

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e astronomia

## CORSO DI LAUREA IN FISICA

Tesi di Laurea Triennale

## SPECTRA OF RANDOM GRAPHS

**Relatore**

Prof. Amos Maritan

**Correlatore**

Jacopo Grilli

**Laureando**

Matteo Insolia

N° mat. 1027438/FI

**ANNO ACCADEMICO**

2013/2014

# Spectra of random networks

Matteo Insole

7 Ottobre 2014

## Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Reti e matrici</b>	<b>3</b>
1.1 Grafi random . . . . .	4
1.1.1 Un primo esempio: i grafi di Erdős-Rényi . . . . .	4
1.1.2 Il modello configurazionale . . . . .	5
1.2 La matrice di adiacenza di un grafo . . . . .	7
1.3 Reti bipartite . . . . .	8
<b>2 Spettri di reti random</b>	<b>10</b>
2.0.1 Scopi dell'analisi spettrale . . . . .	10
2.1 La legge del semicerchio di Wigner . . . . .	10
2.2 Lo spettro del modello configurazionale . . . . .	11
2.2.1 Spettro della matrice modulare . . . . .	12
2.2.2 Spettro della matrice di adiacenza . . . . .	13
<b>3 Applicazione alle reti bipartite</b>	<b>16</b>
3.1 La legge di Marchenko-Pastur . . . . .	16
3.2 Reti con distribuzione a media nulla . . . . .	16
3.2.1 Risultati numerici . . . . .	17
3.3 Reti con distribuzione a media non nulla . . . . .	18
<b>Conclusioni</b>	<b>20</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>21</b>

# Introduzione

L'ambito in cui questa tesi si sviluppa è una particolare branca della Meccanica Statistica che coinvolge lo studio di grafi aleatori in quanto rappresentazioni di *ensemble* di reti. Nello specifico, ci si focalizzerà sullo studio di particolari matrici connesse a questi grafi, dette matrici di adiacenza, il cui spettro di autovalori fornisce molti strumenti nello studio della struttura delle reti e dei fenomeni che su di essa si svolgono.

La tesi si sviluppa in tre sezioni differenti, ma complementari l'una all'altra:

- La prima è di introduzione allo studio dei grafi random e alle loro proprietà, nonché la presentazione dei due oggetti di ricerca principali di questa tesi: le matrici di adiacenza e le reti bipartite.
- La seconda tratta più in particolare del tema della tesi, cioè lo spettro degli autovalori delle matrici che rappresentano i grafi aleatori. Verrà perciò fornito un caposaldo della teoria delle matrici random, che sarà poi applicato ad uno dei casi particolari, già introdotto nella prima sezione, che fungerà da modello per il calcolo dello spettro delle reti bipartite.
- La terza e ultima sezione ospita un'applicazione del metodo studiato nella sezione precedente. Si cercherà di ricavare risultati analoghi per le reti bipartite tramite le loro matrici caratteristiche appoggiandosi ad un altro risultato fondamentale della teoria. Detti risultati saranno poi sottoposti alla prova della simulazione numerica.

Dopo l'analisi della materia in esame, lo studio verrà portato a termine traendone le necessarie conclusioni.

# 1 Reti e matrici

In questa sezione tratteremo del legame tra le reti e la loro rappresentazione matematica, i grafi. In particolare indagheremo brevemente la classe dei grafi random e alcuni modelli di rete che la costituiscono, insieme con le loro proprietà principali. Inoltre getteremo un'occhiata anche ad un aspetto più astratto delle reti, le loro matrici di adiacenza, che sono intimamente connesse con la loro struttura e le cui caratteristiche costituiscono l'argomento principale di questa tesi<sup>1</sup>.

Tutti i network, per loro stessa natura, possono essere rappresentati tramite un oggetto matematico detto grafo. Questo, nella sua forma più semplice, è composto da un insieme di punti sparsi, detti *vertici* o *nodi*, che corrispondono agli elementi che costituiscono la rete; questi vertici sono connessi da linee, dette *archi* o *lati*, che uniscono coppie di vertici. Il numero di lati connesso ad dato nodo è detto *grado* di tale vertice.

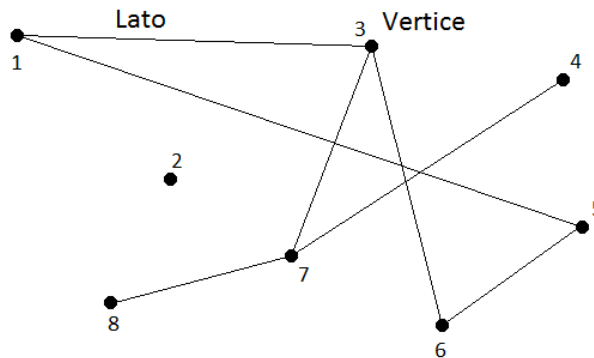


FIGURA 1: Un semplice esempio di grafo.

Per fare un esempio concreto, possiamo immaginare una rete ecologica: un certo numero di specie animali, prede e predatori, che sono messe in relazione dal fatto che una specie si ciba di un'altra. Un grafo che ritragga questa rete avrebbe tanti nodi quante sono le specie prese in considerazione, e due nodi sarebbero connessi se e solo se le relative specie fossero preda e predatore. Se la rete ecologica fosse quella della savana, il vertice corrispondente al leone sarebbe connesso a quello della gazzella (perché è una preda tipica di quella specie), ma non a quello dell'ippopotamo (che non è una preda del leone) né a quello del coccodrillo (che è un altro predatore).

Questa dualità tra network e grafi è vastissima, in quanto può essere applicata a reti di natura molto diversa:

- tecnologica, come Internet o il World Wide Web;
- sociale, come una cerchia di conoscenze o una ragnatela di riferimenti bibliografici;
- biologica, come una rete neurale o una mappa di interazioni tra proteine.

Per tale motivo, una conoscenza approfondita dei grafi e delle loro proprietà può essere utile un'ampia varietà di campi.

---

<sup>1</sup>Per una vasta introduzione sui grafi si veda M. E. J. NEWMAN, *Networks. An Introduction*, Oxford, Oxford University Press, 2010

## 1.1 Grafi random

Una categoria particolare di reti è quella rappresentata dai grafi casuali, o grafi random (*random graphs*), in cui solo alcuni aspetti o parametri del grafo sono fissati, senza che la struttura sia completamente determinata. Questo permette di indagare un insieme di grafi abbastanza ampio, ma che condividono quantità o proprietà (come una particolare distribuzione dei gradi dei vertici o un certo valore di connettanza) che ci interessano specificatamente. La classe dei grafi random svolge un ruolo primario nell'indagine delle proprietà strutturali delle reti, nella comprensione dei loro pattern di emergenza e accrescimento, e persino nella modellizzazione dei fenomeni dinamici che si svolgono all'interno di un network (il più studiato dei quali è probabilmente il diffondersi di un'epidemia).

Dal punto di vista della Meccanica Statistica, una tale classe di grafi con solo certe caratteristiche fissate, corrisponde effettivamente ad un *ensemble* statistico, di cui possono essere calcolate varie proprietà come, ad esempio, la media di una certa variabile, ma soprattutto la distribuzione di probabilità dei gradi dei vertici, di fondamentale importanza per comprendere molte proprietà di un network.

