



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE**

**Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale**

*Tesi di Laurea Magistrale*

**STUDIO DELLA TEORIA PERIDINAMICA  
PER I SISTEMI ASSIALSIMMETRICI:  
SVILUPPO ED IMPLEMENTAZIONE**

RELATORE: *Prof. Mirco Zaccariotto*

CORRELATORE: *Prof. Ugo Galvanetto*

LAUREANDO: *Giovanni Tovo*

*Matricola: 1020308*

*Anno accademico 2012/13*



## **Ringraziamenti**

Desidero ringraziare sentitamente il prof. Zaccariotto per avermi dato l'opportunità di approfondire e di partecipare allo sviluppo di un argomento decisamente interessante e promettente, e per aver più volte orientato le mie ricerche e miei studi nella corretta direzione. Ringrazio molto anche il prof. Galvanetto il cui prezioso aiuto è stato illuminante soprattutto nella difficile fase iniziale del mio lavoro.

Con grande affetto ringrazio i miei genitori per la fiducia, il costante incoraggiamento e il supporto economico che mi hanno concesso durante il ciclo di studio di cui questa tesi rappresenta l'epilogo; e naturalmente ringrazio le mie due sorelle per le quali non deve essere stato facile sopportarmi per tutto questo tempo.

Infine un sincero ringraziamento lo devo ai miei amici: quelli della vallata, quelli conosciuti a Padova, i compagni di studio e i coinquilini per avermi accompagnato in questo percorso celebrando i bei momenti, dimenticando quelli brutti e condividendo cinque splendidi anni ... e mezzo.



## Indice

Indice delle figure.....	7
Sommario .....	11
1 Introduzione .....	13
1.1 Cenni sugli impatti sui materiali fragili.....	19
2 La peridinamica ‘bond based’ .....	27
2.1 Modellazione peridinamica del continuo .....	27
2.1.1 Equazioni del moto .....	28
2.1.2 Isotropia .....	30
2.1.3 Elasticità.....	32
2.1.4 Relazione con la teoria convenzionale: forza per unità di area.....	36
2.1.5 Linearizzazione .....	37
2.1.6 Il caso $\tau(x, n) = 0$ .....	38
2.1.7 Vincolo sul coefficiente di Poisson.....	40
2.1.8 Condizioni di carico .....	42
2.2 Relazioni costitutive .....	43
2.2.1 Materiale PMB .....	43
2.2.2 Il concetto di danno.....	49
2.2.3 Valore limite per il bond stretch .....	50
2.3 Costanti peridinamiche per problemi mono e bidimensionali.....	51
2.3.1 Peridinamica 1D.....	52
2.3.2 Peridinamica 2D.....	54
3 Cenni sulla formulazione di stato.....	59
3.1 Il concetto di stato .....	60
3.2 Equazioni della peridinamica di stato.....	61
4 Formulazione peridinamica del problema assialsimmetrico.....	63
4.1 Introduzione.....	63
4.2 Il problema assialsimmetrico nella teoria classica .....	63
4.2.1 Componenti di spostamento di un problema assialsimmetrico.....	65
4.2.2 Tensioni e deformazioni nel problema assialsimmetrico.....	65
4.2.3 Equazioni di congruenza in un problema assialsimmetrico.....	67

4.2.4	Legame costitutivo ed energie di deformazione assialsimmetrici ....	68
4.3	Il problema assialsimmetrico nella modellazione DEM .....	69
4.4	Derivazione delle costanti peridinamiche per il problema assialsimmetrico ..	75
4.4.1	Bond stretch .....	75
4.4.2	Determinazione della costante $c$ e del modulo di Poisson .....	77
4.4.3	Derivazione della dilatazione critica $s_0$ .....	79
5	Implementazione numerica .....	83
5.1	Discretizzazione spazio-temporale .....	83
5.2	Short range forces .....	85
5.3	Condizioni al contorno .....	86
5.4	Interfacce tra materiali diversi .....	89
5.5	Coefficiente correttivo del volume .....	90
5.6	Algoritmo delle velocità di Verlet .....	94
5.7	Tipologie di convergenza .....	95
5.8	Proiettili rigidi .....	96
5.9	Pseudocodice .....	97
6	Esempi numerici .....	103
6.1	Proiettile sferico su un disco in vetro .....	103
6.2	Rimbalzo di un proiettile sferico su un bersaglio spesso .....	118
6.3	Punzonatura di un disco in calcestruzzo .....	124
6.4	Proiettile conico su disco in calcestruzzo .....	127
6.5	Impatto di un proiettile sferico su un sottile layer di vetro supportato da uno strato di policarbonato .....	130
7	Conclusione .....	143
	Bibliografia .....	147

## Indice delle figure

Figura 1.1: Differenti lunghezze scala per le interazioni tra particelle. Modello del continuo locale, non locale e dinamica molecolare .....	16
Figura 1.2: Alcune tipologie di rottura. (a) punching; (b) cratering; (c) plugging; (d) espansione radiale; (e) ductile hole growth; (f) petaling; (g) spalling.....	23
Figura 1.3: Riflessione di un'onda di compressione su una superficie libera.....	24
Figura 1.4: Esempi di cricche radiali e circonferenziali .....	25
Figura 2.1: Interazioni tra punti materiali nella teoria classica e nella peridinamica <i>bond based</i> [46] .....	28
Figura 2.2: orizzonte e sfera di influenza relativi alla particella $x$ .....	29
Figura 2.3: posizione e spostamento relativi tra $x$ e $x'$ .....	30
Figura 2.4: Definizione di forza per unità di area.....	36
Figura 2.5: Prima colonna del 'tensore degli sforzi' .....	39
Figura 2.6: Definizione di $\tau_{11}$ .....	39
Figura 2.7: Condizioni di carico .....	42
Figura 2.8: Esempi di funzione micromodulo. (a) costante; (b) triangolare; (c) triangolare invertita; (d) a campana.....	44
Figura 2.9: Grafico forza peridinamica-deformazione per materiali microelastici .....	44
Figura 2.10: Vari tipi di <i>responce function</i> . (a) rappresenta i materiali PMB.....	45
Figura 2.12: Taglio puro.....	46
Figura 2.11: Espansione omogenea .....	46
Figura 2.13: Regioni danneggiate e non entro l'orizzonte di un punto materiale .....	49
Figura 2.14: Valutazione dell'energia di frattura $G_0$ .....	50
Figura 2.15: Modellazione peridinamica di una struttura monodimensionale. (a) deformazioni entro l'orizzonte di $x$ ; (b) discretizzazione .....	52
Figura 2.16: Valutazione di $G_0$ nella peridinamica 1D .....	53
Figura 2.17: Stato tensionale 2D plane stress.....	54
Figura 2.18: Valutazione di $G_0$ nella peridinamica 2D .....	56
Figura 3.1: <i>Responce function</i> nell'ordine relative alle formulazioni <i>bond based</i> , <i>ordinary state based</i> e <i>non-ordinary state based</i> della peridinamica.....	59
Figura 3.2: Il concetto di stato .....	60
Figura 4.1: Sezione diametrale di un solido assialsimmetrico .....	64
Figura 4.2: Volumetto elementare e stato tensionale sferico in assialsimmetria.....	67
Figura 4.3: Assialsimmetria nell'approccio DEM .....	70
Figura 4.4: Esempio di reticolo esagonale discreto.....	73

Figura 4.5: Espansione isotropa in un riferimento assialsimmetrico.....	76
Figura 4.6: Taglio puro in un riferimento assialsimmetrico.....	76
Figura 4.7: Valutazione di $G_0$ nella peridinamica assialsimmetrica.....	80
Figura 5.1: Griglia peridinamica .....	84
Figura 5.2: Applicazione di un carico distribuito .....	86
Figura 5.3: Sfera d'influenza relativa ad un nodo in prossimità di una superficie libera.....	88
Figura 5.4: Interfaccia tra due materiali diversi .....	90
Figura 5.5: Coefficienti correttivi effettivi per problemi 2D per diversi valori di $m$ ....	92
Figura 5.6: Parametri di riferimento per la formula del coefficiente di correzione del volume per il problema assialsimmetrico.....	93
Figura 5.7: Esempio dell'andamento del coefficiente correttivo del volume per problemi assialsimmetrici: $\Delta x = 5$ ; $\delta = 3\Delta x$ ; la generica particella si trova alla distanza $r = 20$ dall'asse di simmetria .....	94
Figura 5.8: Tipologie di convergenza in peridinamica.....	96
Figura 5.9: Geometrie dei proiettili presi in esame .....	97
Figura 6.1 Danno subito dal piatto di Silling: il colore blu indica le zone integre, il rosso quelle completamente danneggiate .....	104
Figura 6.2 Stato iniziale dei bond per un nodo in una zona centrale del bersaglio .....	106
Figura 6.3: Stato iniziale dei bond per una porzione del bersaglio in corrispondenza dell'asse di simmetria .....	106
Figura 6.4: distribuzione del danno all'istante finale: in rosso le zone danneggiate completamente, in blu quelle integre.....	107
Figura 6.5: Confronto tra il risultato di Parks (bersaglio visto dall'alto) e quello ottenuto tramite assialsimmetria che rappresenta la vista in sezione: distribuzione del danno .....	108
Figura 6.6: Risultati della simulazione di impatto: evoluzione del sistema ogni $20 \mu s$ dall'istante iniziale $t_i = 0$ a quello finale $t_f = 200 \mu s$ .....	110
Figura 6.7: Dimensione celle $\Delta x = 0.0005 m$ ; orizzonte $\delta = 3\Delta x = 0.0015 m$ ; passo di integrazione $\Delta t = 10 - 8 s$ .....	111
Figura 6.8: Dimensione celle $\Delta x = 0.000375 m$ ; orizzonte $\delta = 4\Delta x = 0.0015 m$ ; passo di integrazione $\Delta t = 10 - 7 s$ . ( $m$ -convergenza) .....	111
Figura 6.9: Dimensione celle $\Delta x = 0.0003125 m$ ; orizzonte $\delta = 3\Delta x = 0.0009375 m$ ; passo di integrazione $\Delta t = 10 - 7 s$ . ( $\delta$ -convergenza) .....	112
Figura 6.10: Dimensione celle $\Delta x = 0.00025 m$ ; orizzonte $\delta = 3\Delta x = 0.00075 m$ ; passo di integrazione $\Delta t = 10 - 7 s$ . ( $\delta$ -convergenza) .....	112
Figura 6.11: Alcuni esempi di $\omega_g(\xi)$ al variare di $p$ ; $\epsilon$ è assunto unitario.....	115



Figura 6.12: Caso $p = 0$ . Nell'ordine sono riportati il risultato di Seleson e quelli ottenuti per assialsimmetria tramite mesh grossolana e fine .....	116
Figura 6.13: Caso $p = 3$ . Nell'ordine sono riportati il risultato di Seleson e quelli ottenuti per assialsimmetria tramite mesh grossolana e fine .....	117
Figura 6.14: Caso $p = 5$ . Nell'ordine sono riportati il risultato di Seleson e quelli ottenuti per assialsimmetria tramite mesh grossolana e fine .....	117
Figura 6.15: Caso $p = 10$ . Nell'ordine sono riportati il risultato di Seleson e quelli ottenuti per assialsimmetria tramite mesh grossolana e fine .....	118
Figura 6.16: Cricca Hertziana ottenuta da Silling .....	119
Figura 6.17: Risultati della simulazione di impatto: evoluzione del sistema ogni $50 \mu s$ dall'istante iniziale a quello finale $t_f = 500 \mu s$ .....	121
Figura 6.18: Profilo di velocità del proiettile .....	121
Figura 6.19: Risultato ottenuto da Seleson .....	122
Figura 6.20: Risultati ottenuti tramite assialsimmetria. Rispettivamente con $\Delta x = 0.001 m$ , $\delta = 3\Delta x = 0.003$ e per $\Delta x = 0.0005 m$ , $\delta = 3\Delta x = 0.0015$ .....	122
Figura 6.21: Caso $p = 3$ . Risultato ottenuto da Seleson (sinistra) e tramite assialsimmetria (destra) .....	123
Figura 6.22: Caso $p = 5$ . Risultato ottenuto da Seleson (sinistra) e tramite assialsimmetria (destra) .....	123
Figura 6.23: Caso $p = 10$ . Risultato ottenuto da Seleson (sinistra) e tramite assialsimmetria (destra) .....	123
Figura 6.24: Esempio di punzonatura del calcestruzzo .....	125
Figura 6.25: Grafico del danno rispettivamente per Rice e in peridinamica all'istante finale $t_f = 1.2 ms$ .....	125
Figura 6.26: Evoluzione della cricca conica. Fotogrammi scattati, nell'ordine, agli istanti $t_1 = 0.3 ms$ ; $t_2 = 0.4 ms$ ; $t_3 = 0.5 ms$ ; $t_4 = 0.6 ms$ .....	126
Figura 6.27: Proiettile e bersaglio all'istante finale $t_f = 1.2 ms$ .....	127
Figura 6.28: Parametri geometrici della simulazione .....	127
Figura 6.29: Fotogrammi del rimbalzo scattati ogni $0.1 ms$ .....	129
Figura 6.30: Confronto tra risultati. Peridinamica in alto, DEM in basso .....	129
Figura 6.31: Diagramma del danno all'istante finale .....	130
Figura 6.32: Setup dell'esperimento di Yu .....	131
Figura 6.33: Danno subito dal <i>layer</i> di vetro in seguito agli impatti nel range di velocità $61 - 300 m/s$ .....	132
Figura 6.34: Parametri geometrici per le analisi numeriche di Yu .....	133
Figura 6.35: Grafici del danno ottenuti da Hu per la superficie superiore ed inferiore del vetro; velocità iniziale del proiettile $v_0 = 61 m/s$ .....	133

Figura 6.36: Stato iniziale di nodi e <i>bond</i> . La regione blu rappresenta il <i>layer</i> di vetro, quella rossa lo strato di policarbonato; i nodi evidenziati in verde sono quelli vincolati .....	135
Figura 6.37: Risultati della simulazione di impatto: evoluzione del sistema ogni $2 \mu s$ . Il <i>layer</i> di vetro è raffigurato in blu, in rosso quello di policarbonato. ....	138
Figura 6.38: Diagramma del danno a vari istanti .....	139
Figura 6.39: Stato dei <i>bond</i> all'istante finale.....	140
Figura 6.40: Sezione trasversale del risultato di Hu a confronto con quello ottenuto tramite assialsimmetria.....	140
Figura 6.41: <i>Trend</i> della velocità del proiettile nel tempo. ....	141
Figura 6.42: Stato del sistema all'istante finale ( $t = 20 \mu s$ ) per velocità iniziali dell'impattante rispettivamente pari a $v_0 = 100 m/s$ e $v_0 = 200 m/s$ .....	142
Figura 6.43: Impatto a $v_0 = 100 m/s$ . Nell'ordine: vista superiore e in sezione del bersaglio di Hu e risultato ottenuto tramite assialsimmetria .....	142

## Sommario

La peridinamica è una recente riformulazione della teoria del continuo che è stata proposta da Stewart Andrew Silling nel 2000. Questa è stata sviluppata come un'alternativa non locale alla meccanica dei solidi convenzionale: prevede infatti che le reciproche interazioni che si instaurano tra punti materiali si possano sviluppare anche tra particelle separate da una distanza finita, come avviene nella dinamica molecolare. In sostanza quindi la peridinamica si può anche considerare una sorta di anello di congiunzione tra le teorie locali del continuo e i modelli atomistici della materia. Due aspetti decisamente interessanti ed emblematici di questo nuovo approccio sono i seguenti: per prima cosa il moto è regolato da equazioni che coinvolgono gli integrali del campo degli spostamenti anziché le sue derivate spaziali; in termini matematici questo non pone limiti alla trattazione di problemi in cui tali grandezze siano soggette a discontinuità. In secondo luogo questa teoria offre la possibilità di definire univocamente e di quantificare il concetto di 'danno' che risulta intrinsecamente connaturato al modello costitutivo dei materiali. Si può quindi intuire come la peridinamica si presti con particolare efficacia allo studio di fenomeni come la nucleazione e la propagazione di cricche e più in generale alla meccanica della frattura.

Le peculiarità appena elencate hanno reso questa nuova teoria l'oggetto di un'intensa attività di ricerca che ne ha consentito un rapido sviluppo nel corso dell'ultimo decennio. Tuttavia persistono numerose questioni aperte: prima tra tutte un vincolo sul coefficiente di Poisson che, dalla formulazione del 2000, è previsto fisso e costante per qualsiasi materiale. Un'ulteriore difficoltà è la seguente: le equazioni che regolano il moto in peridinamica sono equazioni integro-differenziali che risultano particolarmente complesse da affrontare analiticamente anche per quanto riguarda problemi molto semplici; ciò rende necessario ricorrere ad approcci numerici che ad oggi, però, richiedono l'impiego di ingenti risorse computazionali. Ciò è dovuto al fatto che, sebbene si siano potuti adattare alla peridinamica *software* sviluppati per la dinamica molecolare, l'implementazione di codici *ad hoc* per la risoluzione numerica di queste equazioni è ancora agli albori e il lavoro di ottimizzazione svolto non garantisce ancora la dovuta efficienza computazionale.

Quest'ultimo problema ha necessariamente stimolato la formulazione teorica e numerica della peridinamica bidimensionale (per lo studio sia di stati piani di tensione che di deformazione) e monodimensionale che permettono di semplificare la modellazione di molte strutture di interesse pratico riducendo notevolmente il numero di nodi necessari alla loro rappresentazione. Al momento della stesura di questo lavoro, tuttavia, non risulta sia stata studiata alcuna formulazione particolare della peridinamica per la trattazione di sistemi assialsimmetrici.

Per questo motivo il primo obiettivo che ci si è posti in questo lavoro è stato quello di giungere a proporre una formulazione analitica della peridinamica adatta a descrivere problemi a simmetria cilindrica: analogamente a quanto previsto ad esempio nei metodi FEM infatti, questi problemi si possono trattare attraverso schematizzazioni bidimensionali che partono dal presupposto di considerare nulle le variazioni delle quantità fisiche in gioco rispetto alla coordinata angolare di rivoluzione. Una volta ottenute le equazioni del moto in coordinate cilindriche si è quindi elaborato un *software* di calcolo in grado di implementarle con il fine di riuscire a modellare impatti da parte di proiettili rigidi su solidi di rivoluzione in materiali fragili. Si sono dunque effettuate diverse simulazioni, tratte da vari esempi sia numerici che sperimentali disponibili in letteratura, atte a verificare la capacità di questa tecnica di riprodurre le principali tipologie di frattura che si possono manifestare in questo genere di impatti. Un particolare interesse si è rivolto innanzitutto alle caratteristiche cricche circonferenziali che si sviluppano ad una certa distanza dal punto di impatto in bersagli sottili; successivamente si è pensato di riprodurre il fenomeno del rimbalzo di un proiettile che, impattando *target* sufficientemente spessi, non essendo in grado di perforarli, venga da essi respinto. A causa del suo notevole interesse pratico, si è poi studiato il meccanismo di rottura del calcestruzzo per punzonatura e, per concludere, si è analizzato l'impatto di un proiettile sferico su di un bersaglio costituito da due strati: il primo fragile in vetro e il secondo in policarbonato, un materiale dalle notevoli proprietà di resistenza agli impatti.

## 1 Introduzione

Uno degli aspetti più interessanti e complessi della meccanica dei solidi è rappresentato dai fenomeni di rottura dei materiali: questi si manifestano a partire dalla nucleazione delle cricche le quali, propagandosi, portano eventualmente all'insorgere di fratture e alle conseguenti disgregazione e frammentazione dei materiali e, in termini ingegneristici, delle strutture che da essi sono costituite [54]. La capacità di predire l'evoluzione del danno subito da una struttura è una questione tuttora aperta che esercita un certo fascino nel mondo della ricerca in questo settore: la varietà e complessità dei meccanismi fisici coinvolti, e soprattutto i benefici che si potrebbero trarne in termini di sicurezza, ma anche economici, costituiscono infatti importanti stimoli a lavorare in questa direzione.

A partire dagli studi pionieristici di Griffith che risalgono al 1921, la conoscenza e la comprensione di queste problematiche è notevolmente aumentata grazie al gran numero di prove sperimentali condotte; tuttavia gli approcci numerici sviluppati finora per simulare i processi di rottura incontrano non poche difficoltà. Nel campo dell'elasticità classica si sono compiuti vari tentativi finalizzati alla modellazione dei meccanismi di danneggiamento, ma le equazioni del moto che regolano la meccanica del continuo tradizionale sono equazioni differenziali che coinvolgono le derivate spaziali del campo degli spostamenti: in termini matematici l'insorgenza di una cricca rappresenta una discontinuità in questo campo in corrispondenza della quale le derivate spaziali non sono definite. Nonostante questa difficoltà intrinseca, la teoria classica è in grado di predire correttamente alcuni semplici fenomeni di frattura attraverso il metodo degli elementi finiti, ma i limiti sono molti [5], [26], [51]:

- si può osservare solo l'evoluzione di cricche già esistenti, non la loro nucleazione;
- occorre eseguire l'operazione di *remesh* per ogni variazione incrementale delle dimensioni di una cricca;
- è necessario introdurre a priori opportune relazioni matematiche che costituiscano dei vincoli su quando e come la cricca possa evolvere.

Ciononostante, dato il largo impiego e la potenza del metodo FEM, si è lavorato molto nel tentativo di introdurre opportune modifiche in modo da renderlo più efficace nella trattazione della meccanica della frattura: sono stati così sviluppati i metodi degli elementi coesivi [32] e XFEM (eXtended FEM) [1], [27], [40], [41], [72]. Entrambe queste due soluzioni permettono però di superare solo alcuni dei limiti imposti dall'elasticità classica: nel primo caso attraverso l'inserimento tra elementi continui dei cosiddetti elementi coesivi, che sono in grado di 'aprirsi' consentendo nucleazione e propagazione di cricche (l'evoluzione del danno risulta però fortemente dipendente dalla *mesh*); nel secondo caso grazie all'aggiunta di ulteriori gradi di libertà nodali che permettono di introdurre discontinuità nelle funzioni di forma (ciò va però a gravare notevolmente sui costi computazionali di questa tecnica). Un altro problema che presenta la meccanica dei solidi tradizionale è il seguente: numerosi esperimenti condotti dai fisici hanno evidenziato come le interazioni coesive tra atomi si sviluppino non solo per particelle a diretto contatto, ma anche entro distanze finite; la teoria classica è invece locale, si basa cioè solo sul contatto, e pertanto non prevede una lunghezza caratteristica che permetta azioni a distanza tra punti materiali.

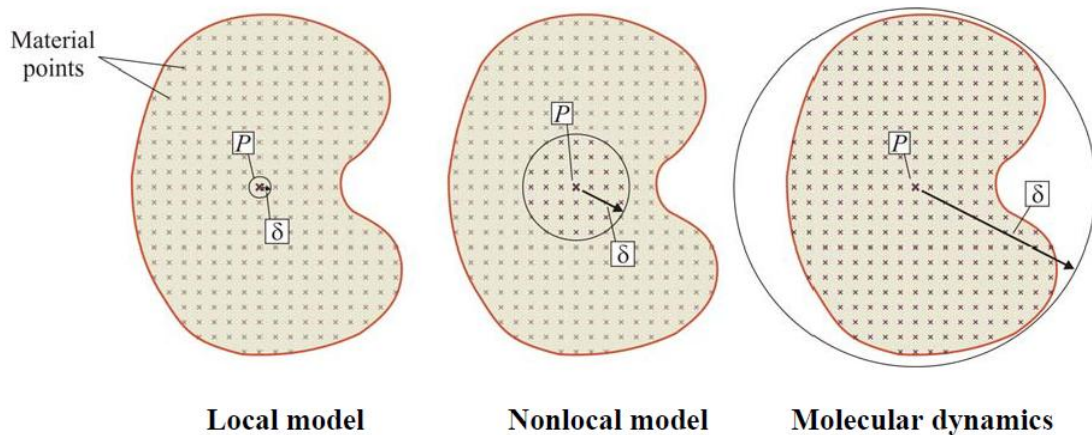
Le difficoltà che incontrano gli approcci precedentemente citati si possono superare con la dinamica molecolare e i modelli atomistici. Questi metodi, sebbene siano in grado di cogliere la natura profonda dei meccanismi di frattura di certi materiali, non hanno la pretesa di rappresentare uno strumento utilizzabile nello studio di strutture ingegneristiche e problematiche pratiche. Anche se negli ultimi anni è stato possibile effettuare simulazioni di dinamica molecolare su larga scala, il limite principale di queste tecniche è la disponibilità di risorse computazionali: nel 2006 è stato sviluppato uno dei più complessi modelli atomistici; costituito da 320 miliardi di atomi era rappresentativo di un cubetto di rame di lato pari a  $1.56 \mu m$ . Un altro problema è legato alla scala dei tempi: gli step di integrazione delle equazioni della dinamica molecolare devono essere estremamente ridotti al fine di ottenere risultati ragionevolmente accurati e ciò dilata ulteriormente l'onerosità computazionale di questa tecnica.

A partire dalla modellazione atomistica, si sono così sviluppati i metodi *lattice* [44], [45], [52], [56], i quali superano l'inadeguatezza della dinamica molecolare a descrivere strutture ingegneristiche; queste tecniche prevedono la rappresentazione dei materiali

attraverso un reticolo di unità discrete che interagiscono tramite elementi in grado di sviluppare l'azione reologica caratteristica del materiale in esame. Le interazioni possono essere sia a corto raggio (per contatto, o locali) che a lungo raggio (non locali, ossia possono intervenire tra particelle che si trovano ad una certa distanza finita), mentre il reticolo può essere ordinato e periodico o irregolare. A queste tecniche appartengono i metodi DEM (*discrete element method*) [11], [35], [37], [55] [59] che spesso vengono utilizzati per studiare materiali eterogenei come il calcestruzzo. Anche l'approccio *lattice* presenta però alcune limitazioni:

- onerosità computazionale;
- è complicato imporre le condizioni al contorno;
- le interazioni tra punti materiali rispondono a equazioni diverse per reticoli di diversa organizzazione geometrica;
- per ogni problema non si conosce a priori quale possa essere la configurazione del reticolo più adatta.

Raggiunta una certa consapevolezza su vantaggi e limitazioni che presentano le tecniche sinora elencate, a partire dal 1970 sono state introdotte diverse formulazioni di teorie non locali del continuo che, prevedendo la modellazione delle interazioni tra particelle su varie scale di lunghezza, fungono da connessione tra la meccanica del continuo classica e la dinamica molecolare. Queste teorie combinano, infatti, alla possibilità di considerare sia forze di contatto sia azioni a distanza tra punti materiali, l'ipotesi del continuo per il mezzo considerato; ciò consente una notevole riduzione delle risorse computazionali richieste dalla dinamica molecolare e contemporaneamente il superamento dei limiti che presenta la teoria classica del continuo.



**Figura 1.1: Differenti lunghezze scala per le interazioni tra particelle. Modello del continuo locale, non locale e dinamica molecolare**

La più recente teoria non locale del continuo è stata proposta da Silling nel 2000 [60] e risponde al nome di *peridinamica*. La principale differenza tra questa teoria e la meccanica del continuo classica è la seguente: la prima è formulata sulla base degli integrali del campo degli spostamenti, le equazioni del moto della seconda invece coinvolgono le derivate spaziali di tale campo. Un'importante conseguenza di questo fatto è che, in peridinamica, non occorre imporre alcuna condizione artificiosa per trattare problematiche relative alla nucleazione e alla propagazione del danno (o in generale la presenza di discontinuità), per quanto contorta e complicata sia la sua evoluzione: le cricche possono propagarsi dove e quando, in termini energetici, risulti favorevole farlo. Nella peridinamica le azioni interne sono espresse attraverso interazioni (sviluppate da *bond*, ovvero da 'legami') non locali tra coppie di punti materiali interni ad un corpo continuo, e il concetto di danno risulta essere parte integrante del modello costitutivo dei materiali.

Grazie alle caratteristiche appena elencate, la peridinamica si presta con particolare efficacia alla trattazione di problemi riguardanti la dinamica della frattura, ed è stata utilizzata con successo per simulare numericamente vari casi pratici. Nel 2003 Silling [61] è stato in grado di simulare l'esperimento di Kalthoff-Winkler riuscendo ad ottenere il corretto angolo di propagazione delle cricche che si formano a partire dalle due incisioni praticate su una piastra che venga urtata da un impattante; nel 2004-2005 Silling assieme ad Askari prima hanno ottenuto eccellenti risultati qualitativi sulla complessa morfologia che caratterizza il danneggiamento di sottili strutture fragili



colpite da proiettili di geometria sferica [62] e in seguito hanno studiato e dimostrato la convergenza del metodo a partire da simulazioni riguardanti una piastra con una cricca centrale [63]; nello stesso periodo ai Sandia National Laboratories di Albuquerque è stato implementato EMU, il primo codice commerciale dedicato alla peridinamica computazionale [4], [63]. Nel 2005 Silling e Bobaru [64] hanno introdotto un nuovo modello costitutivo in grado di descrivere lo stiramento di materiali gommosi e di predire l'evoluzione oscillante delle cricche causate da un corpo tozzo forzato contro una membrana sottile; la peridinamica è stata quindi utilizzata da Gerstle e Sau [19], [20] per analizzare il danno in strutture piane in calcestruzzo. Nel 2006-2007 Askari e Colavito [2], [12], [13] hanno applicato questa teoria all'indentazione e agli impatti a bassa velocità su tessuti e laminati compositi. Sempre riguardo i laminati compositi, Xu [71] ha studiato il problema di una piastra incisa sottoposta ad uno stato tensionale biassiale; nel 2007 Silling [65] ha proposto una riformulazione della peridinamica che ha risolto un precedente limite sul modulo di Poisson permettendo così la modellazione dell'incompressibilità plastica dei materiali. Nel 2009 Warren [70] ha dimostrato la capacità della nuova peridinamica di modellare il meccanismo di frattura di travi isotrope, intagliate e non, sottoposte a varie tipologie di carico e sfruttando modelli di materiali della teoria classica. L'anno dopo Foster [18] ha considerato il comportamento elastico-viscoplastico di una trave sottoposta a trazione; Kilic e Madenci [29], [30] recentemente hanno riprodotto, utilizzando la peridinamica, un gran numero di prove sperimentali e numeriche disponibili in letteratura, mentre Oterkus [47] ha mostrato come sia possibile ottenere da analisi peridinamiche il cedimento per *bearing* e *shear out* dei giunti bullonati tra piastre in materiale composito.

Sulla base di quanto esposto, è evidente come la peridinamica sia una teoria decisamente promettente per lo studio della dinamica della frattura, e il fatto che il concetto di danno sia intrinsecamente connaturato alla risposta dei materiali peridinamici, elimina la necessità di ricorrere a criteri esterni ed artificiosi per la trattazione delle discontinuità. Occorre però considerare che questa teoria è relativamente recente e ben lungi dall'essere consolidata sia dal punto di vista teorico che numerico. Un grosso limite teorico ad esempio è rappresentato dal fatto che nella peridinamica *bond based* (la prima versione proposta nel 2000 [60]) il modulo di Poisson è una costante: una formulazione successiva della teoria (nota come

peridinamica *state based* [65]) è in grado di superare questo limite, ma è ancora in piena fase di sviluppo. Dal punto di vista numerico è stato possibile adattare codici sviluppati per la dinamica molecolare (come il *software* LAMMPS [34]) alle equazioni della peridinamica, tuttavia lo sviluppo di programmi di calcolo *ad hoc* è ancora agli albori [4], [14] e ciò comporta scarsa efficienza computazionale e lunghi tempi di calcolo anche per modelli costituiti da un numero di nodi relativamente ridotto. Ciò rende necessario ricorrere a semplificazioni e schematizzazioni che permettano di ridurre al minimo il numero di nodi rappresentativi di una struttura: per questo motivo sono state proposte formulazioni monodimensionali e bidimensionali della peridinamica che sono applicabili rispettivamente a strutture di tipo trave o ai problemi relativi a stati piani di tensione/deformazione. Al momento in cui questo lavoro viene scritto, però, non risulta ancora affrontato il problema assialsimmetrico la cui formulazione peridinamica costituisce il primo obiettivo della presente tesi. L'idea è quella di sviluppare le equazioni della peridinamica rappresentative di problemi assialsimmetrici e di implementare un codice numerico in grado di risolvere queste equazioni per problemi riguardanti gli impatti a simmetria cilindrica su materiali fragili. L'organizzazione di questa tesi è quindi la seguente:

- Nel prossimo paragrafo di questa introduzione verranno descritte quali siano le principali tipologie di cricche e fratture che insorgono in questo genere di impatti, in modo da comprendere cosa ci si debba aspettare dalle simulazioni numeriche che si vedranno al capitolo 6.
- Nel secondo capitolo si parlerà della peridinamica *bond based*, dei suoi fondamenti matematici, delle equazioni che la regolano e di come sia possibile mettere in relazione le caratteristiche costitutive dei materiali peridinamici con quelle previste dall'elasticità classica. Si affronterà quindi il problema della derivazione delle grandezze costitutive peridinamiche relative a problemi 3D, 2D (*plane stress* e *plane strain*) e monodimensionali.
- Il terzo capitolo è una introduzione alla peridinamica di stato: sono presentate le sue equazioni del moto in modo da evidenziare come questa formulazione permetta di superare il limite sul coefficiente di Poisson da cui è affetta la peridinamica *bond based*.

- Nel quarto capitolo, dopo una introduzione generale sul problema assialsimmetrico e su come questo venga affrontato nella teoria classica e nell'approccio DEM, ne verrà descritta la formulazione proposta per la peridinamica.
- Nel capitolo 5 si spiega come sia stato sviluppato il programma di calcolo per la trattazione numerica, basata sulla peridinamica, del problema degli impatti a simmetria cilindrica su bersagli fragili. Saranno esposte le equazioni discrete del moto per la peridinamica *bond based*, vari algoritmi e tecniche per la modellazione dei proiettili, per l'integrazione temporale e per la schematizzazione delle forze di contatto; infine verrà presentato uno pseudocodice rappresentativo della logica di implementazione.
- Nel sesto capitolo sono riportati i risultati ottenuti da alcune simulazioni numeriche. Si sono presi in considerazione impatti a simmetria cilindrica di proiettili di varie geometrie (sferici, cilindrici e conici) su bersagli fragili: si sono utilizzati materiali come vetro e calcestruzzo e infine si è preso in esame un *target* costituito da due *layer*, il primo fragile e il secondo in policarbonato, un materiale molto resistente agli impatti. Tutti gli esempi esposti sono basati su studi disponibili in letteratura che sono stati condotti sfruttando altre tecniche numeriche (peridinamica 3D, FEM, DEM) e prove sperimentali.
- La conclusione riassume il lavoro svolto e presenta alcune proposte per eventuali sviluppi futuri.

## 1.1 Cenni sugli impatti sui materiali fragili

Sottoporre ad un impatto un materiale, o più generalmente una struttura, significa essenzialmente applicarvi un intenso carico impulsivo sotto l'azione del quale il materiale presenta solitamente una risposta piuttosto complessa. Il carico impulsivo è imposto da un proiettile, mentre la struttura colpita è comunemente chiamata bersaglio. La fisica degli impatti, come ciò che mira a descrivere, è una scienza piuttosto complessa a causa del gran numero di variabili in gioco e di fenomeni fisici concomitanti, per cui l'approccio analitico risulta spesso da escludersi. Ad oggi non esiste neppure un metodo numerico che sia in grado di trattare in via generale questi problemi: i codici sviluppati per la dinamica strutturale, ad esempio, possono ambire a

descrivere problemi in cui la velocità del proiettile non superi i  $250 - 500 \text{ m/s}$  in quanto a velocità via via superiori la risposta della struttura diventa secondaria:

- $0.5 - 2 \text{ km/s}$ : prevale la risposta del materiale; è richiesta una descrizione per ondulatoria;
- $2 - 3 \text{ km/s}$ : nelle fasi iniziali di simili impatti i solidi si comportano in maniera simile ai fluidi;
- alle ipervelocità ( $> 12 \text{ km/s}$ ) si ha la conversione esplosiva dell'energia cinetica in calore con la possibile vaporizzazione del materiale del proiettile e del bersaglio.

**Tabella 1.1: Possibile classificazione di impatti in base alla velocità del proiettile**

Velocity	Strain Rate Range	Response
$< 50 \text{ m/s}$	$10^0 \text{ s}^{-1}$	Mostly Elastic, Some Plastic
$50 - 500 \text{ m/s}$	$10^2 \text{ s}^{-1}$	Mostly Plastic
$500 - 1000 \text{ m/s}$	$10^4 \text{ s}^{-1}$	Transition to Fluid Behavior
$1 - 3 \text{ km/s}$	$10^5 \text{ s}^{-1}$	Mainly Fluid Behavior
$3 - 12 \text{ km/s}$	$10^7 \text{ s}^{-1}$	Compressibility Significant
$> 12 \text{ km/s}$	$10^8 \text{ s}^{-1}$	Vaporization of Solids

La precedente tabella illustra una possibile classificazione degli impatti sulla base della velocità del proiettile; esistono tuttavia numerose altre classificazioni che possono derivare, ad esempio, dalla tipologia di proiettili o dalle caratteristiche geometriche e fisiche dei bersagli. La tabella alla pagina successiva rappresenta una possibile suddivisione degli impatti basata sui tipi di proiettili che è stata proposta da Zukas [75].

**Tabella 1.2: Classificazione degli impatti basata sui proiettili**

<b>Geometry</b>			
Basic shape	Solid rod Sphere Hollow shell Irregular solid	Nose configuration	Cone Ogive Hemisphere Right circular cylinder
<b>Material</b>			
Density	Lightweight <i>wood, plastics, ceramics, aluminum</i> Intermediate <i>steel, copper</i> Heavy <i>lead, tungsten</i>		
<b>Flight characteristics</b>			
Trajectory	Straight Curved Tumbling	Impact condition	Normal Oblique
<b>Final condition</b>			
Shape	Undeformed Plastically deformed Fractured Shattered	Location	Rebound Partial penetration Perforation

In questo lavoro si è deciso di limitare il campo di investigazione degli impatti attraverso le seguenti assunzioni principali:

- Velocità basse: la peridinamica non è in grado, al momento, di studiare i fenomeni che potrebbero intervenire alle velocità intermedie ed elevate.
- Bersagli in materiali fragili: nella formulazione *bond based* della peridinamica non è possibile rappresentare in modo sufficientemente realistico il comportamento plastico dei materiali.
- Proiettili rigidi: la modellazione numerica di proiettili deformabili imporrebbe la loro discretizzazione e ciò andrebbe a gravare sull'onerosità computazionale delle simulazioni in maniera insostenibile per gli scopi della presente tesi.

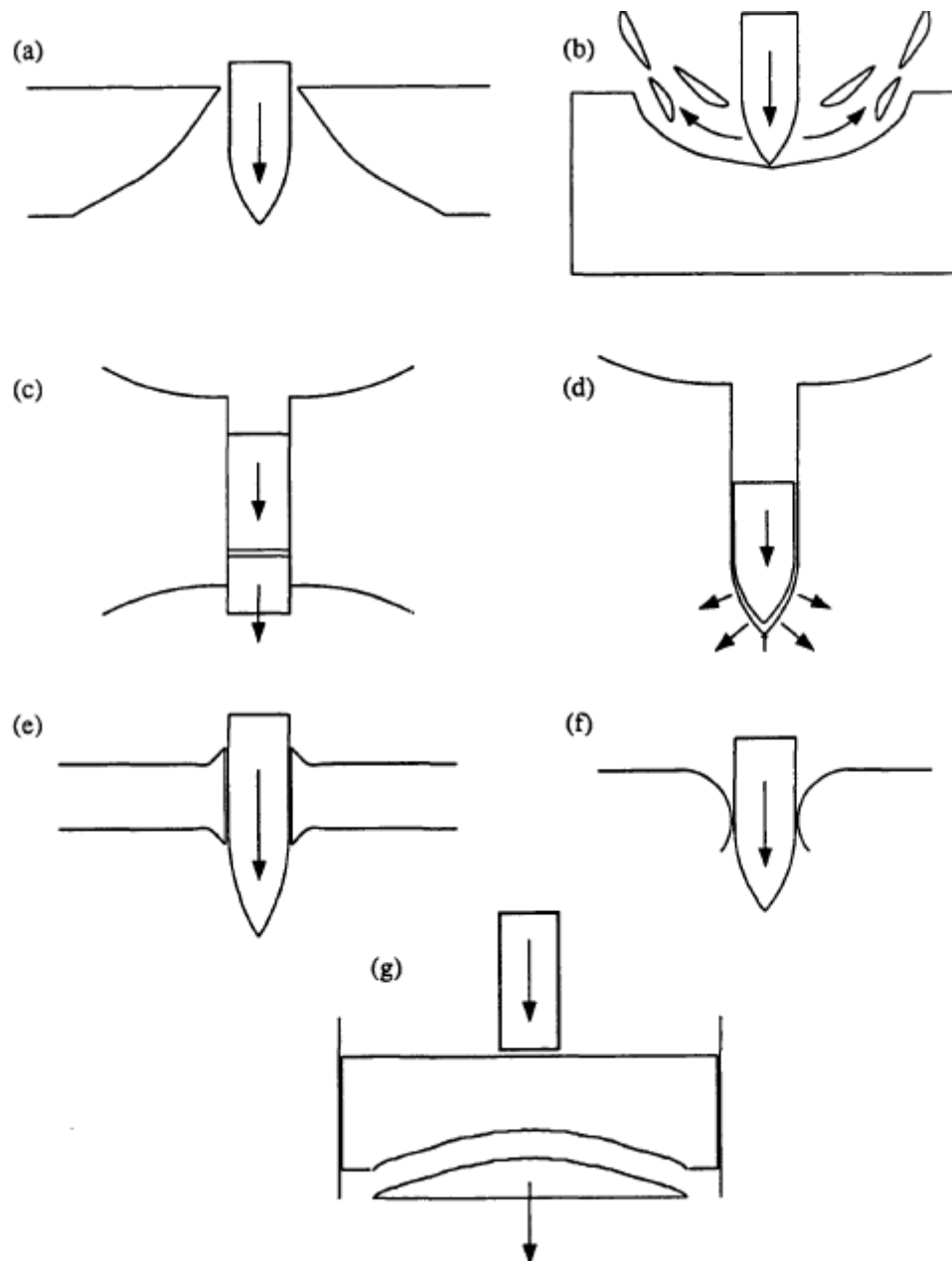
Si è scelto inoltre di semplificare ulteriormente il problema trascurando altri fenomeni come effetti termici ed attriti.

Una volta definita la tipologia di impatti che si intende analizzare, è importante comprendere quali siano i possibili meccanismi di risposta del bersaglio e soprattutto in che modo questo si possa rompere [17], [31], [33], [42], [68], [69]. Le modalità di *failure* che caratterizzano gli impatti a basse velocità su materiali fragili si possono suddividere in due categorie [15], [53]: la prima (*contact induced response*) riguarda la risposta dovuta al contatto diretto con il proiettile, la seconda (*wave induced response*) ha a che fare con la propagazione di onde di tensione/compressione.

#### *Contact induced response*

Qualora un proiettile colpisca un bersaglio, il materiale di quest'ultimo che si trova lungo la traiettoria dell'impattante viene forzato a spostarsi in modo da allontanarsi dal percorso del proiettile; ciò può comportare l'insorgenza dei modi di rottura per contatto nel bersaglio. A velocità relativamente basse il principale di questi modi di rottura, per materiali fragili come il vetro o il calcestruzzo, è il cosiddetto *punching shear failure* (figura 1.2a). Al crescere delle velocità, le proprietà inerziali del target provocano un'estensione del danno anche a zone superficiali che si trovano ad una certa distanza dal proiettile dando origine al fenomeno del *cratering* (figura 1.2b); la rottura per *tunneling* può essere il risultato del *plugging* (figura 1.2c) per bersagli di spessore moderato, o di spostamenti radiali (figura 1.2d) di materiale nel caso di bersagli spessi.

Nella figura sono rappresentati per completezza anche i fenomeni del *ductile hole growth* (figura 1.2e) e del *petaling* (figura 1.2f) che tuttavia si possono trovare esclusivamente negli impatti sui materiali duttili che qui non vengono presi in considerazione [21].



**Figura 1.2:** Alcune tipologie di rottura. (a) punching; (b) cratering; (c) plugging; (d) espansione radiale; (e) ductile hole growth; (f) petaling; (g) spalling.

### Wave induced response

Sempre nell'ambito degli impatti a basse velocità, per velocità relativamente elevate possono insorgere fenomeni collegati alla propagazione, riflessione e mutua interazione di onde di tensione/compressione: in termini elementari, diventa importante il tempo che impiegano le zone di materiale, che si trovano ad una certa distanza dall'area colpita dal proiettile, a 'realizzare' che l'impatto è avvenuto. La velocità con cui quest'informazione si propaga nella struttura dipende dalle proprietà fisiche del materiale. Queste onde di *stress* sono responsabili di due ulteriori modi di rottura:

- *la frattura radiale*: è una tipologia di rottura tipica di materiali fragili la cui resistenza a trazione è inferiore a quella a compressione; le cricche che la caratterizzano hanno un tipico andamento a raggiera con vertice in prossimità del punto d'impatto e sono causate dalle tensioni circonferenziali di *hoop*;
- *lo spalling*: è un fenomeno dovuto all'interazione di onde di compressione con le superfici libere; il fatto che ai bordi i valori delle tensioni debbano essere nulli (per l'equilibrio), fa sì che le onde di compressione incidenti vengano riflesse sotto forma di onde di ampiezza uguale, ma di segno opposto, ovvero come onde di trazione. Per materiali che presentino una resistenza a trazione inferiore a quella a compressione è dunque possibile che l'onda di compressione non raggiunga ampiezze critiche, ma, una volta riflessa e cambiata di segno, possa provocare lo sviluppo di fratture.

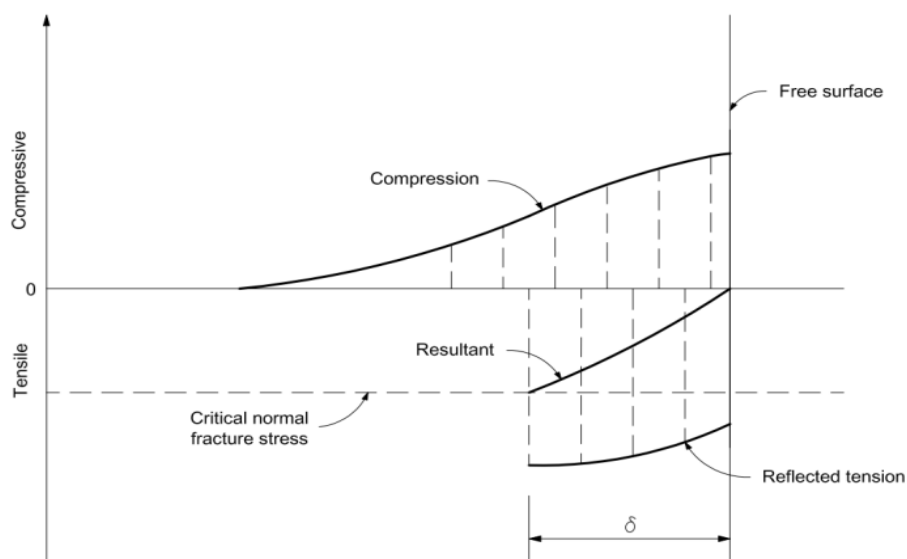


Figura 1.3: Riflessione di un'onda di compressione su una superficie libera



Per bersagli spessi lo *spalling* si manifesta attraverso il distacco di una scaglia di materiale dalla superficie opposta a quella impattata (figura 1.2g), mentre per bersagli sottili può portare alla formazione di cricche circolari [3], [6], [8-10] ad una certa distanza dal proiettile: riuscire a ‘catturare’ in peridinamica l’insorgenza di queste cricche tramite simulazioni numeriche rappresenta uno degli obiettivi principali di questo lavoro.



