di un ugello convergente-divergente

### 7.1 DEFINIZIONE DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO DEL PROBLEMA

```
% principali parametri termodinamici e geometrici
p0_1 = 8; %[bar]
T0_1 = 30; %[°C]
p_2 = 4; %[bar]
k = 1.4;
R = 287.05; %[J/(kg K)]
A_1 = 5*10^-4; %[m^2]
A_g = 2.74*10^-4; %[m^2]
A_2 = 6.59*10^-4; %[m^2]
l_conv = 0.050; %[m]
l_div = 0.100; %[m]

% andamento aree e conseguenti diametri di convergente e
divergente
A_c_fx = @(xx) A_1+(A_g-A_1)/l_conv*xx;
A_d_fx = @(xx) A_g+(A_2-A_g)/l_div*xx;
D_c_fx = @(xx) (4*A_c_fx(xx)/pi).^ (1/2);
D_d_fx = @(xx) (4*A_d_fx(xx)/pi).^ (1/2);

% conversione udm a grandezze SI
p0_1 = p0_1*10^5; %[Pa]
p_2 = p_2*10^5; %[Pa]
T0_1 = T0_1+273.15; %[K]
```

In queste prime righe di codice si definiscono le condizioni al contorno del problema;  $p_{0\_1}$  è pari alla pressione totale in ingresso,  $T_{0\_1}$  è la temperatura totale in ingresso,  $p_2$  è la

pressione statica di scarico per cui si vuole analizzare il comportamento dell'ugello,  $k$  è il rapporto tra i calori specifici del fluido in esame,  $R$  è la costante particolare del gas considerato,  $A_1$ ,  $A_g$  e  $A_2$  sono rispettivamente le aree di ingresso, di gola e di uscita dell'ugello mentre  $l_{conv}$  e  $l_{div}$  sono rispettivamente la lunghezza del convergente e del divergente.

## **7.2 DETERMINAZIONE DEL COEFFICIENTE DI ATTRITO**

```
function f = f_fun(M_i,T0_1,p0_1,A_star,M_star,x,D_fx,k,R)

% calcolo la portata elaborata nelle condizioni imposte (per il
% calcolo della portata assumo ugello isoentropico - p0_1 = cost)
p_star = p0_1/(1+(k-1)*M_star^2/2)^(k/(k-1));
T_star = T0_1/(1+(k-1)*M_star^2/2);
rho_star = p_star/(R*T_star);
w = rho_star*A_star*M_star*sqrt(k*R*T_star);

T_i = T0_1/(1+(k-1)*M_i^2/2);

% equazione interpolante i valori di viscosità dell'aria
mu = (-9e-9*(T_i-273.15)^2+4e-5*(T_i-273.15)+0.0168)*10^-3;

Re = ((4*w)/(pi*D_fx(x)))/mu;

if M_i<=1

    % formula di Churchill, applicabile per Re>4000 - tubi lisci
    f = ((-4*log10((7/Re)^0.9))^(-2));

else

    f = ((-4*log10((7/Re)^0.9))^(-2))/2.3;

end
```

Con questa funzione si determinano i coefficienti di attrito da applicare di volta in volta ad ogni sezione valutata dal codice di calcolo. Infatti in ogni sezione il numero di Reynolds varia e, dunque, varia il coefficiente di attrito. La formula utilizzata è l'equazione di Churchill, con validità per numeri di Reynolds maggiori di 4000 e tubi lisci. La viscosità dell'aria è valutata in funzione della temperatura mediante un'equazione interpolante, costruita su una griglia di valori sperimentali misurati in laboratorio al variare della temperatura stessa. Il coefficiente di attrito nel caso supersonico viene diviso per 2.3; il motivo di tale scelta verrà spiegato nel prossimo capitolo.

## **7.3 RISOLUZIONE DEL CONVERGENTE SUBSONICO CON UGELLO SOFFOCATO**

```

% parto dalla sezione di gola e cammino a ritroso per raggiungere
l'ingresso

dx_c = l_conv/500;
M_conv_vect = (l_conv-2*dx_c:-2*dx_c:0)*0;
err_M = 100;
while err_M > 0.005

    M_2i = 1;

    M_conv_vect_new = (l_conv-dx_c:-dx_c:0)*0;
    i = length(M_conv_vect_new)+1;
    for x = l_conv-dx_c:-dx_c:0

        M_1i = fzero(@(M_1i) M_2i^2-((-2*(1+(k-
1)*(M_1i+M_2i)/2)^2/2)*(A_c_fx(x+dx_c)-A_c_fx(x)))/((1-
((M_1i+M_2i)/2)^2)*(A_c_fx(x+dx_c)+A_c_fx(x))/2)+...
(k*(M_1i+M_2i)/2)^2*(1+(k-
1)*(M_1i+M_2i)/2)^2/2)*4*f_fun((M_1i+M_2i)/2,T0_1,p0_1,A_g,1,x,D
c_fx,k,R)*dx_c)/((1-
((M_1i+M_2i)/2)^2)*(D_c_fx(x+dx_c)+D_c_fx(x))/2))*((M_1i+M_2i)/2)^
2-M_1i^2,0.5);

        i = i-1;
        M_conv_vect_new(i) = M_1i;
        M_2i = M_1i;

    end

    err_M = max(abs(M_conv_vect_new(1:2:end-1)-M_conv_vect));
    clear M_conv_vect
    M_conv_vect = M_conv_vect_new;
    if err_M > 0.005
        dx_c = dx_c/2;
    end

end

% calcolo la conseguente portata di massa elaborata in condizioni
di soffocamento
p_1 = p0_1/(1+(k-1)*M_conv_vect(1)^2/2)^(k/(k-1));
T_1 = T0_1/(1+(k-1)*M_conv_vect(1)^2/2);
rho_1 = p_1/(R*T_1);
w_choking = rho_1*A_1*M_conv_vect(1)*sqrt(k*R*T_1);

```

in questa parte del codice viene analizzato l'andamento del numero di Mach nel convergente, effettuando una integrazione numerica partendo dalla sezione di gola e risalendo verso la sezione di imbocco. Si è reso necessario procedere "a ritroso" in quanto si è verificato che, partendo dalla sezione di imbocco e proseguendo verso la sezione di gola, nell'intorno di Mach unitario il calcolo tende a divergere impedendo di ottenere alcun risultato.

I numeri di Mach nelle sezioni del convergente, distanziate tra loro dall'intervallo di integrazione, saranno valutati mediante l'integrazione numerica dell'equazione (6.18) partendo dalla sezione di gola con condizioni soniche e procedendo fino a giungere alla sezione di imbocco. L'intervallo  $dx_c$  di integrazione è diminuito ad ogni iterazione fino ad individuare il massimo valore che permetta di raggiungere la convergenza del calcolo.

Conoscendo i valori del numero di Mach in ogni sezione del convergente, si può considerare il valore all'imbocco, calcolare la temperatura statica e la pressione statica all'ingresso mediante le relazioni (1.30) e (1.27) e, utilizzando l'equazione di stato dei gas ideali, ricavare la densità statica in ingresso da cui, mediante l'equazione di continuità, si può ricavare la portata di soffocamento.

Questa parte di codice risolve dunque il convergente nel caso in cui alla sezione di gola vengono raggiunte le condizioni soniche; i risultati ottenuti possono essere utilizzati per risolvere il divergente in tutti i casi in cui nella sezione critica dell'ugello si raggiungano tali condizioni.

## **7.4 RISOLUZIONE DELL'UGELLO SOFFOCATO IN CONDIZIONI DI USCITA SUBSONICHE**

```

%% divergente subsonico
% parto dalla sezione di gola e cammino verso la sezione di uscita

dx_d_sub = l_div/500;
M_div_vect_sub = (2*dx_d_sub:2*dx_d_sub:l_div)*0;
err_M = 100;
while err_M > 0.005

    M_1i = 1;

    M_div_vect_sub_new = (dx_d_sub:dx_d_sub:l_div)*0;
    i = 0;
    for x = 0:dx_d_sub:l_div-dx_d_sub

        M_2i = fzero(@(M_2i) M_2i^2-((-2*(1+(k-
1)*(M_1i+M_2i)/2)^2/2)*(A_d_fx(x+dx_d_sub)-A_d_fx(x)))/((1-
(M_1i+M_2i)/2)^2)*(A_d_fx(x+dx_d_sub)+A_d_fx(x))/2)+...

```

```

                (k*((M_1i+M_2i)/2)^2*(1+(k-
1)*((M_1i+M_2i)/2)^2/2)*4*f_fun((M_1i+M_2i)/2,T0_1,p0_1,A_g,1,x,D_
d_fx,k,R)*dx_d_sub)/((1-
((M_1i+M_2i)/2)^2*(D_d_fx(x+dx_d_sub)+D_d_fx(x))/2))*((M_1i+M_2i)
/2)^2-M_1i^2,0.5);

        i = i+1;
        M_div_vect_sub_new(i) = M_2i;
        M_1i = M_2i;

    end

    err_M = max(abs(M_div_vect_sub_new(2:2:end)-M_div_vect_sub));

clear M_div_vect_sub
    M_div_vect_sub = M_div_vect_sub_new;
    if err_M > 0.005
        dx_d_sub = dx_d_sub/2;
    end

end

% calcolo la pressione statica allo scarico per questa condizione
di funzionamento
T_2sub = T0_1/(1+(k-1)*M_div_vect_sub(end)^2/2);
rho_2sub = w_choking/(A_2*M_div_vect_sub(end)*sqrt(k*R*T_2sub));
p_2sub = rho_2sub*R*T_2sub;

```

In questa parte di codice si risolve il divergente dell'ugello per la condizione di funzionamento subsonica quando vengono raggiunte le condizioni soniche nella sezione di gola. Utilizzando i risultati ottenuti con la parte del codice analizzata nel paragrafo 7.1, si procede all'integrazione numerica dell'equazione (6.18) nel divergente, partendo dalla sezione di gola dove il numero di Mach è posto unitario, e procedendo verso la sezione di scarico, trovando in ogni sezione legata all'intervallo di integrazione, il corrispondente numero di Mach. Anche in questo caso, l'intervallo di integrazione viene diminuito con un ciclo iterativo, in modo da individuare il massimo valore che permetta di raggiungere la convergenza del calcolo. A conclusione del calcolo, si ricaverà il numero di Mach allo scarico da cui, conoscendo la pressione statica imposta in tale sezione, mediante l'equazione (1.30) sarà possibile ricavare la pressione totale allo scarico, con cui si potrà definire un coefficiente di perdita, come si vedrà nell'ultimo paragrafo di questo capitolo.

## **7.5 RISOLUZIONE DELL'UGELLO SOFFOCATO IN CONDIZIONI DI USCITA SUPERSONICHE SENZA ONDE D'URTO**

Con la seguente sezione di codice si procede al calcolo del valore della pressione di scarico che permette di ottenere la condizione di uscita supersonica senza la comparsa di onde d'urto all'interno del divergente (condizione di ugello adattato)

```

%% divergente supersonico senza ou
% parto dalla sezione di gola e cammino verso la sezione di uscita

dx_d_super = l_div/500;
M_div_vect_super = (2*dx_d_super:2*dx_d_super:l_div)*0;
err_M = 100;
while err_M > 0.005

    M_1i = 1;

    M_div_vect_super_new = (dx_d_super:dx_d_super:l_div)*0;
    i = 0;
    for x = 0:dx_d_super:l_div-dx_d_super

        M_2i = fzero(@(M_2i) M_2i^2-((-2*(1+(k-
1)*((M_1i+M_2i)/2)^2/2)*(A_d_fx(x+dx_d_super)-A_d_fx(x)))/((1-
((M_1i+M_2i)/2)^2)*(A_d_fx(x+dx_d_super)+A_d_fx(x))/2)+...
(k*((M_1i+M_2i)/2)^2*(1+(k-
1)*((M_1i+M_2i)/2)^2/2)*4*f_fun((M_1i+M_2i)/2,T0_1,p0_1,A_g,1,x,D_
d_fx,k,R)*dx_d_super)/((1-
((M_1i+M_2i)/2)^2*(D_d_fx(x+dx_d_super)+D_d_fx(x))/2))*((M_1i+M_2
i)/2)^2-M_1i^2,1.5);

        i = i+1;
        M_div_vect_super_new(i) = M_2i;
        M_1i = M_2i;

    end

    err_M = max(abs(M_div_vect_super_new(2:2:end)-
M_div_vect_super));
    clear M_div_vect_super
    M_div_vect_super = M_div_vect_super_new;
    if err_M > 0.005
        dx_d_super = dx_d_super/2;
    end

end
end

```

```

% calcolo la pressione statica allo scarico per questa condizione
di funzionamento
T_2super = T0_1/(1+(k-1)*M_div_vect_super(end)^2/2);
rho_2super =
w_choking/(A_2*M_div_vect_super(end)*sqrt(k*R*T_2super));
p_2super = rho_2super*R*T_2super;

```

Si può notare come, anche in questo caso, la procedura di integrazione sia la stessa dei casi precedenti. Dunque ponendo il valore del numero di Mach unitario all'ingresso del divergente, l'integrazione numerica avviene per intervalli  $dx_d\_super$  progressivamente decrescenti, muovendosi dalla sezione di gola verso la sezione di scarico, ottenendo così i numeri di Mach supersonici corrispondenti ad ogni sezione considerata nel divergente. Si ottiene, dunque, anche il numero di Mach allo scarico per questa condizione che, unitamente alla pressione di scarico imposta come condizione al contorno, fornisce la pressione totale alla sezione di uscita per il caso considerato, che sarà utilizzata per la determinazione del coefficiente di perdita.

## **7.6 UGELLO SOFFOCATO CON LA FORMAZIONE DI ONDE D'URTO NORMALI ALL'INTERNO DEL DIVERGENTE**

Nel caso in cui, con le condizioni al contorno imposte dall'utente, nel divergente supersonico si formino onde d'urto normali, il codice innanzitutto individua la posizione dell'onda d'urto nel divergente, dopodiché risolve completamente l'ugello.

```

%% divergente supersonico con ou in sezione di uscita

p_2ou2 = p_2super*((2*k*M_div_vect_super(end)^2)/(k+1)-(k-1)/(k+1));

```

Il codice sopra illustrato viene richiamato dopo aver completato la risoluzione dell'ugello supersonico adattato e permette di individuare il valore limite di pressione allo scarico per cui l'onda d'urto normale si posiziona alla sezione di uscita del divergente. Tale valore di pressione allo scarico sarà il valore limite inferiore per ottenere onde d'urto normali all'interno del divergente.

Per il calcolo della pressione di scarico limite sopra descritta, si fa uso della relazione (3.23), dove è nota la pressione statica a monte dell'onda d'urto e il numero di Mach corrispondente. Se invece la pressione di scarico imposta come condizione al contorno porta alla formazione di onde d'urto normali all'interno del divergente, si dovrà procedere con un metodo iterativo che permette la collocazione dell'onda d'urto. A questo scopo, è stata implementata la funzione sotto riportata

- 59 - | 7.6 UGELLO SOFFOCATO CON LA FORMAZIONE DI ONDE D'URTO NORMALI ALL'INTERNO DEL DIVERGENTE

```

function p =
ps_fx(x_ou,dx_d,A_d_fx,D_d_fx,l_div,T0_1,p0_1,w,k,R,mod)

% verifico che la posizione richiesta per l'ou abbia senso fisico
if x_ou <= 0 || x_ou >= l_div

    p = -1000000;

else
    %% 1° tratto (0 --> x) - divergente supersonico senza ou
    % parto dalla sezione di gola e cammino verso la sezione
    posizionata in x

    M_1i = 1;

    dx_1 = x_ou/ceil(x_ou/dx_d);
    M_div_vect_1 = (dx_1:dx_1:x_ou)*0;
    i = 0;
    for x = 0:dx_1:x_ou-dx_1

        M_2i = fzero(@(M_2i) M_2i^2-((-2*(1+(k-
1)*(M_1i+M_2i)/2)^2/2)*(A_d_fx(x+dx_1)-A_d_fx(x)))/((1-
((M_1i+M_2i)/2)^2)*(A_d_fx(x+dx_1)+A_d_fx(x))/2)+...
(k*((M_1i+M_2i)/2)^2*(1+(k-
1)*(M_1i+M_2i)/2)^2/2)*4*f_fun((M_1i+M_2i)/2,T0_1,p0_1,A_d_fx(0),
1,x,D_d_fx,k,R)*dx_1)/((1-
((M_1i+M_2i)/2)^2)*(D_d_fx(x+dx_1)+D_d_fx(x))/2))*((M_1i+M_2i)/2)^
2-M_1i^2,1.5);

        i = i+1;
        M_div_vect_1(i) = M_2i;
        M_1i = M_2i;

    end

    %% 2° tratto (x --> l_div)
    % parto dalla sezione posizionata in x e cammino verso la
    sezione di uscita

    % Individuo il numero di Mach a valle dell'onda d'urto
    M_1i = ((M_div_vect_1(end)^2+2/(k-
1))/(2*k*M_div_vect_1(end)^2/(k-1)-1))^(1/2);

    dx_2 = (l_div-x_ou)/ceil((l_div-x_ou)/dx_d);
    M_div_vect_2 = (x_ou+dx_2:dx_2:l_div)*0;

```

```

i = 0;
for x = x_ou:dx_2:l_div-dx_2

    M_2i = fzero(@(M_2i) M_2i^2-((-2*(1+(k-
1)*((M_1i+M_2i)/2)^2/2)*(A_d_fx(x+dx_2)-A_d_fx(x)))/((1-
((M_1i+M_2i)/2)^2)*(A_d_fx(x+dx_2)+A_d_fx(x))/2)+...
(k*((M_1i+M_2i)/2)^2*(1+(k-
1)*((M_1i+M_2i)/2)^2/2)*4*f_fun((M_1i+M_2i)/2,T0_1,p0_1,A_d_fx(0),
1,x,D_d_fx,k,R)*dx_2)/((1-
((M_1i+M_2i)/2)^2)*(D_d_fx(x+dx_2)+D_d_fx(x))/2))*((M_1i+M_2i)/2)^
2-M_1i^2,0.5);

    i = i+1;
    M_div_vect_2(i) = M_2i;
    M_1i = M_2i;

end

%% calcolo la pressione statica allo scarico per questa condizione
di funzionamento
T_s = T0_1/(1+(k-1)*M_div_vect_2(end)^2/2);
rho_s = w/(A_d_fx(l_div)*M_div_vect_2(end)*sqrt(k*R*T_s));
p_s = rho_s*R*T_s;

p0_s = p_s*(1+(k-1)*M_div_vect_2(end)^2/2)^(k/(k-1));

if mod == 1
    p = p_s;
elseif mod == 2
    p = [p0_s p_s];
end

end

end

```

in questa funzione viene passata una posizione dell'onda d'urto che, in prima iterazione, è posta pari alla metà della lunghezza del divergente. Successivamente si procede alla determinazione dei numeri di Mach in ogni sezione del divergente mediante integrazione numerica dell'equazione (6.18) in condizioni supersoniche, partendo dalla sezione di gola fino ad arrivare alla posizione dell'onda d'urto. Qui è calcolato il numero di Mach a valle dell'onda d'urto mediante l'implementazione dell'equazione (3.16). Successivamente si procede alla determinazione dei numeri di Mach nelle restanti sezioni del divergente

integrando numericamente l'equazione (6.18) in condizioni subsoniche. Una volta ricavato il numero di Mach in uscita, mediante le equazioni (1.27), (1.30), l'equazione di stato dei gas ideali e l'equazione di continuità, si possono ricavare la pressione statica e quella totale allo scarico dell'ugello per quella data posizione dell'onda d'urto. La pressione statica verrà dunque confrontata con la pressione di scarico imposta come condizione al contorno del problema e, se non sarà coincidente, l'onda d'urto sarà spostata e il ciclo sarà reiterato fino a giungere a convergenza. Una volta raggiunta la convergenza, la funzione fornisce dunque la posizione dell'onda d'urto e la conseguente pressione totale allo scarico, permettendo il calcolo dei vari coefficienti di perdita.

