



**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA**  
**FACOLTA' DI INGEGNERIA**

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria  
Elettrica

Tesi di Laurea Magistrale

*Modello matematico di motore Stirling  
accoppiato ad un generatore  
elettrico lineare*

Relatore: Prof. Mauro Andriollo

Laureando: Michele Favaron

Anno Accademico 2011/2012



# Indice

Introduzione .....	1
Capitolo 1: La macchina di Stirling .....	3
1.1    Introduzione .....	3
1.2    Cenni storici ed applicazioni della macchina di Stirling .....	3
1.3    Componenti costitutivi della macchina di Stirling .....	8
1.3.1    Volume di espansione ( Expansion space ) .....	8
1.3.2    Riscaldatore (Heater) .....	8
1.3.3    Volume di compressione ( Compression space ) .....	9
1.3.4    Raffreddatore ( Cooler ) .....	9
1.3.5    Pistone motore pistone dislocatore ( Power piston e Displacer ) .....	9
1.3.6    Rigeneratore ( Rigenerator ) .....	10
1.3.7    Fluido di lavoro .....	11
1.4    Configurazioni meccaniche della macchina di Stirling .....	11
1.4.1    Configurazione alfa .....	12
1.4.2    Configurazione beta .....	12
1.4.3    Configurazione gamma .....	13
1.4.4    Configurazione beta “free-piston” .....	14
1.5    Principio di funzionamento di un motore Stirling in configurazione beta .....	16
1.6    Funzionamento di un motore Stirling in configurazione “free – piston” .....	18
Capitolo 2: Ciclo termodinamico della macchina di Stirling .....	21
2.1    Richiami di termodinamica .....	21
2.1.1    Primo principio della termodinamica .....	22
2.1.2    Gas ideali .....	24
2.1.3    Lavoro di un gas ideale .....	25
2.1.4    Calore specifico a pressione e a volume costante .....	26
2.1.5    Trasformazione adiabatica reversibile .....	27
2.1.6    Trasformazione isoterma .....	28
2.1.7    Trasformazione isocora .....	29
2.2    Il ciclo di Carnot .....	29
2.3    Il ciclo di Stirling ideale .....	32
2.4    Dal ciclo di Stirling ideale al ciclo di Stirling reale .....	35
2.4.1    Effetto del moto degli stantuffi .....	35
2.4.2    Effetto dei volumi morti .....	36
2.4.3    Limiti di prestazione degli scambiatori termici .....	37

2.4.4	Presenza di perdite termiche per conduzione, convezione, irraggiamento e per le oscillazioni di temperatura del gas .....	38
2.4.5	Perdite termiche nei gas di combustione e perdite termiche per deviazione non ottimale dei raggi solari .....	39
2.4.6	Rigenerazione termica imperfetta.....	39
2.4.7	Perdite di tipo meccanico e perdite per impianti ausiliari .....	40
2.4.8	Distribuzione del fluido .....	40
Capitolo 3: Generatori elettrici lineari.....		43
3.1	Introduzione.....	43
3.2	Struttura di una macchina elettrica lineare .....	44
3.2	Campo magnetico di una macchina lineare .....	46
3.2.1	Macchine a magnete permanente a flusso longitudinale .....	47
3.2.2	Macchine a magnete permanente a flusso trasverso.....	50
3.3	Materiali per generatori lineari a magneti permanenti.....	52
3.4	Generatori lineari per applicazioni su motori free-piston.....	53
3.5	Motori Stirling free-piston accoppiati con generatori lineari .....	54
3.5.1	Motori free-piston della Sunpower Inc.....	55
Capitolo 4: Modelli matematici per il motore Stirling .....		59
4.1	Introduzione.....	59
4.2	Modello isoterma.....	59
4.2.1	Ipotesi di lavoro .....	60
4.2.2	Analisi isoterma motore in configurazione beta free-piston.....	61
4.2.3	Distribuzione della massa nelle celle di lavoro .....	70
4.3	Modello adiabatico .....	71
4.3.1	Ipotesi di lavoro .....	72
4.3.2	Analisi adiabatica per un motore Stirling in configurazione beta “free-piston” con scambiatori di calore ausiliari.....	73
4.3.3	Metodi risolutivi .....	77
4.3.4	Andamento della temperatura nelle camere di compressione ed espansione .....	78
Capitolo 5: Analisi disaccoppiata del motore Stirling.....		79
5.1	Introduzione.....	79
5.2	Rigenerazione imperfetta.....	79
5.3	Perdite per conduzione .....	82
5.4	Perdite di carico.....	83
5.5	Limiti di prestazione degli scambiatori .....	88
5.6	Coefficienti di scambio termico .....	91
5.7	Confronto con dati sperimentali .....	91



Capitolo 6: Modello cinematico di un motore Stirling free-piston .....	95
6.1 Introduzione .....	95
6.2 Equazione del modello cinematico .....	96
6.2.1 Azione del motore .....	96
6.2.2 Azione dell'attrito .....	97
6.2.3 Azione della molla .....	97
6.2.4 Forza del generatore elettrico.....	98
6.3 Forza nel ciclo teorico.....	100
6.3.1 Implementazione numerica .....	102
6.4 Modello semplificato di ciclo Stirling.....	106
6.5 Calcolo della potenza meccanica .....	111
6.5 Risultati delle simulazioni.....	113
Conclusioni .....	117
Bibliografia .....	119



## ***Introduzione***

Il concetto di ecosostenibilità, e quindi la possibilità di mantenere l'attuale qualità della vita e preservare le risorse globali senza precluderne l'accesso alle generazioni future, ai giorni d'oggi si sta sempre più radicando nell'opinione pubblica e nella società civile dei Paesi sviluppati e industrializzati. Allo scopo di raggiungere una riduzione dei consumi energetici, un miglioramento dell'efficienza nei processi di produzione di energia elettrica e calore e un aumento dell'utilizzo di fonti rinnovabili come l'energia solare o le biomasse la macchina di Stirling può ricoprire un ruolo di primo piano. La macchina di Stirling, infatti, essendo a combustione esterna permette l'utilizzo di diversi combustibili quali il metano, la biomassa, biogas o gas di sintesi, oli combustibili, pellets. Può essere, inoltre, alimentata anche da energia solare o nucleare. Da questo punto di vista permette di avere una minore produzione di sostanze inquinanti rispetto a quelle di altri motori a combustione interna.

In questo lavoro di tesi viene preso in analisi un motore Stirling in una sua particolare configurazione meccanica denominata "*free-piston*". Tale denominazione deriva dal fatto che non sono presenti manovellismi meccanici che vincolano tra loro il movimento dei pistoni e che trasformano un moto lineare in un moto rotativo. Proprio per questo l'applicazione di questo tipo di motore prevede l'accoppiamento con un generatore elettrico lineare anziché rotativo. Il tipo di sistema rappresentato dall'accoppiamento motore Stirling – generatore elettrico lineare non è attualmente commercializzato, ma vi sono concrete possibilità che questo sistema possa in un prossimo futuro trasformarsi in una soluzione alternativa per la produzione di energia elettrica e calore in impianti di piccola taglia; in gruppi elettrogeni; all'interno di imbarcazioni; o anche all'interno di caldaie domestiche, fornendo così un grande contributo nei sistemi di produzione distribuiti.

L'elaborato riguarda principalmente lo studio del ciclo termodinamico della macchina di Stirling. In primo luogo viene presentata l'analisi di modelli matematici della macchina a volumi impressi (cioè definiti a priori) denominati "ideali". Questi sono stati reperiti attraverso un'accurata ricerca bibliografica, e ovviamente sono stati adattati alle caratteristiche di un motore Stirling in configurazione free-piston. In questa parte si analizzano nel dettaglio i fenomeni termodinamici che avvengono all'interno di un motore Stirling.

In secondo luogo si analizzano dettagliatamente i principali effetti termici e dissipativi che causano l'allontanamento del ciclo reale rispetto a quello ideale riportando, inoltre, come descriverli matematicamente al fine di affiancarli ai modelli ideali. Al termine di questa fase è stato possibile quindi realizzare attraverso il software Matlab-Simulink un primo modello matematico di motore Stirling. Il limite di questo modello è però rappresentato dal fatto che la variazione del volume delle due camere è definito a priori mentre in un motore Stirling in configurazione free-piston questa è determinata dalla dinamica del sistema. La dinamica dipende principalmente dalla pressione del ciclo, la quale è ovviamente legata alla termodinamica del ciclo. La termodinamica a sua volta è strettamente influenzata dalla dinamica delle masse che stabilisce la legge di variazione dei volumi per cui si dimostra che in questa particolare configurazione della macchina dinamica e termodinamica sono indissolubilmente collegate tra di loro.

Con lo scopo di superare questo limite nell'ultima parte del lavoro di tesi si realizza, sempre attraverso il software Matlab-Simulink, un modello matematico che riproduca il ciclo e che possa venire inserito all'interno della cinematica del sistema. Tale modello trascende in parte da quelli che sono i principali fenomeni termodinamici descritti in precedenza, focalizzandosi soprattutto su quello che è il legame tra la forza in uscita dal ciclo e il movimento del pistone sul quale è

posizionato il traslatore del generatore lineare. Fatto ciò lo si è inserito in un modello cinematico, rappresentante l'equazione del moto del pistone, sul quale sono state effettuate diverse simulazioni.





# ***Capitolo 1***

## ***La macchina di Stirling***

### **1.1 Introduzione**

Per *macchina di Stirling* si intende una vasta gamma di macchina a fluido nelle quali il fluido stesso ( generalmente un gas ) compie un ciclo termodinamico prossimo a quello ideale di Stirling ( composto da due trasformazioni isoterme e due isocore ) ed il cui moto è regolato non da valvole o altri dispositivi equivalenti, ma dalla variazione dei volumi di lavoro occupati dal fluido all'interno della macchina stessa. Macchine approssimativamente funzionanti secondo il ciclo termodinamico di Stirling ma nelle quali il moto del fluido viene invece regolato da valvole vengono denominate come *macchine di Ericsson*. Realizzando un ciclo chiuso, tali macchine non scambiano con l'esterno null'altro che energia, sotto forma di calore o lavoro meccanico. Questa macchina in funzionamento da motore riceve il calore dall'esterno e viene per questo definito motore a combustione esterna. Un motore a combustione interna, invece, brucia il combustibile all'interno dei cilindri di lavoro o nella camera di scoppio. Esso è quindi legato al tipo di combustibile utilizzato. Per esempio un motore a benzina può essere modificato in modo da lavorare con idrogeno, metano o propano, ma non può lavorare con altri combustibili come per esempio carbone, torba, gasolio. La turbina a gas è forse una delle macchine a combustione interna che più si avvicina al motore Stirling, ma comunque non può utilizzare combustibili solidi. Lo Stirling invece può sfruttare qualsiasi fonte di calore: ogni tipo di combustibile (solido, liquido o gassoso), un qualsiasi corpo caldo che cede calore, l'energia nucleare, chimica e solare. Inoltre il gas di lavoro è contenuto all'interno dei cilindri e non viene scaricato dopo ogni ciclo. A fronte di un'elevata versatilità e di molte altre doti di pregio, le macchine a ciclo Stirling non sono mai riuscite a far valere le loro numerose peculiarità a causa di una serie di eventi avversi, che hanno invece condotto all'affermazione dei motori a combustione interna a ciclo *Otto* e *Diesel*, del ciclo *Rankine* a vapore e del ciclo *Brayton-Joule* a combustione di gas o kerosene.

### **1.2 Cenni storici ed applicazioni della macchina di Stirling**

La macchina a ciclo Stirling è stata nel corso dei decenni identificata con più nomi: motore di *Labereau*, di *Lehmann*, di *Robinson*, di *Heinrici* sono solo alcuni dei nomi coi quali si identificano, nella letteratura, le evoluzioni del primo “motore ad aria calda” della storia. Molti furono infatti gli ingegneri che vi lavorarono e che lo rielaborarono. Ad realizzarlo per primo fu però lo scozzese Robert Stirling. Robert Stirling, era un ministro della Chiesa scozzese, vissuto fra il 1790 e il 1878. Tuttavia l'attitudine e la passione per l'ingegneria trasmessigli dal padre e dal nonno, che avevano lavorato per la costruzione e lo sviluppo di macchine agricole, furono determinanti nella vita di Robert. Egli infatti mostrò sempre un forte interesse per la meccanica e fu proprio questo a portarlo all'invenzione di una macchina ad aria calda che successivamente prese il suo nome. Sempre

attento alle condizioni di lavoro della sua comunità, Stirling si rese subito conto del pericolo che gli uomini correvano utilizzando le macchine a vapore. Si narra, infatti, che colpito dalle conseguenze dei numerosi incidenti causati dalle esplosioni delle caldaie delle macchine a vapore, egli si propose di trovare un'alternativa meno pericolosa e altrettanto prestante, al fine di donare alla sua gente maggior sicurezza sul posto di lavoro. Grazie alle sue conoscenze tecnologiche e all'aiuto del fratello James, ingegnere civile di professione, nel 1815 riuscì a progettare e a realizzare il primo motore ad aria della storia: esso era capace di convertire il calore applicato ad una testa calda in energia cinetica. Tale conversione avveniva attraverso un sistema a pistoncini, costruito per muoversi secondo le periodiche espansioni e contrazioni dell'aria contenuta nei volumi interni della macchina.



Fig.1.1: Robert Stirling [1].

Nel 1816 Stirling inventò un motore ad aria calda dotato di un economizzatore, o più comunemente chiamato *rigeneratore*. Questo componente permetteva di accumulare il calore sottratto all'aria calda che transitava verso la parte fredda del motore e di cederlo poi all'aria fredda che ritornava verso la parte calda del motore, aumentandone così l'efficienza. In figura 1.2 è riportato lo schema relativo alla macchina proposta. In questa macchina un lungo cilindro A disposto verticalmente è riscaldato nella parte superiore dai gas combusti provenienti dalla fornace B. La parte inferiore del cilindro è raffreddata con acqua o con aria. Il cilindro contiene uno stantuffo dislocatore C ed uno stantuffo di potenza D. Al moto alterno del dislocatore corrisponde il flusso dell'aria, che attraversa alternativamente nei due sensi di marcia il rigeneratore termico, passando così dallo spazio freddo inferiore E (posto tra il fondo di C e la testa di D) e lo spazio caldo superiore F e viceversa. Il rigeneratore, non visibile in figura, è posto nello spazio anulare compreso tra il dislocatore e la parete interna del cilindro A. Tale organo può definirsi con un'immagine pittoresca ma efficace, una sorta di spugna termica. La sua funzione peculiare è quella di impedire lo scambio diretto di calore che si avrebbe tra il volume caldo e quello freddo che ci sarebbe a causa del travaso del fluido, e di rigenerare il calore disponibile per accrescere il rendimento termodinamico. Peculiarità importante della macchina di Stirling è che fluido di lavoro rimane sempre racchiuso all'interno del cilindro. La macchina è quindi a ciclo chiuso.



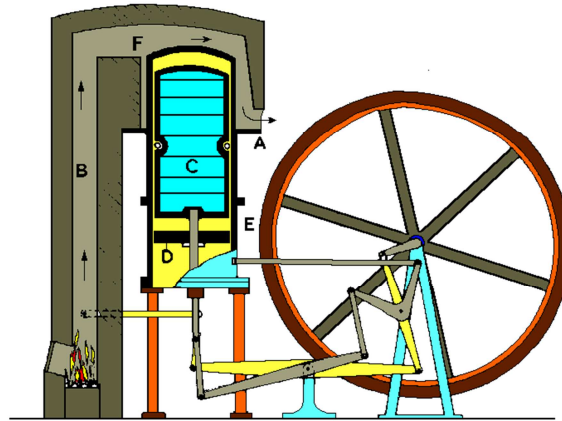


Fig. 1.2: esemplare della macchina di Stirling brevettata nel 1816 [2].

Dal 1816 in poi, la vita della famiglia Stirling (James, Robert ed i suoi figli) fu dedicata all'evoluzione della macchina da loro creata: se da una parte infatti era stata inventata una macchina meno pericolosa rispetto alle macchine a vapore (il rischio di violente esplosioni era scongiurato grazie alle basse pressioni in gioco), dall'altra non si era ancora raggiunta una potenza tale da permettere la loro sostituzione. Il lavoro di Robert sul motore non venne mai sospeso e numerosi furono i miglioramenti che vennero apportati ad esso nel tempo. Sempre grazie all'aiuto del fratello James fu possibile ottenere altri brevetti per il motore. James infatti intuì che si poteva ottenere più potenza utilizzando aria ad una pressione maggiore di quella atmosferica e contribuì alla realizzazione di un motore ad aria calda di grandi dimensioni che alimentava i macchinari della fonderia *Dundee Foundry Company*. Questa soluzione rappresentava pertanto la prima vera applicazione industriale del motore ad aria calda. Purtroppo però non fu un successo: attivato nel 1843, l'impianto venne riconvertito a vapore nel 1845 a causa delle continue rotture. Mentre nella seconda metà del 1800 i motori ad aria calda non riuscivano a raggiungere standard di qualità e prestazioni necessarie per una loro concreta diffusione, i motori a vapore vennero nel frattempo fortemente migliorati con l'uso dell'acciaio prodotto mediante una nuova tecnica ideata dall'ingegnere inglese Henry Bessemer nel 1855.

Nei primi anni del 1900 poi lo sviluppo dei motori a combustione interna, come quello Otto e quello Diesel, portò questi ultimi ad essere sicuri, affidabili ed economici così da poter essere utilizzati in tutti i settori. In questo modo l'uso delle macchine a vapore e ad aria calda venne quasi abbandonato. All'inizio del '900 venivano comunque ancora prodotti e utilizzati motori Stirling di piccola dimensione (soprattutto per uso domestico) nonostante le molte limitazioni pratiche. Non potevano, infatti, funzionare alle alte temperature (necessarie per raggiungere una buona efficienza). Ciò era dovuto alle scarse proprietà tecnologiche dei materiali e al mancato utilizzo del rigeneratore con conseguente aumento della perdita di calore.

Il periodo buio per le macchine di Stirling durò circa quarant'anni, fino alla seconda guerra mondiale. I fatti che determinarono una riconsiderazione delle macchine funzionanti a ciclo di Stirling furono principalmente i seguenti: in primo luogo, l'emigrazione delle grandi personalità del mondo scientifico europeo verso gli Stati Uniti, permise lo sviluppo di moltissime idee e progetti, si videro poi nascere anche molte collaborazioni fra le due sponde dell'Atlantico. In secondo luogo, il conflitto mondiale rendeva difficili gli approvvigionamenti di carburante per usi civili, e si aprì quindi uno spiraglio per lo sviluppo di qualsiasi sistema alternativo. Infine, negli anni '40 fu possibile disporre di gas con un buon grado di purezza. Ciò consentì dei progressi molto importanti come ad esempio l'utilizzo di idrogeno, o di elio, o ancora di azoto o di altre miscele gassose, quali

ad esempio il Freon portò ad un incremento delle prestazioni e fu per la prima volta possibile considerare la macchina a ciclo Stirling come pompa di calore.

La macchina di Stirling può essere agevolmente fatta funzionare quale utilizzatrice di lavoro meccanico, ovvero come una macchina operatrice. Con essa è possibile realizzare, infatti, una macchina frigorifera o criogenica, una pompa di calore od un compressore. Alla fine degli anni '40 la Philips di Eindhoven iniziò la commercializzazione della macchina Stirling frigorifera per impieghi industriali, in particolare per la liquefazione dell'aria. Il ciclo frigorifero permetteva infatti di costruire macchine in grado di ottenere temperature inferiori persino ai 12 K.

Un'interessante applicazione del motore si ebbe con l'avvento e lo sviluppo dell'elettronica. L'utilizzo degli apparecchi radio (1960) diede nuove prospettive allo Stirling. Per esempio, l'industria olandese produttrice di apparecchi radio, la Philips Electronics, usò un piccolo motore Stirling per generare elettricità per l'alimentazione di apparecchi radio trasmettenti e ricevitori da impiegare dovunque non fosse disponibile la connessione ad un sistema di distribuzione di energia elettrica. Questi dispositivi radio assorbivano però una cospicua quantità di energia in quanto erano costituiti da valvole termoioniche. Quest'iniziativa venne di fatto poi abbandonata a causa dello sviluppo del transistor, capace di sostituire in tutto e per tutto le valvole termoioniche con un assorbimento di potenza esiguo, tranquillamente ottenibile per mezzo di semplici ed economiche batterie.

Nel trentennio 1950-1980 importanti case automobilistiche americane quali General Motors e Ford e la fabbrica di motori tedesca MAN, dedicarono molte delle loro risorse allo sviluppo di mezzi di trasporto dotati di motori Stirling, con potenze di circa qualche centinaio di kW. Ne è un esempio il prototipo della Ford Torino Stirling Special realizzata nel 1972 e di seguito riportata in figura. Questo esemplare non fu mai però prodotto su larga scala perché le sovvenzioni alla ricerca furono interrotte qualche anno più tardi.

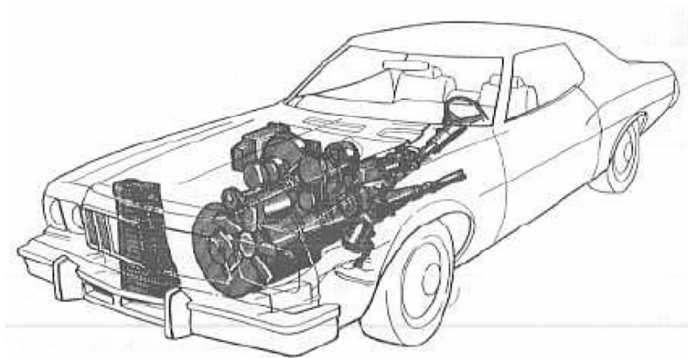


Fig. 1.3: Ford Torino Stirling Special.

Sempre negli stessi anni, furono condotti dei tentativi di motorizzazione a livello navale e su sommergibili con potenze anche di 700 kW.

Lo sviluppo e l'uso di macchine a ciclo Stirling ebbe vita più facile, ancora una volta, nelle piccole applicazioni. Nell'utilizzo come motore con potenza inferiore al kW infatti, ci fu a partire dalla metà degli anni '70 un concreto interessamento della NASA, che portò nel giro di pochi anni all'installazione di piccoli sistemi di generazione elettrica nei satelliti: funzionavano utilizzando il calore emesso da materiali radioattivi e servivano ad alimentare l'elettronica di bordo. Le motivazioni che portarono alla scelta di questo tipo di azionamento furono legate soprattutto alla sua compattezza e ai suoi ingombri contenuti.

A partire dal 1970 in Europa, in Australia, in Giappone ed in particolare negli Stati Uniti, si sono realizzati diversi progetti sul motore Stirling e sulle sue possibili applicazioni per lo sfruttamento dell'energia termica del sole. Mediante un componente aggiuntivo, il ricevitore, il motore è in grado di sfruttare l'energia solare e di trasferirla al gas sotto forma di calore. Voluminosi paraboloidi riflettenti detti *dish*, posizionati in prossimità del ricevitore, permettono una precisa ed efficace focalizzazione dei raggi solari fondamentale per fornire al ricevitore la giusta quantità di energia. Il motore Stirling combinato con i dish prende il nome di "*Dish Stirling*".



Fig. 1.4: applicazione nel solare termodinamico del motore Stirling.

Durante gli anni '80 e '90, non si registrano fatti rilevanti, se non l'aumento di sensibilità da parte dell'opinione pubblica mondiale verso le tematiche di tipo ambientale e dell'utilizzo efficiente delle fonti energetiche: in questo contesto, il motore a ciclo di Stirling è oggetto di un interesse sempre crescente. Molte aziende nell'ultimo decennio, hanno dedicato, infatti, risorse allo sviluppo di sistemi di cogenerazione (produzione integrata di energia elettrica ed energia termica) basati sulla combustione soprattutto delle biomasse. Questi sistemi utilizzano, come motore primo, proprio un motore a ciclo Stirling, in quanto potenzialmente capace di lavorare con livelli di efficienza ed affidabilità superiori rispetto ai sistemi concorrenti; sempre per gli stessi motivi, i motori Stirling sono ormai una realtà molto ben integrata nel campo del solare termodinamico di tipo parabolico ( *Dish Stirling* ).



Fig. 1.5: applicazione per la produzione di energia elettrica

dalla combustione di biomassa [3].

