



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Sincronizzazione di particelle attive confinate

Relatore:

Prof. Fulvio Baldovin

Laureanda:

Valentina Tonazzo

Anno Accademico 2020/2021

Indice

1	Introduzione	4
2	Il modello	5
2.1	Modello Kuramoto	5
2.2	Coordinate cartesiane	6
2.3	Coordinate polari	7
3	Studio analitico della condizione di equilibrio	9
3.1	Analisi della collisione con la parete	10
3.2	Analisi con interazione tra particelle	14
4	Analisi numerica	17
4.1	Introduzione dei parametri d'ordine	17
4.2	Verifica sui casi di interesse, in assenza di interazione	18
4.3	Analisi con interazione	21
5	Conclusioni	24

Capitolo 1

Introduzione

Per sincronizzazione si intende quel fenomeno in cui:

"una popolazione di unità oscillanti a frequenze diverse evolve spontaneamente in modo tale che le singole unità operino all'unisono." [2]

In natura i fenomeni di sincronizzazione vengono quotidianamente osservati, e sono di fondamentale importanza, ad esempio, per gli esseri viventi le cui abitudini comportamentali e biologiche sono scandite da ritmi ben precisi: basti pensare al moto degli stormi di uccelli, banchi di pesci, sciame di insetti, all'alternarsi tra veglia e sonno, periodi di accoppiamento e migrazione, l'orientamento delle piante tra il giorno e la notte. Ma non solo: fenomeni di sincronismo si osservano spontaneamente anche in semplici tessuti biologici, quali il moto delle cellule cardiache che permettono, tramite contrazione unisona, di creare un battito cardiaco; oppure in sistemi non biologici.

Un esempio di quest'ultimo caso venne studiato dal biologo teorico Artur Winfree (1942-2002) quando ancora giovane, collegò tra loro 71 tubi al neon tramite circuiti oscillanti creando uno strumento chiamato *firefly machine* in grado di simulare il comportamento di un particolare tipo di lucciole maschio della Malesia [9], le quali comunicano coordinando i segnali luminosi. Winfree, ben presto, si rese conto che il fenomeno di sincronizzazione tra oscillatori con frequenze sufficientemente simili si verifica solo se l'intensità della forza di interazione supera una certa soglia.

Un successivo passo viene compiuto dal fisico giapponese Yoshiki Kuramoto, che riprendendo il modello di Winfree, sviluppa un set di equazioni differenziali, basato sull'ipotesi di interazione di campo medio, capace di prevedere il comportamento di N (nel limite per N infinito) arbitrari oscillatori armonici, e calcola analiticamente la soglia di sincronizzazione.

Gli esempi di sincronizzazione sopra citati riguardano una specifica categoria di sistemi, che prende il nome di *materia attiva*: si tratta di particelle capaci di generare movimento in modo autonomo (*self-propelled*), sfruttando serbatoi di energia interna [6]. Negli ultimi anni l'utilizzo di modelli di questo tipo ha suscitato notevole interesse sia dal punto di vista applicativo: un esempio è lo studio di batteri in ambiente asimmetrico, in grado di generare moto meccanico [1], oppure lo studio di fluidi attivi in cui si evidenzia che il confinamento, sotto specifiche condizioni, può indurre il passaggio da un flusso di moto turbolento a uno caratterizzato da moto coerente [10]; ma anche dal punto di vista della fisica fondamentale poiché si tratta di interazione fuori dall'equilibrio termodinamico costituendo il punto di partenza per studi innovativi.

L'obiettivo di questo progetto è di formulare un semplice modello che, sfruttando un'interazione di tipo Kuramoto, ci permetta di indagare la possibilità di sincronismo nel caso in cui particelle attive vengano confinate all'interno di una semplice geometria bidimensionale. Nel primo capitolo si presenta la definizione del modello preso in considerazione, e l'analisi del miglior set di coordinate per descriverlo; a seguito, lo studio dal punto di vista analitico sulla natura dell'equilibrio del sistema e infine viene introdotta l'interazione tra particelle, i relativi metodi di valutazione del grado di sincronia e l'analisi di casi particolari.

Capitolo 2

Il modello

2.1 Modello Kuramoto

Il modello Kuramoto si basa sullo studio di N oscillatori di tipo ciclo limite debolmente interagenti: dove, per ciclo limite, intendiamo un'orbita periodica attrattiva¹. È possibile dimostrare [3] che la dinamica di un oscillatore di tipo ciclo-limite è completamente caratterizzabile tramite un unico parametro $\phi(t)$ che ne descrive l'oscillazione, viene inoltre identificata una frequenza naturale di oscillazione ω costante nel tempo, di modo che:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega. \quad (2.1)$$

Nel 1975 Kuramoto dimostra [5] che per un insieme $N \gg 1$ di oscillatori, le cui naturali frequenze vengono estratte da una data distribuzione $g(\omega)$, generalmente unimodale simmetrica, la dinamica del moto a lungo termine per l' i -esimo oscillatore è data da:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \epsilon \sum_{j=1}^{N'} Q_{i,j}(\phi_i - \phi_j); \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2)$$

dove l'oscillazione dipende linearmente dall'interazione $Q_{i,j}$ che può variare in base alla particolare coppia di unità oscillanti scelte e che già a questo livello evidenzia la dipendenza dalla *differenza* delle fasi, non dalle fasi intrinseche.² Nel caso di interesse, si assume che l'interazione tra ogni coppia di oscillatori sia di uguale intensità, si può quindi riformulare:

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K'}{N} \sum_{j=1}^{N'} f(\phi_i - \phi_j). \quad (2.3)$$

La variabile K' rappresenta l'intensità dell'interazione e risulta normalizzata al numero totale di unità oscillanti. Ciò è dovuto alla necessità di svincolarsi, nel limite per $N \rightarrow \infty$, dalla divergenza che la funzione di interazione imporrebbe.

Il vero e proprio modello proposto da Kuramoto implica come scelta specifica per $f(\phi_i - \phi_j)$ una funzione che soddisfi i seguenti requisiti: deve essere dispari, in modo tale che per fasi uguali l'interazione si annulli, e periodica. La scelta più semplice ricade su una funzione di tipo sinusoidale³.

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \frac{K'}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_i - \phi_j); \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.4)$$

A rigore si sarebbero potute prendere in esame anche combinazioni di potenze dispari del seno, ma gli effetti trascurabili per $N \rightarrow \infty$ e la semplicità di notazione hanno spinto a prediligere una pura

¹Di seguito viene riportata la definizione di *attrattività* 3.4

²L'apice alla sommatoria indica che questa viene eseguita per $i \neq j$

³Si noti che nella sommatoria scompare l'apice.

funzione sinusoidale.

Nel limite per $N \rightarrow \infty$ tale set di equazioni ammette una soluzione ben definita, brillantemente derivata da Kuramoto nel medesimo articolo. In questa trattazione non siamo interessati a studiare nel dettaglio questa soluzione ma faremo uso di uno degli strumenti matematici introdotti nello stesso contesto, ovvero il *parametro d'ordine* così definito:

$$r(t)e^{i\psi(t)} \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j(t)}. \quad (2.5)$$

Questo risulta essere un numero complesso che indica il grado di sincronizzazione del sistema: il modulo $r(t)$ è compreso nell'intervallo $[0, 1]$, l'estremo superiore viene assunto quando abbiamo massimo grado di sincronia nel sistema. La fase $\psi(t)$ corrisponde alla media delle fasi delle singole unità oscillanti.

2.2 Coordinate cartesiane

Come anticipato nell'introduzione, per materia attiva si intende un insieme di sistemi che hanno accesso ad un serbatoio di energia; in questo contesto considereremo che l'energia sia a disposizione indipendentemente per ogni costituente, inoltre si suppone che tale serbatoio di energia non si esaurisca mai (serbatoio ideale).

Nel nostro modello il comportamento attivo viene schematizzato considerando un set di particelle dotate di velocità di modulo costante e fissato. Verranno prese in esame particelle di tipo puntiforme, sebbene questo non costituisca un vincolo per la trattazione, e non rappresenti una richiesta necessaria per la caratterizzazione della materia attiva, come si è visto negli esempi dell'introduzione. Le singole unità vengono confinate all'interno di una geometria bidimensionale, nel caso specifico, una circonferenza, che funge da parete liscia: quando una particella impatta contro la parete, quest'ultima sviluppa una reazione normale nel punto di impatto invertendo la componente radiale della velocità: il modulo del momento lineare di ogni singola particella resta invariato, ma nel complesso abbiamo un cambiamento di direzione dovuto all'azione esterna della parete.

Introduciamo il caso di singola unità in coordinate cartesiane. Definiamo le variabili:

- $x(t)$, $y(t)$ corrispondenti alle coordinate cartesiane della particella al momento t ,
- $v_x(t)$, $v_y(t)$ corrispondenti alle proiezioni della velocità lungo gli assi cartesiani,
- $r(t)$ la distanza della particella dall'origine degli assi cartesiani, $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$,
- con dt si denomina la variabile di incremento temporale.