## **7.7 UGELLO SOFFOCATO CONDIZIONI DI USCITA SUPERSONICHE CON ONDE D'URTO OBLIQUE**

Come si è visto nel capitolo 3.4 nel caso in cui le pressioni di scarico imposte come condizioni al contorno siano inferiori alla pressione che provoca l'onda d'urto normale nella sezione di scarico e superiori alla pressione allo scarico che permette il deflusso con ugello perfettamente adattato, le grandezze termofluidodinamiche si adattano mediante un'onda d'urto obliqua esterna all'ugello stesso. Per valutare le grandezze termodinamiche a valle dell'onda d'urto obliqua e l'inclinazione della stessa, si implementano le equazioni del capitolo 4 nella funzione sottostante

```
function
[ang_ou_ob,p_2ou_ob]=ou_ob(p_1,p_2,M_1,T0_1,w_choking,A_d,k,R)

%calcolo angoli caratteristici
rho_2_rho_1=(((k+1)/(k-1))*(p_2/p_1))+1)/(((k+1)/(k-1))+
(p_2/p_1));
sigma = asind((sqrt(((p_2/p_1)-1)/(k*(M_1^2)*(1-
(1/rho_2_rho_1))))));

ang_ou_ob = sigma-atan((tand(sigma)/rho_2_rho_1));

%calcolo grandezze a valle dell'onda
M_2ou_ob = sqrt(((1/(p_2/p_1))-1)/(((sind(sigma-ang_ou_ob))^2)*(1-
rho_2_rho_1)*k));
T_2ou_ob = T0_1/(1+(k-1)*M_2ou_ob^2/2);
rho_2ou_ob =
w_choking/(A_d*sind(ang_ou_ob)*M_2ou_ob*sqrt(k*R*T_2ou_ob));

p_2ou_ob = rho_2ou_ob*R*T_2ou_ob;

end
```

Questa funzione fornisce l'angolo dell'onda d'urto obliqua e la pressione totale a valle della stessa quando vengono forniti i parametri totali all'ingresso, la portata di soffocamento, la pressione di scarico di progetto (pari alla pressione a monte dell'onda d'urto) e la pressione di scarico imposta come condizione al contorno (pari alla pressione a valle dell'onda d'urto). La funzione fa ricorso alle equazioni (1.27), (1.30), all'equazione di stato dei gas ideali e all'equazione di continuità.

## **7.8 UGELLO NON SOFFOCATO**

Nel caso in cui la pressione di scarico imposta come condizione al contorno sia maggiore di quella che produce condizioni soniche nella sezione di gola, la pressione totale è ricavata mediante una funzione esterna

```
function p =
ps_fM1(M_1,dx_c,dx_d,A_c_fx,A_d_fx,D_c_fx,D_d_fx,l_conv,l_div,p0_1
,T0_1,k,R,mod)

%% 1° tratto (0 --> l_conv) - convergente

% calcolo la portata elaborata nelle condizioni imposte
p_1 = p0_1/(1+(k-1)*M_1^2/2)^(k/(k-1));

T_1 = T0_1/(1+(k-1)*M_1^2/2);
rho_1 = p_1/(R*T_1);
w = rho_1*A_c_fx(0)*M_1*sqrt(k*R*T_1);

M_1i = M_1;

M_conv_vect = (dx_c:dx_c:l_conv)*0;
i = 0;
for x = 0:dx_c:l_conv-dx_c

    M_2i = fzero(@(M_2i) M_2i^2-((-2*(1+(k-
1)*((M_1i+M_2i)/2)^2/2)*(A_c_fx(x+dx_c)-A_c_fx(x)))/((1-
((M_1i+M_2i)/2)^2)*(A_c_fx(x+dx_c)+A_c_fx(x))/2)+...
(k*((M_1i+M_2i)/2)^2*(1+(k-
1)*((M_1i+M_2i)/2)^2/2)*4*f_fun((M_1i+M_2i)/2,T0_1,p0_1,A_c_fx(0),
M_1,x,D_c_fx,k,R)*dx_c)/((1-
((M_1i+M_2i)/2)^2)*(D_c_fx(x+dx_c)+D_c_fx(x))/2))*((M_1i+M_2i)/2)^
2-M_1i^2,M_1i);

    i = i+1;
```

- 63 - | 7.8 UGELLO NON SOFFOCATO

```

    M_conv_vect(i) = M_2i;
    M_1i = M_2i;

end

%% 2° tratto (0 --> l_div) - divergente

% Individuo il numero di Mach in ingresso al divergente
M_1i = M_conv_vect(end);

M_div_vect = (dx_d:dx_d:l_div)*0;
i = 0;
for x = 0:dx_d:l_div-dx_d

    M_2i = fzero(@(M_2i) M_2i^2-((-2*(1+(k-
1)*((M_1i+M_2i)/2)^2/2)*(A_d_fx(x+dx_d)-A_d_fx(x)))/((1-
((M_1i+M_2i)/2)^2)*(A_d_fx(x+dx_d)+A_d_fx(x))/2)+...
(k*((M_1i+M_2i)/2)^2*(1+(k-
1)*((M_1i+M_2i)/2)^2/2)*4*f_fun((M_1i+M_2i)/2,T0_1,p0_1,A_c_fx(0),
M_1,x,D_d_fx,k,R)*dx_d)/((1-
((M_1i+M_2i)/2)^2)*(D_d_fx(x+dx_d)+D_d_fx(x))/2))*((M_1i+M_2i)/2)^
2-M_1i^2,M_1i/2);

    i = i+1;
    M_div_vect(i) = M_2i;
    M_1i = M_2i;

end

%% calcolo la pressione statica allo scarico per questa condizione
di funzionamento
T_s = T0_1/(1+(k-1)*M_div_vect(end)^2/2);
rho_s = w/(A_d_fx(l_div)*M_div_vect(end)*sqrt(k*R*T_s));
p_s = rho_s*R*T_s;

p0_s = p_s*(1+(k-1)*M_div_vect(end)^2/2)^(k/(k-1));

if mod == 1
    p = p_s;
elseif mod == 2
    p = [p0_s p_s w];
end

```

end

In questa funzione, date le grandezze totali all'ingresso e i parametri geometrici dell'ugello, vengono calcolate la pressione statica e totale allo scarico, imponendo un certo numero di Mach nella sezione di imbocco che sarà variato iterativamente, fino a convergenza. Ad ogni ciclo, dunque, è integrata l'equazione (6.18) nel caso subsonico a partire dalla sezione di gola verso l'imbocco e a partire dalla sezione di gola verso lo scarico. Una volta ottenuto il numero di Mach allo scarico, si calcolano la pressione statica e totale in quella sezione mediante le formule (1.27), (1.30), l'equazione di stato dei gas ideali e l'equazione di continuità. La pressione statica ricavata è dunque confrontata con quella imposta come condizione al contorno del problema e, se non è coincidente, il ciclo è reiterato fino a convergenza fornendo la pressione totale per il caso in esame. Tale pressione sarà poi utilizzata per il calcolo dei coefficienti di perdita.

## **7.9 RISOLUZIONE DELL'UGELLO**

Con questa parte di codice l'ugello viene risolto in funzione della pressione di scarico imposta come condizione al contorno

```
%% risolvo l'ugello

p_2sub_upper =
ps_fm1(M_conv_vect(1), dx_c, dx_d, A_c_fx, A_d_fx, D_c_fx, D_d_fx, l_conv
, l_div, p0_1, T0_1, k, R, 1);
p_2sub_lower =
ps_fx(0.00001, dx_d, A_d_fx, D_d_fx, l_div, T0_1, p0_1, w_choking, k, R, 1);

if p_2 >= p_2sub_upper
    M_1 = fzero(@(M_1) p_2-
ps_fm1(M_1, dx_c, dx_d, A_c_fx, A_d_fx, D_c_fx, D_d_fx, l_conv, l_div, p0_1
, T0_1, k, R, 1), [0.00001 M_conv_vect(1)]);
    p =
ps_fm1(M_1, dx_c, dx_d, A_c_fx, A_d_fx, D_c_fx, D_d_fx, l_conv, l_div, p0_1
, T0_1, k, R, 2);
    Yp = (p0_1-p(1))/(p(1)-p(2));
    Yp_mod = (p0_1-p(1))/(p0_1-p(2));
    display(['subsonico non soffocato con Mach alla sezione di
ingresso pari a ' num2str(M_1)])
    display(['portata elaborata ' num2str(p(3)) ' kg/s'])
    display(['coefficiente di perdita di pressione totale '
num2str(Yp)])
    display(['coefficiente di perdita di pressione totale
modificato ' num2str(Yp_mod)])
elseif p_2 < p_2sub_upper && p_2 >= p_2sub_lower
```

```

    p0_2 = p_2sub*(1+(k-1)*M_div_vect_sub(end)^2/2)^(k/(k-1));
    Yp = (p0_1-p0_2)/(p0_2-p_2sub);
    Yp_mod = (p0_1-p0_2)/(p0_1-p_2sub);
    display('subsonico soffocato')
    display(['portata elaborata ' num2str(w_choking) ' kg/s'])
    display(['coefficiente di perdita di pressione totale '
num2str(Yp)])
    display(['coefficiente di perdita di pressione totale
modificato ' num2str(Yp_mod)])
elseif p_2 < p_2sub_lower && p_2 > p_2ou2
    x_ou = fzero(@(x_ou) p_2-
ps_fx(x_ou,dx_d,A_d_fx,D_d_fx,l_div,T0_1,p0_1,w_choking,k,R,1),[0.
00001 l_div]);
    p =
ps_fx(x_ou,dx_d,A_d_fx,D_d_fx,l_div,T0_1,p0_1,w_choking,k,R,2);
    Yp = (p0_1-p(1))/(p(1)-p(2));
    Yp_mod = (p0_1-p(1))/(p0_1-p(2));
    display(['supersonico con formazione di ou normale nel
divergente, a distanza ' num2str(x_ou) ' metri dalla sezione di
gola'])
    display(['portata elaborata ' num2str(w_choking) ' kg/s'])
    display(['coefficiente di perdita di pressione totale '
num2str(Yp)])
    display(['coefficiente di perdita di pressione totale
modificato ' num2str(Yp_mod)])
elseif p_2 == p_2ou2
    M_2 = ((M_div_vect_super(end)^2+2/(k-
1))/(2*k*M_div_vect_super(end)^2/(k-1)-1))^(1/2);
    T_2 = T0_1/(1+(k-1)*M_2^2/2);
    rho_2 = w_choking/(A_d_fx(l_div)*M_2*sqrt(k*R*T_2));
    p_2 = rho_2*R*T_2;
    p0_2 = p_2*(1+(k-1)*M_2^2/2)^(k/(k-1));
    Yp = (p0_1-p0_2)/(p0_2-p_2ou2);
    Yp_mod = (p0_1-p0_2)/(p0_1-p_2ou2);
    display('supersonico con ou in sezione uscita')
    display(['portata elaborata ' num2str(w_choking) ' kg/s'])
    display(['coefficiente di perdita di pressione totale '
num2str(Yp)])
    display(['coefficiente di perdita di pressione totale
modificato ' num2str(Yp_mod)])
elseif p_2 < p_2ou2 && p_2 > p_2super
    [ang_ou_ob,p_2ou_ob] =
ou_ob(p_2super,p_2,M_div_vect_super(end),T0_1,w_choking,A_d_fx(l_d
iv),k,R);
    p0_2 = p_2super*(1+(k-1)*M_div_vect_super(end)^2/2)^(k/(k-1));
    Yp = (p0_1-p0_2ou_ob)/(p0_2-p_2ou_ob);
    Yp_mod = (p0_1-p0_2ou_ob)/(p0_1-p_2ou_ob);
    display('supersonico con ou oblique a valle sezione uscita')
    display(['angolo onda obliqua ' num2str(ang_ou_ob)])

```

```

    display(['coefficiente di perdita di pressione totale '
num2str(Yp)])
    display(['coefficiente di perdita di pressione totale
modificato ' num2str(Yp_mod)])
elseif p_2 == p_2super
    p0_2 = p_2super*(1+(k-1)*M_div_vect_super(end)^2/2)^(k/(k-1));
    Yp = (p0_1-p0_2)/(p0_2-p_2super);
    Yp_mod = (p0_1-p0_2)/(p0_1-p_2super);
    display('supersonico adattato - condizioni di progetto')
    display(['portata elaborata ' num2str(w_choking) ' kg/s'])
    display(['coefficiente di perdita di pressione totale '
num2str(Yp)])
    display(['coefficiente di perdita di pressione totale
modificato ' num2str(Yp_mod)])
elseif p_2 < p_2super
    display('supersonico onde di espansione a valle sezione
uscita')
end

```

pertanto, in funzione della pressione di scarico, si determina in quale condizione di funzionamento lavora l'ugello, viene calcolata la pressione totale e sono ricavati i coefficienti di perdita relativi al funzionamento nelle condizioni imposte. Tali coefficienti di perdita si definiscono come

$$y_p = \frac{p_{0i} - p_{0s}}{p_{0s} - p_s} \qquad y_{p-modificato} = \frac{p_{0i} - p_{0s}}{p_{0i} - p_s}$$

L'  $y_{p-modificato}$  risulta particolarmente comodo in quanto, mentre il coefficiente di perdita  $y_p$  può crescere indefinitamente (fino anche a superare il valore di due) se è presente all'interno dell'ugello un'onda d'urto normale, il coefficiente di perdita modificato  $y_{p-modificato}$  è sempre compreso tra 0 e 1.

# CAPITOLO 8

## IL COEFFICIENTE DI ATTRITO

Nel modello generale implementato, l'ipotesi di isoentropicità non è soddisfatta, a causa della presenza del fenomeno dell'attrito. In molti casi reali l'attrito è un fattore importante nel determinare la variazione di entropia del fluido, ed è dunque utile fornire una caratterizzazione.

Si nota che nell'equazione di Bernoulli (1.10) compare il termine  $\delta R$  che rappresenta il lavoro delle forze dissipative riferito all'unità di massa del fluido. Il meccanismo dell'attrito interno che insorge nel moto di un fluido entro un condotto è associato a variazioni radiali di velocità, quindi è un fenomeno tipicamente non monodimensionale. È tuttavia possibile riferire gli effetti dell'attrito interno nel moto di un fluido all'interno di condotti in termini di proprietà "medie" nella sezione considerata, utilizzando tali valori per trattare il moto come perfettamente monodimensionale.

Per la definizione del fenomeno, si riporta la risoluzione presente nel testo di Alberto Cavallini e Mario Sovrano (1978).

### 8.1 DEFINIZIONE DEL COEFFICIENTE DI ATTRITO

Si consideri la figura 8.1 dove si osserva un condotto cilindrico, ed in esso il volume elementare di fluido compreso tra le sezioni normali di ascissa  $x$  e  $(x + dx)$ .

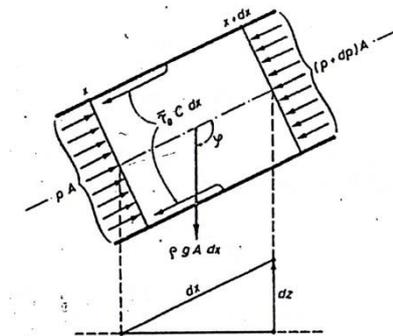


Figura 8.1 forze agenti su un elemento di fluido compreso tra due sezioni normali del condotto a distanza infinitesima. Alberto Cavallino, Mario Sovrano(1978)

Le forze che agiscono sull'elemento di fluido considerato sono:

forza d'attrito alla parete cilindrica perimetrale  $\tau_0 \cdot C \cdot dx$ , ove:

$\tau_0$ : sforzo tangenziale di attrito nella parete cilindrica laterale

$C$ : perimetro della sezione normale al condotto

forza peso:  $\rho \cdot g \cdot A \cdot dx$ , ove

$A$ : area della sezione normale del condotto

$g$ : accelerazione gravitazionale

$\rho$ : densità del fluido

forza di pressione sulle sezioni laterali dell'elemento cilindrico:

$$Ap \quad \text{e} \quad A(p + dp)$$

L'equazione della quantità di moto applicata all'elemento di fluido considerato porge:

$$-A \cdot dp - \tau_0 C \cdot dx + \rho g A \cdot dx \cos\varphi = W \cdot du \quad (8.1)$$

Ove l'angolo  $\varphi$  è definito nella figura 8.1.

Dividendo tutti i termini per  $\rho A$ , ricordando che  $W = \rho \cdot u \cdot A$  si ottiene:

$$-v \cdot dp - \tau_0 \frac{C}{A} \frac{dx}{\rho} - g \cdot dx = \frac{du^2}{2} \quad (8.2)$$

Il confronto della 8.2 con l'equazione di Bernoulli, porge immediatamente

$$\delta R = \frac{4\tau_0}{\rho} \frac{dx}{D} \quad (8.3)$$

Il fattore di attrito  $f$  viene definito dalla relazione:

$$f = \frac{\tau_0}{\frac{\rho \cdot u^2}{8}} \quad (8.5)$$

Tenendo conto della relazione (8.5) la (8.3) si riduce a:

$$\delta R = f \frac{dx u^2}{D 2} \quad (8.6)$$

L'analisi dimensionale mostra che, nel caso di moto completamente sviluppato all'interno di condotti cilindrici geometricamente simili, il fattore d'attrito  $f$  è funzione del numero di Reynolds del deflusso, del numero di Mach di deflusso e della scabrezza relativa del condotto. Sviluppi teorici indicano che per regimi di moto subsonici il fattore di attrito  $f$  è quasi indipendente dal numero di Mach. Per moti subsonici completamente sviluppati si ha pertanto che il coefficiente di attrito dipende solo dal Numero di Reynolds e dalla scabrezza relativa del condotto.