### 1.1.1 Un primo esempio: i grafi di Erdős-Rényi

Il modello più semplice di grafo random è quello in cui i parametri fissati sono solamente il numero  $n$  di vertici e  $m$  di lati. Per assegnare i lati, dal grafo  $G$  si estraggono casualmente e in modo uniforme  $m$  coppie di vertici e le si unisce con un lato; solitamente si impone che i grafi siano semplici (cioè senza che due vertici siano connessi da due o più lati, o che un vertice sia connesso a se stesso). Spesso ci si riferisce a questo modello come  $G(n, m)$ . L'insieme di questi grafi, come detto prima, rappresenta un ensemble, su cui possiamo definire la distribuzione di probabilità costante

$$P(G) = \frac{1}{\Omega}$$

dove  $\Omega$  è la cardinalità dell'insieme dei grafi con  $n$  e  $m$  fissati. Una volta definita  $P(G)$ , possiamo calcolare le proprietà dell'ensemble: interessandoci il comportamento tipico dell'insieme, è facile calcolare la media di quantità utili, come ad esempio la dimensione  $S(G)$  della "componente gigante" di un grafo :

$$\langle S \rangle = \sum_G S(G)P(G) = \frac{1}{\Omega} \sum_G S(G)$$

Spesso è possibile calcolare analiticamente queste proprietà, almeno nel limite di grandi grafi, cioè per  $n \rightarrow \infty$ . Questo vale ad esempio per il grado medio  $\langle k \rangle$  dei vertici del grafo, che è semplicemente dato da  $\langle k \rangle = \frac{2m}{n}$ , o per il numero medio di lati, che è sempre  $m$ . In altri casi però, solitamente quelli più rilevanti, questi calcoli non sono facili da svolgere. È stato perciò sviluppato un modello molto simile, ma con una caratteristica che ci permette di semplificarli: la proprietà fissata non è il numero di lati, ma piuttosto la probabilità  $p$  che una coppia di vertici sia connessa da un lato. Si ottiene quindi un nuovo *ensemble*, denominato  $G(n, p)$ , o "grafi di Erdős-Rényi", dal nome dei due matematici che li hanno resi famosi<sup>2 3</sup> negli anni '50.

---

<sup>2</sup>P. ERDŐS, A. RÉNYI, in «Publ. Math.» art. 6, n. 290, Dicembre 1959.

<sup>3</sup>P. ERDŐS, A. RÉNYI, in «Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.» art. 5, n. 17, 1960.

Trovare la distribuzione di probabilità di  $G(n, p)$  è semplice: la probabilità che vi siano esattamente  $m$  lati in un grafo è:

$$P(G) = p^m(1 - p)^{\binom{n}{2}-m}$$

Notiamo che in questo caso non è necessario ipotizzare che i grafi siano semplici: quelli con multi-lati hanno, nel limite in cui  $n \rightarrow \infty$ , probabilità zero di comparire. Anche in questo caso le prime quantità che si possono calcolare, il numero atteso di lati e il grado medio dei vertici, sono facilmente ricavabili. Per il la prima,  $\langle m \rangle$ , si può notare che, tutti i grafi con  $m$  fissato hanno la stessa probabilità  $P(G)$  di comparire, e che sceglierne uno tra questi con una particolare configurazione di lati dipende dal modo in cui si possono prendere  $m$  coppie tra le  $\binom{n}{2}$  che vi possono essere, cioè:

$$P(m) = \binom{\binom{n}{2}}{m} P(G) = \binom{\binom{n}{2}}{m} p^m(1 - p)^{\binom{n}{2}-m}$$

Una volta ottenuta la distribuzione di probabilità, il numero di lati medio è

$$\langle m \rangle = \sum_{m=0}^{\binom{n}{2}} m P(m) = \binom{n}{2} p$$

Da questo risultato possiamo ricavare immediatamente il grado medio dei vertici; se esso, in  $G(n, m)$ , è di  $\frac{2m}{n}$ , allora per  $G(n, p)$  calcoleremo il valore atteso di questa espressione sull'*ensemble*. Utilizzando l'espressione appena trovata e sapendo che  $n$  è costante si ha:

$$\langle k \rangle = \sum_{m=0}^{\binom{n}{2}} \frac{2m}{n} P(m) = \frac{2}{n} \langle m \rangle = \frac{2}{n} \binom{n}{2} p = (n - 1)p$$

Questo risultato è giustificato dal fatto che il numero atteso di lati annessi ad un vertice è proprio il numero  $n - 1$  degli altri vertici, moltiplicato per la probabilità  $p$  che il vertice vi sia. In letteratura il grado medio di un grafo di Erdős-Rényi è solitamente indicato come  $c = (n - 1)p$ .

Possiamo ora calcolare la distribuzione dei gradi per questo tipo di grafo: se ogni vertice è collegato con probabilità indipendente  $p$  agli altri  $n - 1$ , allora la probabilità che sia connesso a  $k$  altri vertici, e solamente a quelli, è  $p^k(1 - p)^{n-1-k}$ . Questi  $k$  vertici possono essere scelti in  $\binom{n-1}{k}$  modi diversi, perciò, unendo le due cose, si ha che:

$$P(k) = \binom{n-1}{k} p^k(1 - p)^{n-1-k}$$

Quindi la distribuzione di probabilità di  $G(n, p)$  è binomiale, ed è per questo che i grafi di Erdős-Rényi sono anche detti grafi bernoulliani.

### 1.1.2 Il modello configurazionale

Un modello più raffinato, che giocherà un ruolo importantissimo più avanti in questa tesi, è il cosiddetto *modello configurazionale*. In questo caso ad essere fissato per ipotesi non è il numero di lati del grafo, quanto piuttosto l'esatta sequenza dei gradi di tutti i vertici: all' $i$ -esimo vertice è assegnato il grado  $k_i$ .

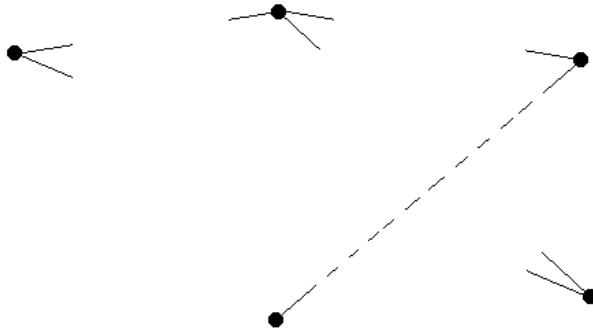


FIGURA 2: Costruzione di un grafo tramite il modello configurazionale.

Il modo più semplice di immaginare come tale grafo possa essere generato, è quello di pensare che all' $i$ -esimo vertice siano attaccati  $k_i$  “agganci” e che poi si scelgano casualmente e in modo uniforme due agganci ancora disponibili e li si unisca con un lato, fino a quando tutti gli agganci non si saranno esauriti. Perché questo sia possibile, è ovvio che la somma  $\sum_i k_i$  di tutti i gradi dei nodi deve essere pari. Questo significa anche che il numero  $m$  di lati è fissato, in quanto per ogni lato vi sono due agganci diversi (corrispondenti alle terminazioni di quell'arco) il cui numero è fissato dal modello. Si ha perciò:

$$m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i$$

In un certo senso, questo modello corrisponde al primo che abbiamo considerato,  $G(n, m)$ . La scelta casuale e uniforme degli agganci garantisce che ogni configurazione del grafo abbia eguale probabilità di verificarsi: il modello configurazionale è perciò definito come l'ensemble in cui, fissata una certa sequenza di gradi, ogni configurazione ha la stessa probabilità.