La particella viene creata con posizione iniziale x_0 , y_0 , e angolo della velocità rispetto all'asse x , ϕ_0 casuali, mentre il raggio della circonferenza R e il modulo della velocità iniziale v_0 sono definiti. Con i dati così identificati vengono ricavate le proiezioni delle velocità lungo gli assi $v_x(t)$, $v_y(t)$ istante per istante. Pertanto, se non vi è impatto con la parete, le equazioni del moto coincidono con quelle di una particella libera:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x(t) \\ \dot{y} = v_y(t). \end{cases} \quad (2.6)$$

Nel momento in cui il raggio $r(t)$ calcolato ad ogni iterazione, diviene maggiore del raggio di confinamento R , si ricavano i moduli delle componenti radiale $v_r(t)$ e tangenziale $v_{\phi_r}(t)$ della velocità:

$$\begin{aligned} v_r(t) &= \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{e}_r(t) \\ &= \frac{v_x(t)x(t)}{r(t)} \mathbf{e}_x + \frac{v_y(t)y(t)}{r(t)} \mathbf{e}_y, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} v_{\phi_r}(t) &= \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{e}_{\phi_r}(t) \\ &= \frac{v_x(t)y(t)}{r(t)} \mathbf{e}_x + \frac{v_y(t)x(t)}{r(t)} \mathbf{e}_y, \end{aligned} \quad (2.8)$$

per poi ridefinire la velocità con componente radiale opportunamente invertita:

$$v_x(t_c + dt) = \frac{-v_r(t_c)x(t_c) + v_t(t_c)y(t_c)}{r(t_c)}, \quad (2.9)$$

$$v_y(t_c + dt) = \frac{-v_r(t_c)y(t_c) + v_t(t_c)x(t_c)}{r(t_c)}; \quad (dt > 0), \quad (2.10)$$

dove t_c è l'istante immediatamente precedente alla collisione con la parete.

Il risultato di una simulazione con 1000 iterazioni è riportato in Fig.2.1:

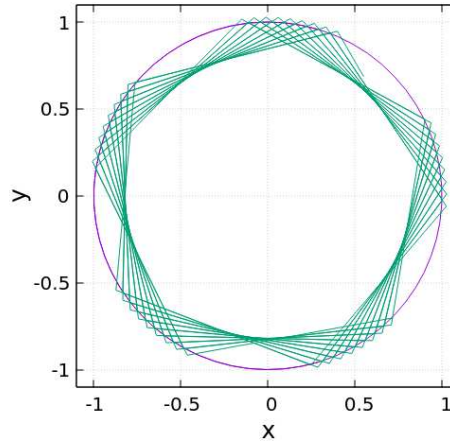


Figura 2.1: simulazione con 1 particella entro raggio $R = 1$, con $dt = \frac{R}{10v_0}$.

In Fig.2.1 si può notare come la parete venga superata dal moto della particella prima dell'inversione della componente radiale: ciò è dovuto alla definizione della variabile dt , evidentemente non infinitesima, inoltre la distanza minima dei tratti di traiettoria dal centro delle coordinate cartesiane è costante, indice della conservazione del momento angolare (vedere sotto).

2.3 Coordinate polari

Sulla scia di quanto dimostrato da Winfree, si è scelto di passare ad una descrizione in coordinate polari al fine di semplificare la trattazione del problema e poter, più agevolmente, applicare un'interazione di tipo Kuramoto. Definiamo quindi le nuove variabili:

- $\phi_r(t)$ l'angolo formato tra il raggio della particella e l'asse x ,
- $\phi_v(t)$ l'angolo formato tra il vettore velocità a l'asse x .

Ora vengono creati in modo casuale il raggio iniziale di ogni particella $0 \leq r_0 \leq R$, e gli angoli $\phi_{r,0}, \phi_{v,0} \in [0, 2\pi]$. In assenza di urti con la parete, le equazioni che regolano il moto ora divengono le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{r} = v_0 \cos(\phi_v(t) - \phi_r(t)) \\ \dot{\phi}_r = \frac{v_0 \sin(\phi_v(t) - \phi_r(t))}{r(t)}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Per comodità introduciamo il parametro $\theta \in [0, 2\pi]$ che sarà utile anche nella trattazione successiva:

$$\theta \equiv \phi_v - \phi_r. \quad (2.12)$$

Al momento della collisione il contributo della parete agisce su tale parametro nel seguente modo:

$$\theta(t_c + dt) = \pi - \theta(t_c), \quad (2.13)$$

in questo modo, traducendo in termini delle variabili precedentemente introdotte, l'effetto della parete si manifesta al livello di $\phi_v(t)$, lasciando invariato $\phi_r(t)$:

$$\phi_v(t_c + dt) = \pi - \phi_v(t_c) + 2\phi_r(t_c). \quad (2.14)$$

Ed il sistema risulta equivalente al caso descritto in coordinate cartesiane. Si noti che il problema relativo al superamento della parete viene evitato entro certi limiti riducendo la grandezza dell'incremento temporale dt , si è osservato che il miglior risultato si ottiene quando dt è almeno 10 ordini di grandezza inferiore rispetto alla durata totale della simulazione.

Capitolo 3

Studio analitico della condizione di equilibrio

Riassunto, possiamo descrivere il sistema di particelle attive non interagenti attraverso le equazioni:

$$\begin{cases} \dot{r} = v_0 \cos \theta, \\ \dot{\phi}_r = \frac{v_0 \sin \theta}{r}, \\ \dot{\theta} = \dot{\phi}_v - \dot{\phi}_r = -\frac{v_0 \sin \theta}{r} + f_c(r, \theta). \end{cases} \quad (3.1)$$

Per comodità, possiamo introdurre un un parametro adimensionale ρ :

$$\rho = \frac{r}{R} \longrightarrow 0 \leq \rho \leq 1, \quad (3.2)$$

Da cui il sistema di equazioni 3.1 in caso di collisione risulta:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{v_0}{R} \cos \theta, \\ \dot{\phi}_r = \frac{v_0}{R} \frac{\sin \theta}{\rho}, \\ \dot{\theta} = -\frac{v_0}{R} \frac{\sin \theta}{\rho} + f_c(\rho, \theta); \end{cases} \iff \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{X}(\mathbf{z}). \quad (3.3)$$

Dove, con leggero abuso di notazione, si è indicato sempre con f_c l'effetto di interazione con la parete, questa volta dipendente da ρ ; inoltre abbiamo denotato con $\mathbf{z} = (\rho, \phi_r, \theta)$ le coordinate di una generica particella e con \mathbf{X} il campo vettoriale differenziale che ne determina l'evoluzione. L'espressione per $\dot{\theta}$ si è ricavata notando che, in effetti, in assenza di collisione ϕ_v resta invariato, mentre l'espressione per $\dot{\phi}_r$ compare nell'equazione precedente. Infine è stata inserita l'espressione $f_c(r, \theta)$ che rappresenta la collisione con la parete.

Ricordiamo che [4],[7]:

una soluzione costante nel tempo è detta soluzione di equilibrio, ed è tale per cui: $\mathbf{X}(\mathbf{z}) \equiv 0$.

In questo paragrafo, e nei successivi, siamo interessati alla ricerca di equilibri che permettano la formazione di *cluster*, ovvero aggregati di particelle il cui moto avviene in modo coerente (sincronizzazione). L'idea alla base di questo studio è che il confinamento possa instaurare una frequenza di oscillazione intrinseca, tale da conferire una natura attrattiva o di stabilità all'equilibrio, o al ciclo stazionario considerato.

Innanzitutto ricordiamo la differenza tra le nozioni di attrattività e stabilità, dove in questo contesto è stata adottata la definizione di stabilità alla Lyapunov[4]:

Un equilibrio $\bar{\mathbf{z}}$ del sistema $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{X}(\mathbf{z})$ è definito attrattivo se esiste un intorno V di $\bar{\mathbf{z}}$ tale che ogni soluzione $\mathbf{z}(t)$ con dato iniziale $\mathbf{z}_0 \in V$ soddisfi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t) = \bar{\mathbf{z}}. \quad (3.4)$$

Mentre:

Un equilibrio $\bar{\mathbf{z}}$ del sistema $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{X}(\mathbf{z})$ è definito:

- stabile (secondo Lyapunov), se per ogni intorno U di $\bar{\mathbf{z}}$ esiste un intorno U_0 di $\bar{\mathbf{z}}$ tale che:
 $\Phi_t^{\mathbf{X}}(U_0) \subseteq U \quad \forall t > 0$,
- asintoticamente stabile, se è stabile e attrattivo.

La differenza sostanziale è che, mentre in un equilibrio attrattivo, le orbite con dati iniziali sufficientemente vicini all'equilibrio tendono a $\bar{\mathbf{z}}$ per tempi positivi, il concetto di stabilità è meno restrittivo, implica semplicemente che le soluzioni con dati sufficientemente vicini rimangano confinate entro un certo intorno.