Per condotti cilindrici a sezione circolare la dipendenza del fattore di attrito dal numero di Reynolds è rappresentata dal diagramma di Moody in figura 8.2

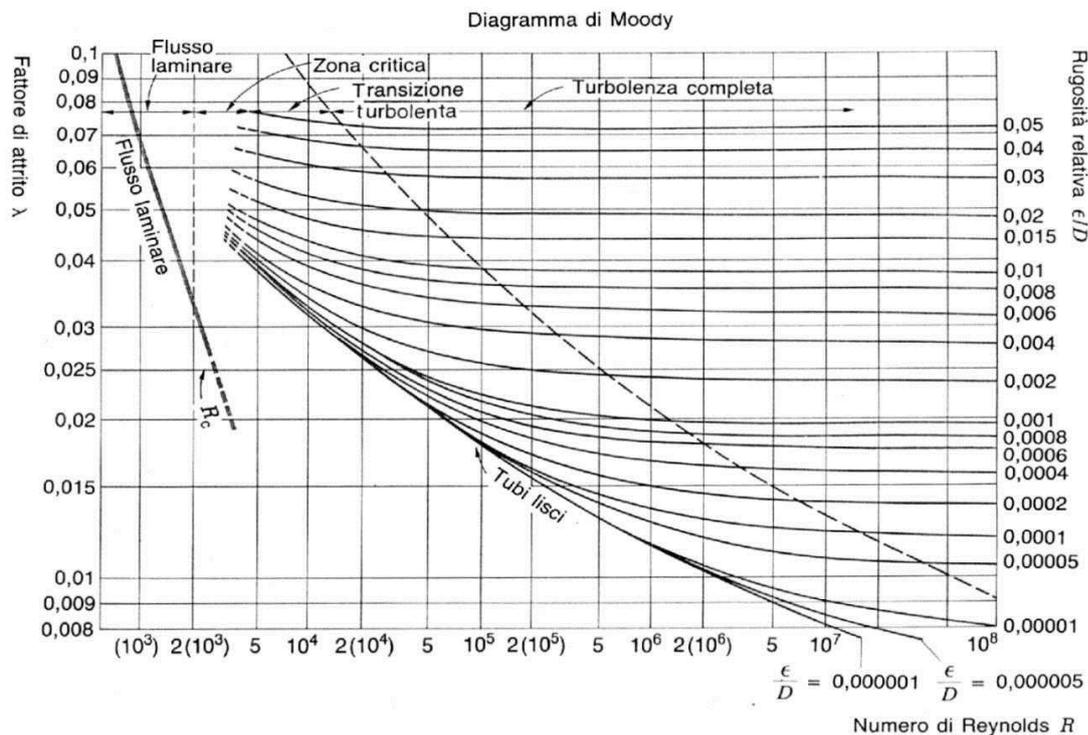


Figura 8.2 Diagramma di Moody. Claudio Datel(2003)

## 8.2 RELAZIONI PER IL CALCOLO DEL COEFFICIENTE DI ATTRITO

Dal diagramma si può notare come la dipendenza tra  $f$  e  $Re$  sia definita in termini analitici solo per bassi numeri di  $Re$  e, dunque, per moto laminare. L'equazione che definisce tale dipendenza, in termini di coefficiente di attrito Darcy-Weisbach è data da

$$f = \frac{64}{Re} \quad (8.7)$$

Per il campo degli alti numeri di Reynolds sono presenti diverse relazioni valide in intervalli ben definiti, che consentono di ricavare il coefficiente di attrito noti la scabrezza relativa del condotto e il numero di Reynolds. Tali relazioni sono state ricavate sperimentalmente e sono ampiamente reperibili in letteratura.

Si riportano, a scopo informativo, alcune tra le più note correlazioni per il calcolo del coefficiente d'attrito, con i relativi campi di validità.

*Relazione di H.Blasius (condotta idraulicamente liscia  $\epsilon/D = 0$ )*

$$f = 0.079 Re^{-0.25}$$

*Relazione di Nikuradse ( $10^5 < Re < 10^8$ )*

$$f = 0.0008 + 0,0552 Re^{-0.237}$$

*Relazione di Von Karman (valida per condotte lisce)*

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4 \text{Log}(Re\sqrt{f}) - 0.2$$

Altre più recenti relazioni sono descritte sotto

*Relazione di Colebrook ( $Re > 3000$ )*

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4 \cdot \text{Log}_{10} \left( \frac{\epsilon}{3.7D} + \frac{1.256}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (8.8)$$

*Relazione di Churchill ( $Re > 4000$ )*

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4 \cdot \text{Log}_{10} \left( \frac{0.27\epsilon}{D} + \left( \frac{7}{Re} \right)^{0.9} \right) \quad (8.9)$$

I coefficienti di attrito così ricavati, sono validi per moto subsonico e, quindi, non sono funzione del numero di Mach.

In realtà, se si considera il deflusso supersonico, il coefficiente di attrito varia anche in funzione del numero di Mach della corrente. Nel deflusso all'interno dell'ugello convergente-divergente, la corrente per basse pressioni allo scarico, raggiunge condizioni supersoniche; pertanto, in questi casi l'utilizzo delle correlazioni appena illustrate, produce un'evidente sovrastima delle perdite per attrito. Infatti, come riportato dal testo di Alberto Cavallini e Mario Sovrano (1978), dal testo di Ascher H. Saphiro (1953) e dall'articolo di Joseph H. Keenan e Ernest P. Neumann (1943) il campo di variazione del coefficiente di attrito per numeri di Mach supersonici è minore rispetto al campo valutato con il diagramma di Moody. Ascher H. Saphiro (1953) suggerisce, mediante prove sperimentali, che il valore del coefficiente di attrito per numeri di Mach compresi tra 1.3 e 3 e numeri di Reynolds compresi tra  $2.4 \cdot 10^4$  e  $7 \cdot 10^6$  risulta all'incirca dimezzato rispetto ai valori valutati nelle prove sperimentali del diagramma di Moody. Ciò sarà tenuto in considerazione nella implementazione del codice di calcolo come sarà illustrato nel successivo capitolo.

# CAPITOLO 9

## VALIDAZIONE DEL CODICE DI CALCOLO

Per valutare l'effettiva validità del codice di calcolo implementato, si deve procedere alla validazione dei risultati ottenuti dallo stesso. Tale validazione sarà effettuata mediante confronto tra i risultati del codice di calcolo e i risultati ottenuti tramite simulazione fluidodinamica di due geometrie distinte. A seguito di tale confronto si potranno effettuare alcune considerazioni che permetteranno di evidenziare i limiti e le potenzialità del codice di calcolo monodimensionale implementato. Nonostante si riconosca che la validazione mediante CFD non sia propriamente la soluzione ottimale, la scelta di utilizzare la fluidodinamica computazionale per effettuare tale validazione è stata obbligata, in quanto non sono reperibili in letteratura dati sperimentali sufficienti per eseguire una validazione. Gli errori tra il codice di calcolo monodimensionale e la CFD sono stati valutati con la relazione:

$$errore = \frac{\text{valore codice} - \text{valore CFD}}{\text{valore CFD}}$$

Le due geometrie simulate sono geometricamente diverse tra loro; la prima è un semplice convergente-divergente con angolo di convergenza e di divergenza (geometria tronco-conica), mentre la seconda è un convergente-divergente con geometria ad arco di parabola. Anche le condizioni al contorno scelte per le prove sono molto differenti tra loro e spazzano ampi range di funzionamento sia in termini di pressione che in termini di temperatura (si va, per le condizioni termodinamiche totali all'ingresso, da 8 bar e 30 °C fino a 30 bar e 400 °C). In tal modo si è potuto testare il codice di calcolo in un numero elevato di casi nettamente diversi tra loro.

## **9.1 DESCRIZIONE DELLE GEOMETRIE DA SIMULARE**

Le geometrie in esame, come spiegato precedentemente, sono molto simili tra loro per quanto riguarda le sezioni caratteristiche ma piuttosto diverse per quanto riguarda la forma delle generatrici.

Per ogni geometria si forniscono i valori di diametro di ingresso  $D_i$ , diametro di gola  $D_g$ , diametro di uscita  $D_u$ , lunghezza del convergente  $L_c$ , lunghezza del divergente  $L_d$ .

### *Geometria 1: Tronco-conica*

$$D_i = 0,030m$$

$$D_g = 0,020m$$

$$D_u = 0,027m$$

$$L_c = 0,050m$$

$$L_d = 0,100m$$

### *Geometria 2: Arco di parabola*

$$D_i = 0,035m$$

$$D_g = 0,020m$$

$$D_u = 0,028m$$

$$L_c = 0,050m$$

$$L_d = 0,050m$$

## **9.2 DESCRIZIONE DELLA MESH**

La mesh utilizzata è una mesh tridimensionale, tetraedrica, con boundary layer prismatico. La mesh risulta essere piuttosto fitta per riuscire a risolvere al meglio le discontinuità caratteristiche delle onde d'urto. Il boundary layer risulta definito da quindici layers prismatici, in modo da valutare più correttamente possibile il fenomeno dell'attrito parietale. Per eseguire la validazione, la geometria è stata divisa in quattro parti in modo da poter sfruttare la simmetria; in questo modo si è diminuita la quantità di calcoli effettuati dal calcolatore (semplificazione particolarmente utile in quanto la mesh risulta essere molto fitta) e, dunque, anche il tempo necessario a far convergere pienamente le varie simulazioni.

Il computer in uso è dotato di CPU intel core i7 2,70 GHz quad core con 8Gb di RAM e con le specifiche tecniche sopracitate, le simulazioni fluidodinamiche impiegano dai venticinque minuti alle due ore per giungere a piena convergenza.

### **9.3 CASO DI DEFLUSSO SUBSONICO**

Si descrive in questo paragrafo il comportamento del codice nel caso di deflusso puramente subsonico all'interno dell'ugello. Il range considerato per pressioni e temperature totali all'ingresso spazia tra gli 8 bar e 30°C e i 30 bar e 400°C.

Si analizza ora la prima geometria:

Pressione totale in ingresso = 8bar

Temperatura totale in ingresso = 30°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
7.9	0.14063	0.1494	-0.05864	0.12329	0.12997	-0.0514	0.22835	0.21386	0.06775
7.8	0.13655	0.1459	-0.06397	0.12014	0.12731	-0.0567	0.32132	0.30185	0.06449
7.7	0.13648	0.1459	-0.06445	0.12009	0.12731	-0.0567	0.39086	0.36751	0.06354

Pressione totale in ingresso = 10bar

Temperatura totale in ingresso = 300°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
9.1	0.1735	0.1619	0.07156	0.14785	0.13935	0.06099	0.52841	0.49083	0.07656
9.3	0.15788	0.1535	0.02866	0.13635	0.13306	0.02473	0.47225	0.44323	0.06547
9.7	0.14931	0.1469	0.01653	0.12991	0.12807	0.01436	0.31734	0.29897	0.06146

Pressione totale in ingresso = 20bar

Temperatura totale in ingresso = 150°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
18.3	0.14277	0.1487	-0.04012	0.12494	0.12948	-0.0350	1.2087	1.13133	0.06838
19	0.12741	0.1356	-0.06064	0.11301	0.11944	-0.0538	0.95218	0.05952	0.059518
19.3	0.12525	0.1337	-0.0633	0.11131	0.11794	-0.0562	0.8041	0.05660	0.056603

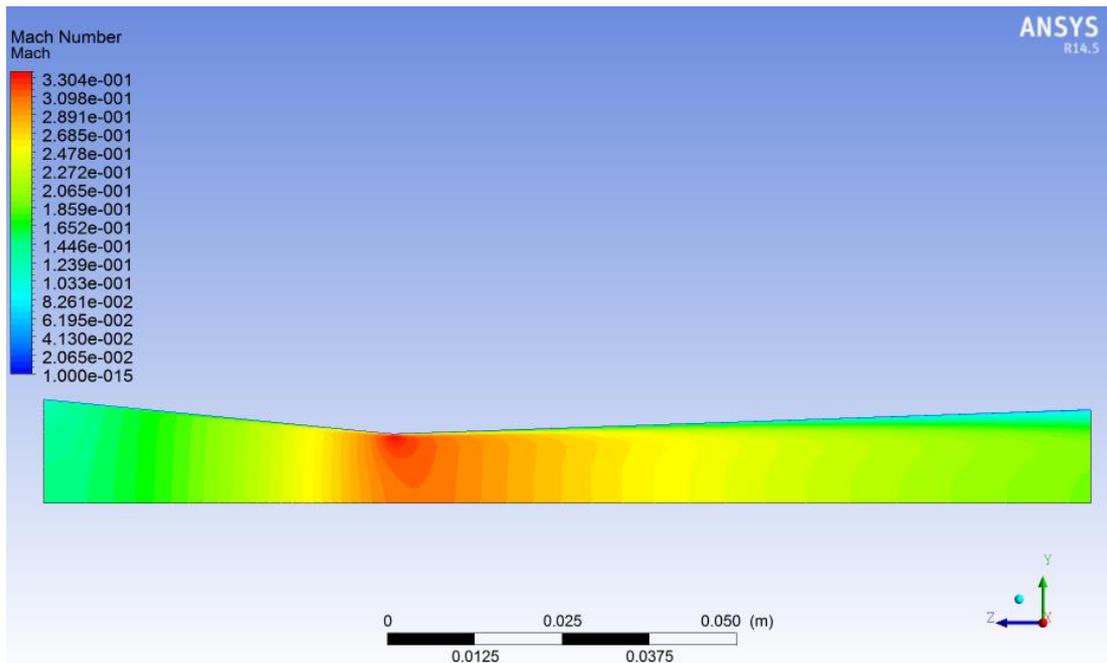
Pressione totale in ingresso = 30bar

Temperatura totale in ingresso = 400°C

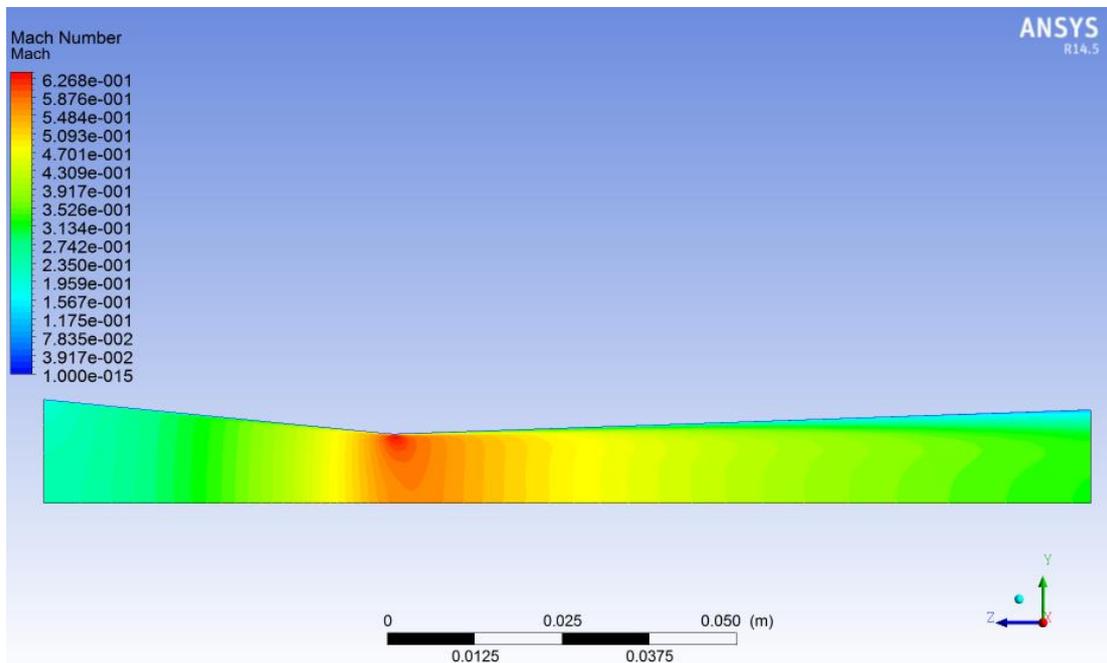
Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
28	0.13554	0.1377	-0.01583	0.11936	0.12105	-0.0139	1.2907	1.21772	0.059935
27	0.14746	0.1598	-0.07749	0.12851	0.13782	-0.0675	1,4471	1,42800	0.013373

Si osserva dalla tabella che gli errori spaziano in un campo che va all'incirca dall'1% al 7%. Questo risultato si può considerare accettabile, considerando che si stanno confrontando risultati di un procedimento monodimensionale con risultati ottenuti grazie ad software che analizza il campo di moto in maniera tridimensionale implementando modelli di turbolenza avanzati.

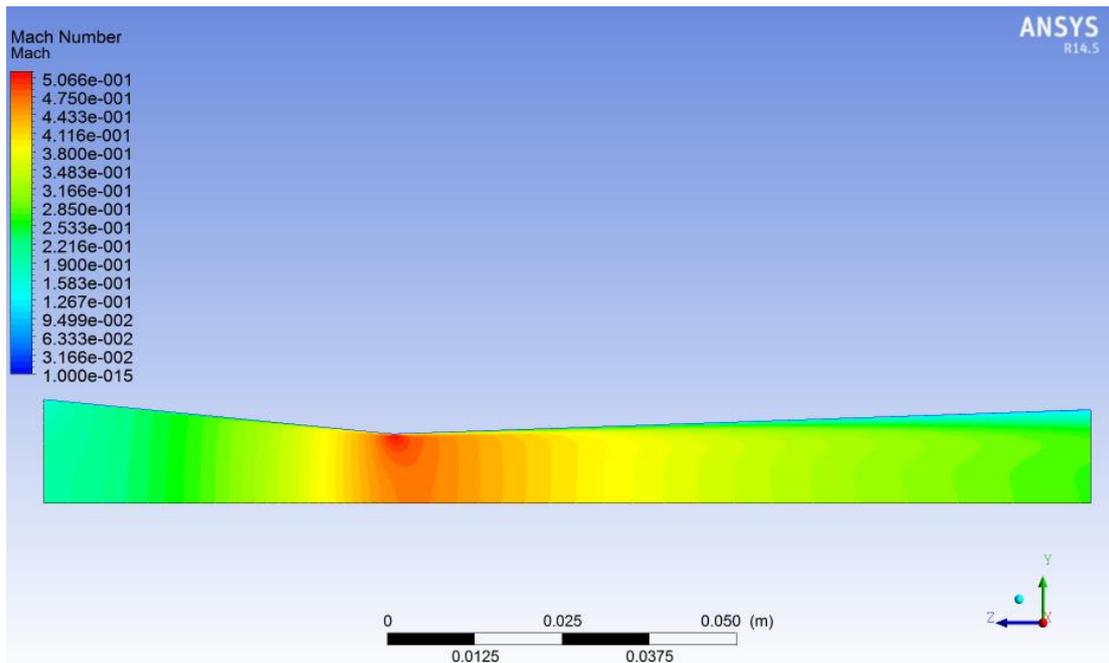
Come si evince dalle tabelle sopra riportate, l'errore sulla portata è sempre presente e in ogni caso positivo. Da ciò si può dedurre che, nella simulazione CFD, sia sempre presente un distacco dello strato limite che non può essere contemplato dal codice di calcolo. Infatti, un eventuale distacco di vena va ad influenzare l'effettiva sezione di deflusso del fluido che, in particolare, risulterà minore rispetto a quella considerata dal codice di calcolo. In tal caso, i valori dei parametri termodinamici e dinamici rilevati dal codice non saranno esattamente uguali a quelli rilevati dalla CFD. Per verificare la veridicità dell'assunzione, sono stati "plottati" gli andamenti del numero di Mach per alcuni dei casi analizzati (figure 9.1, 9.2, 9.3, 9.4).