Una delle prime caratteristiche che si desidera calcolare è il numero medio di lati tra due vertici, dati i loro rispettivi gradi. Nel caso in cui almeno uno dei nodi abbia grado nullo, questo è ovviamente 0, per cui supponiamo  $k_i, k_j > 0$ . Consideriamo uno degli agganci del vertice  $i$ : vi sono altri  $2m - 1$  agganci a cui questo potrebbe connettersi, di cui solo  $k_j$  appartengono al vertice  $j$ , perciò mediamente vi saranno  $k_j/(2m - 1)$  connessioni tra quell'aggancio e il vertice  $j$ . Ripetendo il ragionamento per tutti i  $k_i$  agganci del vertice  $i$ , si ottiene che il numero medio di lati tra i due vertici è:

$$\langle m_{ij} \rangle = \frac{k_i k_j}{2m - 1}$$

Notiamo che questa espressione è valida anche se  $k_i$  o  $k_j$  sono nulli. Poiché più avanti ci interesseremo del limite per grandi reti, in cui  $n, m \rightarrow \infty$ , possiamo ignorare il -1 e scrivere:

$$\langle m_{ij} \rangle = \frac{k_i k_j}{2m} s$$

Il modello configurazionale ci permette di generare grafi con un'arbitraria distribuzione di gradi, ma che rimangono casuali sotto ogni altro aspetto. Il problema con questo ensemble è che i lati non sono statisticamente indipendenti: se c'è già un arco tra  $i$  e  $j$ , essendo fissato  $k_i$ , sarà meno probabile che vi sia un lato verso un altro vertice, poiché un aggancio è già occupato. Questo è motivo di correlazione tra gli archi, e rende problematico il modello. Come prima però, possiamo modificarlo a nostro favore: definiamo il numero di lati tra due vertici come una variabile casuale indipendente, tratta da una distribuzione Poissoniana con media  $k_i k_j / 2m$ . In questo modo, scambiamo il ruolo di  $k_i$  e  $m$  da valori fissati a valori attesi del grado del vertice  $i$  e del numero totale di lati, rispettivamente. Questo nuovo ensemble è in relazione a  $G(n, p)$  nello stesso modo in cui il modello configurazionale standard corrisponde a  $G(n, m)$ . È stato studiato principalmente da Chung e Lu<sup>4</sup>, oltre a Newman e Nadakuditi<sup>5</sup>, e sarà la base per un esempio di studio spettrale di una rete random.

## 1.2 La matrice di adiacenza di un grafo

La rappresentazione di un grafo tramite vertici e nodi può apparire utile, ma è dispersiva e non rende immediatamente disponibile tutto ciò che è necessario sapere per lo studio di una rete. Al contrario, esiste una rappresentazione che trasmette tutte le informazioni in una forma compatta: la *matrice di adiacenza* del grafo. Immaginiamo di numerare tutti i vertici di un grafo (semplice, per ora), allora esiste una matrice quadrata i cui elementi  $A_{ij}$  sono così definiti:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se esiste un lato tra i vertici } i \text{ e } j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Nel caso di un grafo semplice, poiché non vi sono multi-lati né auto-lati, la matrice è simmetrica, la diagonale contiene solo elementi nulli e tutti gli elementi non nulli sono pari a 1. Per fare un esempio, la seguente è la matrice di adiacenza del grafo in figura 1:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

È comunque possibile rappresentare un grafo non semplice tramite la matrice di adiacenza: basta definire  $A_{ij}$  come il numero di lati che congiunge i vertici  $i$  e  $j$ , con l'eccezione che gli auto-lati vanno contati due volte (per reciprocità). In questo modo gli elementi apparterranno all'insieme dei naturali (compreso lo 0) e la traccia

<sup>4</sup>F. CHUNG, L. LU, in «Proc. Natl. Acad. Sci. USA», v. 99, 15879, 2002.

<sup>5</sup>R. R. NADAKUDITI, M. E. J. NEWMAN, *Spectra of random graphs with arbitrary expected degrees*, in «Phys. Rev. E.», v. 87, 012803, 2013.



della matrice potrà essere non nulla nel caso di auto-lati. La matrice di adiacenza rimarrà comunque simmetrica, poiché questa proprietà deriva dal fatto che stiamo considerando solo grafi non direzionali.

La matrice di adiacenza contiene molte più informazioni della semplice struttura del grafo, come vedremo nella sezione successiva.

### 1.3 Reti bipartite

Le reti bipartite sono un particolare caso di grafi in cui vi sono due tipi di vertici, ma gli archi del grafo possono connettere solo due vertici di tipo diverso.

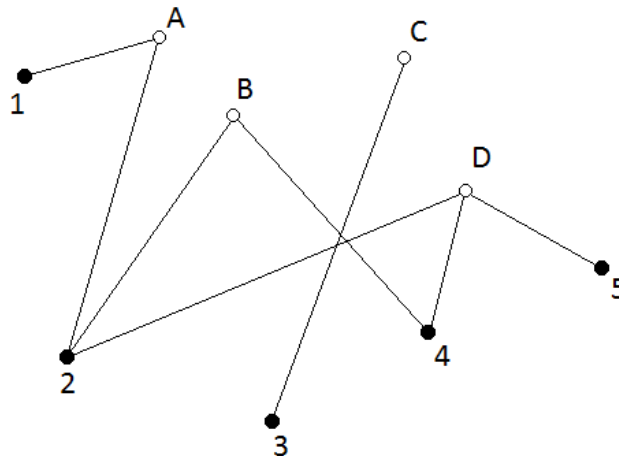


FIGURA 3: Un esempio di grafo bipartito, con 4 nodi del primo tipo e 5 del secondo. È da notare che i lati uniscono solo vertici di tipo differente.

Un grafo bipartito, dato che il numero dei due tipi di vertici potrebbe non essere uguale, non possiede una matrice di adiacenza, che per definizione è quadrata. Si può comunque costruire una matrice rettangolare che è l'equivalente di una matrice di adiacenza, la cosiddetta *matrice di incidenza*  $\mathbf{M}$ . Se vi sono  $g$  vertici del primo tipo e  $h$  del secondo,  $\mathbf{M}$  è una matrice  $g \times h$  i cui elementi sono così definiti:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se esiste un lato tra i vertici } i \text{ e } j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ad esempio, la matrice di incidenza per il grafo di figura 3 è (mettendo in ordinata i nodi identificati di numeri):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

È utile però avere una matrice quadrata e simmetrica con cui lavorare, quindi spesso si utilizza la matrice così costruita:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & 0 \end{pmatrix}$$

I grafi bipartiti sono comuni tra le rappresentazioni di network ecologici (come la rete alimentare descritta all'inizio) e saranno l'oggetto dell'ultima parte di questa tesi.

## 2 Spettri di reti random

In questa sezione ci si soffermerà sulla relazione tra la matrice di adiacenza e la struttura e le proprietà del grafo. Sarà introdotto poi un risultato classico della teoria delle matrici random, cioè la legge del semicerchio di Wigner, che sarà il punto di partenza per lo studio dello spettro del modello configurazionale.

### 2.0.1 Scopi dell'analisi spettrale

Le proprietà delle matrici di adiacenza, e in particolare il loro spettro, è intimamente connesso alla struttura e alle caratteristiche del grafo che essa rappresenta. L'insieme degli argomenti di carattere scientifico in cui viene fatto uso dello studio degli spettri è molto vasto, in quanto esso riesce a fornire informazioni di carattere non locale sulla rete in oggetto. L'elenco comprende:

- identificazione di gruppi e comunità all'interno di *social networks*<sup>6 7</sup>;
- processi di percolazioni di grafi semplici e complessi<sup>8</sup>;
- problemi di partizione ottimale della rete<sup>9 10</sup>;
- fenomeni dinamici che si svolgono sulla rete modellizzata<sup>11</sup>, come diffusioni (di epidemie, ad esempio), evoluzione di ecosistemi<sup>12</sup>, cammini aleatori (*random walk*), sincronizzazione di oscillatori armonici.

In questa tesi ci si soffermerà soprattutto sulle matrici bipartite, che sono utilizzate principalmente nello studio dei network ecologici.

## 2.1 La legge del semicerchio di Wigner

La legge del semicerchio di Wigner è una pietra angolare della teoria delle matrici random: detiene la stessa importanza della distribuzione normale nella Statistica classica in quanto ricopre in quell'ambito la stessa funzione, cioè è la statistica asintotica nell'analogo matriciale del Teorema del Limite Centrale. In effetti, emerge nelle medesime condizioni, con variabili aleatorie (gli elementi di matrice) che sono identicamente distribuite e indipendenti tra di loro, ma solo quando la dimensione della matrice è estremamente grande.