**Figura 1.4: Esempi di cricche radiali e circolari**



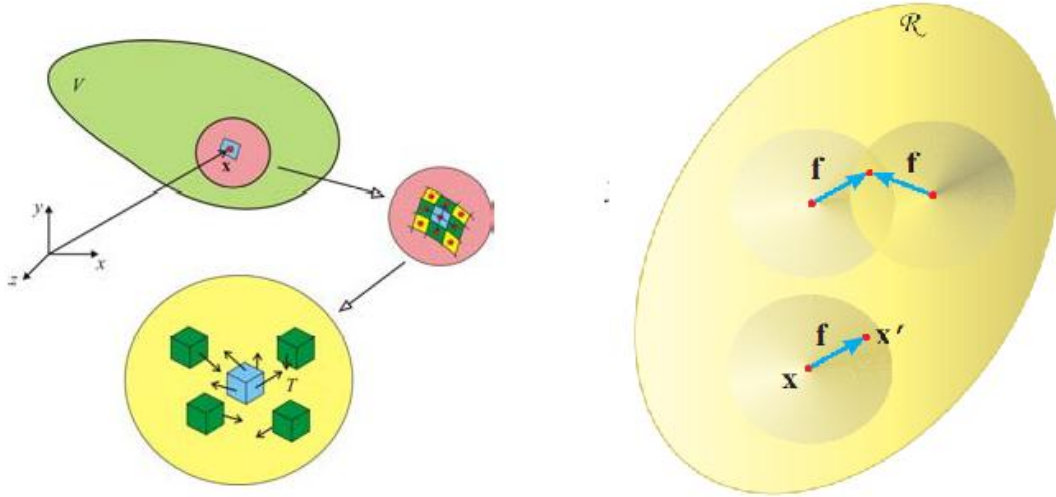
## 2 La peridinamica 'bond based'

La peridinamica è una teoria non locale del continuo la cui prima formulazione (nota come '*bond based*') è stata proposta da Silling nel 2000 [60]. L'appellativo '*bond based*' è stato introdotto per distinguerla dalla peridinamica '*state based*' che è stata sviluppata sempre da Silling nel 2007 [65] per superare alcuni dei limiti cui era soggetta la prima versione: primo tra tutti il vincolo sul coefficiente di Poisson. Per come è formulata infatti, la peridinamica *bond based* prevede che i materiali debbano avere modulo di Poisson fisso e pari ad una costante il cui valore varia a seconda del tipo di problema in esame: si dimostra ad esempio che  $\nu = 1/4$  per problemi tridimensionali e  $\nu = 1/3$  per problemi piani di tipo *plane stress*. Come si può intuire, anche se per gran parte dei metalli considerare il Poisson pari a  $1/3$  è un'assunzione ragionevole e il valore di  $1/4$  si avvicina molto al Poisson dei vetri, questo limite è un grave handicap. La peridinamica di stato, del resto, pur essendo potenzialmente più completa e generale di quella basata sui *bond*, è decisamente più complessa sia per quanto riguarda i fondamenti matematici che per l'eventuale implementazione numerica. In questo lavoro si prenderà in considerazione solo la formulazione *bond based* della peridinamica, mentre alla peridinamica di stato sarà concesso solamente qualche breve cenno teorico (capitolo 3) finalizzato ad illustrare come quest'ultima non soffra di limitazioni particolari circa il modulo di Poisson. In questo capitolo verranno descritti i fondamenti matematici che stanno alla base della peridinamica *bond based*, le equazioni del moto che regolano la modellazione peridinamica del continuo, i parametri costitutivi con i quali questa teoria rappresenta il comportamento dei materiali e come questi possano essere caratterizzati tramite confronto con la teoria classica del continuo.

### 2.1 Modellazione peridinamica del continuo

La peridinamica *bond based*, essendo una teoria non locale per il continuo, presuppone che in un corpo i punti materiali che lo costituiscono possano interagire tra loro sviluppando azioni reciproche che agiscono entro una distanza caratteristica nota con il nome di orizzonte [16], [60], [66], [67]. Come la meccanica del continuo, la peridinamica fornisce un modello matematico dei corpi identificandone i punti materiali con punti geometrici di una regione dello spazio fisico nella quale si possa definire la

funzione (continua) densità di massa. A differenza però della teoria classica, la peridinamica è governata da equazioni del moto che sono integrali rispetto agli spostamenti, non differenziali; ciò fa sì che queste equazioni si possano applicare anche qualora il campo degli spostamenti non sia continuo, come nel caso si abbiano nucleazione e propagazione di cricche.



**Figura 2.1:** Interazioni tra punti materiali nella teoria classica e nella peridinamica *bond based* [46]

### 2.1.1 Equazioni del moto

Si supponga di avere un corpo che occupi, nella sua configurazione di riferimento, la regione  $\mathbf{R}$  dello spazio. Assumiamo poi che ogni coppia di particelle interagisca tramite una funzione vettoriale  $f$  tale per cui  $\mathbf{L}$ , la forza per unità di volume (nella configurazione di riferimento di una particella) dovuta all'interazione con le altre particelle, sia un funzionale del campo degli spostamenti  $\mathbf{u}$ . Per ogni punto  $\mathbf{x}$  nella configurazione iniziale, e per ogni istante  $t$ ,  $\mathbf{L}$  è data da:

$$\mathbf{L}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{R}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}' - \mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}'} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}$$

Supponiamo ora che esista una lunghezza caratteristica  $\delta$ , che chiamiamo orizzonte, tale che:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}' - \mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \mid |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| > \delta$$

Allora, detto  $\mathbf{H}_{\mathbf{x}}$  l'intorno della particella  $\mathbf{x}$  di raggio  $\delta$ ,  $\mathbf{L}$  può essere riscritta come:

$$L_u(\mathbf{x}, t) = \int_{H_x} \mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}' - \mathbf{x}) dV_{x'} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}$$

che in forma più compatta diventa:

$$L_u(\mathbf{x}, t) = \int_{H_x} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) dV_{x'} \quad \text{su tutto } \mathbf{R}$$

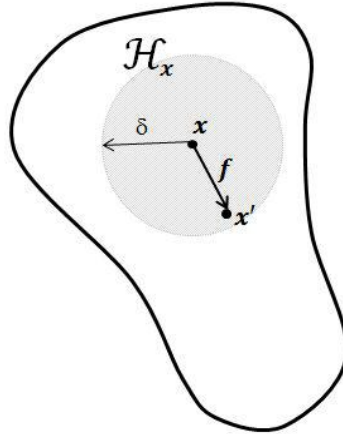


Figura 2.2: orizzonte e sfera di influenza relativi alla particella  $x$

L'equazione peridinamica del moto è data da:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = L_u(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad \text{su } \mathbf{R} \text{ e con } t \geq 0$$

in cui  $\rho$  è la densità del materiale e  $\mathbf{b}$  rappresenta le forze esterne per unità di volume. La funzione  $\mathbf{f}$  viene definita da Silling *pairwise force function*. Si osservi come l'ultima equazione assomigli all'analogia equazione del moto per la teoria convenzionale del continuo:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$$

ma come in essa compaiono, anziché derivate spaziali, termini integrali che non creano problemi in corrispondenza di discontinuità.

Per snellire le formule che seguiranno si sfrutterà la seguente notazione rispettivamente per i vettori posizione relativa nella configurazione di riferimento e spostamento relativo:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}; \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}' - \mathbf{u}$$

Si può osservare come il vettore  $\xi + \eta$  rappresenti la posizione relativa tra due particelle all'istante considerato.

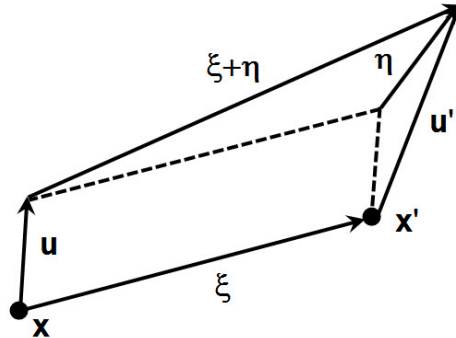


Figura 2.3: posizione e spostamento relativi tra  $x$  e  $x'$

Vediamo ora due importanti condizioni alle quali  $f$  deve sottostare:

- 1- Occorre che il principio di azione e reazione sia soddisfatto, ovvero che la 'forza' che una particella esercita su una seconda sia uguale ed opposta a quella che quest'ultima esercita sulla prima; tradotta in formula matematica questa condizione risulta:

$$f(-\eta, -\xi) = -f(\eta, \xi) \quad \forall \eta, \xi;$$

- 2- Il secondo vincolo è dato dalla conservazione del momento angolare:

$$(\xi + \eta) \times f(\eta, \xi) = \mathbf{0} \quad \forall \eta, \xi$$

In generale, quindi,  $f$  deve assumere una forma del tipo:

$$f(\eta, \xi) = F(\eta, \xi)(\eta + \xi) \quad \forall \eta, \xi$$

in cui  $F$  è una funzione a valori scalari tale che:

$$F(-\eta, -\xi) = F(\eta, \xi) \quad \forall \eta, \xi$$

### 2.1.2 Isotropia

Consideriamo un materiale peridinamico la cui *pairwise force function* sia  $f$ . Supponiamo che esista un insieme di tensori  $\mathcal{F}$  tale per cui:

$$f(Q\eta, Q\xi) = Qf(\eta, \xi) \quad \forall \eta, \xi, \quad \forall Q \in \mathcal{F}$$

$\mathcal{F}$  si dice in questo caso gruppo di simmetria per il materiale considerato: questo concetto è ripreso dalla teoria classica. Nel caso in cui un materiale ammetta come gruppo di simmetria  $\mathcal{O}^+$ , ovvero il gruppo di tensori ortogonali con determinante positivo unitario (che rappresenta le rotazioni rigide), il materiale si dice isotropo. Per cui, per un materiale perid dinamico isotropo, vale la seguente relazione:

$$f(Q\boldsymbol{\eta}, Q\boldsymbol{\xi}) = Qf(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \quad \forall Q \in \mathcal{O}^+$$

Il che significa essenzialmente che la risposta del materiale è indipendente da qualsiasi rotazione rigida, ovvero non esistono orientazioni preferenziali. Considerando ora l'uguaglianza  $f(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi})$  e applicandola alla precedente relazione si ottiene:

$$\begin{aligned} f(Q\boldsymbol{\eta}, Q\boldsymbol{\xi}) &= F(Q\boldsymbol{\eta}, Q\boldsymbol{\xi})(Q\boldsymbol{\eta} + Q\boldsymbol{\xi}) = F(Q\boldsymbol{\eta}, Q\boldsymbol{\xi})Q(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}) = Qf(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \\ &= F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})Q(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$

Quindi deve necessariamente essere che:

$$F(Q\boldsymbol{\eta}, Q\boldsymbol{\xi}) = F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \quad \forall Q \in \mathcal{O}^+$$

Nel caso in cui il materiale in esame sia isotropo si ha questo nuovo vincolo per  $F$ : ruotando rigidamente, in modo arbitrario, le coppie di vettori  $\boldsymbol{\eta}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$  il valore di  $F$  deve rimanere inalterato. Ciò significa che  $F$  non può dipendere dalla direzione di  $\boldsymbol{\eta}$  e  $\boldsymbol{\xi}$ , ma esclusivamente dalla geometria del triangolo formato da  $\boldsymbol{\eta}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$  e  $\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}$ , ovvero dai moduli  $|\boldsymbol{\eta}|$ ,  $|\boldsymbol{\xi}|$  e dall'angolo  $\cos^{-1}(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}/(|\boldsymbol{\xi}||\boldsymbol{\eta}|))$ . Si può dunque scrivere che:

$$F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = I(\bar{p}, q, r) \quad \text{con } \bar{p} = |\boldsymbol{\eta}|, \quad q = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}/(|\boldsymbol{\xi}||\boldsymbol{\eta}|), \quad r = |\boldsymbol{\xi}| \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}$$

Per comodità  $F$  si può considerare funzione di  $|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|$  (anziché di  $|\boldsymbol{\eta}|$ ),  $q$  e  $r$  dal momento che  $|\boldsymbol{\eta}|$  risulta univocamente determinato una volta noti  $|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|$ ,  $|\boldsymbol{\xi}|$  e  $\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}/(|\boldsymbol{\xi}||\boldsymbol{\eta}|)$ . Quindi:

$$F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = I(p, q, r) \quad \text{con } p = |\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|, \quad q = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}/(|\boldsymbol{\xi}||\boldsymbol{\eta}|), \quad r = |\boldsymbol{\xi}| \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}$$

e anche:

$$f(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = I(p, q, r)(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}$$

dove  $I$  è una qualche funzione a valori scalari, mentre  $p, q, r$  sono invarianti rispetto alle rotazioni rigide.

### 2.1.3 Elasticità

Un materiale peridinamico si dice microelastico se:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \cdot d\boldsymbol{\eta} = 0 \quad \forall \text{ curva chiusa } \Gamma, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$$

Ciò significa che il lavoro compiuto su una certa particella  $\mathbf{x}'$ , che si muova lungo un qualsiasi percorso chiuso  $\Gamma$ , da una particella fissa  $\mathbf{x}$  è nullo. Se  $\mathbf{f}$  è differenziabile con continuità rispetto alla variabile  $\boldsymbol{\eta}$  (ovvero è di classe  $C^1$  rispetto a  $\boldsymbol{\eta}$ ) si può applicare alla precedente relazione il teorema di Stokes, da cui:

$$\nabla_{\boldsymbol{\eta}} \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$$

dove  $\nabla_{\boldsymbol{\eta}} \times$  rappresenta l'operatore vettoriale *curl* valutato rispetto alle coordinate del vettore  $\boldsymbol{\eta}$ :

$$\nabla_{\boldsymbol{\eta}} \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial \eta_1 & \partial/\partial \eta_2 & \partial/\partial \eta_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Condizione necessaria e sufficiente perché la precedente relazione sia verificata è che esista una funzione scalare  $w$  tale che:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$$

$w$  è detto micropotenziale. E' interessante osservare che vale anche il procedimento inverso a quello finora sviluppato: condizione necessaria e sufficiente affinché un materiale peridinamico sia microelastico è che ammetta un micropotenziale.

Andando ora a sostituire nella formula precedentemente ricavata per  $\mathbf{f}$  la condizione  $\nabla_{\boldsymbol{\eta}} \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$  si ottiene:

$$\mathbf{0} = \nabla_{\boldsymbol{\eta}} \times (F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta})) = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \times (\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$$



Essendo infatti che  $\nabla_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}$ . Questa relazione costituisce un ulteriore vincolo per  $F$  che può essere riscritto come:

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = A(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta})$$

dove  $A$  è una funzione scalare. Integrando questa equazione [60] si può dimostrare che:

$$F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = H(p, \boldsymbol{\xi}) \quad \text{con } p = |\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|$$

in cui  $H$  è una funzione scalare derivabile con continuità in  $p$ . Si può ora riscrivere  $\mathbf{f}$  come:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = H(p, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}$$

Un'interpretazione di questo risultato è la seguente: se un materiale peridinamico è microelastico, allora l'interazione tra due punti  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  può essere pensata in modo analogo a quella che si avrebbe se questi fossero connessi da un elemento elastico (una molla, ipoteticamente anche non lineare): la forza esercitata da questa molla, che agisce lungo la direzione della congiungente  $\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}$ , dipende solo dalla distanza dei due punti nella configurazione deformata.

Nota  $H$ , per un determinato materiale microelastico, vale la relazione:

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = H(p, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi})$$

che, integrando, diventa:

$$\int \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \cdot d\boldsymbol{\eta} = \int H(p, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}) \cdot d\boldsymbol{\eta} = \int H(p, \boldsymbol{\xi}) p dp$$

dove si è considerato che:

$$dp = d|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}| = \frac{\partial |\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}|}{\partial \boldsymbol{\eta}} \cdot d\boldsymbol{\eta} = \frac{(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}|} \cdot d\boldsymbol{\eta} \quad \rightarrow \quad (\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}) \cdot d\boldsymbol{\eta} = |\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}| dp = p dp$$

e quindi:

$$w(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \tilde{w}(p, \boldsymbol{\xi})$$

Con  $\tilde{w}$  funzione scalare. Se ora oltre all'ipotesi di microelasticità si assume anche quella di isotropia, allora dal paragrafo precedente:

$$I(p, q, r) = H(p, \xi)$$

In questo caso però  $I$  non può dipendere da  $q = \xi \cdot \eta / (|\xi||\eta|)$  (perché altrimenti pure  $H$  dovrebbe dipendere anche da  $\eta$ ), e allora si può concludere che  $H$  può dipendere dall'argomento  $\xi$  solo attraverso il modulo di questa variabile, e lo stesso deve valere per la funzione micropotenziale:

$$w(\eta, \xi) = \bar{w}(p, r) = \bar{w}(|\xi + \eta|, |\xi|)$$

Quindi la funzione (scalare) micropotenziale che caratterizza le interazioni tra particelle di un materiale peridynamico elastico e isotropo dipende solamente dalle distanze tra le particelle nella configurazione di riferimento e in quella deformata.

Se la microelasticità ha a che fare con le interazioni tra singoli punti di un corpo, la macroelasticità riguarda il corpo nel suo intero. Siano:

$W_u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_R w(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) dV'$  l'energia macroelastica specifica (per unità di volume);

$\Phi_u = \int_R W_u(\mathbf{x}) dV$  l'energia macroelastica totale;

$T_u = \int_R \frac{\rho}{2} (\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) dV$  l'energia cinetica del corpo;

$\int_R (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) dV$  il lavoro compiuto sul corpo dalle forzanti esterne,

supponiamo che  $\mathbf{u}$  sia funzione del tempo e valutiamo la derivata temporale di  $\Phi_u$ :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_u &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_R \int_R w(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) dV' dV \\ &= \frac{1}{2} \int_R \int_R \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} w(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) dV' dV \\ &= \frac{1}{2} \int_R \int_R \frac{\partial}{\partial \eta} w(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot (\dot{\mathbf{u}}' - \dot{\mathbf{u}}) dV' dV \end{aligned}$$

in cui si è considerata  $w$  sufficientemente regolare ( $C^1$  in  $\mathbf{R}$ ) da poter portare la derivata sotto il segno di integrale e si è applicata la regola della catena. Sapendo che  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \partial w / \partial \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$ , allora:

$$\dot{\Phi}_u = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{u}}' dV' dV - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{u}} dV' dV$$

Ora l'integrale è in  $dV' dV$  su tutto  $\mathbf{R}$  due volte per cui si possono liberamente scambiare le variabili con l'apice con quelle senza:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{u}}' dV' dV &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{f}(\mathbf{u} - \mathbf{u}', \mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \dot{\mathbf{u}} dV dV' \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{u}} dV' dV \end{aligned}$$

infatti  $\mathbf{f}(-(\mathbf{u}' - \mathbf{u}), -(\mathbf{x}' - \mathbf{x})) = -\mathbf{f}(\mathbf{u} - \mathbf{u}', \mathbf{x} - \mathbf{x}')$  per la terza legge di Newton; ma allora:

$$\dot{\Phi}_u = - \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{u}} dV' dV$$

Applicando ora la legge del moto:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_u &= - \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{u}} dV' dV = - \int_{\mathbf{R}} (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{b}) \dot{\mathbf{u}} dV \\ &= - \int_{\mathbf{R}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{2} \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \right) - \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} \right] dV \end{aligned}$$

si può dunque concludere che:

$$\dot{\Phi}_u + \dot{T}_u = \int_{\mathbf{R}} (\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}}) dV$$

Questo risultato esprime la conservazione dell'energia ed è formalmente identico alla legge che formula l'analogo concetto per la teoria convenzionale del continuo: in un corpo elastico, nel senso 'peridinamico' del termine, il lavoro compiuto dalle azioni esterne viene interamente convertito in potenziale macroelastico ed energia cinetica, senza che si abbia l'intervento di alcun effetto dissipativo.

Questa relazione, come si apprezzerà meglio in seguito, è di notevole importanza dal momento che permette la derivazione delle grandezze costitutive dei materiali peridinamici sfruttando analogie con la teoria classica: confrontando la densità di energia macroelastica con l'energia (specifica) di deformazione elastica convenzionale sarà infatti possibile mettere in relazione le caratteristiche costitutive di un materiale espresse nella teoria peridinamica con quelle ben note dell'elasticità classica.

#### 2.1.4 Relazione con la teoria convenzionale: forza per unità di area

Un altro parallelismo con la teoria classica del continuo si può trovare nel concetto peridinamico di forza per unità di area. Si consideri un corpo microelastico omogeneo sottoposto ad una deformazione isotropa; sia  $P$  un piano che divide il corpo nelle due regioni  $\mathcal{R}^+$  e  $\mathcal{R}^-$ .  $\mathcal{R}^+$  eserciterà una qualche azione su  $\mathcal{R}^-$ . Questa forzante non agirà solo sulla superficie di  $\mathcal{R}^-$ , ma anche al suo interno a causa delle interazioni a distanza tra le particelle. Se dividiamo la risultante delle interazioni che  $\mathcal{R}^+$  esercita su  $\mathcal{R}^-$  per la superficie  $P \cap \mathcal{R}$  si ha la definizione di forza per unità di area. In linguaggio matematico, dati un punto  $x$  e una direzione  $n$ , siano:

$$\mathcal{R}^+ = \{x' \in \mathcal{R} : (x' - x) \cdot n \geq 0\}, \quad \mathcal{R}^- = \{x' \in \mathcal{R} : (x' - x) \cdot n \leq 0\}$$

$\mathcal{L}$  sia il seguente insieme di punti allineati:

$$\mathcal{L} = \{\hat{x} \in \mathcal{R}^- : \hat{x} = x - sn, 0 \leq s < \infty\}$$

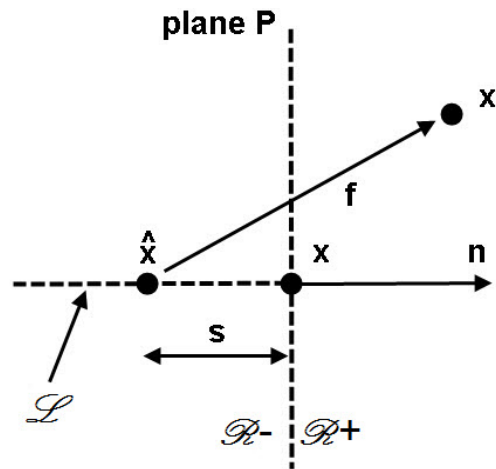


Figura 2.4: Definizione di forza per unità di area

Silling [60] stabilisce che:

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) = \int_L \int_{\mathcal{R}^+} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}' - \hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{x}' - \hat{\boldsymbol{x}}) dV_{x'} dl$$

$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$  rappresenta quindi l'azione che  $\mathcal{R}^+$  esercita su  $\mathcal{L}$ , e questa è la definizione per la forza per unità di area che più si avvicina al concetto classico di tensione. Silling [60], a partire da questa definizione, introduce anche il tensore peridinamico delle tensioni  $\boldsymbol{\sigma}$ :

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{n}, \quad \forall \boldsymbol{n}$$

Quest'ultimo è un tensore degli sforzi di Piola-Kirchoff in quanto le  $\boldsymbol{\tau}$  sono espresse per unità di area nella configurazione di riferimento, mentre il tensore di Cauchy le esprime rispetto alle aree nella configurazione deformata: per deformazioni infinitesime i due tensori coincidono.

### 2.1.5 Linearizzazione

La peridinamica nella sua formulazione non prevede alcuna restrizione a piccoli spostamenti, tuttavia linearizzare rispetto alle deformazioni ( $|\boldsymbol{\eta}| \ll 1$ ) facilita la definizione delle caratteristiche costitutive dei materiali. Mantenendo allora  $\boldsymbol{\xi}$  fisso, espandiamo  $\boldsymbol{f}(\cdot, \boldsymbol{\xi})$  in serie di Taylor fermandoci al primo ordine:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{f}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}$$

dove  $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\xi})$  è il tensore del secondo ordine dei micromoduli per un materiale peridinamico lineare:

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) = \left[ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} (F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \cdot (\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi})) \right]_{\boldsymbol{\eta}=\mathbf{0}} = \boldsymbol{\xi} \otimes \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) + F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{1} \quad \forall \boldsymbol{\xi}$$

Per ogni  $\boldsymbol{\xi}$  si dimostra facilmente che vale anche la relazione  $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{C}(-\boldsymbol{\xi})$ ; se il materiale è microelastico inoltre  $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\xi})$  deve essere simmetrico (dalla relazione  $\nabla_{\boldsymbol{\eta}} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$  infatti risulta che  $\partial f_i / \partial \eta_j = \partial f_j / \partial \eta_i$ ), ma in generale  $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\xi})$  non lo è.

Condizione necessaria e sufficiente perché un materiale lineare sia anche microelastico è che sia  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{C}^T(\boldsymbol{\xi})$ ; occorre pertanto che esista una funzione scalare  $\lambda(\boldsymbol{\xi})$  tale che:

$$\boldsymbol{\xi} \otimes \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) = \lambda(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} \quad \forall \boldsymbol{\xi}$$

Per determinare  $\lambda(\boldsymbol{\xi})$  basta osservare che la precedente relazione deve valere per ogni  $\boldsymbol{\xi}$ , quindi:

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) = \lambda(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi}$$

Moltiplicando (nel senso di prodotto interno) ora ambo i membri per  $\boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|^2$  si ottiene:

$$\lambda(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi})$$

Concludendo, detta  $F_0(\boldsymbol{\xi}) = F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi})$ ,

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \lambda(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} + F_0(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{1} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \quad \text{con} \quad \lambda(\boldsymbol{\xi}) = \lambda(-\boldsymbol{\xi}) \quad \text{e} \quad F_0(\boldsymbol{\xi}) = F_0(-\boldsymbol{\xi})$$

e si può dimostrare (si veda [60]) che, se il materiale lineare è isotropo,  $\lambda$  e  $F_0$  dipendono in realtà solo da  $|\boldsymbol{\xi}|$ .

### 2.1.6 Il caso $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{0}$

Consideriamo un corpo  $\mathcal{R}$  nella sua configurazione di riferimento ( $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ ) e un materiale peridynamico isotropo e microelastico; imponiamo inoltre la condizione  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{0}$  per ogni punto  $\mathbf{x}$ . Sia  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  una base ortonormale e fissiamo in  $\mathbf{0}$  l'origine del sistema di riferimento. Per la definizione di forza per unità di area, si può scrivere:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{0}, \mathbf{e}_1) = \int_0^\infty \int_{R^+} \mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{x}' + s\mathbf{e}_1) dV_{\mathbf{x}'} ds = \int_0^\infty \int_{R^+} F(\mathbf{0}, \mathbf{x}' + s\mathbf{e}_1) (\mathbf{x}' + s\mathbf{e}_1) dV_{\mathbf{x}'} ds$$

Con riferimento alla figura che segue.

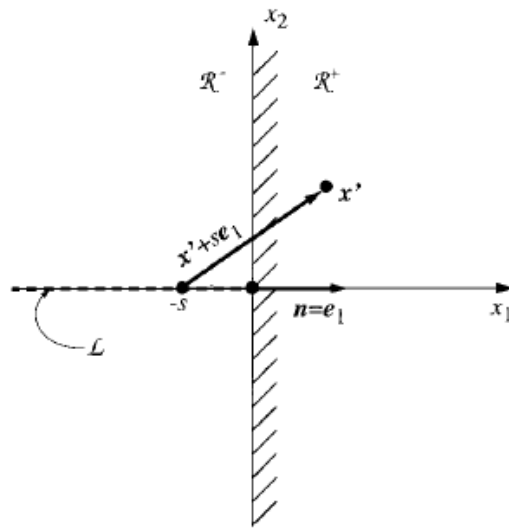


Figura 2.5: Prima colonna del 'tensore degli sforzi'

Ponendosi in un riferimento sferico:

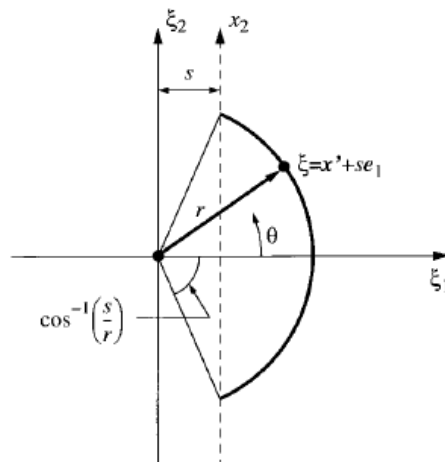


Figura 2.6: Definizione di  $\tau_{11}$

si ha che:

$$\xi_1 = r \cos \vartheta \quad \xi_2 = r \sin \vartheta \cos \varphi \quad \xi_3 = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$dV_{x'} = r^2 \sin \vartheta \, dr d\vartheta d\varphi$$

dove  $\varphi$  è la rotazione attorno a  $\xi_1$ . Quindi la prima componente di  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{0}, \mathbf{e}_1)$  è:

$$0 = \tau_{11}(\mathbf{0}, \mathbf{e}_1) = \int_0^\infty \int_0^r \int_0^{\cos^{-1}(s/r)} \int_0^{2\pi} F_0(r)(r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta \, d\varphi d\vartheta ds dr = \Psi$$

Integrando si ottiene:

$$\Psi = \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty F_0(r) r^4 dr = 0$$

Quest'equazione rappresenta un ulteriore vincolo per  $F$  nel caso in cui, nella configurazione iniziale, non siano presenti forzanti interne tra le particelle. Ciò è di grande importanza nella modellazione in quanto consente di non dare per scontato il fatto che  $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) = \mathbf{0}$  nella configurazione iniziale (anche in assenza di azioni esterne), lasciando così la possibilità di considerare la presenza, ad esempio, di tensioni residue.

### 2.1.7 Vincolo sul coefficiente di Poisson

Come si è già accennato in precedenza, una limitazione importante per la peridinamica nella sua formulazione *bond based* è data dal fatto che il coefficiente di Poisson assume necessariamente un valore costante, indipendentemente dal materiale che si considera. In questo paragrafo verranno descritte le ragioni matematiche che conducono a questa limitazione.

Prendiamo in esame un corpo, con azioni interne nulle nella configurazione di riferimento, costituito di un materiale isotropo e microelastico; aggiungiamo inoltre l'ipotesi di piccoli spostamenti per cui si possa fare riferimento alla peridinamica linearizzata. Definita una base ortonormale  $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ , assumiamo che il corpo sia sottoposto ad una deformazione omogenea nella direzione  $\boldsymbol{e}_1$  per cui  $u_1 = \epsilon_{11}x_1$  con  $\epsilon_{11} \ll 1$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = 0$  ovvero  $\eta_1 = \epsilon_{11}\xi_1$ ,  $\eta_2 = 0$ ,  $\eta_3 = 0$ . Sappiamo che:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{f}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) = \lambda(r) \begin{bmatrix} \xi_1^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 \\ \xi_2\xi_1 & \xi_2^2 & \xi_2\xi_3 \\ \xi_3\xi_1 & \xi_3\xi_2 & \xi_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} + F_0(r) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix}$$

con  $r = |\boldsymbol{\xi}|$

ovvero:

$$\begin{cases} f_1 = \epsilon_{11}[\lambda(r)\xi_1^3 + F_0(r)\xi_1] \\ f_2 = \epsilon_{11}\lambda(r)\xi_1^2\xi_2 \\ f_3 = \epsilon_{11}\lambda(r)\xi_1^2\xi_3 \end{cases}$$



Ponendoci ancora in un sistema di coordinate sferiche, calcoliamo la prima componente del tensore delle 'tensioni'  $\sigma_{11} = \tau_1(\mathbf{e}_1)$ :

$$\tau_1(\mathbf{e}_1) = \epsilon_{11} \int_0^\infty \int_0^r \int_0^{\cos^{-1}(\frac{s}{r})} \int_0^{2\pi} [\lambda(r)(r \cos \vartheta)^3 + F_0(r)(r \cos \vartheta)] r^2 \sin \vartheta \, d\varphi d\vartheta ds dr$$

che risulta:

$$\tau_1(\mathbf{e}_1) = (\Lambda + \Psi)\epsilon_{11} = \Lambda\epsilon_{11}$$

in cui si ricava:

$$\Lambda = \frac{2\pi}{5} \int_0^\infty \lambda(r)r^6 \, dr$$

$\Psi$  è infatti nullo come si è visto nel paragrafo precedente. Svolgendo un procedimento analogo si può completare il tensore  $\boldsymbol{\sigma}$  il quale può essere confrontato con il corrispondente tensore caratteristico della teoria del continuo classica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \epsilon_{11} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda/3 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda/3 \end{bmatrix} = \epsilon_{11} \begin{bmatrix} l + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix}$$

$l$  e  $\mu$  sono le note costanti di Lamè:

$$l = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \Lambda = l + 2\mu \\ \Lambda/3 = l \end{cases}$$

si ricava:

$$l = \mu = \frac{\Lambda}{3} \quad \nu = \frac{1}{4} \quad E = \frac{5\Lambda}{9}$$

in cui  $\nu$  è il coefficiente di Poisson ed  $E$  il modulo elastico.

### 2.1.8 Condizioni di carico

Le equazioni differenziali di equilibrio della meccanica del continuo classica necessitano di condizioni al contorno per poter fornire una soluzione particolare. La formulazione matematica della peridinamica non richiede invece di specificare alcuna condizione ai bordi, e si è visto inoltre come il concetto di tensione non sia affatto naturale per questa teoria, ma debba essere introdotto in modo artificioso.

Un'interpretazione meno 'qualitativa' di questo problema è stata proposta da Kilic [28]: supponiamo che la particella  $i$  di un corpo si trovi su un suo bordo piano, in questo caso metà della sfera di influenza di  $i$  è esterna al corpo e non contiene punti materiali.

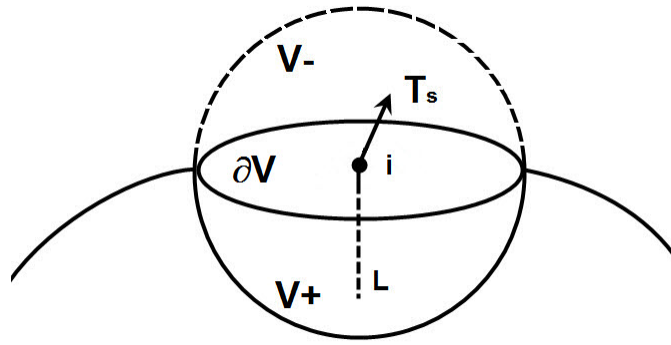


Figura 2.7: Condizioni di carico

Se su  $i$  agisse la forza per unità di area  $T_s$ , questa, per definizione, dovrebbe essere:

$$\mathbf{T}_s = \int_L dl \int_{V^-} \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) dV = \mathbf{0}$$

poiché il volume  $V^-$  è vuoto.

Silling nel suo lavoro [60] conclude che non è possibile applicare condizioni al contorno in termini di forze per unità di area, ma occorre imporle attraverso il termine  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  delle forze per unità di volume: qualora si voglia modellare superfici sottoposte a tensione,  $\mathbf{b}$  dovrebbe essere posto diverso da zero per le particelle appartenenti ad alcuni degli strati esterni di materiale nella zona di applicazione del carico [22].

Per quanto riguarda eventuali condizioni sugli spostamenti (ma anche velocità e accelerazioni) ai bordi, queste possono essere applicate in modo agevole. Consideriamo

un corpo  $\mathcal{R}$  e una sua porzione  $\mathcal{R}^*$  alla quale si voglia imporre il campo di spostamenti: ciò può essere fatto semplicemente modificando il termine  $L_u(\mathbf{x}, t)$  delle equazioni del moto in questo modo:

$$L_u(\mathbf{x}, t) = \int_{R-R^*} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) dV' + \int_{R^*} \mathbf{f}(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}, \mathbf{x}^* - \mathbf{x}) dV^*$$

nella quale si è considerato  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}(\mathbf{x}^*)$  e  $dV^* = dV_{\mathbf{x}^*}$

## 2.2 Relazioni costitutive

In questa sezione verrà descritto come si possano ricavare le grandezze costitutive dei materiali peridinamici e in che modo questa teoria sia in grado di introdurre il concetto di danno. Per prima cosa verrà esposto il caso tridimensionale, a seguire si parlerà delle formulazioni mono e bidimensionali che si sono rivelate di grande utilità per l'estensione della teoria al caso assialsimmetrico.

### 2.2.1 Materiale PMB

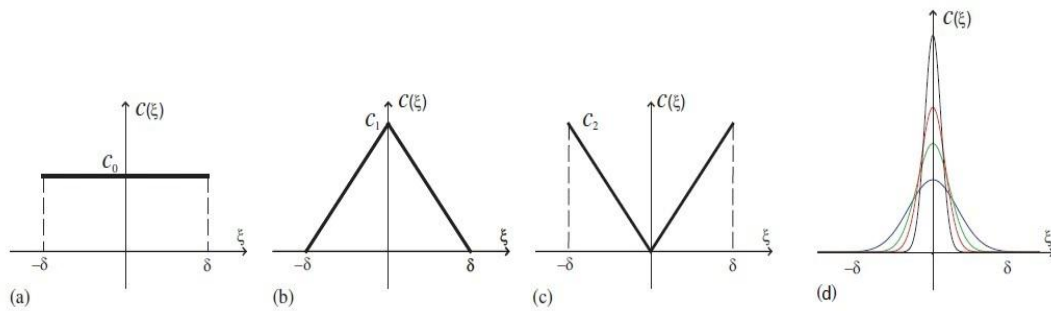
Silling ed Askari [62] hanno proposto un semplice modello per la forza per unità di volume al cubo  $\mathbf{f}$  tra le particelle nell'ipotesi di assenza di carichi termici:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = c(|\boldsymbol{\xi}|)s(|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|, |\boldsymbol{\xi}|) \frac{\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|}$$

nella quale  $c$  si può pensare come la rigidezza del *bond*, mentre  $s$  rappresenta la sua deformazione che può essere espressa come:

$$s = \frac{|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}| - |\boldsymbol{\xi}|}{|\boldsymbol{\xi}|}$$

La rigidezza  $c$  dipende sicuramente da  $|\boldsymbol{\xi}|$ , nel senso che per particelle la cui distanza relativa è maggiore dell'orizzonte  $\delta$ , il valore di  $c$  si annulla: tra loro non è presente alcun *bond*; Silling e Askari [62] assumono che, entro l'orizzonte,  $c$  sia costante, ma a rigore il suo andamento può variare con  $|\boldsymbol{\xi}|$ .



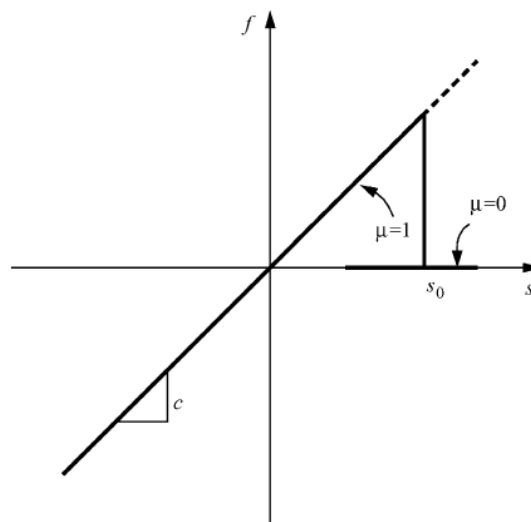
**Figura 2.8: Esempi di funzione micromodulo. (a) costante; (b) triangolare; (c) triangolare invertita; (d) a campana**

Al fine di introdurre l'idea di danno occorre che i *bond* si possano rompere qualora si deformino oltre un certo valore limite  $s_0 > 0$  (si assume infatti che la rottura non possa verificarsi per compressione); occorre quindi modificare la formula per  $f$  aggiungendo il coefficiente  $\mu(|\xi|)$ :

$$\mu(|\xi|) = \begin{cases} 1 & \text{se } s < s_0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per cui si ha che:

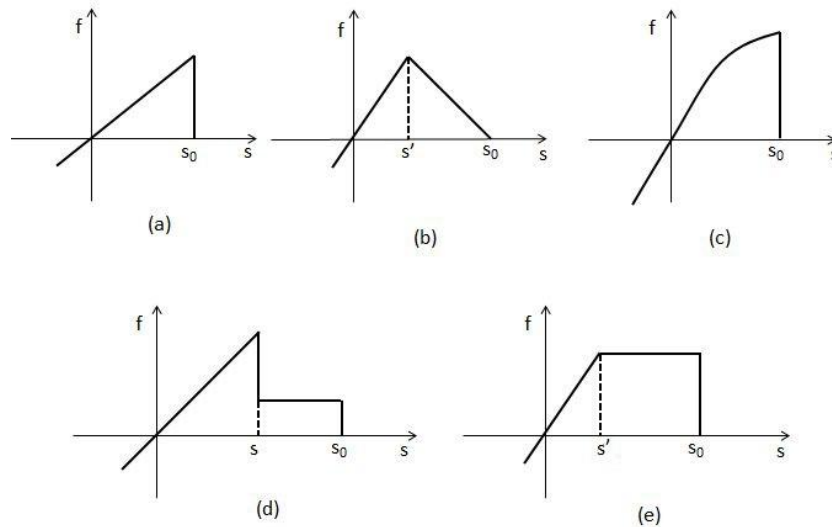
$$f(\eta, \xi) = c(|\xi|)s(|\xi + \eta|, |\xi|)\mu(|\xi|) \frac{\xi + \eta}{|\xi + \eta|}$$



**Figura 2.9: Grafico forza peridinamica-deformazione per materiali microelastici**

Un materiale la cui *responce function* assuma questa forma viene detto *Prototype Microelastic Brittle*; l'attributo di fragilità è dovuto al fatto che per un simile materiale i

*bond* si rompono in campo elastico senza manifestare plasticità; una volta rotti, inoltre, i legami non possono più essere ripristinati. Naturalmente sono ammessi molti altri possibili andamenti per la  $f$ , tuttavia nel presente lavoro ci si riferirà principalmente a materiali PMB.



**Figura 2.10: Vari tipi di *response function*. (a) rappresenta i materiali PMB**

Risulta a questo punto necessario poter associare la rigidezza  $c$  a delle grandezze tipiche di un materiale reale che voglia essere modellato in peridinamica: ciò può essere fatto grazie al principio di conservazione dell'energia di cui si è già parlato. L'idea è infatti quella di considerare l'energia elastica specifica di un corpo omogeneo sottoposto a determinati stati di deformazione e confrontarne le formule note dalla teoria tradizionale con quelle previste dalla peridinamica.

Si prenda in esame un corpo omogeneo isotropo idealmente infinito: dalla teoria classica del continuo si sa che le energie specifiche di deformazione relative a dilatazione omogenea e taglio puro risultano rispettivamente:

$$U_e = \frac{3}{2} \frac{E \varepsilon^2}{(1 - 2\nu)}; \quad U_s = \frac{E \gamma^2}{4(1 + \nu)}$$

dove  $\varepsilon = \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$  è la dilatazione omogenea, mentre  $\gamma = 2\varepsilon_{ij}$  è lo scorrimento angolare. Per ottenere queste grandezze si sono considerati il legame costitutivo ( $\sigma = D\varepsilon$ ):

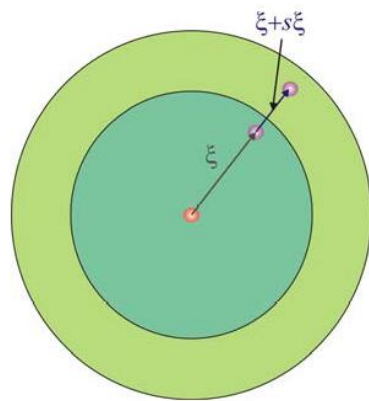
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}; \quad \tau_{ij} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{ij}$$

e la ben nota equazione per l'energia:

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$$

Per valutare le analoghe quantità derivate tramite la peridinamica occorre innanzitutto determinare quali siano i valori di  $s$  tra due particelle qualsiasi nei due casi:

- 1) Dilatazione omogenea. Questo caso è molto semplice:



$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon$$

$$\eta = \varepsilon \xi; \quad \eta + \xi = (1 + \varepsilon) \xi$$

$$s = \frac{|\eta + \xi| - |\xi|}{|\xi|} = \varepsilon$$

Figura 2.11: Espansione omogenea

- 2) Taglio puro (in un piano qualsiasi  $ij$ ):

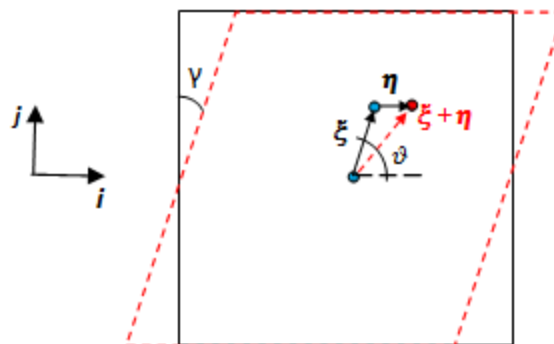


Figura 2.12: Taglio puro

In coordinate sferiche si ha che:

$$\boldsymbol{\xi} = \xi \cos \vartheta \mathbf{i} + \xi \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{j} + \xi \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{k}$$

dove con  $\varphi$  si indicano le rotazioni attorno al versore  $\mathbf{k}$  uscente dal piano; si ha poi che:

$$\boldsymbol{\eta} = \gamma \xi_y \mathbf{i} = \zeta \gamma \xi \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{i}$$

e quindi:

$$\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta} = \begin{cases} \xi \cos \vartheta + \gamma \xi \sin \vartheta \cos \varphi \\ \xi \sin \vartheta \cos \varphi \\ \xi \sin \vartheta \sin \varphi \end{cases}$$

$$|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}| = \xi \sqrt{1 + \gamma^2 (\sin \vartheta \cos \varphi)^2 + \gamma \sin 2\vartheta \cos \varphi}$$

Nell'ipotesi di piccoli scorrimenti angolari si può espandere  $|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|$  in serie di Taylor in un intorno di  $\gamma_0 = 0$  e, fermandosi al primo ordine in modo da linearizzare la precedente relazione, si ottiene:

$$f(\gamma) = \sqrt{1 + \gamma^2 (\sin \vartheta \cos \varphi)^2 + \gamma \sin 2\vartheta \cos \varphi} \rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(\gamma) = \frac{1}{2f(\gamma)} (2\gamma (\sin \vartheta \cos \varphi)^2 + \sin 2\vartheta \cos \varphi) \rightarrow f'(0) = \frac{\sin 2\vartheta \cos \varphi}{2}$$

$$f(\gamma) \approx f(0) + f'(0)(\gamma - 0) = 1 + \frac{\gamma \sin 2\vartheta \cos \varphi}{2}$$

ovvero:

$$|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}| = \xi \left( 1 + \frac{\gamma \sin 2\vartheta \cos \varphi}{2} \right)$$

per cui:

$$s = \frac{|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}| - |\boldsymbol{\xi}|}{|\boldsymbol{\xi}|} = \frac{\gamma \sin 2\vartheta \cos \varphi}{2}$$

A questo punto è possibile determinare l'energia di deformazione per unità di volume fornita dalla peridinamica nei due casi: è sufficiente integrare, su tutto il volume della sfera di influenza, la funzione micropotenziale valutata per le deformazioni  $s$ :

$$W = \frac{1}{2} \int_H w(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) dV$$

Si può dimostrare che il micropotenziale per un materiale lineare microelastico vale:

$$w(\boldsymbol{\eta}, \xi) = \frac{1}{2} cs^2 \xi$$

infatti, dalla definizione di  $w$  si sa che:

$$\frac{\partial w(\boldsymbol{\eta}, \xi)}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \xi) = cs \frac{(\boldsymbol{\eta} + \xi)}{|\boldsymbol{\eta} + \xi|}$$

per cui:

$$w(\boldsymbol{\eta}, \xi) = \int cs \frac{(\boldsymbol{\eta} + \xi)}{|\boldsymbol{\eta} + \xi|} \cdot d\boldsymbol{\eta} = \int cs |\xi| ds = \frac{1}{2} cs^2 \xi$$

in cui si è sfruttato il seguente cambio di variabili:

$$ds = \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\eta}} \cdot d\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{|\xi|} \frac{(\boldsymbol{\eta} + \xi)}{|\boldsymbol{\eta} + \xi|} \cdot d\boldsymbol{\eta} \rightarrow \frac{(\boldsymbol{\eta} + \xi)}{|\boldsymbol{\eta} + \xi|} \cdot d\boldsymbol{\eta} = |\xi| ds$$

Quindi per la dilatazione sferica si ha:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_0^\delta \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} c \varepsilon^2 \xi \right) \xi \sin \vartheta d\varphi \xi d\vartheta d\xi = \frac{\pi c \delta^4 \varepsilon^2}{4}$$

mentre per il taglio puro:

$$W_s = \frac{1}{2} \int_0^\delta \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} c \left( \frac{\gamma \sin 2\vartheta \cos \varphi}{2} \right)^2 \xi \right) \xi \sin \vartheta d\varphi \xi d\vartheta d\xi = \frac{\pi c \delta^4 \gamma^2}{60}$$

Imponendo ora l'uguaglianza tra queste ultime e le analoghe energie valutate per il continuo classico si ha il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\pi c \delta^4 \varepsilon^2}{4} = \frac{3}{2} \frac{E \varepsilon^2}{(1 - 2\nu)} \\ \frac{\pi c \delta^4 \gamma^2}{60} = \frac{E \gamma^2}{4(1 + \nu)} \end{cases}$$



che, fissato il modulo elastico  $E$ , porge:

$$c = \frac{12E}{\pi\delta^4}, \quad \nu = \frac{1}{4}$$

Si è quindi trovata una relazione tra la rigidità dei *bond*  $c$  e il modulo elastico del materiale, mentre il coefficiente di Poisson, come ci si poteva aspettare, risulta una costante pari a 0.25.