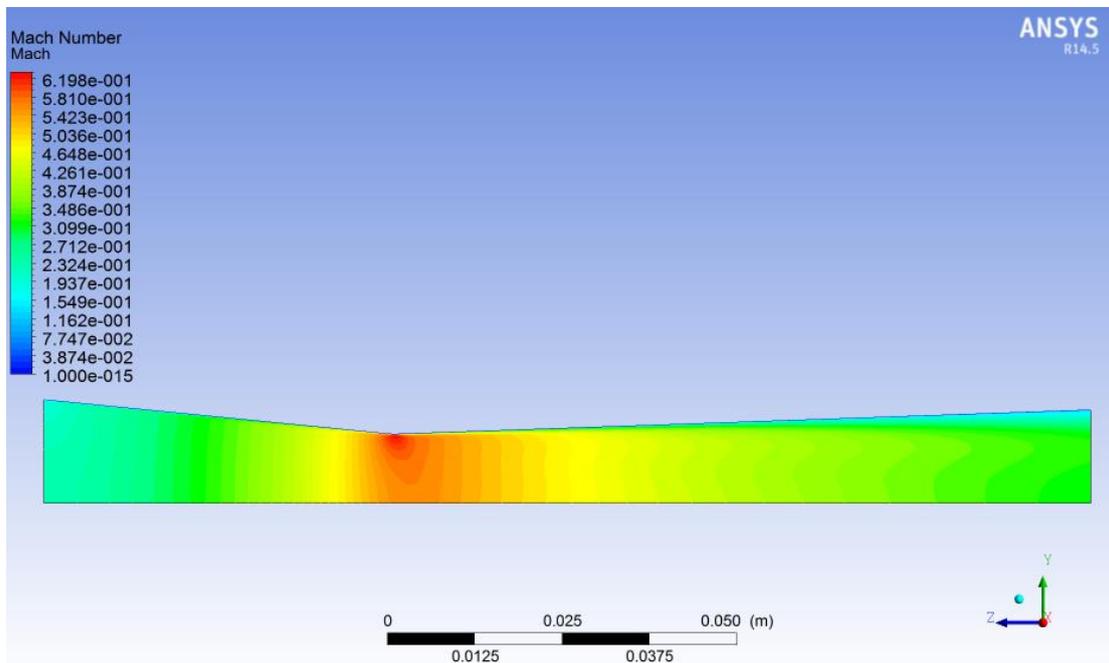
*Figura 9.1 Andamento del numero di Mach nella prima geometria del caso con pressione totale all'ingresso di 8 bar, temperatura totale all'ingresso di 30°C e pressione di scarico di 7.8 bar*



*Figura 9.2 Andamento del numero di Mach nella prima geometria del caso con pressione totale all'ingresso di 10 bar, temperatura totale all'ingresso di 300°C e pressione di scarico di 9 bar*



*Figura 9.3 Andamento del numero di Mach nella prima geometria del caso con pressione totale all'ingresso di 8 bar, temperatura totale all'ingresso di 30°C e pressione di scarico di 7.8 bar*



*Figura 9.4 Andamento del numero di Mach nella prima geometria del caso con pressione totale all'ingresso di 30 bar, temperatura totale all'ingresso di 400°C e pressione di scarico di 28 bar*

Si constata come, in effetti, sia sempre presente un (seppur molto lieve) distacco dello strato limite vicino alla sezione di scarico, che giustifica i piccoli scostamenti tra le portate computate dal codice e dalla CFD.

Come ultima considerazione si nota come gli errori tra i coefficienti di pressione siano a volte positivi e a volte negativi; questo comportamento induce a pensare che all'interno di tali incertezze confluiscono errori di tipo numerico.

Si analizza ora la seconda geometria:

Pressione totale in ingresso = 8bar

Temperatura totale in ingresso = 30°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
7.8	0.26346	0.2138	0.23229	0.20852	0.17614	0.18384	0.32778	0.28723	0.14116
7.7	0.268	0.2125	0.26106	0.21136	0.17527	0.20589	0.398	0.34856	0.141854

Pressione totale in ingresso = 10bar

Temperatura totale in ingresso = 100°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
9.6	0.27043	0.2091	0.29313	0.21287	0.17296	0.23075	0.46204	0.40638	0.136957
9.8	0.26448	0.2130	0.24142	0.20916	0.17563	0.19092	0.33107	0.29209	0.133421

Pressione totale in ingresso = 20bar

Temperatura totale in ingresso = 150°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
19	0.25068	0.2030	0.23463	0.20044	0.16877	0.18763	0.97023	0.85896	0.129531
19.5	0.23628	0.1972	0.19814	0.19112	0.16372	0.16027	0.74666	0.66295	0.126272
19.8	0.24713	0.2045	0.20837	0.19816	0.16979	0.16708	0.4451	0.39641	0.122816

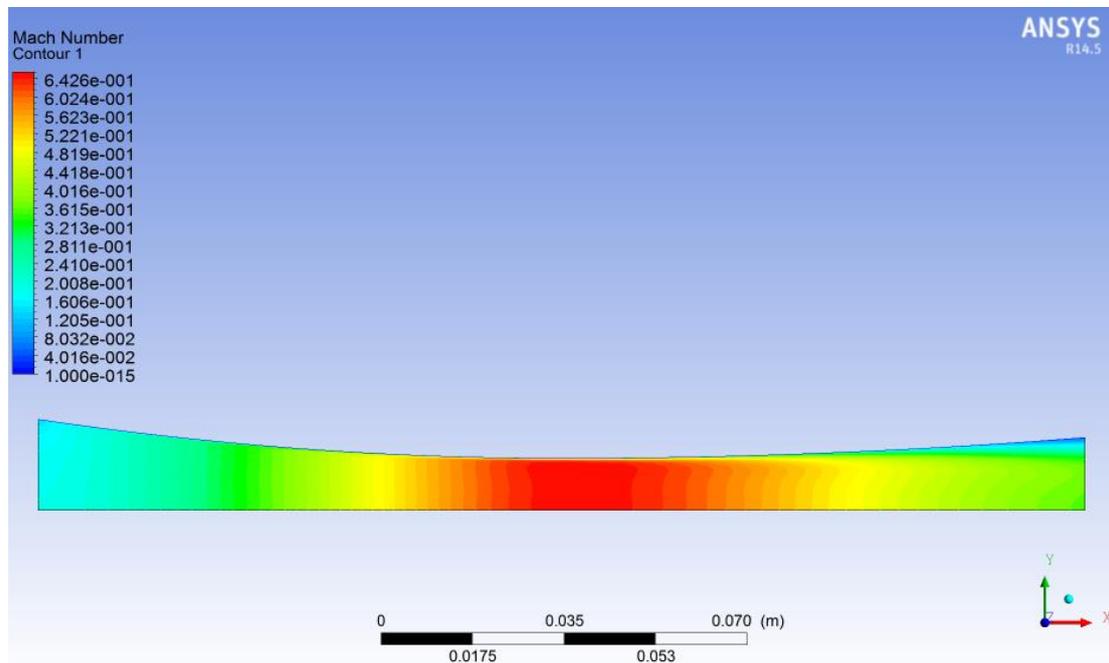
Pressione totale in ingresso = 30bar

Temperatura totale in ingresso = 200°C

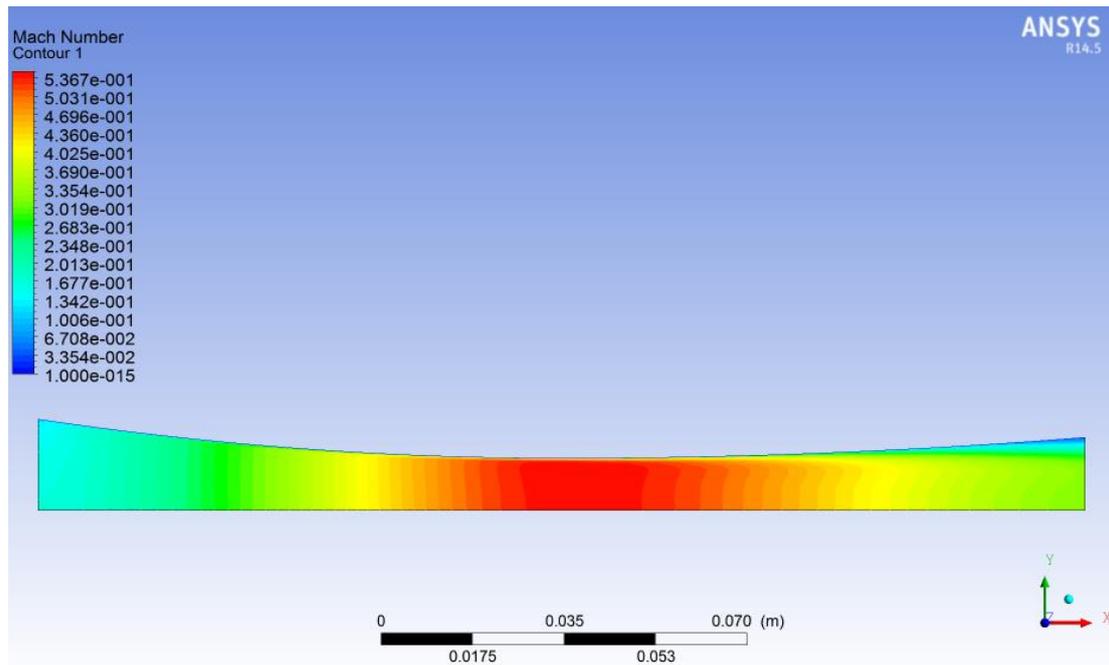
Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
28	0.26694	0.2011	0.32727	0.16744	0.12104	0.38327	1.5678	1.38623	0.130981
29.9	0.24163	0.1994	0.21162	0.19461	0.16627	0.17045	0.51759	0.46195	0.120436

Si nota come, in questo caso, gli scostamenti tra i risultati del codice monodimensionale e la CFD siano sensibilmente più elevati. Si osserva infatti, che gli stessi spaziano in un campo che varia tra il 12 e il 25% circa. Dalle tabelle dei risultati, comunque, si può notare che l'errore sulla portata è sensibilmente più elevato del caso precedente; infatti, lo stesso varia in un intervallo tra 12% e 14%, mentre nel caso precedente l'intervallo era all'incirca dimezzato. Da questa osservazione si evince che, probabilmente, con questa geometria il distacco dello strato limite è sensibilmente più presente rispetto alla geometria precedente.

Per meglio quantificare il fenomeno, si osservino i risultati relativi al caso con pressione totale e temperatura totale all'ingresso di 20 bar e 100°C al variare della pressione di scarico plottati nelle figure 9.5 e 9.6



*Figura 9.5 Andamento del numero di Mach nella seconda geometria del caso con pressione totale all'ingresso di 20 bar, temperatura totale all'ingresso di 150°C e pressione di scarico di 18.7 bar*



*Figura 9.6 Andamento del numero di Mach nella seconda geometria del caso con pressione totale all'ingresso di 20 bar, temperatura totale all'ingresso di 150°C e pressione di scarico di 19 bar*

In figura 9.5 e 9.6 si osserva un consistente distacco dello strato limite il quale, mano a mano che la pressione di scarico aumenta e le velocità in gioco diminuiscono, diventa sempre meno presente, fino ad un valore minimo al di sotto del quale non si osservano ulteriori cambiamenti. Confrontando le figure sopra con le tabelle dei risultati, si vede come il caso con errori maggiori sia effettivamente quello con distacco di vena fluida più consistente, mentre mano a mano che il distacco si affievolisce, gli errori sui coefficienti di perdita diminuiscono fino ad un minimo del 20%, dove lo strato limite risulta però ancora distaccato, con errore sulla portata del 12%.

Per meglio confrontare le geometrie 1 e 2, si affiancano le figure relative a due casi

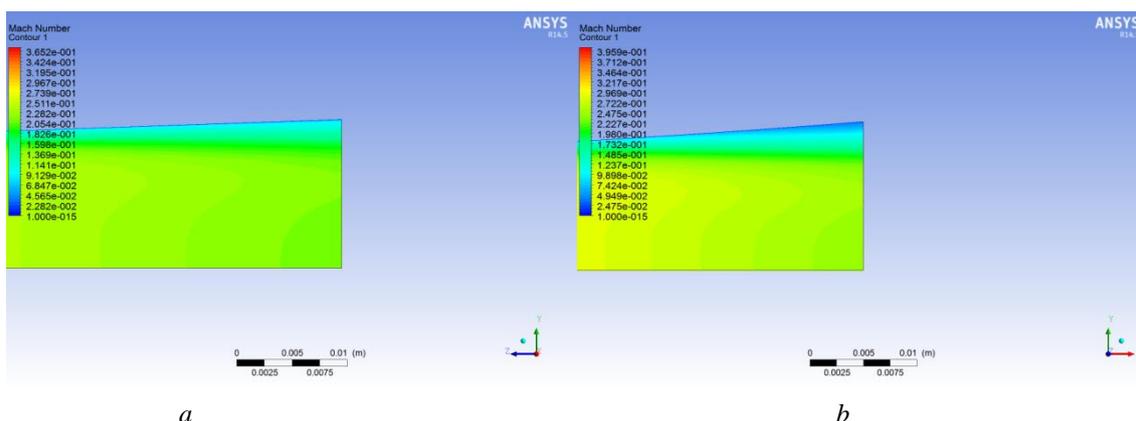


Figura 9.7 Confronto grafico tra il distacco dello strato limite  
 a) della prima geometria  
 b) della seconda geometria

Anche da questo confronto si nota come, in effetti, lo strato limite sembri essere più distaccato nel caso in esame rispetto al caso precedente.

Si è deciso, dunque, di variare lievemente la geometria per riuscire a validare il codice anche per la tipologia di geometria ad arco di cerchio.

A questo scopo, il diametro della sezione di uscita è stato diminuito da un valore di 0.028m a 0.025m e sono state effettuate delle simulazioni con condizioni al contorno in ingresso di pressione totale e temperatura totale di 20 bar e 150°C.

I risultati della comparazione tra i risultati del codice monodimensionale e della CFD si possono osservare nella seguente tabella:

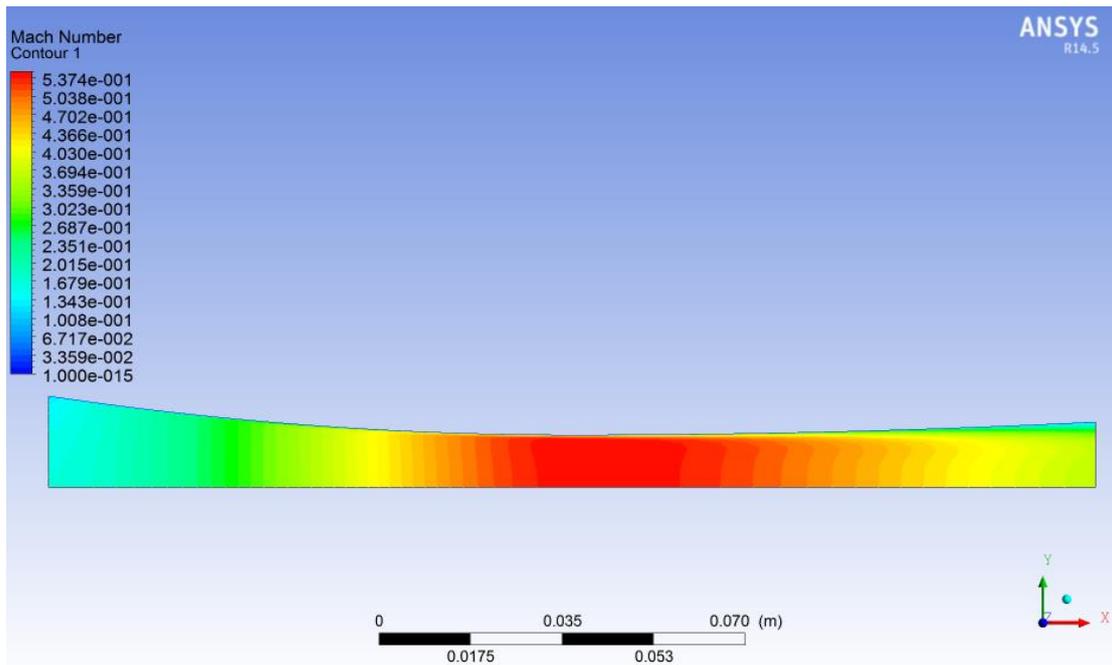
Pressione totale in ingresso = 20bar

Temperatura totale in ingresso = 200°C

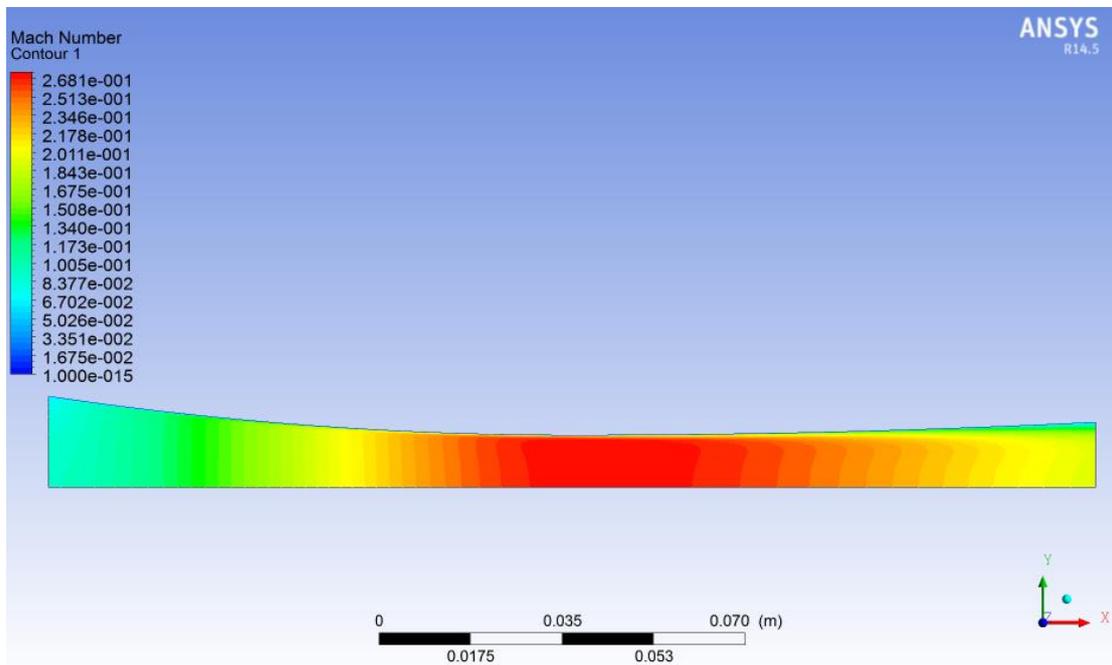
Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
19	0.17022	0.1540	0.10497	0.14546	0.13349	0.08971	0.75779	0.71822	0.055092
19.5	0.16994	0.1539	0.10374	0.14525	0.13342	0.08864	0.54336	0.51555	0.053946

Dalla tabella sopra si può constatare come l'errore sulla portata sia dimezzato rispetto al caso precedente, mentre gli errori sui coefficienti di perdita varino attorno a valori del 9%.

Nelle figure 9.8 e 9.9 si dimostra come, effettivamente, il distacco dello strato limite sia in questi casi limitato e, dunque, gli errori sui coefficienti di perdita e sulla portata siano correttamente imputabili a tale fenomeno.



*Figura 9.8 Andamento dei numeri di Mach geometria con sezione di scarico ristretta pressione totale all'ingresso di 20 bar temperatura totale all'ingresso di 200°C pressione di scarico pari a 19bar*



*Figura 9.9 Andamento dei numeri di Mach geometria con sezione di scarico ristretta pressione totale all'ingresso di 20 bar temperatura totale all'ingresso di 200°C pressione di scarico pari a 19.5bar*

## **9.4 CASO DI DEFLUSSO SUPERSONICO**

Si osservano in questo paragrafo i casi che portano ad un deflusso supersonico all'interno dell'ugello. Essendo le condizioni di moto supersoniche, il coefficiente di attrito non sarà più solo funzione del numero di Reynolds, ma varierà anche in funzione del numero di Mach.

Prove sperimentali, come riportato nel paragrafo 8.2, dimostrano che il valore corretto del coefficiente di attrito nel caso supersonico è approssimativamente la metà di quello ricavato dal diagramma di Moody. Confrontando i risultati tra il codice monodimensionale e la CFD, per i casi in esame si è scelto di dividere il coefficiente ottenuto per il caso subsonico per 2.3.