Un altro settore molto interessante oggi è quello delle macchine criogeniche di ridotte dimensioni e potenze. Tali macchine sono in produzione negli Stati Uniti e sono impiegate nella componentistica elettronica per apparecchiature a raggi infrarossi.

### 1.3 Componenti costitutivi della macchina di Stirling

Le parti principali che compongono sono rappresentate schematicamente in figura 1.6 e descritte nei successivi paragrafi:

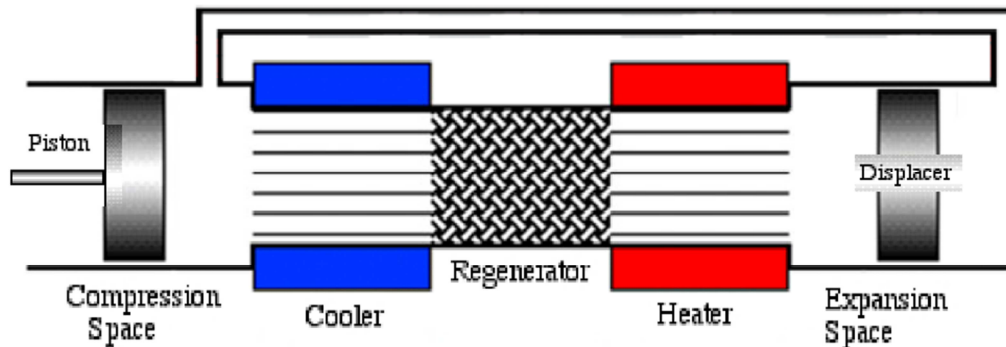


Fig. 1.6: rappresentazione schematica principali parti di una macchina Stirling.

#### 1.3.1 Volume di espansione ( Expansion space )

Il volume di espansione equivale al volume entro cui il fluido di lavoro si espande a seguito dell'aumento della sua temperatura, diretta conseguenza dell'assorbimento del calore fornitogli dalla sorgente termica esterna. Esso si trova confinato fra la testa calda, il dislocatore od un pistone (solo per configurazione alfa), ed il rigeneratore. In certi casi, una piccola parte di questo volume può essere occupato dal sistema che introduce il calore nel volume. Durante il funzionamento, esso può risultare ridotto (od ampliato) dal movimento del dislocatore o di un pistone;

#### 1.3.2 Riscaldatore (Heater)

Con questo nome si identificano tutte quelle parti della macchina la cui funzione è quella di trasmettere il calore dall'esterno al fluido di lavoro contenuto nel volume d'espansione. Come già accennato in precedenza, uno dei vantaggi che un motore esotermico come lo Stirling può avere rispetto ad un motore endotermico, riguarda proprio la possibilità di poter essere alimentato con più tipologie di fonte energetica: gli organi mobili infatti entrano in diretto contatto solo con un flusso termico di energia, e non con il processo dal quale lo si genera. Se la macchina realizza il ciclo in senso inverso, l'appellativo di "riscaldatore" non è più idoneo. Per capire quale altro nome dev'essere attribuito a questo componente, è sufficiente fare riferimento alla seguente considerazione: qualunque sia il funzionamento della macchina (motore, macchina frigorifera o pompa di calore), il flusso di calore che la attraversa ha sempre la stessa direzione. Pertanto, quando questa funziona come macchina frigorifera, la testa calda prende il nome di evaporatore, quando funziona da pompa di calore invece essa prende il nome di assorbitore. La forma del componente, comunque, non varia di molto;

### 1.3.3 Volume di compressione ( Compression space )

Esso è il volume entro cui il fluido di lavoro si contrae e subisce dunque una compressione a seguito della diminuzione della sua temperatura, causata dalla cessione della sua energia al pozzo termico. Esso si trova confinato fra il sistema di raffreddamento (che equivale alla sorgente termica), il rigeneratore, il dislocatore ed il pistone ( se si tratta di una configurazione beta o gamma) od un pistone e la testa fredda (se stiamo parlando di una configurazione alfa). Anche in questo caso, può capitare che il sistema di raffreddamento possa occupare una piccola parte di questo volume penetrando al suo interno. Durante il funzionamento, la sua entità è funzione della posizione degli organi mobili.

### 1.3.4 Raffreddatore ( Cooler )

Questo nome identifica il componente, o il sistema di componenti, la cui funzione è quella di estrarre il calore dal fluido di lavoro contenuto nel volume di compressione e trasmetterlo all'esterno. Di fatto, esso equivale sempre ad uno scambiatore di calore. Quando il mezzo che riceve il calore estratto è l'aria dell'ambiente esterno, lo scambiatore assume una forma molto semplice: esso è costituito da un'alettatura metallica (di solito in alluminio) applicata esternamente al cilindro del motore, in maniera tale da aumentare la superficie di scambio. Questa soluzione è però adatta solo per macchine di potenza piccola: le dimensioni dello scambiatore infatti crescono all'aumentare della quantità di calore da smaltire, e non è dunque pensabile di impiegare alettature esageratamente grandi. In questi casi si utilizza un sistema di raffreddamento ad acqua: esso è costituito da un fascio di sottili tubazioni, che penetrano nel volume di compressione (in posizione riparata dal moto degli organi mobili ovviamente) ed entrano in contatto col fluido di lavoro. In questo modo, l'acqua, circolando, può asportare calore dal fluido e cederlo esternamente all'aria attraverso un radiatore. Anche in questo caso, se la macchina realizza il ciclo in direzione inversa, l'appellativo di "refrigeratore" non è più idoneo. Con la stessa importante osservazione fatta per il riscaldatore, possiamo arrivare a dire che quando la macchina funziona come frigorifero il componente sin qui chiamato refrigeratore prende il nome di "condensatore" (il nome sarebbe improprio perché all'interno non c'è nulla che condensa, tuttavia esso richiama l'attenzione sul fatto che la sua funzione è la stessa del condensatore d'una macchina frigorifera convenzionale), quando funziona da pompa di calore invece essa prende il nome di riscaldatore;

### 1.3.5 Pistone motore pistone dislocatore ( Power piston e Displacer )

Costituiscono gli organi mobili di questa macchina. La loro funzione è quella di seguire le espansioni e le contrazioni del gas per trasformare in lavoro il calore che ciclicamente il gas assorbe e rilascia. Il pistone ha la stessa forma di quelli utilizzati per i motori endotermici, anche se rispetto a quest'ultimi richiedono di essere dotati di tenute molto più curate, essendo la macchina di Stirling un sistema chiuso e non aperto. Il pistone dislocatore (displacer), è un organo non molto dissimile da un pistone: è costituito da un corpo cilindrico metallico, e la sua funzione, nelle configurazioni in cui è presente, è quella di trasferire il fluido di lavoro dal volume d'espansione al volume di compressione. Questo processo può essere realizzato attraverso l'uso di un pistone sia aderente che non aderente al cilindro nel quale è inserito: nel primo caso dovrà quindi essere presente un canale di collegamento tra i due volumi, nel secondo caso invece il gas trafiggerà da un volume all'altro lambendo cilindro e dislocatore. Anche in questo caso è importante contenere le masse: pertanto questi componenti vengono di norma costruiti in lega d'alluminio.

### 1.3.6 Rigeneratore ( Rigenerator )

Questo componente è di fatto una capacità termica, ovvero un elemento capace di accumulare grandi quantità di calore. Esso è presente nelle macchine Stirling fin dalla loro nascita, anche se a quel tempo non se ne comprendeva bene il funzionamento. Tuttavia, in molteplici occasioni fu dimostrato quanto esso sia in grado di incrementare sensibilmente le prestazioni della macchina. Per comprenderne meglio la funzione e le caratteristiche, è necessario ubicarlo all'interno della macchina: esso è situato di norma a metà strada fra riscaldatore e refrigeratore, o comunque a metà strada nel condotto che collega la camera di espansione a quella di compressione. Essendo posto fra due volumi di gas le cui temperature differiscono di centinaia di gradi, esso presenterà al suo interno un gradiente di temperatura compreso interamente nella suddetta differenza. Ipotizziamo ora che al suo interno sia già immagazzinata una certa quantità di calore: nel momento in cui il gas a bassa temperatura proveniente dal volume di compressione lo attraversa, esso gli cede una parte del calore accumulato, così facendo il gas giunge nel volume d'espansione ad una temperatura più elevata; viceversa, quando la stessa quantità di gas, dopo essere stato riscaldato, lo attraversa in direzione opposta, esso lo priva di una parte di calore (che idealmente è la medesima quantità che in precedenza gli aveva ceduto), facendo sì che il gas non possa giungere nel volume di compressione ad una temperatura elevata.

Compreso il suo ruolo, il rigeneratore dovrà sicuramente essere un componente geometricamente compatto in grado di accumulare grandi quantità di calore; sopportare grandi salti termici, effettuare col gas scambi di calore veloci, senza variare di molto la sua distribuzione interna delle temperature. Inoltre, non dovrà consentire al calore di uscire verso l'ambiente esterno; non dovrà ostruire eccessivamente il passaggio del gas al suo interno e dovrà essere chimicamente stabile (cioè non deve rilasciare nel gas polveri o particelle). Tutti questi aspetti, sono legati principalmente alla forma e al materiale di cui il rigeneratore è costituito. Per avere infatti un'elevata capacità termica (che è data dal rapporto tra la massa ed il calore specifico del componente) sarebbe dunque preferibile l'uso di materiali con alto valore di calore specifico, che normalmente sono composti di origine minerale a base di ossidi di alluminio o magnesio, i quali non hanno però buone doti di lavorabilità e non sono nemmeno capaci di scambiare elevate quantità di calore in breve tempo. Concretamente quindi, si utilizzano materiali con calore specifico minore, con una lavorabilità maggiore ed una maggior propensione a realizzare veloci scambi termici. Ciò è realizzabile mediante la disponibilità di grandi superfici per lo scambio termico che si ottiene attraverso la costituzione di spirali, maglie, o più in generale insiemi di sottili corpi metallici trafilati o laminati, in ferro o in acciaio.

Trattando ora della forma, per essere davvero vantaggioso il rigeneratore metallico dovrebbe, in primo luogo, essere un grosso blocco solido di materiale al fine di realizzare un'elevata capacità termica. In secondo luogo, al fine di minimizzare i volumi morti e le perdite di carico durante i passaggi del gas, esso dovrebbe essere piccolo e dotato internamente di una struttura porosa con ampie cavità. Infine, allo scopo di ottimizzare i trasferimenti di calore, il componente dovrebbe essere costituito da un'estesa e fitta tramatura metallica. E' chiaro che non è possibile soddisfare contemporaneamente tutte queste caratteristiche, poiché palesemente contrastanti: si dovrà quindi scendere a situazioni di compromesso, che portano a costruire questo componente mediante tramature piuttosto fitte (senza esagerazioni) in lamina o filo di acciaio.

Per il contenimento delle perdite di calore verso l'esterno, si può isolare termicamente il componente, anche se in certi casi questo va ad aumentarne sensibilmente l'ingombro, perciò non sempre si fa.

I rigeneratori sono inseriti nella macchina mediante tre sistemi:

- esterno;
- anulare;
- integrato nel pistone dislocatore.

Il sistema esterno viene utilizzato principalmente nelle macchine di tipo alfa, ed è probabilmente il meno problematico da costruire, montare ed isolare. Si trova nel condotto che congiunge i due cilindri. Il sistema anulare invece, viene utilizzato nelle configurazioni beta e gamma: in questo caso, il pistone dislocatore è aderente al relativo cilindro, il quale è contenuto nella struttura esterna della macchina, ma è separato da essa. Nello spazio che separa le due parti metalliche (chiaramente di forma anulare) viene inserito il rigeneratore. In questo caso, l'isolamento verso l'esterno è un po' più complesso da realizzare. Il sistema integrato nel dislocatore era piuttosto utilizzato nel passato, e sfruttava il fatto che quest'ultimo è di fatto un corpo metallico, capace di accumulare e rilasciare il calore velocemente: si procedeva quindi all'incremento della sua capacità termica mediante il suo allungamento. In tal caso, il dislocatore doveva essere ben lambito dal gas in movimento, per questo aveva un diametro minore rispetto al cilindro.

### 1.3.7 Fluido di lavoro

Il fluido di lavoro è quella sostanza contenuta nei volumi di espansione, di compressione e nei volumi morti, le cui reazioni a determinate sollecitazioni termiche danno luogo al movimento degli organi mobili del motore e dunque generano lavoro. Il primo fluido di lavoro utilizzato nelle macchine Stirling fu l'aria, che di fatto è una miscela composta principalmente da azoto (78% circa) e ossigeno (21% circa), introdotta a pressione atmosferica. Essa venne nel secolo scorso sostituita da altri gas più leggeri, nella fattispecie da azoto, da elio od idrogeno. Per quanto l'impiego di questi gas comporti un costo aggiuntivo dovuto ai processi produttivi dai quali si ricavano, essi apportano notevoli miglioramenti. L'aria, infatti, peggiora le prestazioni e l'affidabilità della macchina perché contiene ossigeno, oltre che quantità non sempre sottovalutabili di umidità e polveri: questo insieme di fattori, unito alle alte temperature di funzionamento, può dar luogo ad ossidazioni, le quali possono intaccare le superfici interne della macchina e peggiorarne il funzionamento. L'utilizzo dell'azoto, dell'elio e dell'idrogeno con un elevato grado di purezza evita tutto ciò. Azoto ed Elio si distinguono per non essere tossici e per essere chimicamente poco reattivi (sono entrambi gas inerti, l'Elcio oltretutto è un gas nobile). L'Idrogeno invece, per quanto sia il fluido di lavoro migliore, è il più difficile da maneggiare: è infatti piuttosto reattivo, può sviluppare combustioni molto intense ed è inoltre difficile da contenere, dato che gli sono sufficienti anche piccolissime porosità sulle tenute per fuoriuscire da un volume.

## 1.4 Configurazioni meccaniche della macchina di Stirling

I sistemi meccanici capaci di realizzare la sequenza di trasformazioni che compongono il ciclo di Stirling possono avere varie forme: in tutti i casi comunque, si tratterà sempre di sistemi che non scambiano con l'esterno altro che calore, essendo il ciclo di Stirling un ciclo chiuso. Il fatto che questo ciclo possa essere realizzato con sistemi diversi, ha reso necessaria una loro classificazione. Fra le tante proposte, la classificazione che negli anni è stata preferita alle altre è quella di Kirkley[4]. Secondo questa classificazione, tutte le macchine a ciclo di Stirling realizzabili sono riconducibili a tre configurazioni base, denominate *alfa*, *beta*, e *gamma*.



### 1.4.1 Configurazione alfa

La configurazione alfa è la più semplice dal punto di vista concettuale: essa prevede l'utilizzo di due pistoni separati, il pistone motore e quello di spostamento, collocati nei rispettivi cilindri mantenuti a diverse temperature. Il pistone motore è a contatto con lo scambiatore di calore ad alta temperatura, mentre il pistone di spostamento è a contatto con quello a bassa temperatura. I due pistoni sono interconnessi tra loro mediante un sistema biella-manovella e albero motore con volano. Il volano presente sull'asse del motore accumula energia durante le fasi, rilasciandola poi tra una fase e la successiva. In questo modo si passa da uno stadio all'altro senza l'arresto del motore quando i pistoni sono a fine corsa, rendendo il movimento più omogeneo.

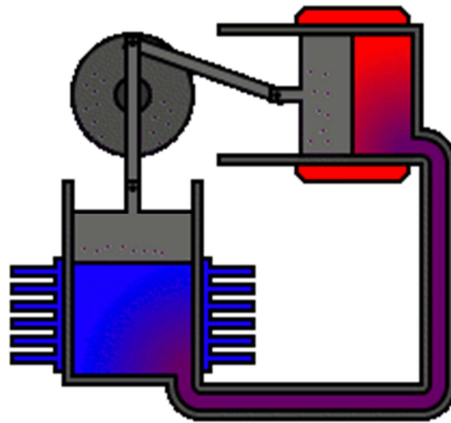


Fig. 17: macchina di Stirling in configurazione alfa.

Questa configurazione è di facile costruzione ed è molto simile nella forma ai motori a combustione interna, è quindi una configurazione ben affiancabile a produzioni motoristiche più consolidate. I volumi morti, che peggiorano le prestazioni, sono inoltre piuttosto contenuti. Permette, pertanto, di ottenere un alto rapporto tra potenza e volume ma risulta però più ingombrante se confrontata con le altre configurazioni possibili. Presenta, inoltre, numerosi problemi tecnici dovuti alla necessità di utilizzare guarnizioni per contenere il gas. L'alta temperatura di lavoro infatti è causa della scarsa durata delle guarnizioni stesse. Infine, la presenza del cinematismo biella manovella è di fatto indispensabile e ciò implica inevitabili perdite meccaniche addizionali.

### 1.4.2 Configurazione beta

La configurazione beta è composta dal pistone motore e dal pistone dislocatore (chiamato anche displacer) contenuti entrambi nello stesso cilindro ed entrambi collegati, mediante manovellismo, allo stesso albero motore dotato di volano. Il displacer non è a tenuta e quindi non fornisce alcuna potenza aggiuntiva al motore, esso serve esclusivamente a muovere il gas di lavoro a volume costante. Il pistone motore, dotato di guarnizioni, comprime e espande periodicamente il fluido di lavoro nel cilindro. Il collegamento relativo tra pistone motore e pistone dislocatore può essere realizzato in vari modi. Ne è un esempio il motore illustrato di seguito in figura: la testata del cilindro è collegata ad una camera con parete calda mentre il corpo è a contatto con una parete fredda. Nella camera si trova il pistone dislocatore che può raggiungere la parte calda e quella fredda del motore e che è costituito da materiale isolante senza tenuta. Il gas, per passare dalla zona di espansione a quella di compressione, attraversa la serie riscaldatore-rigeneratore-refrigeratore: quando il fluido di lavoro è nell'estremità calda si espande spingendo il pistone



motore; quando invece è nell'estremità fredda si contrae. Il momento motore della macchina ed il volano poi, spingono il pistone motore nel senso inverso per comprimere il gas. Il momento motore della macchina ed il volano poi, spingono il pistone motore nel senso inverso per comprimere il gas.

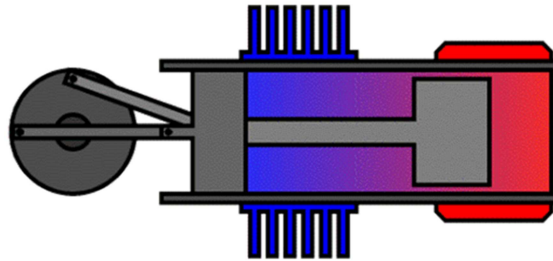


Fig.1.8: macchina di Stirling in configurazione beta.

Questa configurazione si presenta essere di facile costruzione, oltre che molto compatta. La quantità di tenute necessarie viene minimizzata e concentrata sul pistone, tale quantità può essere ulteriormente ridotta con un'impostazione "free-piston", con la quale è inoltre possibile eliminare il cinematismo biella manovella. Infine, sono di facile contenimento i volumi morti.

### 1.4.3 Configurazione gamma

Fondamentalmente la configurazione gamma è simile a quella beta. La differenza sta nel fatto che il pistone motore è contenuto in un cilindro separato da quello del pistone dislocatore, nonostante i due pistoni siano ancora collegati alla stessa trasmissione. Il gas fluisce liberamente da un cilindro all'altro rimanendo un'unica massa e permettendo così una completa separazione tra gli scambiatori di calore, associati al pistone dislocatore, e lo spazio per le compressioni e le espansioni, associato invece al pistone di lavoro. Questa configurazione fornisce un basso rapporto di compressione ed è caratterizzata dalla presenza di maggiori volumi morti rispetto alle altre due configurazioni. Nonostante la ridotta potenza però il motore a configurazione gamma dal punto di vista meccanico è molto semplice da realizzare e viene largamente utilizzato nei motori a cilindri multipli. Con questa configurazione è possibile scegliere di effettuare il raffreddamento solo sul cilindro di compressione come anche di suddividerlo su entrambi i cilindri. Sono necessarie le stesse tenute della configurazione beta. Anche in questo caso è applicabile l'impostazione "free-piston" ed eliminare il cinematismo biella-manovella. Tale configurazione è però sempre piuttosto ingombrante in confronto alle altre.

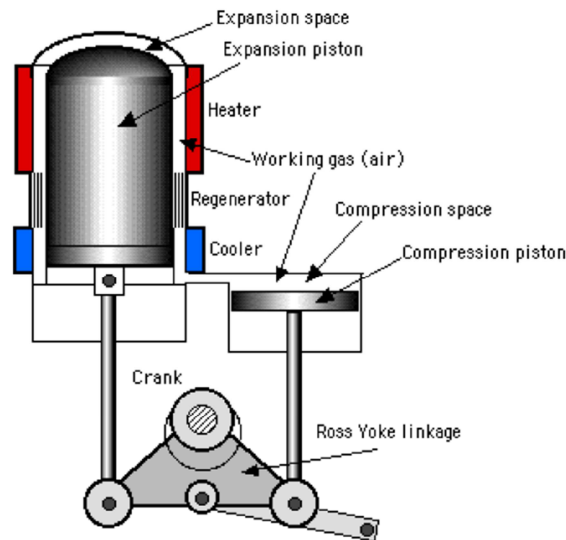


Fig.1.9: macchina di Stirling in configurazione gamma.

#### 1.4.4 Configurazione beta “free-piston”

Particolare attenzione va riservata ai motori ciclici Stirling detti *free-piston* ( o a stantuffi liberi ). La peculiarità di questa configurazione è quella di far funzionare una macchina di Stirling, in configurazione beta o gamma, senza il manovellismo biella manovella affidando alle variazioni di pressione il compito di muovere il pistone motore e quello dislocatore. Infatti, originariamente la definizione di macchine a stantuffi liberi è stata riferita a macchine a fluido, generalmente motrici, in cui gli stantuffi sono guidati nel loro moto non da un meccanismo cinematico che vincola i loro spostamenti, ma dalle forze di pressione che si manifestano nel fluido in seguito a trasformazioni termodinamiche. La prima realizzazione di un motore Stirling free-piston si deve al prof. William Beale, della Ohio State University. Fu lui infatti ad avere l’intuizione di eliminare il manovellismo ad un motore a guida cinematica. I motori Stirling di quel periodo, realizzati da Philips e General Motors pur realizzando rendimenti termici di tutto rispetto, risultavano comunque pesanti, ingombranti e notevolmente complessi. Con l’aiuto di quelli che allora erano i suoi studenti, Beale realizzò un prototipo della sua creazione, con l’intento di ottenere una versione semplificata di quei motori, con pesi e dimensioni ridotte, che mantenesse gli stessi livelli di prestazione.

L’efficienza misurata dagli esperimenti di Beale risultò molto bassa (intorno al 10%), L’assenza di un rigeneratore vero e proprio, infatti, limitava molto la capacità del gas di scambiare calore con le sorgenti nel poco tempo a disposizione, durante l’attraversamento del canale anulare. Tuttavia le ridotte dimensioni del prototipo, unite alla semplicità costruttiva, furono spunti più che sufficienti per investigare sugli ampi margini di miglioramento che il dispositivo prometteva. Negli ultimi trent’anni, infatti, aziende come la Sunpower Inc., fondata dallo stesso Beale nel 1974, hanno sviluppato ampiamente questa tecnologia, raggiungendo livelli di prestazioni che hanno portato il motore free-piston a competere in moltissimi campi, sia con gli altri tipi di macchine Stirling.

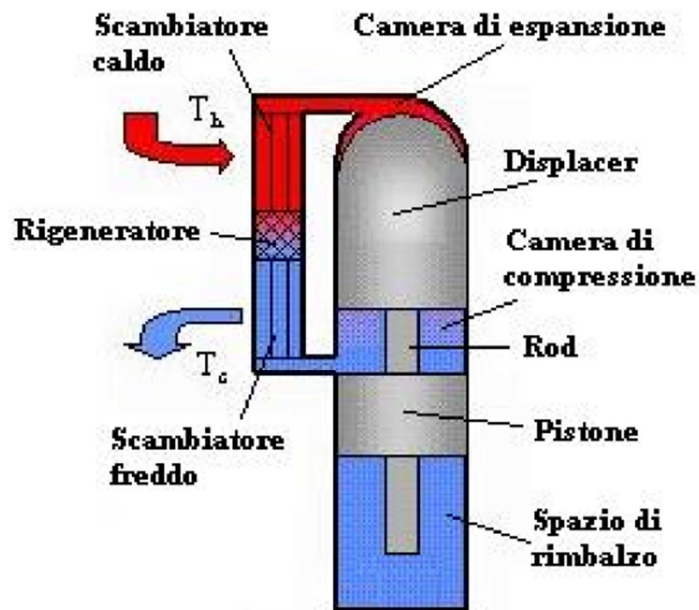


Fig.1.10: macchina di Stirling in configurazione free-piston.