### 2.2.2 Il concetto di danno

Aver introdotto il coefficiente  $\mu$  nel paragrafo precedente permette di definire senza alcuna ambiguità il concetto di danno: questa è una importante peculiarità che distingue la peridinamica. In altre parole in questa teoria il danno è parte integrante del modello costitutivo di un materiale: il PMB ad esempio, come si è visto, per essere definito necessita della conoscenza di  $c$ , ma anche di  $s_0$ .

La relazione proposta da Silling e Askari [62] per quantificare il danno  $\varphi$  cui è soggetta la particella  $\mathbf{x}$  è la seguente:

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \frac{\int_{H_x} \mu dH_{x'}}{\int_{H_x} dH_{x'}}$$

Il danno è quindi il complemento a 1 del rapporto, pesato sul volume, tra il numero di *bond* danneggiati e il numero complessivo di interazioni che coinvolgono inizialmente un punto.

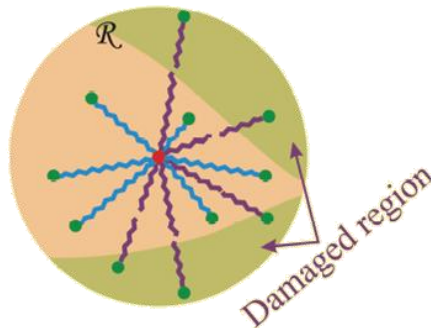


Figura 2.13: Regioni danneggiate e non entro l'orizzonte di un punto materiale

In sintesi, in  $\mathbf{x}$  il danno è nullo se tutte le interazioni che  $\mathbf{x}$  ha entro la sua sfera di influenza sono attive, mentre cresce fino al valore unitario quando tutti i *bond* si sono rotti.

### 2.2.3 Valore limite per il bond stretch

Come la rigidezza  $c$ , anche il parametro  $s_0$ , che limita la possibilità di un *bond* di deformarsi indefinitamente, può essere correlato con una quantità misurabile: questa quantità è rappresentata da  $G_0$ , l'energia di frattura per unità di area, detta anche tasso di rilascio dell'energia di deformazione.

Silling e Askari [62] considerano che l'equivalente peridinamico di  $G_0$  deve essere il lavoro, per unità di area, necessario a rompere tutte le interazioni che riguardano le particelle che si trovano ai lati opposti di una superficie di frattura. Valutiamo in primo luogo il lavoro (per unità di volume al quadrato) speso per rompere un singolo *bond* inizialmente a riposo: questo, per materiali PMB, può essere calcolato integrando l'equazione che definisce il micropotenziale:

$$w_0 = \int cs \frac{(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}|} \cdot d\boldsymbol{\eta} = \int_0^{s_0} cs |\boldsymbol{\xi}| ds = \frac{1}{2} cs_0^2 \boldsymbol{\xi}$$

$G_0$  può ora essere valutato integrando  $w_0$  su una superficie unitaria di frattura:

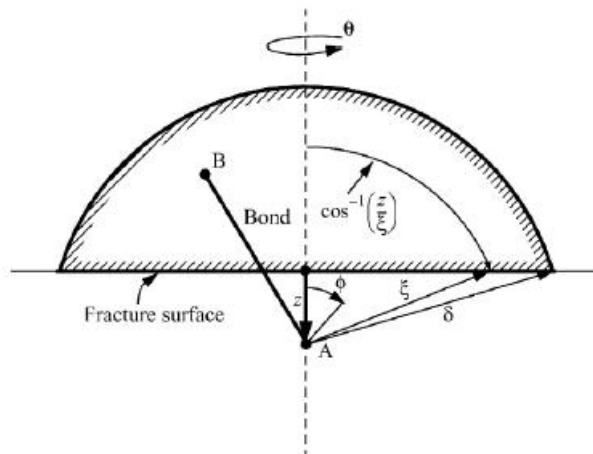


Figura 2.14: Valutazione dell'energia di frattura  $G_0$

$$\begin{aligned}
G_0 &= \int_0^\delta \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} \int_0^{2\pi} c s_0^2 \frac{\xi^3}{2} \sin(\varphi) d\vartheta d\varphi d\xi dz = \\
&= \pi c s_0^2 \int_0^\delta \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} \xi^3 \sin(\varphi) d\varphi d\xi dz = \\
&= \pi c s_0^2 \int_0^\delta \int_z^\delta \xi^2 z d\xi dz = \pi c s_0^2 \int_0^\delta \frac{z}{3} (\delta^3 - z^3) dz = \frac{\pi c s_0^2 \delta^5}{10}
\end{aligned}$$

Invertendo la precedente relazione si ottiene:

$$s_0 = \sqrt{\frac{10G_0}{\pi c \delta^5}} = \sqrt{\frac{5G_0}{6E\delta}}$$

In realtà la trattazione appena descritta può risultare semplicistica per la modellazione di materiali reali: può infatti essere riduttivo assumere che, per un *bond*,  $s_0$  sia completamente indipendente dal grado di deformazione di quelli adiacenti. Silling e Askari [62] propongono ad esempio di introdurre per i vetri un termine correttivo dipendente da  $s_{min}$  che è la minima tra le deformazioni dei *bond* che coinvolgono una particella in un determinato istante:

$$s_0 = s_{00} - \alpha s_{min}, \quad s_{min} = \min_{\xi}(s)$$

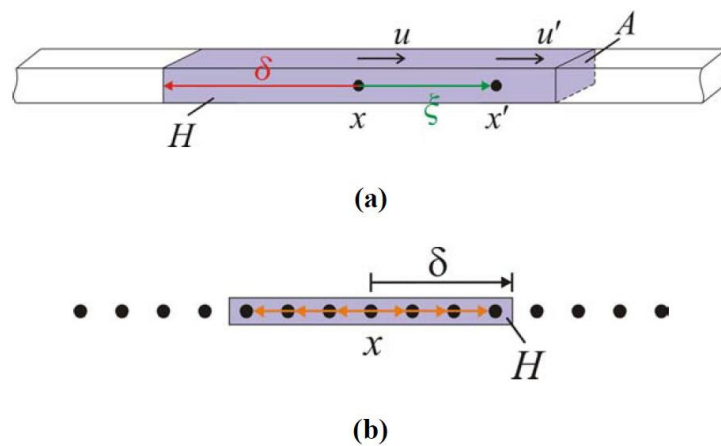
dove  $s_{00}$  e  $\alpha$  sono costanti con  $\alpha$  tipicamente pari a circa 1/4. In questo modo eventuali deformazioni di compressione all'interno della sfera di influenza di una particella tendono ad aumentare il valore limite  $s_0$ . Altre modifiche alla definizione di  $s_0$  possono essere agevolmente introdotte in modo da poter considerare effetti ambientali (come la temperatura, la presenza di agenti chimicamente aggressivi, ...), difetti dovuti alle lavorazioni o anche il fenomeno della fatica.

### 2.3 Costanti peridinamiche per problemi mono e bidimensionali

Si è già parlato nell'introduzione degli elevati costi computazionali imposti dall'implementazione numerica della peridinamica; come per tutte le tecniche numeriche sfruttate dai *software* dedicati alla meccanica strutturale, anche per la peridinamica è di grande importanza la rappresentazione del continuo attraverso

semplificazioni 1D e 2D. In questo modo è possibile ridurre notevolmente il numero di nodi rappresentativi di una struttura tridimensionale e con essi i tempi di calcolo. Per questa ragione, ma anche e soprattutto per l'utilità che hanno avuto questi concetti ai fini della trattazione assialsimmetrica, nella presente sezione verranno esposte le formulazioni della peridinamica per problemi piani e monodimensionali.

### 2.3.1 Peridinamica 1D



**Figura 2.15: Modellazione peridinamica di una struttura monodimensionale. (a) deformazioni entro l'orizzonte di  $x$ ; (b) discretizzazione**

La teoria monodimensionale è adatta allo studio di strutture che si sviluppano principalmente in una dimensione come travi snelle o aste, e la sua formulazione porta alla definizione di costanti caratteristiche per i materiali PMB che sono diverse rispetto a quelle ottenute nel 3D. La trattazione analitica risulta semplificata in quanto tutte le grandezze che finora sono state considerate vettoriali compaiono qui come scalari. Si prenda in esame una trave con sezione costante; per prima cosa valutiamo la rigidità  $c$  dei bond seguendo un ragionamento analogo a quello già esposto per il caso generale. L'energia elastica di deformazione derivata dalla teoria convenzionale per la dilatazione  $\varepsilon$  è:

$$U = \frac{1}{2} E \varepsilon^2$$

In peridinamica l'analogia quantità è data dall'integrazione sul 'segmento' di influenza del micropotenziale:

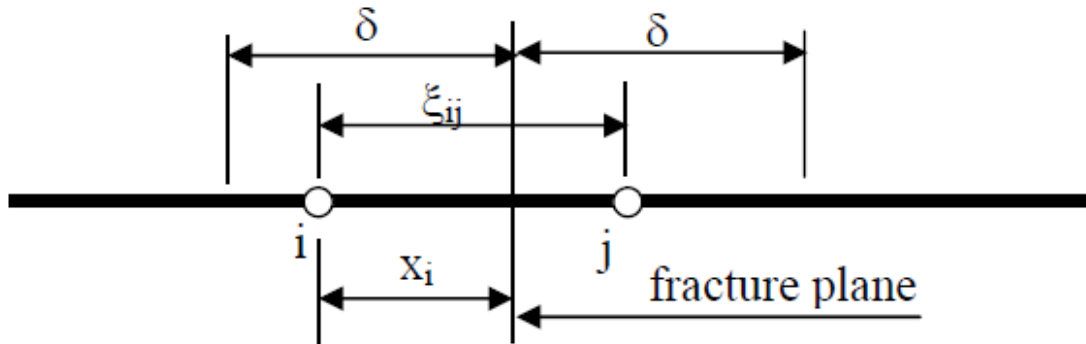
$$w = \frac{1}{2} c s^2 \xi = \frac{1}{2} c \varepsilon^2 \xi \rightarrow W = 2 \frac{1}{2} \int_0^\delta \left( \frac{1}{2} c \varepsilon^2 \xi \right) A d\xi = \frac{c \delta^2 A \varepsilon^2}{4}$$

Con  $A$  si intende l'area della sezione della trave. Ponendo  $U = W$  si ottiene:

$$c = \frac{2E}{A\delta^2}$$

In questo caso non occorre confrontare le energie dovute a deformazioni taglienti le quali non si possono definire nel monodimensionale.

Il secondo parametro necessario alla caratterizzazione di un materiale PMB è  $s_0$ . Per valutarne la formula si procede analogamente a quanto visto per il 3D.



**Figura 2.16: Valutazione di  $G_0$  nella peridinamica 1D**

$$G_0 = \frac{1}{A} \int_0^\delta \left( \int_{x_i}^\delta \frac{c s_0^2 \xi_{ij}}{2} A d\xi_{ij} \right) A dx_i = \frac{A c s_0^2 \delta^3}{6}$$

da cui

$$s_0 = \sqrt{\frac{6G_0}{Ac\delta^3}} = \sqrt{\frac{3G_0}{E\delta}}$$

### 2.3.2 Peridinamica 2D

Come nella teoria convenzionale, anche in peridinamica molti casi pratici possono essere studiati come problemi piani. Questi possono dividersi in due tipologie a seconda che siano le tensioni o le deformazioni ad avere una distribuzione bidimensionale: si parla di problemi *plane stress* nel primo caso e di problemi *plane strain* nel secondo.

#### 1) Caso *plane stress*

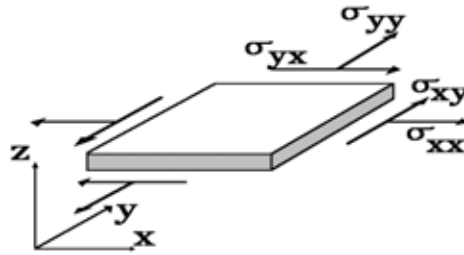


Figura 2.17: Stato tensionale 2D plane stress

Se ci si pone nel piano  $xy$  la distribuzione di tensioni e deformazioni è del tipo:

$$\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz} = 0$$

$$\gamma_{xz}, \gamma_{yz} = 0$$

In questo caso la relazione costitutiva ( $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$ ) tra tensioni e deformazioni è la seguente:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

per cui le energie di deformazione dovute ad una dilatazione isotropa ( $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon$ ;  $\gamma_{xy} = 0$ ) e a taglio puro ( $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ ;  $\gamma_{xy} = \gamma$ ) sono rispettivamente:

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad U_e = \frac{E \varepsilon^2}{1-\nu}; \quad U_s = \frac{E \gamma^2}{4(1+\nu)}$$

Dalla peridynamica si può ottenere:

- Dilatazione isotropa

$$w_e(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} c s^2 \xi = \frac{1}{2} c \varepsilon^2 \xi$$

e quindi:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} c \varepsilon^2 \xi \right) t \xi d\vartheta d\xi = \frac{\pi c \delta^3 t \varepsilon^2}{6}$$

- Taglio puro

$$w_s = \frac{1}{2} c \left( \frac{\gamma \sin 2\vartheta}{2} \right)^2 \xi$$

per cui:

$$W_s = \frac{1}{2} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} c \left( \frac{\gamma \sin 2\vartheta}{2} \right)^2 \xi \right) t \xi d\vartheta d\xi = \frac{\pi c \delta^3 t \gamma^2}{48}$$

La derivazione delle relazioni per la deformazione  $s$  dei bond è simile a quella esposta per le tre dimensioni. Il confronto tra le  $U$  e le  $W$  porge:

$$\begin{cases} \frac{\pi c \delta^3 t \varepsilon^2}{6} = \frac{E \varepsilon^2}{1 - \nu} \\ \frac{\pi c \delta^3 t \gamma^2}{48} = \frac{E \gamma^2}{4(1 + \nu)} \end{cases}$$

Risolviendo il sistema si ricava:

$$c = \frac{9E}{\pi t \delta^3}, \quad \nu = \frac{1}{3}$$

Per quanto riguarda la deformazione limite  $s_0$ , questa si ricava al solito sfruttando il tasso di rilascio dell'energia di deformazione  $G_0$ .

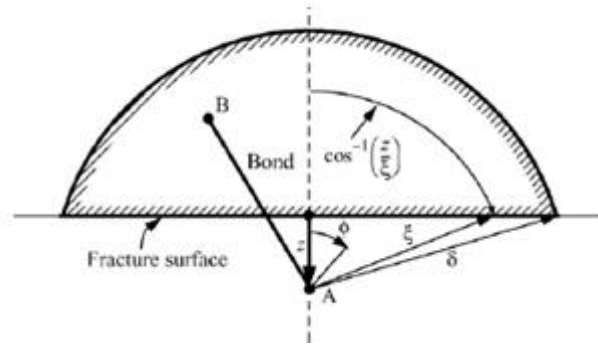


Figura 2.18: Valutazione di  $G_0$  nella peridinamica 2D

$$G_0 = t \int_0^\delta \int_z^\delta \int_{-\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)}^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} c s_0^2 \frac{\xi^2}{2} d\varphi d\xi dz = \frac{9E}{\pi\delta^3} s_0^2 \int_0^\delta \int_z^\delta \xi^2 \cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right) d\xi dz = \frac{9E\delta}{4\pi} s_0^2$$

$s_0$  risulta pertanto:

$$s_0 = \sqrt{\frac{4\pi G_0}{9E\delta}}$$

## 2) Caso *plane strain*

Lo stato piano di deformazione prevede invece la seguente distribuzione di tensioni e deformazioni:

$$\tau_{xz}, \tau_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_z, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} = 0$$

mentre il legame costitutivo è espresso come segue:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$



Le energie di deformazione dovute ad una dilatazione omogenea ( $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon$ ;  $\gamma_{xy} = 0$ ) e a taglio puro ( $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ ;  $\gamma_{xy} = \gamma$ ) sono quindi:

$$U_e = \frac{E\varepsilon^2}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad U_s = \frac{E\gamma^2}{4(1+\nu)}$$

Per quanto riguarda  $W_e$  e  $W_s$  si può facilmente vedere come siano identiche a quelle valutate nel paragrafo *plane stress*. La rigidezza  $c$  e il Poisson peridinamico si ottengono quindi risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\pi c \delta^3 t \varepsilon^2}{6} = \frac{E \varepsilon^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \frac{\pi c \delta^3 t \gamma^2}{48} = \frac{E \gamma^2}{4(1+\nu)} \end{cases}$$

che porge:

$$c = \frac{48E}{5\pi t \delta^3}, \quad \nu = \frac{1}{4}$$

Il parametro  $s_0$  può essere valutato risolvendo lo stesso integrale esposto nella trattazione *plain stress* nel quale però la rigidezza  $c$  va sostituita con quella appena ricavata. Si ottiene:

$$s_0 = \sqrt{\frac{5\pi G_0}{12E\delta}}$$



### 3 Cenni sulla formulazione di stato

La peridinamica *bond based*, che è appena stata introdotta, soffre di alcuni limiti: il più importante è senz'altro il vincolo sul coefficiente di Poisson che è una caratteristica intrinseca di questa teoria essendo dovuto al fatto che si sceglie di rappresentare le interazioni tra le particelle attraverso *bond* elastici che le collegano idealmente a due a due. Anche se l'approssimazione  $\nu = 1/4$  (o  $\nu = 1/3$  a seconda del problema che si affronta) può essere accettabile per determinati materiali, in generale si può intuire come, per una teoria del continuo, questa restrizione rappresenti un grave handicap. Un ulteriore problema insorge qualora si intenda modellare il comportamento plastico dei materiali: sebbene si possa permettere ai *bond* di deformarsi in modo permanente, ciò implicherebbe la violazione del principio dell'incompressibilità plastica dei materiali.

Per superare queste limitazioni Silling [65] ha proposto la formulazione di stato per la peridinamica (chiamandola *State Based Peridynamics*). Attraverso l'introduzione del concetto di stato, le interazioni a due a due tra particelle non risultano dipendere esclusivamente dalla deformazione del singolo *bond* in considerazione, ma dal complessivo 'stato di deformazione'.

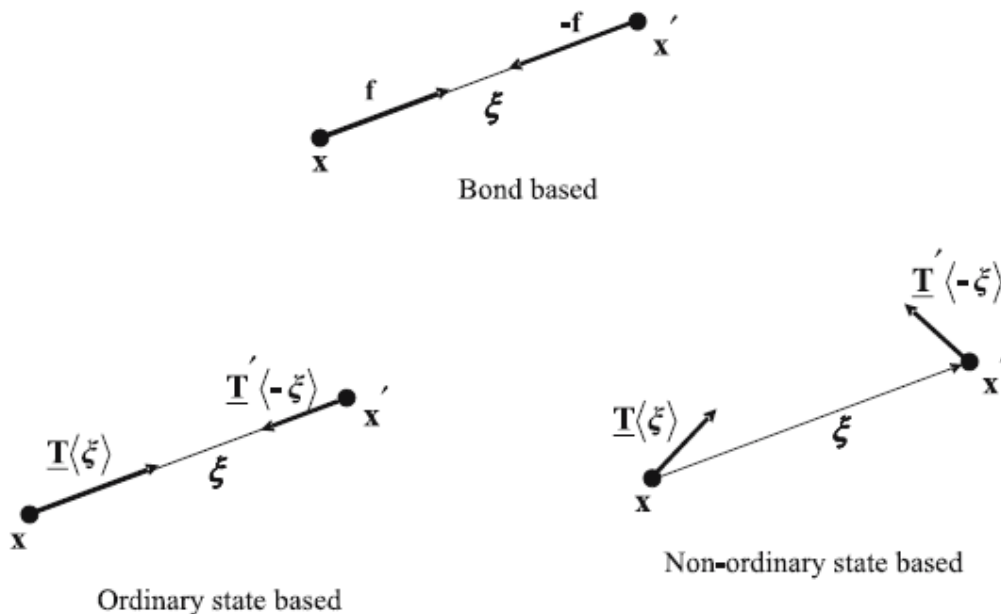


Figura 3.1: *Response function* nell'ordine relative alle formulazioni *bond based*, *ordinary state based* e *non-ordinary state based* della peridinamica

A seconda poi che le azioni che si esplicano tra due punti si assumano o meno dirette lungo la congiungente, si può distinguere tra peridinamica di stato ‘ordinaria’ e ‘non ordinaria’ [70].

### 3.1 Il concetto di stato

Un vettore di stato peridinamico  $\underline{A}$  è un oggetto matematico che associa ad ogni bond  $\xi = x' - x$ , entro un intorno del punto  $x$ , il vettore  $\underline{A}(x' - x)$ ; il *bond* sul quale lo stato opera è scritto tra parentesi angolate per distinguerlo da altre grandezze dalle quali lo stato potrebbe dipendere. Uno stato può essere pensato come una generalizzazione di un tensore del secondo ordine in quanto mappa vettori in altri vettori senza essere necessariamente lineare, ed ammettendo anche eventuali discontinuità.

Un importante vettore di stato peridinamico è lo stato di deformazione  $\underline{Y}$  che, agendo sul *bond*  $x' - x$ , restituisce come immagine la sua deformazione:

$$\underline{Y}(x' - x) = y(x') - y(x) = (u' + x') - (u - x) = \eta + \xi$$

In modo simile si può definire lo stato di forza  $\underline{T}(x)$  che, applicato al bond  $x' - x$ , fornisce la forza che  $x'$  esercita sul punto  $x$ :

$$\underline{T}(x)(x' - x) = f$$

Lo stato di forza dipende dallo stato di deformazione, ed è in questa dipendenza che sono contenute le informazioni costitutive del materiale.

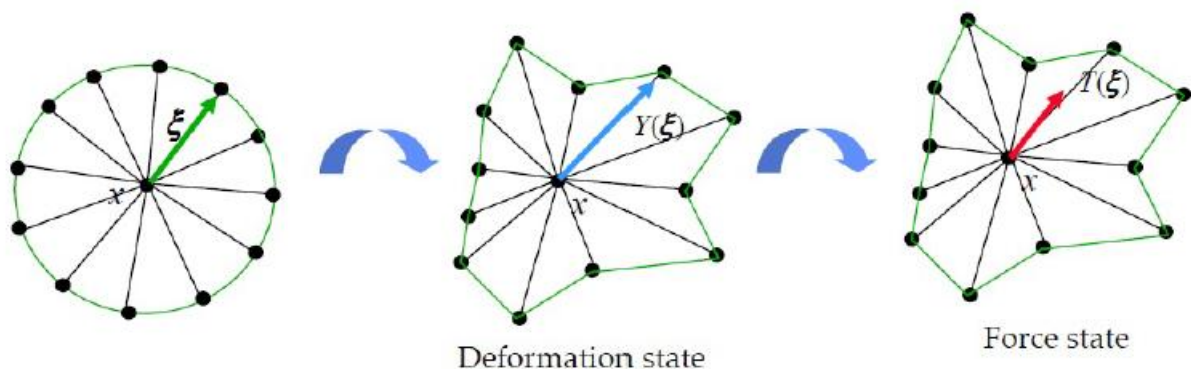


Figura 3.2: Il concetto di stato

### 3.2 Equazioni della peridynamica di stato

L'equazione del moto che governa la peridynamica di stato è la seguente:

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_H (\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t)\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle - \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}', t)\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle) dH + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$$

Questa è valida anche per problemi non lineari, e anche qui, a causa della natura non locale della peridynamica, non è possibile applicare come condizioni al contorno forze puntuali o forze distribuite per unità di area o di lunghezza: occorre imporle in termini di forze di volume, spostamenti, velocità o accelerazioni.

Si dimostra che l'equazione del moto soddisfa automaticamente il principio di azione e reazione senza dover imporre vincoli sullo stato di forza (nella teoria *bond based* l'uguaglianza  $\mathbf{f}(-\boldsymbol{\eta}, -\boldsymbol{\xi}) = -\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$  doveva essere verificata), mentre il bilancio del momento angolare si esprime attraverso la relazione:

$$\int_V (\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}, t)\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle \times \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t)\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle) dV' = \mathbf{0}$$

Quest'ultima è sicuramente soddisfatta se  $\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t)\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle$  e  $\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}', t)\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle$  sono diretti lungo la direzione della congiungente dei punti materiali nella loro configurazione deformata: si parla in questo caso di peridynamica di stato ordinaria. Il fatto che i due vettori siano in generale diversi in modulo rende possibile disaccoppiare le componenti deviatorica e volumetrica delle deformazioni: di conseguenza anche il coefficiente di Poisson può essere impostato a discrezione e quindi l'incompressibilità in campo plastico non risulta più un problema.

Nel caso in cui  $\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t)\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle = -\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}', t)\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle$  il numero di costanti costitutive indipendenti per un materiale isotropo viene ridotto a uno, e si torna alla teoria *bond based*.

Le espressioni per  $\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t)\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle$  e  $\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}', t)\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle$  nella formulazione ordinaria si possono ricavare anche in questo caso a partire dalle energie specifiche di deformazione dovute a dilatazione isotropa e taglio puro: il confronto tra queste quantità ricavate tramite peridynamica e teoria classica porge le relazioni cercate. In questa sede si

riportano solo i risultati che si ottengono nel caso di materiali elastici e isotropi; per una trattazione rigorosa si può vedere Oterkus [46].

$$\underline{T}(\mathbf{x}, t)\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{2}A \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{y}}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|}$$

$$\underline{T}(\mathbf{x}', t)\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle = -\frac{1}{2}B \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{y}}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|}$$

in cui:

$$A = \frac{9}{2\pi\delta^4} \left( \kappa - \frac{5\mu}{3} \right) \underline{\omega}\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle \left( \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{y}}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|} \cdot \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \right) (\vartheta - 3\alpha T) +$$

$$+ \frac{30\mu}{\pi\delta^5} \underline{\omega}\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle ( (|\mathbf{y}' - \mathbf{y}| - |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) - \alpha T |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| )$$

$$B = \frac{9}{2\pi\delta^4} \left( \kappa - \frac{5\mu}{3} \right) \underline{\omega}\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle \left( \frac{\mathbf{y} - \mathbf{y}'}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) (\vartheta' - 3\alpha T') +$$

$$+ \frac{30\mu}{\pi\delta^5} \underline{\omega}\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle ( (|\mathbf{y} - \mathbf{y}'| - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) - \alpha T' |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| )$$

$\kappa$  e  $\mu$  sono rispettivamente il modulo di comprimibilità e il modulo di taglio;  $T$  e  $T'$  sono carichi termici;  $\vartheta$  e  $\vartheta'$  rappresentano le dilatazioni volumetriche relative ai punti  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  la cui formula generale è data da:

$$\vartheta = \frac{9}{4\pi\delta^4} \int_H \underline{\omega}\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle ( (|\mathbf{y}' - \mathbf{y}| - |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) - \alpha T |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| ) \left( \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{y}}{|\mathbf{y}' - \mathbf{y}|} \cdot \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \right) dH + 3\alpha T$$

in cui il termine integrale non rappresenta un problema dal punto di vista numerico;  $\underline{\omega}\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle$  è detta funzione di influenza e viene definita come:

$$\underline{\omega}\langle \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle = \underline{\omega}\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle = \frac{\delta}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} = \frac{\delta}{\xi}$$

Si osservi come i termini  $A$  e  $B$  devono essere uguali per avere la formulazione *bond based*, e ciò porta necessariamente ad avere:

$$\kappa = \frac{5\mu}{3} \rightarrow \nu = \frac{1}{4}$$

## 4 Formulazione peridinamica del problema assialsimmetrico

### 4.1 Introduzione

Le basi della peridinamica sono state gettate di recente e la teoria è in rapida evoluzione; non essendo ancora stato affrontato il problema della sua formulazione assialsimmetrica, ci si è posti questo come principale obiettivo del presente lavoro. Prima di inoltrarsi nei dettagli matematici però si ritiene opportuno fornire una *overview* su come venga gestita l'assialsimmetria nella teoria classica del continuo e nell'approccio DEM.

La trattazione classica del problema assialsimmetrico è indispensabile in quanto, come si è visto nei capitoli precedenti, le costanti che caratterizzano i materiali PMB possono essere determinate confrontando le energie di deformazione peridinamiche con quelle previste dalla teoria convenzionale; d'altro canto i metodi DEM, essendo concettualmente simili alla peridinamica e già provvisti di una consolidata formulazione assialsimmetrica, sono stati di grande aiuto per questo lavoro.

### 4.2 Il problema assialsimmetrico nella teoria classica

Iniziamo con la caratterizzazione dei problemi assialsimmetrici attraverso una serie di definizioni:

1. *Definizione di solido di rivoluzione*

Un solido si dice “di rivoluzione” se è ottenuto dalla rotazione di  $360^\circ$  di una figura piana attorno ad un asse che non la attraversa (è ammessa la condizione limite di tangenza). L'asse di rotazione viene assunto coincidente con l' “asse sostegno”  $z$  di un riferimento cilindrico  $r, \vartheta, z$ .

2. *Definizione di “piano diametrale”*

Si definisce “diametrale” qualunque piano che contenga l'asse sostegno  $z$  del riferimento cilindrico  $r, \vartheta, z$ . Ogni piano diametrale è caratterizzato da un valore dell' “angolo di anomalia  $\vartheta$ ” che viene misurato (secondo la regola della mano destra) a partire dal piano diametrale contenente gli assi  $r$  e  $z$ .

3. *Definizione di “sezione diametrale” e di “sezione retta”*

Si definisce “diametrale” (o anche “longitudinale” o “assiale”) una sezione del solido di rivoluzione ottenuta con un qualunque piano diametrale. Si definisce “retta” una sezione del solido di rivoluzione ottenuta con un qualunque piano normale all’asse di rivoluzione. E’ evidente che la sezione diametrale di un solido di rivoluzione rimane invariata qualunque sia il valore dell’angolo di anomalia  $\vartheta$  che individua il piano diametrale utilizzato per eseguire la sezione.

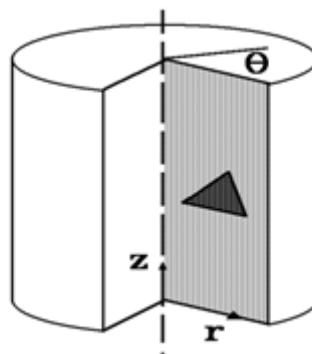
4. *Definizione di “carico assialsimmetrico”*

Detta  $\{\mathbf{q}\} = \{q_r(r, \vartheta, z), q_\vartheta(r, \vartheta, z), q_z(r, \vartheta, z)\}$  la generica forza distribuita (sia essa di superficie o di volume) agente nel generico punto  $P = P(r, \vartheta, z)$  appartenente ad un solido di rivoluzione, tale solido è soggetto a “carico assialsimmetrico” se risulta:  $\{\mathbf{q}\} = \{q_r(r, z), q_z(r, z)\}$ , ovvero se è nulla la componente  $q_\vartheta$  che agisce in direzione normale al piano diametrale passante per  $P$ , e se le altre due componenti di  $\{\mathbf{q}\}$  non dipendono dall’angolo di anomalia  $\vartheta$ .

5. *Definizione di “problema assialsimmetrico”*

Un problema strutturale si definisce “problema assialsimmetrico” se ha per oggetto un solido di rivoluzione sottoposto a carico assialsimmetrico. In tal caso, indicando con il simbolo  $(\cdot)$  una qualunque grandezza che interviene nel problema matematico (sia essa forza, spostamento, tensione, deformazione, ecc.), per via delle definizioni 1. e 4. deve risultare:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial\vartheta} = 0$$



**Figura 4.1: Sezione diametrale di un solido assialsimmetrico**



#### 4.2.1 Componenti di spostamento di un problema assialsimmetrico

Le componenti di spostamento sono elencate nel vettore  $\{\mathbf{u}\}$  secondo l'ordine  $r, \vartheta, z$ :

$$\{\mathbf{u}\} = \{u_r, u_\vartheta, u_z\}$$

La condizione

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial\vartheta} = 0$$

comporta due conseguenze:

- 1)  $u_r = u_r(r, z)$  ;  $u_\vartheta = u_\vartheta(r, z)$  ;  $u_z = u_z(r, z)$
- 2)  $\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\vartheta} = 0$

In merito al punto 2 si osserva che uno spostamento circonferenziale  $u_\vartheta$  indipendente dall'angolo di anomalia  $\vartheta$  può verificarsi o quando il carico esterno ha componente  $q_\vartheta$  non nulla (come ad esempio nella pura torsione), oppure in un moto di rotazione rigida del solido attorno all'asse di rivoluzione. La prima evenienza è da escludere: il problema assialsimmetrico, per definizione, non ammette carichi di torsione. La seconda, seppur possibile, non influenza né lo stato di tensione, né lo stato di deformazione, e quindi si assume che questo spostamento costante sia nullo.

Pertanto si scrive:

$$\{\mathbf{u}\} = \{u_r(r, z), u_z(r, z)\}$$

#### 4.2.2 Tensioni e deformazioni nel problema assialsimmetrico

In un riferimento cilindrico  $(r, \vartheta, z)$  le componenti di tensione e le componenti di deformazione possono essere elencate nei vettori  $\{\boldsymbol{\sigma}\}$  e  $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ :

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_r, \sigma_\vartheta, \sigma_z, \tau_{r\vartheta}, \tau_{\vartheta z}, \tau_{rz}\}$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_r, \varepsilon_\vartheta, \varepsilon_z, \gamma_{r\vartheta}, \gamma_{\vartheta z}, \gamma_{rz}\}$$

Per entrambi questi vettori le prime tre sono componenti normali, mentre le seconde tre sono componenti tangenziali. Nel caso di simmetria cilindrica (assialsimmetria) si

devono annullare le componenti di deformazione  $\gamma_{r\vartheta}, \gamma_{\vartheta z}$  (e quindi, per le equazioni di legame, anche le componenti di tensione  $\tau_{r\vartheta}, \tau_{\vartheta z}$ ) in seguito al ragionamento qui presentato. La componente  $\gamma_{r\vartheta}$  è una deformazione angolare e rappresenta il complemento a  $90^\circ$  dell'angolo compreso, nella configurazione deformata, tra due elementi lineari che prima della deformazione erano orientati rispettivamente in direzione radiale ed in direzione circonferenziale.

Introdotti due piani diametrali a reciproca distanza angolare pari a  $d\vartheta$ , due piani normali all'asse di rivoluzione e distanti  $dz$  uno dall'altro, due superfici cilindriche, una di raggio  $r$  e l'altra di raggio  $r + dr$ , ed utilizzando tutte queste superfici per isolare un volume infinitesimo, si ottiene un esaedro di dimensioni  $dr, (rd\vartheta)$  e  $dz$ .

La deformazione angolare  $\gamma_{r\vartheta}$  può essere osservata in un piano normale all'asse di rivoluzione, ossia considerando l'area  $dA = dr(rd\vartheta) = dr \cdot ds$ .

Nella configurazione indeformata i due elementi lineari  $dr$  e  $ds$  sono tra loro ortogonali. Nella configurazione deformata l'angolo tra essi compreso potrebbe diventare diverso da  $90^\circ$  se fosse possibile:

- uno spostamento radiale variabile con l'angolo  $\vartheta$ ;
- uno spostamento circonferenziale variabile con la coordinata radiale  $r$  attraverso una legge non lineare.

La prima evenienza è esclusa dall'ipotesi di base  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial\vartheta} = 0$ , la seconda è esclusa dall'assenza di una componente  $q_{\vartheta}$  diversa da zero.

Si conclude quindi che deve risultare  $\gamma_{r\vartheta} = 0 = \tau_{r\vartheta}$ ; un ragionamento analogo a questo conduce al risultato:  $\gamma_{\vartheta z} = 0 = \tau_{\vartheta z}$ . In definitiva si ottiene:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_r(r, z), \sigma_{\vartheta}(r, z), \sigma_z(r, z), \tau_{rz}(r, z)\}$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_r(r, z), \varepsilon_{\vartheta}(r, z), \varepsilon_z(r, z), \gamma_{rz}(r, z)\}$$

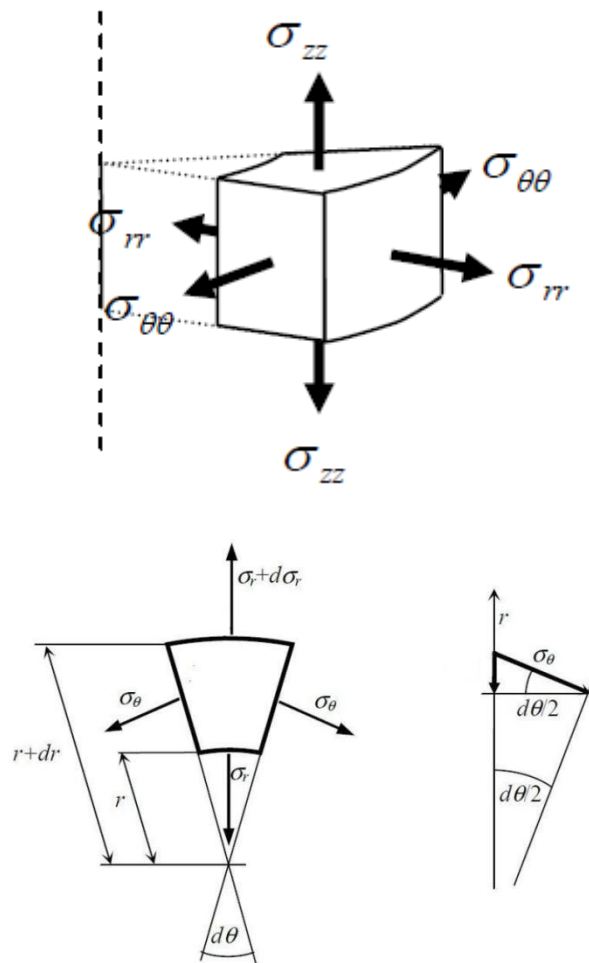


Figura 4.2: Volumetto elementare e stato tensionale sferico in assialsimmetria

### 4.2.3 Equazioni di congruenza in un problema assialsimmetrico

Le equazioni che stabiliscono una relazione tra le componenti di deformazione e le derivate degli spostamenti sono le equazioni di congruenza:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad ; \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u_r}{r} \quad ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad ; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

La seconda di queste equazioni, a differenza delle altre, è una equazione algebrica e va giustificata con la seguente osservazione: la restrizione  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \vartheta} = 0$  esclude la variazione di qualunque grandezza al mutare dell'angolo di anomalia  $\vartheta$  e quindi la deformazione  $\varepsilon_\vartheta$  viene definita non come derivata dello spostamento circonferenziale  $u_\vartheta$  (che, per altro, si assume essere nullo), ma come variazione di lunghezza di una circonferenza rapportata alla lunghezza della circonferenza iniziale.

Ovvero, in simboli:

$$\varepsilon_{\vartheta} = \frac{C_1 - C_0}{C_0}$$

La circonferenza  $C_0$  passa per il punto  $P_0(r, \vartheta, z)$ , giace in un piano normale all'asse  $z$  ed ha il suo centro sull'asse  $z$ ; la circonferenza  $C_1$  è complanare e concentrica rispetto alla precedente, ma passa per il punto  $P_1(r + u_r, \vartheta, z)$ , essendo  $u_r$  lo spostamento radiale che trasporta il punto  $P_0$  nel punto  $P_1$ .

Quindi:

$$\varepsilon_{\vartheta} = \frac{[2\pi(r + u_r) - 2\pi r]}{2\pi r} = \frac{u_r}{r}$$

#### 4.2.4 Legame costitutivo ed energie di deformazione assialsimmetrici

In un riferimento cilindrico le equazioni di legame nel caso assialsimmetrico sono:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\vartheta\vartheta} \end{Bmatrix}; \quad \tau_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{rz}$$

Sfruttando la relazione per l'energia elastica specifica di deformazione:

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$$

Si ricava questa quantità nel caso di dilatazione isotropa e taglio puro:

- 1) Dilatazione isotropa ( $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \varepsilon$ ;  $\gamma_{rz} = 0$ )

$$U_e = \frac{3}{2} \frac{E \varepsilon^2}{(1-2\nu)}$$

- 2) Taglio puro ( $\gamma_{rz} = \gamma$ ;  $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = 0$ )

$$U_s = \frac{E \gamma^2}{4(1+\nu)}$$

Queste quantità si riprenderanno più avanti per determinare il micro modulo  $c$  e il modulo di Poisson per i materiali nella peridinamica assialsimmetrica.

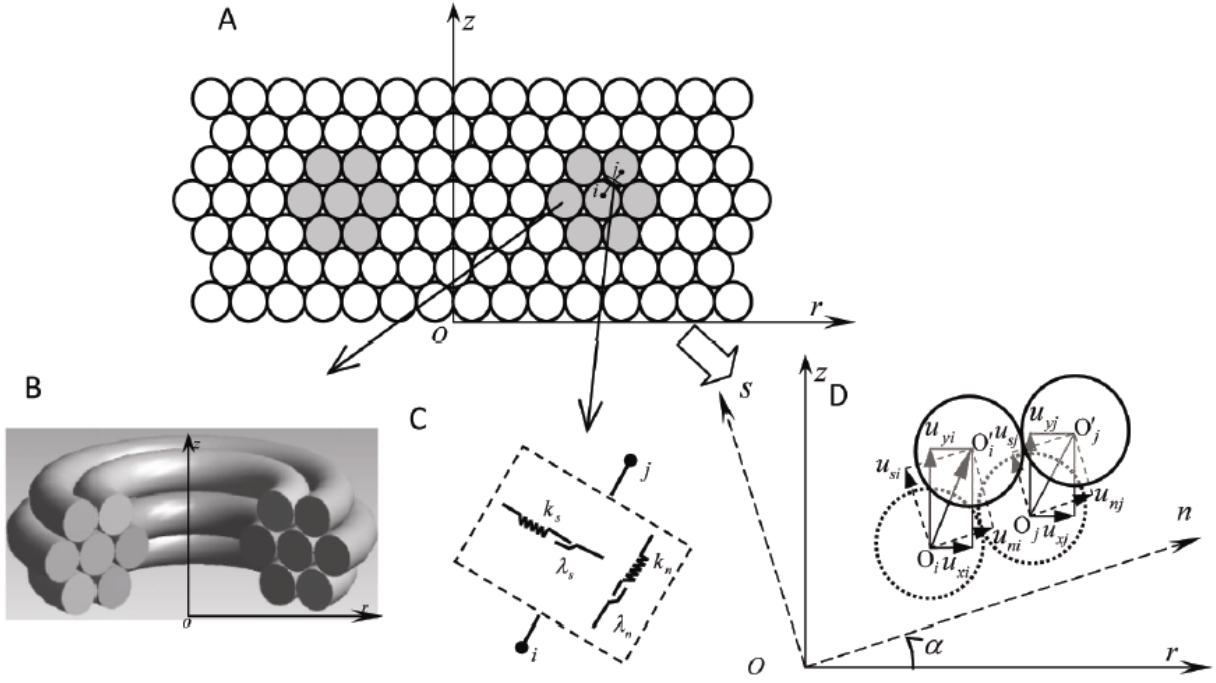
### 4.3 Il problema assialsimmetrico nella modellazione DEM

Il *Discrete Element Method* (o alternativamente *Distinct Element Method*) è una tecnica per la modellazione numerica di problemi strutturali [11], [35], [37], [55], [59]; rientra tra i cosiddetti metodi del discontinuo nei quali un sistema viene rappresentato come un insieme di corpi discreti e distinti che interagiscono tra loro per contatto. Questo metodo è relativamente nuovo se confrontato ad esempio con il FEM: le sue origini risalgono al 1971 quando Goodman e Cundall lo applicarono ad un problema di meccanica delle rocce.

La modellazione DEM schematizza un sistema come un insieme di corpi indipendenti che interagiscono tra loro attraverso i punti di reciproco contatto, i quali sono i responsabili della trasmissione delle forze all'interno del mezzo. L'interazione tra gli elementi è considerata come un processo dinamico che raggiunge l'equilibrio quando le sollecitazioni interne al sistema sono bilanciate. Le forze e gli spostamenti del mezzo si ricavano tracciando i movimenti dei singoli corpi che lo compongono, i quali sono il risultato della propagazione di cause di disturbo che hanno origine ai confini del modello. In particolare si applica la seconda legge di Newton agli elementi e la legge forza-spostamento ai punti di contatto. La prima è utilizzata per determinare il moto delle singole unità causato dalle sollecitazioni agenti su esse; la seconda serve per aggiornare le forze di contatto conseguenti.

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti una delle differenze fondamentali tra il Metodo degli Elementi Discreti e quelli al continuo risiede nel fatto che, mentre in questi ultimi i contatti fra "unità elementari" rimangono invariati indipendentemente dalla risposta del modello, nel DEM sono aggiornati ad ogni iterazione in base alla posizione ed al movimento relativo dei singoli elementi. La definizione della *mesh* e dei modelli costitutivi dei materiali è sostituita dalla determinazione della distribuzione e delle dimensioni degli elementi che compongono il sistema e dalla descrizione del comportamento dei contatti. È inoltre possibile indagare l'evoluzione della risposta del sistema in condizioni di equilibrio stabile, limite ed a rottura, oltre la quale è ammessa la separazione del dominio in blocchi che continuano a risentire delle sollecitazioni agenti. Per questo motivo il DEM è particolarmente indicato per modellare fenomeni di interazione fra oggetti discreti soggetti a grandi deformazioni o a processi di frattura.

Veniamo all'applicazione al problema assialsimmetrico di questo metodo: si farà riferimento al DEM particellare che prevede la schematizzazione degli elementi costituenti il sistema come particelle rigide di forma circolare.