**Risultati** Una forma utile ai nostri scopi dell'enunciato di Wigner è:

Sia  $\mathbf{M}$  una matrice reale e simmetrica di dimensioni  $n \times n$  i cui elementi  $M_{ij}$  (con  $i \leq j$ ) sono indipendenti e identicamente distribuiti con media nulla, con uguale varianza  $\sigma^2$  e k-esimo momento limitato da una

---

<sup>6</sup>M. E. J. NEWMAN, in «Proc. Natl. Acad. Sci. USA», n. 103, 8577, 2006

<sup>7</sup>S. FORTUNATO, in «Phys. Rep.», n. 486, 2010

<sup>8</sup>B. BOLLOBÁS, C. BORGS, J. CHAYES, O. RIORDAN, in «Ann. Probab.», n. 38, 150, 2010

<sup>9</sup>A. POTHEN, H. SIMON, K.-P. LIOU, in «SIAM J. Matrix Anal. Appl.», n. 11, 430, 1990

<sup>10</sup>M. FIEDLER, in «Czech. Math. J.», n. 23, 298, 1973

<sup>11</sup>A. BARRAT, M. BARTHÉLEMY, A. VESPIGNANI, *Dynamical Processes on Complex Networks*, Cambridge, Cambridge University Press, 2008

<sup>12</sup>S. ALLESINA, S. TANG, *Stability criteria for complex ecosystems*, in «Nature», v. 483, 2012, p. 205

costante  $\gamma_k$  indipendente da  $i, j$ , e  $n$ . Allora, per  $n \rightarrow \infty$ , la densità degli autovalori di  $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{M}$  converge ad un semicerchio centrato in 0 e di raggio  $R = 2\sigma$ .

La legge di Wigner indica che, nelle condizioni generali di una matrice simmetrica e reale, la densità spettrale degli autovalori è nulla all'infuori di  $[-2\sigma\sqrt{n}, 2\sigma\sqrt{n}]$ , mentre all'interno segue un arco di semicerchio opportunamente normalizzato, come si può vedere dall'esempio in figura 4. L'importanza della formula del semicerchio deriva dal fatto che può essere invocata quando gli elementi di matrice sono arbitrariamente distribuiti, purché soddisfino le altre deboli ipotesi del teorema, ed è quindi facile ridursi ad un caso in cui possa essere applicata.

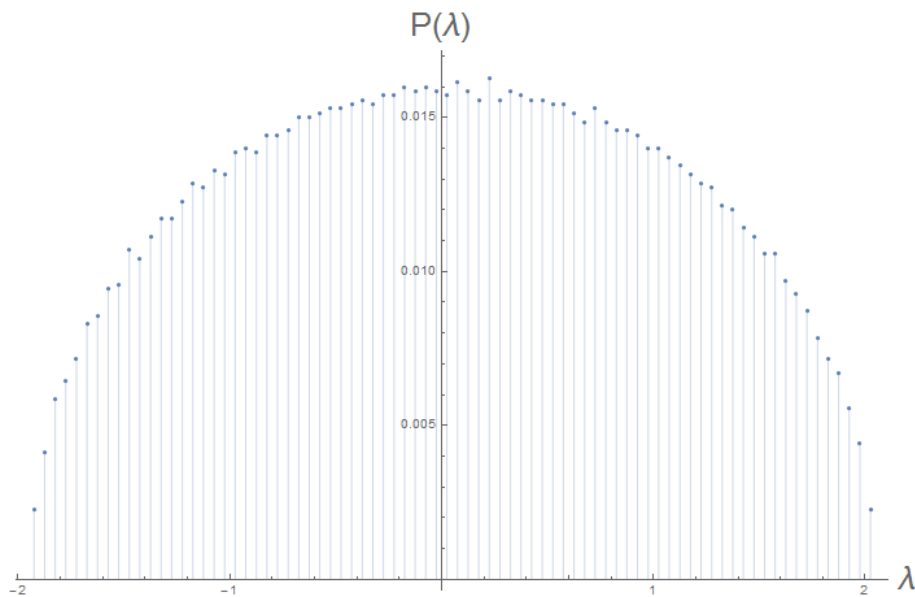


FIGURA 4: Distribuzione spettrale degli autovalori di una matrice random  $7000 \times 7000$ , con entrate estratte da una distribuzione normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Si noti che, dividendo la matrice per  $\sqrt{n}$ , si ottiene il semicerchio di raggio 2.

**Origini** Questo risultato fondamentale della teoria delle matrici random fu scoperto negli anni '50 dal fisico Eugene Wigner<sup>13 14</sup>, da cui prese il nome, in relazione a problemi di meccanica quantistica. In particolare, Wigner cercava lo spettro di un operatore hermitiano collegato all'hamiltoniana di dinamiche nucleari, e perciò la separazione in energia dei vari autostati; nel limite in cui la dimensione della matrice che descriveva l'operatore era arbitrariamente grande, egli riuscì a dimostrare questo teorema.

## 2.2 Lo spettro del modello configurazionale

Veniamo ora allo spettro del modello configurazionale. Per calcolarlo si procederà in due differenti fasi: prima sarà calcolato lo spettro della matrice modulare, che

<sup>13</sup>E. WIGNER, *Characteristic Vectors of Bordered Matrices with Infinite Dimensions*, in «Ann. of Math.», n. 62, 1955, pp. 548-564

<sup>14</sup>E. WIGNER, *On the Distribution of the Roots of Certain Symmetric Matrices*, in «Ann. of Math.», n. 67, 1958, pp. 325-328

introdurremo a breve e i cui elementi hanno media nulla, e poi da questo verrà ricavato lo spettro della matrice di adiacenza, i cui elementi hanno media diversa da zero. Questo metodo in due passi, utilizzato ad esempio da Newman<sup>15</sup> rende più semplice ottenere le informazioni che vogliamo, contrariamente all'affrontare subito la matrice di adiacenza, e sarà perciò il percorso che seguiremo anche per le matrici bipartite.

### 2.2.1 Spettro della matrice modulare

La matrice modulare  $\mathbf{B}$  del grafo è così definita:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \langle \mathbf{A} \rangle$$

dove  $\langle \mathbf{A} \rangle$  è la media sull'ensemble della matrice di adiacenza del grafo. Poiché abbiamo definito il modello in modo da fissare il numero medio di connessioni a  $k_i k_j / 2m$ , questo sarà il valore di tutti i  $\langle A \rangle_{ij}$ , quindi gli elementi di  $\mathbf{B}$  saranno:

$$B_{ij} = A_{ij} - \langle A \rangle_{ij} = A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m}$$

Dato che gli elementi di  $\mathbf{B}$  seguono la stessa distribuzione Poissoniana, anche se traslata, di quelli di  $\mathbf{A}$ , avranno che la stessa varianza, possiamo notare che:

$$\langle B_{ij} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle B_{ij}^2 \rangle = \frac{k_i k_j}{2m}$$

Avendo gli elementi di  $\mathbf{B}$  media nulla, possiamo sperare di applicare la legge di Wigner; per fare ciò però è necessario che la loro varianza sia identica, quindi dobbiamo passare attraverso una matrice  $\mathbf{B}$  "normalizzata", che chiamiamo  $\tilde{\mathbf{B}}$ , così costruita:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1/2}$$

dove  $\mathbf{D}$  è la matrice diagonale che ha per elementi i gradi  $k_i$  dei vertici del grafo. In questo modo gli elementi di  $\tilde{\mathbf{B}}$  sono  $\tilde{B}_{ij} = B_{ij} / \sqrt{k_i k_j}$  e la loro varianza risulta costante e pari a  $1/2m$ , avendo eliminato il fattore che dipendeva proprio dai gradi dei vertici. Ora che le entrate della matrice hanno media nulla e uguale varianza possiamo applicare, nel limite per  $n$  molto grandi<sup>16</sup>, la legge di Wigner: denotando con il parametro  $c = 2m/n$  il grado medio dei vertici della rete, la forma della densità spettrale data dalla formula del semicerchio è:

$$\rho_W(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{c(4 - c\lambda^2)}$$

Consideriamo ora un autovalore  $\lambda$  della matrice  $\mathbf{B}$  e il corrispettivo autovettore  $\mathbf{v}$ , che soddisfano alla relazione degli autovalori  $\mathbf{B}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ . Moltiplicando a sinistra entrambi i membri per la matrice  $\mathbf{D}^{1/2}$  e utilizzando la definizione della matrice  $\tilde{\mathbf{B}}$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v} \\ \mathbf{D}^{1/2}\mathbf{B}\mathbf{v} &= \mathbf{D}^{1/2}\lambda\mathbf{v} \\ \mathbf{D}^{1/2}\mathbf{D}^{1/2}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{v} \\ \mathbf{D}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{w} &= \lambda\mathbf{w} \end{aligned}$$

<sup>15</sup>R. R. NADAKUDITI, M. E. J. NEWMAN, *Spectra of random graphs...* cit.