Nei prossimi paragrafi vedremo che, una volta definita l'espressione che rappresenta la collisione con la parete, è possibile individuare una particolare soluzione di equilibrio, successivamente vedremo quali effetti ha su quest'ultima, l'aggiunta di interazione tra particelle.

3.1 Analisi della collisione con la parete

Volendo valutare l'interazione con la parete, possiamo osservare che tale effetto si manifesta in modo istantaneo, e può essere riprodotto da una funzione proporzionale ad una delta di Dirac:

$$f_c(\rho, \theta) = (\pi - 2\theta_c) \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - t_{c,k}). \quad (3.5)$$

Il termine di proporzionalità $(\pi - 2\theta_c)$, deriva direttamente dalla 2.13.

Inoltre si è definito:

- $t_{c,k}$ l'istante in cui $\rho = 1$, ci si trova sul raggio della circonferenza e quindi avviene di fatto la collisione,
- si indicano con θ_c e θ'_c i valori del parametro $\theta(t)$ immediatamente prima e dopo una generica collisione:

$$\theta_c \equiv \lim_{t \rightarrow t_c^-} \theta(t), \quad \theta'_c \equiv \lim_{t \rightarrow t_c^+} \theta(t). \quad (3.6)$$

Verifichiamo esattamente che cosa accade per istanti sufficientemente vicini ad una collisione.

Dato $\epsilon > 0$ piccolo a piacere, le equazioni 3.3 si possono riscrivere in forma integrale:

$$\rho(t_c + \epsilon) - \rho(t_c - \epsilon) = \frac{v_0}{R} \int_{t_c - \epsilon}^{t_c + \epsilon} \cos \theta(t) dt, \quad (3.7)$$

$$\phi_r(t_c + \epsilon) - \phi_r(t_c - \epsilon) = \frac{v_0}{R} \int_{t_c - \epsilon}^{t_c + \epsilon} \frac{\sin \theta(t)}{\rho(t)} dt, \quad (3.8)$$

$$\theta(t_c + \epsilon) - \theta(t_c - \epsilon) = -\frac{v_0}{R} \int_{t_c - \epsilon}^{t_c + \epsilon} \frac{\sin \theta(t)}{\rho(t)} dt + (\pi - 2\theta_c) \int_{t_c - \epsilon}^{t_c + \epsilon} \delta(t - t_c) dt; \quad (3.9)$$

dove nella 3.9 abbiamo sfruttato 3.5. Possiamo quindi considerare le seguenti approssimazioni:

$$\begin{aligned} \int_{t_c - \epsilon}^{t_c + \epsilon} \cos \theta(t) dt &= \int_{t_c - \epsilon}^{t_c} \cos \theta(t) dt + \int_{t_c}^{t_c + \epsilon} \cos \theta(t) dt \\ &\simeq \epsilon \cos(\theta_c) + \epsilon \cos(\theta'_c) \\ &= \epsilon (\cos(\theta_c) - \cos(\theta'_c)) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{t_c-\epsilon}^{t_c+\epsilon} \sin \theta(t) dt &= \int_{t_c-\epsilon}^{t_c} \sin \theta(t) dt + \int_{t_c}^{t_c+\epsilon} \sin \theta(t) dt \\
 &\simeq \epsilon \sin(\theta_c) + \epsilon \sin(\theta'_c) \\
 &= \epsilon(\sin(\theta_c) - \sin(\theta'_c)) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.
 \end{aligned}$$

Ricordando inoltre che:

$$\int_{t_c-\epsilon}^{t_c+\epsilon} \delta(t - t_c) = 1, \quad (3.10)$$

e valutando queste approssimazioni nelle 3.7, 3.8, 3.9 si ricava:

$$\begin{aligned}
 \rho(t_c + \epsilon) &\simeq \rho(t_c - \epsilon) \simeq \rho(t_c) = 1, \\
 \psi_r(t_c + \epsilon) &\simeq \psi_r(t_c - \epsilon), \\
 \theta(t_c + \epsilon) &\simeq \theta(t_c - \epsilon) \simeq \pi - 2\theta_c \implies \theta'_c = \pi - \theta_c.
 \end{aligned}$$

Dunque abbiamo verificato che la condizione 3.5 descrive analiticamente l'effetto della collisione con la parete coerentemente con quanto introdotto nel paragrafo 2.2.

Possiamo ora dimostrare che una delle Eq. 3.3, in assenza di interazione tra le particelle, è in realtà dipendente dalle altre. Notiamo infatti che il momento angolare \mathbf{L} rappresenta una costante del moto, e quindi la sua conservazione ci permette di semplificare il problema:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\
 &= \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \\
 &= mv_0 r \sin(\theta) \mathbf{u}_z \\
 &= L_z \mathbf{u}_z.
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

L'analisi della conservazione del momento può essere suddivisa in due parti. Nell'intervallo temporale tra una collisione e la successiva ($\rho < 1$) abbiamo:

$$\begin{aligned}
 \dot{L}_z(t) &= mv_0 \dot{r} \sin \theta + mv_0 r \cos \theta \dot{\theta} \\
 &= mv_0 R \dot{\rho} \sin \theta + mv_0 R \rho \cos \theta \dot{\theta} \\
 &= mv_0 R \left(\frac{v_0}{R} \cos \theta \sin \theta - \rho \cos \theta \frac{v_0}{R} \frac{\sin \theta}{\rho} \right) = 0,
 \end{aligned} \quad (3.12)$$

dove nel penultimo passaggio si sono sfruttate le 3.3 e 3.5 per $\dot{\rho}$ e $\dot{\theta}$.

Invece durante una collisione con la parete, si considera nuovamente $\epsilon > 0$ piccolo a piacere:

$$\begin{aligned}
 L_z(t_c + \epsilon) - L_z(t_c - \epsilon) &\simeq mv_0 R \sin \theta'_c - mv_0 R \sin \theta_c \\
 &= mv_0 R [\sin(\pi - \theta_c) - \sin \theta_c] = 0.
 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Concludiamo che il momento angolare è conservato per ogni istante e se ne denota con $L_{z,0}$ la componente lungo l'asse z perpendicolare al piano xy .

$$\mathbf{L}(t) = L_{0,z} \mathbf{u}_z; \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

A questo punto è possibile riscrivere l'equazione $\phi_r(t)$ in funzione del momento angolare, considerando:

$$\rho(t) = \frac{L_{0,z}}{mv_0 R \sin \theta(t)}, \quad (3.14)$$

da cui:

$$\dot{\phi}_r(t) = \frac{v_0 \sin \theta}{R \rho} = \frac{v_0 \sin \theta(t)}{R \frac{L_{0,z}}{mv_0 R \sin \theta(t)}} = \frac{mv_0^2}{L_{0,z}} \sin^2 \theta(t); \quad (3.15)$$

quindi l'evoluzione temporale della coordinata ϕ_r è nota data $\theta(t)$:

$$\phi_r(t) = \phi_r(0) + \frac{mv_0^2}{L_{0,z}} \int_0^t \sin^2 \theta(t') dt'. \quad (3.16)$$

Nel complesso possiamo concludere che le equazioni del moto indipendenti si riducono a due:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{v_0}{R} \cos \theta, \\ \dot{\theta} = -\frac{v_0 \sin(\theta)}{R \rho} + (\pi - 2\theta_c) \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - t_{c,k}), \end{cases} \quad (3.17)$$

coerentemente con quanto ci si attende dalla descrizione di un sistema bidimensionale con due costanti del moto, v_0 ed $L_{0,z}$.

Ora vogliamo verificare che la soluzione particolare:

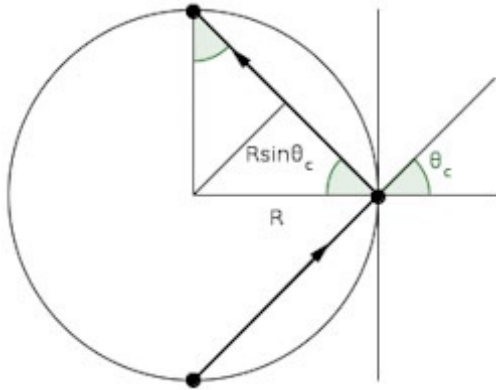
$$\bar{z} = (\bar{\rho}, \bar{\theta}) = (1, \pm \frac{\pi}{2}), \quad (3.18)$$

soddisfa la condizione $\mathbf{X}(\bar{z}) = 0$ e costituisce quindi un equilibrio del sistema 3.3; la conservazione del momento angolare ci permette di dimostrare che si tratta di un equilibrio stabile, ma non asintoticamente stabile.