**Figura 4.3: Assialsimmetria nell'approccio DEM**

Si immagini di suddividere la sezione di un solido assialsimmetrico con uno schema ordinato di  $N$  elementi circolari (rappresentativi di altrettanti tori nel solido tridimensionale) che interagiscano tra di loro per contatto; le azioni che si esplicano tra due elementi limitrofi si possono modellare, nello spirito dei metodi DEM, attraverso una coppia di molle: una in grado di reagire a deformazioni di espansione e compressione, l'altra solo a quelle taglianti. L'energia potenziale complessiva del sistema è data dalla relazione:

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{i=1}^N (U_i V_i) + \sum_{i=1}^N (u_{ri} \rho \ddot{u}_{ri} V_i + u_{zi} \rho \ddot{u}_{zi} V_i) - \sum_{i=1}^N (u_{ri} f_{ri} V_i + u_{zi} f_{zi} V_i) + \\ & - \sum_{i=1}^N (u_{ri} T_{ri} S_i + u_{zi} T_{zi} S_i) \end{aligned}$$

dove  $U_i$  è l'energia specifica di deformazione media per l'elemento  $i$ ,  $V_i$  ed  $S_i$  il volume e la superficie esterna di  $i$ ,  $\rho$  la densità del materiale,  $u_{ri}$ ,  $u_{zi}$ ,  $\ddot{u}_{ri}$ ,  $\ddot{u}_{zi}$ , spostamenti e accelerazioni di  $i$  nelle direzioni radiale e assiale.  $f_{ri}$ ,  $f_{zi}$ ,  $T_{ri}$  e  $T_{zi}$  sono le forze di volume e di superficie che agiscono sull'elemento  $i$ -esimo. L'energia  $U_i$  è legata alla deformazione delle 'molle' che connettono  $i$  ai  $p$  elementi che lo circondano e si può esprimere come:

$$U_i = \frac{1}{V_i} \sum_j^p \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} k_{nij} (u_{nj} - u_{ni})^2 + \frac{1}{2} k_{sij} (u_{sj} - u_{si})^2 \right]$$

in cui  $k_{nij}$  e  $k_{sij}$  sono le costanti elastiche delle molle tra  $i$  e  $j$ , mentre i pedici  $n$  e  $s$  indicano rispettivamente la direzione normale e quella tangenziale. Siano poi  $\alpha$  l'angolo tra gli assi  $n$  e  $r$ ,  $l = \cos \alpha$  e  $m = \sin \alpha$ ; si può quindi scrivere che:

$$u_n = u_r l + u_z m \quad ; \quad u_s = u_z l - u_r m$$

e sostituendo quest'ultima nell'equazione dell'energia:

$$U_i = \frac{1}{4V_i} \sum_j^p \left\{ k_{nij} [l_{ij}(u_{rj} - u_{ri}) + m_{ij}(u_{zj} - u_{zi})]^2 + k_{sij} [-m_{ij}(u_{rj} - u_{ri}) + l_{ij}(u_{zj} - u_{zi})]^2 \right\}$$

Nell'ipotesi di piccole deformazioni, lo spostamento relativo tra  $i$  e  $j$  si può scrivere in funzione delle deformazioni ingegneristiche  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_z$  e  $\gamma_{rz}$  come segue:

$$u_{rj} - u_{ri} = (r_j - r_i)\varepsilon_r + \frac{z_j - z_i}{2}\gamma_{rz} = (\delta_i + \delta_j)l\varepsilon_r + \frac{\delta_i + \delta_j}{2}m\gamma_{rz}$$

$$u_{zj} - u_{zi} = (z_j - z_i)\varepsilon_z + \frac{r_j - r_i}{2}\gamma_{rz} = (\delta_i + \delta_j)m\varepsilon_z + \frac{\delta_i + \delta_j}{2}l\gamma_{rz}$$

dove  $r$  e  $z$  sono le coordinate cilindriche del nodo rappresentativo dell'elemento,  $\delta_i$  e  $\delta_j$  sono i raggi delle sezioni circolari di  $i$  e  $j$ .

Se si riscrive nuovamente l'energia  $U_i$  si ricava:

$$U_i = \frac{1}{V_i} \sum_j^p \left\{ k_{nij} \delta_i^2 (l_{ij}^2 \varepsilon_r + m_{ij}^2 \varepsilon_z + l_{ij} m_{ij} \gamma_{rz})^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{4} k_{sij} \delta_i^2 [2l_{ij} m_{ij} (\varepsilon_z - \varepsilon_r) + (l_{ij}^2 - m_{ij}^2) \gamma_{rz}]^2 \right\}$$

Ponendo ora:

$$A = \sum_j k_{nij} \delta_i^2 l_{ij}^4 \quad ; \quad B = \sum_j k_{nij} \delta_i^2 m_{ij}^4 \\ C_1 = \sum_j k_{nij} \delta_i^2 l_{ij}^2 m_{ij}^2 \quad ; \quad C_2 = \sum_j k_{sij} \delta_i^2 l_{ij}^2 m_{ij}^2 \\ D = \sum_j k_{sij} \delta_i^2 (l_{ij}^2 - m_{ij}^2)^2 \quad ; \quad E = \sum_j k_{nij} \delta_i^2 l_{ij}^3 m_{ij} \\ F = \sum_j k_{nij} \delta_i^2 l_{ij} m_{ij}^3 \quad ; \quad G = \sum_j k_{sij} \delta_i^2 l_{ij} m_{ij} (l_{ij}^2 - m_{ij}^2)$$

ed evitando di riportare il pedice  $i$ , l'energia di deformazione diventa:

$$U = \frac{1}{V} \left[ (A + C_2) \varepsilon_r^2 + (B + C_2) \varepsilon_z^2 + (2C_1 - 2C_2) \varepsilon_r \varepsilon_z + \left( C_1 + \frac{D}{4} \right) \gamma_{rz}^2 \right. \\ \left. + (2E - G) \varepsilon_r \gamma_{rz} + (2F + G) \varepsilon_z \gamma_{rz} \right]$$

Nella teoria del continuo, per un materiale isotropo, l'analoga quantità è data da:

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^t \boldsymbol{\varepsilon}$$

ed essendo il legame costitutivo il seguente:

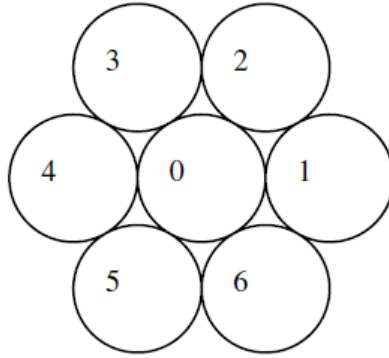
$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad ; \quad \tau_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{rz}$$



si ha:

$$U = \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( (1-\nu)\varepsilon_r^2 + (1-\nu)\varepsilon_z^2 + 2\nu\varepsilon_r\varepsilon_z + \frac{(1-2\nu)}{2}\gamma_{rz}^2 \right)$$

Quindi, uguagliando le due relazioni per la  $U$  si possono ricavare le costanti  $k_{nij}$  e  $k_{sij}$ . Si può osservare come la componente dell'energia di deformazione dovuta alle variazioni di lunghezza circonferenziale non venga considerata: il sistema di molle infatti giace e si deforma su un piano diametrale e non ha la possibilità di 'stivare' quest'energia di deformazione. Ipotizzando ora che il reticolo sia esagonale a sette elementi:



**Figura 4.4: Esempio di reticolo esagonale discreto**

se  $k_{n1}$  e  $k_{s1}$  si riferiscono alle interazioni tra 0-4 e 0-1,  $k_{n2}$  e  $k_{s2}$  a quelle tra 0-5 e 0-2, e  $k_{n3}$  e  $k_{s3}$  alle restanti due (0-3 e 0-6), si ricavano:

$$A = \delta^2 \left( 2k_{n1} + \frac{1}{8}k_{n2} + \frac{1}{8}k_{n3} \right) ; \quad B = \delta^2 \left( \frac{9}{8}k_{n2} + \frac{9}{8}k_{n3} \right)$$

$$C_1 = \delta^2 \left( \frac{3}{8}k_{n2} + \frac{3}{8}k_{n3} \right) ; \quad C_2 = \delta^2 \left( \frac{3}{8}k_{s2} + \frac{3}{8}k_{s3} \right)$$

$$D = \delta^2 \left( 2k_{s1} + \frac{1}{2}k_{s2} + \frac{1}{2}k_{s3} \right) ; \quad E = \delta^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{8}k_{n2} - \frac{\sqrt{3}}{8}k_{n3} \right)$$

$$F = \delta^2 \left( \frac{3\sqrt{3}}{8}k_{n2} - \frac{3\sqrt{3}}{8}k_{n3} \right) ; \quad G = \delta^2 \left( -\frac{3\sqrt{3}}{4}k_{s2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}k_{s3} \right)$$

Il sistema da risolvere è ora il seguente:

$$2A + 2C_2 = \frac{VE(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 2B + 2C_2$$

$$2C_1 - 2C_2 = \frac{VE\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$2C_1 + \frac{D}{2} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$2E - G = 2F + G = 0$$

da cui si ottiene:

$$k_{n1} = k_{n2} = k_{n3} = \frac{VE}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{1}{6\delta^2}$$

$$k_{s1} = k_{s2} = k_{s3} = \frac{VE(1-4\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{1}{6\delta^2}$$

Si può notare come l'isotropia del materiale, assieme a quella della geometria del reticolo di elementi, garantisca l'uguaglianza delle rigidezze  $k_{ni}$  nelle varie direzioni (lo stesso vale per le  $k_{si}$ ).

Per l'organizzazione del reticolo di particelle considerato, il volume di cui il nodo  $i$  è rappresentativo è il toro la cui sezione è un esagono regolare di apotema pari a  $\delta$ :

$$V = 2\sqrt{3}\delta^2 \cdot 2\pi r$$

per cui:

$$k_n = \frac{\sqrt{3}E \cdot 2\pi r}{3(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$k_s = \frac{\sqrt{3}E(1-4\nu) \cdot 2\pi r}{3(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Entrambe queste due grandezze dipendono dalla distanza  $r$  dell'elemento in esame dall'asse di simmetria.

## 4.4 Derivazione delle costanti peridinamiche per il problema assialsimmetrico

Verranno qui ricavate le costanti che caratterizzano i materiali PMB (ovvero il micromodulo  $c$ , il modulo di Poisson e la dilatazione limite  $s_0$ ) nella formulazione assialsimmetrica proposta per la peridinamica. Nel caso di  $c$  l'idea è quella di sfruttare l'approccio energetico: si inizierà con la determinazione delle equazioni per le deformazioni dei legami dovute a dilatazione isotropa e taglio puro; in seguito si sfrutteranno queste relazioni per l'integrazione sul volume del micropotenziale che fornirà l'energia di deformazione specifica nei due casi: uguagliando queste energie alle analoghe quantità per l'assialsimmetria convenzionale si potranno determinare la  $c$  e il modulo di Poisson caratteristici. Va sottolineato che questo approccio energetico è concettualmente simile a quello appena sviluppato per il DEM, ma l'importante differenza sta nel fatto che in peridinamica si ha a che fare con integrali volumetrici (per l'ipotesi del continuo), nel DEM con sommatorie (elementi discreti). Per quanto riguarda  $s_0$  si ricorrerà ancora alla relazione con il tasso di rilascio dell'energia di deformazione  $G_0$ , che è una grandezza misurabile.

### 4.4.1 Bond stretch

Nello spirito dell'assialsimmetria si consideri di schematizzare un solido assialsimmetrico (di estensione idealmente infinita) attraverso una sua sezione meridiana appartenente nel semipiano  $rz$  con  $r > 0$  (si supponga che il sistema di riferimento sia cilindrico:  $rz\vartheta$ ). Dati due punti le cui sfere di influenza non siano intersecate dall'asse di rivoluzione, la deformazione del segmento che li congiunge in seguito a dilatazione sferica e taglio puro si possono calcolare come segue.

#### - Dilatazione omogenea

Una dilatazione isotropa, in coordinate cilindriche, è definita da:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \varepsilon$$

con

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} ; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Sfruttando la notazione peridynamica si può scrivere per le due particelle  $\mathbf{x}(r, z)$  e  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}$ :

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{y}' - \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \varepsilon(r + \xi \cos \varphi) - \varepsilon r \\ \varepsilon \xi \sin \varphi \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\eta} = \varepsilon \boldsymbol{\xi}$$

$$\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi} = (1 + \varepsilon)\boldsymbol{\xi} ; \quad s = \frac{|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}| - |\boldsymbol{\xi}|}{|\boldsymbol{\xi}|} = \varepsilon$$

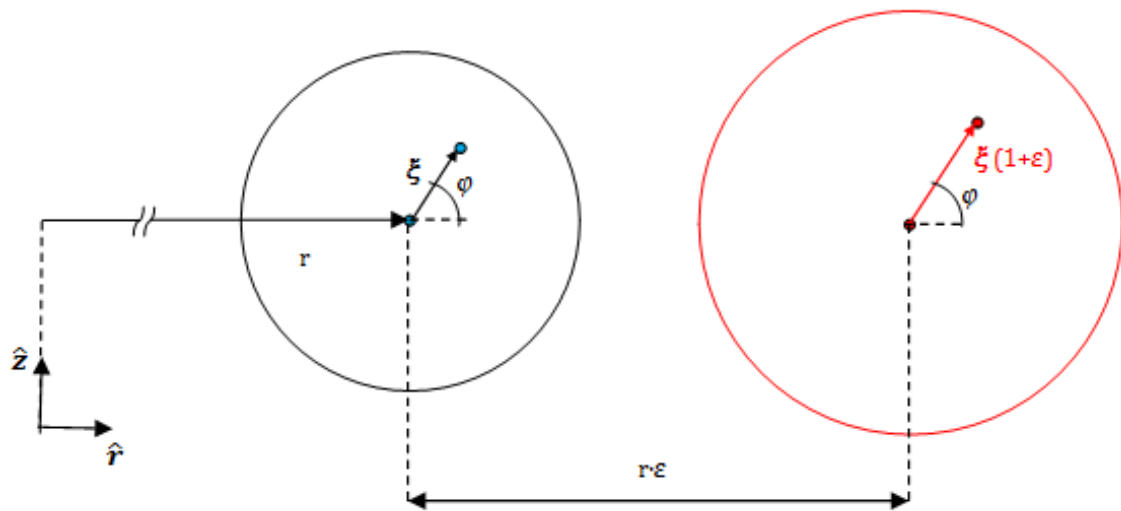


Figura 4.5: Espansione isotropa in un riferimento assialsimmetrico

- Taglio puro

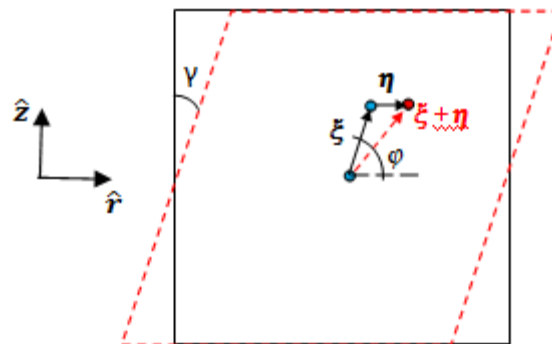


Figura 4.6: Taglio puro in un riferimento assialsimmetrico

In questo caso si ha:

$$\gamma_{rz} = \gamma_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = \gamma$$

per cui:

$$\boldsymbol{\eta} = \gamma \xi_y \hat{\mathbf{r}}$$

$$\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta} = \begin{Bmatrix} \xi \cos \varphi + \gamma \xi \sin \varphi \\ \xi \sin \varphi \end{Bmatrix} \rightarrow |\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}| = \xi \sqrt{1 + \gamma^2 (\sin \varphi)^2 + \gamma \sin 2\varphi}$$

Per piccoli scorrimenti angolari è possibile espandere in serie di Taylor in un intorno di  $\gamma = 0$ :

$$f(\gamma) = \sqrt{1 + \gamma^2 (\sin \varphi)^2 + \gamma \sin 2\varphi} \rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(\gamma) = \frac{1}{2f(\gamma)} (2\gamma (\sin \varphi)^2 + \sin 2\varphi) \rightarrow f'(0) = \frac{\sin 2\varphi}{2}$$

$$f(\gamma) \simeq f(0) + f'(0)(\gamma - 0) = 1 + \frac{\gamma \sin 2\varphi}{2}$$

$$|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}| = \xi \left( 1 + \frac{\gamma \sin 2\varphi}{2} \right)$$

e infine:

$$s = \frac{|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}| - |\boldsymbol{\xi}|}{|\boldsymbol{\xi}|} = \frac{\gamma \sin 2\varphi}{2}$$

#### 4.4.2 Determinazione della costante c e del modulo di Poisson

Date le relazioni per le deformazioni  $s$  dei *bond* è possibile valutare le energie specifiche peridamiche per deformazioni sferiche e deviatoriche.

- Dilatazione isotropa

Il micropotenziale relativo ad una particella è:

$$w_e = \frac{1}{2} c s^2 \xi = \frac{1}{2} c \varepsilon^2 \xi$$

Integrando quest'ultimo su tutto l'orizzonte della particella si ottiene l'energia specifica:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_H w(\boldsymbol{\eta}, \xi) dV$$

Chiamando  $r$  la coordinata radiale della particella in esame e  $\delta$  il suo orizzonte, il volume su cui effettuare l'integrazione è dato dal toro di raggio  $r$  avente sezione circolare di raggio  $\delta$ ; per cui:

$$dV = (r + \xi \cos \varphi) d\vartheta d\xi d\varphi d\xi$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} c \varepsilon^2 \xi \right) (r + \xi \cos \varphi) d\vartheta d\xi d\varphi d\xi = \frac{\pi^2 c \delta^3 r \varepsilon^2}{3}$$

- Taglio puro

Si può procedere in modo simile per deformazioni taglienti:

$$w_s = \frac{1}{2} c s^2 \xi = \frac{1}{2} c \left( \frac{\gamma \sin 2\varphi}{2} \right)^2 \xi$$

$$W_s = \frac{1}{2} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} c \left( \frac{\gamma \sin 2\varphi}{2} \right)^2 \xi \right) (r + \xi \cos \varphi) d\vartheta d\xi d\varphi d\xi = \frac{\pi^2 c \delta^3 r \gamma^2}{24}$$

Uguagliando ora le  $W$  ottenute alle energie specifiche previste dalla formulazione assialsimmetrica della teoria classica si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\pi^2 c \delta^3 r \varepsilon^2}{3} = \frac{E \varepsilon^2}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ \frac{\pi^2 c \delta^3 r \gamma^2}{24} = \frac{E \gamma^2}{4(1 + \nu)} \end{cases}$$

da cui:

$$c = \frac{24}{5} \frac{E}{\pi^2 \delta^3 r}, \quad \nu = \frac{1}{4}$$

Si può osservare come il micromodulo  $c$  dipenda dalla coordinata radiale dei punti materiali. Questo risultato è ragionevole dal momento che, sia in peridamica sia nella

modellazione DEM, nelle schematizzazioni monodimensionali e bidimensionali le formule, che descrivono le azioni reciproche che i punti materiali esercitano, mostrano una qualche dipendenza dal parametro caratteristico della dimensione che non viene rappresentata: l'area della sezione della trave in 1D e lo spessore della piastra nel 2D. Inoltre si è visto come nelle equazioni per le rigidità  $k_s$  e  $k_n$  del DEM assialsimmetrico compaia la distanza delle particelle dall'asse di rivoluzione. Anche il risultato ottenuto per quanto riguarda il modulo di Poisson sembra confortante: il fatto che sia costante è una conseguenza intrinseca alla modellazione peridinamica del continuo, mentre il valore di  $1/4$  è coerente con quanto si ottiene nelle formulazioni 3D e 2D-*plane strain* della peridinamica *bond based*.

#### 4.4.3 Derivazione della dilatazione critica $s_0$

In modo analogo a quanto fatto per la peridinamica tridimensionale, il secondo parametro caratteristico dei materiali PMB verrà valutato confrontando le seguenti grandezze:

- l'energia peridinamica necessaria a rompere i *bond* che attraversano una superficie unitaria di frattura;
- il tasso di rilascio dell'energia di deformazione  $G_0$ .

Imponendone l'uguaglianza, si può scrivere:

$$G_0 = \int_0^\delta \int_V w_0 dV dz$$

con  $w_0 = \frac{1}{2} c s_0^2$  il 'lavoro' necessario a portare i *bond* a rottura. Con riferimento alla figura che segue, l'integrale doppio rappresenta l'energia (per unità di area) richiesta per rompere tutti quei legami che permettono ai punti *A* lungo la linea tratteggiata ortogonale al piano di frattura  $L(z > 0)$  di interagire con le particelle *B* appartenenti alla regione  $z < 0$ .

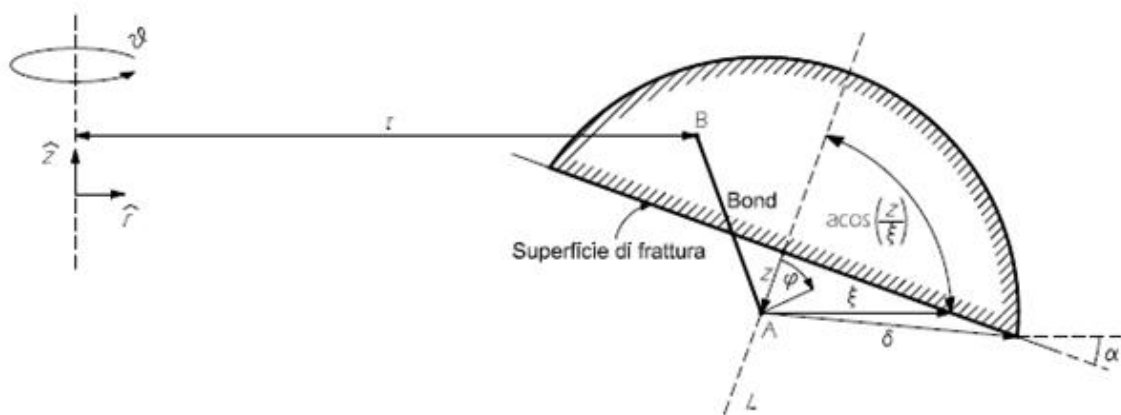


Figura 4.7: Valutazione di  $G_0$  nella peridinamica assialsimmetrica

Quindi:

$$\begin{aligned}
 G_0 &= \int_0^\delta \int_z^\delta \int_{-\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)}^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} \int_0^{2\pi} \left( c s_0^2 \frac{\xi^2}{2} \right) r d\vartheta d\varphi d\xi dz \\
 &= \pi s_0^2 \int_0^\delta \int_z^\delta \int_{-\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)}^{\cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right)} \frac{24E}{5\pi^2 \delta^3} \xi^2 d\varphi d\xi dz \\
 &= 2 \frac{24E}{5\pi \delta^3} s_0^2 \int_0^\delta \int_z^\delta \xi^2 \cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right) d\xi dz
 \end{aligned}$$

$$\int_z^\delta \xi^2 \cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right) d\xi =$$

$$= \left[ \frac{1}{3} \xi^3 \cos^{-1}\left(\frac{z}{\xi}\right) - \frac{1}{6} z \left( \xi^2 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\xi^2}} + z^2 \ln \left( \xi \left( \sqrt{1 - \frac{z^2}{\xi^2}} + 1 \right) \right) \right) \right]_z^\delta$$

$$= \frac{1}{3} \delta^3 \cos^{-1}\left(\frac{z}{\delta}\right) - \frac{1}{6} z \left( \delta^2 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + z^2 \ln \left( \delta \left( \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + 1 \right) \right) - z^3 \ln(z) \right)$$

$$= C$$



$$\begin{aligned}
\int_0^\delta C dz &= \left[ \frac{1}{96} \left( 4z^4 \ln(z) - 4z^2 \delta^2 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} - 24\delta^4 \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} - 4\delta^4 \ln \left( \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + 1 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 4\delta^4 \ln \left( \delta \left( \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + 1 \right) \right) + -4z^4 \ln \left( \delta \left( \sqrt{1 - \frac{z^2}{\delta^2}} + 1 \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 32z\delta^3 \cos^{-1} \left( \frac{z}{\delta} \right) - \delta^4 \right) \right]_0^\delta \\
&= \frac{1}{4} \delta^4
\end{aligned}$$

Riassumendo:

$$G_0 = \frac{48E}{5\pi\delta^3} s_0^2 \frac{\delta^4}{4} = \frac{12}{5} \frac{E\delta}{\pi} s_0^2$$

e quindi:

$$s_0 = \sqrt{\frac{5\pi G_0}{12E\delta}}$$

Si ricorda che nel 3D si aveva:

$$G_0 = \frac{\pi c_{3D} s_{0,3D}^2 \delta^5}{10} = \frac{6}{5} E\delta s_{0,3D}^2$$

Quindi, volendo confrontare le relazioni per  $s_0$  fornite dalla formulazione assialsimmetrica con quelle derivate dalla teoria tridimensionale si ha:

$$s_{0,axisym} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} s_{0,3D}$$



## 5 Implementazione numerica

Le equazioni del moto su cui si basa la teoria peridinamica sono equazioni integro-differenziali particolarmente complesse da affrontare analiticamente, per cui anche per risolvere problemi relativamente semplici si rende necessario un approccio numerico.

In questo capitolo verranno descritte le linee guida che si sono seguite per sviluppare i codici di calcolo che hanno permesso di applicare la peridinamica assialsimmetrica a problemi riguardanti impatti di proiettili rigidi su corpi cilindrici fragili: iniziando dalla discretizzazione spazio-temporale delle equazioni del moto, si parlerà poi degli algoritmi utilizzati per l'integrazione temporale, per la modellazione delle forze di contatto e delle condizioni al contorno; si vedrà infine come siano stati schematizzati i proiettili e lo pseudocodice rappresentativo della logica di implementazione. L'ambiente in cui si è deciso di lavorare è quello di *MATLAB* per il linguaggio relativamente semplice e soprattutto per il fatto che si aveva a disposizione un codice, scritto in questo ambiente, che implementa la peridinamica *bond based* bidimensionale il quale è stato opportunamente esteso e modificato.

### 5.1 Discretizzazione spazio-temporale

Si riprenda in esame l'equazione del moto della peridinamica:

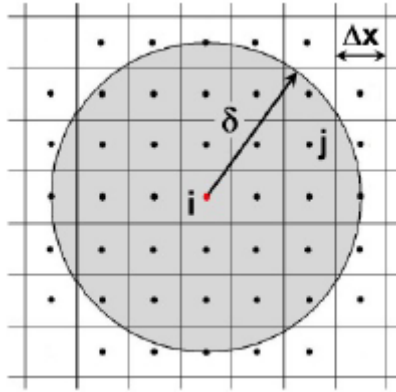
$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{H_x} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) dV_{x'} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$$

La risoluzione numerica di questa equazione richiede di discretizzare sia lo spazio che il tempo. A livello spaziale la struttura viene schematizzata suddividendola in una griglia di volumetti elementari di geometria semplice: nello spirito dell'assialsimmetria un solido di rivoluzione può essere rappresentato attraverso una sua semisezione meridiana trasformando il problema da tridimensionale a piano; la griglia si assume regolare con particelle quadrate di lato  $\Delta x$  rappresentative di volumi toroidali. Spostamenti, velocità e accelerazioni relative alla particella  $i$ -esima vengono calcolati in corrispondenza di un nodo che rappresenta l'intero volumetto elementare e che interagisce con i nodi circostanti tramite una serie di *bond* di rigidezza peridinamica  $c$ .

Per ogni particella  $i$  si indica con il simbolo  $\mathcal{F}_i$  la famiglia di particelle con le quali  $i$  condivide un *bond* nella configurazione di riferimento iniziale:

$$\mathcal{F}_i = \{p, \|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i\| \leq \delta\}$$

$\|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i\|$  rappresenta la distanza tra i nodi  $p$  e  $i$  all'istante iniziale, mentre  $\delta$  è l'orizzonte di  $i$ .



**Figura 5.1: Griglia peridinamica**

L'equazione del moto discretizzata risulta allora:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_i^n = \sum_{p \in \mathcal{F}_i} \mathbf{f}(\mathbf{u}_p^n - \mathbf{u}_i^n, \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i) V_p + \mathbf{b}_i^n$$

dove  $\mathbf{f}$  è la forza per unità di volume al quadrato dovuta alla deformazione del *bond* tra  $p$  e  $i$ ,  $\mathbf{b}_i$  il vettore delle forze di volume agenti su  $i$ , mentre  $n$  è l'istante temporale di integrazione; quindi, ad esempio, si può scrivere per lo spostamento del nodo  $i$  all'istante  $n$  la seguente relazione:

$$\mathbf{u}_i^n = \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t_0 + n\Delta t)$$

Tutti i vettori che compaiono sono caratterizzati da due componenti: radiale e assiale. Con  $\Delta t$  si indica il passo di integrazione temporale: per questa grandezza Yu [73] e Oterkus [46] suggeriscono di scegliere un valore che non superi un determinato  $\Delta t_c$  critico dato dalla formula:

$$\Delta t_c = \sqrt{\frac{2\rho}{\sum_{p \in \mathcal{F}_i} \frac{c}{\|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i\|} V_p}}$$

In pratica si può assumere:

$$\Delta t = v_{safe} \cdot \Delta t_c$$

dove  $v_{safe}$  rappresenta un coefficiente di sicurezza minore dell'unità (in genere  $v_{safe} = 0.8$ ).

## 5.2 Short range forces

La teoria peridinamica prevede che solo le particelle collegate da un *bond* possano interagire tra loro; di conseguenza due particelle prive di questo legame non sono in grado di esplicare nessuna azione reciproca: questo può essere un problema nello studio degli impatti in quanto nulla vieta la compenetrazione di particelle che non siano mutuamente vincolate, e quest'eventualità non è fisicamente accettabile. Per risolvere la questione si introduce il concetto di *short-range forces* [34], [48], [49], [50] ovvero delle forze di contatto: in sostanza alla *pairwise force function* viene aggiunto il termine:

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{y}_p, \mathbf{y}_i) = \min\left\{0, \frac{c_s}{\delta} (\|\mathbf{y}_p - \mathbf{y}_i\| - d_{pi})\right\} \frac{\mathbf{y}_p - \mathbf{y}_i}{\|\mathbf{y}_p - \mathbf{y}_i\|}$$

dove  $d_{pi}$  è la distanza di interazione a corto raggio tra le particelle  $p$  e  $i$ ,  $c_s$  è un multiplo della costante di *bond*  $c$ , mentre si sono indicate con  $\mathbf{y}_p$  e  $\mathbf{y}_i$  le posizioni 'attuali' di due nodi. Si osservi come queste forze siano sempre repulsive e mai attrattive.

Nella pratica si assumono:

$$c_s = 15c$$

$$d_{pi} = \min\{0.9\|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i\|, 1.35(r_p + r_i)\}$$

$r_i$  è detto raggio del nodo  $i$  e viene assunto pari alla metà della lunghezza caratteristica della griglia  $\Delta x$ .

Qualora si considerino queste forze di contatto, risulta conveniente definire, per ogni nodo  $i$ , la sua *short-range family* di particelle:

$$\mathcal{F}_i^s = \{p, \|\mathbf{y}_p - \mathbf{y}_i\| \leq d_{pi}\}$$

Da questa famiglia vanno poi esclusi quei nodi i cui *bond* con la particella  $i$  siano ancora intatti.

### 5.3 Condizioni al contorno

Si è già parlato nel primo capitolo di come le condizioni ai bordi non siano naturalmente insite nella teoria peridinamica essendo questa regolata da equazioni integrali anziché differenziali come la teoria classica. Per quanto riguarda i carichi esterni, questi possono essere applicati esclusivamente attraverso il termine  $\mathbf{b}$  delle equazioni del moto [60] (ovvero in termini di forze per unità di volume); si consideri ad esempio [57] il bordo di lunghezza  $a$  di una piastra di spessore  $t$  che sia caricato da una distribuzione uniforme di tensione  $\sigma_y$ ; siano  $\Delta x$  la lunghezza caratteristica della *mesh* e  $\delta = m\Delta x$  il raggio dell'orizzonte.

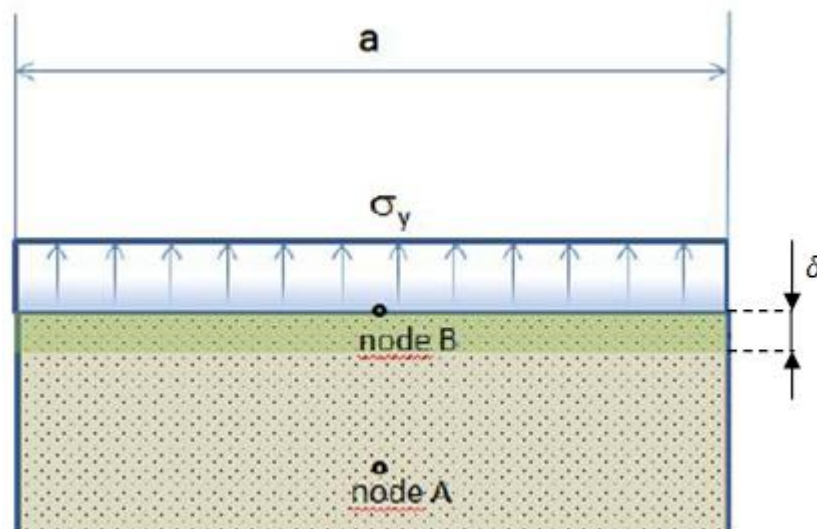


Figura 5.2: Applicazione di un carico distribuito

La forza complessiva  $F$  agente sul bordo della piastra è:

$$F = a \cdot t \cdot \sigma_y$$

Supponendo di distribuire uniformemente questa forza lungo la fascia di spessore  $\delta$ , si ha che su ogni nodo  $i$  appartenente a questa fascia deve agire la forza:

$$F_i = \frac{1}{m} \frac{F}{a/\Delta x + 1}$$

per cui all'equazione peridinamica per il nodo  $i$ -esimo va aggiunto il termine  $b = F_i/V_i$  nella direzione di  $\sigma_y$ . Eventuali vincoli su spostamenti, velocità e accelerazioni possono essere agevolmente applicati ai nodi interessati, in genere sempre entro una fascia di spessore  $\delta$ .

La scelta di applicare il carico (o il vincolo) all'intera fascia larga quanto il raggio di orizzonte (anziché ai soli nodi lungo il bordo della piastra) è dovuta al cosiddetto effetto *softening*. Questo è legato al fatto che le grandezze costitutive dei materiali peridinamici vengono determinate considerando un corpo idealmente infinito e le energie specifiche di deformazione elastica calcolate per sfere di influenza interamente contenute nel volume solido.

Se un nodo si trova in prossimità di una superficie libera (per cui la sua sfera di influenza è parzialmente vuota) la rigidità del materiale risulta localmente inferiore a quella teorica poiché l'integrale che ne fornisce l'energia elastica specifica di deformazione:

$$W = \frac{1}{2} \int_H w(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) dV$$

perde i contributi dovuti alla regione interna all'orizzonte che è priva di punti materiali.

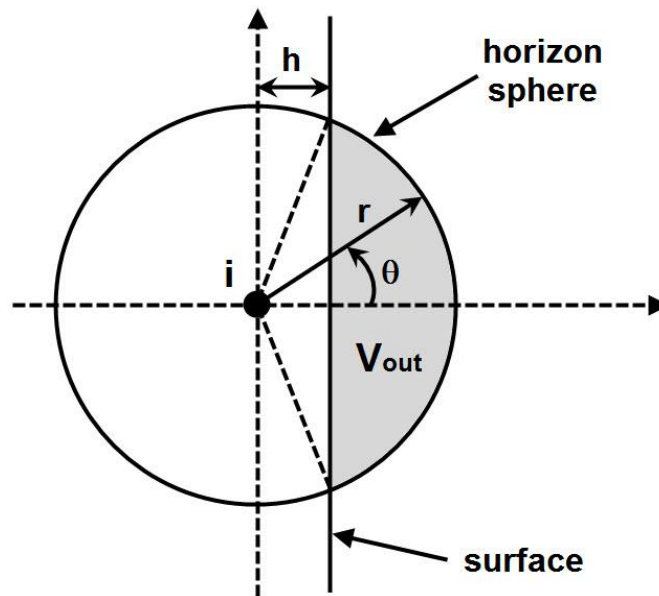
Una conseguenza del *softening* è una maggior tendenza dei bordi (soprattutto se sottoposti a condizioni di vincolo e carico) a deformarsi e a rompersi; una strategia che permette di compensare quest'effetto può essere appunto quella di applicare vincoli e carichi non solo alle particelle che appartengono al bordo del dominio, ma anche a quelle più interne entro una fascia di profondità pari a  $\delta$ . Ha e Bobaru [22-24]

suggeriscono anche di fare in modo che i *bond* appartenenti ai bordi del dominio non si possano rompere facendone tendere il valore critico  $s_0$  ad infinito.

Per risolvere il problema del *softening* si propone anche (Kebing Yu [73]) di introdurre il coefficiente di compensazione  $\beta_s$ .

Sia  $W_{inf}$  la densità (peridinamica) di energia elastica di deformazione per un punto materiale idealmente appartenente ad un corpo infinitamente esteso ed omogeneo;  $W_{bdry}$  sia invece l'analoga quantità calcolata per lo stesso punto nel corpo reale (finito).  $\beta_s$  è definito come il rapporto:

$$\beta_s = \frac{W_{inf}}{W_{bdry}}$$



**Figura 5.3: Sfera d'influenza relativa ad un nodo in prossimità di una superficie libera**

che, per la semplice geometria della figura 5.3, si può valutare analiticamente come segue.

La peridinamica 3D, per quanto esposto nel primo capitolo, prevede:

$$W_{inf} = \frac{\pi c \delta^4 s^2}{4}$$



Il contributo dovuto alla calotta rappresentata in grigio sarebbe:

$$W_{out} = \frac{1}{2} \int_h^\delta \int_0^{\arccos(h/r)} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} c s^2 r \right) r \sin \vartheta \, d\varphi r d\vartheta dr = \frac{c\pi s^2}{2} \left[ \frac{\delta^4}{4} - \frac{h\delta^3}{3} + \frac{h^4}{12} \right]$$

quindi:

$$W_{bdry} = W_{inf} - W_{out} = \frac{c\pi s^2}{2} \left[ \frac{\delta^4}{4} + \frac{h\delta^3}{3} - \frac{h^4}{12} \right]$$

e di conseguenza:

$$\beta_s = \frac{W_{inf}}{W_{bdry}} = \frac{6\delta^4}{3\delta^4 + 4h\delta^3 - h^4}$$

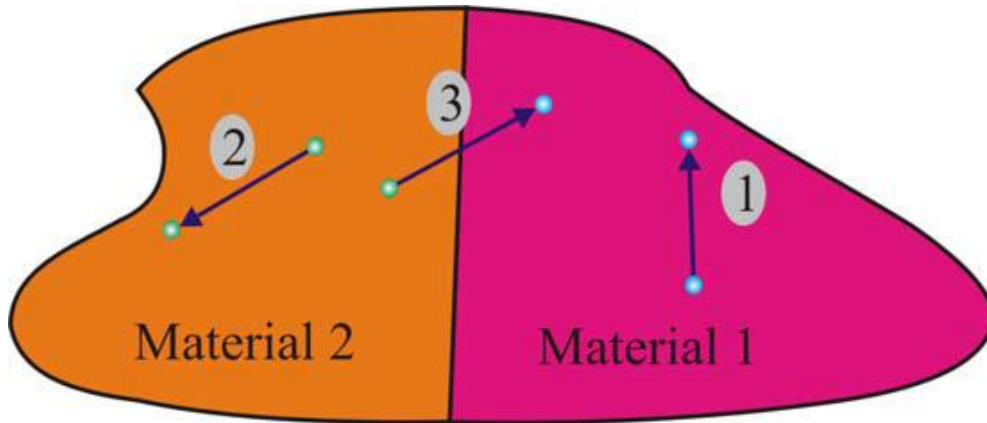
Quest'ultimo in conclusione è un coefficiente moltiplicativo da aggiungere alle equazioni discrete della peridinamica computazionale che permette di minimizzare il *soft boundary effect*.

Nel presente lavoro questo concetto non è stato considerato per l'assialsimmetria, ed è stato lasciato come questione aperta per sviluppi futuri.

Le condizioni di carico prese in esame sono solamente quelle dovute all'impatto di proiettili infinitamente rigidi, mentre, per quanto riguarda i vincoli, va sottolineato che la condizione di assialsimmetria impone ai nodi lungo l'asse di rivoluzione l'impossibilità di traslazioni radiali.

## 5.4 Interfacce tra materiali diversi

La peridinamica è una teoria non locale, e un'importante conseguenza di questo fatto è che i punti materiali interagiscono anche attraverso le interfacce; ad esempio se il dominio che si considera è costituito da due materiali diversi occorre specificare almeno tre tipi di interazione tra particelle: due di queste tipologie di interazione si sviluppano tra punti rappresentativi della stessa regione materiale, la terza riguarda particelle collegate da *bond* che attraversano l'interfaccia.



**Figura 5.4: Interfaccia tra due materiali diversi**

La caratterizzazione della *response function* per i *bond* di tipo 1 e 2 è banale; per quanto riguarda 3, Oterkus [46], in seguito ad un lavoro di sperimentazione numerica, ha concluso che i risultati migliori si ottengono calcolando il micromodulo  $c$  sulla base delle proprietà elastiche del materiale meno rigido tra i due che costituiscono l'interfaccia.

## 5.5 Coefficiente correttivo del volume

Teoricamente tutti i punti materiali che si trovano entro la sfera di influenza di raggio  $\delta$  contribuiscono al termine integrale dell'equazione della peridinamica; l'implementazione finora descritta però considera una cella come completamente interna o esterna all'orizzonte e ciò comporta un'errata valutazione dei contributi volumetrici delle celle che non sono racchiuse interamente all'interno del raggio  $\delta$ .

Questo errore può essere minimizzato introducendo una funzione  $\beta$  di riduzione del volume 'visto' dalla particella  $i$  nel caso in cui la posizione del nodo  $p$  sia tale per cui

$$\delta - r_p \leq \|x_p - x_i\| \leq \delta + r_p.$$

Nei problemi bidimensionali per definire  $\beta$  si sfrutta un'interpolazione lineare: dati i nodi  $i$  e  $p$ , la frazione di volume di  $p$  'visto' da  $i$  è assunta pari a:

- 1 se  $\|x_p - x_i\| \leq \delta - r_p$
- 0.5 se  $\|x_p - x_i\| = \delta$
- 0 se  $\|x_p - x_i\| \geq \delta + r_p$

Un'equazione generica per  $\beta$  è quindi:

$$\beta = a\xi + b$$

dove al solito si è considerata la notazione  $\xi = \|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i\|$ . I coefficienti  $a$  e  $b$  si ricavano utilizzando due delle precedenti tre condizioni (una è ridondante in questo caso): prendendo in esame le prime due ad esempio si può scrivere il sistema:

$$\begin{cases} \beta(\xi = \delta - r_p) = 1 = a(\delta - r_p) + b \\ \beta(\xi = \delta) = 0.5 = a\delta + b \end{cases}$$

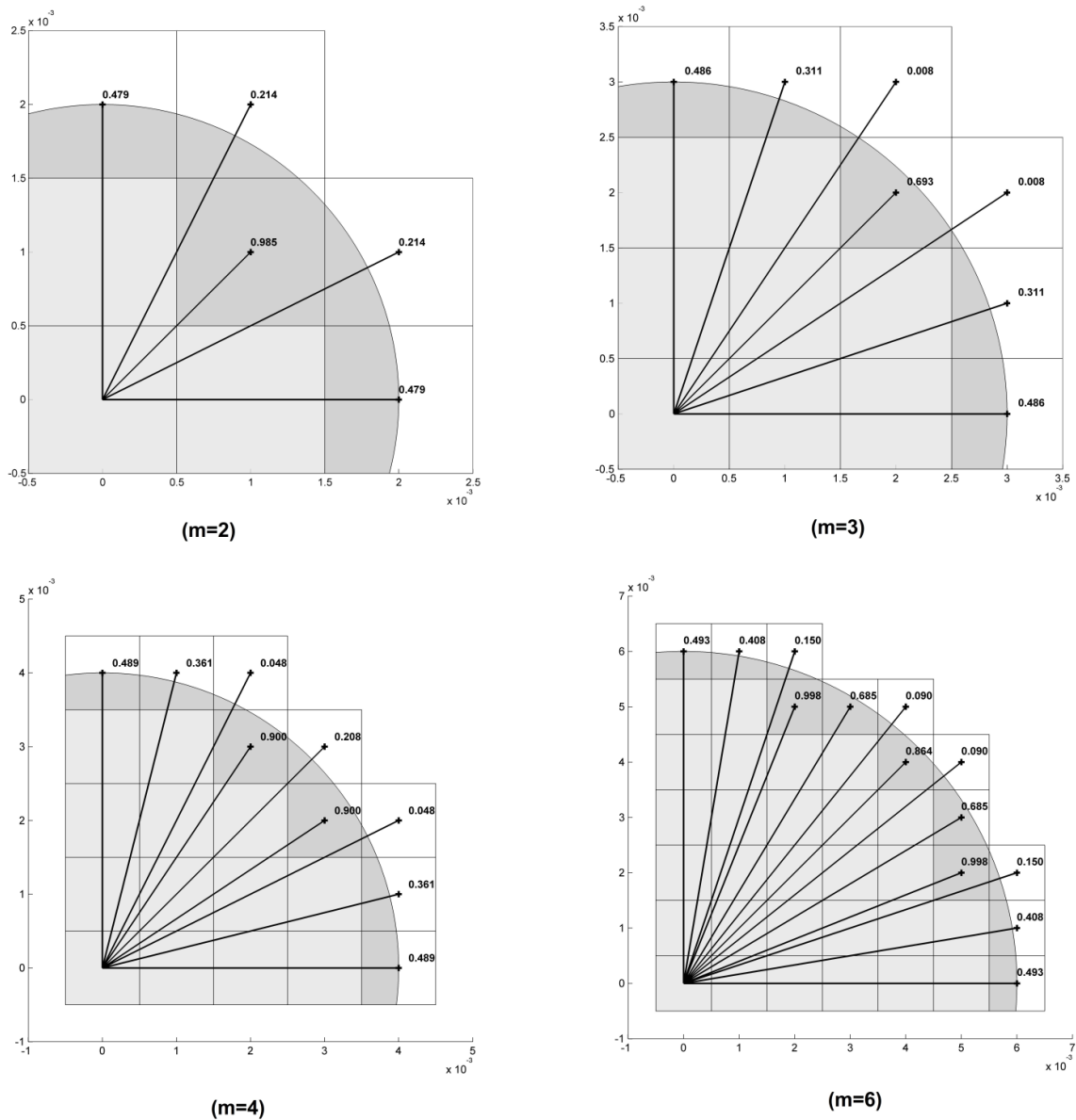
che fornisce:

$$a = -\frac{1}{2r_p} = -\frac{1}{\Delta x}$$

$$b = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{\Delta x}$$

e di conseguenza:

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi \leq \delta - 0.5\Delta x \\ \frac{\delta + 0.5\Delta x - \xi}{\Delta x} & \text{se } \delta - 0.5\Delta x < \xi \leq \delta + 0.5\Delta x \\ 0 & \text{se } \xi > \delta + 0.5\Delta x \end{cases}$$

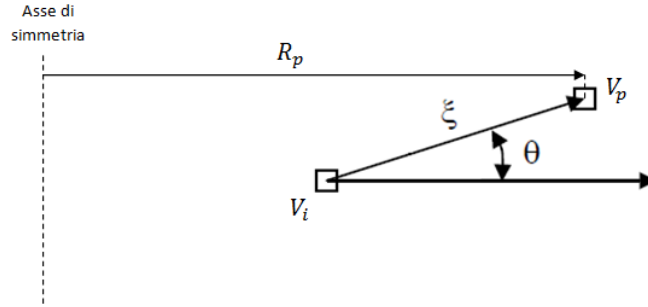


**Figura 5.5: Coefficienti correttivi effettivi per problemi 2D per diversi valori di  $m$**

Nel caso in cui ogni cella rappresenti un volume toroidale, ovvero per il problema assialsimmetrico, si propone un ragionamento analogo per la determinazione di  $\beta$ . Mantenendo l'ipotesi che  $\beta$  sia unitario per  $\xi \leq \delta - 0.5\Delta x$  e nullo per  $\xi \geq \delta + 0.5\Delta x$ , la terza condizione che si pone è il suo valore per  $\xi = \delta$ . Nel presente lavoro si è scelto di utilizzare la relazione:

$$\beta(\xi = \delta) = \frac{R_p - \frac{\Delta x}{4} \cos \vartheta}{2R_p} = \gamma$$

che permette di considerare il fatto che, a parità di frazione della sezione di  $p$  interna all'orizzonte di  $i$ , il rapporto tra il volume di  $p$  visto da  $i$  e quello totale diminuisce con la distanza di  $p$  dall'asse di rivoluzione.