Si analizzano i risultati della prima geometria

Pressione totale in ingresso = 20bar

Temperatura totale in ingresso = 200°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
2.3	0.044921	0.0426	0.05385	0.04299	0.04088	0.05154	1.637	1.63956	-0.00022

Pressione totale in ingresso = 25bar

Temperatura totale in ingresso = 200°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
2.29	0.43422	0.4272	0.01654	0.04162	0.04097	0.01585	1.45482	1.45578	-0.00066

Pressione totale in ingresso = 30bar

Temperatura totale in ingresso = 400°C

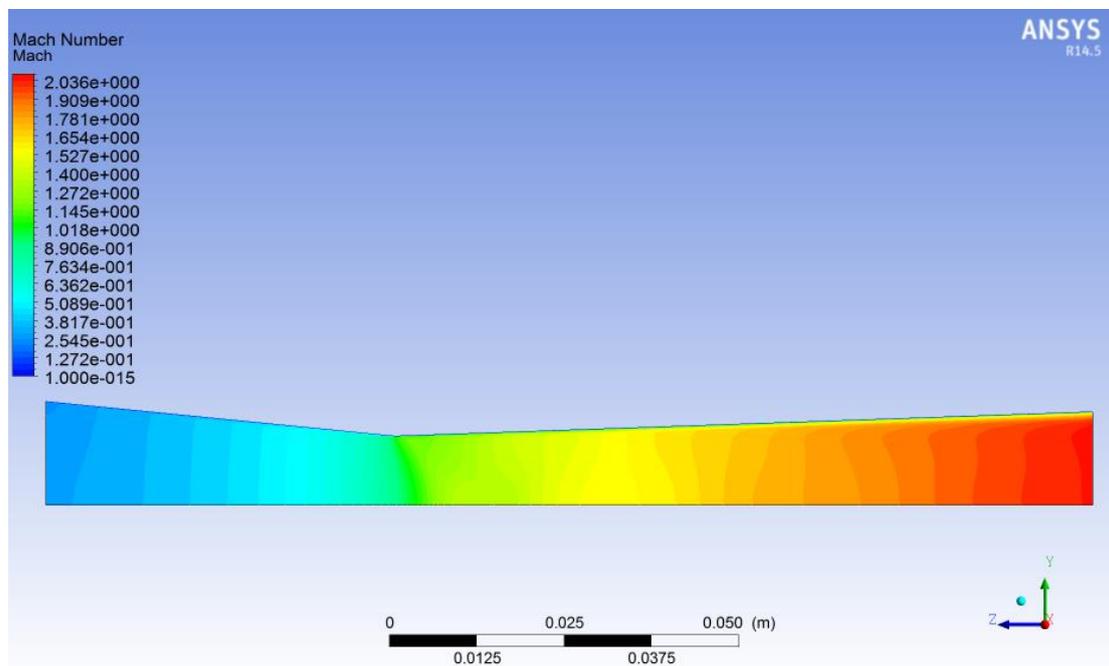
Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
3.43	0.044998	0.0424	0.06042	0.04306	0.04071	0.05781	1.46350	1.46492	-0.00097

Pressione totale in ingresso = 40bar

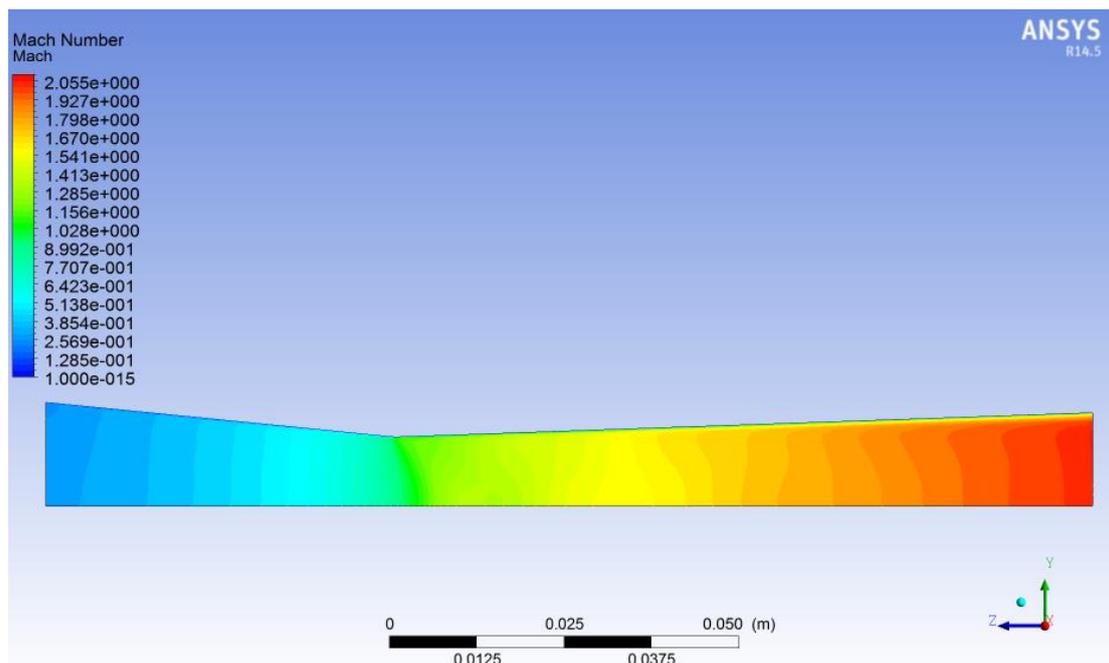
Temperatura totale in ingresso = 500°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
4.57	0.044171	0.0402	0.09762	0.04230	0.03869	0.93479	1.82080	1.82241	-0.00088

Dai risultati sopra esposti si rileva che, con questa tipologia di deflusso, l'errore sulla portata è sempre molto piccolo. Si riportano qui sotto alcuni casi analizzati mediante la CFD.



*Figura 9.10 Andamento del numero di Mach nella prima geometria del caso con pressione totale all'ingresso di 25 bar, temperatura totale all'ingresso di 200°C e pressione di scarico di 2.29 bar*



*Figura 9.11 Andamento del numero di Mach nella prima geometria del caso con pressione totale all'ingresso di 30 bar, temperatura totale all'ingresso di 400°C e pressione di scarico di 3.43bar*

Dalle figure 9.10 e 9.11 si constata come il distacco dello strato limite non sia più presente. La stessa informazione poteva essere dedotta dal piccolo errore sulla portata riportato nelle tabelle riassuntive dei risultati. Questo fenomeno è imputabile al fatto che la corrente risulti accelerata anche nel convergente e, dunque, il distacco dello strato limite venga così evitato. Gli errori sui coefficienti di perdita si attestano in un campo che spazia tra il 2% e il 10%, per cui, sempre considerando che il confronto avviene tra un codice monodimensionale e un software di fluidodinamica tridimensionale con modelli di turbolenza avanzati, si possono considerare accettabili.

Si analizzano ora i risultati relativi alla seconda geometria:

Pressione totale in ingresso = 20bar

Temperatura totale in ingresso = 300°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
1.98	0.047506	0.0445	0.06726	0.04535	0.04262	0.06422	1.05010	1.04304	0.006769

Pressione totale in ingresso = 25bar

Temperatura totale in ingresso = 300°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
2.47	0.045899	0.0431	0.06481	0.04388	0.04132	0.06197	1.31300	1.30445	0.006554

Pressione totale in ingresso = 30bar

Temperatura totale in ingresso = 400°C

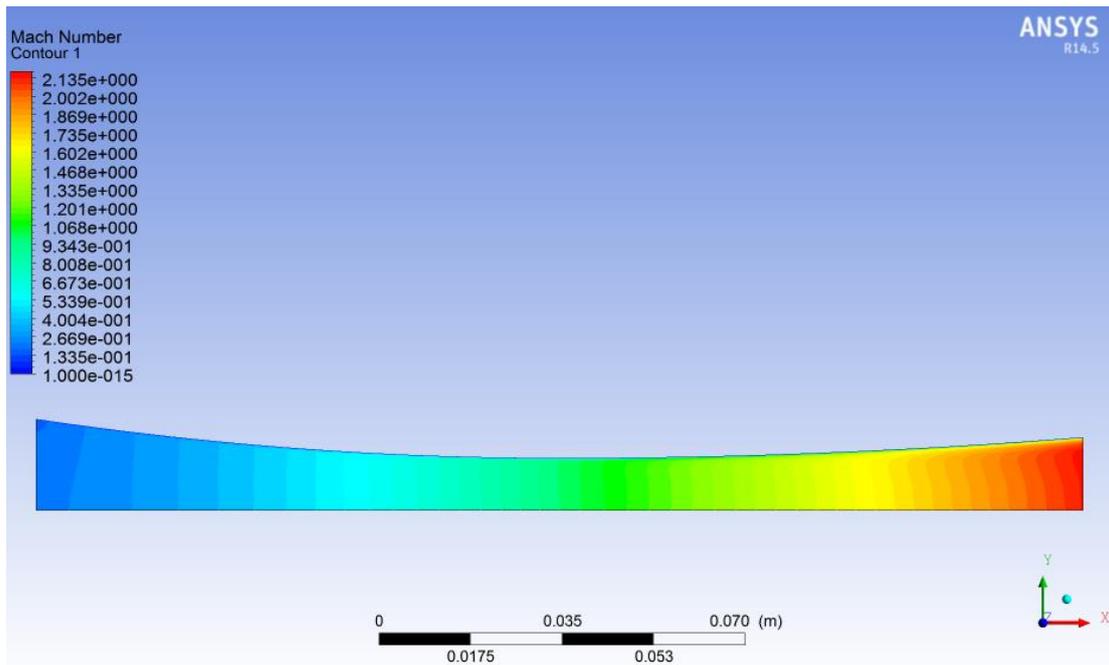
Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
2.96	0.04597	0.0433	0.06108	0.04395	0.04152	0.05838	1.45390	1.44473	0.006347

Pressione totale in ingresso = 40bar

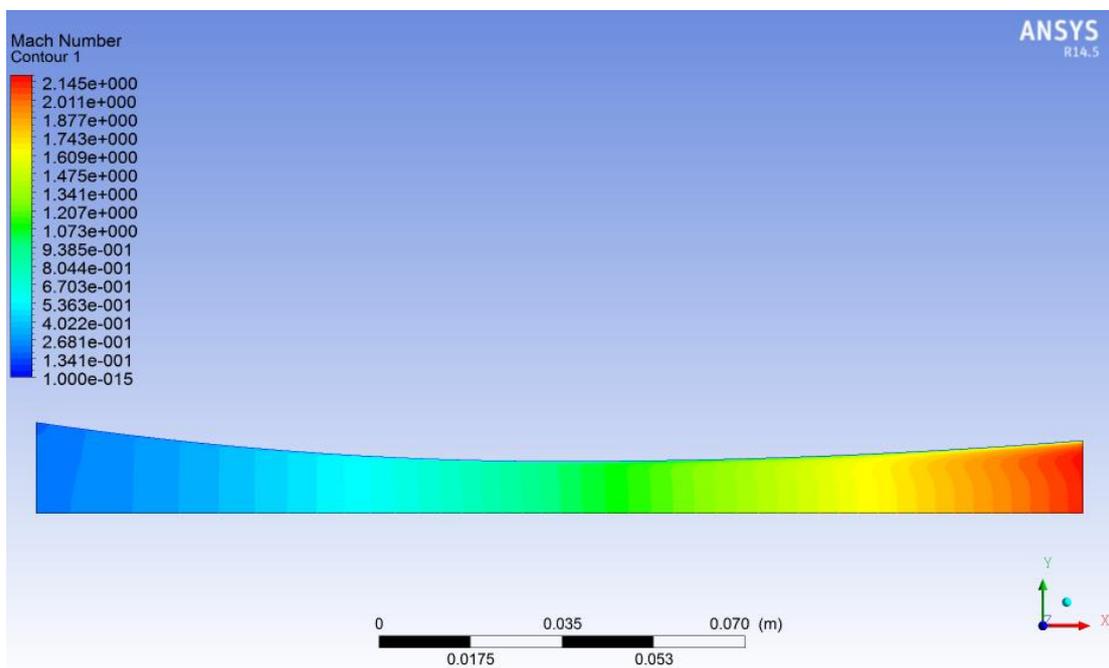
Temperatura totale in ingresso = 200°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
3.94	0.041376	0.0406	0.01953	0.03973	0.03900	0.01875	2.31450	2.30025	0.006195

Dalla tabella si possono fare le stesse considerazioni del caso precedente; questa volta, però, il comportamento della seconda geometria è ancora migliore rispetto alla prima. Infatti gli errori sui coefficienti di perdita sono minori, dunque il caso supersonico si può ritenere definito in maniera soddisfacente dal codice di calcolo monodimensionale. Si riportano nelle figure 9.12 e 9.13 alcuni casi esaminati, a titolo di confronto con la prima geometria analizzata.



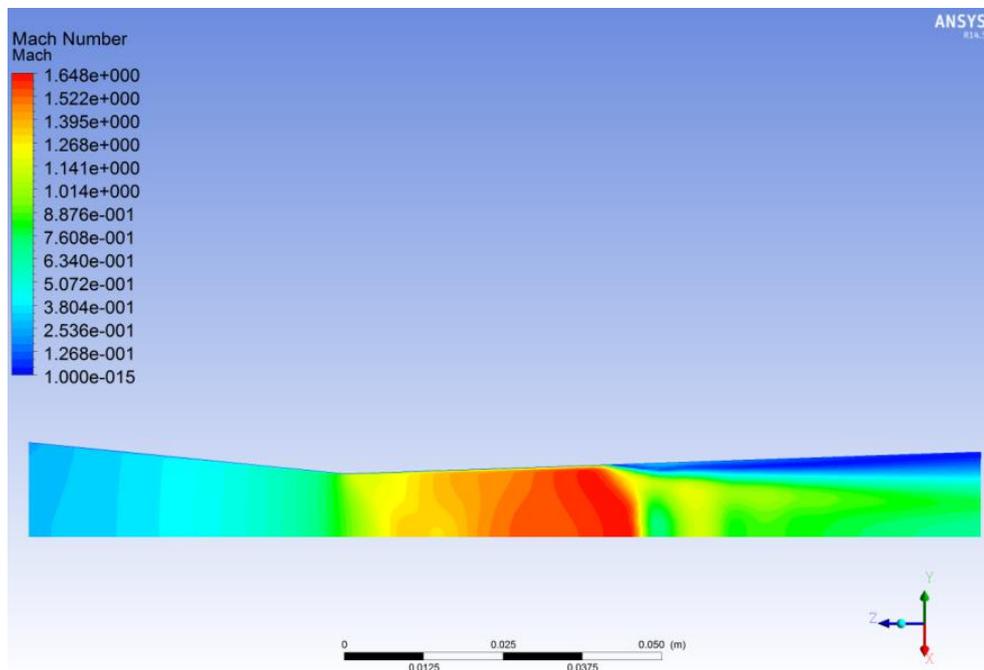
*Figura 9.12 Andamento del numero di Mach nella seconda geometria del caso con pressione totale all'ingresso di 20 bar, temperatura totale all'ingresso di 300°C e pressione di scarico di 1.98 bar*



*Figura 9.13 Andamento del numero di Mach nella prima geometria del caso con pressione totale all'ingresso di 40 bar, temperatura totale all'ingresso di 200°C e pressione di scarico di 3.94 bar*

## **9.5 CASO DI DEFLUSSO CON ONDA D'URTO NORMALE ALL'INTERNO DEL DIVERGENTE**

Nel caso in cui la pressione di scarico imposta all'ugello provochi un'onda d'urto normale all'interno del divergente, i risultati del codice di calcolo monodimensionale non possono essere validati nel caso generale in cui sia presente l'attrito. Infatti la fisica del fenomeno risulta essere molto complessa e non monodimensionale. Si nota dalla figura 9.13 come, in presenza di fluido viscoso, l'onda d'urto sia tutt'altro che normale e l'interazione con lo strato limite provochi un distacco dello stesso molto accentuato, susseguito da una serie di onde oblique che rendono impossibile lo studio del deflusso a valle dell'onda mediante un codice monodimensionale



*Figura 9.14 interazione dell'onda d'urto normale con lo strato limite*

Nel tempo di redazione della tesi, sono stati comunque ricercati alcuni metodi per definire tale interazione mediante una relazione approssimata o, comunque, che rendesse monodimensionale il problema. Purtroppo la letteratura che affronta tale fenomeno, utilizza esclusivamente modelli di calcolo che implementano modelli di turbolenza o, comunque, modelli almeno bidimensionali, come nei paper di A.Hadjadj e J. Larsson et al. (2010), di G.E.Gadd (1962), e di J.Delery e J.G.Marvin (1986). Per questo motivo si è deciso di validare il modello monodimensionale utilizzando un modello di fluido aviscoso, in modo da

eliminare le problematiche associate alla presenza dello strato limite e poter in questa maniera osservare se le assunzioni effettuate nella realizzazione del codice fossero accettabili.

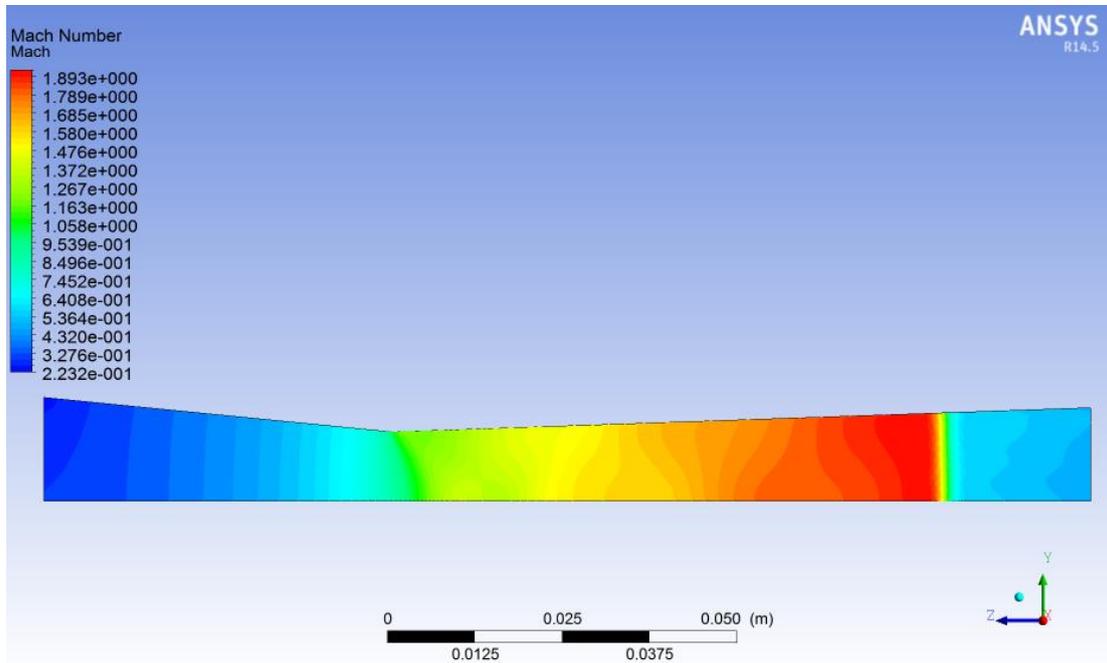


Figura 9.13 onda d'urto normale nel caso di fluido aviscoso

Osservando la figura 9.13 si nota come, utilizzando fluido aviscoso, lo strato limite sia assente, l'onda d'urto sia effettivamente normale e, dunque, sia possibile passare alla validazione del codice di calcolo.