Consideriamo il seguente fatto: nell'istante immediatamente prima della collisione con la parete è possibile esprimere l'angolo θ_c in funzione di $L_{0,z}$.

$$L_{0,z} = mv_0 R \sin \theta_c \implies \sin \theta_c = \frac{L_{0,z}}{mv_0 R},$$

da cui si ricava la frequenza con cui si verifica una collisione ν_c ; quest'ultima dipende dal tratto percorso all'interno della circonferenza, tra una collisione e la successiva.



$$\begin{aligned} \nu_c &= \frac{v_0}{2\sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \theta_c}} \\ &= \frac{v_0}{2R\sqrt{1 - \sin^2 \theta_c}} \\ &= \frac{v_0}{2R|\cos \theta_c|}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Di conseguenza valutando come condizioni iniziali $(\rho_0, \theta_0) = (\bar{\rho}, \bar{\theta})$ si ricava direttamente la soluzione $\rho(t)$:

$$\dot{\rho}(0) = \frac{v_0}{R} \cos \bar{\theta} = 0 \implies \rho(t) = 1; \quad \forall t. \quad (3.20)$$

Inoltre considerando le stesse condizioni iniziali, dalla 3.19 si osserva che $\nu_c \rightarrow \infty$ e che, per poter garantire la conservazione di $L_{0,z}$, nell'equazione per $\dot{\theta}$ di 3.17 il termine relativo all'evoluzione di ϕ_r viene esattamente compensato dal termine dovuto alla collisione con la parete.

$$\dot{\theta}(0) = -\frac{v_0 \sin \theta_0}{R \rho_0} + (\pi - 2\theta_c) \sum_{i=1}^{\infty} \delta(t - t_{c,i}) = 0. \quad (3.21)$$

È attraverso questa compensazione che il confinamento introduce la frequenza naturale $\frac{v_0}{R}$ nel sistema. La seconda uguaglianza, nell'eq.3.21, è difficile da verificare analiticamente, ma si può ricavare in modo indiretto dalla 3.15 osservando che, nel caso in cui $\rho(t) = 1$:

$$\sin \theta(t) = \frac{L_{0,z}}{mv_0 R} = \sin \bar{\theta} = \pm 1; \quad \forall t,$$

Da cui:

$$\theta_t = \pm \frac{\pi}{2} \implies \dot{\theta} = 0; \quad \forall t. \quad (3.22)$$

Quindi secondo la definizione data, $(\bar{\rho}, \bar{\theta}) = (1, \pm \frac{\pi}{2})$ rappresenta un equilibrio per il sistema 3.17.

Inoltre nella stessa condizione di equilibrio è possibile ricavare il valore del momento angolare:

$$L_{0,z} = \pm mv_0 R, \quad (3.23)$$

che inserito nella 3.16 permette di trovare la soluzione $\phi_r(t)$:

$$\begin{aligned} \phi_r(t) &= \phi_r(0) + \frac{mv_0^2}{L_{0,z}} \int_0^t \sin^2 \theta(t') dt' \\ &= \phi_{r,0} \pm \frac{v_0}{R} t. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Notiamo che considerando il sistema di equazioni dipendenti 3.3, la soluzione $(\rho(t), \phi(t), \theta(t)) = (1, \phi_{r,0} \pm \frac{v_0}{R} t, \pm \frac{\pi}{2})$ rappresenta uno stato ciclico stazionario.

Infine, si dimostra che data un'orbita con condizioni iniziali nell'intorno del punto di equilibrio, questa resta confinata entro una certa distanza dallo stesso.

Indicando con ρ_{min} la distanza minima dall'origine, sia data un'orbita tale che:

$$1 - \rho_{min} = 1 - |\sin \theta_c| < \epsilon, \quad (3.25)$$

per ϵ piccolo a piacere. Allora per la conservazione del momento angolare si ha che:

$$\rho_{min} \leq \rho(t) \leq 1 \implies 1 - \rho(t) < \epsilon. \quad (3.26)$$

Da ultimo si trova che l'andamento del parametro θ è limitato:

- Se $\theta(0) > 0 \implies \sin \theta(t) > 0, \quad \forall t :$

$$1 - \epsilon < \sin \theta_c \leq \sin \theta(t) \leq 1 \implies \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\epsilon < \theta(t) \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3.27)$$

- Se $\theta(0) < 0 \implies \sin \theta(t) < 0, \quad \forall t :$

$$-1 \leq \sin \theta(t) \leq \sin \theta_c < -1 + \epsilon \implies -\frac{\pi}{2} \leq \theta(t) < -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}\epsilon. \quad (3.28)$$

Che prova la stabilità del punto fisso.

3.2 Analisi con interazione tra particelle

Consideriamo ora il caso in cui le singole unità oscillanti influenzino reciprocamente i loro moti: in particolare, si è scelto di inserire un'interazione di tipo Kuramoto tale da agire sui parametri ϕ_v ,

$$\dot{\phi}_{v,i} = K \sum_{j=1}^N \sin(\phi_{v,i} - \phi_{v,j}), \quad (3.29)$$

dove $K > 0$ è una costante che può eventualmente dipendere da N , il numero totale delle particelle considerate, $K = K(N)$.

Ricordando la definizione del parametro θ , si ricava:

$$\theta_i = \phi_{v,i} - \phi_{r,i} \implies \phi_{v,i} = \theta_i + \phi_{r,i}, \quad (3.30)$$

Allora il sistema 3.3 per l' i -esima particella assume la seguente forma, in cui l'interazione agisce solo sulle coordinate θ_i :

$$\begin{cases} \dot{\rho}_i = \frac{v_0}{R} \cos \theta_i, \\ \dot{\phi}_{r,i} = \frac{v_0}{R} \frac{\rho_i}{\rho_i}, \\ \dot{\theta}_i = -\frac{v_0}{R} \frac{\sin \theta_i}{\rho_i} + (\pi - 2\theta_c) \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - t_{c,k}) - K \sum_{j=1}^N \sin(\phi_{r,i} - \phi_{r,j} + \theta_i - \theta_j). \end{cases} \quad (3.31)$$

Osservazione: è possibile dimostrare che il momento angolare non è più conservato, di conseguenza le equazioni del moto, per ogni particella risultano interdipendenti e non è più possibile risalire a $\phi_{r,i}(t)$ solamente sulla base di $\theta_i(t)$.

Lo scopo di quest'analisi è caratterizzare la dinamica del parametro ϕ_r , in condizioni corrispondenti al caso di equilibrio precedente: $(\bar{\rho}, \bar{\theta}) = (1, \pm \frac{\pi}{2})$.

Introducendo per comodità le funzioni:

$$f_x(\phi_1, \dots, \phi_N) \equiv f_x(\vec{\phi}_v) \equiv \sum_{j=1}^N \cos \phi_{v,j}, \quad f_y(\phi_1, \dots, \phi_N) \equiv f_y(\vec{\phi}_v) \equiv \sum_{j=1}^N \sin \phi_{v,j}, \quad (3.32)$$

il termine di interazione può essere riscritto:

$$\begin{aligned} -K \sum_{j=1}^N \sin(\phi_{v,i} - \phi_{v,j}) &= -K \sum_{j=1}^N \left[\sin \phi_{v,i} \cos \phi_{v,j} - \cos \phi_{v,i} \sin \phi_{v,j} \right] \\ &= -K \left[\sin \phi_{v,i} f_x(\vec{\phi}_v) - \cos \phi_{v,i} f_y(\vec{\phi}_v) \right]; \end{aligned} \quad (3.33)$$

forma che ci sarà utile anche nell'analisi successiva.

Si verifica che in alcune configurazioni particolari, il vincolo $(\rho_0, \theta_0) = (\bar{\rho}, \bar{\theta})$ permette di ottenere una dinamica simile al caso di non interazione. A tal fine è utile definire due situazioni di particolare interesse caratterizzate da diverse condizioni iniziali:

- **caso di cluster localizzato sul bordo**

In questa situazione le particelle si trovano sul bordo e sono localizzate in un unico punto, il vettore velocità forma un angolo di 90 gradi rispetto al vettore posizione, dando luogo ad un moto uniforme circolare. Dal sistema di equazioni, considerando:

$$\rho_i = \bar{\rho} = 1, \quad \theta_i = \bar{\theta} = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (3.34)$$

Si ottengono le soluzioni particolari $\bar{\phi}_{r,i}(t)$ e $\bar{\phi}_{v,i}(t)$ per ogni particella:

$$\bar{\phi}_{r,i}(t) = \phi_{r,0} \pm \frac{v_0}{R}t, \quad (3.35)$$

$$\bar{\phi}_{v,i}(t) \equiv \bar{\phi}_{r,i}(t) + \bar{\theta}_i = \phi_{r,0} \pm \frac{v_0}{R}t \pm \frac{\pi}{2}; \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (3.36)$$

In questa condizione si osserva che il contributo relativo all'interazione tra particelle è nullo:

$$-K \sum_{j=1}^N \sin(\bar{\phi}_{v,i} - \bar{\phi}_{v,j}) = -K \left[\sin \bar{\phi}_v(t) N \cos \bar{\phi}_v(t) - \cos \bar{\phi}_v(t) N \sin \bar{\phi}_v(t) \right] = 0; \quad (3.37)$$

dove, nel primo passaggio, si è sfruttato il fatto che $\bar{\phi}_{v,j}(t)$ è uguale per ogni particella e quindi fornisce lo stesso contributo alla somma.