I vantaggi principali offerti dai motori a pistone libero sono molti, a cominciare dalla già citata semplicità costruttiva. Il basso numero di elementi mobili ( in effetti solo i due stantuffi ) garantisce di poter raggiungere prestazioni equivalenti a quelle di motori Stirling a guida cinematica, ma con una drastica riduzione del peso e dell'ingombro. Soprattutto questa caratteristica, come sarà illustrato nella parte finale del capitolo, li ha resi molto appetibili agli occhi dell'industria spaziale, dove i requisiti di limitazione di dimensione e massa sono più stringenti.

Nelle macchine a guida cinematica, il funzionamento è influenzato dalla presenza di forze esterne, come le spinte laterale dovute ad un eventuale manovellismo. In quelle a pistone libero, invece, non ci sono forze esterne, fatta eccezione per le forze di massa agenti sui pistoni, se l'asse del motore non è posizionato verticalmente, che sono comunque molto esigue. Inoltre non è richiesta nessun particolare livello di tenuta ai pistoni, dato che, come già visto in precedenza, sigillando completamente il motore, è possibile renderlo immune agli eventuali trafilamenti di gas. Tutto questo si traduce in:

- livelli di usura molto bassi, che permettono a questi dispositivi, con pochi accorgimenti progettuali, di garantire vite operative di molto anni, con alta affidabilità e spesso nessuna richiesta di manutenzione esterna ;
- attriti molto limitati fra i vari componenti, che contribuiscono quindi ad alzare il rendimento termodinamico, minimizzando le perdite.

Con i motori a pistone libero è poi possibile ottenere sistemi privi di vibrazioni, montando per esempio due dispositivi in contrapposizione, così che per simmetria possa compensare le spinte degli elementi mobili. La caratteristica che forse più delle altre rende questi motori estremamente interessanti è la loro capacità di auto-avviarsi. Infatti, è sufficiente riscaldare l'estremità corrispondente allo spazio di espansione, per mettere in movimento i pistoni, dopodiché il funzionamento è garantito dal mantenimento della differenza di temperatura fra gli scambiatori. In alternativa, per un motore già a contatto con la sorgente termica, può bastare una piccola vibrazione esterna, magari dovuta ad un altro componente di un sistema più grande, per far muovere il displacer, e quindi avviare il ciclo. Fin dalla loro nascita, i motori a pistone libero hanno dovuto

combattere con una limitata applicabilità, dovuta per lo più al fatto di essere compatibili esclusivamente con macchine caratterizzate da un moto rettilineo alternativo. Questo inevitabilmente ne ha sempre arginato lo sviluppo come macchine di uso universale. Tuttavia si tratta di un problema più che risolvibile, applicando qualora sia necessario per esempio un moto rotativo, un apposito convertitore cinematico.

Il vero svantaggio delle configurazioni Free-Piston è da ricercare nella progettazione, che risulta sempre molto complicata, sia che si tratti di ricercare uno strumento universale di progetto, in grado di legare le numerose grandezze in gioco e predire il comportamento del motore, sia che si tratti di realizzare praticamente le soluzioni che questo strumento può fornire. Per la completa comprensione della sequenza di fenomeni dinamici e termodinamici che costituiscono il funzionamento del motore, si rende necessaria un'analisi simultanea che abbracci il movimento dei pistoni, le trasformazioni termodinamiche compiute dal gas, le variazioni nelle condizioni delle molle gassose, e l'influenza del dispositivo di carico applicato al motore.

### 1.5 Principio di funzionamento di un motore Stirling in configurazione beta

Il modello al quale si fa riferimento per la descrizione del principio di funzionamento è quello riportato in figura in cui è presente il cinematisma biella-manovella ed un volano:

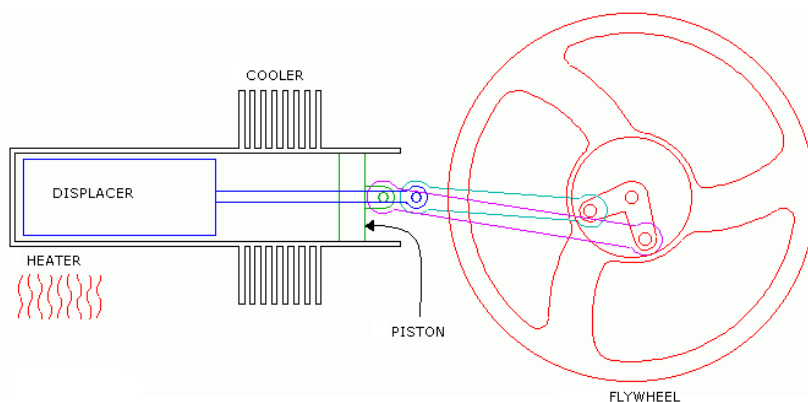


Figura 1.11: motore Stirling con cinematisma biella- manovella.

La presenza di questo cinematisma è responsabile di un'importante caratteristica dinamica: i movimenti compiuti dal pistone seguono i movimenti del dislocatore con un ritardo di fase di  $90^\circ$  esatti. In ogni istante è fondamentale tener presente che è il pistone che determina il volume del gas, mentre la pressione dipende anche dalla sua temperatura. Partiamo dalla situazione in cui il volume ha appena passato il suo punto di minimo. La dinamica può essere descritta in 4 fasi:

- 1) *Espansione*: la maggior parte del gas si trova nei pressi del riscaldatore, e la sua temperatura aumenta; espandendosi, il gas spinge verso il basso il pistone; il volano accumula energia cinetica; a causa dell'espansione, il gas passa nello spazio fra cilindro e dislocatore, cedendo una parte del suo calore al dislocatore stesso: in questo caso dunque, esso svolge pure il ruolo di rigeneratore;

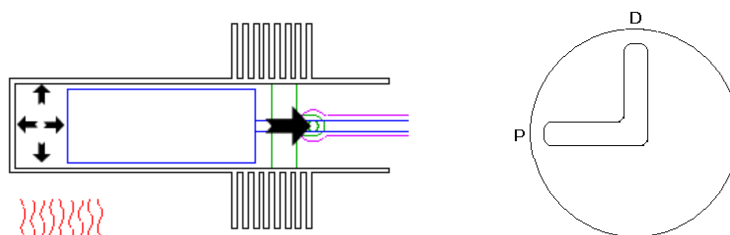


Figura 1.12: espansione.

- 2) *Trasferimento*: la discesa del pistone provoca la discesa del dislocatore, il gas viene quindi trasferito totalmente nel volume di espansione, dove, dopo esser stato riscaldato, si espande verso il volume di compressione, continuando a spingere in basso il pistone ed agevolando, successivamente, la salita del dislocatore; durante i trasferimenti, come sempre, il dislocatore cede ed acquista quote di calore; il volano continua ad accumulare energia cinetica;

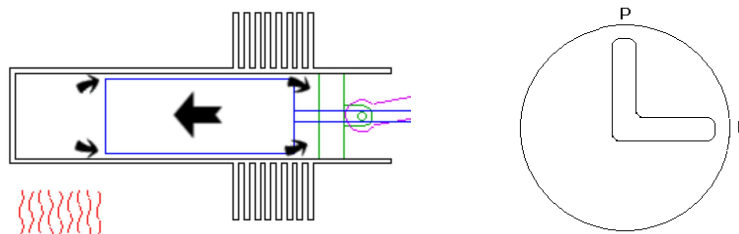


Figura 1.13: trasferimento.

- 3) *Contrazione*: il pistone giunge nel suo punto più basso e l'espansione del gas è massima; la maggior parte di esso è stato nel frattempo trasferito nel volume di compressione dalla parziale salita del dislocatore, e si trova quindi a contatto col refrigeratore: questo provoca la contrazione del gas; tale contrazione, agevola la risalita del pistone, innescata grazie all'energia cinetica accumulata nel volano nelle due fasi precedenti.

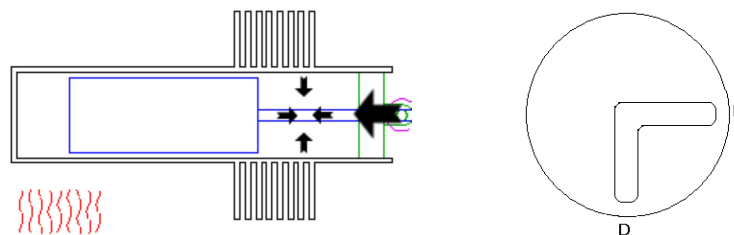


Figura 1.14: contrazione.

- 4) *Trasferimento*: oltre alla risalita del pistone, l'energia cinetica del volano determina pure la risalita del dislocatore, che trasferisce il gas dalla camera di espansione a quella di compressione; quando il dislocatore è nel suo punto più alto, il gas è totalmente contenuto nel volume di compressione, dove si raffredda e conclude la contrazione; l'energia cinetica del volano, agevolata dalla contrazione del gas, permette al sistema di riportarsi nella situazione iniziale

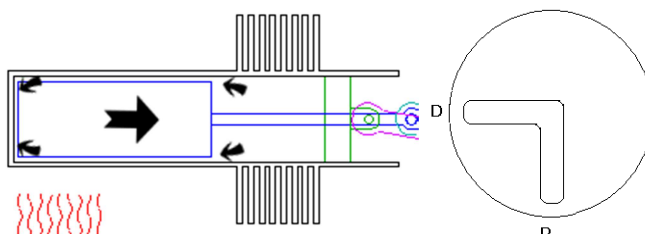


Figura 1.15: trasferimento.

## 1.6 Funzionamento di un motore Stirling in configurazione “free – piston”

Si passa ora ad analizzare il funzionamento vero e proprio del motore Stirling in configurazione free-piston in analogia con quanto fatto nel paragrafo. Non avendo due manovelle ad angolo retto, i movimenti del dislocatore sono meccanicamente indipendenti da quelli del pistone. Il loro moto è dunque legato solo alle pressioni a cui sono soggetti e all’azione delle molle. Anche in questo caso, è il pistone a determinare il volume del gas. Si prenda come punto iniziale la configurazione in cui il gas si trova in maggior quantità nel volume di espansione, con un volume complessivo disponibile minimo (pistone alla massima altezza).

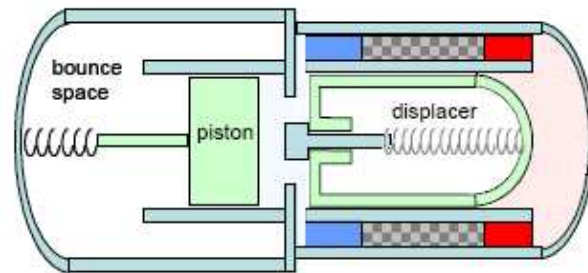


Figura1. 16: situazione di partenza del free-piston.

- 1) *Espansione:* in questa fase il dislocatore è nel suo punto più basso, pertanto la maggior parte del gas si trova nel volume di espansione, dove si riscalda ed aumenta la sua pressione; espandendosi verso il volume di compressione, esso provoca la discesa del pistone; nelle molle si ha un crescente accumulo di energia elastica;

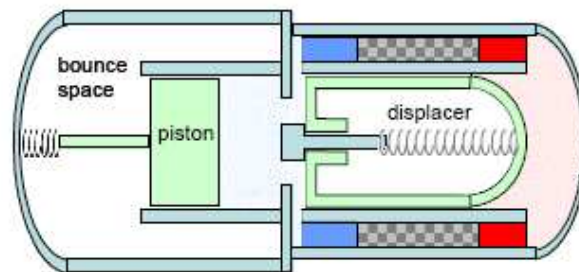


Figura 1.17: espansione nel free-piston.

- 2) *Trasferimento:* quando il pistone giunge nel punto più basso, si ha la massima espansione; a questo punto, il gas, costretto in un volume non più incrementabile, inizia ad uniformare la pressione fra volume di espansione e volume di compressione: questo provoca la salita del dislocatore ed il trasferimento del gas dal volume di espansione a quello di compressione;

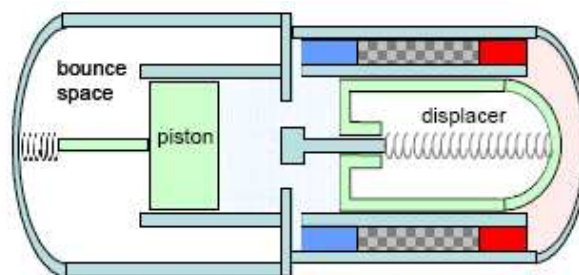


Figura 1.18: trasferimento nel free-piston.

- 3) *Contrazione*: quando il dislocatore è giunto alla sua massima altezza, la maggior parte del gas si trova nel volume di compressione: in questa fase, esso viene raffreddato dal refrigeratore, e questo provoca la contrazione: il gas diminuisce la sua pressione e dunque il pistone risale, giungendo alla sua massima altezza;

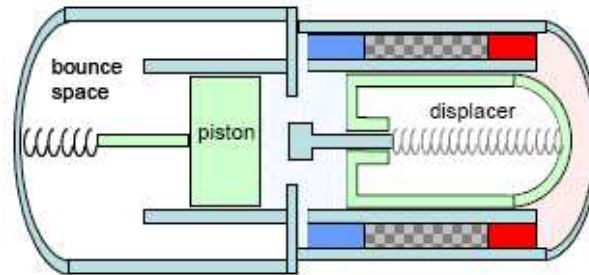


Figura 19: compressione nel free-piston.

- 4) *Trasferimento*: la continuazione del raffreddamento e della contrazione, unito al contemporaneo riscaldamento del gas nel volume di espansione, creano una differenza di pressione ai capi del dislocatore, che si trova costretto a scendere, riportando il sistema nella situazione di partenza.





## Capitolo 2

### Ciclo termodinamico della macchina di Stirling

#### 2.1 Richiami di termodinamica

Prima di entrare nel dettaglio della descrizione del ciclo di Stirling è necessario richiamare alcune nozioni di termodinamica[5].

Per prima cosa con il termine *termodinamica* si intende la scienza che si occupa delle modificazione subite da un sistema a seguito del trasferimento di energia.

Un *sistema termodinamico* è una porzione del mondo che può essere costituita da una o più parti come per esempio un volume di gas o un liquido in equilibrio con il suo vapore.

L'*ambiente termodinamico* è l'insieme con cui il sistema può interagire come per esempio l'aria o un qualsiasi fluido in cui è immerso il sistema oppure diversi corpi solidi a contatto con il sistema.

L'*universo termodinamico* è l'insieme dato dal complesso sistema più ambiente.

Un sistema si definisce *aperto* quando tra l'ambiente ed il sistema stesso c'è uno scambio di energia e di materia.

Un sistema si definisce *chiuso* quando tra l'ambiente ed il sistema stesso c'è solamente uno scambio di energia.

Un sistema si definisce *isolato* quando tra l'ambiente ed il sistema stesso non c'è né scambio di energia né scambio di materia.

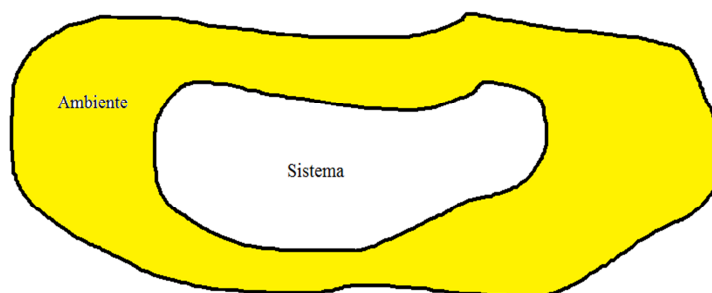


Fig. 2.1: rappresentazione schematica ambiente e sistema termodinamico.

All'interno di ogni sistema esistono delle *variabili termodinamiche*. Esse sono quel numero ristretto di grandezze fisiche direttamente misurabili ( pressione, volume, temperatura, massa ) che descrivono il sistema termodinamico. Sono anche chiamate coordinate termodinamiche. Alcune variabili, come massa e volume, che dipendono dalla massa e sono additive si dicono *estensive* mentre altre, che dipendono dalla posizione del punto nel sistema e non sono additive, si definiscono *intensive* perché viceversa non lo sono.

## Capitolo 2

Un sistema termodinamico si definisce in *equilibrio termodinamico* quando le variabili termodinamiche che lo descrivono rimangono costanti nel tempo in assenza di variazioni dell'ambiente. In un sistema termodinamico all'equilibrio le coordinate termodinamiche sono anche dette variabili di stato.

Esiste una relazione tra le coordinate termodinamiche in uno stato di equilibrio che si esprime sotto forma di equazione e questa prende il nome di *equazione di stato*.

Si definisce *trasformazione termodinamica* l'evoluzione del sistema da uno stato di equilibrio termodinamico iniziale ad uno stato di equilibrio termodinamico finale. Una trasformazione è detta *reversibile* se essa avviene attraverso stati di equilibrio e in assenza di qualsiasi forza dissipativa. Viceversa, una trasformazione si dice *irreversibile* qualora passi attraverso stati di non equilibrio o avvenga in presenza di forze dissipative oppure si verificano entrambe queste due situazioni.

Una trasformazione che avviene a temperatura costante si definisce trasformazione isoterma. Una trasformazione che avviene a pressione costante si definisce trasformazione isobara. Una trasformazione che avviene a volume costante si definisce trasformazione isocora.

Due sistemi si dicono in *equilibrio termico* tra loro quando hanno la stessa temperatura.

Oltre alle grandezze che descrivono lo stato vi sono anche grandezze associate agli scambi di energia tra un sistema e l'esterno. Esse descrivono come evolve un sistema e vengono dette grandezze di scambio. Le interazioni energetiche con l'esterno sono associate, come già accennato, ad entrate o uscite di materia, ma possono anche avvenire in corrispondenza dei confini del sistema. In questo caso le interazioni sono definite:  $W$  lavoro, che comporta spostamenti macroscopici dei confini;  $Q$  calore, che comporta variazioni delle energie cinetiche delle molecole.

### 2.1.1 Primo principio della termodinamica

Gli scambi di calore e di lavoro tra un sistema e l'ambiente esterno sono legati alle variazioni dell'energia complessiva. Si può così introdurre il primo principio della termodinamica che non è altro che il principio di conservazione dell'energia. Esso viene rappresentato dall'equazione in forma differenziale:

$$dQ = dW + dU \quad (2.1)$$

dove  $dQ$  = variazione infinitesima di energia assorbita o ceduta sotto forma di calore dal sistema;

$dW$  = variazione infinitesima del lavoro compiuto dal sistema;

$dU$  = variazione infinitesima dell'energia interna al sistema.

In forma integrale l'espressione del primo principio della dinamica diventa:

$$Q = W + \Delta U \quad (2.2)$$

dove  $Q$  = energia assorbita o ceduta sotto forma di calore dal sistema;

$W$  = lavoro compiuto dal sistema;

$\Delta U$  = variazione dell'energia interna al sistema.

L'energia interna del sistema è una funzione delle coordinate termodinamiche del sistema, per questo viene anche definita *funzione di stato*. Le sue variazioni rappresentano l'entità degli scambi energetici del sistema con l'ambiente.

La convenzione sui segni adottati per i flussi calore e per il lavoro nel primo principio della termodinamica viene riportata nella successiva tabella:

<b>Flusso di energia</b>	
Calore che entra in un sistema dall'esterno	Positivo
Calore che esce in un sistema dall'esterno	Negativo
Lavoro compiuto da un sistema sull'esterno	Positivo
Lavoro compiuto dall'esterno sul sistema	Negativo

Tabella 2.1: convenzione sui segni per i flussi di energia.

Se un sistema termodinamico esegue una qualsiasi trasformazione che lo riporti allo stato iniziale questa prende il nome di *trasformazione ciclica*. Quando un sistema chiuso o un sistema aperto monodimensionale evolve secondo una trasformazione ciclica, lo stato iniziale e lo stato finale coincidono: in un processo ciclico si svolge una sequenza di operazioni che alla fine ripristina lo stato iniziale del sistema. In un ciclo termico quindi, le variazioni d'energia all'interno del sistema sono nulle. Essendo  $\Delta U$  pari a zero, il primo principio della termodinamica può essere scritto come:

$$Q = W \quad (2.3)$$

Quindi il calore ed il lavoro netto in una trasformazione ciclica coincidono. Se durante un ciclo viene prodotto lavoro assorbendo calore il ciclo è detto termico ed in tal caso il dispositivo che lo compie è detto macchina termica. Se invece il ciclo è tale che venga richiesto un lavoro esterno per assorbire calore da sorgenti fredde e cederlo a sorgenti più calde si parla allora di ciclo frigorifero e di macchina frigorifera.

Questi cicli prendono anche rispettivamente i nomi di cicli diretti e cicli inversi e hanno le seguenti proprietà:

- cicli *diretti*, utilizzati per la produzione di lavoro a spese di una fornitura di calore. Si svolgono a temperature maggiori rispetto a quella dell'ambiente esterno. Nei cicli diretti si definisce rendimento di conversione il rapporto tra lavoro ottenuto e calore fornito a temperatura  $T$  maggiore di quella ambiente:

$$\eta = \frac{L}{Q_{\text{assorbito}}} \quad (2.4)$$

Per i cicli diretti vale la relazione:  $W = Q_{\text{assorbito}} + Q_{\text{ceduto}}$  e quindi combinando le relazioni si ottiene:

$$\eta = \frac{Q_{\text{assorbito}} + Q_{\text{ceduto}}}{Q_{\text{assorbito}}} = 1 - \frac{|Q_{\text{ceduto}}|}{Q_{\text{assorbito}}} \quad (2.5)$$

Che risulta essere sicuramente minore di uno come è corretto che sia.

- i cicli *inversi*, utilizzati per la produzione di effetto termico a spese di una fornitura di lavoro. Nei cicli inversi il lavoro è fornito dall'esterno: i cicli frigoriferi ad esempio prelevano il calore  $Q_{\text{assorbito}}$  da un sistema a temperatura  $T$  minore di quella ambiente mentre le pompe di calore cedono il calore  $Q_{\text{ceduto}}$  ad un sistema che è ad una temperatura  $T$  maggiore di quella ambiente. Per i cicli inversi frigoriferi non si definisce il rendimento ma il coefficiente di effetto utile, mentre per una macchina termica in funzionamento da pompa di calore si definisce il coefficiente di prestazione. Il coefficiente di effetto utile per una macchina frigorifera è dato dal rapporto tra la quantità di calore che la macchina è in grado di asportare dalla sorgente a bassa temperatura ed il lavoro assorbito dalla macchina per compiere il ciclo frigorifero. Mentre il coefficiente di prestazione per una macchina in funzionamento da pompa di calore è definito dal rapporto tra la quantità di calore ceduta alla sorgente a temperatura massima del ciclo ed il lavoro assorbito dalla

macchina per compiere il ciclo stesso. Si riportano di seguito le espressioni del coefficiente di effetto utile per una macchina frigorifera ( $\epsilon_f$ ) e del coefficiente di prestazione per una macchina in funzionamento da pompa di calore ( $\epsilon_{pdC}$ ):

$$\epsilon_f = \frac{Q_{assorbito}}{|W|} = \frac{Q_{assorbito}}{|Q_{assorbito} + Q_{ceduto}|} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{pdC} &= \frac{Q_{ceduto}}{W} = \frac{|Q_{ceduto}|}{|W|} = \frac{|W| + Q_{assorbito}}{|W|} \\ &= 1 + \frac{Q_{assorbito}}{|W|} = 1 + \epsilon_f \end{aligned} \quad (2.7)$$

Il coefficiente di effetto utile della pompa di calore è sempre maggiore di un'unità rispetto al coefficiente del ciclo frigorifero corrispondente.

Una rappresentazione schematica di quanto appena detto si può avere dalla figura .