**Figura 5.6: Parametri di riferimento per la formula del coefficiente di correzione del volume per il problema assialsimmetrico**

Di conseguenza la funzione interpolante per  $\beta$  non può essere lineare, ma per lo meno quadratica:

$$\beta = a\xi^2 + b\xi + c$$

in cui i tre coefficienti si possono determinare risolvendo il sistema:

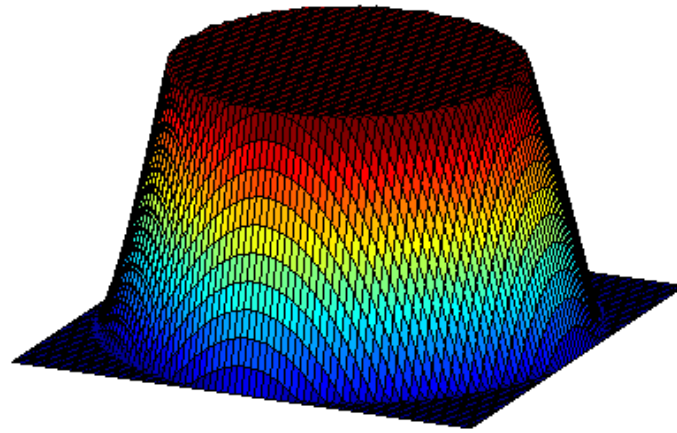
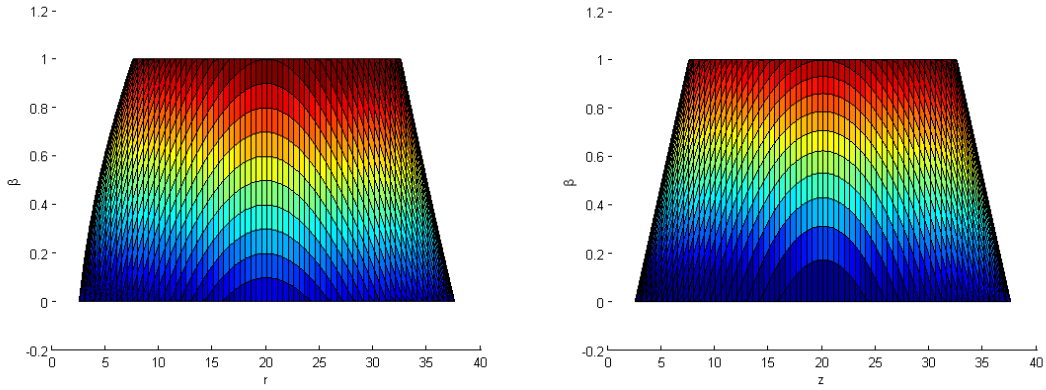
$$\begin{cases} \beta(\xi = \delta - r_p) = 1 = a(\delta - r_p)^2 + b(\delta - r_p) + c \\ \beta(\xi = \delta) = \gamma = a\delta^2 + b\delta + c \\ \beta(\xi = \delta + r_p) = a(\delta + r_p)^2 + b(\delta + r_p) + c \end{cases}$$

che restituisce:

$$a = \frac{2 - 4\gamma}{\Delta x^2}$$

$$b = \frac{8\gamma\delta - (4\delta + \Delta x)}{\Delta x^2}$$

$$c = \frac{(2\delta^2 + \delta\Delta x) - \gamma(4\delta^2 - \Delta x^2)}{\Delta x^2}$$



**Figura 5.7: Esempio dell'andamento del coefficiento correttivo del volume per problemi assialsimmetrici:  $\Delta x = 5$ ;  $\delta = 3\Delta x$ ; la generica particella si trova alla distanza  $r = 20$  dall'asse di simmetria**

La figura mostra i plot di una funzione  $\beta$  per un problema assialsimmetrico. Il fatto che il grafico risulti molto simile ad un tronco di cono sta ad indicare che le differenze rispetto all'interpolazione lineare non sono particolarmente significative.

## 5.6 Algoritmo delle velocità di Verlet

In seguito a quanto visto finora si possono riscrivere le equazioni del moto in forma discreta come segue [38], [39]:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_i^n = \sum_{p \in \mathcal{F}_i} c_{ip} \left( \frac{\|\mathbf{y}_p - \mathbf{y}_i\| - \|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i\|}{\|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i\|} \right) \mu \beta \beta_s V_p \left( \frac{\mathbf{y}_p - \mathbf{y}_i}{\|\mathbf{y}_p - \mathbf{y}_i\|} \right) + \sum_{p \in \mathcal{F}_i^s} \min \left\{ 0, \frac{c_s}{\delta} (\|\mathbf{y}_p - \mathbf{y}_i\| - d_{pi}) \right\} V_p \left( \frac{\mathbf{y}_p - \mathbf{y}_i}{\|\mathbf{y}_p - \mathbf{y}_i\|} \right) + \mathbf{b}_i^n$$

In questo lavoro verranno sempre considerati  $\beta_s = 1$  e  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

Per l'integrazione temporale di queste equazioni si è sfruttato l'algoritmo esplicito delle velocità di Verlet [49], [50] che si articola in tre *step*:

- 1) Valutazione delle velocità nodali all'istante  $t = (n + 1/2)\Delta t$

$$\dot{\mathbf{u}}_i^{n+1/2} = \dot{\mathbf{u}}_i^n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_i^n$$

- 2) Determinazione degli spostamenti nodali all'istante  $t = (n + 1)\Delta t$

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_i^{n+1/2}$$

- 3) Aggiornamento delle velocità dei nodi

$$\dot{\mathbf{u}}_i^{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_i^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_i^{n+1}$$

## 5.7 Tipologie di convergenza

Oltre alla convergenza in termini di discretizzazione temporale, la non località della peridinamica impone di considerare per le analisi numeriche tre differenti tipologie di convergenza legate alla discretizzazione spaziale del dominio in esame attraverso il raggio  $\delta$  della sfera di influenza e il rapporto  $m$  tra  $\delta$  e la dimensione delle celle:  $m = \delta/\Delta x$ .

- $\delta$ -convergenza:  $\delta \rightarrow 0$  con  $m$  fissato o al limite leggermente crescente al diminuire di  $\delta$ ; in questo caso la soluzione che si ottiene tende a quella fornita dalla teoria classica, e questa tendenza è tanto più apprezzabile quanto maggiore è  $m$ ;
- $m$ -convergenza:  $\delta$  rimane fissato mentre  $m \rightarrow \infty$ ; in questo caso la soluzione numerica converge all'esatta soluzione delle equazioni del moto che governano la peridinamica per il  $\delta$  considerato;
- $(\delta m)$ -convergenza: al decrescere di  $\delta$  ( $\delta \rightarrow 0$ )  $m$  aumenta; la soluzione numerica tende a quella prevista dalla teoria classica che coincide con la soluzione esatta cui convergono le equazioni del moto che regolano la peridinamica al tendere di  $\delta$  a zero.

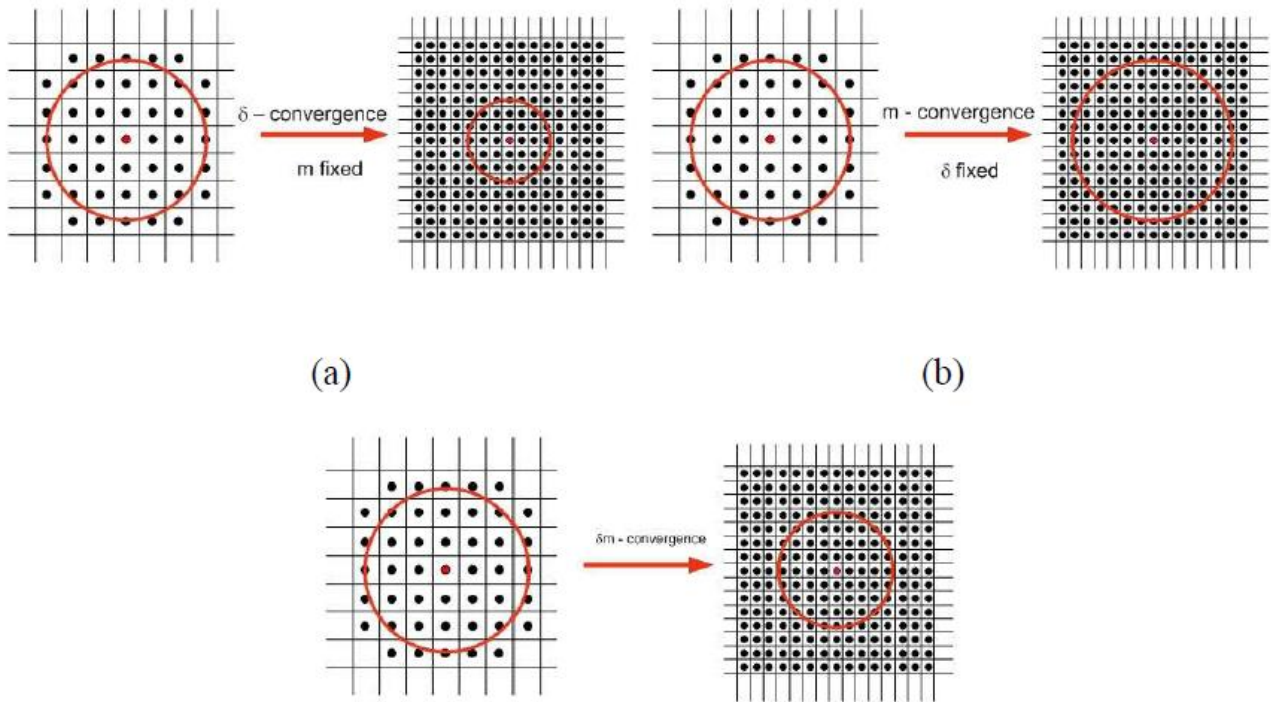


Figura 5.8: Tipologie di convergenza in peridinamica

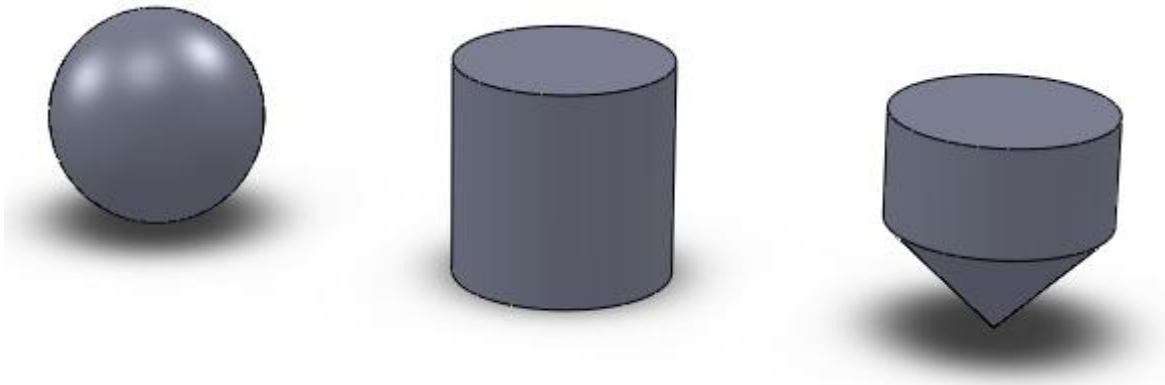
Questa descrizione sulle tipologie di convergenza nella peridinamica computazionale è stata esposta per completezza: negli esempi numerici che seguiranno non si è stati in grado di svolgere approfonditi studi sulla convergenza a causa delle elevate risorse computazionali che questi richiedono.

## 5.8 Proiettili rigidi

Tra gli obiettivi di questo lavoro, una volta impostata la formulazione assialsimmetrica della peridinamica, ci si è posti quello di studiare numericamente il problema degli impatti a simmetria cilindrica su solidi di rivoluzione in materiali fragili. Per la modellazione dei proiettili si è deciso di considerare solo impattanti infinitamente rigidi in modo tale da non doverli discretizzare ed evitando così di gravare sull'onerosità computazionale delle simulazioni (già difficile da sostenere). Prendendo spunto dai proiettili rigidi implementati nel *software* di dinamica molecolare LAMMPS [34], [49], [50] si sono modellati impattanti di tre geometrie diverse:

- Proiettile sferico
- Proiettile cilindrico
- Proiettile conico





**Figura 5.9: Geometrie dei proiettili presi in esame**

Le tre tipologie di proiettile agiscono secondo lo stesso principio: imprimono ai nodi un'accelerazione repulsiva proporzionale alla profondità di penetrazione elevata al quadrato; l'azione che il proiettile sferico esercita sul nodo  $i$ , ad esempio, si esprime come:

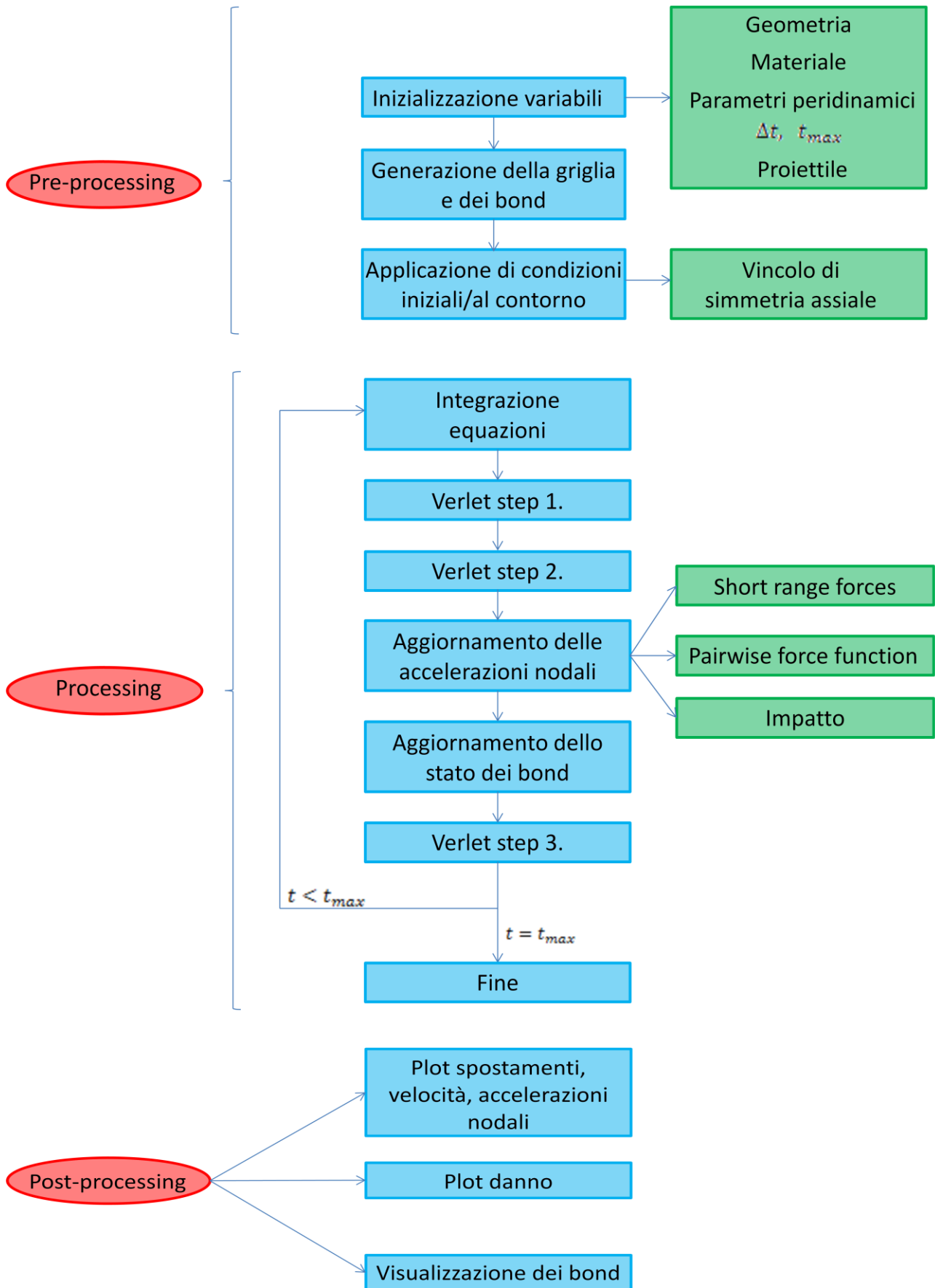
$$\ddot{\mathbf{u}}_{i,proj} = -k_s(\|\mathbf{r}\| - R_{proj})^2 \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$$

Dove  $\ddot{\mathbf{u}}_{i,proj}$  è l'accelerazione che il proiettile impone al nodo  $i$ ,  $k_s$  è una costante di proporzionalità,  $\mathbf{r}$  è il vettore che va dal il nodo  $i$  al centro del proiettile, mentre  $R_{proj}$  è il raggio della sfera; se risulta  $\|\mathbf{r}\| > R_{proj}$  allora  $\ddot{\mathbf{u}}_{i,proj} = \mathbf{0}$ . Per i proiettili cilindrici e conici si è considerato un modello analogo, con la differenza che il termine elevato al quadrato risulta essere nel primo caso la distanza tra nodo e superficie circolare del cilindro che impatta il bersaglio e nel secondo caso la distanza tra nodo e generatrice del cono. L'accelerazione imposta dagli impattanti delle tre geometrie è diretta lungo la perpendicolare alle superfici dei proiettili passante per il nodo in esame e qualora non vi sia penetrazione l'azione del proiettile risulta nulla.

## 5.9 Pseudocodice

Vediamo infine qual è stata la logica di implementazione seguita per sviluppare il codice. Lo schema che segue rappresenta una mappa concettuale che indica le linee guida seguite per lo sviluppo del codice di calcolo: per prima cosa sono previste la definizione della geometria, l'inizializzazione delle variabili in gioco (dimensione della

griglia, passo di integrazione, caratteristiche del materiale, forma, dimensione e velocità dell'impattante, ...) e l'eventuale applicazione di condizioni iniziali e al contorno; questo primo *step* può essere pensato in modo analogo alla fase di *pre-processing* nelle analisi FEM ad esempio. A seguire viene sviluppato il ciclo di integrazione temporale delle equazioni della peridinamica basato sull'algoritmo delle velocità di Verlet che permette di aggiornare ad ogni istante posizioni, velocità e accelerazioni nodali e del proiettile e lo stato dei *bond*. Per la fase di *post-processing* si sono sviluppate una serie di *function* che consentono di visualizzare graficamente le grandezze cinematiche che caratterizzano i nodi ad ogni istante, lo stato dei *bond* e il grado di danneggiamento subito dalla struttura in seguito all'impatto col proiettile.



Di seguito è riportato lo pseudocodice: questo è comprensivo di quanto esposto nel presente capitolo e fornisce una schematizzazione dell'algoritmo implementato per l'integrazione numerica delle equazioni della peridinamica assialsimmetrica:

- 1: Definire la geometria, il numero di nodi  $N$  e la dimensione delle celle  $\Delta x$ , i valori di  $G_0$  ed  $E$  per il materiale, la dilatazione critica dei bond  $s_0$ , l'orizzonte  $\delta$ , il micromodulo  $c$ , il passo temporale  $\Delta t$  e l'intervallo di integrazione  $t_{max}$ , la forma e i parametri geometrici e di rigidità del proiettile nonché la sua velocità iniziale;
- 2: Generare la griglia;
- 3: Inizializzare i bond tra tutte le particelle  $i \neq j$  per cui  $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| < \delta$ ;
- 4: Applicare le condizioni iniziali e vincolare gli spostamenti assiali dei nodi lungo l'asse di simmetria;
- 5: **For**  $t = \Delta t: \Delta t: t_{max}$
- 6:     1° step di Verlet, aggiornamento delle velocità nodali:  $\dot{\mathbf{u}}^{n+1/2} = \dot{\mathbf{u}}^n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}^n$ ;
- 7:     2° step di Verlet, aggiornamento delle posizioni:  $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}^{n+1/2}$ ;
- 8:     **For**  $i = 1: N$
- 9:         % Calcolo delle short range forces
- 10:         **For all**  $j \in \mathcal{F}_i^s$  (la short range family di nodi per la particella  $i$ )
- 11:              $r = |\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i|$
- 12:              $d_{sr} = \min\{0, r - d\}$      % Queste forze sono solo repulsive
- 13:              $k_{sr} = \frac{c_s}{\delta} V_j d_r$
- 14:              $\mathbf{f}_{sr} = \mathbf{f}_{sr} + k_{sr} \frac{(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i)}{|\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i|}$
- 15:         **End**
- 16:     **End**

```

17:  For  $i = 1:N$ 
18:      % Calcolo delle forze di bond
19:      For all  $j \in \mathcal{F}_i$  (la famiglia di nodi con i quali la particella  $i$  interagisce
      tramite bond)
20:          If  $\mu_{ij} \neq 0$     % Se il bond tra  $i$  e  $j$  non è ancora rotto
21:               $r = |\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i|$ 
22:               $d_{PD} = r - |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|$ 
23:               $k_{PD} = \frac{c_{ij}}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|} \beta_{ij} V_j d_{PD}$ 
24:               $\mathbf{f}_{PD} = \mathbf{f}_{PD} + k_{PD} \frac{(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i)}{|\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i|}$ 
25:          End
26:      End
27:      % Calcolo delle forze d'impatto
28:      If  $d_{imp} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{proj}| < R_{proj}$     % Solo se c'è penetrazione
29:           $\mathbf{f}_{imp} = -k_s d_{imp}^2 \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{proj}}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{proj}|}$ 
30:      End
31:  End
32:  3° step di Verlet, aggiornamento delle accelerazioni nodali:
       $\ddot{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{f}_{sr} + \mathbf{f}_{PD} + \mathbf{f}_{imp};$ 
33: End

```



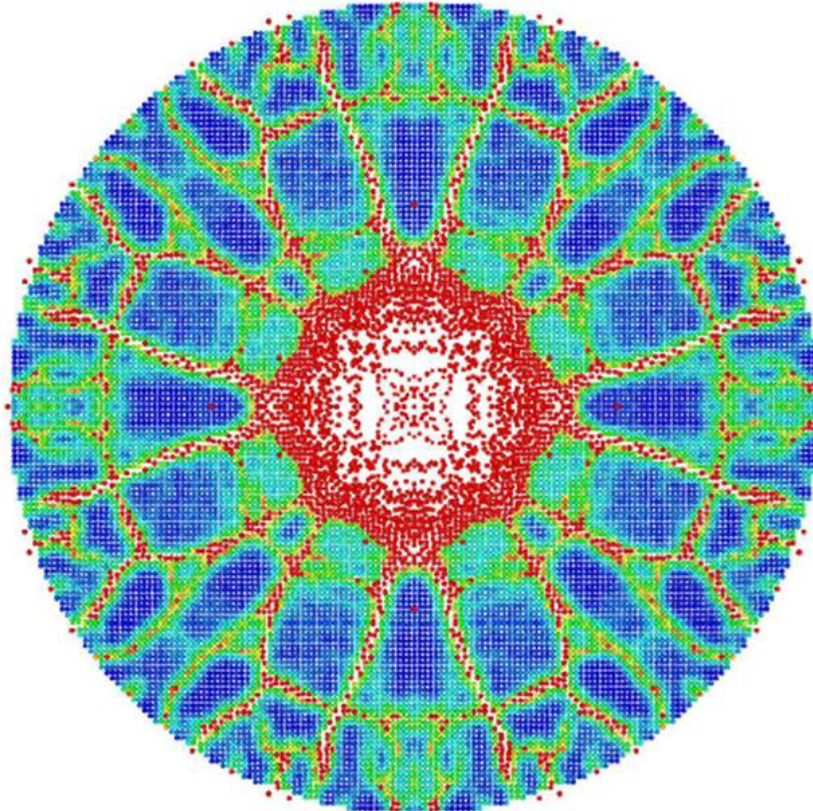
## 6 Esempi numerici

In questa sezione vengono riportati i risultati ottenuti da varie simulazioni numeriche effettuate con il *software* che si è implementato e la cui struttura è stata descritta nel precedente capitolo. Tutte le analisi sono state impostate sulla base di vari esperimenti numerici (condotti sfruttando sia la peridinamica tridimensionale, sia altre tecniche come il DEM o il FEM) disponibili in letteratura, riguardanti impatti a simmetria cilindrica. I primi risultati si riferiscono ad uno studio di Silling [62], già riproposto anche da Parks [49], [50], sull'impatto di un proiettile sferico su un sottile *layer* di vetro: oltre alla funzione micromodulo costante utilizzata da Silling però verranno introdotte, come suggerito da Seleson [58], delle  $c$  che dipendono dalla posizione relativa  $\xi$  tra le particelle, in modo da considerare l'attenuazione dell'intensità delle azioni reciproche all'aumentare di questo parametro. Verrà quindi proposto uno studio simile al precedente in cui il bersaglio in vetro è più spesso, in modo da poter apprezzare il rimbalzo del proiettile che, dopo aver danneggiato il *target* viene da questo respinto (Silling [62] e Seleson [58]). Di seguito si vedrà come si sia riusciti a modellare la punzonatura del calcestruzzo provocata da impattanti cilindrici e conici a basse velocità prendendo spunto da simulazioni basate sui metodi FEM (Rice, [53]) e DEM (Liu, [36]); per concludere, rifacendosi alle analisi numeriche di Hu [25], che ha cercato di riprodurre in Peridinamica varie prove sperimentali condotte da Yu [74], si è studiato l'impatto di un proiettile rigido sferico su un *layer* di vetro supportato da uno strato di policarbonato, un materiale dalle spinte caratteristiche di resistenza agli impatti (si veda anche [7]).

### 6.1 Proiettile sferico su un disco in vetro

Il primo studio è stato condotto sulla base delle prime simulazioni di Silling sugli impatti su materiali fragili realizzate sfruttando la peridinamica *bond based* tridimensionale: queste prendono in esame un sottile piatto circolare in vetro impattato da un proiettile rigido di forma sferica. I risultati ottenuti da Silling evidenziano come la peridinamica sia in grado di riprodurre l'evoluzione particolarmente intricata del danno subito dal bersaglio. Da quanto esposto nell'introduzione infatti bisogna aspettarsi che per simili impatti la morfologia della rottura sia caratterizzata dalla tipica combinazione

di cricche radiali e circonferenziali che con altri metodi, come il FEM, non sarebbe possibile cogliere.



**Figura 6.1 Danno subito dal piatto di Silling: il colore blu indica le zone integre, il rosso quelle completamente danneggiate**

Il problema trattato da Silling è assialsimmetrico, quindi si presta ad essere affrontato con la teoria sviluppata in questa tesi. Occorre ricordare che la formulazione assialsimmetrica prevede di rappresentare un solido di rivoluzione attraverso una sua semisezione meridiana, e di conseguenza non ci si può aspettare di riuscire a riprodurre le cricche radiali; non è invece preclusa la possibilità di cogliere la craterizzazione centrale e soprattutto la formazione delle cricche circonferenziali previste peraltro da un gran numero di evidenze sperimentali.

Il modello realizzato segue fedelmente le assunzioni di Parks [49], [50]. Il proiettile è rigido e di geometria sferica con diametro  $d = 0.01\text{ m}$  e velocità  $v = 100\text{ m/s}$  ipotizzata costante (il proiettile non è frenato dall'impatto). Il disco è in vetro, e per tale materiale si sono scelti:



Densità:  $\rho = 2200 \text{ kg/m}^3$ ;

Modulo elastico:  $E = 22.35 \text{ GPa}$ ;

Tasso di rilascio dell'energia:  $G_0 = 10 \text{ J/m}^2$ .

La *mesh* è caratterizzata da celle regolari quadrate di lato  $\Delta x = 0.0005 \text{ m}$ , ciascuna rappresentata da un nodo situato nel suo centro geometrico; l'orizzonte si è posto pari a  $\delta = 3\Delta x = 0.0015 \text{ m}$ . La geometria del bersaglio è un cilindro di diametro  $D = 0.074 \text{ m}$  e altezza  $H = 0.0025 \text{ m}$ , da cui segue che il *target* è modellato da un totale di  $74 \times 5 = 370$  nodi contro i 103'110 del modello di Parks (a parità di lato delle celle). Questo fatto permette di comprendere pienamente quanto importante sia, in termini computazionali, la schematizzazione dei problemi 3D attraverso le formulazioni 1D e 2D: con le risorse computazionali di cui si è potuto disporre in questo lavoro sarebbe stato impensabile gestire modelli discretizzati con un numero di nodi di ordine di grandezza superiore alle unità di migliaia. Dai parametri di input si ricavano i seguenti valori per le grandezze peridinamiche costitutive del materiale:

$$c_{ij} = \frac{24}{5} \frac{E}{\pi^2 \delta^3 R_{ij}} = \frac{3.2207}{R_{ij}} \cdot 10^{18} \text{ N/m}^6$$

dove con  $R_{ij}$  si considera la coordinata radiale media del segmento che congiunge i nodi  $i$  e  $j$ . Il valore massimo di  $c$  si calcola per i nodi lungo l'asse di rivoluzione, per i quali si ha:

$$c_{ij} = 6.4413 \cdot 10^{21} \text{ N/m}^6$$

L'ordine di grandezza di questo micromodulo giustifica quello assunto per la costante caratteristica dell'impattante:  $k_s = 1 \cdot 10^{17} \text{ N/m}^2$  (in unità di misura SI) [49], [50]. Per quanto riguarda la deformazione limite dei *bond* si ottiene:

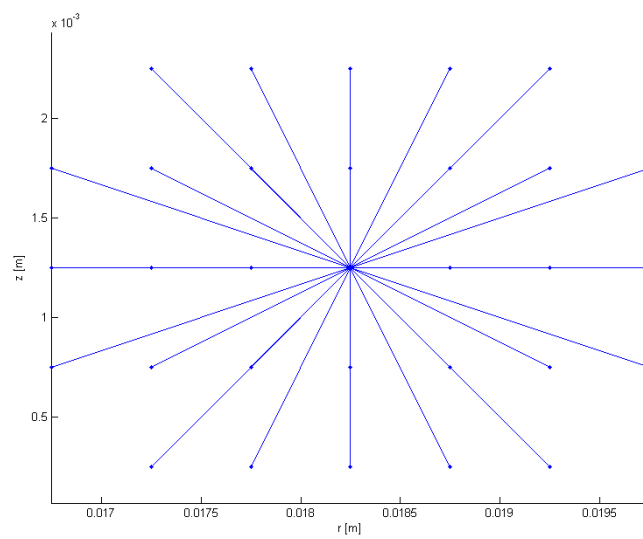
$$s_0 = \sqrt{\frac{5\pi G_0}{12E\delta}} = 6.2486 \cdot 10^{-4}$$

Valore che corrisponde a quello utilizzato da Parks moltiplicato per il fattore  $\sqrt{\pi/2}$ . Si è scelto di integrare le equazioni del moto con un passo temporale pari a  $10^{-7} \text{ s}$  (100 ns), che si è verificato soddisfare l'equazione sul minimo  $\Delta t$  esposta al paragrafo 5.1, e si è

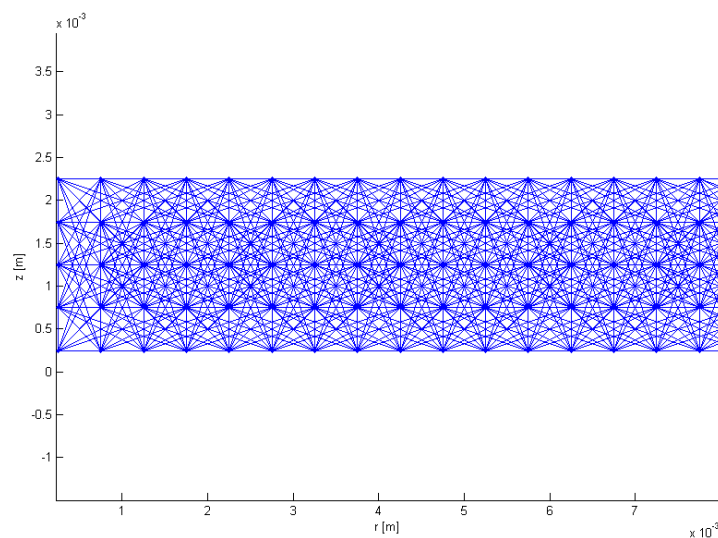
iterato fino all'istante  $t = 2000\Delta t = 200 \mu s$ . Per concludere la descrizione del modello realizzato, come condizioni ai bordi:

- si sono applicate le condizioni di simmetria cilindrica ai nodi lungo l'asse di rivoluzione vincolandone gli spostamenti radiali;
- i restanti tre bordi si sono lasciati liberi in accordo con quanto esposto da Parks [49], [50].

Le figure 6.2 e 6.3 illustrano il reticolo di *bond* di un nodo e di una porzione della struttura.

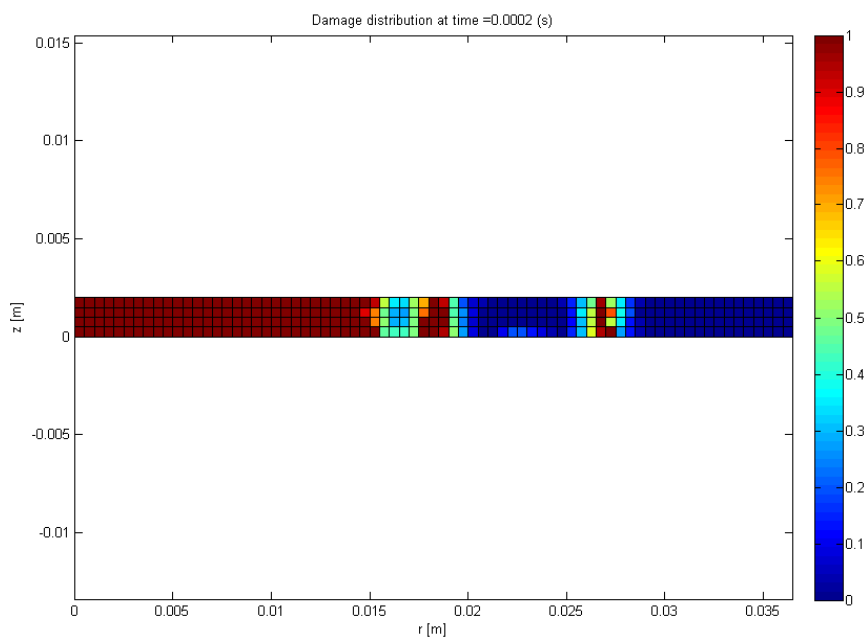


**Figura 6.2 Stato iniziale dei bond per un nodo in una zona centrale del bersaglio**

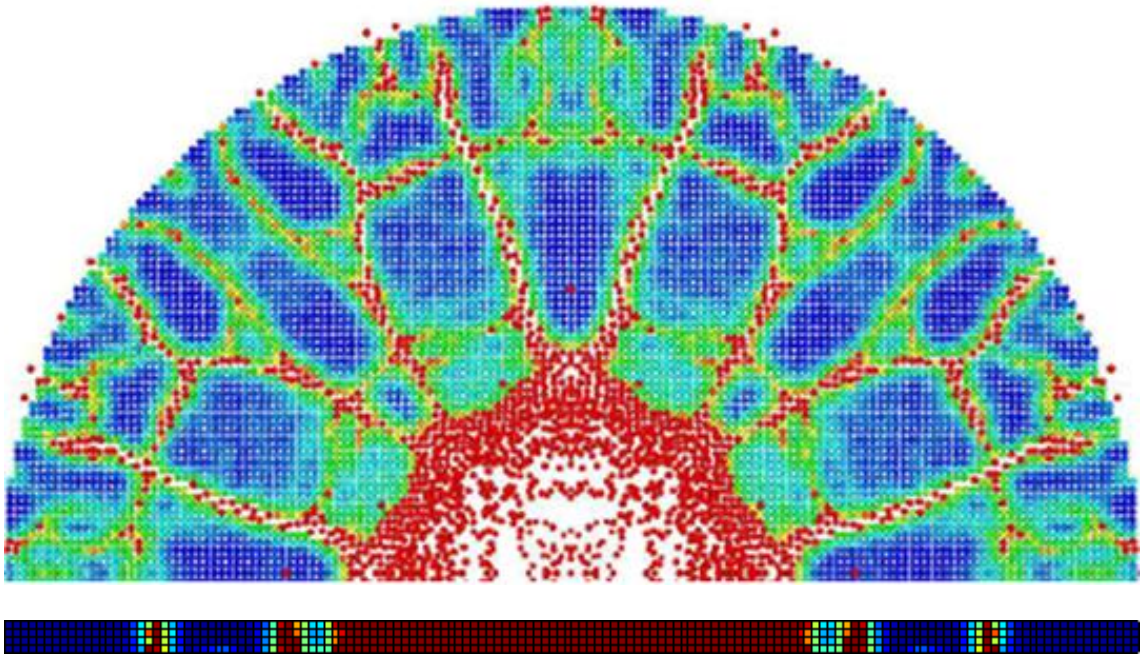


**Figura 6.3: Stato iniziale dei bond per una porzione del bersaglio in corrispondenza dell'asse di simmetria**

In seguito si riportano i risultati ottenuti: per prima cosa si può osservare come la zona centrale del disco subisca la craterizzazione ottenuta da Parks, che si estende a distanze radiali dell'ordine di tre diametri del proiettile dal punto d'impatto; nel grafico della distribuzione del danno questo fenomeno è evidenziato dal colore rosso che contraddistingue la *mesh* in prossimità dell'asse di simmetria e che indica un danneggiamento completo. E' molto interessante osservare poi come si riescano a riprodurre due nette fratture circolari a diverse coordinate radiali: questo risultato è confortevole, ed è un importante indicatore della capacità, da parte della teoria sviluppata, di catturare questi fenomeni di rottura.

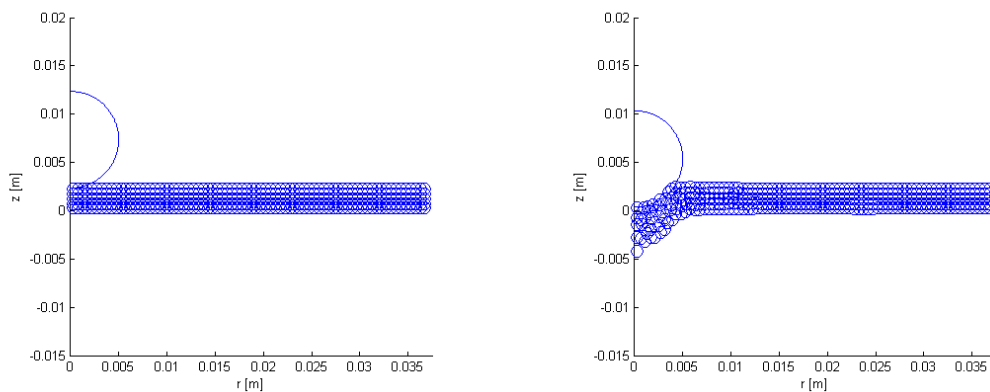


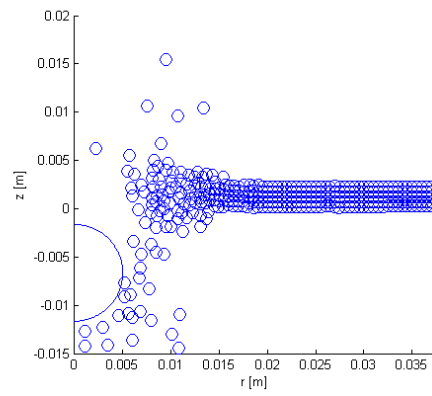
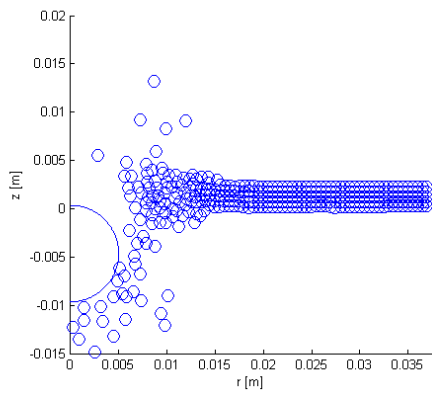
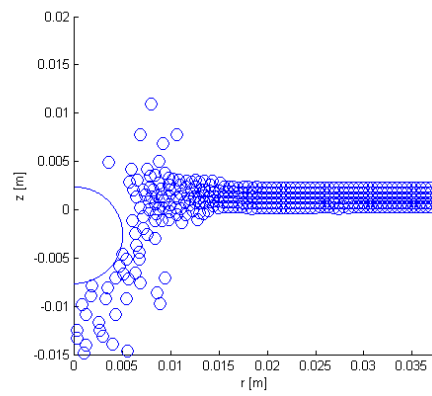
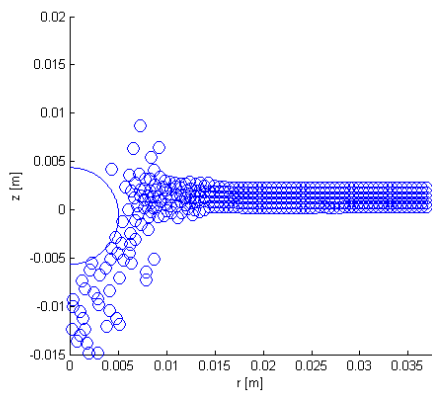
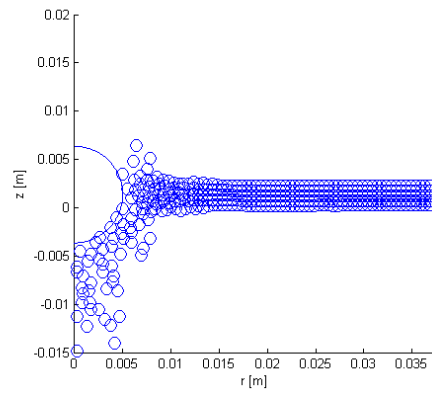
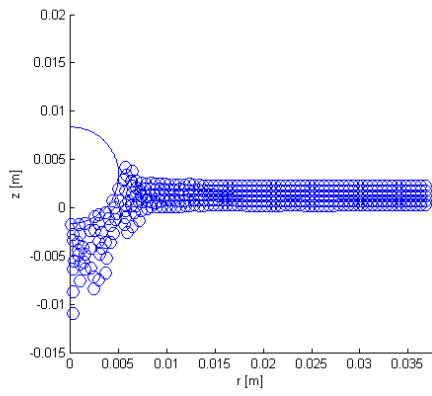
**Figura 6.4: distribuzione del danno all'istante finale: in rosso le zone danneggiate completamente, in blu quelle integre**

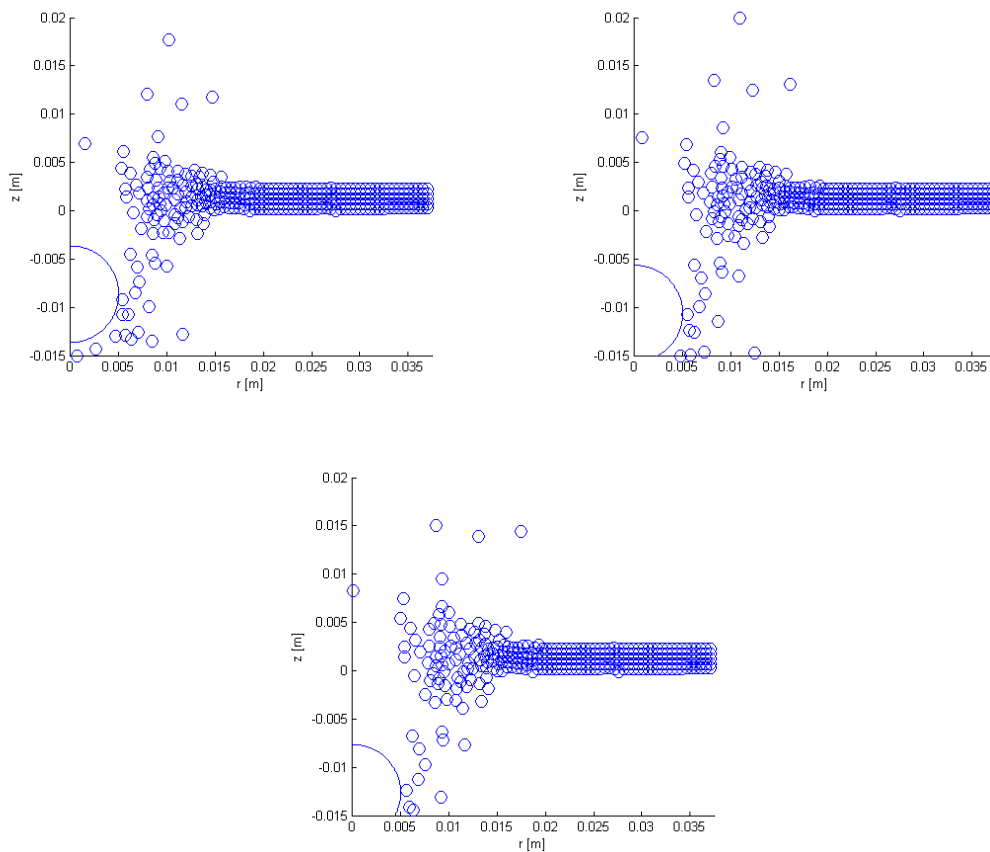


**Figura 6.5: Confronto tra il risultato di Parks (bersaglio visto dall'alto) e quello ottenuto tramite assialsimmetria che rappresenta la vista in sezione: distribuzione del danno**

Le immagini che seguono rappresentano una serie di fotogrammi 'scattati' ogni  $20 \mu s$ , che permettono di apprezzare l'efficacia con cui il proiettile penetra il bersaglio e, sebbene sia meno evidente, come l'algoritmo delle forze di contatto sia in grado di evitare compenetrazioni tra particelle.