Questo fatto ci riporta allo studio precedente di non interazione tra particelle, infatti:

$$(\bar{\rho}, \bar{\phi}_r(t), \bar{\theta}) = (1, \phi_{r,0} \pm \frac{v_0}{R}t, \pm \frac{\pi}{2}) \quad (3.38)$$

rimane uno stato stazionario stabile.

- **caso di cluster delocalizzato sul bordo**

In questa situazione le particelle si trovano ancora sul bordo ma sono distribuite in modo uniforme su tutta la circonferenza e, per ogni particella, il vettore velocità forma ancora un angolo di $\pi/2$ rispetto al vettore posizione. In formule:

$$\rho_i = \bar{\rho} = 1, \quad \theta_i = \bar{\theta} = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Si ricava la corrispondente soluzione per $\bar{\phi}_{r,i}$:

$$\bar{\phi}_{r,i}(t) = \phi_{r,0,i} \pm \frac{v_0}{R}t. \quad (3.39)$$

Dove si noti la dipendenza del dato iniziale $\phi_{r,0,i}$ dalla singola particella, che si manifesta nella soluzione particolare $\bar{\phi}_{v,i}(t)$:

$$\bar{\phi}_{v,i}(t) \equiv \bar{\phi}_{r,i}(t) + \bar{\theta}_i = \phi_{r,0,i} \pm \frac{v_0}{R}t \pm \frac{\pi}{2}. \quad (3.40)$$

Poichè i termini $\bar{\phi}_{v,j}(t)$ non sono uguali per tutte le particelle, a differenza del caso precedente non forniscono lo stesso contributo alla somma, tuttavia, nelle funzioni f_x ed f_y definite precedentemente 3.32:

$$f_x(\vec{\phi}_v) = \sum_{j=1}^N \cos \bar{\phi}_{v,j}(t) = \sum_{j=1}^N \cos \left(\phi_{r,0,j} \pm \frac{v_0}{R}t \pm \frac{\pi}{2} \right), \quad (3.41)$$

introducendo il parametro $\alpha(t)$ dato dalla parte angolare di $\bar{\phi}_{v,j}(t)$ comune a tutte le particelle:

$$\alpha(t) = \frac{v_0}{R}t \pm \frac{\pi}{2}, \quad (3.42)$$

e passando al limite del continuo, per $N \gg 1$:

$$\begin{aligned} f_x(\vec{\phi}_v) &\simeq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\phi_{r,0} + \alpha(t)) d\phi_{r,0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\cos \alpha(t) \int_0^{2\pi} d\phi_{r,0} \cos \phi_{r,0} - \sin \alpha(t) \int_0^{2\pi} d\phi_{r,0} \sin \phi_{r,0} \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
 f_y(\vec{\phi}_v) &\simeq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_{r,0} \sin(\phi_{r,0} + \alpha(t)) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\cos \alpha(t) \int_0^{2\pi} d\phi_{r,0} \sin \phi_{r,0} + \sin \alpha(t) \int_0^{2\pi} d\phi_{r,0} \cos \phi_{r,0} \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Valutando il termine di interazione 3.33 con tali stime per f_x ed f_y , si ricava che quest'ultimo è nuovamente nullo:

$$-K \sum_{j=1}^N \sin(\bar{\phi}_{v,i} - \bar{\phi}_{v,j}) = -K \left[\sin \bar{\phi}_{v,i} f_x(\vec{\phi}_v) - \cos \bar{\phi}_{v,i} f_y(\vec{\phi}_v) \right] = 0. \tag{3.45}$$

Quindi, come nel caso precedente, la dinamica è la stessa del caso in assenza di interazione e anche il cluster delocalizzato sul bordo rappresenta, per le particelle, uno stato stazionario stabile.

Per mostrare che lo stato stazionario costituisce un ciclo limite, grazie all'azione dell'interazione, ci affidiamo ad un'analisi numerica nella prossima sezione.

Capitolo 4

Analisi numerica

In questo paragrafo verranno presentati i metodi di analisi utilizzati per valutare il grado di sincronizzazione tra particelle, i principali casi di interesse, nonché i risultati di simulazioni.

4.1 Introduzione dei parametri d'ordine

Per valutare la sincronizzazione tra particelle è stato introdotto il cosiddetto parametro d'ordine, del tutto analogo al parametro presentato da Kuramoto e riassunto nella sezione 2.1.

L'idea alla base consiste nel pensare alle unità oscillanti come un insieme di punti vincolati a muoversi in una circonferenza unitaria nel piano complesso (da non confondere con il confinamento bidimensionale definito nella sezione 2.2 che invece coinvolge il piano reale), al generico istante t , è possibile associare ad ogni punto, un vettore di lunghezza unitaria, prendendone la somma vettoriale e normalizzando il tutto al numero totale di unità oscillanti si ottiene:

$$\psi_r(t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_{r,j}(t)}. \quad (4.1)$$

Il modulo del vettore complesso risultante fornisce una misura della coerenza tra le fasi, mentre la fase, come precedentemente detto corrisponde ad una media delle fasi oscillanti.

Come osservato nella sezione 3.2, un caso di particolare interesse è il *cluster delocalizzato sul bordo*; in questa situazione, poichè le particelle sono distribuite in modo uniforme lungo la circonferenza, ci si attende che il parametro d'ordine restituisca modulo e fase nulli. Per misurare la coerenza comunque intrinseca in questa situazione, è stato introdotto un secondo parametro d'ordine $\psi_\theta(t)$, in grado di valutare la sincronizzazione tra gli angoli θ_i delle N particelle.

$$\psi_\theta(t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)}. \quad (4.2)$$

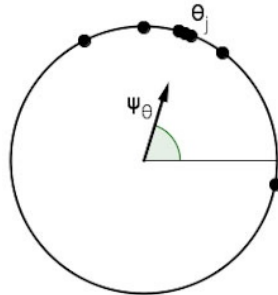


Figura 4.1: rappresentazione geometrica del parametro d'ordine ψ_θ . [8]

4.2 Verifica sui casi di interesse, in assenza di interazione

In assenza di interazione tra particelle, il moto del sistema è governato dalle equazioni 3.17. Le condizioni iniziali per *cluster localizzato* viste nella sezione 3.2 risultano particolarmente utili per caratterizzare l'andamento di un parametro d'ordine di tipo Kuramoto. I dati iniziali sono i seguenti:

$$(r_{i,0}, \phi_{r,i,0}, \phi_{v,i,0}) = \left(1, 0, +\frac{\pi}{2}\right) \implies (\rho_{i,0}, \theta_{i,0}) = \left(1, +\frac{\pi}{2}\right). \quad (4.3)$$

Ci troviamo quindi nella condizione di equilibrio imposta in 3.18. In fig.4.3 e fig.4.2 sono riportati i risultati di una simulazione di $N = 5$ particelle:

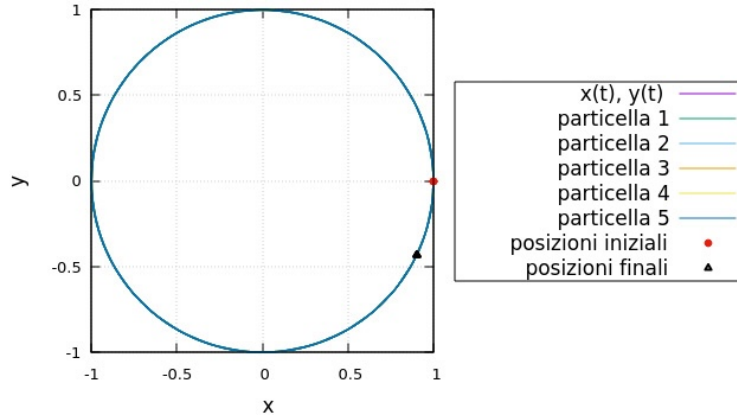


Figura 4.2: Cluster localizzato sul bordo. Traiettorie bidimensionali di $N = 5$ particelle in assenza di interazione, dati considerati ogni 150 iterazioni.

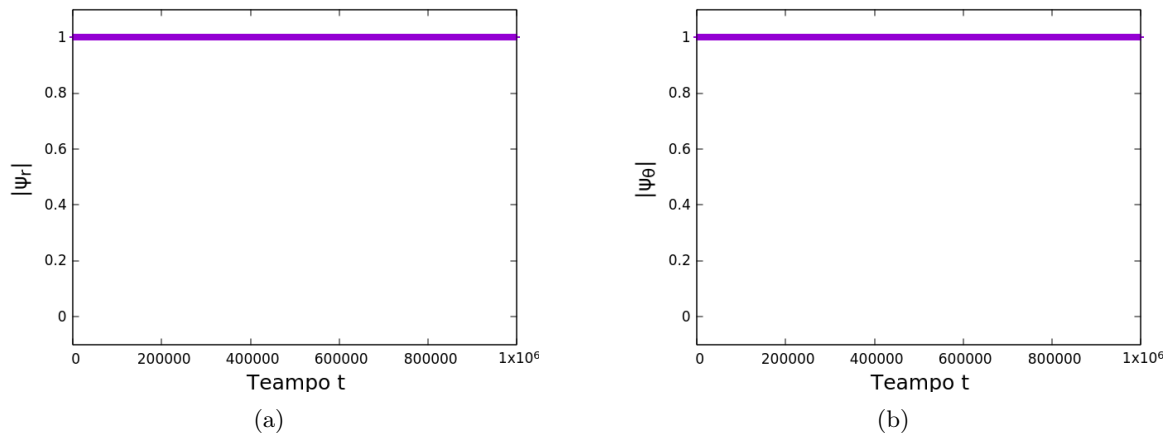


Figura 4.3: Cluster localizzato sul bordo. Simulazione con $N = 5$ particelle in assenza di interazione, in (a) andamento temporale del modulo parametro d'ordine ψ_r , in (b) andamento temporale del modulo parametro d'ordine ψ_θ .