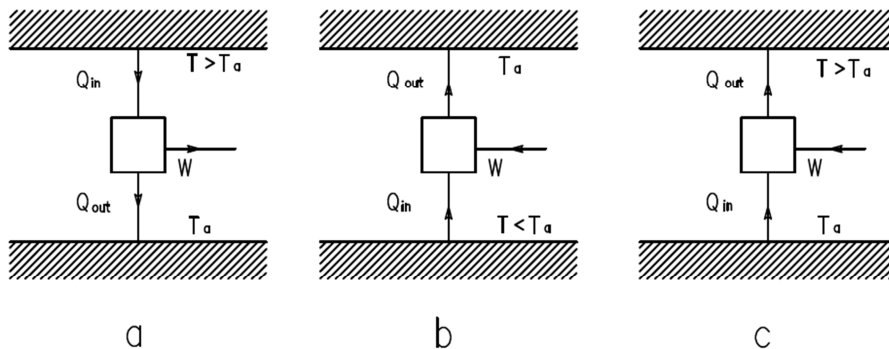


Fig. 2.2: rappresentazione schematica di un ciclo diretto (a); di un ciclo inverso frigorifero (b) ; di un ciclo inverso a pompa di calore(c).

### 2.1.2 Gas ideali

Per la definizione di gas ideale si considera il modello cinetico enunciato nei seguenti termini:

- un gas ideale è costituito da molecole uguali che si muovono di un moto continuo e disordinato;
- gli urti tra le molecole e le pareti del contenitore sono completamente elastici;
- non ci sono forze intermolecolari, ce non durante gli urti. Cioè gli urti sono dovuti a forze repulsive a corto raggio di azione;
- le dimensioni delle molecole sono molto piccole rispetto alle distanze medie tra di esse;

Inoltre, un gas ideale rappresenta un sistema le cui coordinate termodinamiche in uno stato di equilibrio obbediscono alla seguente relazione, detta anche equazione di stato di un gas ideale:

$$pV = nRT \quad (2.8)$$

dove: p = pressione del gas;  
 V = volume del gas;  
 n = numero di moli del gas;  
 R = costante universale del gas ideale;  
 T = temperatura del gas.

Pressione volume e temperatura sono in questo caso le già citate variabili di stato del sistema. In generale il comportamento di un gas è tanto più prossimo a quello di un gas ideale quanto più il fluido si trova ad operare in condizioni di pressione e temperatura distanti dal proprio punto critico. Il punto critico di una sostanza aeriforme è individuato da una temperatura critica, una pressione critica ed un volume specifico critico. Esso rappresenta lo stato termodinamico del gas, nelle condizioni di massima temperatura e pressione, per le quali si ha ancora equilibrio tra liquido e vapore. Per comprenderne meglio il significato si può dare la definizione di temperatura critica che è la temperatura oltre la quale la sostanza cessa di condensare per compressione, ovvero è la massima temperatura a cui si può avere la fase liquida del fluido.

Il piano più comunemente usato per la rappresentazione degli stati di equilibrio di un gas è il piano di Clapeyron, detto anche piano pV in quanto in ascissa viene riportato il volume del gas mentre in ordinata la pressione. L'equazione di stato mostra che in un gas ideale in equilibrio sono indipendenti solo due variabili su tre, in quanto la terza si ricava appunto tramite l'equazione di stato. Dunque, per un dato numero di moli un punto nel piano pV rappresenta completamente uno stato di equilibrio di un gas potendosi, infatti, ricavare subito la temperatura.

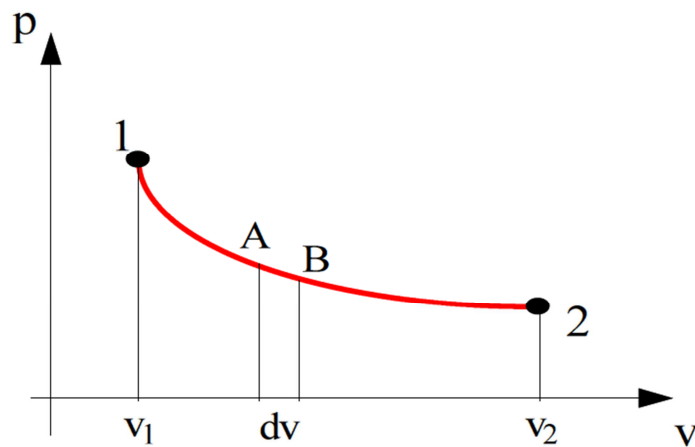


Fig. 2.3: rappresentazione sul piano di Clapeyron di una generica trasformazione termodinamica tra due diversi stati di equilibrio.

### 2.1.3 Lavoro di un gas ideale

Quando un gas si espande o viene compresso avviene uno scambio di lavoro che in termini infinitesimi si può scrivere in generale come:

$$dW = p dV \quad (2.9)$$

In una trasformazione finita dallo stato A allo stato B si ha:

$$W = \int_A^B p dV \quad (2.10)$$

Questa espressione esplicita del lavoro è valida quando la trasformazione è reversibile ed è ovviamente noto l'andamento della pressione. Questa espressione mostra che: se una trasformazione è isocora il lavoro è sempre nullo; se il gas si espande il volume finale è maggiore di quello iniziale e quindi il sistema compie un lavoro nei confronti dell'ambiente mentre se il gas si comprime e quindi il volume finale è minore di quello iniziale, il gas subisce un lavoro compiuto stavolta dall'ambiente. Il lavoro ha un semplice significato geometrico nel piano di Clapeyron. Esso infatti è dato dall'area compresa tra la curva che rappresenta l'andamento della pressione in funzione del volume durante la trasformazione e l'asse dei volumi. In una trasformazione ciclica

reversibile il lavoro è dato dall'area racchiusa dal ciclo. Esso è positivo se il ciclo è percorso in senso orario mentre è negativo se percorso in senso antiorario.

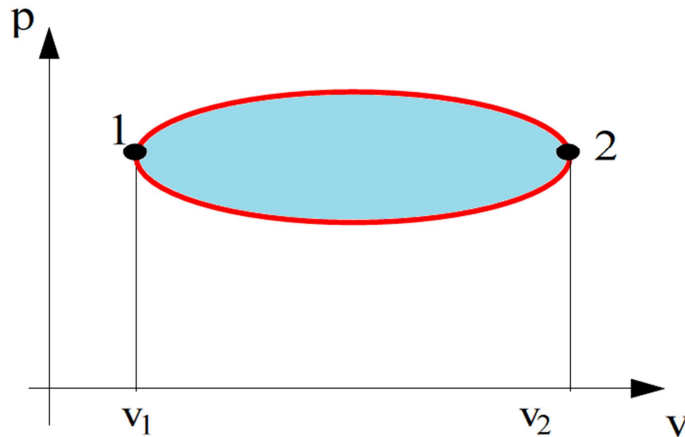


Fig.2.4: rappresentazione sul piano di Clapeyron di una generica trasformazione termodinamica ciclica.

### 2.1.4 Calore specifico a pressione e a volume costante

In una trasformazione generica un gas scambia anche calore con l'ambiente. Per il calcolo non è necessario ricorrere al primo principio della termodinamica ma esistono anche espressioni come quelle riportate di seguito. Per una trasformazione isocora infinitesima si ha:

$$dQ = n c_v dT \quad (2.11)$$

mentre per una trasformazione isobara infinitesima:

$$dQ = n c_p dT \quad (2.12)$$

Le quantità  $c_p$  e  $c_v$  si chiamano rispettivamente calore specifico molare a pressione costante e calore specifico molare a volume costante. Essi rappresentano la quantità di calore che bisogna cedere ad una mole di gas ideale per far aumentare la sua temperatura di 1 K e si definiscono rispettivamente come:

$$c_v = \frac{1}{n} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_v \quad (2.13)$$

$$c_p = \frac{1}{n} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_p \quad (2.14)$$

Se  $c_v$  e  $c_p$  possono essere ritenuti costanti il calore scambiato per una variazione di temperatura si scrive nei due casi come:

$$Q = n c_v \Delta T \quad (2.15)$$

$$Q = n c_p \Delta T \quad (2.16)$$

Per un gas ideale l'energia interna è funzione solamente della temperatura. Per una trasformazione infinitesima vale la relazione:

$$dU = n c_v dT \quad (2.17)$$

da cui si ricava:

$$c_v = \frac{1}{n} \left( \frac{dU}{dT} \right)_v \quad (2.18)$$

Poiché l'energia interna è funzione soltanto della temperatura anche il calore specifico a volume costante di un gas ideale dipende soltanto dalla temperatura. Si può a questo punto scrivere in maniera esplicita il primo principio della termodinamica per quel che riguarda le trasformazioni dei gas ideali.

$$dQ = n c_v dT + p dV \quad (2.19)$$

integrando:

$$Q = n c_v \Delta T + \int_{V_A}^{V_B} p dV \quad (2.20)$$

Sfruttando il fatto che l'energia interna è funzione solamente della temperatura si può dimostrare che per un gas ideale  $c_p > c_v$ . Questo perché in una trasformazione a pressione costante il gas compie anche del lavoro, cosa che invece non accade per una trasformazione a volume costante. Inoltre, si può citare quella che viene chiamata relazione di Mayer:

$$c_p = c_v + R \quad (2.21)$$

dalla quale si ricava un significato energetico per la costante dei gas R. Essa, infatti, rappresenta il lavoro che a pressione costante compie una mole di gas ideale in corrispondenza ad un aumento di temperatura di 1 K. Si definisce, infine, il rapporto tra i calori specifici:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.22)$$

Il quale risulta sempre maggiore di 1.

### 2.1.5 Trasformazione adiabatica reversibile

Una trasformazione si definisce adiabatica in cui il sistema non scambia calore con l'esterno, ossia è isolato termicamente. Sperimentalmente questa situazione si realizza chiudendo il sistema in un contenitore con pareti isolanti che non permettono il raggiungimento di un equilibrio termico con l'esterno. Nella pratica, però, l'adiabaticità perfetta non esiste in quanto tutte le pareti isolanti permettono un certo scambio di calore. Si ammette, invece, che possa essere adiabatica una trasformazione che avviene rapidamente, così che non ci sia il tempo per scambi di calore apprezzabili. Dal primo principio si ha:

$$W = -\Delta U = -n c_v \Delta T = -n c_v (T_{finale} - T_{iniziale}) \quad (2.23)$$

Se si ha un'espansione adiabatica il lavoro è positivo, quindi la variazione di energia interna è negativa e ciò significa che il gas si raffredda. Mentre se si ha una compressione adiabatica il lavoro è negativo, la variazione di energia interna è positiva e quindi il fluido si riscalda. Per una trasformazione adiabatica e reversibile di un gas ideale è possibile ricavare altre relazioni tra le coordinate termodinamiche di due stati collegati da una trasformazione adiabatica. Tali espressioni sono riportate di seguito.

$$p V^\gamma = costante \quad (2.24)$$

$$T V^{\gamma-1} = costante \quad (2.25)$$

$$T p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{costante} \quad (2.26)$$

In particolare per la rappresentazione della trasformazione nel piano di Clapeyron si utilizzerà la (). Rispetto ad una curva isoterma  $pV = \text{costante}$  la curva adiabatica ha un andamento simile però con pendenza maggiore perché  $\gamma$  è sempre maggiore di 1.

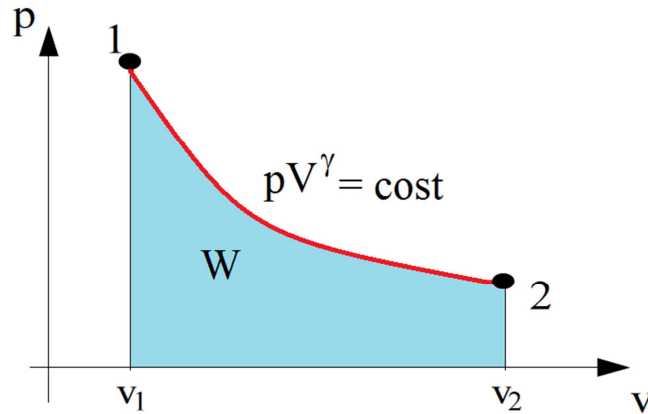


Fig.2.5: rappresentazione sul piano di Clapeyron di una trasformazione adiabatica reversibile tra due diversi stati di equilibrio.

### 2.1.6 Trasformazione isoterma

In una trasformazione isoterma la temperatura del gas rimane costante, quindi, non c'è variazione di energia interna. Dal primo principio della termodinamiche si ottiene:

$$W = Q \quad (2.27)$$

Se la trasformazione è una espansione isoterma il gas compie lavoro e assorbe calore, mentre se la trasformazione è una compressione il gas subisce lavoro e cede calore. Dall'equazione di stato dei gas ideali, considerando una trasformazione isoterma tra due stati di equilibrio, si può ricavare che:

$$p_{iniziale} V_{iniziale} = p_{finale} V_{finale} \quad (2.28)$$

e quindi:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{n R T}{V} dV \quad (2.29)$$

$$= n R T \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V} dV = n R T \ln \frac{V_f}{V_i} \quad (2.30)$$

Che è anche l'espressione esplicita del calore scambiato. La relazione che permette di tracciare l'evoluzione tra due stati di equilibrio termodinamico di una trasformazione isoterma reversibile sul piano di Clapeyron è la seguente:

$$pV = \text{costante} \quad (2.31)$$

che mostra come a temperatura costante la pressione è inversamente proporzionale al volume. Geometricamente, sul piano di Clapeyron questa non rappresenta altro che un ramo di iperbole equilatera.



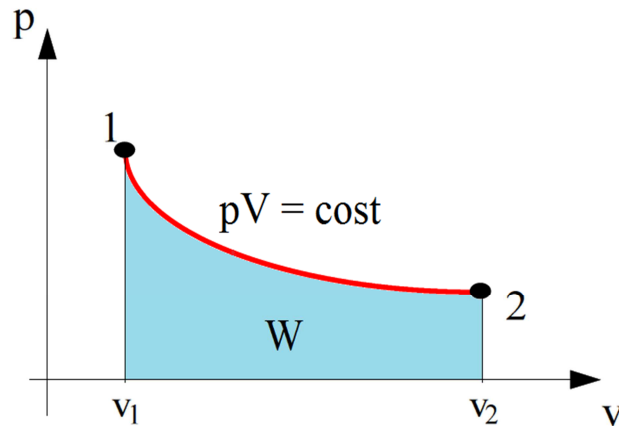


Fig. 2.6: rappresentazione sul piano di Clapeyron di una trasformazione isoterma tra due diversi stati di equilibrio.

### 2.1.7 Trasformazione isocora

Le trasformazioni isocore avvengono a volume costante per cui non viene compiuto o subito lavoro da parte del sistema e quindi per il primo principio della termodinamica il calore scambiato con l'esterno è uguale alla variazione di energia interna.

$$Q = \Delta U = n c_v \Delta T = n c_v ( T_{finale} - T_{iniziale} ) \quad (2.32)$$

Essendo il volume costante, dall'equazione di stato dei gas ideali si ottiene:

$$\frac{p_{iniziale}}{T_{iniziale}} = \frac{p_{finale}}{T_{finale}} \quad (2.33)$$

Se si cede calore al gas, la sua pressione e la sua temperatura aumentano, mentre se si assorbe calore dal gas pressione e temperatura diminuiscono.

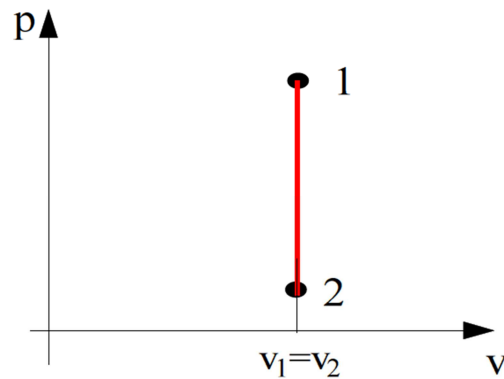


Fig. 2.7: rappresentazione sul piano di Clapeyron di una trasformazione isocora tra due diversi stati di equilibrio.

## 2.2 Il ciclo di Carnot

Il ciclo di Carnot è costituito da quattro trasformazioni reversibili, rappresentate in figura :

- compressione isoterma 1-2 a temperatura  $T_1$ ;
- compressione adiabatica 2-3;
- espansione isoterma 3-4 a temperatura  $T_2$ ;

- espansione adiabatica 4-1;

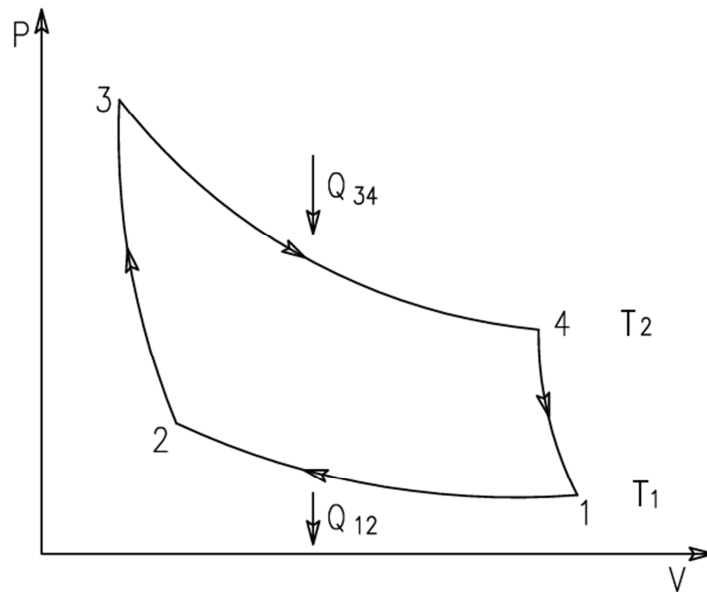


Fig. 2.8: rappresentazione sul piano di Clapeyron del ciclo di Carnot.

Nello stato 3 il gas è in equilibrio a contatto termico con una sorgente di calore a temperatura  $T_2$ . L'espansione isoterma reversibile 3-4 può essere considerata come una successione di trasformazioni infinitesime: in ciascuna a seguito di una diminuzione  $dp$  della pressione il gas si espande di una quantità anch'essa infinitesima  $dV$ . Si ha quindi, cessione di calore  $dQ$  dalla sorgente a temperatura  $T_2$  al gas che ritorna così alla temperatura  $T_2$  iniziale. Come risultato il gas passa reversibilmente dallo stato 3 allo stato 4 assorbendo il calore:

$$Q_{34} = W_{34} = n RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} \quad (2.34)$$

$W_{34}$  è il lavoro fatto dal gas nell'espansione isoterma.

Nella trasformazione 4-1 il gas viene isolato da qualsiasi sorgente di calore. Seguendo lo schema adottato per la trasformazione 3-4 durante ciascuna trasformazione infinitesima si ha una diminuzione  $dp$  della pressione, un'espansione  $dV$  ed un raffreddamento  $dT$ . Il gas passa dallo stato 4 allo stato 1 con  $T_1 < T_2$  secondo la:

$$T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \quad (2.35)$$

Il lavoro fatto dal gas è:

$$W_{41} = -\Delta U_{41} = n c_v (T_2 - T_1) \quad (2.36)$$

Nella trasformazione 1-2 il gas è a contatto termico con un sorgente di calore a temperatura  $T_1$ . Il processo è analogo alla trasformazione 3-4 però ora si aumenta la pressione di  $dp$ , il volume del gas diminuisce e la temperatura aumenta di  $dT$ , cede il calore  $dQ$  alla sorgente a temperatura  $T_1$  e ritorna esso stesso alla temperatura  $T_1$ . Il calore ceduto complessivamente è :

$$Q_{12} = W_{12} = n RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (2.37)$$

Infine, nella trasformazione 2-3 il gas è di nuovo isolato termicamente, si aumenta la pressione di  $dp$ , il volume del gas diminuisce di una quantità  $dV$  e la temperatura aumenta di  $dT$ . Il gas ritorna nello stato iniziale e vale la relazione:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \quad (2.38)$$

Il lavoro subito dal gas è:

$$W_{23} = -\Delta U_{23} = n c_v (T_1 - T_2) \quad (2.39)$$

Sommando tutti i contributi otteniamo:

$$Q = Q_{34} + Q_{12} \quad (2.40)$$

$$W = W_{34} + W_{41} + W_{12} + W_{23} = W_{34} + W_{12} \quad (2.41)$$

Si vede immediatamente che  $Q = W$  e che coincide con l'area racchiusa dal ciclo.

Il rendimento del ciclo è :

$$\begin{aligned} \eta &= 1 + \frac{Q_{12}}{Q_{34}} \\ &= 1 + \frac{n R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}{n R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3}} \\ &= 1 - \frac{T_1 \ln \frac{V_1}{V_2}}{T_2 \ln \frac{V_4}{V_3}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Dividendo ora membro a membro i termini delle relazioni:

$$T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \quad (2.43)$$

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \quad (2.44)$$

Si ottiene:

$$\left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad (2.45)$$

Ovvero:

$$\frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_2} \quad (2.46)$$

Il rendimento del ciclo di Carnot diventa quindi:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (2.47)$$

Si noti il fatto che l'espressione del rendimento non contiene alcuna grandezza caratteristica del gas, ma solo i valori di temperatura delle sorgenti con cui il gas scambia calore. Il rendimento del ciclo di Carnot, descritto da un gas ideale con calore specifico costante, dipende solo dalle temperature a cui avvengono gli scambi isotermi di calore. Quanto appena visto vale anche per una macchina di Carnot in funzionamento da macchina frigorifera o da pompa di calore. Il suo coefficiente di effetto utile e il suo coefficiente di prestazione valgono infatti rispettivamente:

$$\varepsilon_f = \frac{T_1}{T_2 - T_1} \quad (2.48)$$

$$\varepsilon_{PdC} = \frac{T_2}{T_2 - T_1} \quad (2.49)$$

Il ciclo di Carnot è il ciclo termodinamico che dà il maggior rendimento ottenibile idealmente tra due date temperature, massima e minima. Nel 1873 Reitlinger dimostrò che possono raggiungere lo stesso rendimento del ciclo di Carnot tutte quelle macchine che si basano su cicli costituiti da due isoterme e altre due trasformazioni rigenerative reversibili operanti nello stesso intervallo di temperature. Quindi se si parte da un ciclo costituito da due isoterme e si realizzano le altre due trasformazioni mediante isocore o isobare reversibili, si ottengono dei cicli termodinamici con lo stesso rendimento della macchina di Carnot.

### 2.3 Il ciclo di Stirling ideale

La macchina di Stirling è una macchina a fluido che opera secondo un ciclo termodinamico rigenerativo chiuso. Esso prevede una compressione ed una espansione del fluido operante realizzate isotermicamente a due diversi livelli di temperatura ed intervallate da due trasformazioni isocore rigenerative. Nel suo funzionamento come macchina operatrice la trasformazione di espansione avviene alla temperatura più alta; mentre nel caso di funzionamento come macchina frigorifera è la fase di compressione quella interessata dalla temperatura più elevata. Peculiarità della macchina di Stirling è che il moto del fluido all'interno del ciclo non è regolato da valvole ma dalle variazioni dei volumi relativi che costituiscono lo spazio di lavoro.

Le condizioni di funzionamento della macchina ed il fluido operante si considerano del tutto ideali. Non vi sono, quindi, perdite di origine meccanica, fluidodinamica o termica. Le trasformazioni si considerano totalmente reversibili. Si prende per il momento la soluzione costruttiva più semplice dal punto di vista dell'esposizione del funzionamento della macchina. All'interno della macchina scorrono due stantuffi. Tra questi è sistemato un rigeneratore avente la funzione di assorbire e cedere calore. Il volume interno della macchina risulta principalmente suddiviso in tre camere: la camera di compressione; la camera di compressione ed il rigeneratore stesso. Nella camera di espansione la temperatura di funzionamento è quella massima mentre in quella di compressione la temperatura è quella minima del ciclo di lavoro. In entrambe le camere comunque le temperature rimangono costanti ed uniformi in tutto il volume. Ciò equivale ad affermare che la camera di espansione è a contatto con una sorgente termica di capacità infinita che si trova a temperatura  $T_{max}$  mentre la camera di compressione è a contatto con un'altra sorgente termica di capacità infinita alla temperatura  $T_{min}$ .