<sup>16</sup>È necessaria un'altra richiesta, cioè che anche i gradi dei vertici siano grandi con  $n$ , in quanto sono note deviazioni dalla legge di Wigner per matrici grandi ma sparse.

dove si è scritto  $\mathbf{w} = \mathbf{D}^{1/2}\mathbf{v}$ . È evidente perciò che gli autovalori di  $\mathbf{B}$  sono gli stessi della matrice  $\mathbf{D}\tilde{\mathbf{B}}$ , anche se relativi ad autovettori differenti, quindi anche le densità spettrali saranno identiche. Per ricavarle possiamo usare il fatto che, nell'ambito della teoria delle matrici libere<sup>17</sup>, la densità spettrale di un prodotto di matrici random è funzione solo delle densità spettrali delle singole matrici, e si ottiene tramite un'operazione detta *convoluzione moltiplicativa libera*, denotata con il simbolo  $\boxtimes$ .

Questo funzionale è definito sullo spazio delle misure di probabilità: se  $\mu$  e  $\nu$  sono due misure riferite a due variabili aleatorie libere  $X$  e  $Y$  (rispettivamente) in uno spazio di probabilità non commutativo, allora la convoluzione moltiplicativa libera  $\mu \boxtimes \nu$  è la misura riferita alla variabile  $x^{1/2}YX^{1/2}$

Nel nostro caso le misure di probabilità sono le densità spettrali: due matrici random simmetriche hanno densità spettrale  $p_x(x)$  e  $p_y(y)$ , allora la densità spettrale del loro prodotto matriciale è data dalla convoluzione moltiplicativa libera delle due:

$$p_z(z) = (p_x(x) \boxtimes p_y(y))(z)$$

Nel nostro caso, la densità spettrale della matrice  $\tilde{\mathbf{B}}$  è, come abbiamo ricavato prima, la legge del semicerchio di Wigner  $\rho_W(z)$ , mentre per definizione la densità degli autovalori della matrice  $\mathbf{D}$ , che è diagonale, è proprio la distribuzione  $p(k)$  dei gradi nel modello configurazionale. Perciò gli autovalori della matrice modulare si distribuiscono secondo la densità:

$$\rho(\lambda) = (p(k) \boxtimes \rho_W(z))(\lambda)$$

Esistono modi per calcolare numericamente la convoluzione libera, quindi è possibile ricavarne una forma esplicita. Abbiamo quindi dimostrato che gli autovalori della matrice modulare seguono una distribuzione con forti deviazioni dalla distribuzione di Wigner.

### 2.2.2 Spettro della matrice di adiacenza

Ricaviamo ora la densità spettrale della matrice di adiacenza del nostro grafo dai risultati appena ottenuti sulla matrice modulare. Se  $\mathbf{k}$  è il vettore le cui  $n$  componenti sono i gradi  $k_i$  dei vertici del grafo, possiamo scrivere la matrice di adiacenza in funzione di quella modulare come:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}^T}{2m}$$

Allora, se  $z$  e  $\mathbf{v}$  sono una coppia di autovalore e autovettore di  $\mathbf{A}$ , soddisfano la relazione:

$$\left( \mathbf{B} + \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}^T}{2m} \right) \mathbf{v} = z\mathbf{v}$$

---

<sup>17</sup>D. VOICULESCU, K. DYKEMA, A. NICA, *Free Random Variables*, v.1, Providence (RI), American Mathematical Society, 1992.

Riscrivendo l'equazione otteniamo:

$$\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}^T}{2m}\mathbf{v} = z\mathbf{v} - \mathbf{B}\mathbf{v}$$

$$\frac{\mathbf{k}^T\mathbf{v}}{2m}(z\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{k} = \mathbf{v}$$

$$\frac{1}{2m}\mathbf{k}^T(z\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{k} = 1$$

Possiamo scrivere  $\mathbf{k}$  come combinazione lineare degli autovettori  $\mathbf{b}_i$  della matrice  $\mathbf{B}$ . Raggruppando al secondo membro tutte le costanti e indicando con  $\beta_i$  gli autovalori di  $\mathbf{B}$ , otteniamo la seguente relazione che gli autovalori di  $\mathbf{A}$  devono soddisfare:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i}{z - \beta_i} = \text{cost.}$$

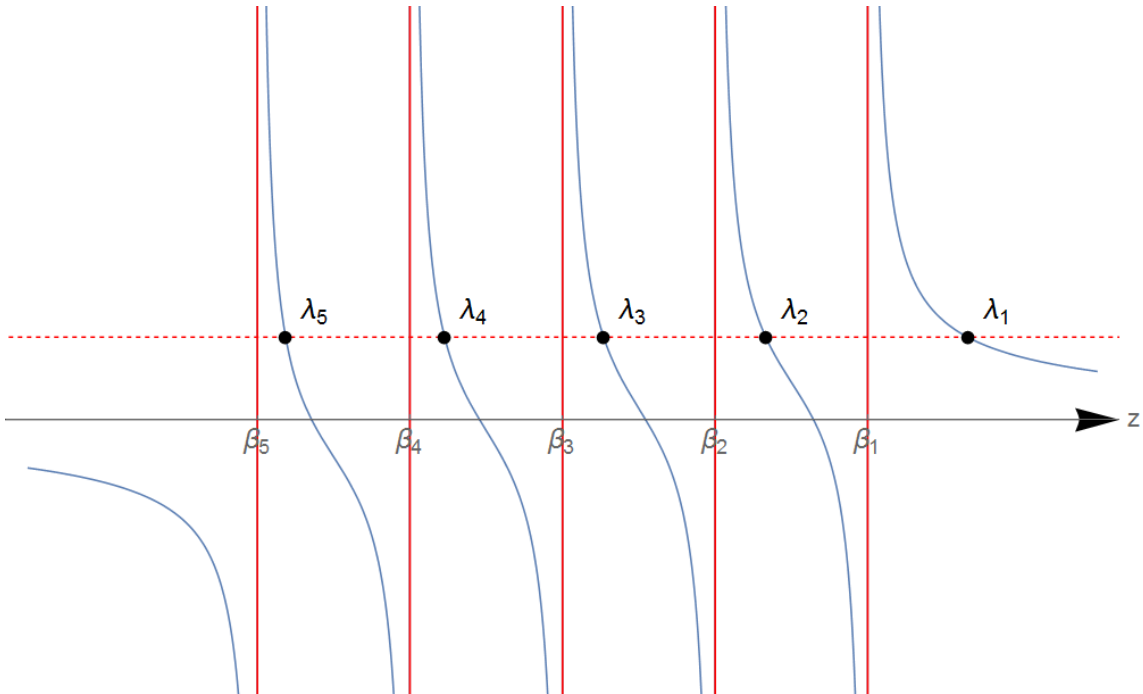


FIGURA 5: In blu, il membro di sinistra della formula, con poli nei vari  $\beta_i$ ; la linea rossa tratteggiata è la retta orizzontale che rappresenta il membro di destra, cui cui si trovano le radici dell'equazione,  $\lambda_i$ . Gli autovalori di  $\mathbf{A}$  si alternano a quelli di  $\mathbf{B}$ .