Come ci si attende, il moto coerente delle particelle lungo il bordo si manifesta nel modulo del parametro d'ordine $\psi_r(t)$ identicamente unitario. Inoltre anche il parametro d'ordine $\psi_\theta(t)$ ha lo stesso andamento: ciò è dovuto alle condizioni iniziali uguali per ogni particella, in particolare all'aver scelto lo stesso angolo iniziale nelle posizioni; istantaneamente l' i -esimo vettore velocità è parallelo a quello delle altre $N - 1$ particelle e, nel complesso, si ha la formazione di un cluster di unità non interagenti.

Viceversa nel caso di *cluster delocalizzato*, sempre in assenza di interazione, le condizioni iniziali imposte sono le seguenti:

$$(r_{i,0}, \phi_{r,i,0}, \phi_{v,i,0}) = \left(1, \frac{2i\pi}{N}, \frac{2i\pi}{N} + \frac{\pi}{2}\right) \implies (\rho_{i,0}, \theta_{i,0}) = \left(1, +\frac{\pi}{2}\right). \quad (4.4)$$

Di conseguenza ci si trova nuovamente nel punto di equilibrio del sistema, ma con distribuzione dei parametri angolari relativi alle posizioni ϕ_r diversa. In fig.4.4 sono riportati i risultati di una simulazione di $N=5$ particelle.

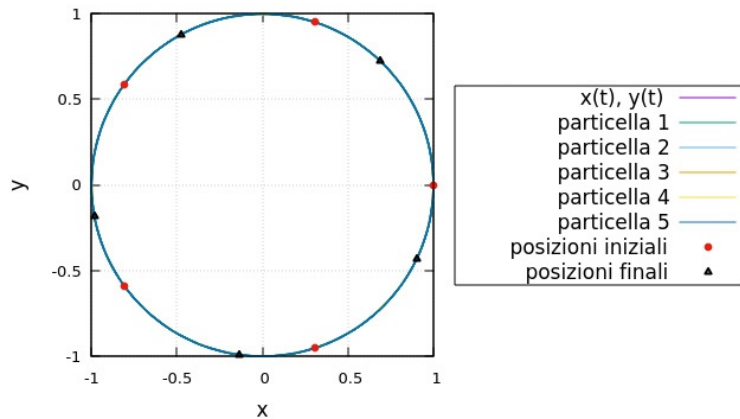


Figura 4.4: Cluster delocalizzato sul bordo. Traiettorie bidimensionali di $N = 5$ particelle in assenza di interazione, dati considerati ogni 150 iterazioni.

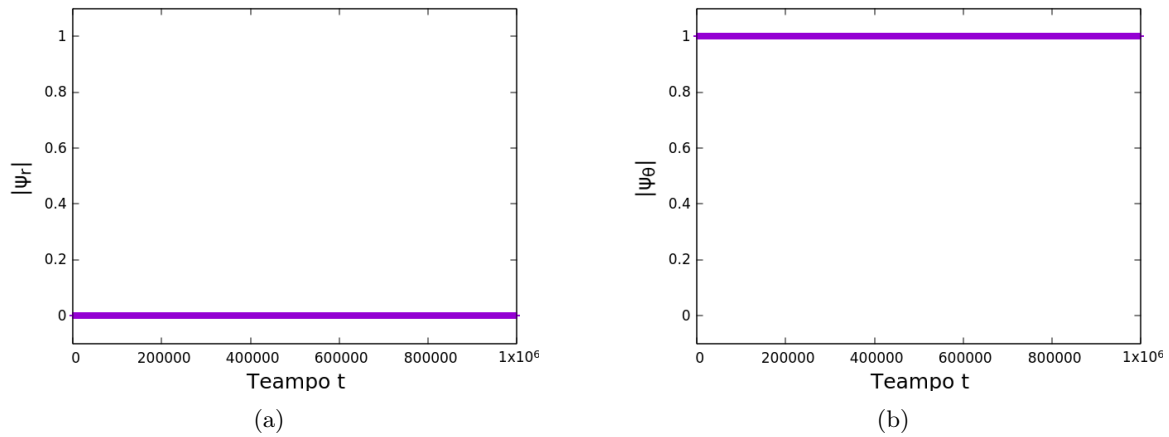


Figura 4.5: Cluster delocalizzato sul bordo. Simulazione con $N = 5$ particelle in assenza di interazione, in (a) andamento temporale del modulo parametro d'ordine ψ_r , in (b) andamento temporale del modulo parametro d'ordine ψ_θ .

In questo caso il moto delle particelle è sempre coerente, ma essendo uniformemente distribuite lungo la circonferenza ciò che si osserva è che il modulo del parametro d'ordine ψ_r ha valore identicamente nullo in accordo con quanto previsto dalla soluzione Kuramoto. Viceversa il modulo del nuovo parametro d'ordine introdotto ψ_θ continua a rimanere costante e pari ad 1, infatti nonostante i vettori velocità abbiano istantaneamente direzioni diverse la differenza tra l'angolo formato da queste ultime, ϕ_v , e l'angolo relativo al vettore posizione, ϕ_r , è costante e pari a $\frac{\pi}{2}$.

Infine è stato considerato un caso intermedio per quanto riguarda l'andamento dei parametri d'ordine, caratterizzato da *condizioni iniziali random* sia nella variabile radiale, ora compresa tra $[0, 1]$, sia per l'angolo $\phi_{v,i}$, mentre la variabile angolare $\phi_{r,i}$ resta uniformemente distribuita tra $[0, 2\pi]$:

$$(r_{i,0}, \phi_{r,i,0}, \phi_{v,i,0}) = \left(\bar{r}_{i,0}, \frac{2i\pi}{N}, \bar{\phi}_{v,i,0} \right) \implies (\rho_{i,0}, \theta_{i,0}) = \left(\bar{r}_{0,i}, \bar{\phi}_{v,i,0} - \frac{2i\pi}{N} \right). \quad (4.5)$$

Ci si trova in una condizione al di fuori dell'equilibrio. In fig.4.6 sono riportati i risultati di una simulazione di $N = 5$ particelle.

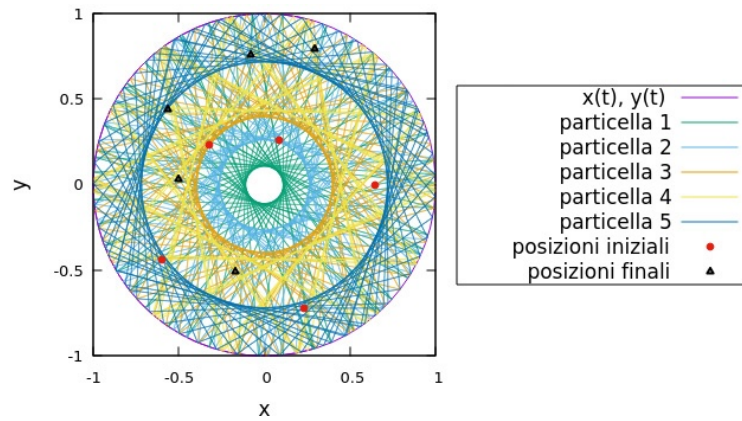


Figura 4.6: Condizioni iniziali random. Traiettorie bidimensionali di $N = 5$ particelle in assenza di interazione, dati considerati ogni 150 iterazioni.

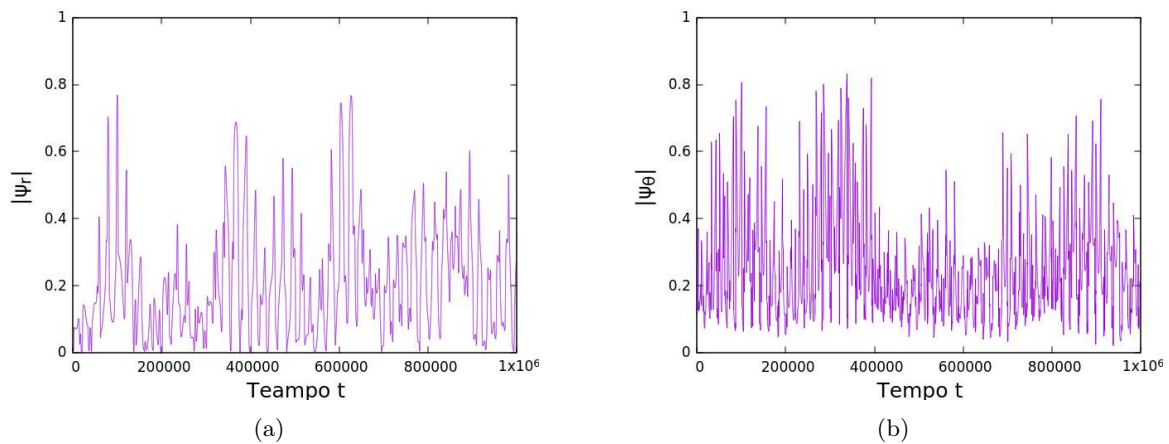


Figura 4.7: Condizioni iniziali random. Simulazione con $N = 5$ particelle in assenza di interazione, in (a) andamento temporale del modulo parametro d'ordine ψ_r , in (b) andamento temporale del modulo parametro d'ordine ψ_θ .