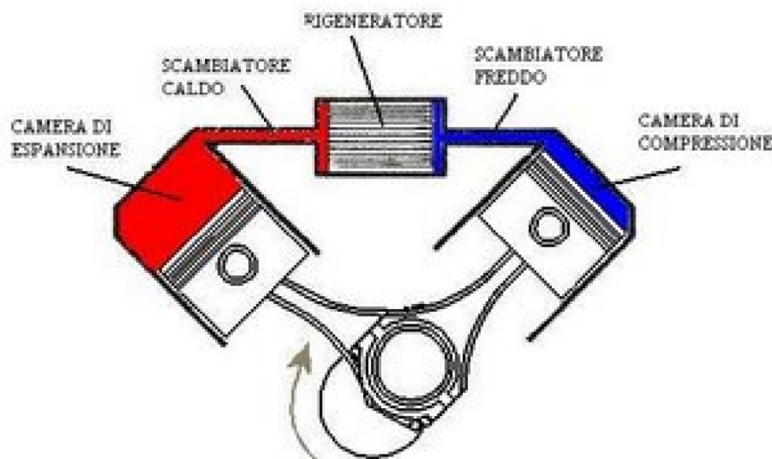


Fig. 2.9: schema di un motore Stirling.

L'analisi dei cicli avviene mediante la loro rappresentazione sul piano p-V ( pressione – volume specifico ) riportato in figura 2.10. Da tale diagrammi è possibile valutare il lavoro specifico prodotto od assorbito in ogni ciclo (equivalente all'area del ciclo nel piano p-V.

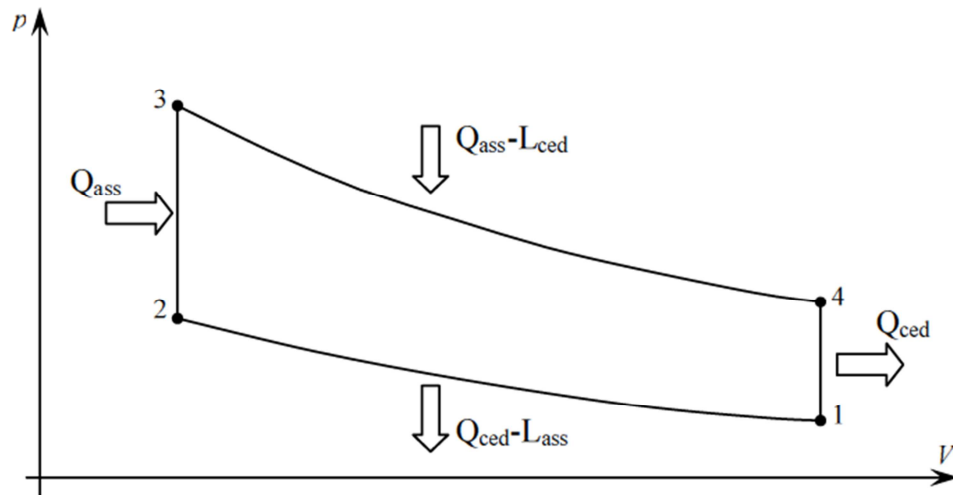


Fig. 2.10: rappresentazione sul piano di Clapeyron del ciclo di Stirling.

Il ciclo Stirling ideale, come già detto, è formato da quattro trasformazioni:

- compressione isoterma (1-2);
- compressione isocora rigenerativa (2-3);
- espansione isoterma (3-4);
- espansione isocora rigenerativa (4-1).

La prima fase del ciclo consiste nella compressione del fluido, rappresentata dalla trasformazione (1-2) che avviene nella camera di compressione. Tale trasformazione è isoterma e il gas rimane, quindi, rimane ancora alla temperatura minima  $T_{min}$ . Il calore ceduto dal gas alla sorgente termica, che considerando il primo principio della dinamica equivale al lavoro di compressione compiuto sul fluido stesso, si ricava come:

$$Q_c = L_c = n R T_{min} \ln \frac{V_{finale}}{V_{iniziale}} = n R T_{min} \ln \frac{V_{min}}{V_{max}} \quad (2.50)$$

Passando attraverso il rigeneratore il gas subisce allora la trasformazione ( 2-3 ) a volume costante, ossia un riscaldamento operato dal rigeneratore stesso. La temperatura del gas cresce fino a raggiungere il valore massimo  $T_{max}$  esistente nella camera di espansione. L'incremento di temperatura a volume costante è dovuto all'assorbimento da parte del gas della quantità di calore:

$$Q_r = \Delta U = n c_v (T_{finale} - T_{iniziale}) = n c_v (T_{max} - T_{min} ) \quad (2.51)$$

La stessa quantità di calore assorbito provoca un aumento di pressione del gas.

Successivamente il fluido compie la trasformazione di espansione ( 3-4 ) nella camera di espansione. Anche questa trasformazione avviene isotermicamente e il fluido assorbe una quantità di calore equivalente al lavoro di espansione compiuto ed esprimibile con la relazione:

$$Q_a = L_e = n R T_{max} \ln \frac{V_{finale}}{V_{iniziale}} = n R T_{max} \ln \frac{V_{max}}{V_{min}} \quad (2.52)$$

Infine, il gas compie la seconda trasformazione rigenerativa a volume costante ( 4-1 ) e ritorna nelle sue condizioni iniziali. Durante questo secondo passaggio per il rigeneratore il fluido operante ritorna alla temperatura minima della camera di compressione cedendo una quantità di calore pari a quella che aveva assorbito nella trasformazione ( 2-3 ).

Il lavoro complessivo si ottiene come differenza fra la quantità totale di calore assorbito e la quantità totale di calore ceduto.

$$L = Q_a - |Q_c| \quad (2.53)$$

Il ciclo Stirling ora descritto risulta pertanto composto da due trasformazioni isoterme e da due trasformazioni isocore. Quindi, se si considera il teorema di Reitlinger ,si può affermare che anche il sistema appena descritto realizza il massimo rendimento possibile, cioè il rendimento che avrebbe una macchina di Carnot che opererebbe nel medesimo intervallo di temperatura..

Quanto appena affermato si può dimostrare nel seguente modo partendo dalla definizione del rendimento:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{L}{Q_a} = \frac{Q_a - |Q_c|}{Q_a} \\ &= \frac{n R T_{max} \ln \frac{V_{max}}{V_{min}} - |n R T_{min} \ln \frac{V_{min}}{V_{max}}|}{n R T_{max} \ln \frac{V_{max}}{V_{min}}} \\ &= \frac{T_{max} - T_{min}}{T_{max}} \\ &= 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} \end{aligned} \quad (2.54)$$

In definitiva il calore viene sempre assorbito durante le espansioni, mentre viene ceduto durante le compressioni. Per quanto riguarda le trasformazioni isocore, essendo esse rigenerative, la somma delle quantità di calore assorbito e ceduto è nulla. Il lavoro complessivo si ottiene come differenza fra la quantità totale di calore assorbito e la quantità totale di calore ceduto. E' importante poi ricordare che un'espansione nel ciclo diretto equivale ad una compressione nell'omologo ciclo inverso, e viceversa. A questo punto facile è osservare che coefficiente di effetto utile di una macchina di Stirling frigorifera e il coefficiente di prestazione di una macchina di Stirling in funzionamento da pompa di calore risultano avere la stessa espressione di quella del ciclo ideale di Carnot:

$$\begin{aligned} \varepsilon_f &= \frac{Q_{assorbito}}{|W|} = \frac{n R T_{min} \ln \frac{V_{max}}{V_{min}}}{|n R T_{min} \ln \frac{V_{max}}{V_{min}} + n R T_{max} \ln \frac{V_{min}}{V_{max}}|} \\ &= \frac{T_{min}}{|T_{min} - T_{max}|} = \frac{T_{min}}{T_{max} - T_{min}} \\ \varepsilon_{PdC} &= 1 + \varepsilon_f = 1 + \frac{T_{min}}{T_{max} - T_{min}} = \frac{T_{max}}{T_{max} - T_{min}} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Se si va ad osservare l'efficienza dei cicli più comuni in sede ideale, ovvero Otto, Diesel, Rankine e Brayton-Joule, è possibile constatare che su nessuno di essi può essere applicato il concetto

dimostrato da Reitlinger, pertanto nessuno di essi è in grado di raggiungere i livelli di efficienza del ciclo Stirling, che si rivela dunque essere il ciclo termodinamico ideale più efficiente.

Questo importante pregio però non è una sua esclusiva: anche il ciclo di Ericsson riesce ad eguagliare l'efficienza del ciclo di Carnot, essendo esso costituito da due trasformazioni isoterme reversibili e da due isobare rigenerative reversibili.

Se sotto questo punto di vista i due cicli si dimostrano essere equivalenti, non è così se si vanno ad osservare i lavori specifici, sempre per lo stesso salto di temperatura: essi possono essere apprezzati attraverso la sovrapposizione dei due cicli sullo stesso piano  $pV$ , essendo il lavoro specifico equivalente all'area del ciclo: questo confronto è realizzato in figura, dal quale è possibile apprezzare come, a parità di salto termico e quindi di efficienza, il ciclo di Stirling ideale (linea blu) generi un'area più estesa dell'area generata dal ciclo di Ericsson ideale (linea rossa).

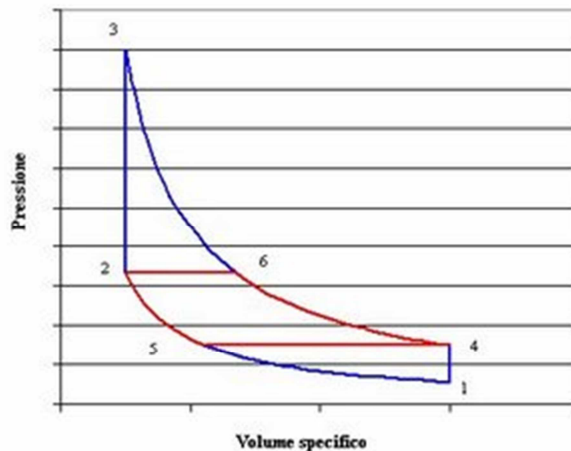


Fig. 2.11: confronto sul piano di Clapeyron tra il ciclo di Stirling ed il ciclo di Ericsson.

Pertanto, è possibile concludere che il ciclo Stirling ideale è in assoluto il ciclo termodinamico più prestante. Inoltre sul piano teorico, un vantaggio offerto dalla macchina di Stirling rispetto a quella di Carnot è quello di produrre un lavoro specifico più elevato a parità di condizioni; cioè di produrre una medesima quantità di lavoro con ingombri minori.

## 2.4 Dal ciclo di Stirling ideale al ciclo di Stirling reale

Allo scopo di giungere ad una prima, più realistica analisi della macchina di Stirling si passerà ora ad analizzare la serie di cause che rendono i cicli Stirling reali differenti da quelli ideali. L'analisi di questo aspetto è di estrema importanza, in quanto ci permette di comprendere le cause, per cui i motori Stirling non sono in grado, sul piano prestazionale, di competere con le tecnologie concorrenti (motori a combustione interna, motori a ciclo Rankine e Brayton-Joule), nonostante l'analisi del ciclo ideale conduca ad affermare l'opposto.

### 2.4.1 Effetto del moto degli stantuffi

Perché il ciclo termicamente ideale di Stirling sia effettivamente compiuto, caratterizzato com'è da quattro vertici che comportano repentini cambiamenti termodinamici nel fluido e cinematici nel moto degli stantuffi, occorrerebbe che pistone e displacer fossero dotati di moto discontinuo e non di moto sinusoidale o quasi sinusoidale come spesso viene realizzato dai più comuni e semplici meccanismi adottabili nella pratica. In generale si può dire che, pur mantenendo i volumi massimo

e minimo caratteristici della macchina ideale, nonché i punti in cui il gas è alla massima temperatura o a quella minima, è da attendersi una riduzione dell'area complessiva del diagramma così come qualitativamente riportato in figura:

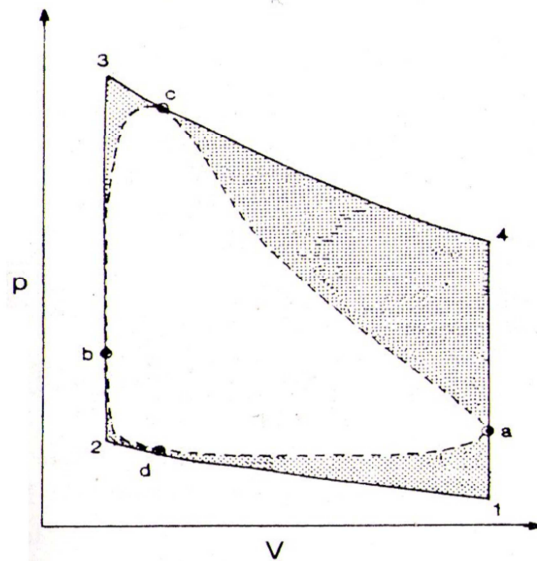


Fig. 2.12: effetto del moto continuo degli stantuffi.

### 2.4.2 Effetto dei volumi morti

I “volumi morti” sono delle porzioni del totale volume entro cui il fluido di lavoro è contenuto, caratterizzate dal fatto di non venir mai fisicamente occupate da organi mobili quali pistoni e dislocatore. per la realizzazione del ciclo ideale, sarebbe necessario avere la possibilità di stipare, nelle fasi di espansione e compressione isocora, tutto il fluido di lavoro nel volume di espansione o di compressione, ed avere poi un riscaldamento od un raffreddamento omogeneo su tutto il volume. Questo implica che oltre ad avere pistoni e dislocatori con una corsa tale da azzerare il volume da essi stessi determinato, si debba poter disporre di elementi quali condotti di collegamento fra le camere, riscaldatore, rigeneratore e refrigeratore di volume nullo: chiaramente, ciò non è realizzabile.

Nelle macchine reali dunque, i volumi morti non possono essere eliminati: la loro estensione influenza il lavoro specifico prodotto, ed in particolar modo questo tende a scendere quanto più il volume morto è esteso. Anche il calore assorbito diminuisce all'aumentare dei volumi morti con la stessa proporzionalità: essi dunque non influenzano l'efficienza complessiva della macchina. Queste due conclusioni sono facilmente verificabili sul ciclo Stirling ideale osservando che sia il lavoro prodotto sia il calore assorbito in ogni ciclo sono proporzionali a:

$$\ln \frac{V_{max} + k}{V_{min} + k} \quad (2.56)$$

funzione decrescente all'aumentare di  $k$ , che equivale ad un volume morto aggiuntivo. I volumi morti poi, danno luogo a fenomeni di tipo dissipativo, e sono dunque concausa dell'irreversibilità delle trasformazioni termodinamiche del ciclo reale. Infatti, quando il fluido di lavoro si muove al loro interno, è soggetto a perdite di carico. La presenza di grandi volumi morti infine, incide negativamente sugli ingombri, e di conseguenza tende ad abbassare la potenza specifica per unità di volume della macchina, come è possibile osservare dalla figura .



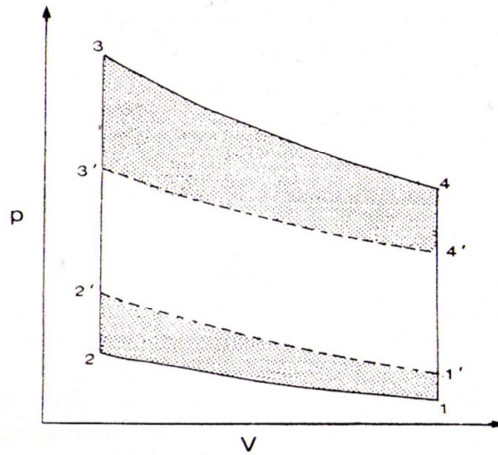


Fig. 2.13: effetto dei volumi morti.

Concludendo, i volumi morti devono essere per quanto possibile contenuti, ma nel far questo, al fine di minimizzare le perdite di pressione nel gas e al fine di mantenere sempre livelli soddisfacenti di scambio termico, è necessario curare con molta attenzione la forma e la qualità delle superfici interne di tali volumi, nonché l'estensione delle superfici di tutti gli scambiatori di calore che vi risiedono.

### 2.4.3 Limiti di prestazione degli scambiatori termici

La velocità di rivoluzione di una macchina Stirling è solitamente abbastanza elevata (centinaia di cicli al minuto). Questo non permette al fluido di lavoro di scambiare calore con il riscaldatore e con il refrigeratore mantenendo costante la sua temperatura durante l'espansione e la compressione: pertanto, queste due trasformazioni non sono isoterme, ma somigliano molto più ad adiabatiche. Mantenendo invariati i valori massimi e minimi di pressione e volume specifico, la sostituzione delle due isoterme con due adiabatiche determina una diminuzione del lavoro specifico prodotto in un ciclo e l'aumento del calore assorbito, quindi una diminuzione del rendimento se la macchina funziona da motore, un aumento invece del COP se la macchina funziona a ciclo inverso. In particolare, nel caso di funzionamento come motore, la diminuzione del rendimento rispetto a quello ideale di Carnot spesso supera il 50%.

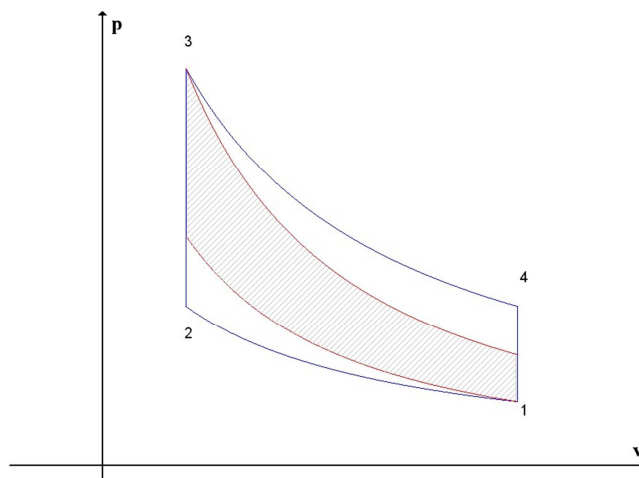


Figura 2.14: confronto ciclo Stirling ideale con isoterme (in blu) e con adiabatiche (in rosso, area tratteggiata).

### 2.4.4 Presenza di perdite termiche per conduzione, convezione, irraggiamento e per le oscillazioni di temperatura del gas

Le macchine Stirling sono principalmente costituite da elementi metallici, che com'è noto trasportano il calore più facilmente di altri materiali. Il ciclo ideale vorrebbe che tutto il calore trasmesso alla macchina dal riscaldatore, si spostasse attraverso i percorsi prestabiliti, e cioè solo ed esclusivamente attraverso il condotto che collega il volume d'espansione a quello di compressione, per poi uscire solo ed esclusivamente attraverso il refrigeratore. Nel ciclo reale invece, di tutto il calore introdotto dal riscaldatore solo una parte si muove secondo i percorsi prestabiliti, mentre la restante parte tende sempre a muoversi verso l'esterno seguendo i gradienti di temperatura presenti fra le varie parti della macchina: il fluido riscaldato nella camera di espansione quindi, avrà la tendenza a cedere una parte del suo calore per convezione alle pareti metalliche che lo circondano; per conduzione poi, il calore può essere trasmesso all'esterno, e da qui attraverso convezione ed irraggiamento essere disperso; in alternativa, il calore può essere trasmesso per conduzione nel dislocatore (o nell'insieme pistone-biella-manovella in configurazione alfa), e da qui grazie alla convezione del fluido nel volume di compressione al refrigeratore o ad altri corpi metallici confinanti con l'esterno. Queste perdite possono essere individuate nella rappresentazione schematica dei principali flussi termici che interessano la parte a temperatura più elevata di un motore Stirling, riportata in figura .

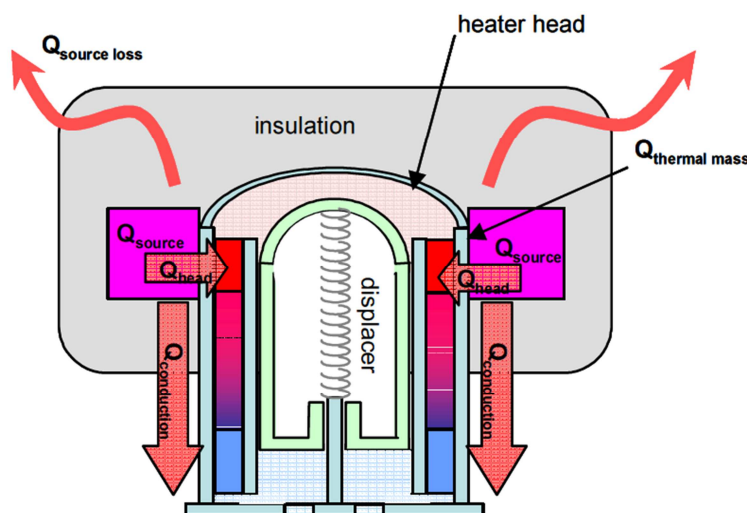


Fig. 2.15: principali flussi termici all'interno di una macchina Stirling [6].

Questo fenomeno, chiaramente dissipativo, abbassa l'efficienza della macchina indipendentemente dalla direzione in cui si percorre il ciclo.

La temperatura istantanea del fluido operante nelle camere di espansione e di compressione non rimane costante nel tempo. Essa, infatti, oscilla attorno ad un valor medio all'incirca prossimo a quello delle pareti degli scambiatori ma sempre con effetto sfavorevole per le prestazioni della macchina. Ad esempio se il gas operante nella camera calda si mantenesse pari alla temperatura media della parete si registrerebbe comunque una perdita dovuta al fatto che gli scambi legati alle differenze istantanee di temperatura sarebbero sfavorevoli. Il gas, infatti, cedrebbe calore alle pareti quando si trovasse ad una temperatura più alta e lo riceverebbe ad una più bassa. E' evidente la perdita termodinamica in termini di lavoro potenzialmente producibile.

### **2.4.5 Perdite termiche nei gas di combustione e perdite termiche per deviazione non ottimale dei raggi solari**

Sono perdite termiche molto simili nella sostanza, anche ovviamente si possono mai verificarsi entrambe nello stesso sistema. La prima tipologia di perdita fa riferimento al fatto che i fumi liberati da un processo di combustione sono caldi, quindi trasportano dell'energia termica, che prima ovviamente era contenuta nel combustibile. Siccome tali fumi vengono, nella maggior parte dei casi, dispersi nell'aria così come se ne escono dal combustore, l'energia che essi possiedono è da considerarsi una perdita. Tale perdita può essere ridotta (ma non eliminata) con l'uso di sistemi che sfruttino, per quanto possibile, il calore di questi fumi, di norma per preriscaldare l'aria in entrata nel bruciatore.

Se invece la fonte di calore utilizzata è l'irraggiamento solare, è molto difficile poter deviare l'intera energia captata verso il riscaldatore: qualunque sia il sistema utilizzato (specchi o lente Fresnel), possono sempre aver luogo delle deviazioni imprecise, che possono essere causate da imperfezioni di forma del sistema collettore, o da imperfezioni di montaggio, o da posizionamenti imperfetti del collettore rispetto al sole, o da vibrazioni di quest'ultimo in caso di folate di vento (di norma le superfici dei collettori sono molto estese) o altre fonti di vibrazione.

### **2.4.6 Rigenerazione termica imperfetta**

Condizione necessaria affinché la macchina di Stirling consegua un rendimento termodinamico pari a quello di una macchina di Carnot operante nelle stesse condizioni è che le due trasformazioni di rigenerazione siano complete, ovvero che tutto il calore rigenerabile sia effettivamente scambiato tra rigeneratore e fluido. Ciò nella pratica irrealizzabile in quanto occorrerebbe che, all'uscita dal rigeneratore, il fluido fosse in equilibrio termico con esso. Questo presupporrebbe un tempo di scambio termico illimitato o una lunghezza infinita del rigeneratore.

Nel caso ideale, si vorrebbe che la capacità termica del fluido di lavoro fosse nulla, mentre quella del rigeneratore infinita: in tal modo, si avrebbero scambi termici istantanei, indipendentemente dalla loro entità. Non si avrebbero inoltre variazioni della distribuzione delle temperature nel rigeneratore. Nel caso reale invece, la capacità termica del rigeneratore è dipendente dalle sue dimensioni, dalle sue forme e dai materiali impiegati nella sua costruzione, mentre la capacità termica del gas dipende, oltre che dalla sua natura, dalla sua pressione e dalla velocità con la quale si muove. Quando il gas fluisce nel rigeneratore ad alta pressione (che significa alta densità) e/o ad alta velocità, la sua capacità termica è maggiore: questo può rendere insufficiente la capacità termica del rigeneratore, che quindi non riesce ad abbassare od aumentare considerevolmente la temperatura del gas che lo attraversa, provocando così un aumento delle perdite termiche verso l'esterno ed un aumento dell'assorbimento di calore in ingresso. Graficamente si può ricondurre l'effetto dell'inefficienza del rigeneratore a quanto riportato sul piano pV in figura.