Il membro di sinistra ha dei poli in ogni  $z = \beta_i$ , mentre l'intersezione di questa funzione con la retta costante dà le soluzioni  $\lambda_i$ , cioè gli autovalori di  $\mathbf{A}$ . Come si vede dalla figura 5, numerando gli autovalori dal più grande in ordine decrescente, è evidente che questi si alternano a quelli di  $\mathbf{B}$  secondo la relazione:

$$\lambda_1 \geq \beta_1 \geq \lambda_2 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \beta_n$$

Questo accade quando  $n$  è finito; se invece  $n \rightarrow \infty$ , allora la densità spettrale della matrice  $\mathbf{B}$  diventa una funzione liscia e i suoi autovalori  $\beta_i$  diventano arbitrariamente vicini tra di loro: perciò, asintoticamente, gli autovalori di  $\mathbf{A}$  coincidono con quelli di  $\mathbf{B}$ , e così pure la sua densità spettrale. Per quanto riguarda l'autovalore più

grande, designato con  $\lambda_1$ , questo è minorato ma non maggiorato dai  $\beta_i$ , quindi non è limitato. Si può dimostrare<sup>18</sup> che questo valore si può trovare come la soluzione di

$$(\lambda - 1)\sqrt{\frac{\Gamma_\rho(\lambda)}{c}} = 1$$

in cui  $c = 2m/n$  è, come prima, il grado medio dei vertici della rete, mentre  $\Gamma_\rho(\lambda)$  è una trasformata di Cauchy che coinvolge la densità spettrale di  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{A}$ :

$$\Gamma_\rho(\lambda) = \int \frac{x\rho(x)dx}{\lambda - x}$$

Abbiamo perciò dimostrato che la matrice di adiacenza, nel caso del modello configurazionale e nel limite di grandi reti, ha uno spettro costituito da due parti: una discreta, composta da un singolo autovalore, e una continua, che è identica a quella della matrice modulare e perciò ricavata dalla convoluzione tra la distribuzione dei gradi e la legge di Wigner.

---

<sup>18</sup>R. R. NADAKUDITI, M. E. J. NEWMAN, *Spectra of random graphs...* cit.



### 3 Applicazione alle reti bipartite

In questa sezione si vedrà come applicare alcune delle tecniche e dei procedimenti esposti nella sezione precedente al caso dei grafi bipartiti e delle loro matrici di adiacenza. Si introdurrà la legge di Marchenko-Pastur, l'analogo della distribuzione di Wigner per le matrici bipartite. Seguiranno i risultati di simulazioni numeriche a controllo dei calcoli svolti.

#### 3.1 La legge di Marchenko-Pastur

La legge di Marchenko-Pastur, o distribuzione di Marchenko-Pastur, è l'equivalente della legge del semicerchio per le matrici rettangolari, in quanto sotto ipotesi simili ne descrive la densità spettrale nel limite asintotico di matrici di grandi dimensioni. Poiché ci si occuperà di matrici bipartite, che sono quasi sempre composte da blocchi rettangolari, questo risultato tornerà utile nelle sezioni successive. L'enunciato della legge recita:

Sia  $\mathbf{X}$  è una matrice rettangolare  $m \times n$ , le cui entrate sono indipendenti e identicamente distribuite con media nulla e varianza  $\sigma^2 < \infty$ , e  $n, m \rightarrow \infty$  in modo che  $\frac{m}{n} \rightarrow \alpha < \infty$ , allora gli autovalori della matrice

$$\mathbf{Y}_n = \frac{1}{n} \mathbf{X}^T \mathbf{X}$$

si dispongono asintoticamente secondo la distribuzione di Marchenko-Pastur con parametro  $1/\alpha$

$$\rho_{MP}(x) = \frac{\alpha}{2\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(b^2 - x)(x - a^2)}}{x}$$

con supporto in  $[a, b]$ , dove  $a = \sigma(1 - \alpha^{-1/2})$  e  $b = \sigma(1 + \alpha^{-1/2})$

Questo teorema, come la legge del semicerchio, può essere applicato a matrici rettangolari le cui entrate sono estratte da distribuzioni qualsiasi, e perciò ricopre un ruolo analogo nello studio di tali matrici. La legge prende il nome dai suoi scopritori, i matematici ucraini Vladimir Marchenko e Leonid Pastur<sup>19</sup>, che l'hanno dimostrata nel 1967.

#### 3.2 Reti con distribuzione a media nulla

Si studierà ora lo spettro di una classe particolare di matrici, cioè le matrici di adiacenza a blocchi tipiche delle reti bipartite. In questa sezione ci si limiterà al caso in cui gli elementi della matrice a blocchi sono tratti da una distribuzione con media nulla: poiché le matrici di adiacenza contengono solo 0 e 1, per ottenere una distribuzione centrata si ipotizzerà che le entrate siano con eguale probabilità 0, 1 oppure -1. Questa ipotesi non inficerà i risultati ottenuti poiché, nel limite di grandi reti, le proprietà delle matrici dipendono solo dalla loro struttura algebrica e non dai dettagli della distribuzione: tale fenomeno prende il nome di Universalità.

---

<sup>19</sup>V. A. MARCHENKO-L. A. PASTUR, *Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices*, in «Mat. Sb. (N.S.)», n. 72, 1967, pp. 507-536.

Sia quindi  $\tilde{\mathbf{M}}$  una matrice rettangolare  $m \times n$  le cui entrate siano con eguale probabilità 1, 0 o -1. La media e la varianza di tale distribuzione di valori sono:

$$\langle \tilde{M}_{ij} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_{\tilde{M}_{ij}}^2 = \frac{1}{6}$$

Un esempio di tale matrice può essere questo:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sia ora  $\mathbf{A}$  la matrice a blocchi simmetrica costruita con  $\tilde{\mathbf{M}}$  e la sua trasposta in questo modo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m & \tilde{\mathbf{M}} \\ \tilde{\mathbf{M}}^T & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}$$

dove  $\mathbf{0}_m$  e  $\mathbf{0}_n$  indicano delle matrici quadrate, rispettivamente  $m \times m$  e  $n \times n$ , composte da soli zeri. Invece di calcolare direttamente gli autovalori di  $\mathbf{A}$ , si farà uso del suo quadrato per poter applicare la legge di Marchenko-Pastur. Dato che la matrice è simmetrica, si può calcolarne il quadrato moltiplicandola per la sua trasposta:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m & \tilde{\mathbf{M}} \\ \tilde{\mathbf{M}}^T & \mathbf{0}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m & \tilde{\mathbf{M}} \\ \tilde{\mathbf{M}}^T & \mathbf{0}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{M}}^T & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \tilde{\mathbf{M}}^T\tilde{\mathbf{M}} \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di  $\mathbf{A}^2$  sono quelli dei suoi due blocchi diagonali. Il secondo, a meno di un fattore moltiplicativo, è analogo alla matrice  $\mathbf{Y}$  dell'enunciato del teorema di Marchenko-Pastur, quindi asintoticamente gli autovalori di  $\frac{1}{n}\tilde{\mathbf{M}}^T\tilde{\mathbf{M}}$  si dispongono secondo quella distribuzione. Il primo blocco ha gli stessi autovalori del secondo più  $m - n$  autovalori nulli, perciò anche  $\frac{1}{n}\tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{M}}^T$  segue la stessa distribuzione. Globalmente si può affermare che  $\frac{1}{n}\mathbf{A}^2$  segue la legge di Marchenko-Pastur nel limite di grandi reti. Dal momento che gli autovalori di  $\mathbf{A}$  sono proprio le radici (di entrambi i segni) di quelli di  $\mathbf{A}^2$ , si trova che la densità spettrale di  $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{A}$  segue una distribuzione con supporto in  $[-b, -a] \cup \{0\} \cup [a, b]$ . Considerando che la densità va riscalata per il numero di autovalori non nulli  $\frac{2n}{m+n} = \frac{2}{\alpha+1}$ , se ne può facilmente trovare la forma analitica:

$$\rho(\lambda)d\lambda = \rho_{MP}(\lambda^2)d(\lambda^2) = 2\lambda\rho_{MP}(\lambda^2)d\lambda$$