Si esaminano i risultati per la prima geometria:

Pressione totale in ingresso = 8bar

Temperatura totale in ingresso = 30°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
5	2.2776	2.2454	0.01435	0.6949	0.69187	0.00438	0.58338	0.58438	-0.00171
6	1.6327	1.6091	0.01469	0.62016	0.61672	0.00558	0.58338	0.58440	-0.00175

Pressione totale in ingresso = 10bar

Temperatura totale in ingresso = 400°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
6	2.3525	2.3145	0.01639	0.70172	0.69830	0.00489	0.48936	0.49022	-0.00175
8	1.2490	1.2268	0.01814	0.55537	0.55092	0.00809	0.48936	0.49021	-0.00173

Pressione totale in ingresso = 20bar

Temperatura totale in ingresso = 300°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
12	2.3525	2.3137	0.01675	0.70172	0.69823	0.00501	1.0607	1.0625	-0.00169
15	1.63270	1.6087	0.01488	0.62016	0.61667	0.00565	1.0607	1.0625	-0.0017
17	0.79385	0.7809	0.01654	0.44254	0.43849	0.00923	1.0607	1.0621	-0.0013

Pressione totale in ingresso = 30bar

Temperatura totale in ingresso = 200°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
18	2.35250	2.3163	0.01565	0.70172	0.69845	0.00467	1.7511	1.75397	-0.00164
25	0.95352	0.9319	0.02320	0.4881	0.48238	0.01186	1.7511	1.75411	-0.00172

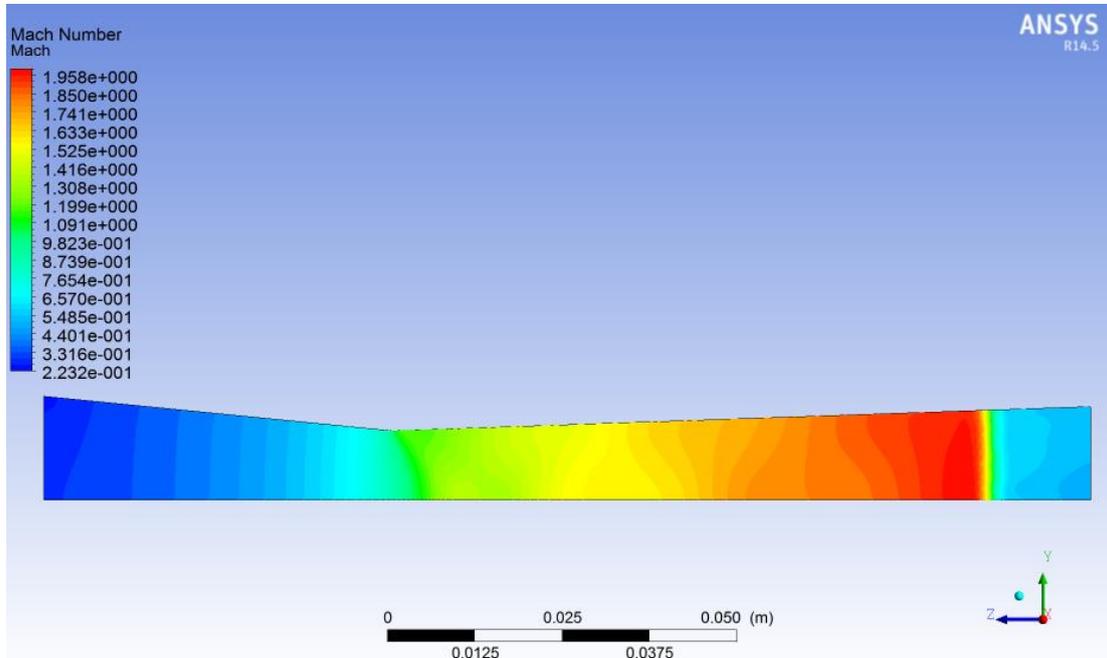
Pressione totale in ingresso = 40bar

Temperatura totale in ingresso = 100°C

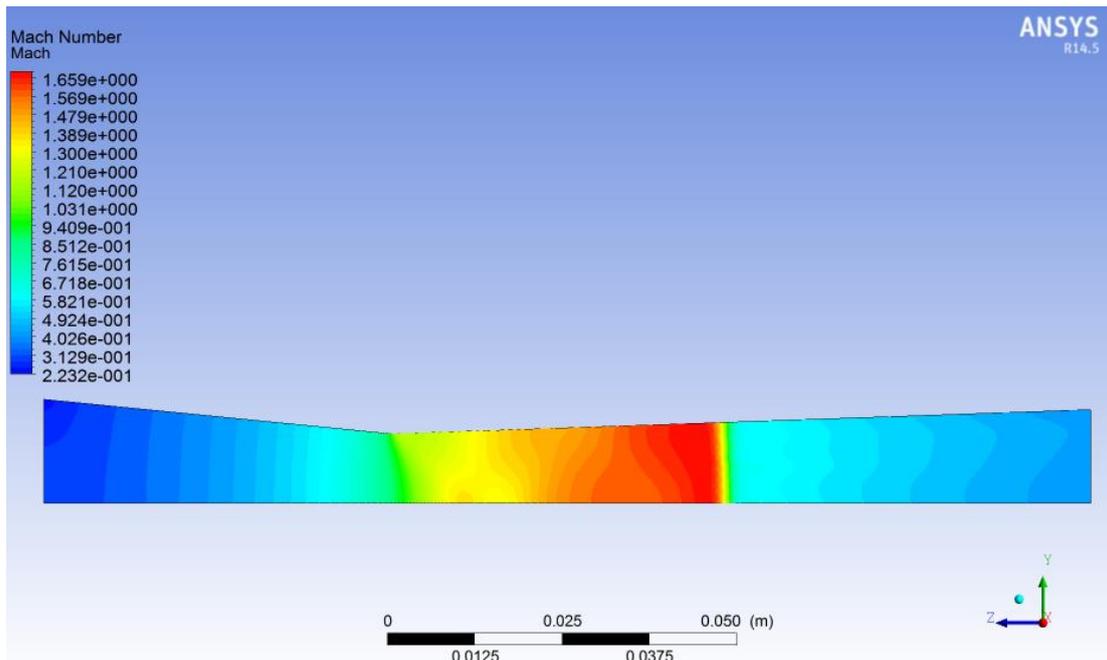
Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
23	2.40930	2.3698	0.01669	0.70668	0.70324	0.00467	2.6291	2.63369	-0.00174
30	1.63270	1.6078	0.01552	0.62016	0.61653	0.00589	2.6291	2.63368	-0.00174

Si osserva come, in assenza di viscosità, gli errori tra i valori ricavati mediante il codice di calcolo e la CFD siano molto piccoli, dell'ordine dell'1%.

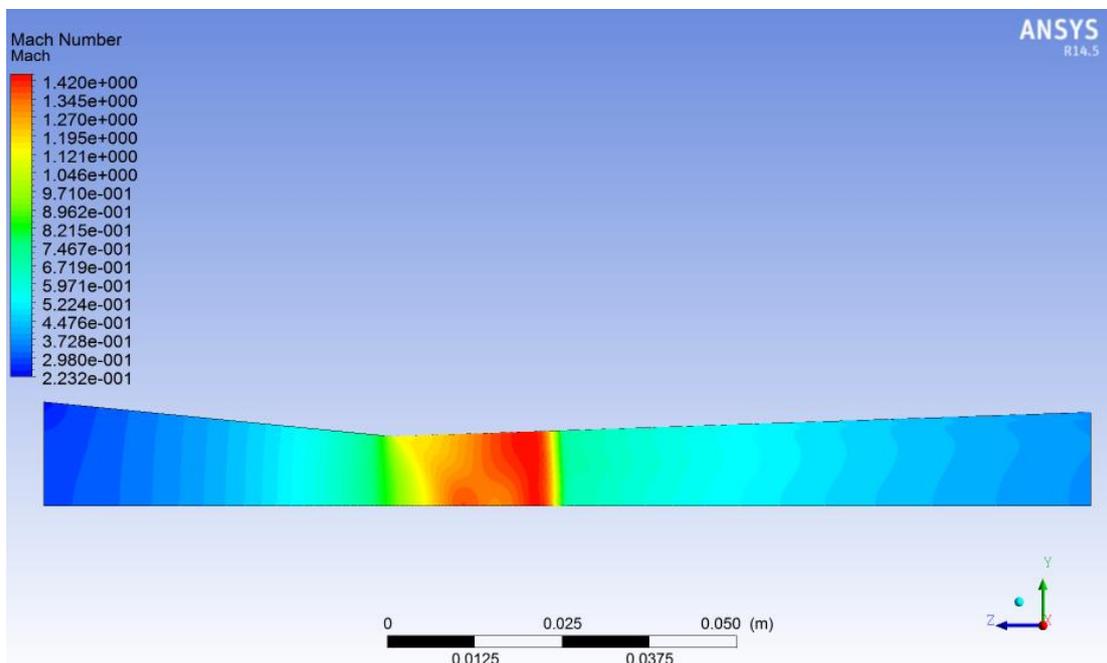
Dalle figure 9.14, 9.15, 9.16 si osserva come anche il posizionamento dell'onda d'urto sia plausibile. Infatti, diminuendo progressivamente la pressione di scarico, l'onda d'urto si sposta sempre più a valle della sezione di gola e il codice riesce a individuare la posizione abbastanza fedelmente.



*Figura 9.14 Andamento del numero di Mach nella prima geometria del caso con pressione totale all'ingresso di 20 bar, temperatura totale all'ingresso di 300°C e pressione di scarico di 12 bar*



*Figura 9.15 Andamento del numero di Mach nella prima geometria del caso con pressione totale all'ingresso di 20 bar, temperatura totale all'ingresso di 300°C e pressione di scarico di 15 bar*



*Figura 9.16 Andamento del numero di Mach nella prima geometria del caso con pressione totale all'ingresso di 20 bar, temperatura totale all'ingresso di 300°C e pressione di scarico di 17 bar*

Dalle figure 9.15, 9.15, 9.16 si può notare visivamente come la posizione stessa dell'onda d'urto normale predetta dal codice monodimensionale sia la stessa mostrata dalla CFD.

Infatti, nel caso di figura 9.14, il codice predice l'onda d'urto ad una distanza di 0.081379m dalla sezione di gola, nel caso di figura 9.15 la distanza è di 0.041395m mentre nel caso di figura 9.16 la distanza diminuisce a 0.01767m, valori molto vicini a quelli riscontrabili mediante CFD.

Per quanto riguarda la seconda geometria, i risultati sono illustrati nelle tabelle sotto riportate

Pressione totale in ingresso = 8bar

Temperatura totale in ingresso = 30°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata codice	Portata CFD [kg/s]	errore
5	2.8007	2.7567	0.01597	0.73689	0.73381	0.0042	0.58314	0.58216	0.001692

Pressione totale in ingresso = 10bar

Temperatura totale in ingresso = 100°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata codice	Portata CFD [kg/s]	errore
7	2.4133	2.3771	0.01525	0.70703	0.70388	0.00447	0.657	0.65559	0.00154
8	1.6061	1.6061	0.03171	0.61629	0.61271	0.00585	0.657	0.65597	0.001556

Pressione totale in ingresso = 20bar

Temperatura totale in ingresso = 400°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
12	2.8881	2.8457	0.01488	0.74281	0.73997	0.00384	0.97834	0.97683	0.001539
15	2.0511	2.0236	0.01358	0.67225	0.66927	0.00445	0.97834	0.97675	0.001633
17	1.0784	1.0612	0.01619	0.51886	0.51485	0.00779	0.97834	0.97675	0.001633

Pressione totale in ingresso = 30bar

Temperatura totale in ingresso = 150°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
18	2.8881	2.8441	0.01549	0.74281	0.73986	0.00399	1.8509	1.84791	0.001618
22	2.1811	2.1514	0.01381	0.68564	0.68268	0.00433	1.8509	1.84793	0.001607

Pressione totale in ingresso = 40bar

Temperatura totale in ingresso = 250°C

Press scaric [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore	Portata Codice [kg/s]	Portata CFD [kg/s]	errore
23	2.9547	2.9067	0.01651	0.74713	0.74403	0.00417	2.2195	2.21595	0.001602
30	2.0511	2.0235	0.01364	0.67225	0.66926	0.00447	2.2195	2.21591	0.00162

Anche in questo caso, i risultati del codice monodimensionali sono molti vicini a quelli prodotti dalla CFD, pertanto si può dedurre che nel caso di fluido aviscoso il codice funzioni correttamente.

Dalle figure 9.17, 9.18 e 9.19 si possono notare gli scostamenti tra il posizionamento dell'onda d'urto normale calcolata dal codice e il risultato della CFD:

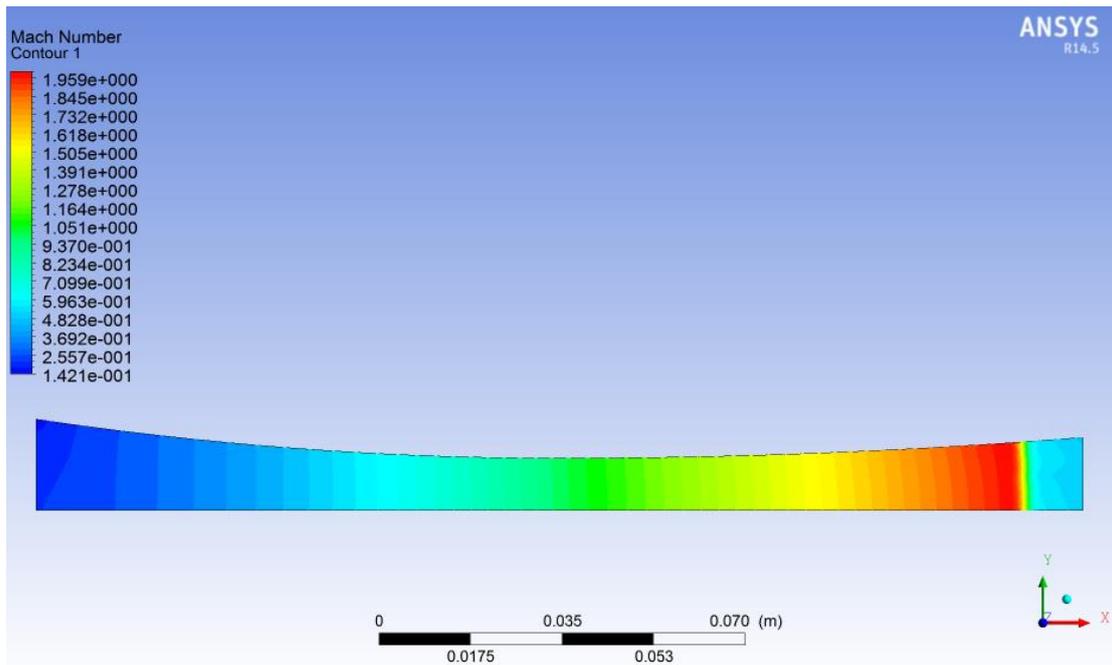


Figura 9.17 Andamento del numero di Mach nella seconda geometria del caso con pressione totale all'ingresso di 20 bar, temperatura totale all'ingresso di 400°C e pressione di scarico di 12 bar

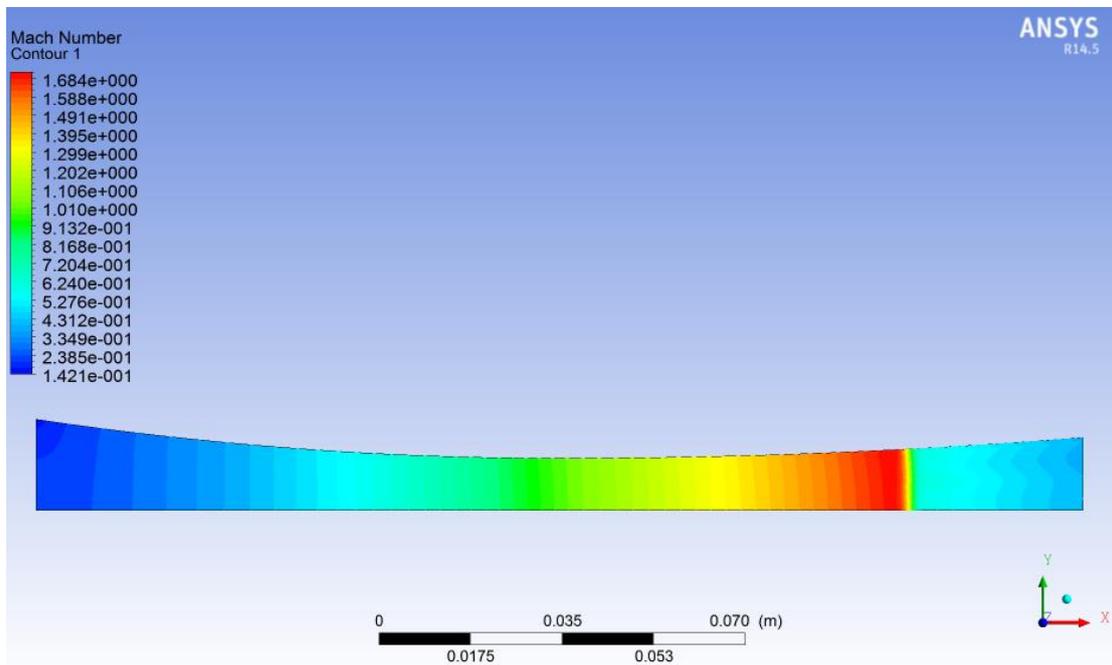
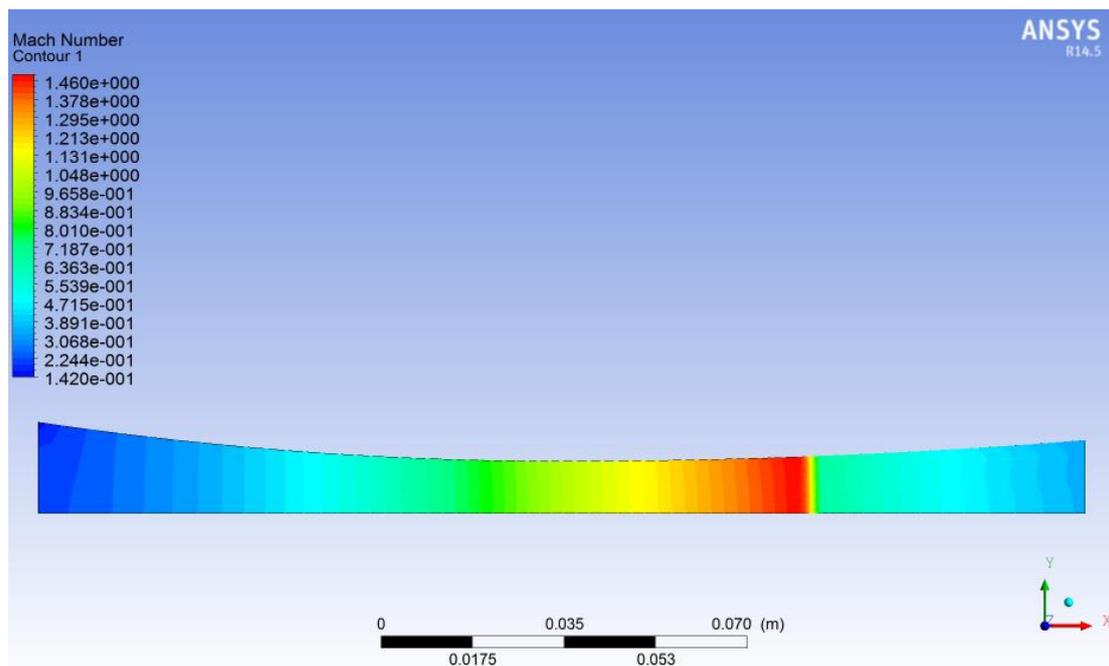


Figura 9.18 Andamento del numero di Mach nella seconda geometria del caso con pressione totale all'ingresso di 20 bar, temperatura totale all'ingresso di 400°C e pressione di scarico di 15 bar



*Figura 9.19 Andamento del numero di Mach nella seconda geometria del caso con pressione totale all'ingresso di 20 bar, temperatura totale all'ingresso di 400°C e pressione di scarico di 17bar*

Si riportano i risultati del codice monodimensionale, il quale nel caso di figura 9.17 restituisce una distanza pari a 0.08778m dalla sezione di gola, nel caso di figura 9.18 il valore della stessa distanza scende a 0.064528m e infine nel caso di figura 9.29 il valore restituito diminuisce a 0.043526m.