Possiamo notare diverse caratteristiche: Innanzitutto è ben evidente che l'equilibrio $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i) = (1, +\frac{\pi}{2})$ ha una natura stabile, ma non asintotica, infatti le traiettorie delle particelle non tendono ad esso; inoltre è evidente che il moto delle singole unità è confinato entro una certa distanza dal bordo, conseguenza della conservazione del momento angolare, con valori per il raggio minimo che dipendono dalle particolari condizioni iniziali. In questa situazione il modulo dei parametri d'ordine non è più costante ma oscilla tra $[0, 1]$, tuttavia all'istante iniziale $|\psi_r|$ assume sempre valore nullo, e ciò è conseguenza della particolare scelta di distribuzione uniforme per gli angoli $\phi_{r,i,0}$.

Data la distribuzione uniforme per le condizioni iniziali degli angoli $\phi_{v,i}$ ci si dovrebbe attendere un profilo simile anche per il parametro $|\psi_\theta|$, invece è possibile notare la presenza di un offset, che rende l'andamento lontano dallo zero. Una possibile spiegazione a questo fenomeno può derivare dalla particolare simulazione eseguita, ma effettuando prove ripetute si trova che la media effettuata in simulazioni per $N = 5$ particelle è sempre diversa da zero. A questo punto si è indagato l'andamento del secondo parametro d'ordine per un numero maggiore di particelle; di seguito i risultati riportati:

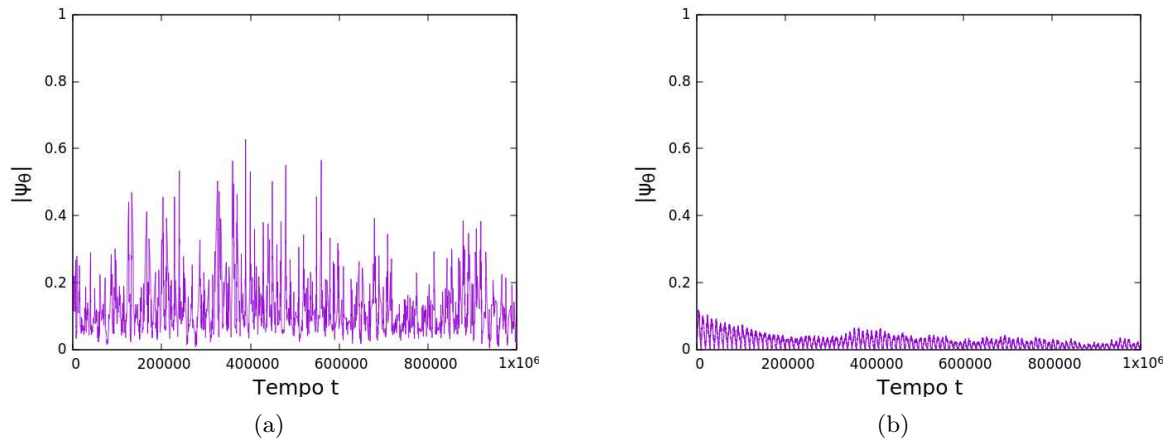


Figura 4.8: Condizioni iniziali random. Andamento temporale del modulo del parametro d'ordine ψ_θ per (a) $N = 10$ particelle, (b) $N = 500$ particelle.

I grafici suggeriscono che l'andamento dell'offset sia decrescente all'aumentare del numero di particelle considerate. Computazionalmente un sistema per $N > 500$ unità è difficile da valutare, ma già a questo livello si ha una stima del valor medio di $|\psi_\theta(t)| < 0.1$ quando inizialmente per $N = 5$ particelle si aveva $0.3 < |\psi_\theta(t)| < 0.2$.

4.3 Analisi con interazione

Instaurando un'interazione di tipo Kuramoto tra N particelle, analiticamente si è riusciti a caratterizzare il comportamento del sistema solo in due casi particolari, il cui andamento viene confermato dalle simulazioni: innanzitutto si osserva che nel primo caso, cluster localizzato sul bordo, e nel secondo, cluster delocalizzato sul bordo, non si ha alcuna differenza rispetto al caso di non interazione: le traiettorie, nonchè l'andamento del modulo dei parametri d'ordine sono uguali alle figure 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5, come previsto nella sezione 3.2.

Invece, per condizioni iniziali più generali, dal punto di vista numerico, si sono ottenuti alcuni risultati rilevanti. Ricordiamo che lo studio analitico suggerisce che lo stato stazionario costituito da moto sul bordo possa rappresentare un ciclo limite per le particelle.

Nel caso di *condizioni iniziali random* i risultati di simulazioni suggeriscono che la dinamica dipenda dal parametro di proporzionalità K , che rappresenta l'intensità dell'interazione. Considerando sempre una simulazione con $N = 5$ particelle, il cui moto è governato da 3.31, per valori di $K \ll 1$ ad un primo sguardo non si osserva nessuna differenza rispetto al caso di non interazione, tuttavia analizzando una singola traiettoria, si evidenzia che la distanza minima tra una collisione con la parete e la successiva ha il seguente andamento temporale:

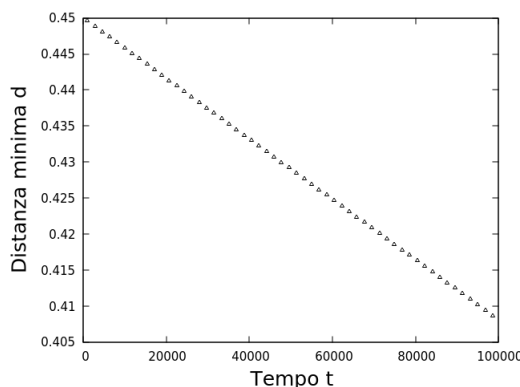


Figura 4.9: Distanza minima dall'origine di una traiettoria in una simulazione con $N = 5$ e $K = 0.2$

Dove si può notare che l'andamento è decrescente, ovvero la particella si sta avvicinando all'origine: come dimostrato in precedenza, in assenza di interazione la conservazione del momento angolare garantisce una distanza minima dall'origine costante nel tempo per ogni traiettoria, mentre instaurando interazione tra particelle la conservazione del momento angolare è violata e tale andamento ne è la conferma.

Analizzando invece valori $K \geq 1$, la dinamica cambia rapidamente:

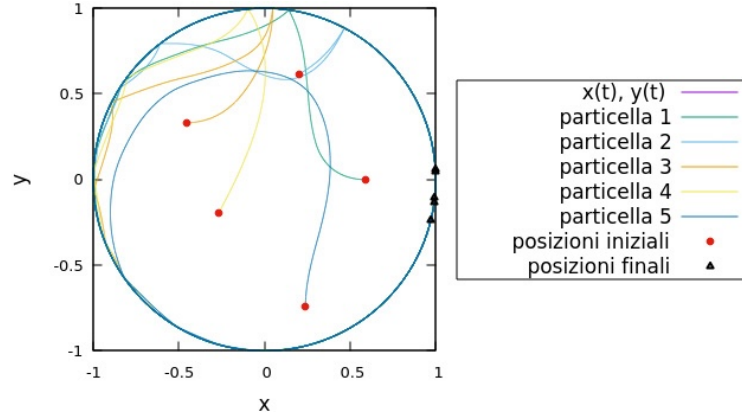


Figura 4.10: Condizioni iniziali random. Traiettorie bidimensionali di $N = 5$ particelle con costante di interazione $K = 1$, dati considerati ogni 150 iterazioni.