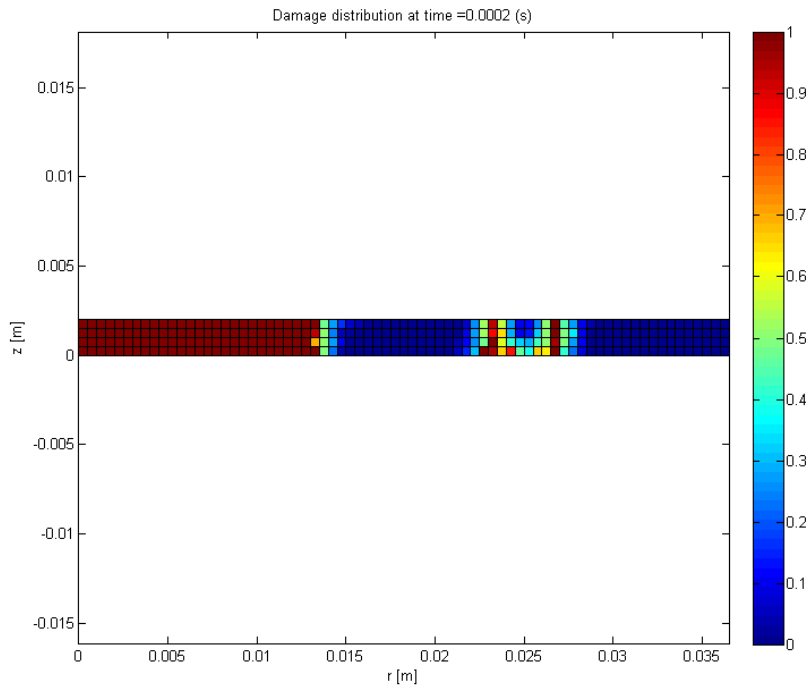




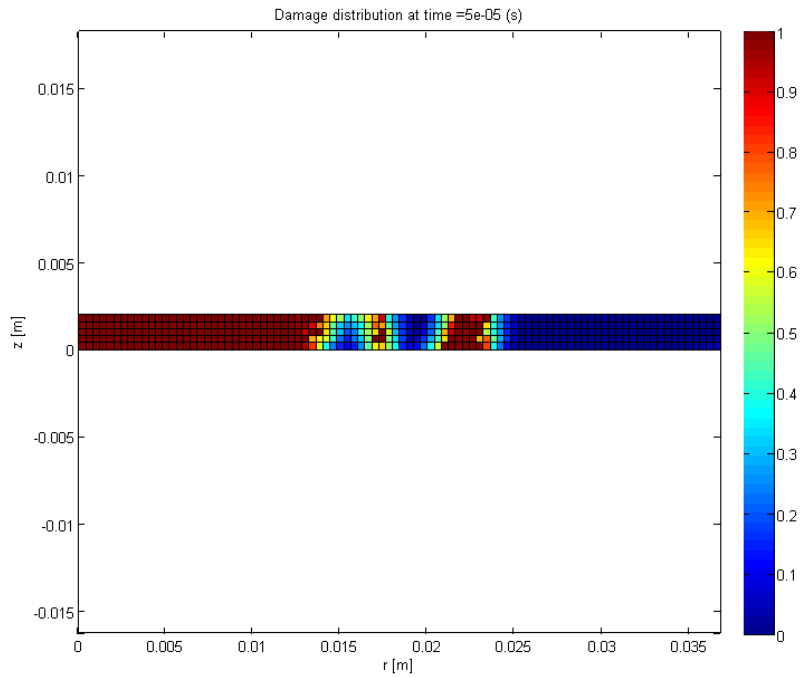


**Figura 6.6: Risultati della simulazione di impatto: evoluzione del sistema ogni  $20 \mu s$  dall'istante iniziale  $t_i = 0$  a quello finale  $t_f = 200 \mu s$**

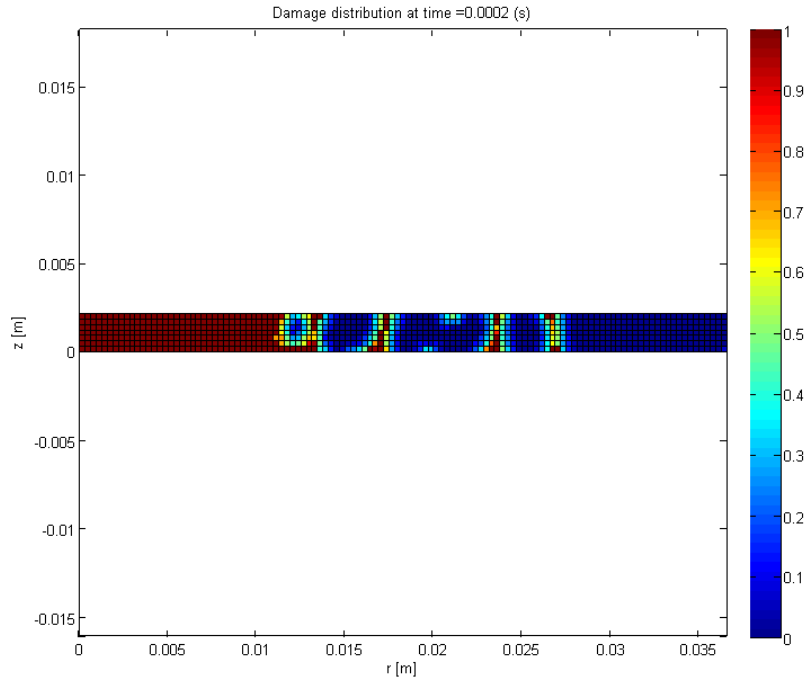
Come si è spiegato in precedenza, non è stato possibile svolgere studi estremamente estesi sulla convergenza a causa della scarsità di risorse computazionali a disposizione, e del resto queste analisi non sono disponibili in letteratura per questo esempio; si riportano in ogni caso i risultati che si sono ottenuti dalla diminuzione dello *step* di integrazione temporale di un ordine di grandezza, dalla *m*-convergenza e dalla  $\delta$ -convergenza. In tutti i casi si notano sia la craterizzazione centrale sia la formazione delle fratture circolari.



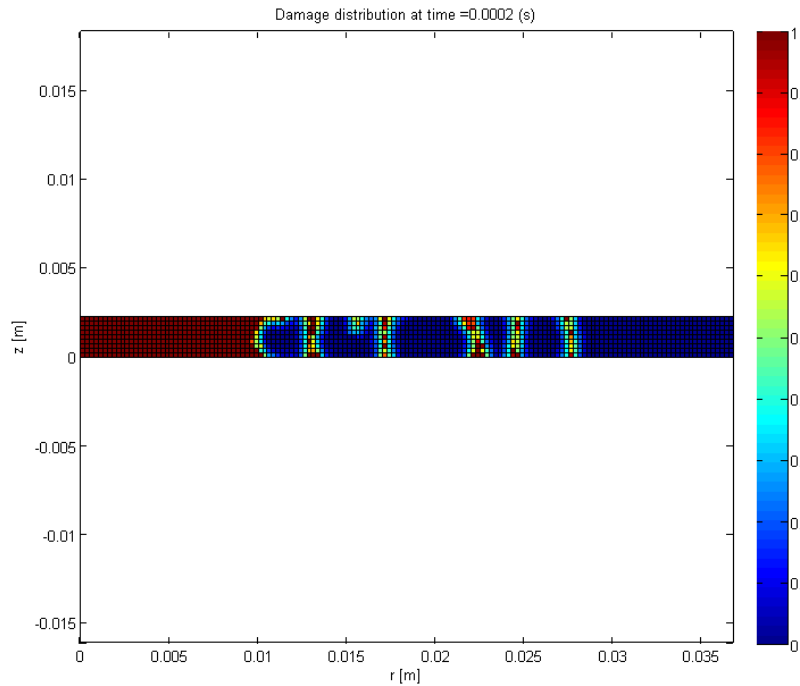
**Figura 6.7:** Dimensione celle  $\Delta x = 0.0005 \text{ m}$ ; orizzonte  $\delta = 3\Delta x = 0.0015 \text{ m}$ ; passo di integrazione  $\Delta t = 10^{-8} \text{ s}$



**Figura 6.8:** Dimensione celle  $\Delta x = 0.000375 \text{ m}$ ; orizzonte  $\delta = 4\Delta x = 0.0015 \text{ m}$ ; passo di integrazione  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ . (*m*-convergenza)



**Figura 6.9: Dimensione celle  $\Delta x = 0.0003125\text{ m}$ ; orizzonte  $\delta = 3\Delta x = 0.0009375\text{ m}$ ; passo di integrazione  $\Delta t = 10^{-7}\text{ s}$ . ( $\delta$ -convergenza)**



**Figura 6.10: Dimensione celle  $\Delta x = 0.00025\text{ m}$ ; orizzonte  $\delta = 3\Delta x = 0.00075\text{ m}$ ; passo di integrazione  $\Delta t = 10^{-7}\text{ s}$ . ( $\delta$ -convergenza)**

I risultati finora esposti derivano da un'assunzione importante e che si potrebbe considerare restrigente: per i *bond* il rapporto  $c/R$  è ipotizzato indipendente dalla posizione relativa tra i nodi nella configurazione iniziale, ovvero da  $\xi$ . Seleson [58],



riprendendo un concetto presente nella peridinamica di stato, ha introdotto l'idea della *influence function* anche nella peridinamica *bond based* con il fine di poter modulare a piacimento gli effetti non locali previsti da questa teoria. Seleson propone di modificare le relazioni costitutive dei materiali PMB in modo da consentire una qualche dipendenza del micromodulo dalla lunghezza a riposo dei legami; ciò è possibile variando la *pairwise response function* della peridinamica standard nel seguente modo:

$$f = c_g \cdot s \cdot \omega_g$$

Dove  $c_g$  è la nuova costante di *bond* la quale dipende dalla funzione di influenza  $\omega_g$  che si sceglie.  $\omega_g$  è una funzione pensata per introdurre una attenuazione dell'azione dei *bond* all'aumentare della loro lunghezza a riposo, in modo tale da far sì che le forze esercitate sul punto materiale  $\mathbf{x}$  dalle particelle  $\mathbf{x}'$  (che si trovano entro la sfera di influenza di  $\mathbf{x}$ ) decrescano di intensità al crescere della distanza iniziale di  $\mathbf{x}'$  da  $\mathbf{x}$ . Questo concetto è decisamente interessante e permette di modulare la non località delle interazioni tra particelle pesando a piacimento quanto siano importanti le azioni a lungo raggio rispetto a quelle locali.

In generale la funzione di influenza deve essere una funzione di  $|\boldsymbol{\xi}|$ :

$$\omega_g = \omega_g(|\boldsymbol{\xi}|)$$

per cui occorre ripercorrere la trattazione presentata nel terzo capitolo al fine di derivare  $c_{g,3D}$  per la peridinamica 3D che sarà generalmente diversa dalla  $c_{3D}$  costante. Il micropotenziale, è anch'esso necessariamente dipendente da  $\omega_g(|\boldsymbol{\xi}|)$ :

$$w_{3D} = \frac{1}{2} c_{g_{3D}} s^2 |\boldsymbol{\xi}| \omega_g(|\boldsymbol{\xi}|)$$

Di conseguenza la densità di energia elastica di deformazione dovuta all'espansione sferica va riscritta come:

$$W_{e,3D} = \frac{1}{2} \int_H w_{e,3D}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) dV_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{2} \int_H \frac{1}{2} c_{g_{3D}} s^2 |\boldsymbol{\xi}| \omega_g(|\boldsymbol{\xi}|) dV_{\boldsymbol{\xi}}$$

Ovvero:

$$W_{e,3D} = \frac{1}{2} \int_0^\delta \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} c_{g_{3D}} \varepsilon^2 \xi \right) \omega_g(\xi) \xi \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, d\xi = \pi c_{g_{3D}} \varepsilon^2 \int_0^\delta \omega_g(\xi) \xi^3 \, d\xi$$

Questa, uguagliata all'analogia quantità prevista dalla meccanica del continuo tradizionale e imponendo  $\nu = 1/3$ , fornisce:

$$\pi c_{g_{3D}} \varepsilon^2 \int_0^\delta \omega_g(\xi) \xi^3 \, d\xi = 3E \varepsilon^2$$

e quindi:

$$c_{g_{3D}} = \frac{3E}{\pi \int_0^\delta \omega_g(\xi) \xi^3 \, d\xi}$$

Naturalmente se  $\omega_g(\xi) = 1$  si ritorna al caso standard  $c_{g,3D} = c_{3D} = 12E/(\pi\delta^4)$ .

Il ragionamento è analogo per la peridinamica assialsimmetrica. In questo caso si ha, dopo alcuni passaggi, che l'uguaglianza tra le grandezze energetiche peridinamiche e tradizionali si esprime come:

$$r\pi^2 c_{g,axisym} \varepsilon^2 \int_0^\delta \omega_g(\xi) \xi^2 \, d\xi = \frac{8}{5} E \varepsilon^2$$

da cui:

$$c_{g,axisym} = \frac{8E}{5r\pi^2 \int_0^\delta \omega_g(\xi) \xi^2 \, d\xi}$$

L'integrale al denominatore si può comodamente risolvere per via numerica. Ancora una volta per  $\omega_g(\xi)$  unitaria si ritorna alla formulazione con micromodulo costante in  $\xi$ :

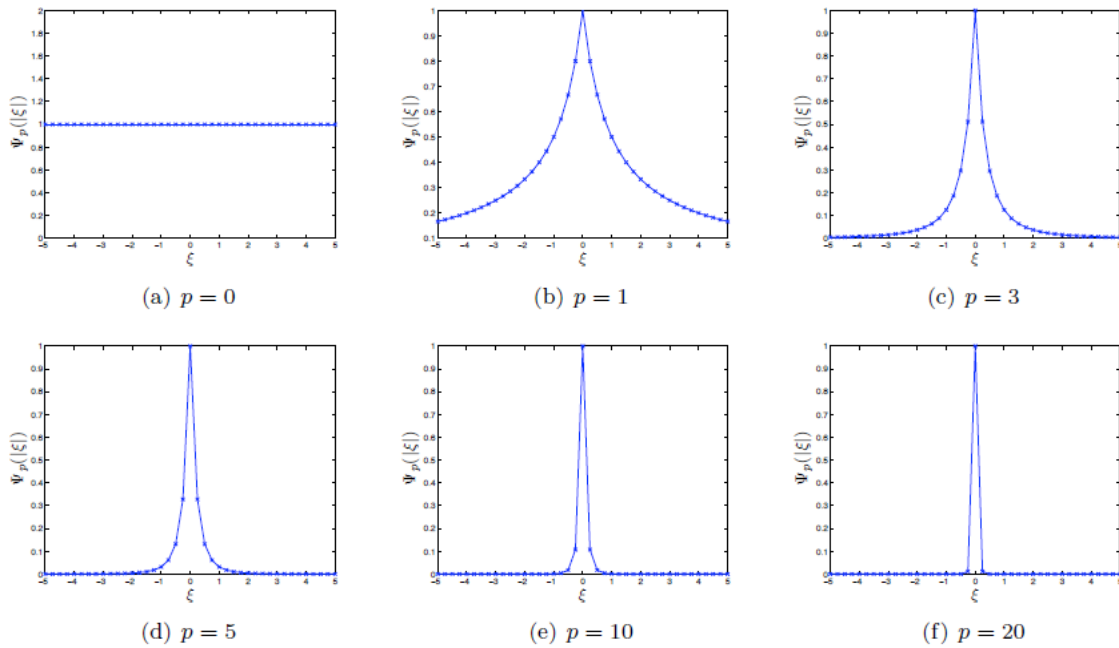
$$c_{g,axisym} = c_{axisym} = \frac{24}{5} \frac{E}{\pi^2 \delta^3 r}$$

Seleson suggerisce la seguente equazione generale per la funzione di influenza:

$$\omega_g(\xi) = \left( \frac{1}{\xi + \epsilon} \right)^p$$

con  $p$  esponente reale positivo ed  $\epsilon$  una costante che per simulazioni numeriche viene assunta pari al lato delle celle che formano la griglia. Come suggerito da Kilic [28] per il modello costitutivo a campana, anche l'equazione del danno va opportunamente modificata e diventa:

$$\varphi(x) = 1 - \frac{\int_{H_x} \mu \cdot \left( \frac{1}{\xi + \epsilon} \right)^p dV_{x'}}{\int_{H_x} \left( \frac{1}{\xi + \epsilon} \right)^p dV_{x'}}$$

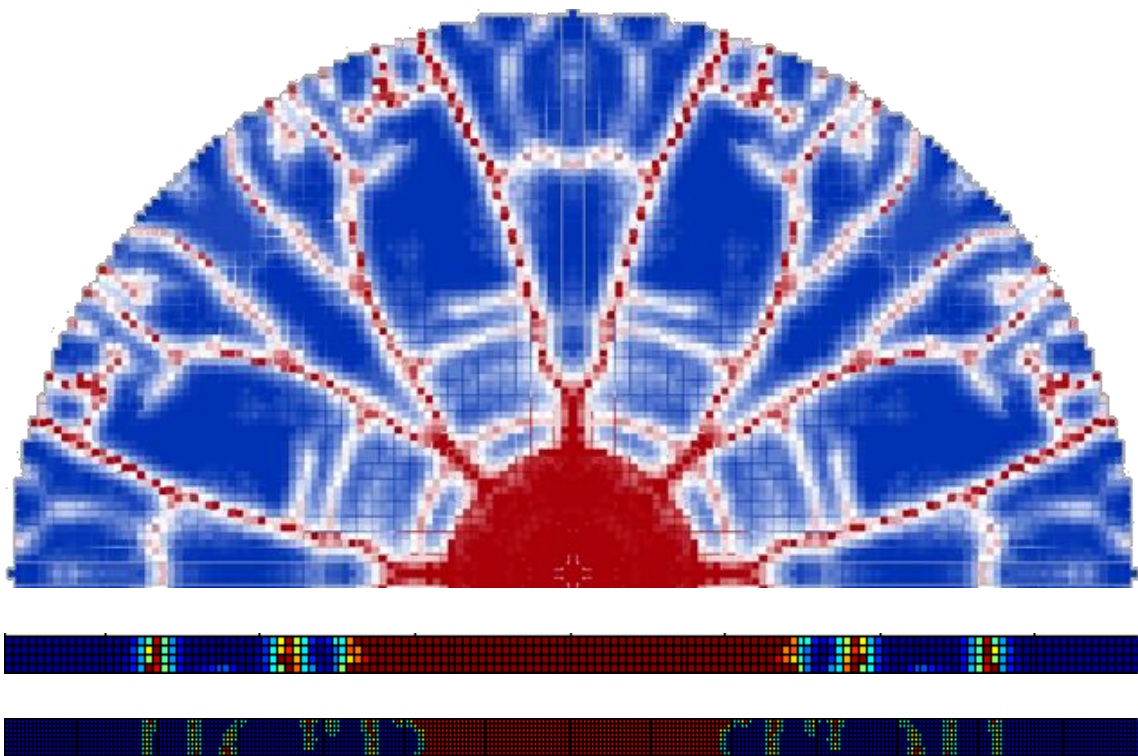


**Figura 6.11:** Alcuni esempi di  $\omega_g(\xi)$  al variare di  $p$ ;  $\epsilon$  è assunto unitario

Al crescere dell'esponente  $p$  le interazioni tra i *bond* più corti diventano dominanti così da ottenere soluzioni, come dimostra Seleson per la dispersione delle onde elastiche nelle travi, che si avvicinano sempre più a quelle previste dalla teoria locale classica del continuo.

Le seguenti immagini raffigurano, per alcuni valori di  $p$  (0, 3, 5 e 10), i risultati ottenuti da Seleson a confronto con quelli riprodotti mediante assialsimmetria per un problema

identico a quello precedentemente esposto. Per tutti e quattro gli esponenti considerati si sono svolte due simulazioni: una con  $\Delta x = 0.0005 \text{ m}$  e  $\delta = 0.0015 \text{ m}$  e l'altra con  $\Delta x = 0.00025 \text{ m}$  e  $\delta = 0.00075 \text{ m}$ ; il passo di integrazione scelto è ancora  $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ . I diagrammi del danno si riferiscono all'istante  $t = 50 \mu\text{s}$ . Il caso  $p = 0$  porta a risultati analoghi a quelli visti in precedenza; per quanto riguarda le simulazioni con discretizzazione più grossolana, fino a  $p = 5$  a livello qualitativo non si apprezzano grandi differenze, ma per  $p \geq 10$  si è osservato che le cricche circolari non si sviluppano. Queste cricche scompaiono già per  $p = 5$  scegliendo  $\delta = 0.00075 \text{ m}$ : ciò trova spiegazione nel fatto che, come la *influence function*, anche la riduzione del raggio d'orizzonte aumenta il peso delle azioni locali su quelle a lungo raggio; quindi considerando  $\delta = 0.00075 \text{ m}$  e aumentando  $p$  si ottiene un doppio contributo alla tendenza della soluzione ad essere locale e alla conseguente scomparsa delle cricche circolari. A riprova di questo fatto si può osservare come (per  $p \leq 5$ ) l'effetto di un aumento del numero di queste rotture, si può ottenere sia facendo crescere  $p$ , che diminuendo  $\delta$ .



**Figura 6.12:** Caso  $p = 0$ . Nell'ordine sono riportati il risultato di Seleson e quelli ottenuti per assialsimmetria tramite mesh grossolana e fine

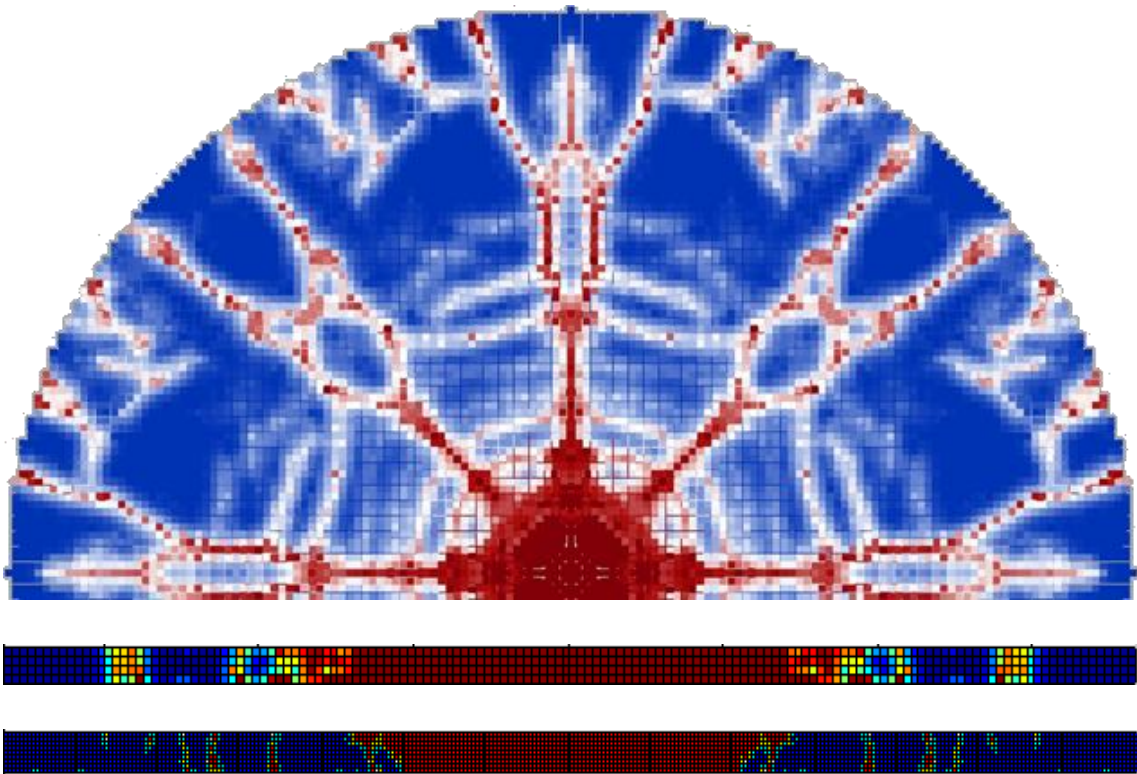


Figura 6.13: Caso  $p = 3$ . Nell'ordine sono riportati il risultato di Seleson e quelli ottenuti per assialsimmetria tramite mesh grossolana e fine

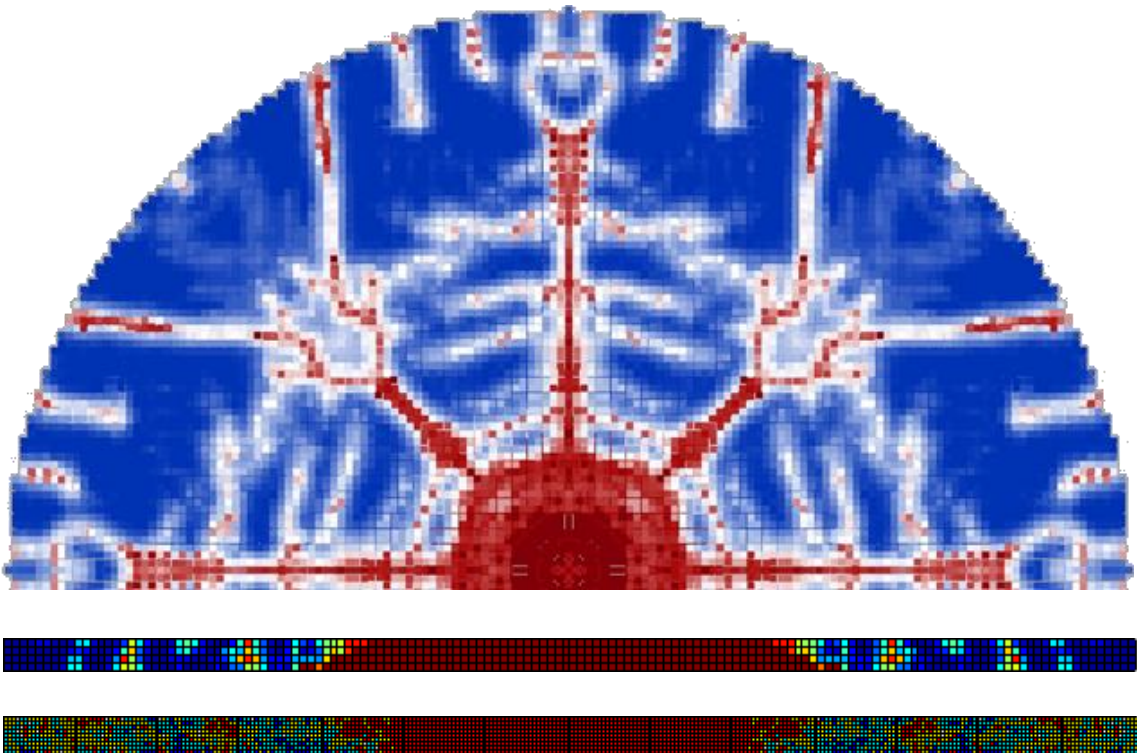
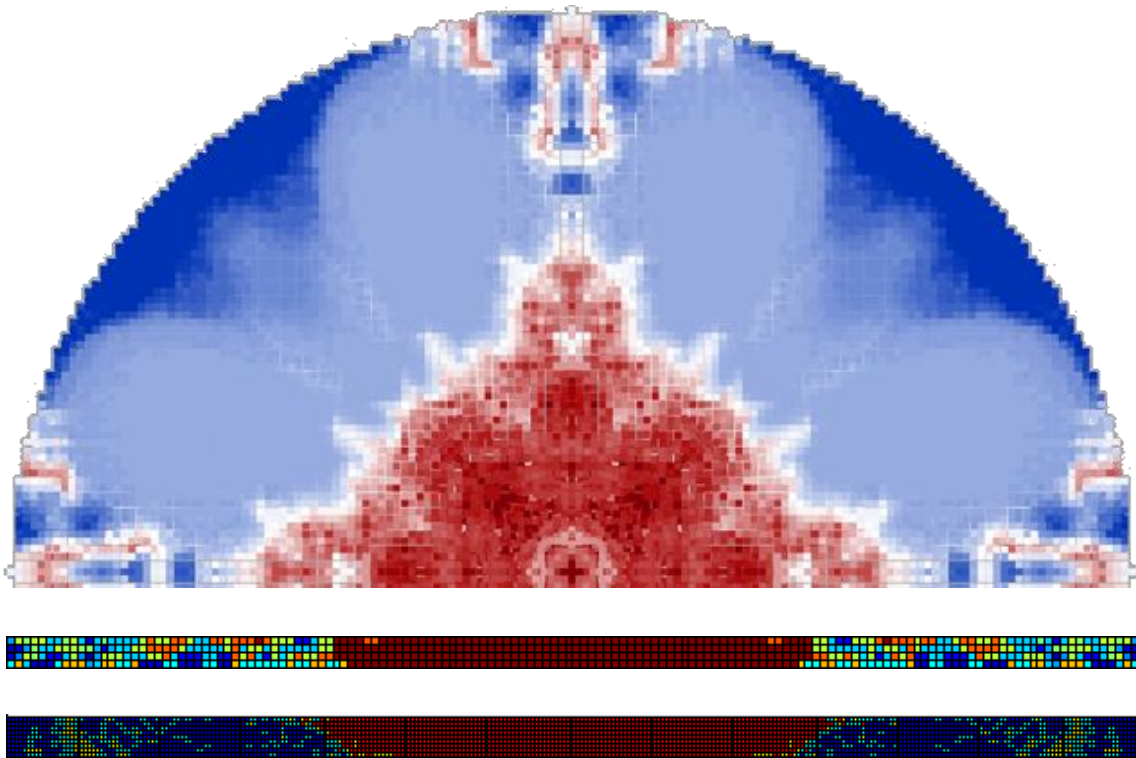


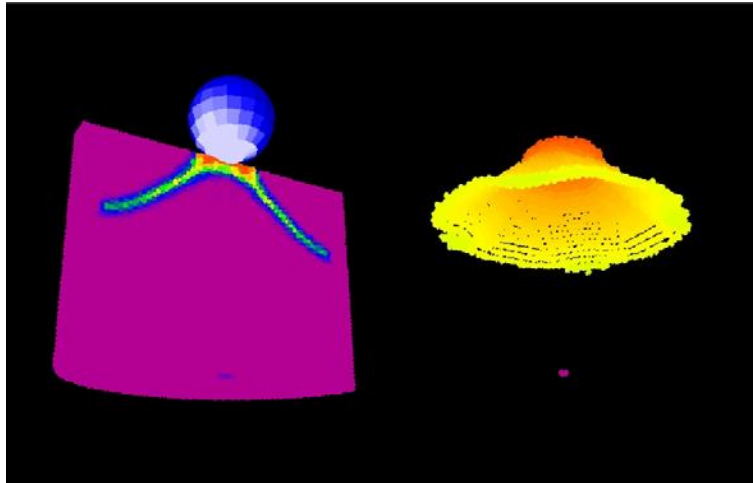
Figura 6.14: Caso  $p = 5$ . Nell'ordine sono riportati il risultato di Seleson e quelli ottenuti per assialsimmetria tramite mesh grossolana e fine



**Figura 6.15:** Caso  $p = 10$ . Nell'ordine sono riportati il risultato di Seleson e quelli ottenuti per assialsimmetria tramite mesh grossolana e fine

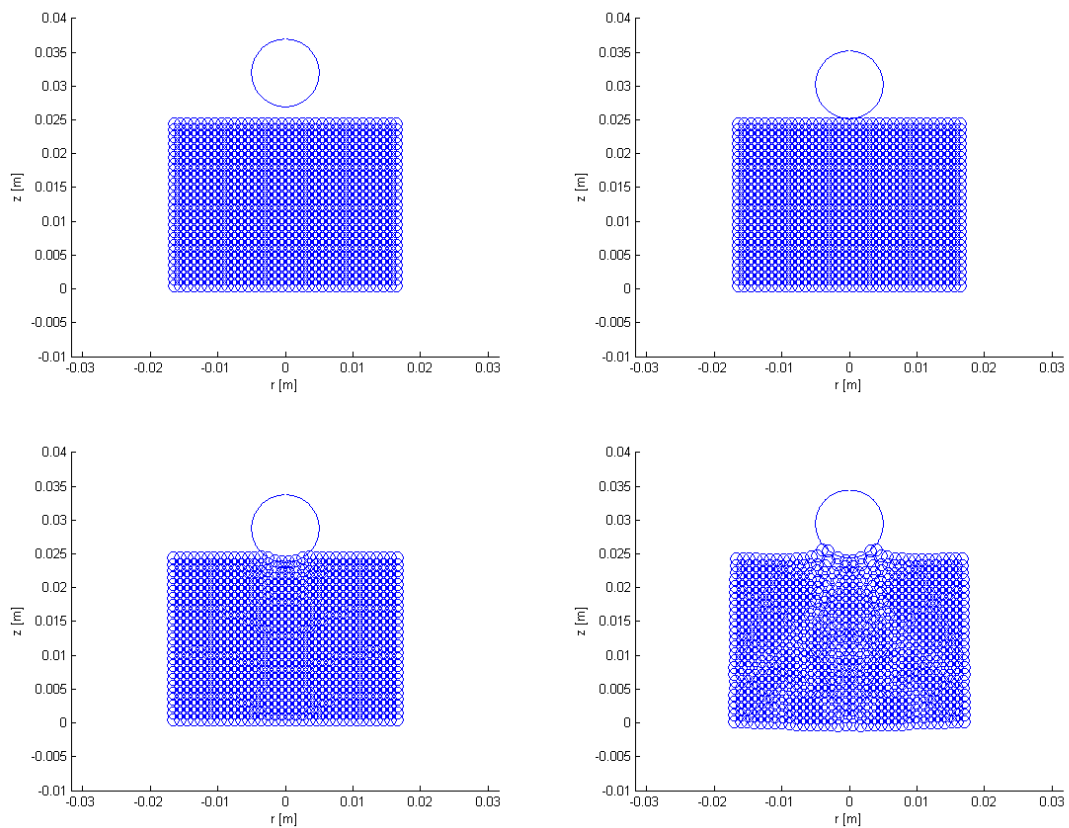
## 6.2 Rimbalzo di un proiettile sferico su un bersaglio spesso

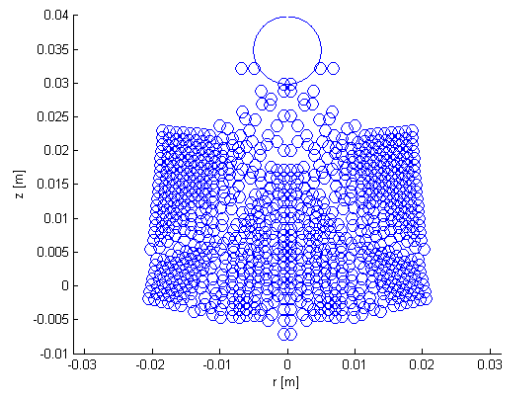
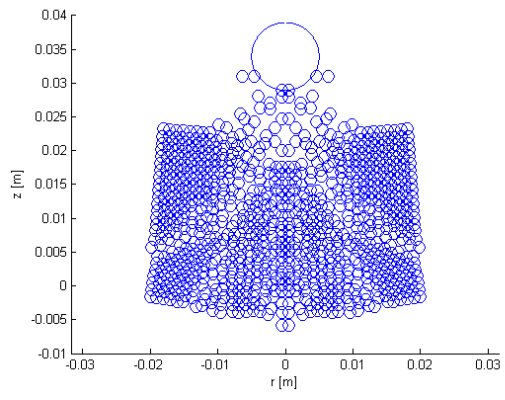
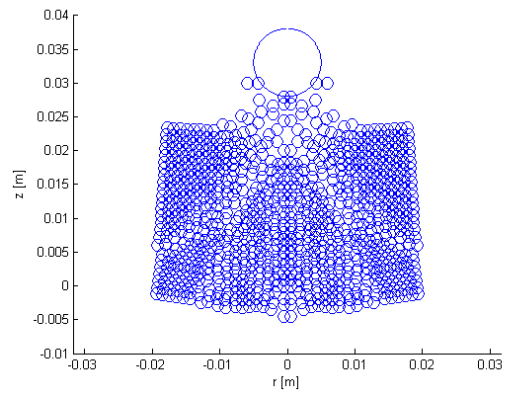
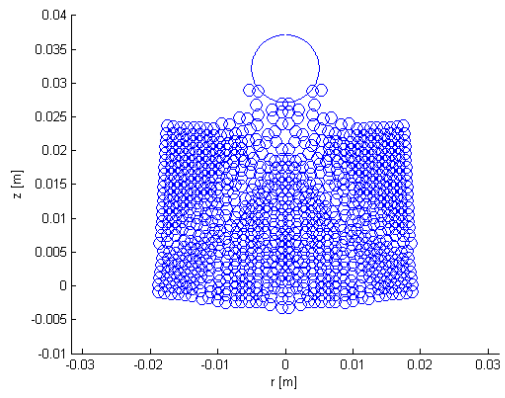
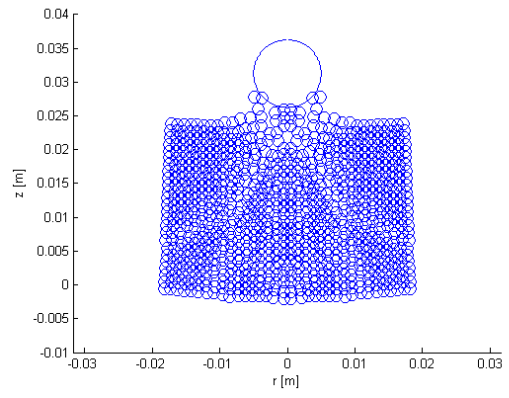
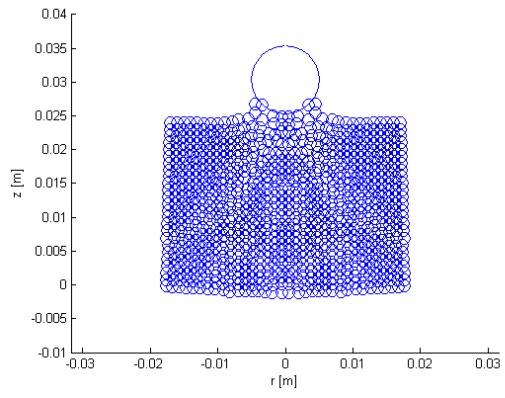
Con riferimento all'esperimento numerico svolto da Silling in [63] (e ripreso da Seleson [58]) si è cercato di riprodurre il rimbalzo di un proiettile sferico su un bersaglio in vetro spesso. Il problema studiato da Silling è simile a quello trattato nella sezione 6.1: il proiettile è sferico, rigido di diametro  $d = 0.01 \text{ m}$  e ha velocità iniziale pari a  $v_0 = 35 \text{ m/s}$ ; il *target* è un cilindro dello stesso materiale utilizzato in precedenza, ma di diametro  $D = 0.037 \text{ m}$  e altezza  $H = 0.025 \text{ m}$ . Silling oltre a cogliere il rimbalzo del proiettile riesce a riprodurre una cricca Hertziana che è un fenomeno di rottura, molto noto e studiato, caratteristico dell'indentazione di superfici fragili dovuta a corpi sferici.



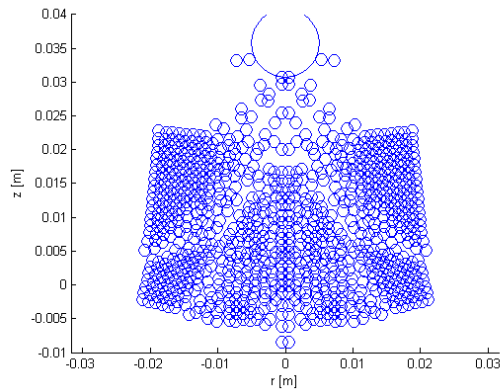
**Figura 6.16: Cricca Hertziana ottenuta da Silling**

Una prima simulazione è stata lanciata con un numero di nodi ridotto ( $17 \times 25 = 425$ ;  $\Delta x = 0.001 \text{ m}$ ), in modo da poterla estendere per una finestra temporale sufficientemente ampia al fine di riuscire ad apprezzare il rimbalzo senza gravare troppo sui tempi di calcolo. Si è potuto così verificare che il codice è in grado di riprodurre questo fenomeno.

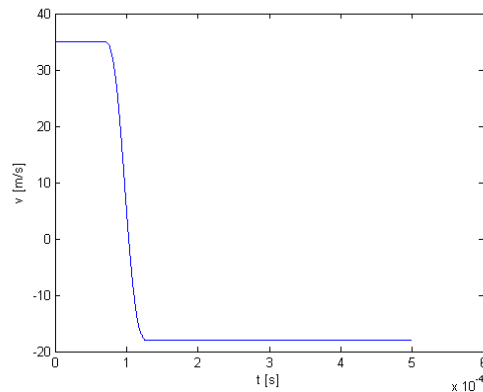








**Figura 6.17: Risultati della simulazione di impatto: evoluzione del sistema ogni  $50 \mu s$  dall'istante iniziale a quello finale  $t_f = 500 \mu s$**

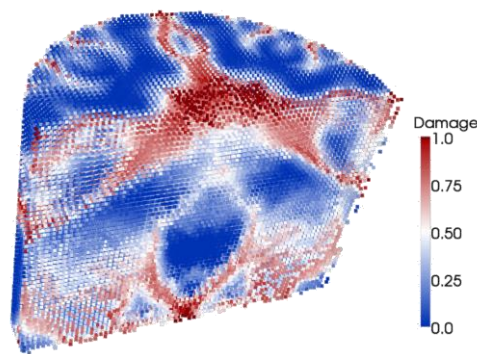


**Figura 6.18: Profilo di velocità del proiettile**

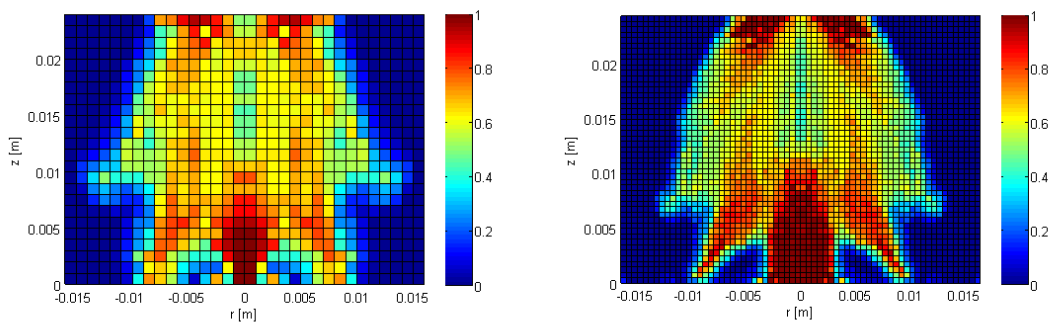
Dalle precedenti immagini il rimbalzo del proiettile è molto evidente, come del resto il danno che esso imprime al cilindro di vetro. Sono anche ben visibili l'insorgenza e la propagazione della cricca conica e il fenomeno dello *spalling* al centro della superficie inferiore del bersaglio: questo si può spiegare considerando che il materiale PMB è fragile e presenta una resistenza a trazione inferiore a quella di compressione (quest'ultima in effetti per i materiali PMB è idealmente illimitata). I diagrammi del danno ottenuti prevedono però una vasta zona danneggiata che non trova corrispondenza con i risultati di Silling; sebbene si sia tentato di risolvere questa incongruenza raffinando la *mesh* e riducendo il passo di integrazione, non si sono ottenuti sensibili miglioramenti. Si elencano alcune possibili spiegazioni:

- il più piccolo passo di integrazione utilizzato ( $\Delta t = 10^{-8}$ ), è un ordine di grandezza superiore a quello scelto da Silling;
- la *mesh* è relativamente grossolana  $\Delta x = 0.0005 m$ ;

- il fatto che non si sia considerato in questo lavoro il *softening* dei bordi incide sulle caratteristiche di resistenza dei nodi in prossimità dell'asse di simmetria i quali, non disponendo di una sfera di influenza 'piena', si danneggiano con più facilità;
- il materiale di Silling è caratterizzato da una legge per la deformazione limite  $s_0$  del tipo  $s_0 = s_{00} - \alpha s_{min}$  (si veda la sezione 2.2.3) che lo rende più resistente di quello utilizzato qui, soprattutto qualora intervengano le deformazioni di compressione imposte dall'impattante.



**Figura 6.19: Risultato ottenuto da Seleson**



**Figura 6.20: Risultati ottenuti tramite assialsimmetria. Rispettivamente con  $\Delta x = 0.001\text{ m}$ ,  $\delta = 3\Delta x = 0.003$  e per  $\Delta x = 0.0005\text{ m}$ ,  $\delta = 3\Delta x = 0.0015$**

Anche per questo esempio si sono svolte delle simulazioni per valutare gli effetti che si ottengono modulando la non località delle interazioni tra nodi attraverso il parametro  $p$  della *influence function*. Si riportano i risultati a confronto con quelli ricavati da Seleson.

E' interessante notare come per  $p = 3$  si riesca ad ottenere un accenno più evidente della cricca Hertziana e in generale come all'aumentare di  $p$  i risultati tendano ad assomigliare a quelli ottenuti dal Seleson con la peridinamica 3D.

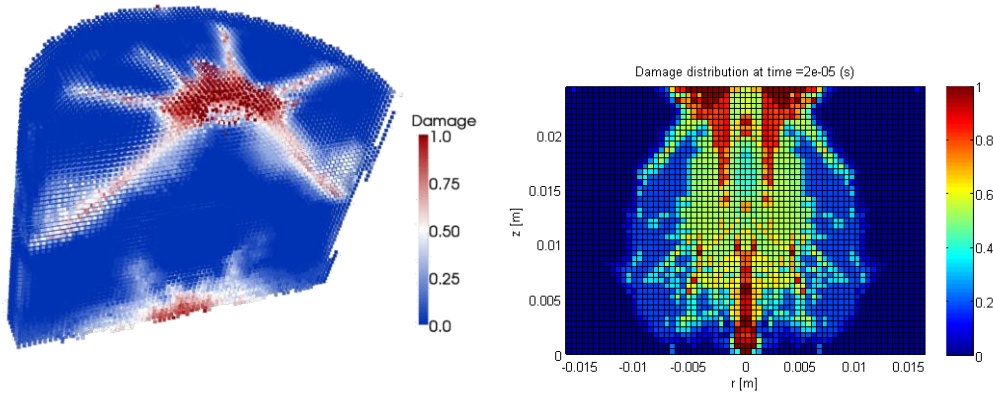


Figura 6.21: Caso  $p = 3$ . Risultato ottenuto da Seleson (sinistra) e tramite assialsimmetria (destra)

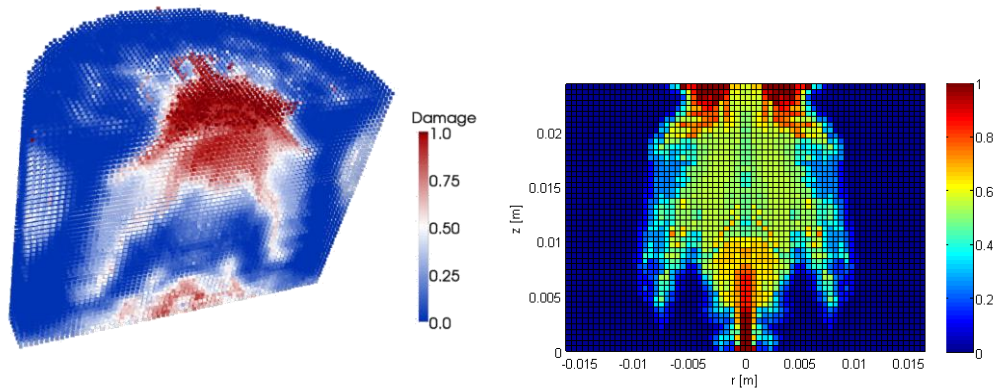


Figura 6.22: Caso  $p = 5$ . Risultato ottenuto da Seleson (sinistra) e tramite assialsimmetria (destra)

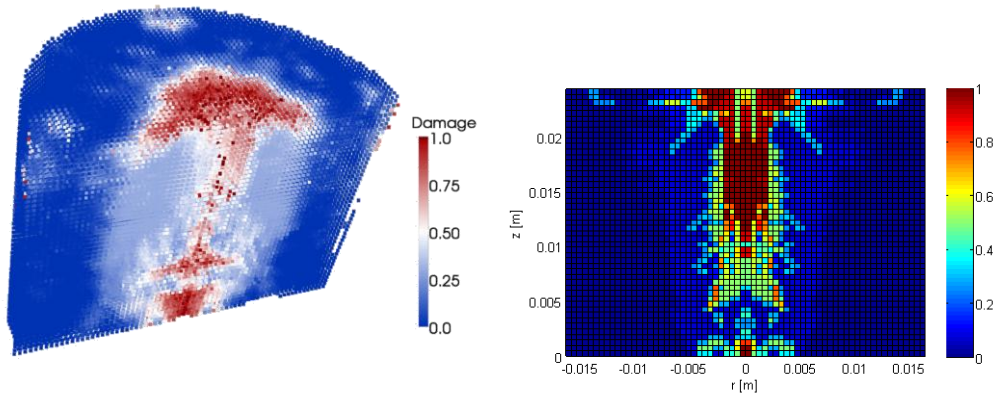


Figura 6.23: Caso  $p = 10$ . Risultato ottenuto da Seleson (sinistra) e tramite assialsimmetria (destra)

### 6.3 Punzonatura di un disco in calcestruzzo

Il seguente esempio numerico è tratto dal lavoro di Rice [53] che, dopo aver lavorato su un codice basato sulla formulazione assialsimmetrica del metodo FEM adattandolo allo studio dei meccanismi di rottura, ha riprodotto la frattura fragile per impatto del calcestruzzo: Rice fa riferimento alla prova sperimentale di punzonatura di Nilsson e Sahlin [43]. Il problema che qui si prende in esame riguarda l'impatto di un proiettile indeformabile cilindrico su un disco in calcestruzzo. L'impattante ha le seguenti caratteristiche:

Diametro:  $d = 0.25 \text{ m}$ ;

Altezza:  $h = 0.65 \text{ m}$ ;

Materiale: acciaio  $\rho_p = 7850 \text{ kg/m}^3 \rightarrow$  Massa:  $m_p = 250 \text{ kg}$ ;

Velocità iniziale:  $v_0 = 4.8 \text{ m/s}$ .