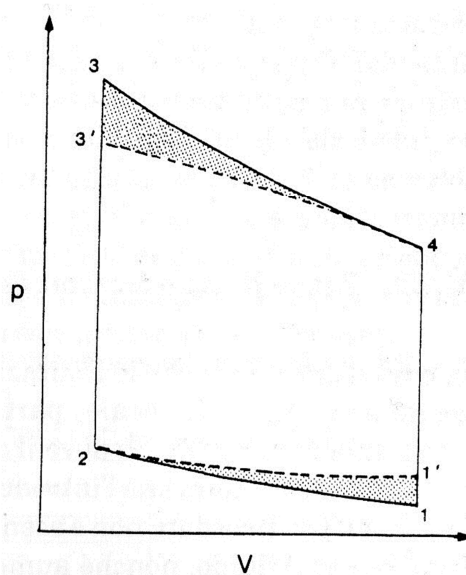


Fig. 2.16: effetto della rigenerazione imperfetta.

La temperatura e la pressione del gas che esce dal rigeneratore per entrare nella camera di espansione sono più basse dei valori previsti per il ciclo ideale, mentre la temperatura e la pressione di ingresso alla camera di compressione sono più alte dei valori previsti.

E' opportuno sottolineare che ottenere una rigenerazione termica molto spinta, oltre che essere problematico da realizzare, può risultare anche incompatibile, oltre certi limiti, con altre prestazioni complessive della macchina. Ad esempio si consideri il fatto che per conseguire un elevato grado di rigenerazione, occorre un contatto mutuo tra il fluido ed il materiale costituente il rigeneratore. Quindi, quanto più si spingesse tale contatto tanto più crescerebbero le perdite di carico che il fluido subisce nell'attraversamento del rigeneratore, con evidenti penalizzazioni delle prestazioni della macchina.

### 2.4.7 Perdite di tipo meccanico e perdite per impianti ausiliari

Le perdite di tipo meccanico sono date principalmente da attriti di tipo viscoso, generati dallo scivolamento relativo su sottili strati di sostanza fluida (lo stesso fluido di lavoro nei free-piston, oppure apposito olio lubrificante) delle superfici metalliche degli organi mobili, ai quali s'aggiungono le perdite provocate dai trasferimenti del fluido di lavoro lungo i condotti ovvero le cosiddette perdite di carico.

Le perdite per impianti ausiliari corrispondono alle quote di potenza in uscita che devono essere erogate verso altre parti della macchina, come ad esempio le pompe per la circolazione del liquido di raffreddamento, o la ventilazione.

### 2.4.8 Distribuzione del fluido

Ciascun punto del ciclo ideale rappresenta istante per istante lo stato termodinamico dell'intera massa del fluido operante nella macchina. Qualunque sia la configurazione meccanica e strutturale della macchina, però, il fluido non è mai contenuto soltanto nella camera di compressione o nella camera di espansione o ancora nel rigeneratore. Esso occupa, invece, tutti i condotti intermedi. Un ciclo ideale è possibile, quindi, solo se in ciascuna fase il fluido è tutto concentrato nel componente relativo alla fase stessa. Il ciclo reale effettivamente ottenibile con una macchina di Stirling risulta, quindi, dal concorso di più cicli indipendenti: il primo compiuto dalla massa di fluido (variabile

nel tempo ) che opera nella camera di espansione e il secondo è dato dalla massa ( anch'essa variabile nel tempo ) che opera nella camera di compressione.

Nella figura si riporta il confronto fra un ciclo Stirling ideale ed il conseguente reale.

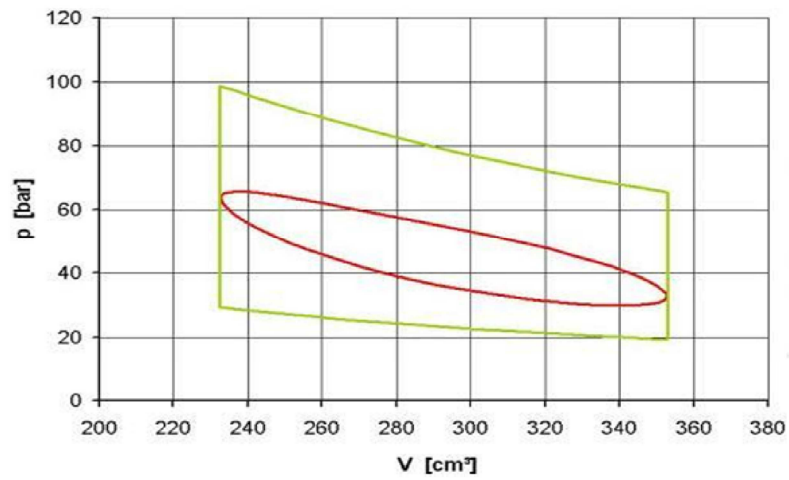


Fig. 2.17: confronto tra ciclo ideale ( verde ) e reale ( rosso ).



## *Capitolo 3*

### *Generatori elettrici lineari*

#### **3.1 Introduzione**

I generatori elettrici lineari rappresentano una categoria di convertitori elettromeccanici capaci di trasformare l'energia meccanica introdotta al loro ingresso sotto forma di moto lineare, in energia di tipo elettrico.

A tali generatori, che fanno parte della più ampia famiglia delle macchine elettriche lineari, viene spesso affiancata l'espressione "non convenzionali", questo per sottolineare quanto si considerino limitate le loro possibilità d'impiego e per distinguerle dalla ben più rinomata famiglia delle "macchine elettriche rotanti", che ormai da decenni rappresentano, nell'immaginario collettivo, il convertitore elettromeccanico per eccellenza. Effettivamente, da un punto di vista meccanico un moto rotatorio risulta essere più facile da sfruttare rispetto ad un moto lineare, e per capirlo è sufficiente pensare alle molteplici possibilità d'impiego di una ruota dentata: si può muovere un altro ingranaggio e trasmettere un moto rotatorio, od una cremagliera ed ottenere la trasformazione in moto lineare, senza mai perdere nulla in termini di robustezza e controllando le caratteristiche del moto trasmesso semplicemente attraverso le dimensioni della ruota. Si potrebbe pure aggiungere che ai più risulta difficile immaginare come sia possibile realizzare un movimento traslatorio lineare senza l'uso di cremagliere con ingranaggi, o con funi e verricelli, o con pulegge e cinghie. Analogamente, agli stessi appare altrettanto difficile poter convertire un'energia meccanica sottoforma di moto puramente lineare (non oggetti che si muovono su ruote quindi) in energia elettrica. Ciò è dovuto al fatto che la competitività in certi ambiti delle macchine lineari rispetto alle rotanti è infatti un qualcosa di piuttosto recente, e per questo motivo esse non sono ancora pubblicamente riconosciute come valide alternative, non potendo così usufruire di consequenziali benefici come economie di scala, o come ingenti investimenti in ricerche da parte di potenziali produttori.

In questi anni però, il continuo tentativo (in ogni settore) di produrre sistemi efficienti, prestanti, affidabili ed economici, sembra aver dato risalto al valore della semplicità: ecco quindi che i metodi di progettazione evolvono attribuendo un'importanza sempre maggiore alla minimizzazione delle parti in movimento, alla minimizzazione delle superfici striscianti, alla minimizzazione di ogni fenomeno d'usura.

Come si vede in seguito l'utilizzo delle macchine lineari (grazie alla configurazione free-piston), si inserisce perfettamente in questo contesto. In questo capitolo vengono descritte le principali tipologie di macchine lineari e le loro caratteristiche di funzionamento, cercando di vedere quale sia la migliore da inserire in un contesto di micro-cogenerazione che utilizza per la produzione del moto lineare un motore Stirling free-piston.

### 3.2 Struttura di una macchina elettrica lineare

Una macchina lineare può essere ricavata da una qualsiasi macchina rotante, e ciò è confermato dal fatto che il principio di funzionamento è comune ad entrambe. Data dunque una macchina rotante (che tipicamente ha forma cilindrica), si può ottenere da essa una macchina lineare eseguendo un taglio lungo una generatrice del cilindro entro cui la macchina rotante è contenuta e sviluppando sul piano statore e rotore (vedi fig. 3.1).

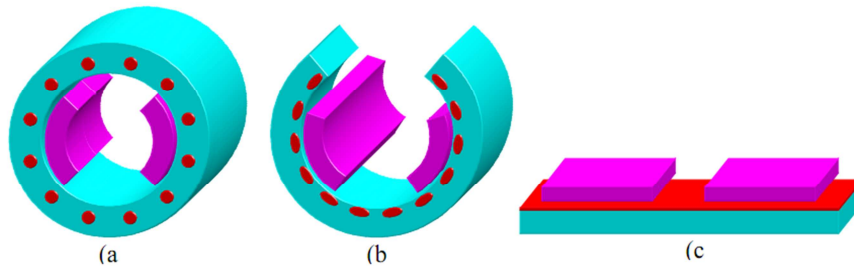


Fig. 3.1: ottenimento di una macchina elettrica lineare a partire da una rotante.

La struttura di una macchina lineare perciò, consta sempre di due parti: mentre il termine “statore” risulta essere ancora idoneo ad identificare quella parte della macchina non soggetta a movimenti durante il funzionamento, il termine “rotore” diventa in quest’ambito inappropriato, perché di fatto la parte mobile della macchina durante il funzionamento non ruota, bensì trasla: essa viene dunque identificata col termine “traslatore” [7]. Lo spazio che separa statore e traslatore continua a chiamarsi “traferro”, ed è importante sottolineare come, per motivi di tolleranza meccanica, esso risulti essere più ampio rispetto alle macchine rotanti di circa 10 volte, avendo uno spessore di circa 1mm nelle macchine medio-piccole.

Statore e traslatore possono essere ottenuti a partire da una macchina rotante in almeno tre modi: il più semplice è già stato spiegato, e porta all’ottenimento di una macchina lineare “monolatera” (single-sided), ovvero di una macchina in cui l’interazione magnetica fra le due parti avviene attraverso una sola superficie del traslatore ed una sola superficie dello statore.

Se il taglio della macchina rotante avviene lungo un piano passante per il centro, e se successivamente le due metà vengono sviluppate su piani paralleli al piano di sezionamento, allora si ottiene una macchina lineare “bilatera” (double-sided o sandwiched), ovvero una macchina nella quale l’interazione magnetica avviene su due superfici parallele dello statore e due superfici parallele del traslatore.

A partire dal taglio lungo la generatrice, è possibile ottenere anche un’altra struttura: infatti, se dopo aver sviluppato nel piano le due parti si esegue un involuppo attorno all’asse perpendicolare all’asse di rotazione della macchina rotante di partenza ed appartenente allo stesso piano, si ottiene una macchina lineare tubolare (tubular)[8]. Gli avvolgimenti delle macchine tubolari non sono di tipo distribuito, ma risultano essere chiusi su sé stessi, diventando così una matassa circolare o un semplice anello. Per macchine grosse, che presentano diametri esterni sensibilmente superiori ai diametri interni, risulta conveniente eliminare le cave (struttura slot-less) e costruire così il sistema di conduttori mediante una serie di anelli di rame smaltato. Questo fa sì che lo statore di una macchina tubolare possa essere concepito attraverso l’impilamento di più moduli in ferro tutti uguali tra loro: a livello di assemblaggio questo tipo di statore è molto vantaggioso, grazie alla sua modularità.



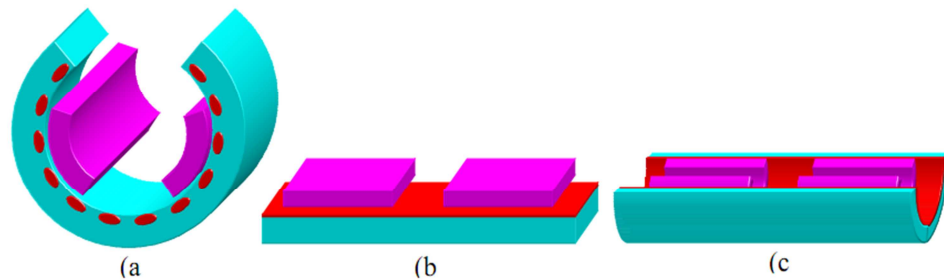


Fig. 3.2: ottenimento di una macchina lineare tubolare da una rotante [29].

Con tutte le procedure sin qui spiegate per ottenere una macchina lineare da una rotante, si ottengono sempre componenti con lunghezze quasi simili: nella realtà invece, una delle due parti è sempre considerevolmente più lunga dell'altra. E' quindi possibile distinguere le macchine lineari anche dall'osservazione di quest'aspetto, e si hanno quindi macchine a "statore lungo" (o a "traslatore corto") quando la parte mobile è più corta rispetto alla parte fissa, oppure si possono avere macchine a "statore corto" (o a "traslatore lungo") quando è la parte mobile ad essere più lunga della parte fissa. Oltre a queste classificazioni "strutturali" sono possibili altre classificazioni basate sul modo in cui si ottengono le spinte propulsive (nel caso dei motori) o come queste vengano effettivamente convertite in energia elettrica, ma questi aspetti verranno esaminati in seguito. Escludendo tutti quei casi in cui la struttura della macchina viene imposta dalle caratteristiche del sistema in cui essa va ad integrarsi, si può affermare che se la macchina deve funzionare da motore, la configurazione a statore lungo è preferibile: infatti l'ingombro massimo longitudinale è definito dalla lunghezza dello statore (che è fermo), ed inoltre il traslatore, ammesso che si trovi sufficientemente lontano dalle estremità, interagisce con lo statore sempre alla stessa maniera, a vantaggio della controllabilità del sistema. Se invece la macchina deve funzionare da generatore, la configurazione da preferire è quella a statore corto: se da una parte infatti si perde il vantaggio di avere un ingombro longitudinale fisso, dall'altra si ottiene il vantaggio di avere, a patto di far lavorare lo statore lontano dalle estremità del traslatore, una sollecitazione magnetica indipendente dalla posizione reciproca dei due componenti, ma solo dalla velocità relativa fra i due. In uscita si ottengono perciò forme d'onda di tensioni e correnti più omogenee e più facili da trattare, quindi complessivamente un sistema più controllabile. La scelta fra monolatero, bilatero o tubolare invece non dipende tanto dal fatto che la macchina debba essere impiegata da motore o generatore, dipende piuttosto dalle caratteristiche dell'applicazione in cui la macchina sarà impiegata. Tuttavia, è possibile affermare se le tre configurazioni vengono ricavate a partire dalla stessa macchina rotante, la configurazione monolatero è sicuramente la più ingombrante sia in senso longitudinale che trasversale, mentre è la più compatta in termini di altezza; rispetto a quest'ultima, la configurazione bilatero comporta un dimezzamento dell'ingombro longitudinale, ma un raddoppio dell'altezza, non varia invece la larghezza; la tubolare infine, è sicuramente la più compatta in senso trasversale, ma la più ingombrante in altezza, l'ingombro longitudinale invece è pari alla bilatero. Infine, il fatto di poter ottenere delle macchine lineari mediante sezionamenti e sviluppi di macchine rotanti, ha delle importanti conseguenze anche su quanto concerne le metodologie attraverso le quali le macchine lineari possono essere studiate ed analizzate. E' possibile infatti estendere gran parte delle relazioni valide per descrivere il comportamento delle macchine rotanti alle corrispondenti versioni lineari semplicemente sfruttando le analogie sotto riportate.

<b>Macchine rotanti</b>		<b>Macchine lineari</b>
angolo di rotazione $\theta$	$\leftrightarrow$	spostamento $x$
velocità angolare $\Omega$	$\leftrightarrow$	velocità lineare $v$
coppia $T$	$\leftrightarrow$	forza $F$
potenza meccanica $T \cdot \Omega$	$\leftrightarrow$	potenza meccanica $F \cdot v$

Tabella 3.1: analogie tra macchine rotanti e macchine lineari.

### 3.2 Campo magnetico di una macchina lineare

Una classificazione delle macchine lineari può essere fatta in base al modo in cui i flussi magnetici si sviluppano all'interno della macchina; in particolare si distinguono tra macchine a flusso longitudinale (LFM, Longitudinal Flux Machine) e macchine a flusso trasverso (TFM, Transverse Flux Machine). Sono da considerarsi LFM quelle in cui il flusso, dopo aver attraversato il traferro, si muove all'interno delle parti ferromagnetiche lungo linee di campo parallele al moto del traslatore. Sono invece da considerarsi TFM quelle in cui il flusso, dopo aver attraversato il traferro, si muove all'interno delle parti ferromagnetiche principalmente in direzione perpendicolare al moto del traslatore [9].

Le LFM sono caratterizzate dal fatto di mantenere una certa similitudine con le macchine rotanti e hanno quindi un'affermazione più diffusa; le TFM presentano strutture molto particolari e vengono per questo utilizzate in applicazioni più specifiche.

Per problemi di accoppiamento meccanico, le macchine lineari possiedono un traferro maggiore rispetto a quello di una macchina rotante, di conseguenza le macchine lineari hanno una maggiore reattanza di dispersione, essendo maggiore la riluttanza incontrata al traferro dalle linee di flusso. Questo fa sì che le macchine lineari abbiano un fattore di potenza tendenzialmente minore rispetto alla relativa macchina in versione rotante. È possibile poi osservare che, mentre in una macchina rotante le superfici di statore e di rotore attraverso cui avvengono le interazioni magnetiche sono sempre utilizzate totalmente durante il funzionamento della macchina, in una macchina lineare, al contrario, c'è sempre una parte inattiva: questo fa sì che la macchina lineare ha sempre una potenza specifica minore rispetto a l'equivalente rotante.

Vi sono poi una serie di effetti di origine elettromagnetica che sono diretta conseguenza della struttura lineare, essi sono:

- Effetti di bordo longitudinali;
- Effetti di bordo trasversali;
- Forza normale.

Gli effetti di bordo longitudinali sono dovuti al fatto che le lunghezze dello statore e del traslatore sono finite: questo implica che la forma complessiva del campo di induzione magnetica, generato durante il funzionamento della macchina, presenti delle locali distorsioni, perdendo quindi la sua

caratteristica periodicità. Questo dà origine ad una dissimmetria tra le fasi centrali e quelle di bordo, a di forze di impuntamento (forze di "cogging") e ad un aumento delle perdite addizionali, che in generale portano ad un peggioramento delle prestazioni della macchina. Questi effetti sono tanto più marcati quanto più la macchina è corta, possono invece essere trascurabili se la macchina è lunga. Questi effetti possono essere ridotti adottando particolari configurazioni dell'avvolgimento, limitando l'intensità del campo di eccitazione in prossimità dei bordi o sagomando opportunamente il circuito magnetico di statore.

Gli effetti di bordo trasversale sono in genere di entità limitata. Essi sono principalmente originati dal fatto che in certi casi statore e traslatore hanno larghezze diverse, causando ad esempio fenomeni di dispersione aggiuntivi, interazione tra il campo di eccitazione e le correnti di degli avvolgimenti di testata ed un incremento delle perdite addizionali. Vale comunque la pena di sottolineare che, così come una macchina rotante elimina di fatto ogni possibile effetto di bordo longitudinale, la struttura cilindrica di una macchina lineare tubolare elimina la presenza di ogni sorta di effetto di bordo trasversale.

L'ultimo effetto da prendere in considerazione quando si parla di macchine lineari è la forza normale: in certi casi, le iterazioni di origine magnetica tra statore e traslatore possono dare luogo a forze di attrazione e/o repulsione fra le due parti, con l'eventuale rischio di collisione e strisciamento e/o di allargamento del traferro. La struttura di tipo piana bilatera o tubolare consente di eliminare questa sollecitazione, che pertanto rimane un problema delle sole strutture piane monolateri, le quali di norma non vengono utilizzate come generatore.

E' possibile concludere che le macchine rotanti, sotto un profilo strettamente elettromeccanico, sono sicuramente migliori rispetto alle relative macchine in versione lineare. Quest'ultime infatti hanno in genere rendimenti minori e possono necessitare di particolari sistemi per l'allacciamento con la rete (convertitori statici e sistemi di rifasamento) e del controllo del moto (guide lineari, bande ottiche per il rilievo della posizione), che li particolarmente costosi. Qualora però il moto fornito dal motore primo fosse di tipo traslante anziché rotante, questo tipo di generatori possono essere collegati direttamente all'organo mobile del motore, con ovvi vantaggi in termini di affidabilità, semplicità costruttiva ed economicità.

Le prestazioni di una macchina lineare possono essere valutate innanzitutto mediante il rendimento, poi, risultano essere parametri importanti anche il fattore di potenza e la potenza specifica in ordine di massa, è poi di fondamentale importanza valutare la massa del traslatore.

### 3.2.1 Macchine a magnete permanente a flusso longitudinale

I generatori lineari a magneti permanenti (PMLG), in particolare quelli con i magneti sul traslatore, costituiscono attualmente la miglior tipologia tra le macchine a flusso longitudinale. I vantaggi dell'uso dei magneti permanenti nella parte mobile sono molteplici: innanzitutto la possibilità di ottenere un campo di induzione magnetica senza l'utilizzo di alcuna corrente, fa sì che non sia necessaria la presenza di alcuni conduttori o contatti striscianti e soprattutto che non si abbiano perdite per effetto Joule nell'induttore, qualità estremamente importante qualora si vogliono ottenere elevati rendimenti.

L'impiego dei magneti permanenti consente di ridurre la massa del traslatore: infatti, dato che il flusso da loro prodotto deve circolare esclusivamente tra il traslatore e lo statore (e viceversa), è possibile limitare l'uso del ferro alle sole funzioni di concentrazione e trasmissione del flusso, e delegare invece le funzioni strutturali e di resistenza meccanica ad un altro materiale (non magnetico), che a questo punto può essere più leggero. Lo svantaggio più grosso nell'uso dei

magneti permanenti consiste nel costo: per l'impiego su generatori lineari, non è possibile ad oggi scegliere magneti diversi dalle leghe a base di terre rare Sm-Co (samario - cobalto) o Nd-Fe-B (neodimio - ferro - boro). Comunque, grazie alla crescente domanda commerciale (soprattutto per la lega Nd-Fe-B), è auspicabile che questa tipologia di traslatori, raggiunga nei prossimi anni buoni livelli di economicità.

Nel complesso, a parità di potenza, una macchina con traslatore a magneti permanenti risulta essere più compatta rispetto ad altre che utilizzano delle altre tipologie di traslatore. Quindi questa tipologia di macchine è la più promettente, per questo motivo che su tali tipologie di macchine si stanno concentrando interessi sempre maggiori da parte del mondo scientifico. Forme, dimensioni e modalità di montaggio dei magneti influenzano fortemente le caratteristiche del traslatore e quindi dell'intera macchina. Per ottenere una macchina con elevate prestazioni e dal peso non eccessivo, è di norma opportuno utilizzare magneti interni (buried magnets) (figura 3.4). Le modalità di montaggio dipendono dal loro orientamento: se si ha la necessità di avere un flusso fortemente variabile su brevi lunghezze, allora si utilizzano piccoli magneti posti l'uno a fianco all'altro o al limite separati da un sottile strato di ferro, a polarità alternate e dirette in senso perpendicolare al moto, fissati sulla struttura portante costituita in materiale non-ferromagnetico (lega di titanio o alluminio).

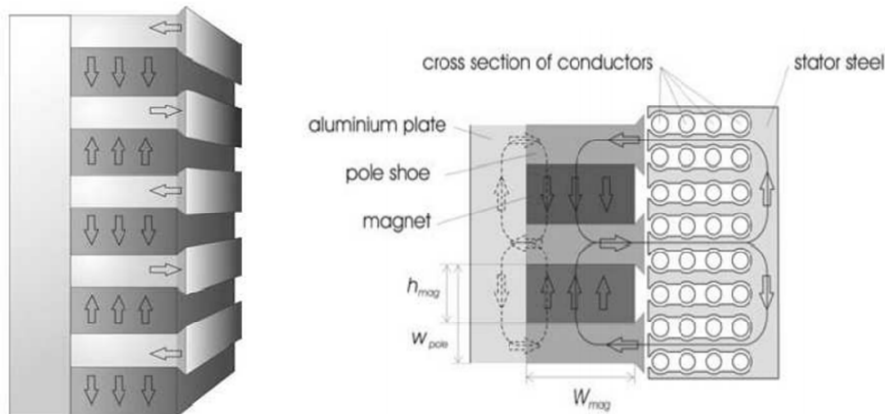


Fig. 3.4: motore configurazione a magneti interni (buried magnets).