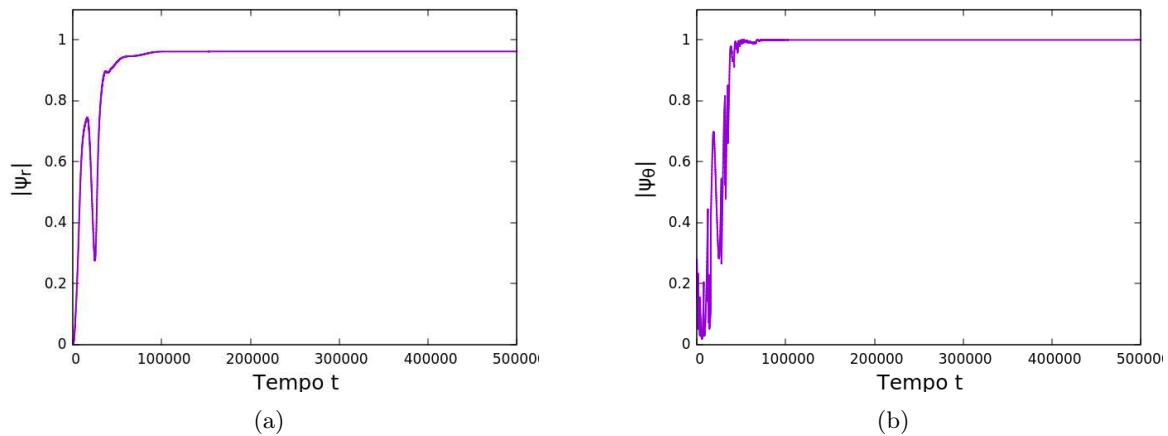


Figura 4.11: Condizioni iniziali random. Simulazione con $N = 5$ particelle con costante di interazione $K = 1$, in (a) andamento temporale del modulo parametro d'ordine ψ_r , in (b) andamento temporale del modulo parametro d'ordine ψ_θ .

Il plot delle traiettorie in fig.4.10 evidenzia un andamento che tende alla formazione di cluster localizzato nel tempo; ciò viene confermato dal profilo dei parametri d'ordine fig.4.11, entrambi dopo una breve fase di transizione tendono a valori prossimi all'unità.

Inoltre simulazioni per $K \simeq 1$ nel caso di 5 particelle con condizioni iniziali sul bordo, ma non uniformemente distribuite, tendono alla formazione di cluster localizzato, a conferma del fatto che la compensazione dovuta alla simmetria del sistema impediva il manifestarsi significativo di effetti in cluster delocalizzato. In conclusione le simulazioni numeriche suggeriscono che la condizione per cui si verifica un comportamento coerente tra particelle è: $K \simeq \bar{K} \equiv 1$, ovvero la costante di interazione K sembra essere indipendente dal numero totale di particelle, a differenza di quanto avviene per la costante introdotta nel modello Kuramoto 2.4, che essendo normalizzata al numero totale di particelle,

in questo caso, risulterebbe essere circa uguale ad N .

$$K \simeq \bar{K} = 1 \implies \frac{K'}{N} \simeq 1 \implies K' \simeq N \quad (4.6)$$

Per verificare quest'ipotesi, si è indagato il caso di condizioni iniziali random al crescere di N . In questa situazione, analogamente a quanto avviene per $N = 5$, per valori di $K \ll 1$ non si riscontrano sostanziali differenze rispetto al caso di non interazione, al contrario si ottengono risultati interessanti se si osserva il sistema per $K \geq 1$:

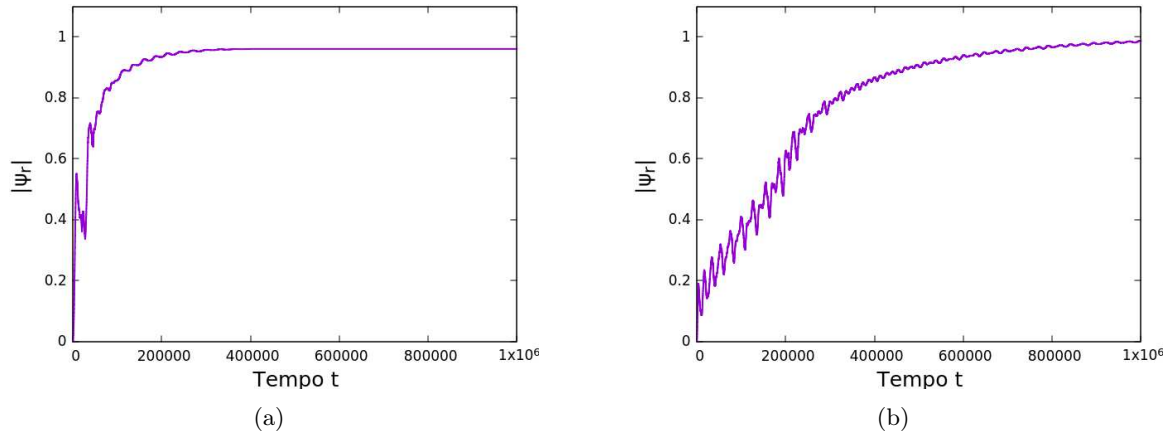


Figura 4.12: Condizioni iniziali random. Andamento temporale del modulo del parametro d'ordine ψ_r per (a) $N = 100$ particelle con $K = 1$, (b) $N = 500$ particelle con $K = 1$.

Anche in questa situazione si osserva che dopo un certo transiente il parametro d'ordine tende a stabilizzarsi attorno all'unità, si ha quindi condizione di sincronizzazione. L'andamento del secondo parametro d'ordine $\psi_\theta(t)$ diventa sempre più simile a quello del parametro d'ordine $\psi_r(t)$ al crescere di N ; ciò è dovuto al fatto che i due parametri, per definizione, sono strettamente legati e il loro ruolo, in queste condizioni, è molto simile. Inoltre si può notare che la fase di transiente iniziale diventa via via più significativa, il che fa supporre che nel valore di soglia \bar{K} a cui si verifica sincronizzazione, vi sia una dipendenza da N : $\bar{K} = \bar{K}(N)$.

Capitolo 5

Conclusioni

Dopo una breve introduzione sulle motivazioni che hanno portato Yoshiki Kuramoto alla formulazione del *modello Kuramoto* si è studiato un sistema bidimensionale di N particelle attive caratterizzate da confinamento circolare. Da prima una breve panoramica sul sistema di riferimento più adatto alla semplificazione del modello ha portato a concludere che la descrizione migliore si ottiene in coordinate polari, ed è contraddistinta, oltre che dai due tipici parametri per la descrizione di un moto bidimensionale, anche dalla presenza di un parametro strettamente legato alla collisione delle particelle con la parete. Nello studio analitico del sistema si è approfondito tale parametro ottenendo le equazioni del moto in assenza di interazione. Successivamente, la conservazione del momento angolare ha permesso di semplificare il sistema passando da tre a due equazioni indipendenti; inoltre, sempre la conservazione del momento angolare, ha permesso di caratterizzare un equilibrio del sistema: si è infatti dimostrato che le orbite descritte da condizioni iniziali sul bordo della circonferenza rappresentano degli equilibri stabili, ma non asintoticamente stabili.

La peculiarità innovativa di questo studio consiste nell'aver inserito un'interazione di tipo Kuramoto sulle variabili angolari formate dai vettori velocità con l'asse x : si è dimostrato che le condizioni iniziali, di moto lungo la circonferenza precedentemente descritte, instaurano una situazione di stazionarietà per particolari distribuzioni degli angoli posizionali. Per quanto riguarda condizioni iniziali generiche, non si è potuto dire molto dal punto di vista analitico, tuttavia tramite tecniche di simulazione numerica si arriva ad osservare la formazione di moto coerente per valori del parametro K , indice dell'intensità di interazione, prossimo ad 1; inoltre, i risultati numerici in assenza di interazione coincidono con quelli ottenuti analiticamente. Potrebbe sorgere il dubbio che, in un'analisi in cui si considerino $N \rightarrow \infty$ particelle, il contributo dell'interazione proporzionale al numero totale di particelle porti il sistema a divergere: in questo caso si potrebbe studiare l'effetto dovuto alla definizione della variabile di incremento temporale e ad una possibile normalizzazione del sistema. In conclusione, lo studio di questo modello porta ad una semplificazione dell'analisi di sistemi tramite interazione Kuramoto, sotto particolari condizioni, costituendo un possibile punto di inizio per successivi studi sulle proprietà della materia attiva.

Bibliografia

- [1] Roberto Di Leonardo et al. Bacterial ratchet motors. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107(21):9541–9545, 2010.
- [2] Shamik Gupta, Alessandro Campa, and Stefano Ruffo. Kuramoto model of synchronization: Equilibrium and nonequilibrium aspects. *arXiv preprint arXiv:1403.2083*, 2014.
- [3] Shamik Gupta, Alessandro Campa, and Stefano Ruffo. *Statistical physics of synchronization*, volume 48. Springer, 2018.
- [4] Morris W Hirsch, Stephen Smale, and Robert L Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2012.
- [5] Yoshiki Kuramoto. International symposium on mathematical problems in theoretical physics. *Lecture notes in Physics*, 30:420, 1975.
- [6] Sriram Ramaswamy. The mechanics and statistics of active matter. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, 1(1):323–345, 2010.
- [7] Stephen Smale. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Academic press, 1974.
- [8] Steven H. Strogatz. From kuramoto to crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 143(1-4):1–20, 2000.
- [9] Arthur T Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of theoretical biology*, 16(1):15–42, 1967.
- [10] Kun-Ta Wu et al. Transition from turbulent to coherent flows in confined three-dimensional active fluids. *Science*, 355(6331), 2017.