Il *target* è un disco in calcestruzzo (per cui  $\nu = 1/4$  non costituisce un grosso problema) di raggio  $R = 1.5 \text{ m}$  e spessore  $H = 0.15 \text{ m}$ . Le proprietà del materiale sono:

Modulo elastico:  $E = 30.36 \text{ GPa}$ ;

Densità:  $\rho = 2360 \text{ kg/m}^3$ ;

Tasso di rilascio dell'energia:  $G_0 = 175.1 \text{ J/m}^2$ .

La *mesh* utilizzata è costituita da  $120 \times 12$  celle di lato  $\Delta x = 0.0125 \text{ m}$ ; come passo di integrazione temporale si è scelto  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  e in tutto si sono effettuate 600 interazioni. Da ciò segue che il massimo valore del micromodulo  $c$  è dell'ordine di  $10^{16} \text{ N/m}^6$  per cui si è assunta una costante caratteristica del proiettile  $k_s = 1 \cdot 10^{12}$ . Infine come condizioni al contorno si è imposto unicamente il vincolo di simmetria cilindrica come fatto in precedenza.

L'obiettivo di Rice era quello di ottenere la tipica frattura per punzonatura (*punching shear*) del calcestruzzo che si ha per le basse velocità d'impatto: questa si manifesta attraverso la nucleazione sulla superficie superiore del bersaglio di una cricca anulare (in corrispondenza del bordo esterno del proiettile) che si estende sotto forma di cricca conica la quale, raggiunta la superficie inferiore del disco, porta alla sua frattura con il conseguente distacco di una scaglia (*slab*).

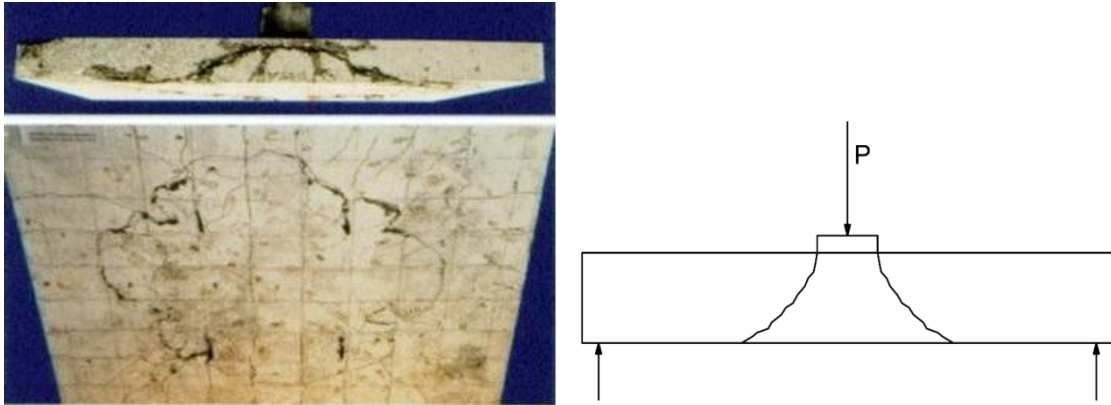


Figura 6.24: Esempio di punzonatura del calcestruzzo

Vengono ora riportati i risultati presentati da Rice a confronto con quelli ottenuti con la peridinamica assialsimmetrica.

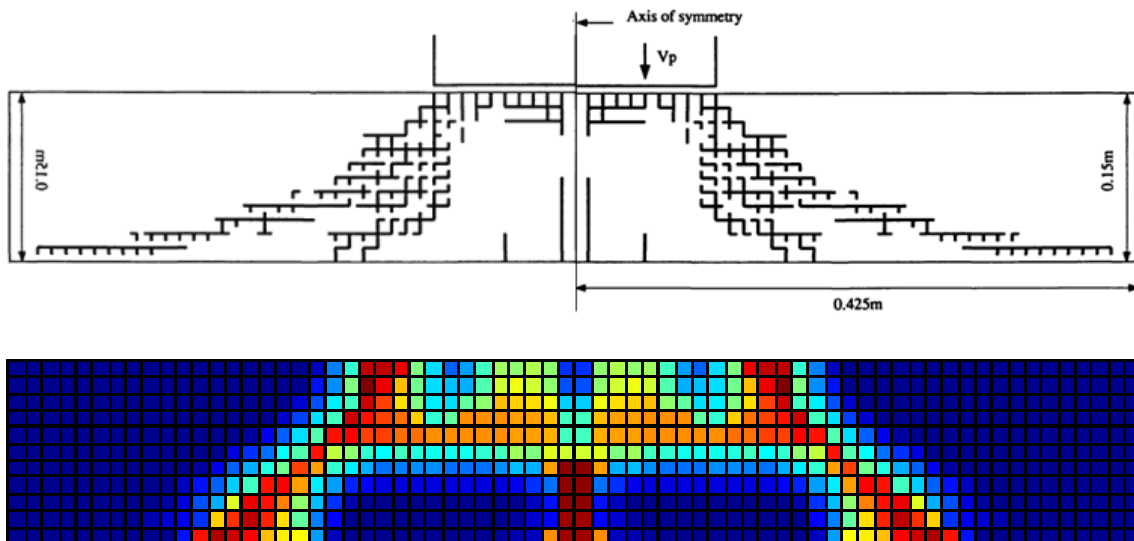
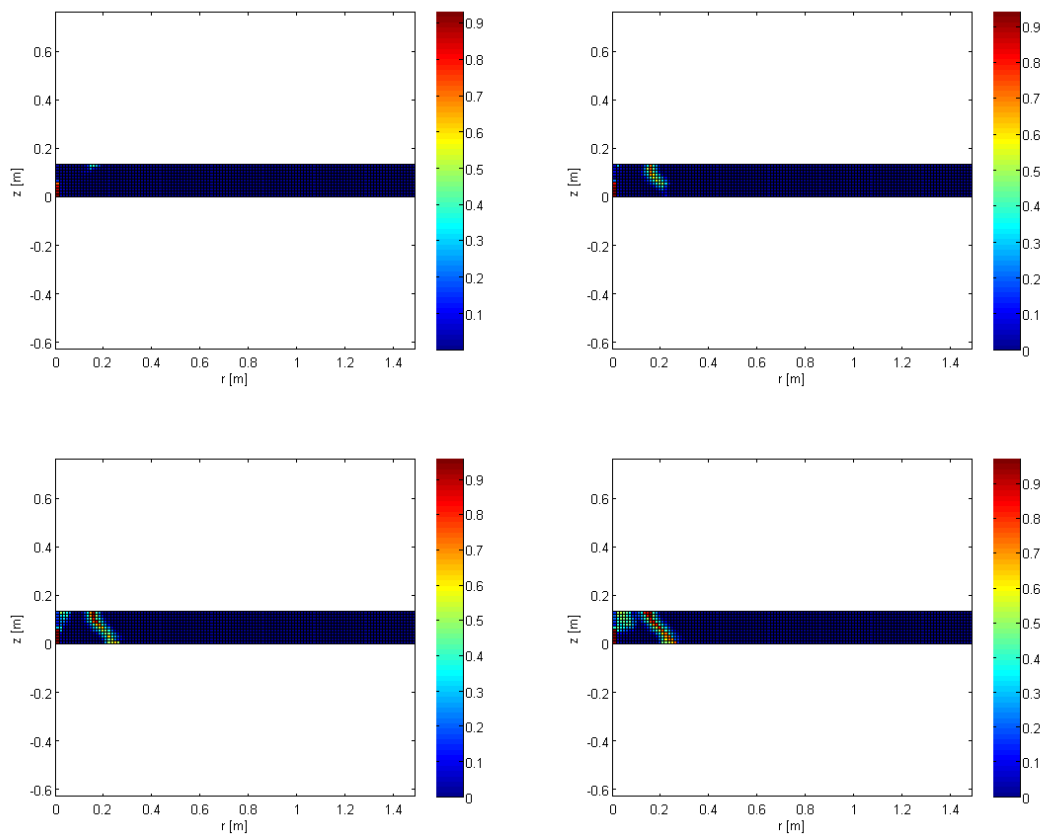


Figura 6.25: Grafico del danno rispettivamente per Rice e in peridinamica all'istante finale  $t_f = 1.2 \text{ ms}$

Nella prima immagine il percorso del danno è evidenziato dalle righe marcate che seguono i bordi degli elementi finiti che peraltro possono essere o completamente danneggiati o integri; il plot ottenuto con la peridinamica offre invece la possibilità di cogliere il livello del danno che viene visualizzato attraverso la solita gradazione di colori in cui il rosso indica danneggiamento completo. Si nota come qualitativamente questi risultati siano in ottimo accordo: è interessante sottolineare la formazione della frattura conica, la formazione dello sfrido e anche il leggero *spalling* che coinvolge i nodi lungo l'asse di simmetria. Sarebbe interessante provare a raffinare la

discretizzazione peridinamica nel tentativo di riprodurre la ramificazione della cricca conica che dovrebbe portare alla formazione delle due fratture circolari concentriche sulla superficie inferiore del bersaglio, ma ciò richiederebbe tempi e risorse di calcolo superiori a quelle di cui si dispone in questo lavoro.

Si riportano di seguito dei fotogrammi che permettono di visualizzare l'evoluzione nel tempo del danno che si è ottenuta.



**Figura 6.26: Evoluzione della cricca conica. Fotogrammi scattati, nell'ordine, agli istanti  $t_1 = 0.3 \text{ ms}$ ;  $t_2 = 0.4 \text{ ms}$ ;  $t_3 = 0.5 \text{ ms}$ ;  $t_4 = 0.6 \text{ ms}$**

Come ci doveva attendere, non si ha la formazione delle cricche circolari, che si sono osservate nel primo esempio, sulla superficie superiore del disco in calcestruzzo in quanto la velocità del proiettile è molto bassa.

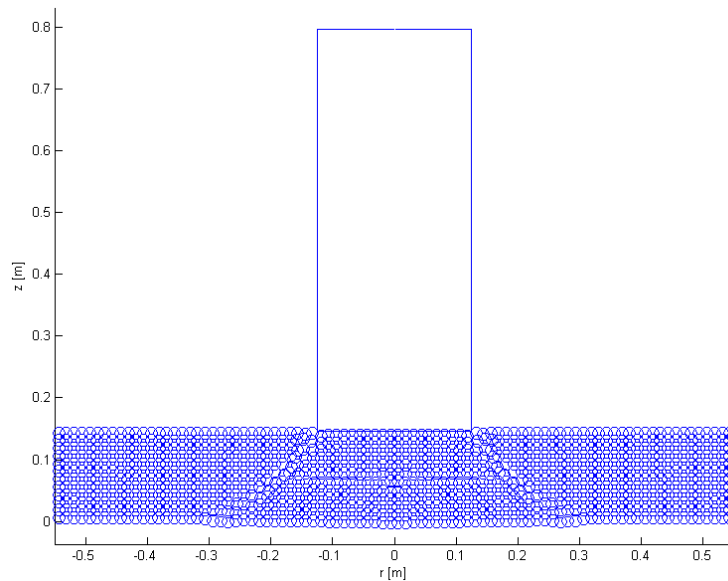


Figura 6.27: Proiettile e bersaglio all'istante finale  $t_f = 1.2 \text{ ms}$

#### 6.4 Proiettile conico su disco in calcestruzzo

L'esempio numerico che viene esposto in questo paragrafo è simile a quello appena presentato sulla punzonatura di un disco in calcestruzzo; qui però si è presa come riferimento la simulazione svolta da Liu, Gao e Tanimura [36] che, sfruttando il metodo DEM particellare nella sua formulazione assialsimmetrica, riproduce l'impatto di un proiettile conico su una piastra in calcestruzzo.

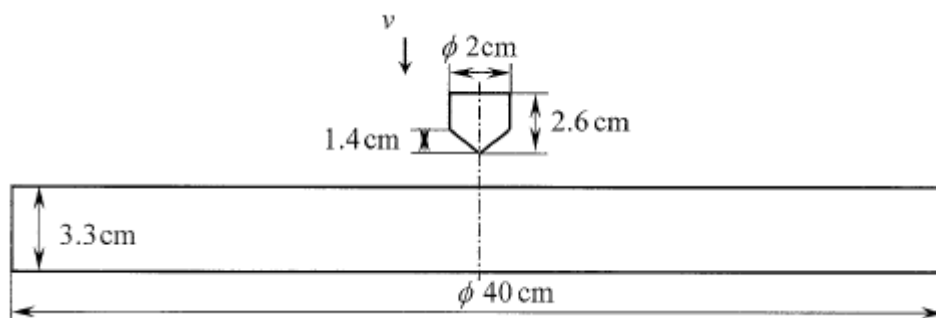
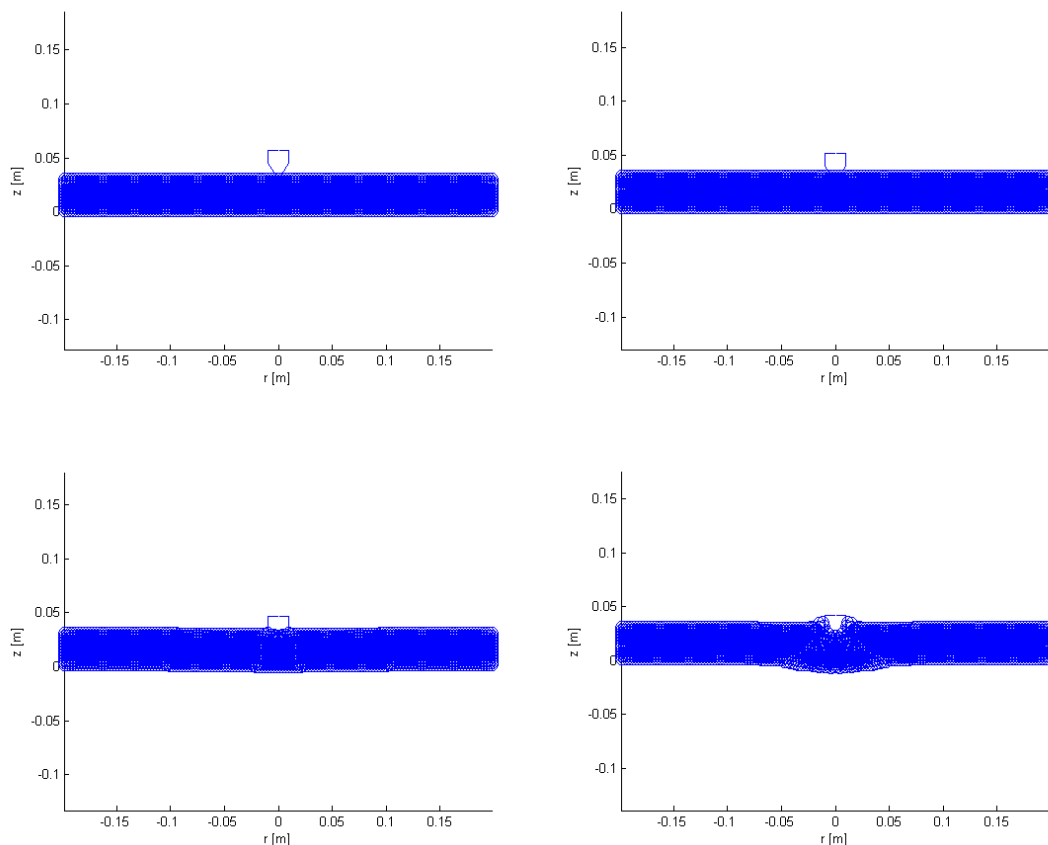


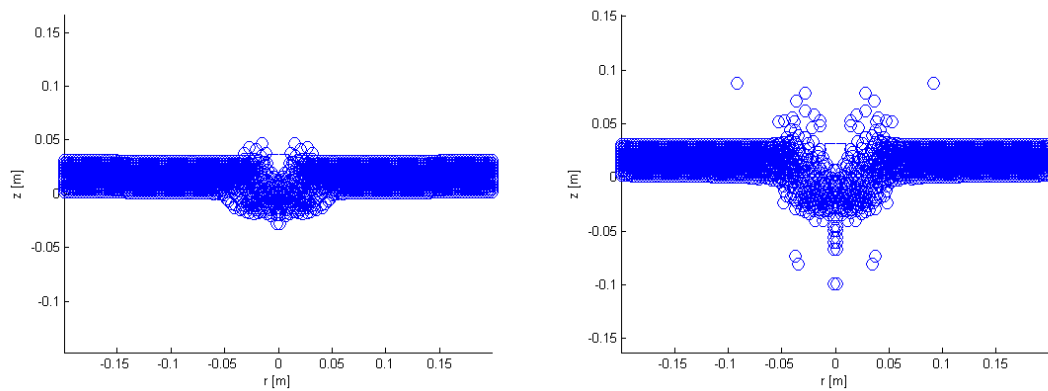
Figura 6.28: Parametri geometrici della simulazione

Il proiettile è in acciaio ( $\rho_p = 7800 \text{ kg/m}^3 \rightarrow m_p = 0.0408 \text{ kg}$ ) ed ha velocità iniziale  $v_0 = 50 \text{ m/s}$ ; il materiale del bersaglio (calcestruzzo) è caratterizzato da modulo elastico  $E = 23.3 \text{ GPa}$ , densità  $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$  e si è scelto un tasso di rilascio dell'energia  $G_0 = 175.1 \text{ J/m}^2$  (come nell'esempio precedente). Un'importante

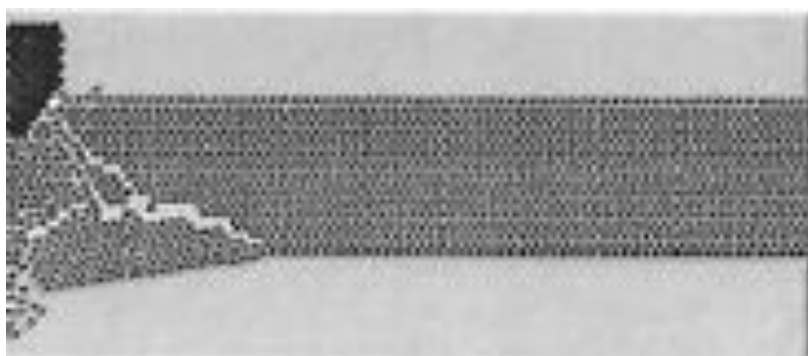
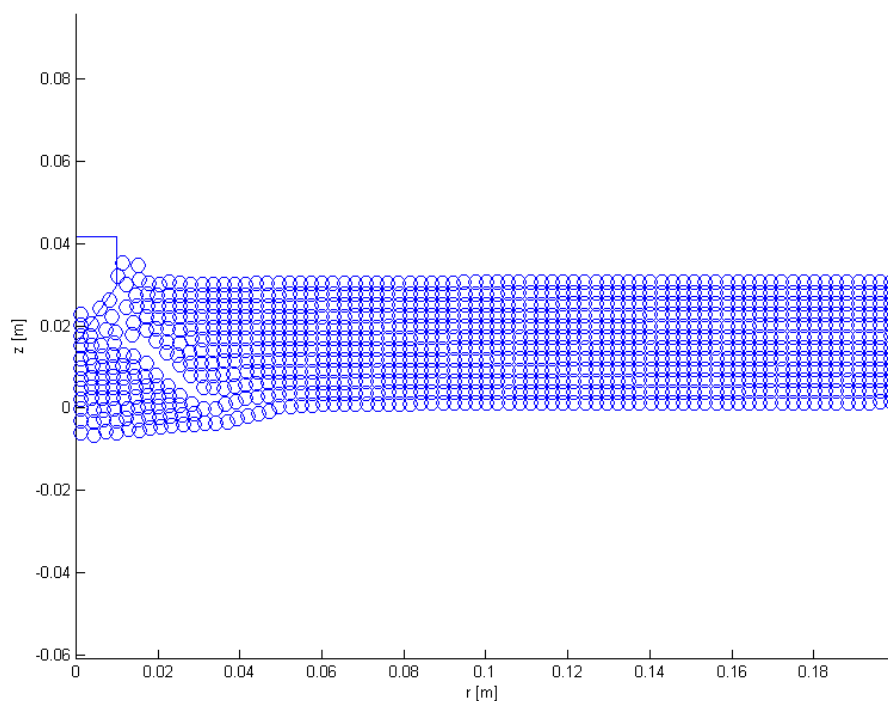
differenza tra il modello peridynamico e quello DEM dell'articolo [36] è che mentre nel presente lavoro il proiettile è ipotizzato indeformabile, Liu, Gao e Tanimura lo discretizzano: va considerato però che il materiale di quest'ultimo è molto più rigido di quello del *target* per cui considerarlo indeformabile sembra un'assunzione ragionevole. La *mesh* è stata realizzata discretizzando il semipiano meridiano del disco in calcestruzzo con  $75 \times 12$  celle di lato  $\Delta x = 0.0027 \text{ m}$  e si è scelto un passo di integrazione  $\Delta t = 10^{-6} \text{ s}$ . La costante del proiettile assunta è  $k_s = 1 \cdot 10^{13}$ , e anche in questo caso l'unico vincolo imposto è quello di simmetria cilindrica. Data la velocità del proiettile relativamente elevata e il ridotto spessore del bersaglio ci si attende in questo caso il fenomeno della craterizzazione e la perforazione di quest'ultimo da parte dell'impattante: ciò si può apprezzare soprattutto nel grafico del danno che si vedrà tra qualche pagina. I risultati ottenuti sono in buon accordo con quelli esposti nell'articolo di riferimento, e vengono di seguito riportati.







**Figura 6.29: Fotogrammi del rimbalzo scattati ogni 0.1 ms**



**Figura 6.30: Confronto tra risultati. Peridinamica in alto, DEM in basso**

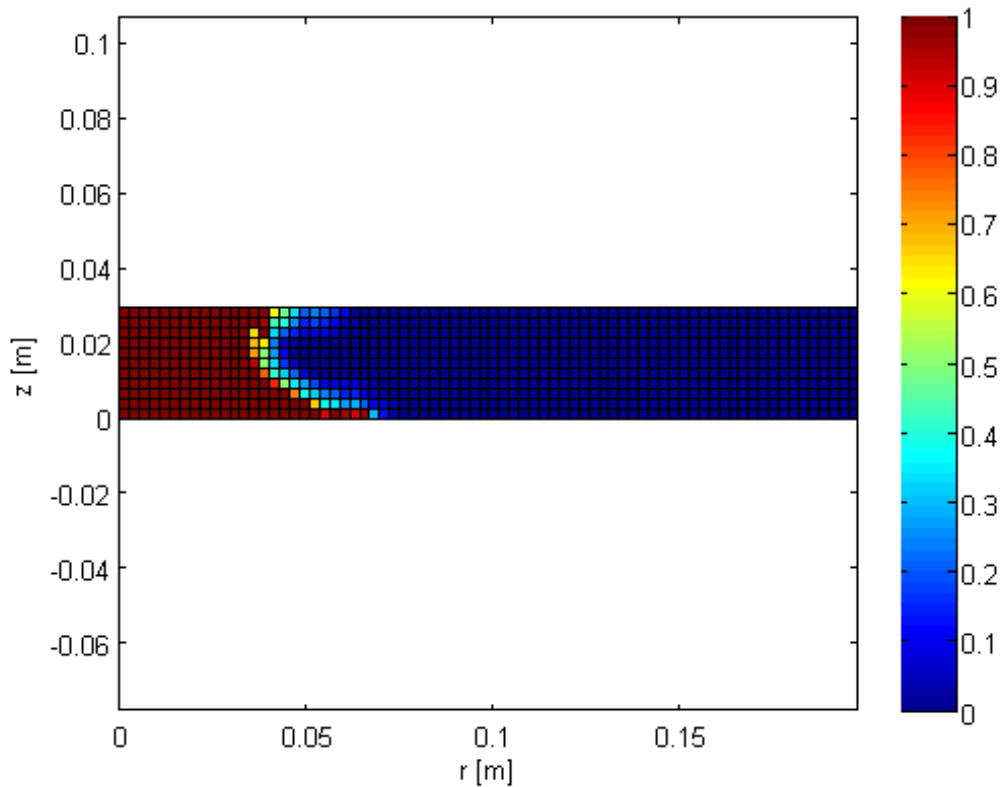
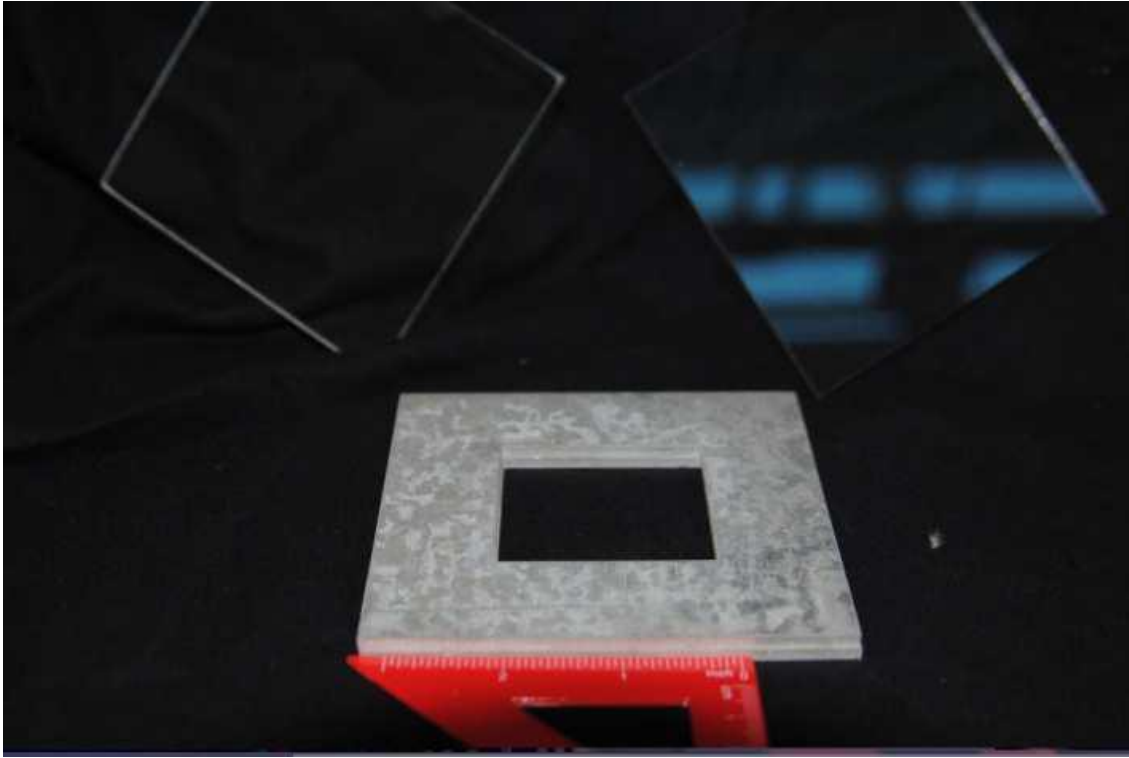


Figura 6.31: Diagramma del danno all'istante finale

## 6.5 Impatto di un proiettile sferico su un sottile layer di vetro supportato da uno strato di policarbonato

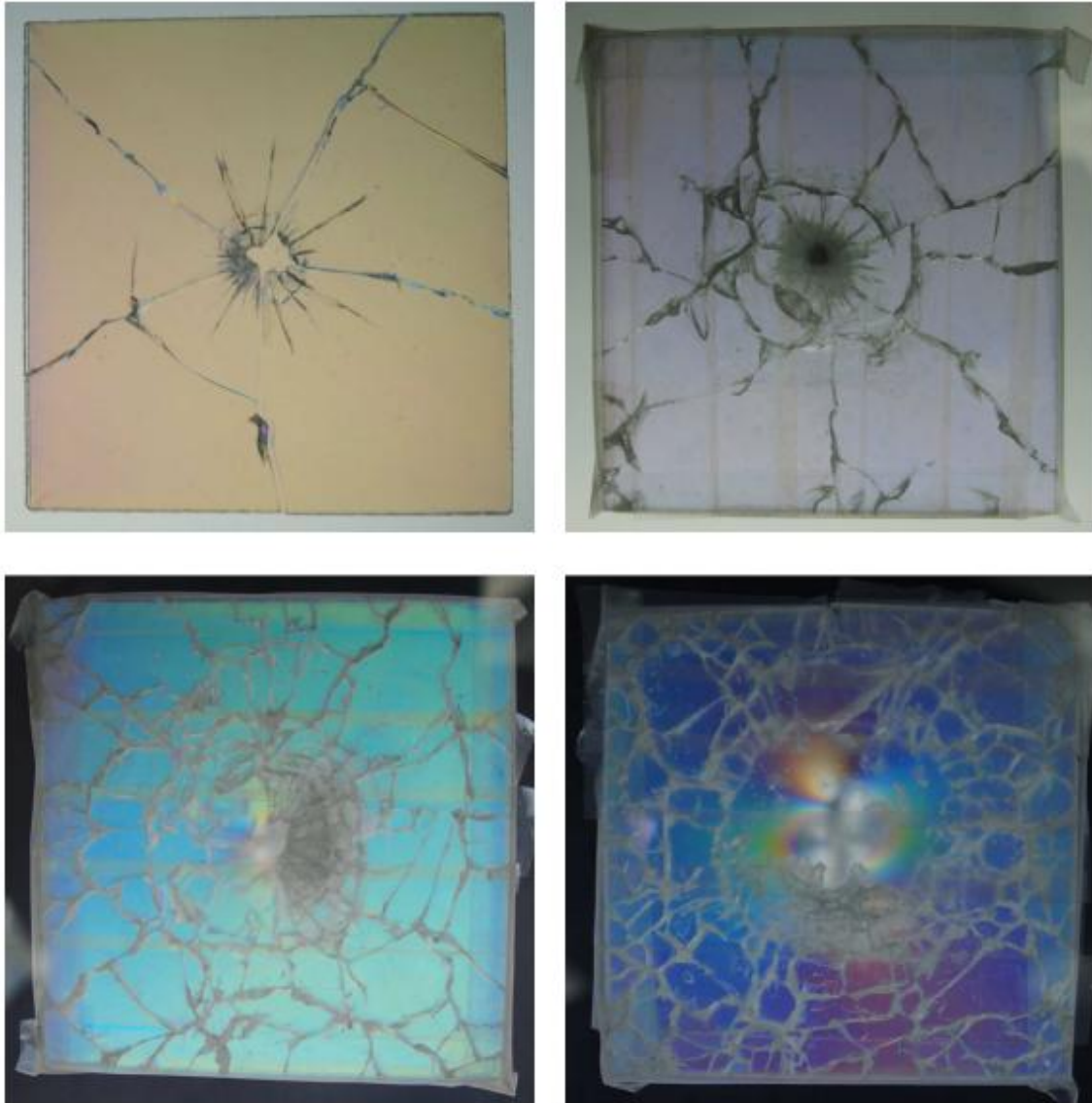
Quest'ultimo esempio è tratto da Hu, che nel suo lavoro *'Peridynamic Models for Dynamic Brittle Fracture'* [25] studia, per mezzo della peridinamica numerica 3D (utilizzando il codice *EMU*), l'impatto di un proiettile sferico su un bersaglio costituito da due *layer*: il primo fragile, in vetro (*soda-lime glass*), mentre il secondo in policarbonato, un materiale noto soprattutto per le sue importanti caratteristiche di resistenza agli impatti. Hu a sua volta fa riferimento alla prova sperimentale di Yu [74]. Il test condotto da Yu consiste appunto in una sottile lamina quadrata di vetro (di lato  $l_v = 10.16 \text{ cm}$  e spessore  $s_v = 0.33 \text{ cm}$ ) appoggiata su un *layer* di policarbonato di lato uguale ma di spessore leggermente inferiore ( $s_p = 0.30 \text{ cm}$ ); il sistema è supportato da un telaio molto rigido di lato sempre pari a  $l_v$  ma dotato di un'apertura quadrata ( $l = 5.08 \text{ cm}$ ) al suo centro. Il proiettile utilizzato è una sfera d'acciaio inossidabile

(AISI 440C) di diametro  $d = 0.556 \text{ cm}$  e massa  $m = 0.692 \text{ g}$  e viene sparato al centro della lamina in vetro a varie velocità nel *range* tra  $61 \text{ m/s}$  e  $300 \text{ m/s}$ .



**Figura 6.32: Setup dell'esperimento di Yu**

Il danno subito dallo strato di vetro è illustrato nella figura 6.33. Per le velocità più basse ( $61 - 100 \text{ m/s}$ ) sul vetro si forma il tipico reticolo di cricche radiali e circolari, mentre il policarbonato rimane intatto; il proiettile viene respinto e rimbalza con velocità che variano tra i  $2.6 \text{ m/s}$  e i  $7.8 \text{ m/s}$ . Alle velocità di impatto più alte ( $200 - 300 \text{ m/s}$ ) la morfologia del danno sul vetro diventa più intricata a causa della formazione di un numero maggiore di cricche, sia radiali che circolari; lo strato di policarbonato, pur rimanendo ancora integro, presenta in questi casi regioni di deformazione plastica e il proiettile viene ancora respinto (anche se a velocità maggiori delle precedenti: rispettivamente a  $33 \text{ m/s}$  e  $46 \text{ m/s}$ ). In tutti e quattro i casi quindi il proiettile è in grado di perforare il vetro, ma non il policarbonato.



**Figura 6.33: Danno subito dal *layer* di vetro in seguito agli impatti nel range di velocità 61 – 300 m/s**

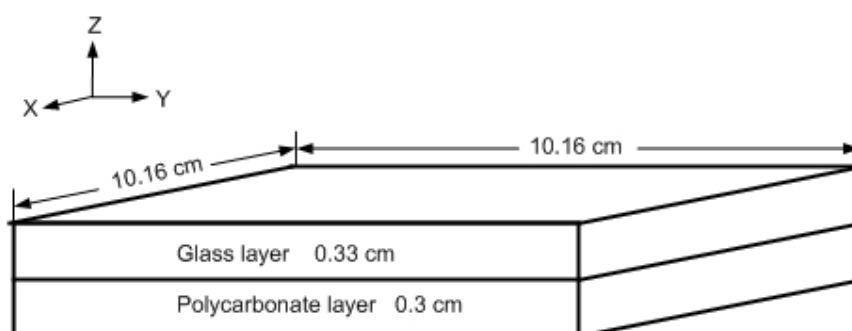
Le analisi numeriche di Hu, basandosi su quanto appena esposto, considerano una geometria simile a quella di Yu e gli stessi materiali:

**Tabella 6.1: Caratteristiche meccaniche dei materiali nelle simulazioni di Hu**

<b>Materiale</b>	<b>Modulo di Young</b>	<b>Densità</b>	<b><math>G_0</math></b>
Soda-lime glass	72 GPa	2440 kg/m <sup>3</sup>	8 J/m <sup>2</sup>
Policarbonato	2 GPa	1200 kg/m <sup>3</sup>	/

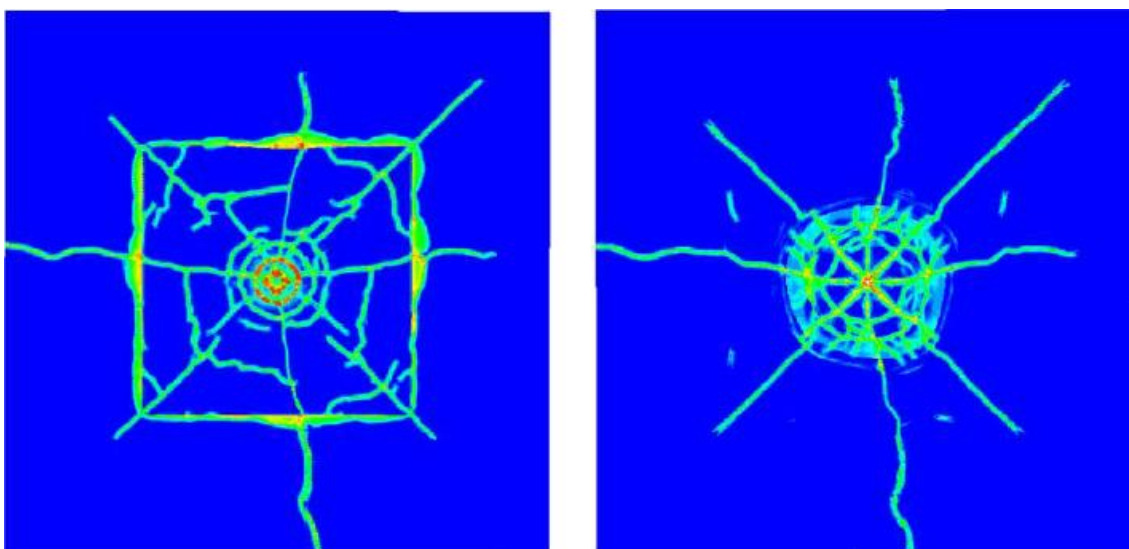
Il polycarbonato, data le sue elevate prestazioni all'impatto e eccellente resistenza alla perforazione, è assunto infrangibile, dotato cioè di una deformazione limite per i *bond*

$s_0$  infinita. Come condizioni al contorno Hu vincola le traslazioni lungo l'asse  $z$  per tutti i nodi appartenenti alle superfici superiore ed inferiore (eccettuati quelli in corrispondenza dell'apertura di  $(2.5 \times 2.5) \text{ cm}^2$ ) e fissa inoltre gli spostamenti orizzontali (lungo le direzioni  $x$  e  $y$ ) ai nodi che si trovano entro una distanza dai bordi pari al raggio d'orizzonte. All'interfaccia i due *layer* vengono considerati in semplice contatto: non esiste cioè alcun *bond* tra vetro e policarbonato, e i due strati interagiscono esclusivamente per contatto.



**Figura 6.34: Parametri geometrici per le analisi numeriche di Yu**

La discretizzazione di Hu prevede raggio d'orizzonte  $\delta = 1 \text{ mm}$ , un rapporto  $m = 4$  (da cui segue un lato delle celle pari a  $\Delta x = 0.25 \text{ mm}$  e un numero di nodi esorbitante: 6'129'120); la finestra temporale di integrazione è di  $7.7 \mu\text{s}$  con un passo  $\Delta t = 2.75 \text{ ns}$ .



**Figura 6.35: Grafici del danno ottenuti da Hu per la superficie superiore ed inferiore del vetro; velocità iniziale del proiettile  $v_0 = 61 \text{ m/s}$**

La precedente immagine mostra come la peridinamica 3D sia in grado di riprodurre qualitativamente le principali tipologie di rottura che intervengono in questo problema; il grosso limite è dato dall'onerosità computazionale della simulazione che, visto l'impressionante numero di nodi, è fuori dalla portata della maggior parte dei computer. Nonostante quindi il problema presentato non sia assialsimmetrico, si è scelto di modificarne la geometria al fine di poterlo affrontare con la tecnica che si è sviluppata in questa sede: come si vedrà il numero di nodi crolla al punto da consentire l'utilizzo di un computer portatile. Va anche considerato che sebbene la geometria del bersaglio e la distribuzione dei vincoli non sia a simmetria cilindrica, l'evoluzione del danno, entro un certo intorno del punto in cui avviene l'impatto, ha caratteristiche assialsimmetriche; inoltre si è ritenuto interessante valutare l'efficacia dell'algorithm implementato per le forze di contatto, che è determinante in questo esempio (molto più che nei precedenti) a causa del gran numero di interazioni di questo tipo che ci si aspetta all'interfaccia tra i due *layer*.

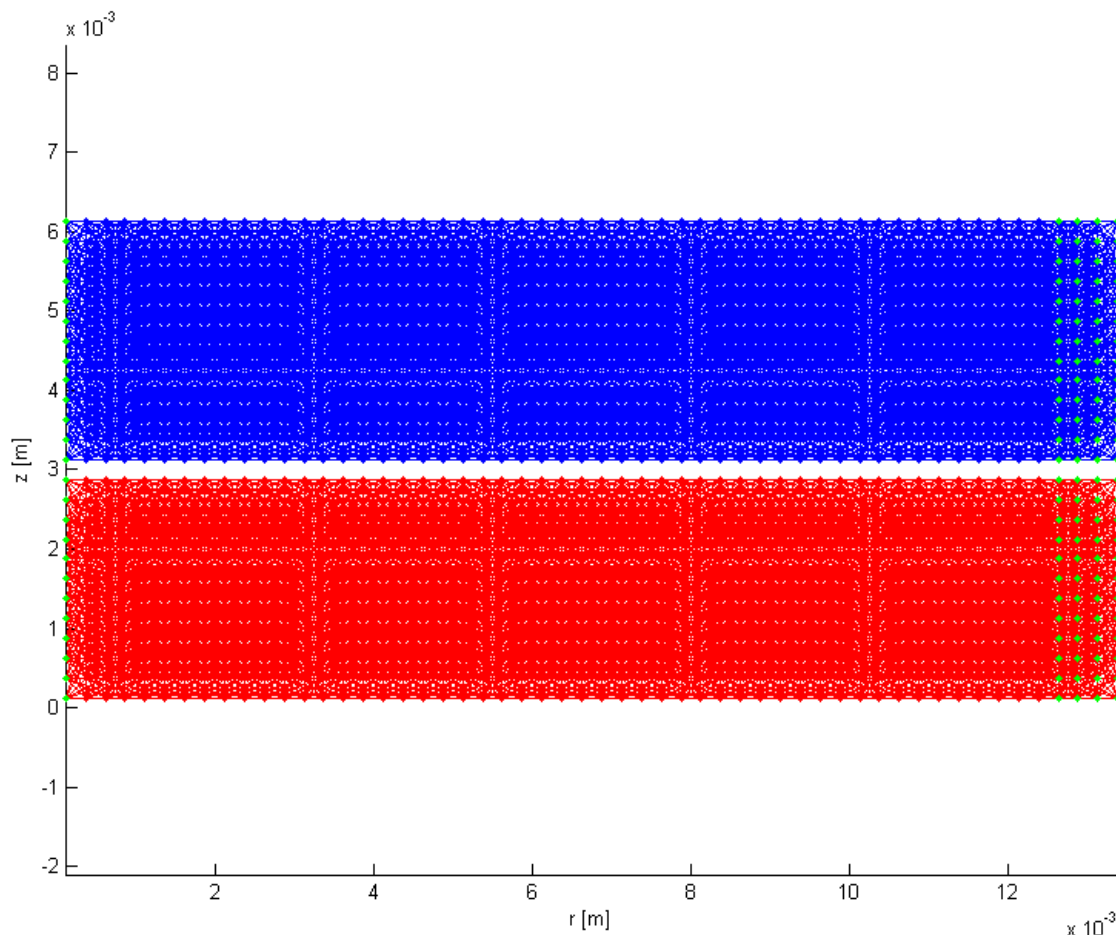
Per questa tesi, come appena accennato, la geometria del problema è stata modificata. Il bersaglio preso in esame è un disco di diametro  $D = 2.5 \text{ cm}$  (pari al lato dell'apertura del modello di Hu) costituito da uno strato superiore in vetro e da un supporto in policarbonato: per caratterizzare questi materiali si è fatto riferimento alla tabella 6.2; l'impattante è al solito rigido, dotato delle stesse geometria e massa di quello utilizzato da Hu, ma l'azione che esercita sui nodi del *target* non è quella prevista in EMU, bensì quella descritta alla sezione 5.8 che si basa sui proiettili implementati in LAMMPS [34]: si è assunto  $k_s = 10^{17}$ . La *mesh* è stata realizzata come descritto nella seguente tabella:

**Tabella 6.3: Caratteristiche del modello assialsimmetrico**

<i>layer</i>	<b>Materiale</b>	$\Delta x$	$\delta = 3\Delta x$	<b>N° di nodi</b>
#1	<i>Soda-lime glass</i>	0.25 mm	0.75 mm	$54 \times 13$
#2	Policarbonato	0.25 mm	0.75 mm	$54 \times 12$
				<b>TOT: 1350</b>

Il passo di integrazione si è assunto pari a  $\Delta t = 10 \text{ ns}$  e si sono svolte 2000 iterazioni. Inoltre i *bond* tra i due strati sono stati eliminati, e in aggiunta al vincolo di simmetria

imposto ai nodi lungo l'asse di rivoluzione, si sono incastrati perfettamente tutti i nodi in prossimità dell'estremità lontana dal punto d'impatto (entro un raggio d'orizzonte da tale bordo).