In alternativa è possibile utilizzare una configurazione con magneti superficiali (surface mounted magnets) (figura 2.7), questa configurazione presenta una maggiore facilità di montaggio dei magneti. Sempre più spesso, a quest'ultimo orientamento dei magneti si preferisce la disposizione detta "quasi-Halbach" (figura 2.5), che permette di avere un profilo dell'induzione al traferro più sinusoidale. Nelle macchine tubolari è possibile effettuare il montaggio su di un profilo cavo (un banale tubo in lega leggera) e lasciare all'interno aria. Nei traslatori tubolari si possono ancora mantenere le stesse tipologie di montaggio ed orientamento dei magneti sin qui descritte.

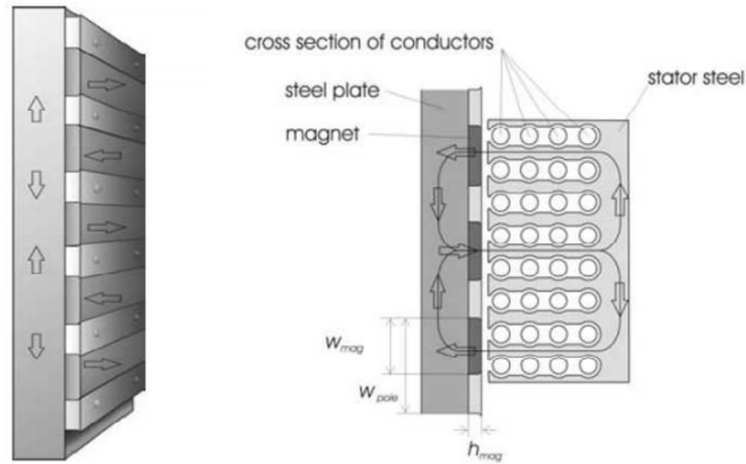


Fig. 3.5: configurazione a magneti superficiali (surface mounted magnets).

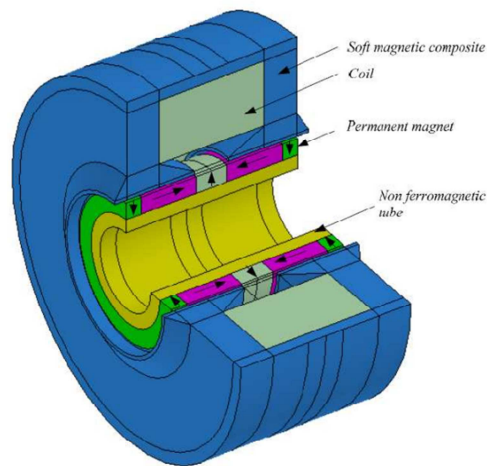


Fig. 3.6: configurazione tubolare a magneti superficiali con magnetizzazione quasi-Halbach, disposti su un supporto non-ferromagnetico.

Infine, ci possono essere macchine con traslatore in solo materiale ferromagnetico e dotato di salienze; lo statore è a forma di "C" squadrata con avvolgimenti trifase concentrati (con cave per polo e per fase di tipo frazionario). I traslatori in solo ferro possiedono molti pregi: essendo costituiti da un solo materiale (tra l'altro ben lavorabile), la loro produzione risulta essere estremamente semplice ed economica; il ferro poi, risulta essere un materiale dalle ottime prestazioni magnetiche e meccaniche; esso inoltre, non necessita di conduttori o contatti striscianti e neppure di particolari sistemi di smaltimento del calore. Sulle superfici dello statore sottoposte all'azione del traslatore (quelle che si affacciano su di esso) possono essere presenti una serie di magneti permanenti, disposti con polarità alternata, tali macchine sono dette ad effetto Vernier (VHM).

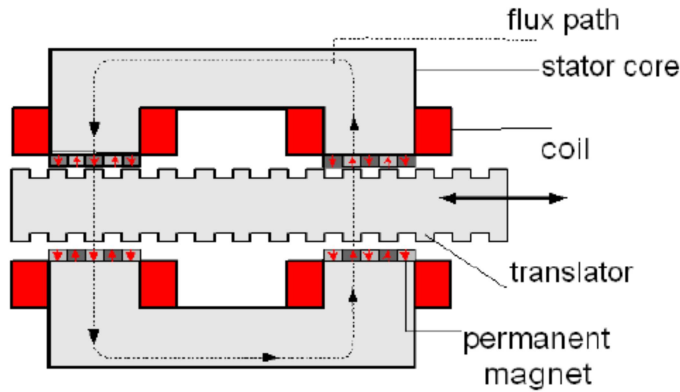


Fig. 3.7: sezione di una macchina ad avvolgimenti concentrati (in particolare una VHM).

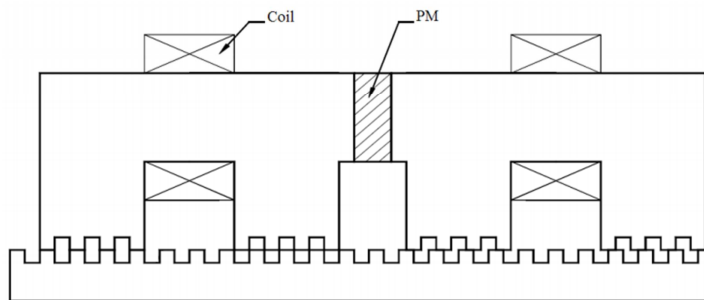


Fig. 3.8: macchina a riluttanza variabile con magneti permanenti (VRPM).

### 3.2.2 Macchine a magneti permanenti a flusso trasverso

Lo statore di una macchina a flusso trasverso è costituito da una serie di nuclei magnetici a forma di "C", dall'ingombro molto contenuto, nei quali il flusso circola percorrendo principalmente linee perpendicolari al senso del moto: i conduttori pertanto, devono svilupparsi in direzione parallela al movimento del traslatore. Il traslatore può essere costituito da dei magneti permanenti montati su di una struttura in ferro o in materiale non ferromagnetico, a seconda dei percorsi che sono stati stabiliti in sede di progetto per la circolazione del flusso e a seconda del grado di leggerezza che si vuole per questo componente. La sua costruzione risulta molto semplice nel caso di macchina di tipo piano: la struttura portante è di norma una semplice sbarra, i magneti sono applicati lateralmente se massicci o superficialmente ad essa, a polarità alternate sia longitudinalmente che trasversalmente, e diretti sempre verso la parte statorica.

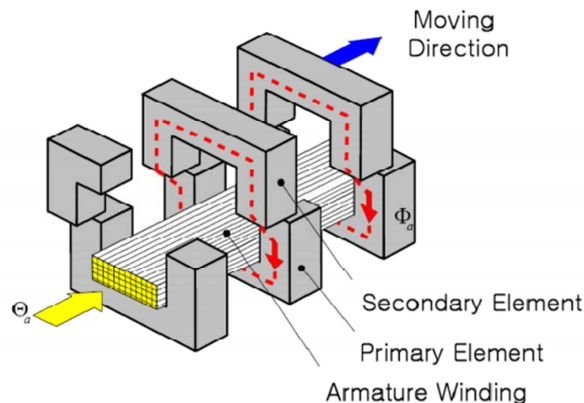


Fig. 3.9: macchina a flusso trasverso (TFM).

Il sistema non necessita quindi di bobine di eccitazione, ed il suo funzionamento da generatore è completamente racchiuso nel fatto che nei nuclei magnetici si hanno flussi alternati collegati all'alternanza dell'orientamento dei magneti che in ogni istante si trovano affacciati allo statore. Le prestazioni delle macchine TFM sono ottime sotto molti punti di vista: i rendimenti sono molto elevati (si arriva fino al 95%), così pure la potenza specifica risulta maggiore rispetto alle altre macchine (si va da  $0.65 \div 0.7$  kW/kg fino ad oltre 1 kW/kg). Sotto il profilo delle masse in movimento, le macchine TFM è sempre competitiva con le migliori alternative delle macchine LFM: il traslatore di una macchina TFM può arrivare a pesare la metà di un traslatore di una PMLG e addirittura 10 volte meno rispetto ad una LIM equivalente. Uno dei principali svantaggi delle macchine TFM è dato dai costi di produzione: la forma geometrica di queste macchine è infatti responsabile di una serie di inconvenienti. In primo luogo queste macchine devono essere laminate in senso trasversale, cosa che può creare dei problemi sia di tipo costruttivo (assemblaggio a volte difficoltoso) che di tipo magnetico (perdite aggiuntive per i flussi che si richiudono sulla faccia laterale del lamierino); la situazione si complica ulteriormente se si utilizza una geometria tubolare.

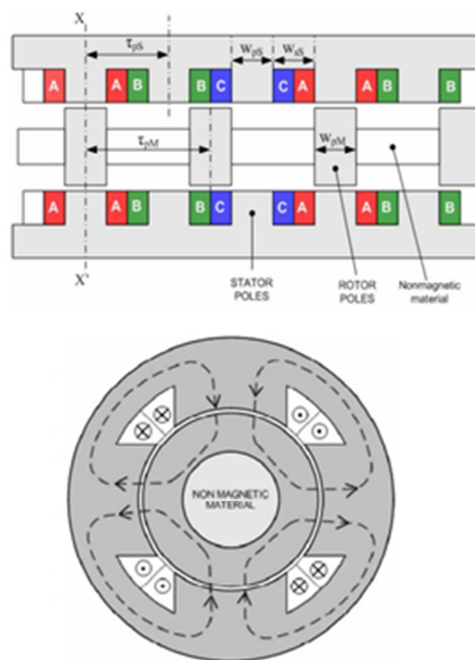


Fig. 3.10: struttura di una macchina tubolare a flusso trasverso: vista assiale (a sinistra) e sezione trasversale x-x' (a destra).

A livello funzionale invece le macchine TFM sono caratterizzate da elevati valori di flussi dispersi. Questo comporta che essa funziona con valori del fattore di potenza molto bassi (circa  $0.3 \div 0.35$ ), si rende quindi necessaria l'interposizione, tra il generatore e la rete, di un sistema di rifasamento: esso può essere composto da delle batterie di condensatori, oppure può essere costituito da un convertitore statico (raddrizzatore + inverter), in ogni caso tale sistema dovrà essere di potenza elevata. Vale la pena di sottolineare un ultimo aspetto che talvolta può risultare negativo per queste macchine: la laminazione, come si è detto, è fatta in senso trasversale, può però succedere che per brevi tratti della macchina il flusso si sviluppi longitudinalmente anziché trasversalmente, e quindi in senso perpendicolare al piano di laminazione, comportando delle perdite nel ferro (in particolare per correnti parassite) niente affatto trascurabili. Questo problema può essere risolto attraverso l'uso

di lamine di forma più complessa. Nonostante questi svantaggi, le macchine TFM possono offrire dei vantaggi apprezzabili, soprattutto per applicazioni di piccola potenza e chiamate a lavorare a velocità piuttosto elevate; la loro ottimizzazione potrebbe dunque essere determinante per lo sviluppo di tutti i sistemi di micro - generazione che utilizzano delle macchine lineari.

### 3.3 Materiali per generatori lineari a magneti permanenti

I materiali utilizzati, come detto, sono principalmente due: la lega Nd-Fe-B e la lega Sm-Co, le cui principali caratteristiche magnetiche possono essere dedotte dal diagramma di figura 3.11.

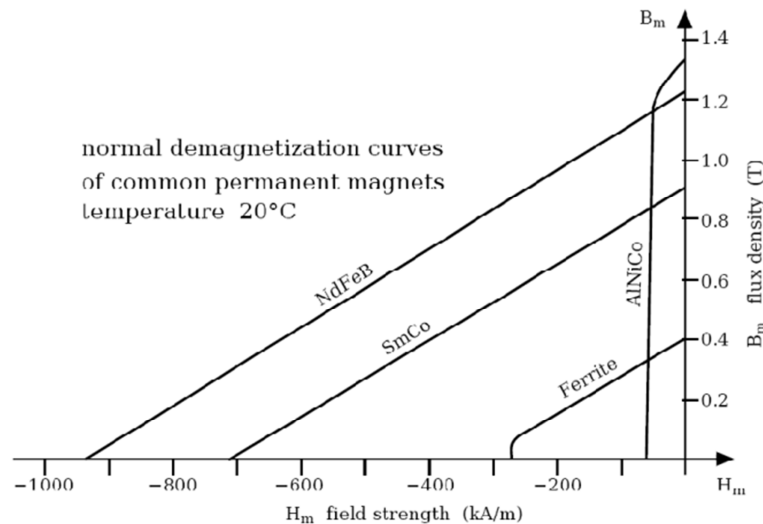


Fig. 3.11: curve di magnetizzazione di alcuni magneti permanenti.

Come si può notare, le migliori prestazioni sono fornite proprio dalle leghe NdFeB e SmCo. Sono entrambe ottenute mediante tecniche di pressatura delle polveri, ma le difficoltà connesse alla lavorabilità e al reperimento del cobalto, fanno preferire, sotto il punto di vista economico, le leghe NdFeB. A sfavore della lega NdFeB vi è la bassa temperatura di funzionamento compresa tra  $80 \div 200^\circ \text{C}$  (temperatura di Curie di  $310 \div 350^\circ \text{C}$ ), mentre la lega SmCo può spingersi fino a temperature di funzionamento dell'ordine di  $250^\circ \text{C}$  (temperatura di Curie di  $720^\circ \text{C}$ ). Inoltre ancora a vantaggio della lega SmCo vi è la capacità di resistere ad eventuali attacchi chimici corrosivi, mentre per ottenere le stesse qualità chimiche da parte della lega NdFeB è necessario applicarvi esternamente uno strato di nichel (Ni), zinco (Zn), stagno (Sn) o resine epossidiche. In conclusione, se i magneti non sono chiamati a lavorare in ambienti particolarmente sfavorevoli dal punto di vista chimico o con temperature elevate, la scelta del materiale del magnete permanente ricadrà sempre sulle leghe di NdFeB. Per quel che invece riguarda i materiali utilizzati per il circuito magnetico si possono utilizzare, in alternativa ai lamierini ferro magnetici, i materiali magnetici compositi (SMC). I materiali magnetici compositi (soft magnetic composites) costituiscono la più moderna categoria di materiali utilizzati nella costruzione delle macchine elettriche. Essi sono costituiti da particelle di polvere di ferro ricoperte con uno strato isolante. Le proprietà elettromagnetiche e meccaniche dipendono dal tipo di polveri usate, da eventuali aggiunte di sostanze leganti e dal processo industriale utilizzato per la produzione. I materiali magnetici compositi possono essere suddivisi in due categorie:

- Compositi costituiti da polveri magnetiche ferrose disperse in una matrice organica, che può essere una resina organica o un polimero. Sono spesso utilizzati per applicazioni in alta



frequenza, hanno basse permeabilità ed induzione a saturazione, elevata resistività e buona resistenza meccanica;

- Compositi costituiti da polveri magnetiche isolate in superficie con sostanze organiche o inorganiche assemblate mediante un legante. Possono essere visti come l'evoluzione dei precedenti: maggiori densità e quindi migliori caratteristiche magnetiche, più basse perdite per correnti parassite.

Le proprietà e le principali grandezze possono essere così riassunte:

- Induzione di saturazione: circa 1.8 T (circa il 10% inferiore a quella dei normali lamierini correntemente in uso);
- Permeabilità: da 100 a 600, contro gli oltre 4000 dei lamierini;
- Induzione residua: da 0.2 a 0.5 T;
- Campo coercitivo: da 100 a 500 A/m;
- Perdite: correnti parassite assai ridotte, perdite per isteresi maggiori per poter mantenere valori di campo coercitivo ragionevoli. Complessivamente da 6-7 W/kg a 1 T, circa doppie rispetto ai normali lamierini al silicio. Lo svantaggio diminuisce all'aumentare della frequenza;
- Isotropia sia termica che magnetica;
- Resistività: da 100 a 2900  $\mu\Omega$  m; Generatori elettrici lineari
- Temperatura di lavoro: 180 °C per i punti più caldi, 150 °C per il punto di lavoro;
- Finitura superficiale e tolleranza: ottime da tutti i punti di vista, tipiche di un processo produttivo basato sulla tecnologia delle polveri;
- Resistenza meccanica: buona a compressione, scarsa a trazione.
- Miglioramento possibile solo a discapito delle proprietà magnetiche.

### 3.4 Generatori lineari per applicazioni su motori free-piston

I vantaggi di abbinare un motore Stirling free-piston ad un generatore lineare, risiedono principalmente nella semplicità costruttiva dell'oggetto che ne risulta: le parti in movimento sono ridotte al minimo, grazie all'assenza di cinematismi, rendendo la macchina potenzialmente affidabile ed economica.

Per valutare quale possa essere la tipologia di macchina più adatta, è opportuno sottolineare quali debbano essere le caratteristiche proprie del generatore lineare:

- solidità e leggerezza del traslatore: dato che i motori Stirling free-piston lavorano con regimi di "traslazione" dell'ordine di migliaia di oscillazioni al minuto, il traslatore dovrà essere solido per evitare eccessive deformazioni durante il funzionamento e leggero al fine di non avere un'inerzia troppo elevata;
- buona efficienza di funzionamento: il generatore deve essere in grado di convertire in energia elettrica la maggior parte possibile dell'energia cinetica fornitagli dal motore Stirling, questo oltre che consentire alla macchina di raggiungere elevati rendimenti, ha anche un risvolto termico: infatti una minor energia dissipata comporta una minore temperatura d'esercizio (o meglio, a parità di temperatura di esercizio, comporta un minore ingombro da parte del sistema di raffreddamento);
- ingombro limitato: a tale requisito si ricollegano vantaggi quali la praticità di installazione e di manutenzione e quindi una maggiore economicità del sistema finale, oltre che ad una sua maggior versatilità d'utilizzo.

Come era già stato sottolineato in precedenza, le soluzioni con traslatore a magneti permanenti sono le uniche che riescono ad unire leggerezza e prestazioni. Sostanzialmente rimangono disponibili le macchine PMLG e le TFM, entrambe sia nella versione piatta che tubolare. Per quel che riguarda la macchina PMLG è preferibile utilizzare la versione tubolare, in modo da eliminare gli effetti di bordo trasversale e le forze normali; mentre per le macchine TFM la versione piana gode di un maggior interesse, principalmente per la minor complessità della struttura. Di seguito viene riportato un confronto tra le principali caratteristiche della macchina PMLG in versione tubolare e la macchina TFM in versione piana:

- Potenza specifica: con riferimento ai valori massimi, la PMLG sembra avere valori superiori (1.5 kW/kg per la PMLG contro gli 1.1 kW/kg per la TFM), ci sono comunque casi in cui le potenze specifiche delle due macchine sono praticamente confrontabili.
- Rendimento: sotto questo aspetto le due macchine si equivalgono (il loro rendimento è di circa il 90÷95%).
- Semplicità costruttiva: in questo caso la macchina PMLG è in netto vantaggio, grazie alla possibilità di costruire i componenti in maniera modulare.
- Sistemi complementari di tipo elettrico: il basso valore del fattore di potenza della TFM (circa 0.35) avvantaggia sicuramente la macchina PMLG (per la quale si hanno fattori di potenza superiori a 0.8÷0.85), che, a parità di prestazioni, permette di impiegare sistemi di interconnessione con la rete (sistemi di rifasamento e/o convertitori statici), di minore ingombro e meno costosi.
- Sistemi complementari di tipo meccanico: la macchina TFM potrebbe richiedere delle guide laterali per contenere il movimento del traslatore, mentre il traslatore tubolare della PMLG dovrebbe auto-centrarsi, grazie all'equilibrio delle forze normali.

Un altro aspetto importante riguarda il raffreddamento della macchina: è infatti molto importante che i magneti permanenti non si trovino a lavorare a temperature troppo elevate, pena il cambiamento delle loro proprietà magnetiche e meccaniche (i magneti permanenti in lega di NdFeB hanno una temperatura massima di funzionamento di circa 200° C). Accoppiando queste macchine con motori termici, è molto importante curare con attenzione lo smaltimento del calore proveniente dal motore e prodotto dallo stesso generatore (perdite Joule e nel ferro): sotto questo aspetto potrebbe trovarsi in difficoltà la macchina PMLG, in particolare nel caso in cui il traslatore non fosse cavo e il traferro fosse molto sottile.

Si può quindi concludere che la macchina lineare sincrona a magneti permanenti (PMLG) sembra essere migliore della sua rivale, per essere impiegata in sistemi di micro-cogenerazione che utilizzano motori Stirling in configurazione free-piston, anche se le macchine TFM sembrano avere dei margini di miglioramento più ampi.

### **3.5 Motori Stirling free-piston accoppiati con generatori lineari**

Come detto sono tante le applicazioni possibili per le quali un motore di Stirling in configurazione free-piston può essere la soluzione più idonea. In mezzo a tutte queste soluzioni (pompe, compressori, refrigeratori), l'attenzione di questa tesi si focalizza su una configurazione di particolare interesse. Applicando infatti al motore un generatore lineare, di cui il pistone di potenza rappresenta il traslatore, è possibile realizzare un sistema di conversione di energia termica in energia elettrica molto semplice ed affidabile.

L'aggiunta del generatore lineare non pregiudica assolutamente la semplicità funzionale del motore, e anche caratteristiche particolari quale la chiusura completa del dispositivo e la

pressurizzazione non vengono compromesse. E' infatti possibile inserire l'alternatore nella camera di rimbalzo, riempita come le altre dal fluido di lavoro. Gli unici problemi di tenuta possono riguardare i cavi elettrici che hanno la funzione di portare all'esterno l'energia elettrica prodotta, ma trattandosi di elementi fissi, ciò rappresenta una difficoltà molto limitata. Fu proprio Beale, per primo, a suggerire fra le altre questa soluzione per la sua invenzione, realizzando anche un prototipo che presentava anche scambiatori di calore più rifiniti rispetto al primo prototipo realizzato.

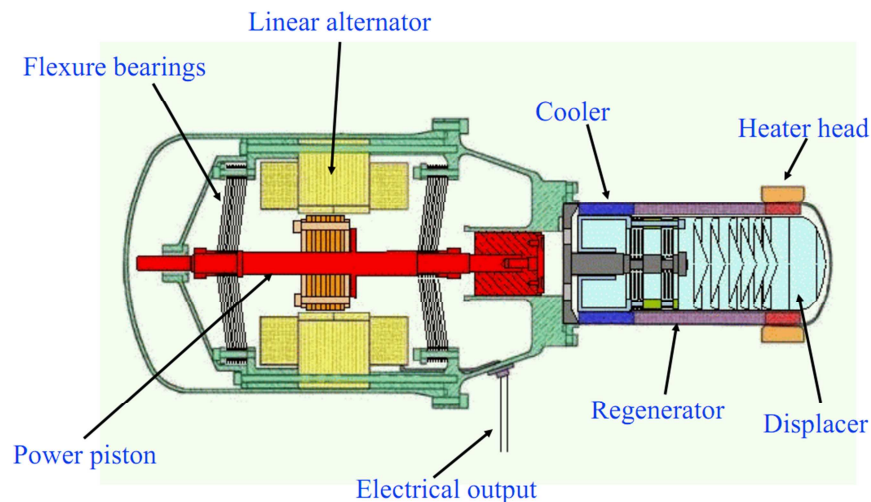


Fig. 3.12: motore Stirling free-piston accoppiato con un generatore lineare.

Nel 1974 Beale, come già accennato nel paragrafo 1.5, fondò una società, la Sunpower Inc. dando il via ad un percorso di sviluppo che nei trent'anni passati dalla sua prima pubblicazione ha portato ad enormi progressi. Ad oggi il numero delle aziende che investono in questa tecnologia è in continua crescita, e ricopre una vasta area geografica, dagli Stati Uniti all'Europa, all'estremo oriente.

### 3.5.1 Motori free-piston della Sunpower Inc.

L'azienda fondata dall'inventore del motore Stirling Free Piston, con sede ad Athens in Ohio, ha collezionato negli anni più di cento brevetti nello sviluppo di macchine operatrici con questo tipo di funzionamento. Inizialmente l'attività di Sunpower riguardò la produzione di più versioni del prototipo lanciato da Beale. Uno di questi modelli fu messo subito in commercio, anche se per lo più per scopi dimostrativi o didattici. Si tratta del motore denominato modello B-10 (o 10-B), rappresentato in figura. Era un modello molto preliminare, che lavorava ad aria. Lungo appena 260 mm, con un diametro di 100 mm, non superava il peso di 1.5 kg. Uno dei grandi pregi mostrati da questo piccolo motore fu la possibilità di essere alimentato con una grande varietà di sorgenti termiche, quali resistenze elettriche, propano o energia solare. Questa sua versatilità si rifletteva anche nei possibili accoppiamenti con eventuali dispositivi in grado di utilizzare e convertire l'energia prodotta. In una di queste applicazioni, il motore B-10 era collegato appunto ad un alternatore lineare, in un sistema complessivo in grado di convertire i circa 100 W di potenza termica assorbita in una potenza elettrica che andava dai 5 We ai 20 We, in funzione del suo grado di pressurizzazione (2÷5 bar).