Ciò, unito al fattore di riscalamento e al fatto che la distribuzione di probabilità è sempre positiva, dà la forma della distribuzione asintotica di  $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{A}$ :

$$\rho(\lambda) = \frac{2\alpha}{(\alpha+1)\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(b^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - a^2)}}{|\lambda|}$$

### 3.2.1 Risultati numerici

Per avere una prima conferma del risultato è stato usato un approccio numerico; il software utilizzato è *Wolfram Mathematica*. Sfruttando la possibilità di estrarre numeri pseudorandom, è stata generata una matrice rettangolare di dimensioni  $2000 \times 8000$  le cui entrate fossero con eguale probabilità 0,1 o -1, dopodiché è stata

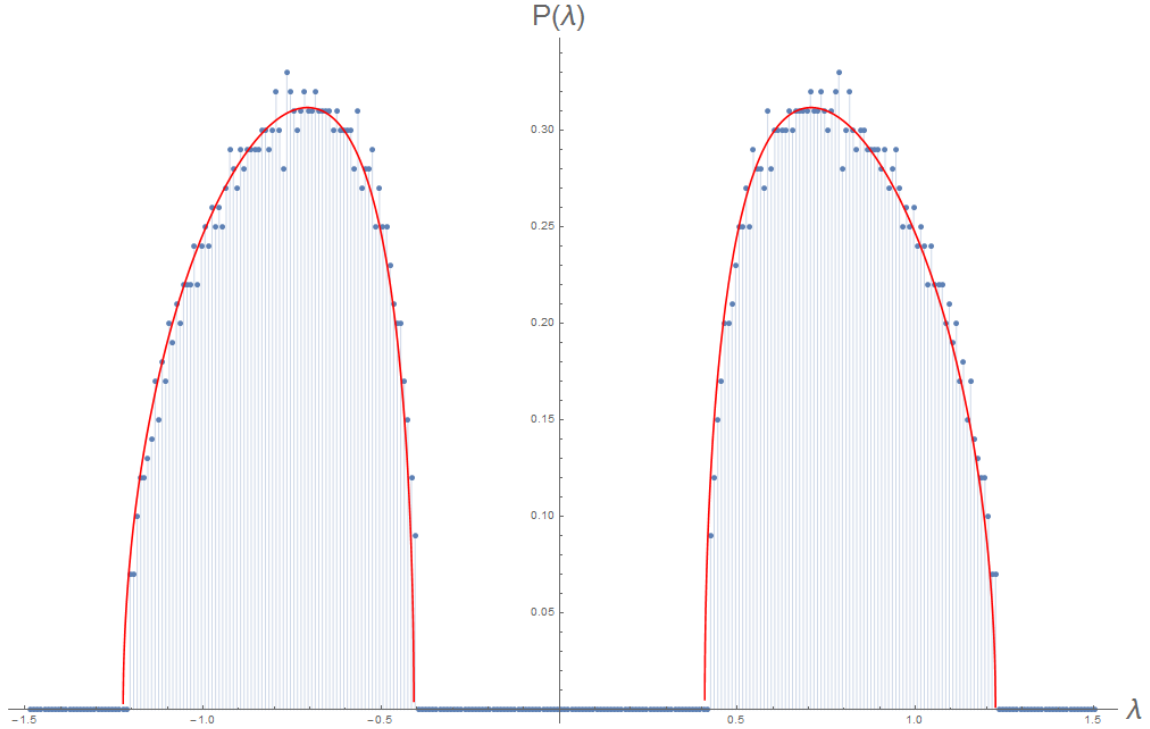


FIGURA 6: Frequenza relativa degli autovalori di  $\mathbf{A}$ , in rosso la distribuzione di probabilità prevista.

costruita la matrice  $\mathbf{A}$ . Ne sono stati calcolati numericamente gli autovalori, scartando gli  $m - n$  con il minor valore assoluto, che corrispondono a quelli teoricamente nulli. In un grafico è stato riportata la frequenza relativa degli autovalori in funzione del loro valore in intervalli (*bin*) di 0.01. A tale grafico è stato sovrapposto quello della densità spettrale ricavata dalla teoria, con i corrispondenti valori di  $\alpha$  (cioè 4 per la nostra matrice) e della varianza della distribuzione da cui sono estratti gli elementi di  $\tilde{\mathbf{M}}$  (in questo caso,  $\sigma^2 = 1/6$ ). Il grafico risultante è mostrato in figura 6, mentre in figura 7 è riportato il grafico dei residui: si può affermare che l'accordo con la previsione teorica sia buono.

### 3.3 Reti con distribuzione a media non nulla

Il problema in cui la distribuzione da cui vengono estratte le entrate di  $\mathbf{M}$  non abbia media nulla è molto più complesso del precedente. In letteratura vi sono poche informazioni al riguardo<sup>20 21</sup>, ma alcuni risultati indicano che la distribuzione asintotica degli autovalori di  $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{A}$  dovrebbe essere simile, se non identica, a quella trovata nel caso della distribuzione a media nulla. In questa sede ci si limiterà alla simulazione numerica, in maniera perfettamente analoga a quanto fatto nella sottosezione precedente, notando come la distribuzione nei due casi sia estremamente simile, ma manchi un adeguato studio dei parametri che permetta un confronto tra risultati e attesa teorica.

<sup>20</sup>I. DUMITRIU - T. JOHNSON, *The marcenko-pastur law for sparse random bipartite biregular graphs*, arXiv:1304.4907, Settembre 2013.

<sup>21</sup>L. V. TRAN, *Local law for eigenvalues of random regular bipartite graphs*, arXiv:1310.4606, Ottobre 2013.

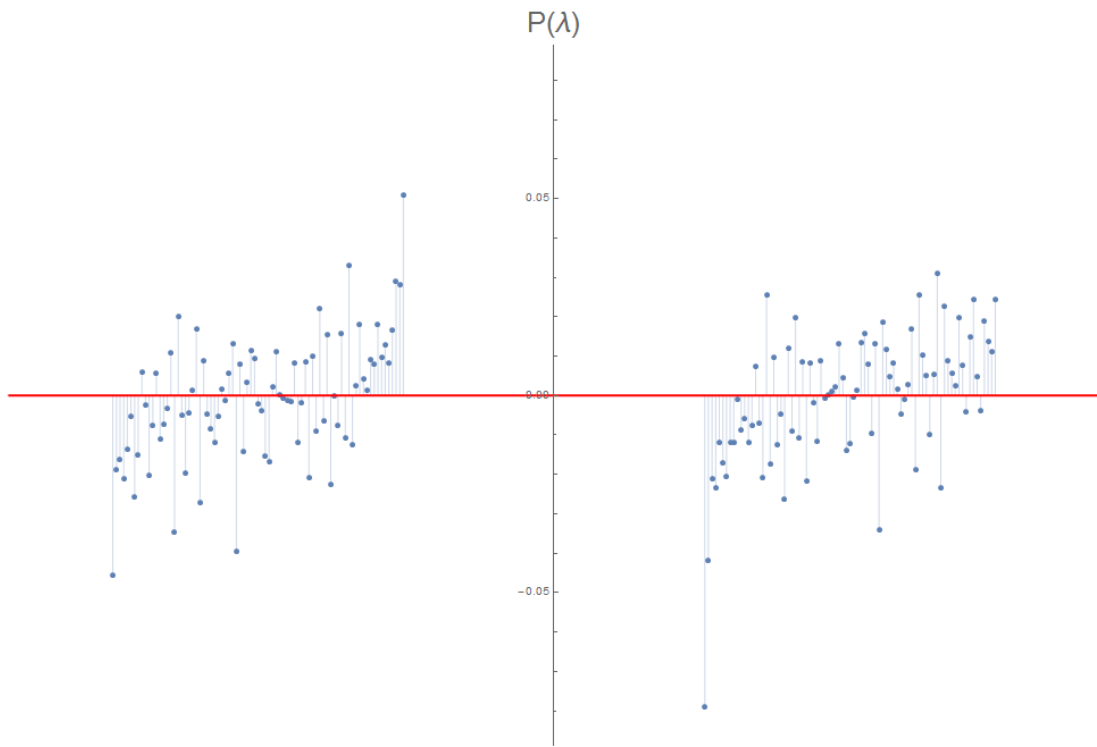


FIGURA 7: Residui del grafico di figura 6.