**Figura 6.36: Stato iniziale di nodi e *bond*. La regione blu rappresenta il *layer* di vetro, quella rossa lo strato di policarbonato; i nodi evidenziati in verde sono quelli vincolati**

Oltre alla geometria e alle condizioni di vincolo, vanno segnalate le seguenti differenze con il modello di Hu:

- Hu considera anche l'attrito che si sviluppa tra bersaglio e proiettile, fenomeno che in questa sede si è deciso di trascurare.
- Il limite di deformazione per i  $s_0$  in questo lavoro si è sempre pensato costante; Hu nel suo lavoro sfrutta invece una relazione che ammette una sorta di incrudimento per le regioni danneggiate, ovvero che permetta di avere un aumento della soglia  $s_0$  al crescere del livello di danno nell'intorno di un nodo:

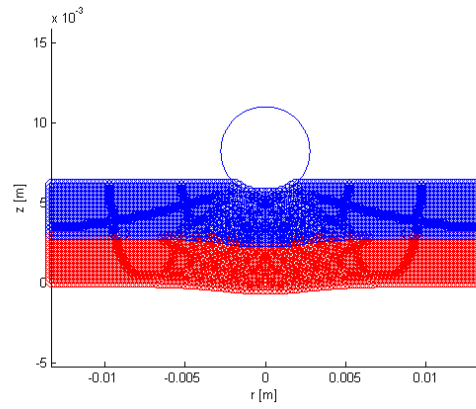
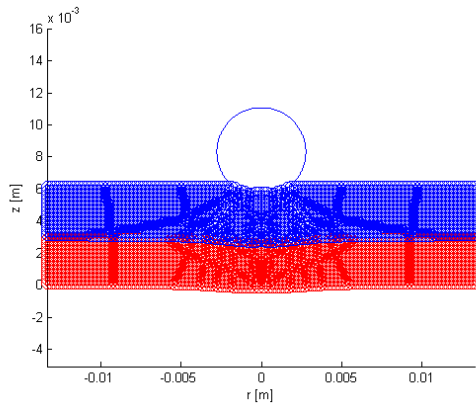
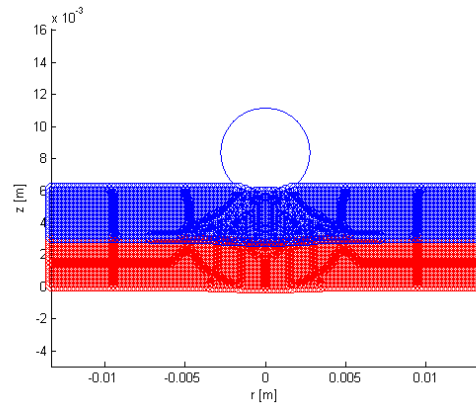
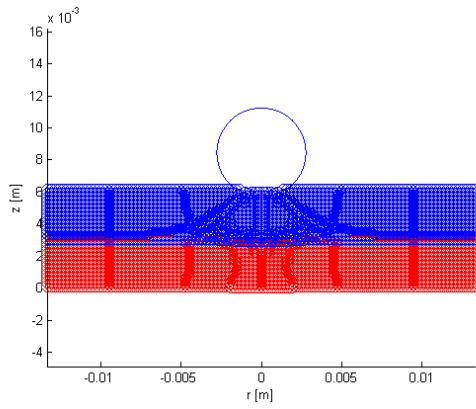
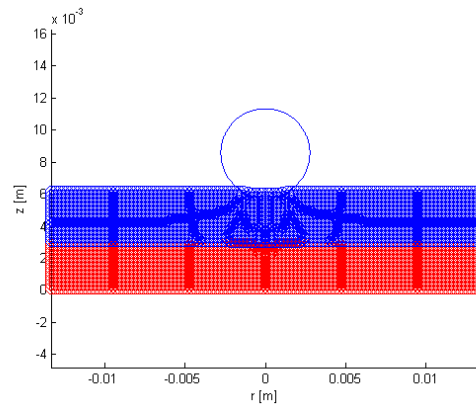
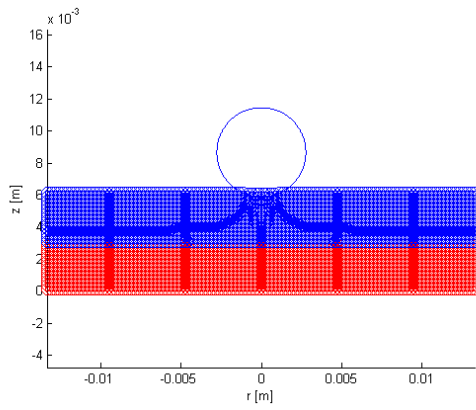
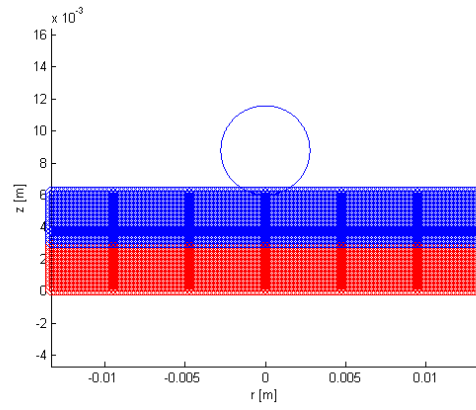
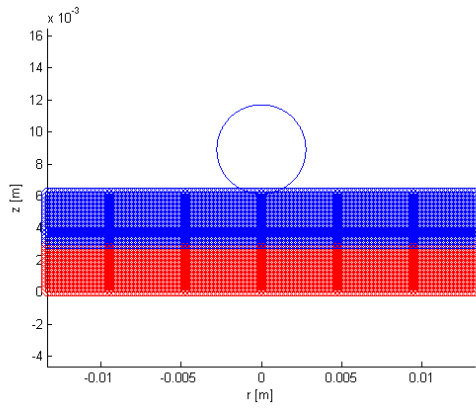
$$s_0 = \begin{cases} s_0 \cdot \min \left[ \gamma, 1 + \beta \cdot \frac{\varphi - \alpha}{1 - \varphi} \right] & \text{se } \varphi > \alpha \\ s_0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

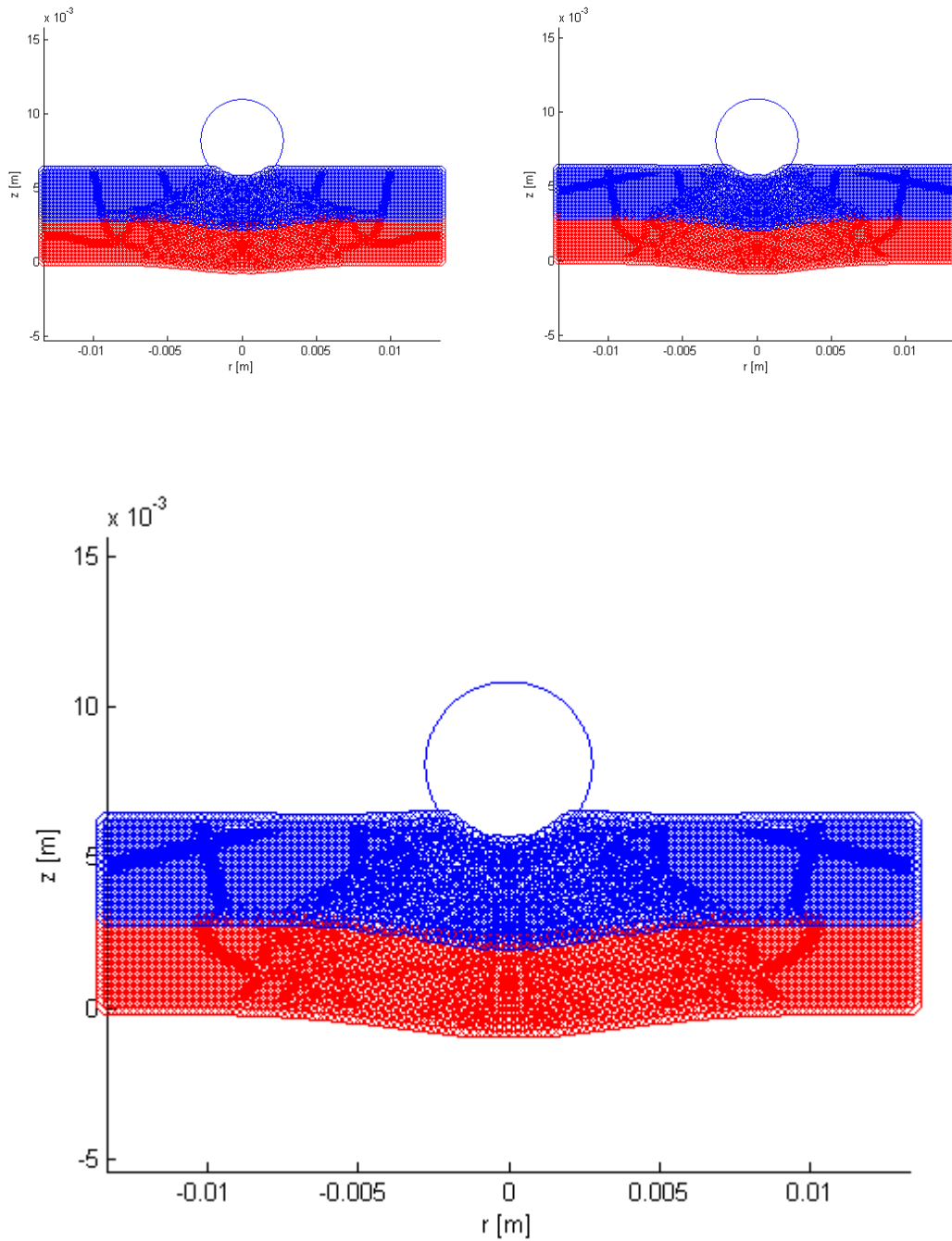
dove  $\varphi$  è il danno in corrispondenza di un nodo,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sono opportuni coefficienti (scegliendo  $\alpha = \beta = 0$  e  $\gamma = 1$  si ha  $s_0 = cost$ ). Questa relazione consente a Hu di evitare di sovrastimare il livello di frammentazione finale del bersaglio.

Le differenze tra il modello realizzato per assialsimmetria e quello proposto da Hu sono dunque molte, come molti sono i fenomeni fisici reali che intervengono nell'esperimento di Yu e che vengono qui trascurati: primi tra tutti l'attrito tra i due *layer*, la deformazione e l'erosione del proiettile, e il comportamento plastico del policarbonato. Tuttavia ci si aspetta di riuscire a riprodurre la perforazione del disco di vetro, la sua craterizzazione centrale, la formazione delle cricche circonferenziali sulla sua superficie superiore e la deformazione elastica dello strato di policarbonato causata dalle azioni trasmesse tra i due *layer* grazie all'algoritmo per le forze di contatto. Sarebbe anche interessante riuscire a cogliere il rimbalzo, ma come si vedrà in seguito si potrà apprezzare esclusivamente un forte rallentamento del proiettile che però, nei tempi previsti dalle simulazioni, non cambia il verso del suo moto.

Vengono di seguito esposti i risultati ottenuti. Si illustrano per prima cosa una serie di fotogrammi dell'impatto a  $v_0 = 61 \text{ m/s}$  per intervalli di  $2 \mu\text{s}$ . Si può osservare a livello qualitativo come il proiettile penetri nel *layer* di vetro e come anche la lamina di policarbonato risenta di quest'azione incurvandosi nella zona centrale; va poi sottolineato come vetro e policarbonato non si compenetrino grazie all'algoritmo descritto alla sezione 5.2.

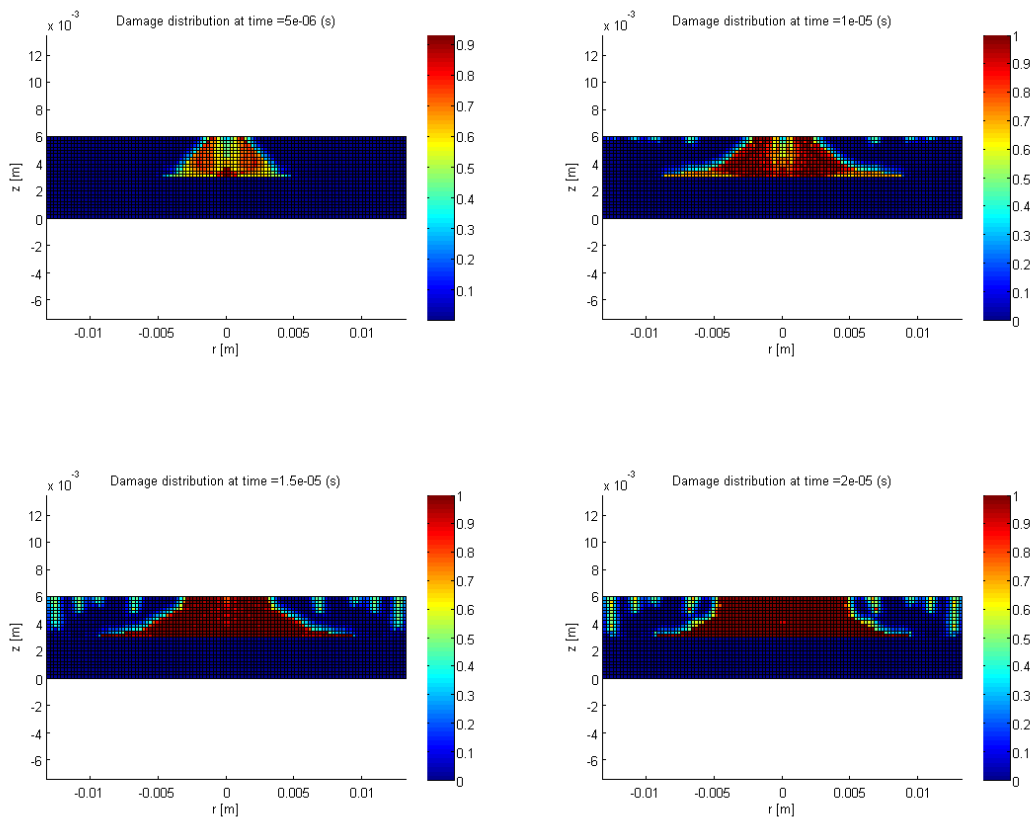




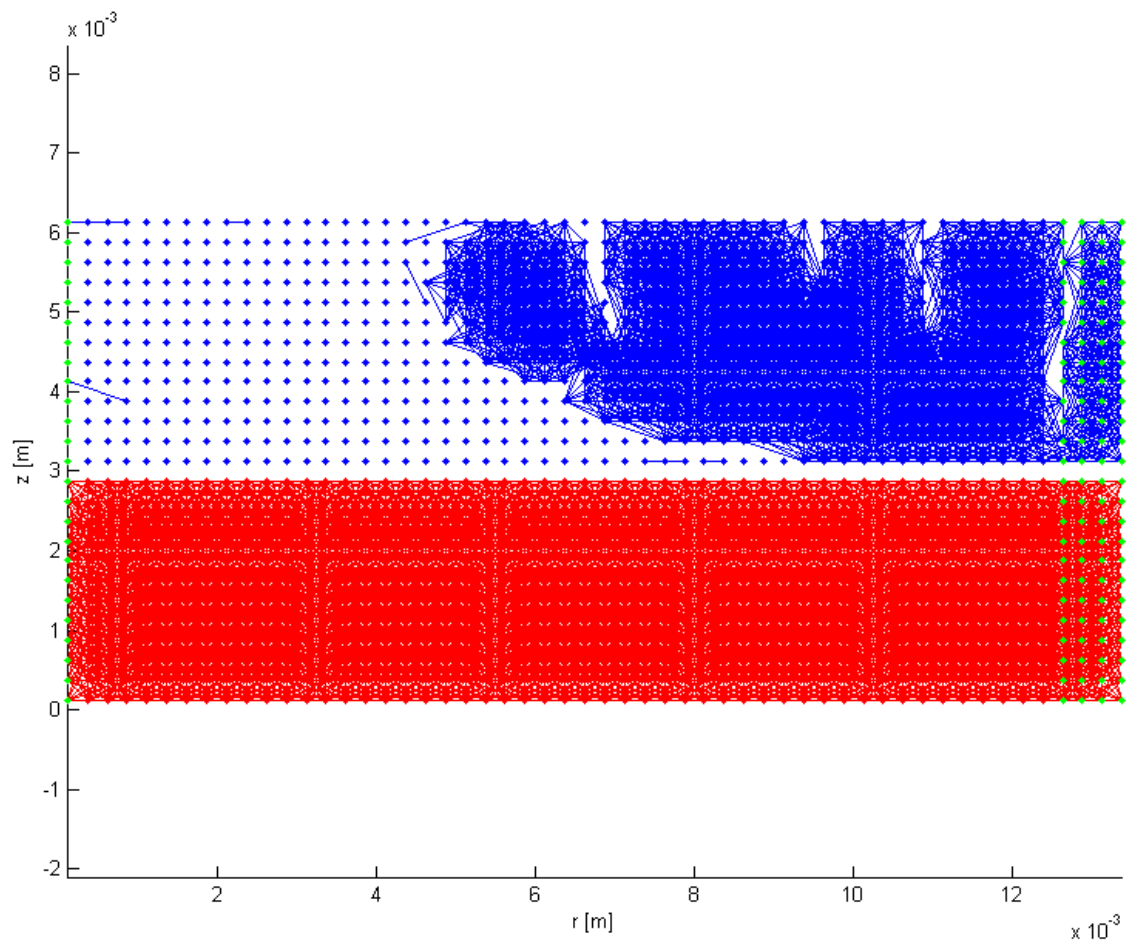


**Figura 6.37: Risultati della simulazione di impatto: evoluzione del sistema ogni  $2 \mu\text{s}$ . Il layer di vetro è raffigurato in blu, in rosso quello di polycarbonato.**

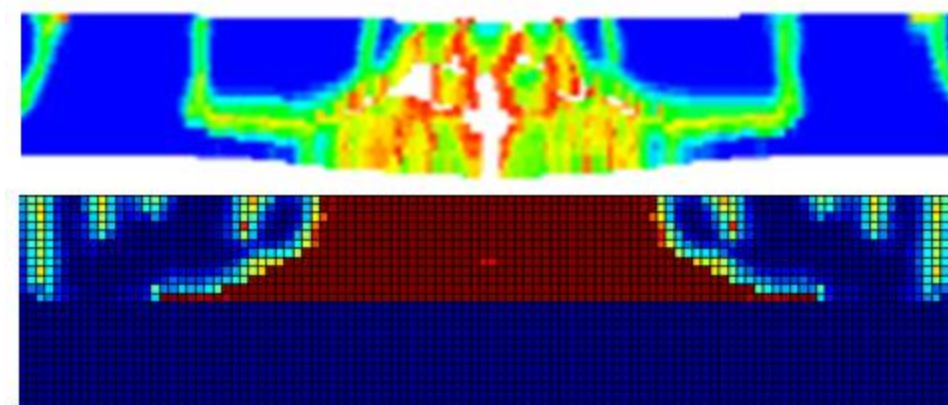
Nei diagrammi del danno si può notare l'evoluzione delle fratture: inizialmente si ha la propagazione del cono di frattura tipico della punzonatura, ma in seguito, data la velocità dell'impattante, il danno coinvolge anche zone che si trovano a una certa distanza dall'area impattata dando luogo alla craterizzazione; si osservano inoltre la nucleazione e quindi la propagazione delle attese cricche circonferenziali, una delle quali si sviluppa in corrispondenza del bordo incastrato. Complessivamente l'impatto risulta più gravoso rispetto a quello simulato da Hu sia per via del passo di integrazione che per l'assunzione di un parametro  $s_0$  costante che non consente 'l'incrudimento' del vetro.



**Figura 6.38: Diagramma del danno a vari istanti**



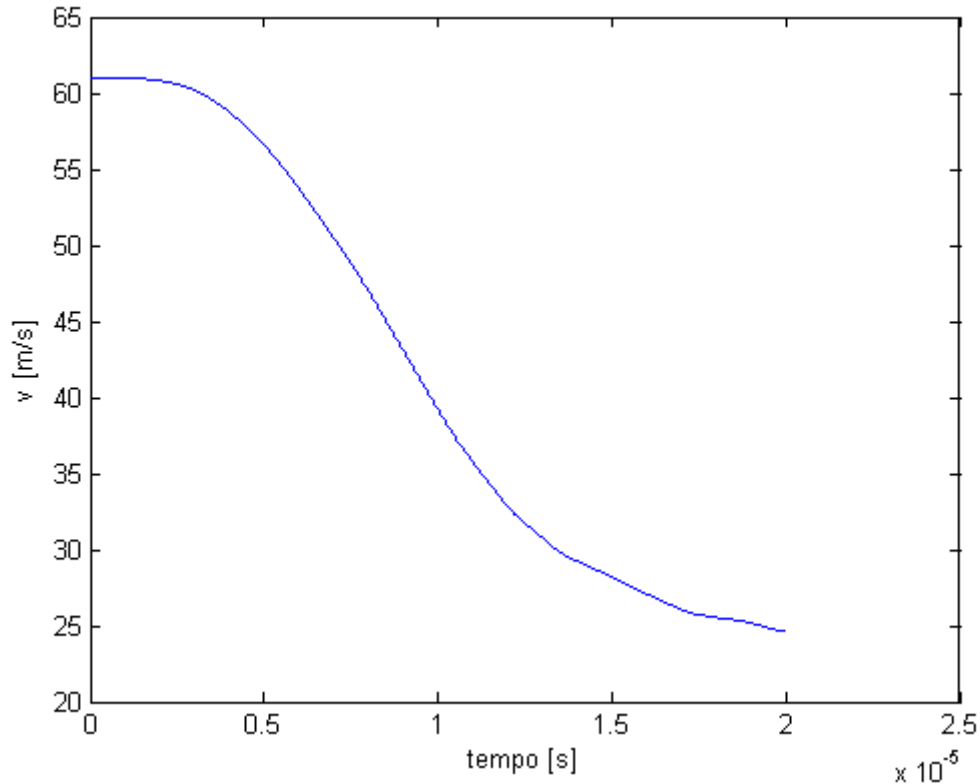
**Figura 6.39: Stato dei *bond* all'istante finale**



**Figura 6.40: Sezione trasversale del risultato di Hu a confronto con quello ottenuto tramite assialsimmetria**

Il seguente grafico della velocità del proiettile in funzione del tempo mostra come quest'ultimo venga effettivamente rallentato dalla reazione del bersaglio senza tuttavia

venire respinto (almeno entro la finestra temporale di integrazione utilizzata): ciò è dovuto probabilmente ad una prematura frantumazione centrale del *layer* di vetro.



**Figura 6.41: Trend della velocità del proiettile nel tempo.**

A velocità iniziali maggiori del proiettile si è osservato come effettivamente il bersaglio subisca un danneggiamento superiore, tuttavia per simulare questi impatti sarebbe necessario utilizzare *step* di integrazione più brevi di quelli utilizzati finora che però, per ragioni legate alle risorse di calcolo a disposizione, si è scelto di non prendere in considerazione. A titolo illustrativo vengono di seguito proposti alcuni grafici ottenuti da simulazioni lanciate per velocità d’impatto superiori ( $100\text{ m/s}$  e  $200\text{ m/s}$ ): si può apprezzare come questi impatti mettano maggiormente in crisi il bersaglio.

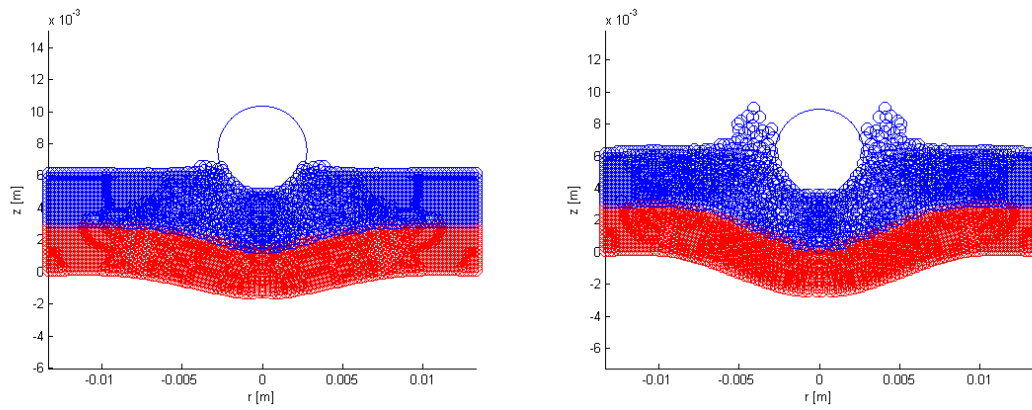


Figura 6.42: Stato del sistema all'istante finale ( $t = 20 \mu s$ ) per velocità iniziali dell'impattante rispettivamente pari a  $v_0 = 100 \text{ m/s}$  e  $v_0 = 200 \text{ m/s}$

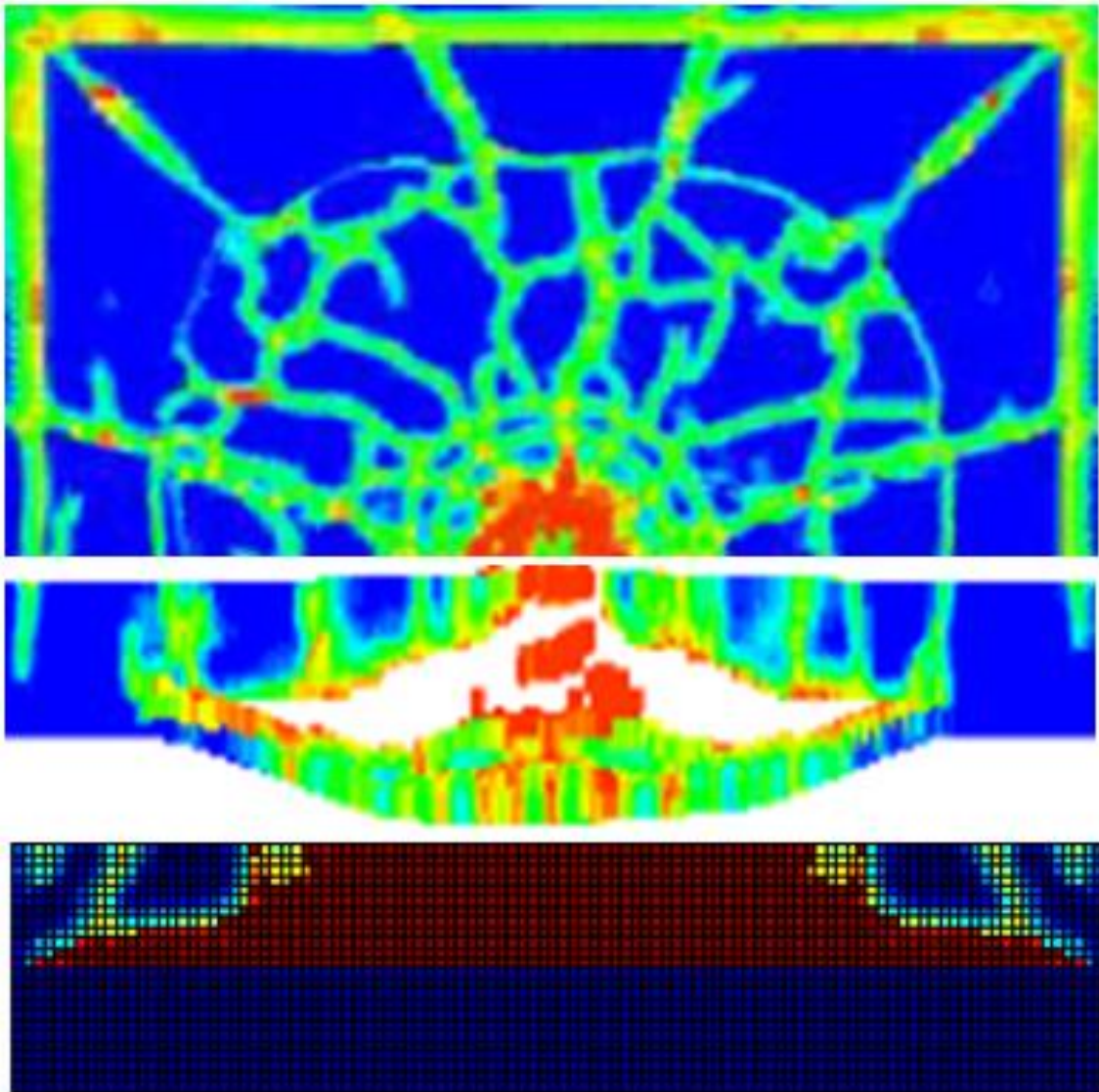


Figura 6.43: Impatto a  $v_0 = 100 \text{ m/s}$ . Nell'ordine: vista superiore e in sezione del bersaglio di Hu e risultato ottenuto tramite assialsimmetria

## 7 Conclusione

Uno dei più recenti e innovativi sviluppi teorici proposti nel campo della meccanica dei solidi è senz'altro rappresentato dalla peridinamica, una riformulazione non locale della teoria dell'elasticità che è stata proposta da Silling nel 2000. La peridinamica si basa sull'ipotesi del continuo per la descrizione dei corpi, e prevede che le interazioni tra i punti materiali che li costituiscono si possano sviluppare entro una distanza finita che prende il nome di orizzonte. Le peculiarità che ne hanno favorito la rapida diffusione nel mondo della ricerca del settore (soprattutto nel ramo della meccanica della frattura) sono sicuramente le seguenti: innanzitutto le equazioni del moto che la regolano sfruttano integrali volumetrici del campo degli spostamenti (anziché le sue derivate spaziali) garantendo così l'esistenza di una soluzione anche in problemi che prevedano l'insorgenza di discontinuità in tale campo; in secondo luogo questa teoria è una delle poche al momento in grado di fornire una definizione univoca del concetto di 'danno' che risulta peraltro quantificabile e parte integrante del modello costitutivo di un materiale.

A causa della elevata complessità che caratterizza le equazioni (integro-differenziali) del moto in peridinamica, nell'affrontare problemi pratici si ricorre in genere alla loro integrazione numerica: dal momento però che lo sviluppo di *software* dedicati è ancora agli inizi, si rendono necessarie schematizzazioni mono e bidimensionali di questa teoria che consentano di ridurre il più possibile la complessità dei modelli numerici e con essa i tempi di calcolo. Il primo contributo di questa tesi consiste proprio nella formulazione della peridinamica in coordinate cilindriche che permette di trattare problemi tridimensionali assialsimmetrici attraverso semplificazioni bidimensionali. Le equazioni ottenute, come ci si poteva attendere, hanno richiesto l'implementazione di un codice (si è scelto di lavorare in Matlab) che ha consentito di studiare numericamente vari problemi di impatti su solidi di rivoluzione fragili.

Si è fatto riferimento a vari articoli disponibili in letteratura, che riportano risultati ottenuti dallo studio di simili problemi attraverso altre tecniche numeriche (come la peridinamica 3D, o i metodi FEM e DEM) e prove sperimentali, con l'obiettivo di riuscire a simulare i principali fenomeni di rottura del bersaglio che intervengono.

Il primo materiale considerato per il *target* è stato il vetro: modellando l'impatto di un proiettile sferico su un disco sottile [49], [50], [62] si sono riprodotti con successo sia la perforazione di quest'ultimo che lo sviluppo delle tipiche cricche circonferenziali la cui formazione è testimoniata da un gran numero di evidenze sperimentali; prendendo in esame un bersaglio più spesso si è visto invece come, per velocità iniziali relativamente basse dell'impattante, questo venga respinto e rimbalzi sostanzialmente sul *target* [62]. Per entrambi i casi appena elencati si è poi studiato, come proposto in [58], l'effetto che si ottiene modulando la non località delle interazioni tra punti materiali tramite la *influence function*, un oggetto matematico che consente di variare a piacimento il peso che hanno le azioni a distanza rispetto a quelle a corto raggio tra le particelle: per dischi sottili si è osservato come sia così possibile ottenere morfologie diverse per l'evoluzione del danno, da un aumento del numero delle cricche circonferenziali alla loro completa scomparsa; nel caso di un bersaglio più spesso questo ha consentito di riprodurre, anche se non con l'efficacia sperata, le ben note cricche Herziane dovute all'indentazione di materiali fragili.

In seguito, data la sua importante rilevanza pratica, si è studiato il meccanismo di rottura per punzonatura del calcestruzzo: utilizzando un proiettile cilindrico a bassa velocità [53] si è riusciti ad apprezzare la nucleazione e la propagazione di cricche coniche su un bersaglio sottile e il conseguente distacco dello sfrido; utilizzando invece un proiettile appuntito a velocità maggiori è stata simulata la craterizzazione di un bersaglio simile al precedente [36].

Infine si è considerato come *target* un *bilayer* in cui lo strato impattato di vetro è supportato da un disco in policarbonato [25], un materiale spesso usato per le corazzature antiproiettile date le sue elevate prestazioni in termini di resistenza all'impatto. Questo esempio ha consentito, oltre che l'attesa [74] riproduzione sia della craterizzazione centrale del *layer* in vetro che la formazione di varie cricche circonferenziali sulla sua superficie superiore, anche di validare un algoritmo implementato per simulare la condizione di contatto semplice tra due strati di materiali diversi.

Per concludere va ricordato che, sebbene la peridinamica sia stata oggetto di una intensa attività di ricerca nell'ultimo decennio, questa teoria è ben lungi dall'essere consolidata



e necessita ancora di un grande lavoro sia dal punto di vista teorico che numerico. Con riferimento a quanto esposto in questa tesi, si sottolinea che il codice realizzato richiede d'essere ottimizzato: attualmente i tempi di calcolo sono infatti estremamente lunghi, anche qualora si abbia a che fare con modelli semplici (dell'ordine di migliaia di nodi); sarebbe poi interessante sviluppare l'idea del *softening* dei bordi (paragrafo 5.5) anche per la peridinamica assialsimmetrica e inoltre schematizzazioni meno semplicistiche e più articolate degli impattanti e dei parametri di rottura dei *bond* potrebbero essere necessarie per riprodurre con maggior accuratezza i risultati sperimentali. E' poi opportuno mettere alla prova la teoria sviluppata in questa tesi anche per problematiche diverse dagli impatti e magari azzardare, per problemi molto semplici, qualche tentativo di ottenere soluzioni analitiche delle equazioni del moto da confrontare con quelle previste dalla meccanica del continuo classica.

Parlando più in generale, in tutto il presente lavoro si è spesso sottolineato come il principale limite di questa teoria sia il vincolo sul coefficiente di Poisson; sebbene ultimamente si sia tentato di introdurre degli ulteriori gradi di libertà nodali alla peridinamica *bond based* [19] per affrontare questo problema, un suo superamento convincente ha richiesto di ripensare completamente la teoria attraverso la sua formulazione di stato. Quest'ultimo approccio ([65], 2007) risulta però più complesso della peridinamica *bond based* sia per quanto riguarda i fondamenti matematici sia per l'implementazione numerica; di conseguenza non è stato ancora ben metabolizzato e si dovrà attendere prima che raggiunga la piena maturità.



## Bibliografia

- [1] AGWAI A., GUVEN I., MADENCI E., *Predicting Crack Initiation and Propagation Using XFEM, CZM and Peridynamics: A Comparative Study*, Electronic Components and Technology Conference, 2010.
- [2] ASKARI E., Xu J., Silling S.A., *Peridynamic analysis of damage and failure in composites*, In 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada. Reston, VA: AIAA. Citeseer, 2006.
- [3] BALL A., MC KENZIE H.W., *On the low velocity impact behaviour of glass plates*, Journal de Physique IV, Colloque C8, supplément au Journal de Physique III, Vol. 4, Septembre 1994.
- [4] BIRKEY J., *Development of Visual Emu, a Graphical User Interface for The Peridynamic Emu Code*, B.S., a thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree, Master of Science, Department of Mechanical and Nuclear Engineering, College of Engineering, Kansas State University, Manhattan, Kansas, 2007.
- [5] BITTENCOURT E., CREUS G.J., *Finite element analysis of three-dimensional contact and impact in large deformation problems*, Computers and Structures, n. 69, 1998, pp. 219-234.
- [6] BLESS S.J., CHEN T., RUSSELL R., *Impact on Glass Laminates*, 23<sup>rd</sup> International Symposium on Ballistics, Tarragona, Spain 16-20 April 2007.
- [7] BOBARU F., HA Y.D., HU W., *Damage progression from impact in layered glass modeled with peridynamics*, Central European Journal of Engineering, Vol. 2, n. 4, 2012, pp. 551-561.
- [8] BOUZID S., NYOUNGUE A., AZARI Z., BOUAOUADJA N., PLUVINAGE G., *Fracture criterion for glass under impact loading*, International Journal of Impact Engineering, n. 25, 2001, pp. 831-845.
- [9] CHAI H., LAWN B., WUTTIPHAN S., *Fracture modes in brittle coatings with large interlayer modulus mismatch*, Journal of Materials Research, Vol. 14, n. 9, Sep. 1999.
- [10] CHAUDHRI M.M., KURKJIAN C.R., *Impact of Small Steel Spheres on the Surfaces of "Normal" and "Anomalous" Glasses*, Journal of the American Ceramic Society, Vol. 69, n. 5, May 1986, pp. 404-410.
- [11] CHENG M., LIU W., LIU K., *New discrete element models for elastoplastic problems*, Acta Mech Sin, n. 25, 2009, pp. 629-637.

- [12] COLAVITO K.W., KILIC B., CELIK E., MADENCI E., ASKARI E., SILLING S.A., *Effect of void content on stiffness and strength of composites by a peridynamic analysis and static indentation test*, 48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC structures, structural dynamics, and materials conference, Honolulu, HI, pages AIAA-2007-2251, 2007.
- [13] COLAVITO K.W., KILIC B., CELIK E., MADENCI E., ASKARI E., SILLING S.A., *Effects of nanoparticles on stiffness and impact strength of composites*, 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC structures, structural dynamics, and materials conference, Newport, RI, pages AIAA-2007-2021, 2007.
- [14] DIEHL P., *Implementierung eines Peridynamik-Verfahrens auf GPU*, Institute of Parallel and Distributed Systems, University of Stuttgart, Diplomarbeit Nr. 32 68, May 2012.
- [15] DOLCE F., *Analisi del danno da impatto ad alta velocità su strutture composite in allumina*, Tesi di Dottorato in Ingegneria Meccanica, Facoltà di Ingegneria, Università degli Studi di Cassino, XX Ciclo.
- [16] EMMRICH E., LEHOUCQ R.B., PUHST D., *Peridynamics: a nonlocal continuum theory*.
- [17] EVANS A.G., GULDEN M.E., ROSENBLATT M., *Impact Damage in Brittle Materials in the Elastic-Plastic Response Regime*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, October 26, 2012.
- [18] FOSTER J.T., SILLING S.A., CHEN W.W., *Viscoplasticity using peridynamics*, International journal for numerical methods in engineering, 81(10):1242-1258, 2010.
- [19] GERSTLE W., SAU N., ANGUILERA E., *Micropolar Peridynamic Constitutive Model for Concrete*, Transactions, SMiRT 19, Toronto, August 2007.
- [20] GERSTLE W., SAU N., SILLING S., *Peridynamic Modeling of Plain and Reinforced Concrete Structures*, 18<sup>th</sup> International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Beijing, China, August 7-12, 2005.
- [21] GOLDSMITH W., *Impact, the Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids*, Dover publication, Inc., Mineola, New York, 2001.
- [22] HA Y.D., BOBARU F., *Traction boundary conditions in peridynamics: a convergence study*, Technical report, Department of Engineering Mechanics, University of Nebraska–Lincoln, Lincoln, Nebraska, 2009.

- [23] HA Y.D., BOBARU F., *Studies of dynamic crack propagation and crack branching with peridynamics*, International Journal Fracture Mechanics, n. 162, 2010, pp. 229-244.
- [24] HA Y.D., F. BOBARU, *Characteristics of dynamic brittle fracture captured with peridynamics*, Engineering Fracture Mechanics, n. 78, 2011, pp. 1156-1168.
- [25] HU W., *Peridynamic Models for Dynamic Brittle Fracture*, Engineering Mechanics Dissertations & Theses, Department of Mechanical & Materials Engineering, University of Nebraska, Lincoln, Nebraska, March, 2012.
- [26] ISMAIL J., ZAIRI F., NAIT-ABDELAZIZ M., AZARI Z., *Computational modelling of static indentation-induced damage in glass*, Computational Materials Science, n. 42, 2008, pp. 407–415.
- [27] JIRASEK M., *Comparative study on finite elements with embedded discontinuities*, Computer methods in applied mechanics and engineering, n. 188, 2000, pp. 307-330.
- [28] KILIC B., *Peridynamic Theory for Progressive Failure Prediction in Homogeneous and Heterogeneous Materials*, A Dissertation Submitted to the Faculty of the Department of Aerospace and Mechanical Engineering in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy with a Major in Mechanical Engineering in the Graduate College the University of Arizona, 2008.
- [29] KILIC B., AGWAI A., MADENCI E., *Peridynamic theory for progressive damage prediction in center-cracked composite laminates*, Composite Structures, 90(2):141-151, 2009.
- [30] KILIC B., MADENCI E., *Structural stability and failure analysis using peridynamic theory*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 44(8):845-854, 2009.
- [31] KIM M.S., SHIN H.S., LEE H.C., *The effects of back plate materials on perfect cone formation in impact-loaded soda-lime glass*, International Journal of Impact Engineering, n. 28, 2003, pp. 281–290.
- [32] KLEIN P.A., FOULK J.W., CHEN E.P., WIMMER S.A., GAO H.J., *Physics-based modeling of brittle fracture: cohesive formulations and the application of meshfree methods*, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, n. 37, 2001, pp. 99-166.
- [33] KNIGHT C.G., SWAIN M.V., CHAUDHRI M.M., *Impact of small steel spheres on glass surfaces*, Journal of Materials Science, n. 12, 1977, pp. 1573-1586.

- [34] *LAMMPS Users Manual, Large-scale Atomic/Molecular Massively Parallel Simulator*, Sandia National Laboratories, Sandia Corporation, 2003.
- [35] LANCIOTTI M., *Metodi Numerici Avanzati nello Studio delle Sovrastrutture Strdali Flessibili*, Tesi di Laurea in Ingegneria Civile, Dipartimento in Ingegneria delle Strutture, dei Trasporti, delle Acque, del Rilevamento e del Territorio, Facoltà di Ingegneria, Università degli Studi di Bologna, A.A. 2008-2009.
- [36] LIU K., GAO L., TANIMURA S., *Application of Discrete Element Method in Impact Problems*, JSME International Journal, Series A, Vol. 47, n. 2, 2004.
- [37] LIU K., LIU W., *Application of discrete element method for continuum dynamic problems*, Arch Appl Mech, n. 76, 2006, pp. 229-243.
- [38] LIU W., HONG J.W., *Discretized peridynamics for linear elastic solids*, Comput Mech, n. 50, 2012, pp. 579-590.
- [39] LIU W., HONG J.W., *Discretized peridynamics for brittle and ductile solids*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, n. 89, 2012, pp. 1028-1046.
- [40] MOES N., BELYTSCHKO T., *Extended finite element method for cohesive crack growth*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, n. 46, 1999, pp. 131-150.
- [41] MOES N., DOLBOW J., BELYTSCHKO T., *A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing*, Engineering Fracture Mechanics, n. 69, 2002, pp. 813-833.
- [42] NOURRY E., NUGUE J.C., *Impact on Laminated Glass: Post-breakage Behaviour Assessment*.
- [43] NILSSON L., SAHLIN S., *Impact of a steel rod on a reinforced concrete slab*, Dynamic Modeling of Concrete Structures, ACI, SP-73, pp 165-187, 1982.
- [44] OSTOJA-STARZEWSKI M., SHENG P.Y., ALZEBDEH K., *Spring network models in elasticity and fracture of composites and polycrystals*, Computational Materials Science, n. 7, 1996, pp. 82-93.
- [45] OSTOJA-STARZEWSKI M., *Lattice models in micromechanics*, American Society of Mechanical Engineers, Appl Mech Rev, Vol. 55, n. 1, January 2002.
- [46] OTERKUS E., *Perdynamic Theory for Modeling Three-Dimensional Damage growth in metallic and composite structures*, A Dissertation Submitted to the Faculty of the Department of Aerospace and Mechanical Engineering in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy with a

Major in Aerospace Engineering in the Graduate College the University of Arizona, 2010.

- [47] OTERKUS E., BARUT A., MADENCI E., *Damage growth prediction from loaded composite fastener holes by using peridynamic theory*, 48<sup>th</sup> AIAA Structures, Structural Dynamics, and Materials Conf, 2010.
- [48] PARKS M.L., LEHOUCQ R.B., PLIMPTON S.J., SILLING S.A., *Implementing Peridynamics within a Molecular Dynamics Code*, Computer Physics Communications 179, 2008, pp. 777-783.
- [49] PARKS M.L., PLIMPTON S.J., LEHOUCQ R.B., SILLING S.A., *Peridynamics with LAMMPS: A User Guide*, Sandia Report, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico and Livermore, California, Unlimited Release, January 2008.
- [50] PARKS M.L., SELESON P., PLIMPTON S.J., LEHOUCQ R.B., SILLING S.A., *Peridynamics with LAMMPS: A User Guide vO.2 Beta*, Sandia Report, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico and Livermore, California, Unlimited Release, August 2010, Supersedes SAND2008-0135, Dated July 2008.
- [51] PYTTEL T., LIEBERTZ H., CAI J., *Failure criterion for laminated glass under impact loading and its application in finite element simulation*, International Journal of Impact Engineering, n. 38, 2011, pp. 252-263
- [52] RAHMAN A.A., B.Sc. in Civil Engineering, Bangladesh University of Engineering & Technology, *Lattice-Based Peridynamic Modeling of Linear Elastic Solids*, Thesis, Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science in Civil Engineering, University of New Mexico, Albuquerque, New Mexico, May 2012.
- [53] RICE D.L., *Finite Element Analysis of Concrete Subjected to Ordnance Velocity Impact*, Thesis of Purdue Faculty, Doctor of Philosophy, May 1992.
- [54] ROYLANCE D., *Introduction to Fracture Mechanics*, Department of Materials Science and Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, June 14, 2001.
- [55] SAWAMOTO Y., TSUBOTA H., KASAI Y., KOSHIKA N., MORIKAWA H., *Analytical studies on local damage to reinforced concrete structures under impact loading by discrete element method*, Nuclear Engineering and Design, n. 179, 1998, pp. 157-177.
- [56] SCHLANGEN E., VAN MIER G.M., *Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures*, Materials and Structures, n. 25, 1992, pp. 534-542.

- [57] SCUDELLARO L., *Nonlocal Theories for the Study of Continuum: a Finite Elements Method Implementation*, Università degli studi di Padova, 2012.
- [58] SELESON P., PARKS M.L., *On the Role of the Influence Function in the Peridynamic Theory*.
- [59] SHAN L., CHENG M., LIU K., *A New Combined Scheme of Discrete Element Method and Meshless Method for Numerical Simulation of Impact Problems*, Tech Science Press, SL, Vol. 6, n. 1, 2011, pp. 31-38.
- [60] SILLING S.A., *Reformulation of Elasticity Theory for Discontinuities and Long-Range Forces*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, n. 48, 2000, pp. 175-209.
- [61] SILLING S.A., *Dynamic fracture modeling with a meshfree peridynamic code*, Computational fluid and solid mechanics, pages 641-644, 2003.
- [62] SILLING S.A., ASKARI E., *Peridynamic modeling of impact damage*, ASME, 2004
- [63] SILLING S.A., ASKARI E., *A Meshfree Method Based on the Peridynamic Model of Solid Mechanics*, Computers and Structures, n. 83, 2005, pp. 1526-1535.
- [64] SILLING S.A., BOBARU F., *Peridynamic modeling of membranes and fibers*, International Journal of Non-Linear Mechanics, 40(2):395-409, 2005.
- [65] SILLING S.A., EPTON M., WEEKNER O., XU J., ASKARI E., *Peridynamic States and Constitutive Modeling*, J Elasticity, n. 88, 2007, pp. 151-184.
- [66] SILLING S., LEHOUCQ R.B., *Peridynamic Theory of Solid Mechanics*, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico, April 28, 2010.
- [67] SILLING S., *Introduction to Peridynamics*, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico, Workshop on Peridynamics, Dissipative Particle Dynamics, and the Mori-Zwanzig Formulation, Brown University, April 10, 2012.
- [68] SUN Y., ZHU M., LIU B., XU J., YAO X., LI Y., *Experimental Study of Dynamic Cracking of PVB Laminated Glas by High-Speed Photography*.
- [69] TREVOR E., WILANTEWICZ E., *Failure Behavior of Glass and Aluminum Oxynitride (AION) Tiles Under Spherical Indenters*, Army Reserach Laboratory, Aberdeen Proving Ground, May 2010.
- [70] WARREN T.L., SILLING S.A., ASKARI A., WECKNER O., EPTON M.A., XU J., *A non-ordinary state-based peridynamic method to model solid material*



*deformation and fracture*, International Journal of Solids and Structures, n. 46, 2009, pp. 1186-1195.

- [71] XU J., ASKARI A., WECKNER O., RAZI H., SILLING S.A., *Damage and failure analysis of composite laminates under biaxial loads*, 48th AIAA Structures, Structural Dynamics, and Materials Conf, 2007.
- [72] XU J., LI Y., CHEN X., YAN Y., GE D., ZHU M., LIU B., *Characteristics of windshield cracking upon low-speed impact: Numerical simulation based on the extended finite element method*, Computational Materials Science, n. 48, 2010, pp. 582-588.
- [73] YU K., *Enhanced Integration Methods for the Peridynamic Theory*, B.S., Shanghai Jiao Tong University, China, 2002, M.S., Shanghai Jiao Tong University, China, 2006, An abstract of a dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree, Doctor of Philosophy, Department of Mechanical and Nuclear Engineering, College of Engineering, Kansas State University, Manhattan, Kansas, 2011.
- [74] YU J., *Damage and Fracture of glass laminate under impact*, Army research laboratory, Aberdeen, Md, 2012.
- [75] ZUKAS J.A., *Impact Dynamics*, J. Wiley & Sons, New York, 1982.