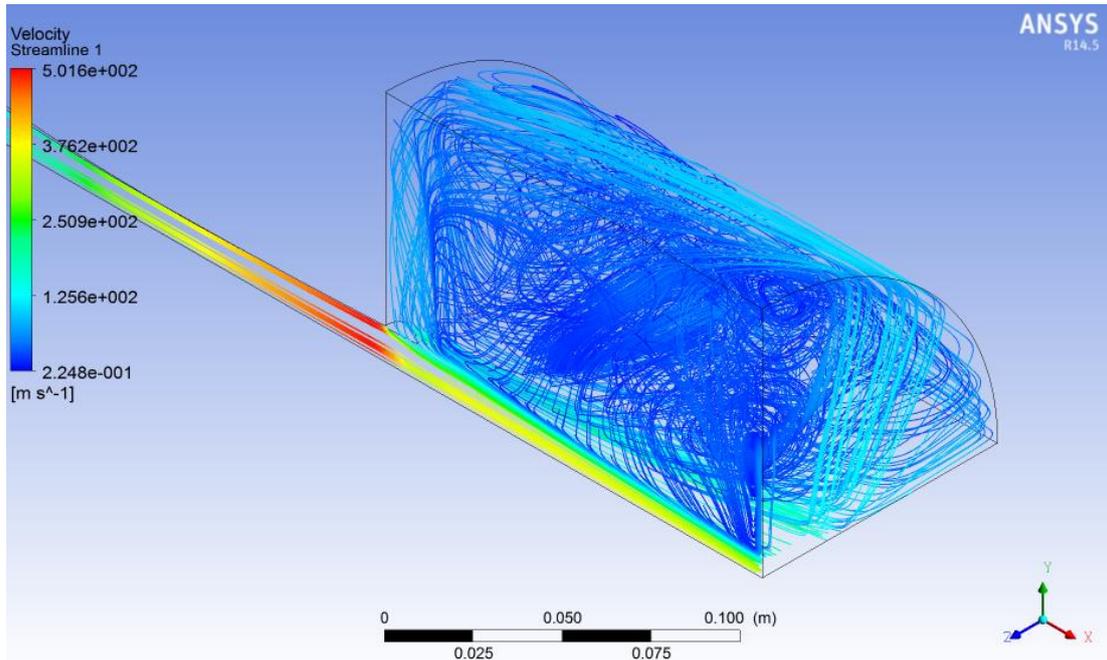
Si nota, come il posizionamento avvenga anche in questo caso in maniera corretta e soddisfacente.

## **9.6 CASO DI DEFLUSSO CON ONDA D'URTO OBLIQUA ESTERNA**

Si analizzano ora i casi in cui la pressione di scarico imposta produce un aggiustamento della stessa esternamente all'ugello mediante un'onda d'urto obliqua. Per la validazione del caso in esame, è stato aggiunto a valle del divergente un plenum, la cui mesh possiede le stesse caratteristiche della mesh dell'ugello stesso.

I risultati che possono essere di interesse per l'analisi del fenomeno, oltre ai coefficiente di perdita possono essere quelli relativi all'inclinazione della corrente all'uscita dell'onda d'urto. Infatti, se consideriamo il convergente-divergente come un ugello di turbina, è di sicuro interesse poter valutare la deviazione e il valore della velocità della corrente che si presenterà all'ingresso al rotore.

Si consideri la figura 9.20



*Figura 9.20 vortici dissipativi all'interno del plenum inserito a valle dell'ugello*

Per eseguire la comparazione, si è preferito mantenere l'ipotesi di fluido aviscoso come nel caso di onde d'urto normali, in quanto la viscosità produce effetti negativi all'interno del plenum. Il software di simulazione fluidodinamico, però, non permette di azzerare completamente il valore della viscosità dinamica, che viene pertanto settato pari a  $10^{-16} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ . Il risultato di tale approssimazione è che il posizionamento della sezione di test risulta problematico, in quanto il valore della pressione totale non si conserva all'interno del plenum stesso. Infatti, come si vede dalla figura 9.20, a causa delle dimensioni finite del volume di espansione a valle dell'ugello, all'interno del plenum vengono a formarsi ricircoli dissipativi di portata.

Per ovviare all'inconveniente, come sezione di prova si è scelto di considerare una sezione immediatamente a valle della sezione di uscita dell'ugello. Questo per minimizzare gli effetti dissipativi prodotti dai vortici presenti nel plenum, che inevitabilmente avrebbero penalizzato i valori rilevati per i coefficienti di perdita. Si osservino ora le figure 9.21, 9.22 e 9.23 relative alla prima geometria:

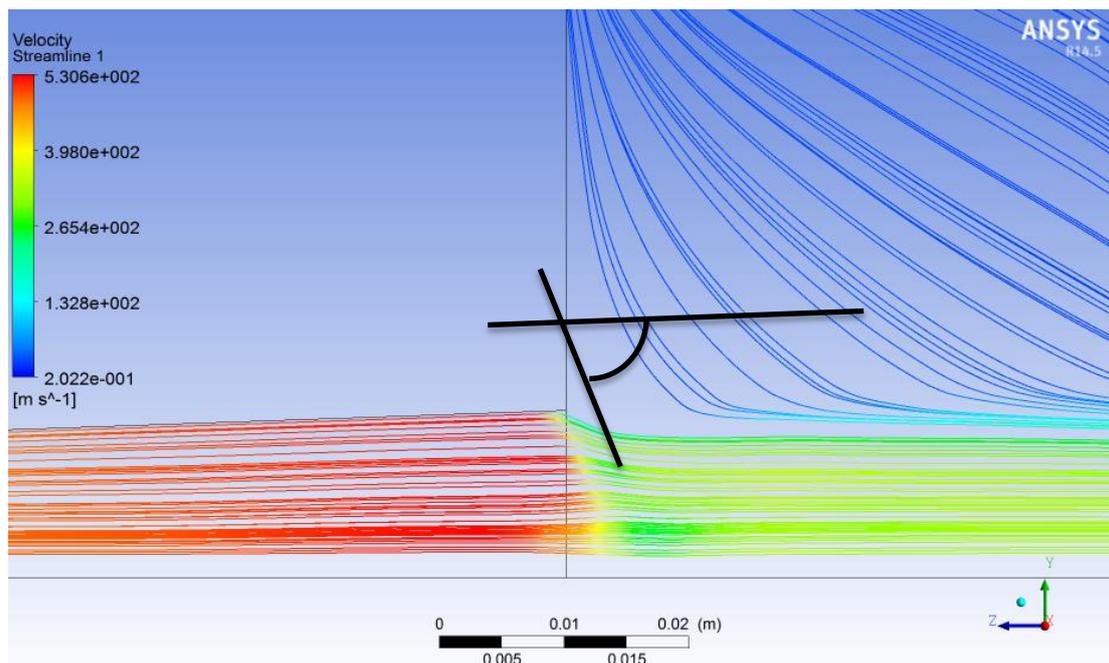


Figura 9.21: Streamline velocità caso pressione totale in ingresso 8 bar, temperatura totale in ingresso 30°C, pressione di scarico 3 bar

Esaminando la figura 9.21, si nota come la determinazione dell'angolo di deflusso della corrente sia complessa, in quanto i vortici che si formano all'interno del plenum tendono a modificare imprevedibilmente tale angolo. Pertanto, si è deciso di procedere a un confronto solo qualitativo dei valori calcolati per gli angoli di uscita della corrente, facendo riferimento alle linee di corrente plottate di volta in volta dalla CFD e al valore numerico fornito dal codice monodimensionale. Nel caso di figura 9.21, l'angolo predetto dal codice è pari a 56,5088° rispetto alla direzione di deflusso. Nella tabella sotto si osservano le comparazioni tra CFD e codice monodimensionale per quanto riguarda i coefficienti di perdita

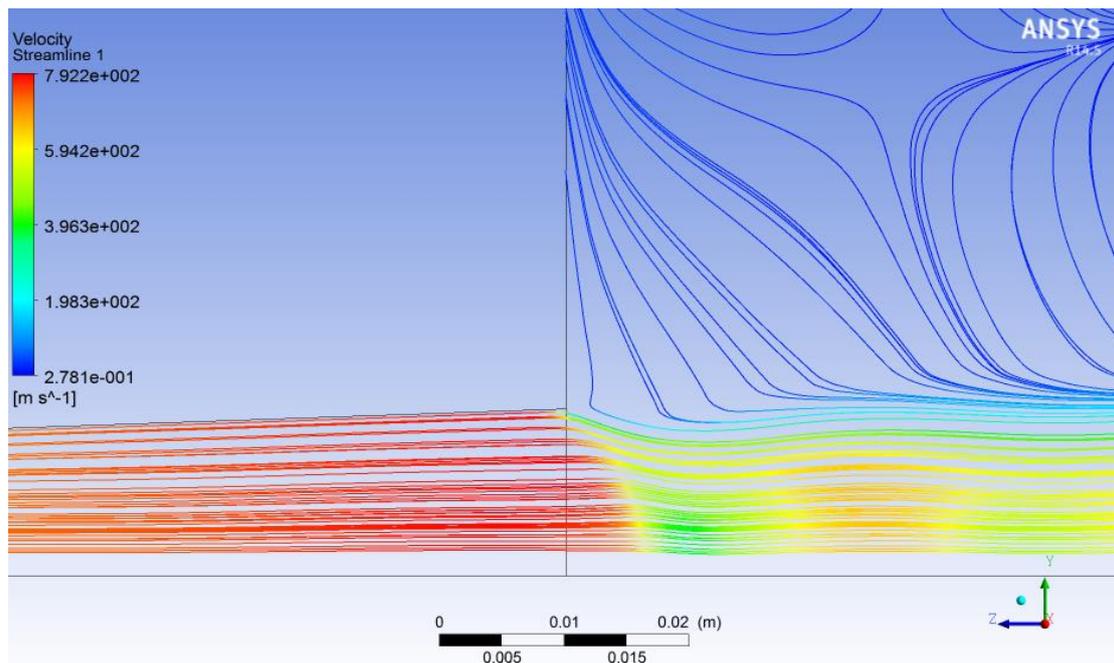
Pressione totale in ingresso: 8bar

Temperatura totale in ingresso: 30°C

Angolo onda d'urto obliqua predetto dal codice: 56,5088°

Pressione Scarico [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore
3	0.35204	0.320762	0.097512	0.26037	0.242861	0.072095

Si nota, come i risultati ottenuti dal codice di calcolo si avvicinino molto ai risultati ottenuti dalla simulazione fluidodinamica e, dunque, si possano ritenere soddisfacenti. Si esaminano di seguito altri casi, riportando le variazioni tra i risultati del codice e della CFD



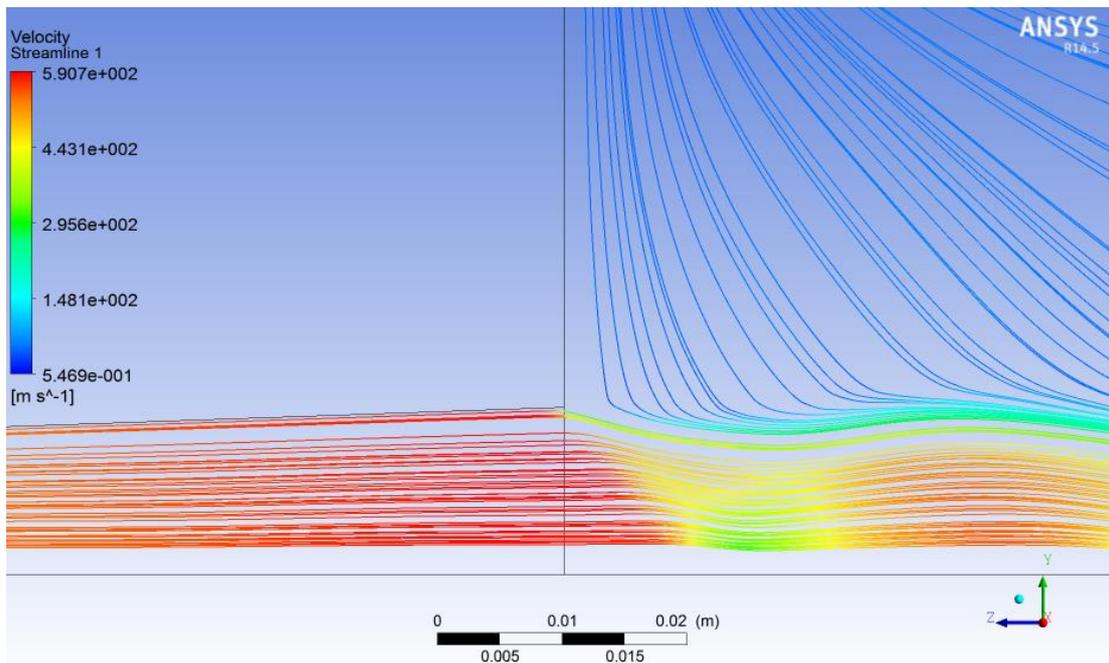
*Figura 9.22 Streamline velocità caso pressione totale in ingresso 20 bar, temperatura totale in ingresso 400°C, pressione di scarico 6 bar*

Pressione totale in ingresso: 20bar

Temperatura totale in ingresso: 400°C

Angolo onda d'urto obliqua predetto dal codice: 48,6159°

Pressione Scarico [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore
6	0.15399	0.14183	0.085736	0.13344	0.124213	0.07428



*Figura 9.23 Streamline velocità caso pressione totale in ingresso 40 bar, temperatura totale in ingresso 100°C, pressione di scarico 10 bar*

Pressione totale in ingresso: 40bar

Temperatura totale in ingresso: 100°C

Angolo onda d'urto obliqua predetto dal codice: 43,542°

Pressione Scarico [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore
10	0.075208	0.076879	-0.02173	0.069947	0.0713904	-0.02022

Per la seconda geometria si hanno invece le figure 9.24, 9.25, 9.26 e 9.27

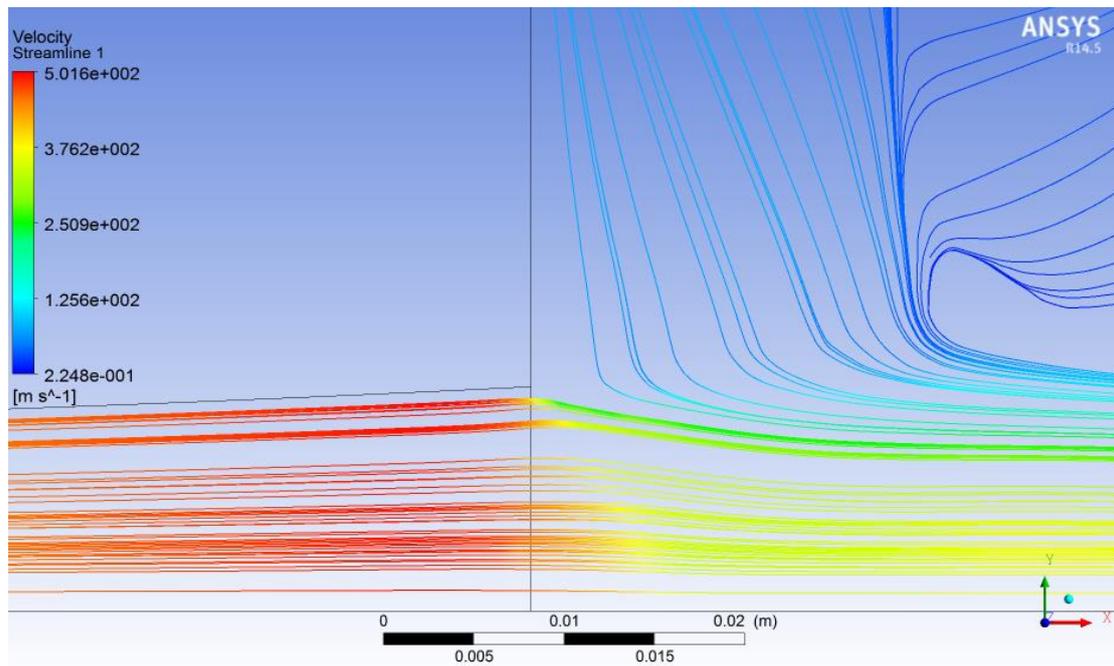


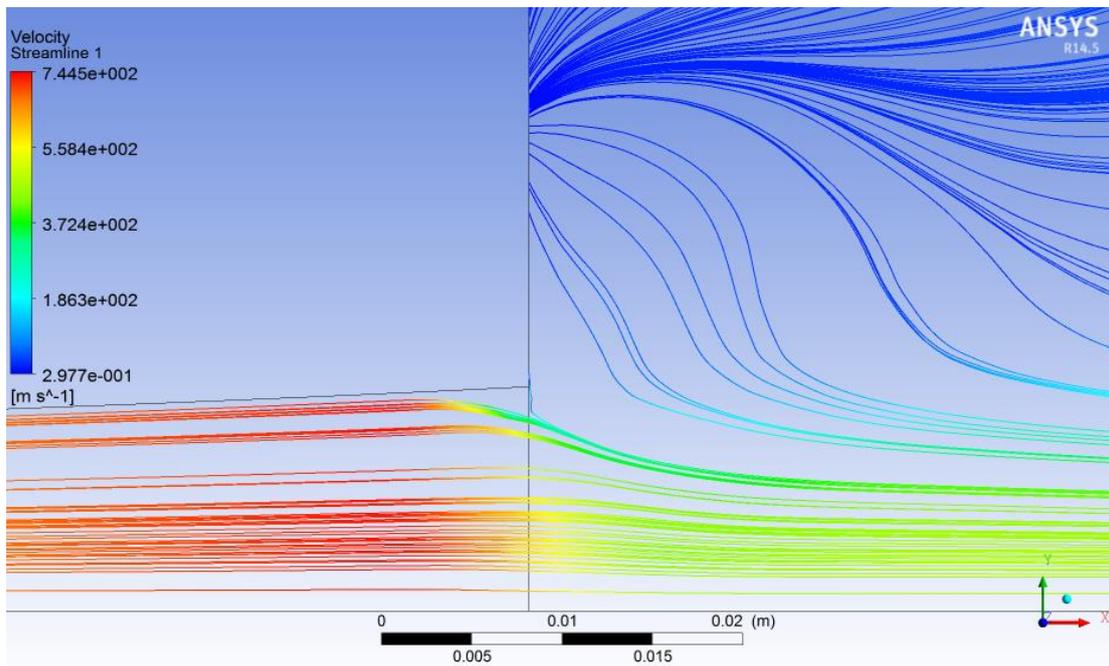
Figura 9.24 Streamline velocità caso pressione totale in ingresso 8 bar, temperatura totale in ingresso 30°C, pressione di scarico 3 bar

Pressione totale in ingresso: 8bar

Temperatura totale in ingresso: 30°C

Angolo onda d'urto obliqua predetto dal codice: 53,858°

Pressione Scarico [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore
3	0.21055	0.2415	-0.12816	0.17393	0.194523	-0.10586



*Figura 9.25 Streamline velocità caso pressione totale in ingresso 20 bar, temperatura totale in ingresso 400°C, pressione di scarico 9 bar*