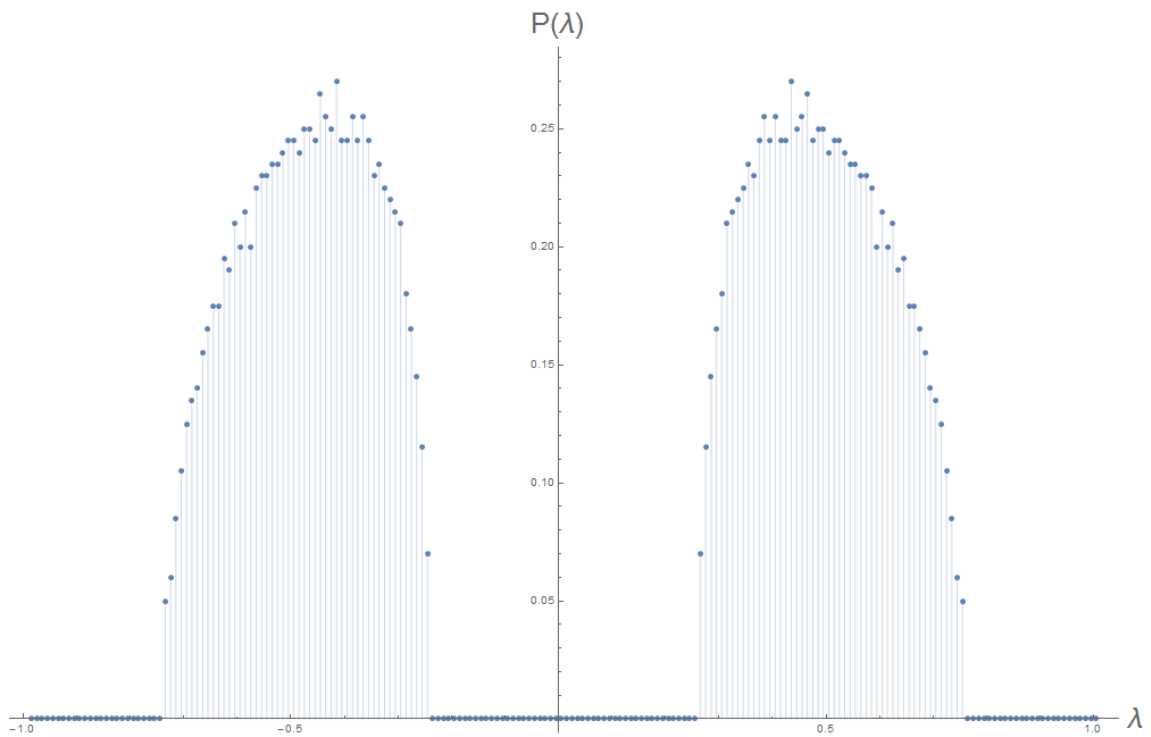


FIGURA 8: Autovalori della matrice bipartita nel caso in cui la distribuzione da cui sono estratti gli elementi dei blocchi abbia media non nulla. L'andamento è estremamente simile al caso con media nulla.

## Conclusioni

Il fine di questa tesi era di fornire un primo sguardo alla classe dei grafi random e cercare di indagare le proprietà spettrali della loro matrice di adiacenza. È stata data una visione d'insieme del campo di studi, una panoramica sulle tipologie principali dei grafi aleatori (cioè le due classi utilizzate più di frequente, i grafi di Erdős-Rényi e il modello configurazionale) e sui loro principali risultati, insieme ad alcune nozioni di base ausiliarie allo scopo della tesi.

Nella sezione centrale ci si è accostati al fondamentale risultato di Wigner, sfruttandolo poi nello studio dello spettro del modello configurazionale, che è stato diviso in due sezioni: lo spettro della matrice modulare, che ha applicazioni di per sé ma che funge qui da risultato intermedio, e lo spettro della matrice di adiacenza, che si è rivelato essere asintoticamente identico a quello della sua controparte a media nulla, tranne che per l'autovalore più grande, che potrebbe rivelare informazioni aggiuntive sulla struttura del grafo.

Infine, il procedimento è stato applicato alle matrici connesse ai grafi bipartiti, ed in particolare a quelle con distribuzione degli elementi a media nulla. Il risultato è stato che il loro spettro ha delle deviazioni dalla legge di Marchenko-Pastur, come il modello configurazionale le aveva dalla legge del semicerchio, fatto confermato anche dalla simulazione numerica svolta. Inoltre è stato dato un breve sguardo anche alle reti la cui distribuzione degli elementi di matrice non ha media nulla, caso complesso ma che sembra indicare che il loro spettro abbia le medesime deviazioni dalla legge di Marchenko. Concludendo, si può affermare che lo scopo prefissato sia stato raggiunto con risultati soddisfacenti.

## Bibliografia

- M. E. J. NEWMAN, *Networks. An Introduction*, Oxford, Oxford University Press, 2010
- P. ERDŐS, A. RÉNYI, in «Publ. Math.» art. 6, n. 290, Dicembre 1959.
- P. ERDŐS, A. RÉNYI, in «Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.» art. 5, n. 17, 1960.
- F. CHUNG, L. LU, in «Proc. Natl. Acad. Sci. USA», v. 99, 15879, 2002.
- M. E. J. NEWMAN, in «Proc. Natl. Acad. Sci. USA», n. 103, 8577, 2006
- S. FORTUNATO, in «Phys. Rep.», n. 486, 2010
- B. BOLLOBÁS, C. BORGS, J. CHAYES, O. RIORDAN, in «Ann. Probab.», n. 38, 150, 2010
- A. POTHEN, H. SIMON, K.-P. LIOU, in «SIAM J. Matrix Anal. Appl.», n. 11, 430, 1990
- M. FIEDLER, in «Czech. Math. J.», n. 23, 298, 1973
- A. BARRAT, M. BARTHÉLEMY, A. VESPIGNANI, *Dynamical Processes on Complex Networks*, Cambridge, Cambridge University Press, 2008
- S. ALLESINA, S. TANG, *Stability criteria for complex ecosystems*
- E. WIGNER, *Characteristic Vectors of Bordered Matrices with Infinite Dimensions*, in «Ann. of Math.», n. 62, 1955, pp. 548-564
- E. WIGNER, *On the Distribution of the Roots of Certain Symmetric Matrices*, in «Ann. of Math.», n. 67, 1958, pp. 325-328
- D. VOICULESCU, K. DYKEMA, A. NICA, *Free Random Variables*, v.1, Providence (RI), American Mathematical Society, 1992.
- V. A. MARCHENKO-L. A. PASTUR, *Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices*, in «Mat. Sb. (N.S.)», n. 72, 1967, pp. 507-536.
- I. DUMITRIU - T. JOHNSON, *The marcenko-pastur law for sparse random bipartite biregular graphs*, arXiv:1304.4907, Settembre 2013.
- L. V. TRAN, *Local law for eigenvalues of random regular bipartite graphs*, arXiv:1310.4606, Ottobre 2013.