Pressione totale in ingresso: 20bar

Temperatura totale in ingresso: 400°C

Angolo onda d'urto obliqua predetto dal codice: 61,6468°

Pressione Scarico [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore
9	0.39502	0.436621	-0.09528	0.28317	0.303922	-0.06828

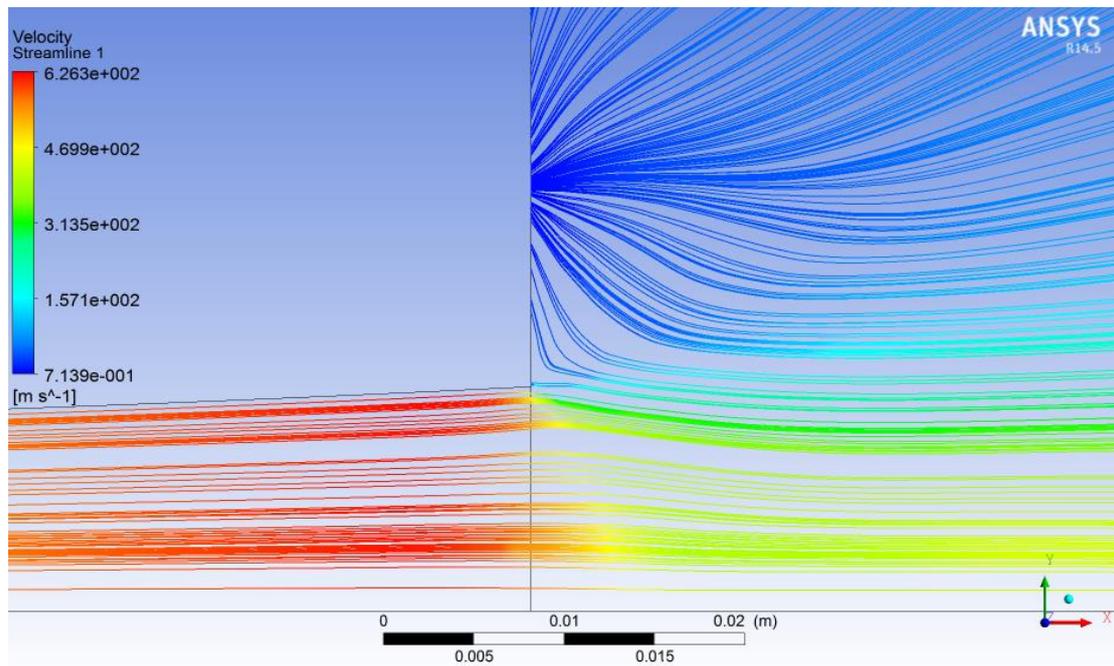


Figura 9.26 Streamline velocità caso pressione totale in ingresso 30 bar, temperatura totale in ingresso  $200^\circ\text{C}$ , pressione di scarico 12 bar

Pressione totale in ingresso: 30bar

Temperatura totale in ingresso:  $200^\circ\text{C}$

Angolo onda d'urto obliqua predetto dal codice:  $56,237^\circ$

Pressione Scarico [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore
12	0.25099	0.289337	-0.13253	0.20063	0.224407	-0.10595

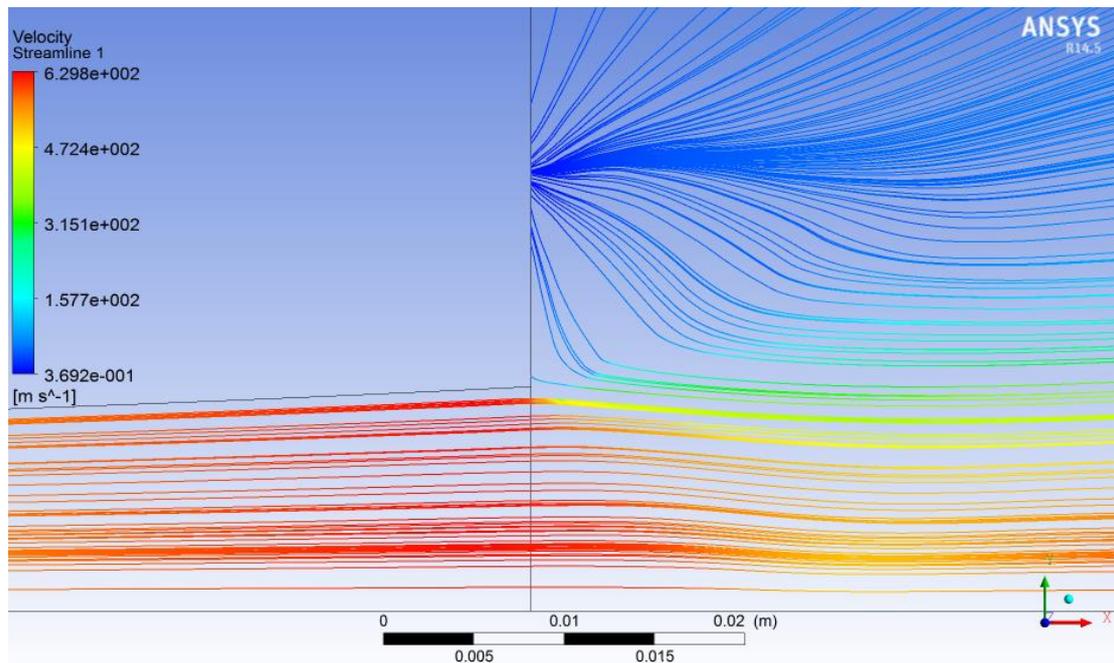


Figura 9.27 Streamline velocità caso pressione totale in ingresso 40 bar, temperatura totale in ingresso 200°C, pressione di scarico 10 bar

Pressione totale in ingresso: 40bar

Temperatura totale in ingresso: 200°C

Angolo onda d'urto obliqua predetto dal codice: 41,9483°

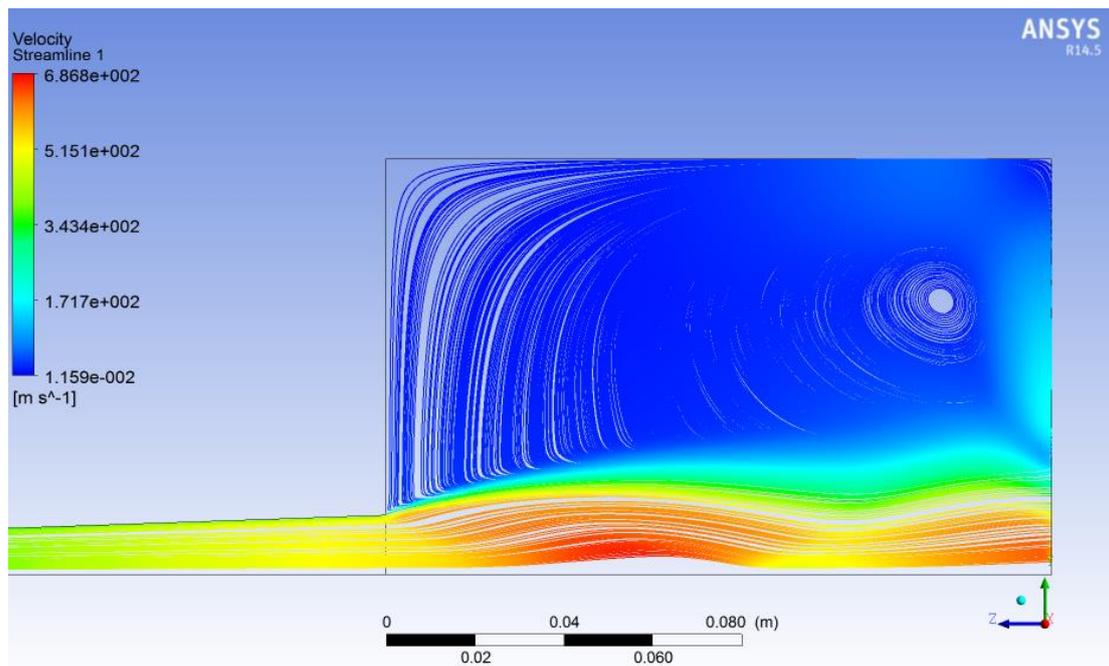
Pressione Scarico [bar]	Yp codice	Yp CFD	errore	Yp_mod codice	Yp_mod CFD	errore
10	0.064585	0.070518	-0.08413	0.060667	0.065873	-0.07903

Dalla figura 9.27 si nota come per angoli dell'onda d'urto piuttosto piccoli, sia difficile osservare nella CFD i valori esatti dell'inclinazione dell'onda d'urto, essendo la velocità a valle e a monte della stessa poco diversa (e le diversità cromatiche pressoché inesistenti). A conclusione di quanto illustrato, dallo studio dei risultati si è ritenuto di poter considerare validato il codice anche per il calcolo delle prestazioni in presenza di onda d'urto obliqua, a patto di accettare l'ipotesi semplificativa di fluido operativo aviscoso.

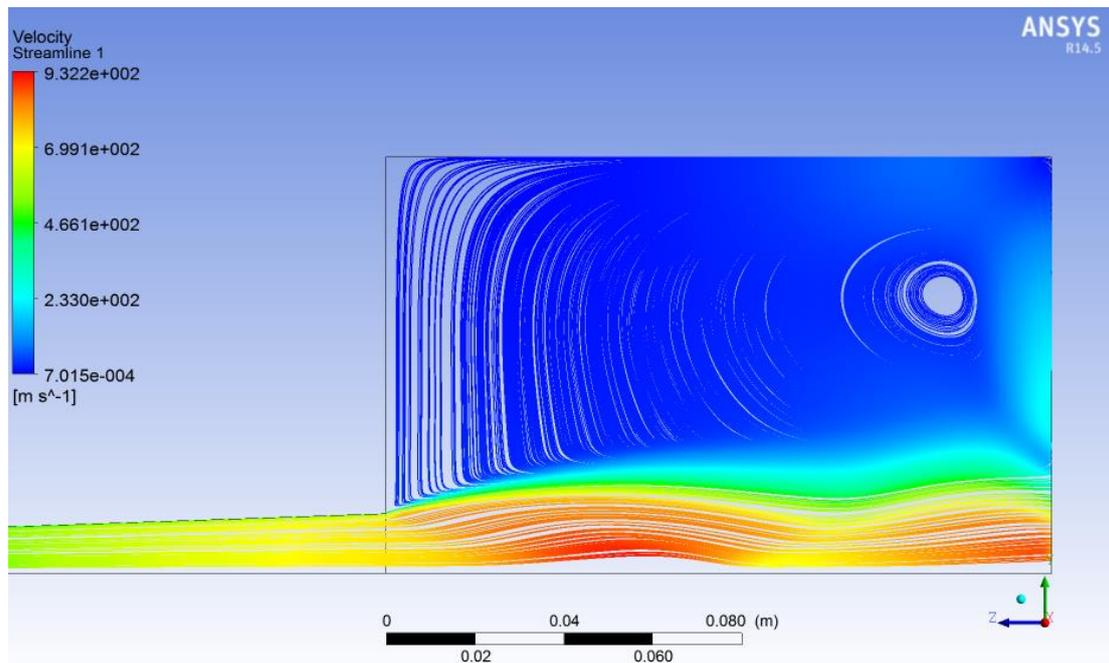
## **9.7 CASO DI DEFLUSSO CON ONDA DI ESPANSIONE ESTERNA**

In questo paragrafo si analizza il caso in cui la pressione esterna sia sufficientemente bassa da provocare un aggiustamento delle condizioni termodinamiche e fluidodinamiche all'esterno dell'ugello mediante un ventaglio di onde di espansione.

Si considerino le figure 9.28 e 9.29



*Figura 9.28 Onde di espansione di Prandtl Mayer a valle dell'ugello, caso prima geometria con pressione totale in ingresso di 8 bar, temperatura totale in ingresso di 30°C e pressione di scarico pari a 0.5bar*



*Figura 9.29 Onde di espansione di Prandtl Mayer a valle dell'ugello, caso prima geometria con pressione totale in ingresso di 30 bar, temperatura totale in ingresso di 300°C e pressione di scarico pari a 2 bar*

Si rileva come, in questo caso, la CFD non permetta la definizione di un parametro per il confronto fra i risultati dei due codici di calcolo. Infatti, mentre teoricamente le onde di espansione risultano essere isoentropiche, a causa dei vortici e dei ricircoli presenti nel plenum la CFD manifesta importanti perdite di pressione totale, che non permettono la reale misura dei coefficienti di perdita. Si nota comunque che l'onda di espansione avviene molto a valle dell'ugello, dunque al di fuori del dominio spaziale del codice di calcolo e, ricordando che teoricamente si tratta di un fenomeno quasi isoentropico, la mancata validazione di questa sezione del codice non risulta essere una grave mancanza.

# CONCLUSIONI

Il lavoro di tesi è stato svolto partendo dallo studio delle relazioni per il moto monodimensionale adiabatico ed isoentropico di gas ideale all'interno di condotti. A tale studio è seguita l'implementazione di un semplice codice di calcolo per la valutazione delle performance di ugelli in assenza di attrito parietale. Successivamente si è proseguito con lo studio di un metodo per ricavare le equazioni che permettessero di eliminare l'ipotesi semplificativa di isoentropicità, precedentemente introdotta.

Le equazioni ricavate sono state implementate in un codice di calcolo, in grado di valutare il deflusso di gas ideale all'interno di un convergente divergente in presenza di attrito.

Alla realizzazione del codice di calcolo è seguita una fase di validazione dello stesso. A causa di mancanza di dati sperimentali, per la validazione è stato utilizzato il software di fluidodinamica computazionale CFX.

La validazione è stata eseguita considerando due differenti geometrie, una con profilo tronco-conico l'altra con profilo ad arco di parabola, variando di volta in volta le condizioni al contorno (che consistono nella pressione totale in ingresso e nella temperatura totale in ingresso e pressione statica allo scarico). Infine, sono stati confrontati i risultati ottenuti dalla CFD e dal codice di calcolo monodimensionale. I parametri confrontati variano di caso in caso, ed in genere sono il coefficiente di perdita di pressione totale, il coefficiente di perdita di pressione totale modificato, la portata elaborata, oltre ad altre grandezze valutate solo qualitativamente (numeri di Mach, posizioni delle onde d'urto, ecc).

Nella validazione del caso subsonico si è notata una forte influenza, sui risultati ottenuti mediante CFD, del distacco dello strato limite. Gli scostamenti tra le grandezze misurate dal codice e dalla fluidodinamica computazionale, in presenza di tale fenomeno, sono evidenti. Con l'esclusione di tale discrepanza, il codice monodimensionale dimostra di funzionare bene, con errori compresi tra l'1% e l'8% nel caso non si verifichi il distacco della vena fluida.

Per quanto riguarda il caso supersonico, la dipendenza degli scostamenti tra i valori del codice e della CFD non risulta essere funzione del distacco dello strato limite. Infatti, in tali condizioni di funzionamento, il distacco non è mai presente, in quanto la corrente risulta essere sempre accelerata. D'altro canto, in questa condizione operativa il problema risulta essere la dipendenza del coefficiente di attrito dal numero di Mach, oltre che dal numero di Reynolds. Ciò rende i coefficienti di attrito ricavati dal diagramma di Moody inutilizzabili, in quanto relativi a fluidi incomprimibili e, dunque, aventi validità solo per condizioni di deflusso subsoniche. Pertanto, si sono ricercate soluzioni compatibili con lo studio di moti supersonici, individuando in letteratura alcuni riferimenti indicanti, per fattori di attrito nel

campo supersonico, valori circa dimezzati rispetto ai corrispondenti valori adottati nel più usuale campo subsonico. Per questa ragione, nei calcoli di moti supersonici si è deciso di dividere il coefficiente di attrito tradizionale (subsonico) per 2.3, ottenendo in questo modo risultati soddisfacenti nel confronto tra codice monodimensionale e CFD.

La validazione del codice di calcolo in presenza di onde d'urto normali interne all'ugello è stata svolta nelle ipotesi semplificative di fluido aviscoso. Questo perché, a causa della viscosità, la CFD evidenzia un vistoso distacco di vena, a valle dell'onda d'urto, dovuto all'interazione dell'onda d'urto con lo strato limite stesso. Oltre al distacco di vena si presentano anche una serie di onde d'urto oblique che, sovrapposte al problema del distacco stesso, rendono pressoché impossibile lo studio del fenomeno mediante un codice di calcolo monodimensionale.

Il confronto tra i risultati della CFD e del codice monodimensionale, nelle ipotesi di fluido aviscoso, per il calcolo in presenza di onde d'urto normali interne all'ugello, produce risultati ottimi con errori che si attestano attorno all'1%.

Si è poi proseguito con la validazione nel capo di pressioni che producono un aggiustamento delle condizioni termodinamiche e fluidodinamiche all'esterno dell'ugello mediante onde d'urto oblique.

In questo caso, per effettuare il confronto con la fluidodinamica computazionale, la geometria è stata estesa implementando un plenum a valle degli ugelli in esame. I risultati ottenuti mediante il codice monodimensionale hanno dimostrato buona concordanza con i risultati ottenuti dalla CFD, con errori medi dell'8%. Infine, per quanto riguarda le onde di espansione, si sono riscontrati alcuni problemi nella misurazione dei risultati ottenuti mediante CFD; inoltre, l'impossibilità di eseguire simulazioni CFD completamente aviscose introduceva inevitabili perdite di pressione totale non contemplate dal codice monodimensionale. Per quanto detto, ricordando che tali onde di espansione sono, teoricamente, quasi isoentropiche, si è deciso di trascurare la validazione di questa sezione del codice. In conclusione, il codice sviluppato in questa sede si rivela uno strumento di analisi affidabile, per quanto riguarda il deflusso subsonico e supersonico di gas ideale all'interno di un ugello convergente divergente. D'altro canto, nel calcolo dei casi più complessi, in cui si ha formazione di onde (d'urto e di espansione), dimostra alcuni limiti, permettendo di ottenere soluzioni comparabili con quanto ottenuto dalla CFD solo ammettendo l'ipotesi semplificativa di operare con fluido aviscoso. Sviluppi futuri del codice di calcolo implementato potrebbero prevedere la ricerca, lo studio e l'implementazione di un modello che riesca a definire in maniera esaustiva le onde d'urto normali ed oblique nonché le onde di espansione in condizioni di deflusso reali. Infine, si potrebbe considerare nel deflusso un gas semi-ideale, il cui rapporto tra i calori specifici vari con la temperatura.

# BIBLIOGRAFIA

Alberto Cavallini e Lino Mattarolo (1990). Termodinamica applicata. Padova, ed.CLEUP

Alberto Cavallini e Mario Sovrano (1978). Elementi di gasdinamica. Bologna, ed.Patron.

A. Hadjadj, J. Larsson, B. E. Morgan, J. W. Nichols e S. K. Lele (2010). Large-Eddy simulation of shock/boundary-layer interaction. Center for Turbulence Research

Asher H. Shapiro (1953). The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow VOL I. ed. John Wiley & Sons Inc (Net Pod)

Claudio Datel (2003). Idraulica. Padova, ed. Libreria internazionale Cortina

G. E. Gadd (1962). Interactions between Normal Shock Waves and Turbulent Boundary Layers. London, Aerodynamics Division, N.P.L.

J.Delery e J.G. Marvin (1986). Shock-wave boundary layer interaction. Advisory group for aerospace research and development

Joseph H. Keenan e Ernest P. Neumann (1943). Measurements of friction coefficients in a pipe for subsonic and supersonic flow of air, Massachussets Institute of Technology