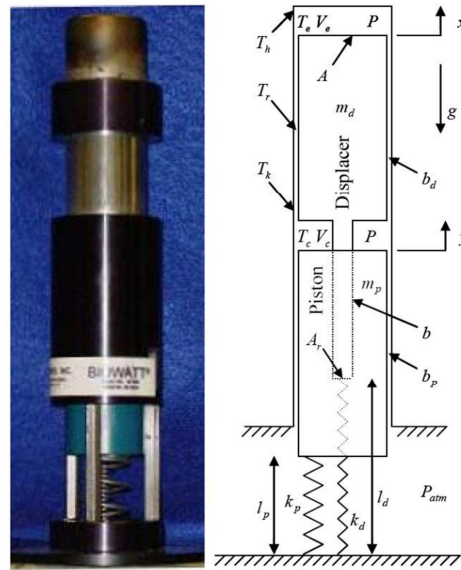


Fig.3.13: modello B-10 della Sunpower Inc.

Furono subito chiare le grandi potenzialità di questi sistemi, e già dall'inizio degli anni '70, la Canadian Atomic Energy Commission ne richiese l'inclusione in un progetto che intendeva realizzare gruppi elettrogeni da 100 W, alimentati a radioisotopi, per garantire l'energia nelle zone più remote dell'America Settentrionale. Il programma fallì perché il livello di comprensione delle reali esigenze progettuali di questi dispositivi non era ancora sufficiente, tuttavia fu la base per il loro seguente sviluppo esponenziale. Dopo la parentesi canadese, comunque, il lavoro di Sunpower continuò a produrre apparecchiature sempre più soddisfacenti. Da allora fino ad oggi il lavoro di Sunpower ha continuato a migliorare la tecnologia del motore Free-Piston. Il suo particolare design, che prevede l'uso esclusivo di cuscinetti idrostatici, alternatori compatti e una meccanica altamente semplificata, è stato esteso ad una vasta serie di motori, refrigeratori criogenici, pompe o compressori, che si sono resi più vantaggiosi ed efficienti non solo rispetto alle macchine Stirling tradizionali, ma anche rispetto ad altre soluzioni free-piston. Ad oggi, trentacinque anni dopo la sua fondazione, Sunpower è quindi il più autorevole riferimento nel settore dei motori FPSE, potendo contare su dispositivi in grado di erogare un'ampia gamma di potenze utili, così da poter rispondere a varie esigenze energetiche, che vanno dalla produzione di energia per uso domestico, all'alimentazione di grossi impianti industriali. Si riporta, a questo proposito, una tabella con le principali caratteristiche dei motori sviluppati.

Sunpower Free-Piston Stirling Engine Prototype Availability								
Prototype Model	Power (nominal)	Temperature Ratio ( $T_h/T_c$ )	Efficiency	Heat Source	Heat Rejection	Hermetically Sealed	Mass	Dimensions, Diameter x Length in mm (nominal)
EE-35	42W <sub>e</sub>	2.7	32%	Electric Heater	Air/Water Cooling	No	1.4 kg	52 x 157
EE-35-H	42W <sub>e</sub>	2.7	32%	Propane/JP-8 Burner	Air/Water Cooling	Yes	0.6 kg	50 x 142
EE-80	95W <sub>e</sub>	3.0	36%	Electric Heater/Propane Burner	Air/Water Cooling	No	3.7 kg	69 x 193
EE-80-H(*)	95W <sub>e</sub>	3.0	36%	TBD	Air/Water Cooling	Yes	1.0 kg	65 x 186
EG-1000	1000W <sub>e</sub>	2.7	32%	Propane Burner	Water Cooling	No	35 kg	270 x 435

Tabella 3.2: caratteristiche e prestazioni dei modelli più recenti di FPSE-LA di Sunpower Inc.

In particolare, vale la pena soffermarsi sul motore EG-1000 progettato per generare corrente elettrica e acqua calda ( possibili combustibili sono il gas o i pellet ). Il generatore elettrico lineare produce 240 volt a 50 Herz. Progettato per il funzionamento in Europa è capace di produrre più di un chilowatt di potenza elettrica e di fornire acqua calda a 50° C. Il rendimento elettrico di questa macchina si aggira su valori del 30% come molti altri Stirling free piston mentre quello globale ( che tiene conto anche del fatto che è utilizzato per riscaldare l'acqua ) è attorno al 90%. Questo motore è mostrato nella figura insieme ad uno schema semplificato.

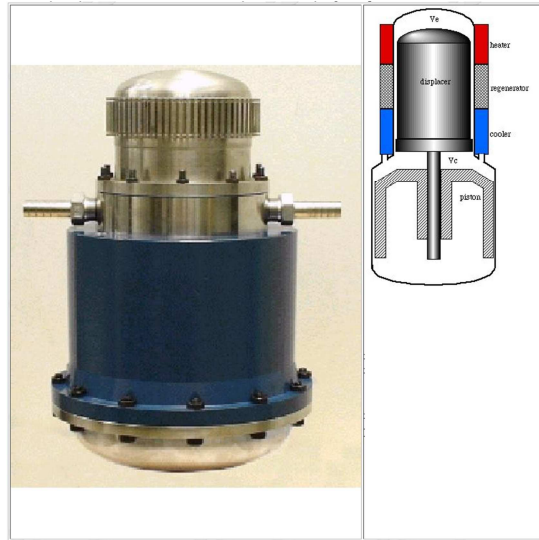


Fig.: motore EG-1000 della Sunpower Inc. (per semplicità non è stato riportato in figura il generatore elettrico lineare).

La perdurata collaborazione con NASA ha, inoltre, accelerato la crescita delle capacità progettuali di Sunpower, così come di altre aziende, permettendole di raggiungere importanti risultati nelle prestazioni dei generatori free-piston anche su modelli di dimensioni molto ridotte. Ne è un evidente esempio il modello l'EE-35. Esso rappresenta l'attuale direzione di ricerca e sviluppo affrontata da Sunpower. Il consolidamento nella realizzazione di questi piccoli ed efficienti convertitori vuole aprire la strada alla tecnologia dei motori Stirling a pistone libero per quasi tutte le applicazioni in cui si renda necessario produrre anche piccole quantità di potenza elettrica sotto stringenti requisiti di massa e ingombro.



## Capitolo 4

### *Modelli matematici per il motore Stirling*

#### 4.1 Introduzione

In materia di simulazione il termine modello contiene un'idea implicita di semplificazione. La macchina di Stirling può essere descritta da modelli fisici e matematici, costruiti sulla base di assunzioni semplificative, che hanno lo scopo di spiegare le prestazioni del motore. L'analisi del ciclo fatta nel capitolo 1 non può essere usata per simulare il processo di lavoro che avviene nel motore. Infatti è difficile pensare che un singolo diagramma pV possa essere rappresentativo di tutti gli stati di funzionamento presenti nel motore. Inoltre gli effetti del moto continuo di pistone e displacer non sono del tutto insignificanti e devono essere presi in considerazione.

In funzione del grado di approfondimento i modelli di simulazione della macchina si suddividono in *modelli del primo, del secondo e del terzo ordine*.

I modelli del primo ordine si riferiscono ad analisi di macchine ideali, praticamente prive di perdite. La loro risoluzione può avvenire in qualche caso anche attraverso metodi analitici.

I modelli del secondo ordine si basano fondamentalmente sull'assunzione di adiabaticità degli spazi di lavoro e su un comportamento isoterma degli scambiatori di calore. Per la loro risoluzione sono necessari dei metodi di integrazione numerica. Questa categoria di modelli si definisce anche *modelli disaccoppiati*. Sono cioè basati su una prima analisi semplificata del ciclo, che porta ad un valore di prima approssimazione del lavoro e del calore scambiati dal sistema termodinamico. In seguito andranno sottratte rispettivamente le perdite termiche dovute alle inefficienze degli scambi termici e quelle meccaniche, dovute ad esempio alle perdite di carico. Nonostante un maggior dettaglio nella valutazione delle cause di imperfezione rispetto ai metodi del primo ordine, i metodi del secondo ordine rappresentano comunque un'analisi semplificata in quanto ipotizzano che ciascuna delle cause di imperfezione si manifesti in maniera indipendente dalle altre ( in modo disaccoppiato ).

I modelli del terzo ordine sono basati su una impostazione in cui le equazioni differenziali del modello matematico tengono conto dei principali fenomeni che caratterizzano il comportamento reale della macchina. Il fatto che si tenga conto di tutte le imperfezioni e le perdite nella risoluzione del sistema di equazioni fa sì che questi modelli prendano anche il nome di *modelli accoppiati*.

Si affrontano in questo capitolo due modelli matematici per l'analisi del motore Stirling e se ne analizzano le differenze.

#### 4.2 Modello isoterma

Il primo esempio completo di modello fisico matematico relativo alla macchina di Stirling risale al decennio 1861 – 1871. La teoria elaborata da *Gustav Schmidt* del *German Polytechnic Institute* di Praga, pubblicata nel 1871, rappresenta un modello completamente analitico, capace di fornire

stime approssimate delle prestazioni della macchina. Tale modello può descrivere il comportamento della macchina qualsiasi sia la sua configurazione (alfa, beta, gamma ) e viene realisticamente considerato che il gas operante occupi tutto il volume che ha a disposizione.

### 4.2.1 Ipotesi di lavoro

La teoria si basa sulle seguenti ipotesi:

1. il fluido durante la fase di espansione si trova alla temperatura più alta che si mantiene costante,  $T_h = \text{costante}$  (espansione isoterma);
2. il fluido durante la fase di compressione si trova alla temperatura più bassa che si mantiene costante,  $T_k = \text{costante}$  (compressione isoterma);
3. i volumi degli spazi di lavoro ( camera di espansione e di compressione) variano in modo sinusoidale ovvero moto sinusoidale di pistone e displacer;
4. Il motore, schematizzato in figura 4.2, è costituito da tre celle connesse in serie [10]. Si distinguono:
  - camera di compressione ( c );
  - rigeneratore ( r );
  - camera di espansione ( e );
5. perdite per attrito tra organi in moto relativo trascurabili;
6. assenza di fughe di gas;
7. regime stazionario di funzionamento della macchina;
8. reversibilità delle trasformazioni subite dal fluido;
9. non si verificano perdite di carico;
10. stessa pressione istantanea in tutta la massa di fluido;
11. il fluido è un gas ideale e obbedisce quindi alla legge  $pV = nRT$ , ed i suoi calori specifici a pressione e a volume costante sono indipendenti dalla temperatura;
12. processo di rigenerazione perfetto: cioè il fluido nel suo passaggio attraverso il rigeneratore assorbe e cede alternativamente la stessa quantità di calore;

Prima di cominciare con l'analisi vera e propria è necessario fare una precisazione per quanto riguarda l'ipotesi di lavoro 12. Questa, infatti, prevede che la rigenerazione sia perfetta. Si assume che il rigeneratore ideale abbia un profilo di temperatura lineare, che va dalla temperatura più bassa  $T_k$  a quella più alta  $T_h$ , come si vede in figura 4.1.

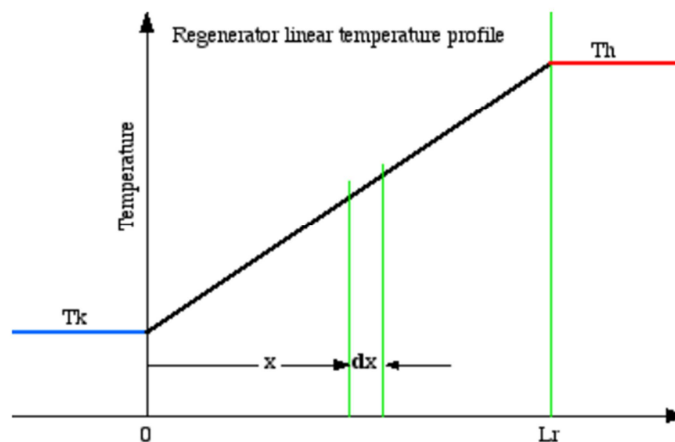


Fig. 4.1: profilo di temperatura del rigeneratore.



Si può dimostrare che ciò equivale a porre la temperatura del gas costante e pari alla media logaritmica tra le temperature degli scambiatori caldo e freddo.

Il gradiente di temperatura sulla lunghezza del rigeneratore è:

$$T(x) = \frac{T_H - T_k}{L_r} x + T_k \quad (4.1)$$

La massa totale di gas,  $n_r$ , nel volume del rigeneratore è:

$$n_r = \int_0^{V_r} \rho dV_r \quad (4.2)$$

in cui  $\rho = \frac{n}{V_r}$  rappresenta la densità molare. Dall'equazione dei gas ideali si ha che:

$$p = \rho RT \quad (4.3)$$

Il volume del rigeneratore,  $V_r$ , è:

$$V_r = A_r L_r \quad (4.4)$$

quindi:

$$\begin{aligned} n_r &= \int_0^{V_r} \rho dV_r = \int_0^{V_r} \frac{n}{V_r} dV_r = \int_0^{V_r} \frac{p}{RT} dV_r = \frac{pA_r}{R} \int_0^{L_r} \frac{1}{T} dx \\ &= \frac{pV_r}{R} \int_0^{L_r} \frac{1}{(T_h - T_k)x + T_k L_r} dx \end{aligned} \quad (4.5)$$

Integrando e moltiplicando si ottiene:

$$n_r = \frac{pV_r}{R} \frac{\ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right)}{T_h - T_k} \quad (4.6)$$

In base all'equazione dei gas ideali si può definire la temperatura effettiva del gas nel rigeneratore,  $T_r$  infatti uguagliandola alla:

$$n_r = \frac{pV_r}{RT_r} \quad (4.7)$$

si ottiene:

$$T_r = \frac{T_h - T_k}{\ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right)} \quad (4.8)$$

Che non è altro che la temperatura media logaritmica dello scambiatore di calore rappresentato dal rigeneratore.

#### 4.2.2 Analisi isoterma motore in configurazione beta free-piston

Fatte queste precisazioni si inizia l'analisi del modello rappresentato di seguito in figura.

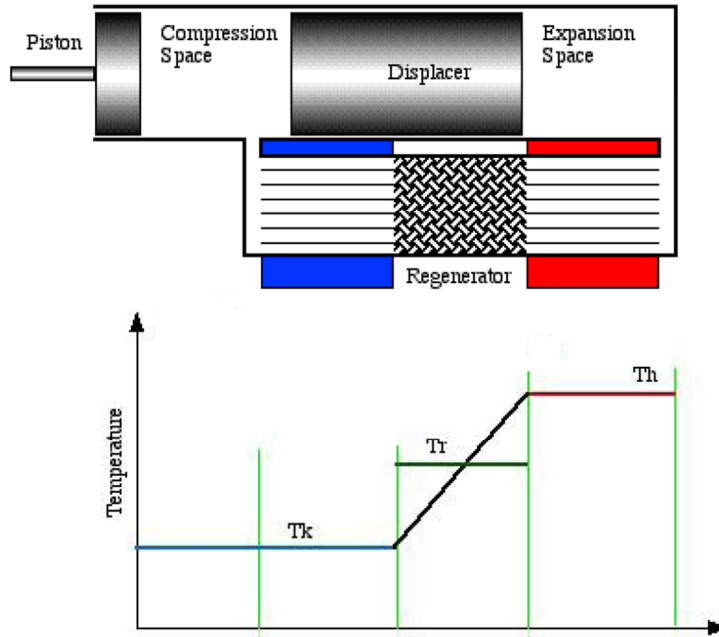


Fig. 4.2: profilo di temperatura del modello isotermico

Ogni componente è considerato una cella omogenea, il gas di lavoro è considerato ideale e caratterizzato dal numero di moli  $n$  (in alternativa si può prendere in considerazione la massa), dalla temperatura assoluta  $T$ , dal volume  $V$  e dalla pressione  $p$  (si useranno i suffissi  $c$ ,  $r$ , e per identificare il gas nelle diverse celle del motore).

La quantità totale di gas nella macchina risulta costante dato che il sistema è sigillato:

$$n = n_c + n_r + n_e \quad (4.9)$$

dove:  $n_c$  = numero di moli di gas contenute nella camera di compressione;  
 $n_r$  = numero di moli di gas contenute nel rigeneratore;  
 $n_e$  = numero di moli di gas contenute nella camera di espansione.

La pressione  $p$  è omogenea nel motore quindi, dalla legge di stato dei gas ideali:

$$pV = nRT \quad (4.10)$$

si ottiene per ogni volume di lavoro:

$$n_r = \frac{pV_r}{RT_r} \quad (4.11)$$

$$n_e = \frac{pV_e}{RT_e} \quad (4.12)$$

$$n_c = \frac{pV_c}{RT_c} \quad (4.13)$$

dove:  $V_c$  = volume della camera di compressione;  
 $V_r$  = volume del rigeneratore;  
 $V_e$  = volume della camera di espansione;  
 $T_c$  = temperatura del gas nella camera di compressione;  
 $T_r$  = temperatura del gas nel rigeneratore;  
 $T_e$  = temperatura del gas nella camera di espansione;

Sostituendo la (4.11) la (4.12) la (4.13) nella (4.9) si ottiene:

$$\begin{aligned} n &= \frac{pV_r}{RT_r} + \frac{pV_e}{RT_e} + \frac{pV_c}{RT_c} \\ &= \frac{p}{R} \left( \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_e}{T_e} + \frac{V_c}{T_c} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Sostituendo ora la (4.12) nella (4.3) e risolvendo, si ottiene l'espressione per la pressione p in funzione di  $V_c$  e  $V_e$ :

$$p = \frac{nR}{\frac{V_r}{T_r} + \frac{V_e}{T_e} + \frac{V_c}{T_c}} \quad (4.15)$$

Sapendo inoltre che  $T_e = T_h$  e che  $T_c = T_k$  si può scrivere:

$$p = \frac{nR}{\frac{V_r}{T_r} + \frac{V_e}{T_h} + \frac{V_c}{T_k}} \quad (4.16)$$

Considerando ora una macchina in configurazione beta (fig. 4.2), le leggi sinusoidali di variazione dei volumi di compressione e di espansione sono rispettivamente le seguenti:

$$V_c(t) = A_p [x_p(t) + x_{p0}] - A_d x_d(t) \quad (4.17)$$

$$V_e(t) = A_d [x_d(t) + x_{d0}] \quad (4.18)$$

dove:  $A_p$  = area del pistone;  
 $A_d$  = area del displacer;  
 $x_p(t)$  = moto del pistone;  
 $x_d(t)$  = moto del displacer;  
 $x_{p0}$  = distanza media di oscillazione del pistone;  
 $x_{d0}$  = distanza media di oscillazione del displacer.

Supponendo che la variazione dei volumi in funzione del tempo segua una legge sinusoidale i moti di pistone e displacer sono rispettivamente:

$$x_p(t) = X_p \cos(\omega t) \quad (4.19)$$

$$x_d(t) = X_d \cos(\omega t + \alpha) \quad (4.20)$$

dove:  $X_p$  = ampiezza del moto del pistone;  
 $X_d$  = ampiezza del moto del displacer;  
 $\alpha$  = angolo di sfasamento tra il moto del displacer e quello del pistone;  
 $\omega$  = pulsazione angolare.

quindi si può scrivere:

$$\begin{aligned} V_c(t) &= A_p [X_p \cos(\omega t) + x_{p0}] - A_d X_d \cos(\omega t + \alpha) \\ &= A_p X_p \cos(\omega t) + A_p x_{p0} - A_d X_d \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} V_e(t) &= A_d [X_d \cos(\omega t + \alpha) + x_{d0}] \\ &= A_d X_d \cos(\omega t + \alpha) + A_d x_{d0} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Capitolo 4

Chiamando ora:  $A_p X_p = V_p$   $A_p X_{p0} = V_{p0}$   $A_d X_d = V_d$   $A_d X_{d0} = V_{d0}$  si può scrivere:

$$V_c(t) = V_p \cos(\omega t) + V_{p0} - V_d \cos(\omega t + \alpha) \quad (4.23)$$

$$V_e(t) = V_d \cos(\omega t + \alpha) + V_{d0} \quad (4.24)$$

Andando a sostituire si ottiene:

$$p = \frac{nR}{\frac{V_d}{T_h} \cos(\omega t + \alpha) + \frac{V_{d0}}{T_h} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_p}{T_k} \cos(\omega t) - \frac{V_d}{T_k} \cos(\omega t + \alpha) + \frac{V_{p0}}{T_k}}$$

$$= \frac{nR}{\frac{V_r}{T_r} + \frac{V_{d0}}{T_h} + \frac{V_{p0}}{T_k} + \frac{V_p}{T_k} \cos(\omega t) + \left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \cos(\omega t + \alpha)} \quad (4.25)$$

Considerando ora l'identità trigonometrica :

$$\cos(\omega t + \alpha) = \cos(\omega t)\cos(\alpha) - \sin(\omega t)\sin(\alpha) \quad (4.26)$$

Si può scrivere:

$$p = \frac{nR}{\frac{V_r}{T_r} + \frac{V_{d0}}{T_h} + \frac{V_{p0}}{T_k} + \frac{V_p}{T_k} \cos(\omega t) + \left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \cos(\omega t)\cos(\alpha) - \left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \sin(\omega t)\sin(\alpha)}$$

$$= \frac{nR}{\frac{V_r}{T_r} + \frac{V_{d0}}{T_h} + \frac{V_{p0}}{T_k} + \frac{V_p}{T_k} \cos(\omega t) + \left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \cos(\omega t)\cos(\alpha) - \left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \sin(\omega t)\sin(\alpha)}$$

$$= \frac{nR}{\frac{V_r}{T_r} + \frac{V_{d0}}{T_h} + \frac{V_{p0}}{T_k} + \left[\frac{V_p}{T_k} + \left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \cos(\alpha)\right] \cos(\omega t) - \left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \sin(\alpha)\sin(\omega t)} \quad (4.27)$$

Ponendo poi:

$$\tan(\delta) = \frac{\left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \sin(\alpha)}{\left[\frac{V_p}{T_k} + \left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \cos(\alpha)\right]} \quad (4.28)$$

e utilizzando le relazioni trigonometriche:

$$\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}} \quad (4.29)$$

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}} \quad (4.30)$$

si può affermare che:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(\delta) &= \frac{\left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \sin(\alpha)}{\left[\frac{V_p}{T_k} + \left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \cos(\alpha)\right]} \\
 &= \frac{\left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \sin(\alpha)}{\sqrt{1 + \left\{ \frac{\left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \sin(\alpha)}{\left[\frac{V_p}{T_k} + \left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \cos(\alpha)\right]} \right\}^2}} \\
 &= \frac{\left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \sin(\alpha)}{\sqrt{\left[\frac{V_p}{T_k} + \left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \cos(\alpha)\right]^2 + \left[\left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \sin(\alpha)\right]^2}} \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

Allo stesso modo:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{cos}(\delta) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left\{ \frac{\left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \sin(\alpha)}{\left[\frac{V_p}{T_k} + \left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \cos(\alpha)\right]} \right\}^2}} \\
 &= \frac{\frac{V_p}{T_k} + \left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \cos(\alpha)}{\sqrt{\left[\frac{V_p}{T_k} + \left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \cos(\alpha)\right]^2 + \left[\left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \sin(\alpha)\right]^2}} \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

Ponendo ora:

$$a = \sqrt{\left[\frac{V_p}{T_k} + \left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \cos(\alpha)\right]^2 + \left[\left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \sin(\alpha)\right]^2} \quad (4.33)$$

$$b = \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_{d0}}{T_h} + \frac{V_{p0}}{T_k} \quad (4.34)$$

si può scrivere:

$$\left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \sin(\alpha) = a \operatorname{sen}(\delta) \quad (4.35)$$

$$\frac{V_p}{T_k} + \left(\frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k}\right) \cos(\alpha) = a \operatorname{cos}(\delta) \quad (4.36)$$

$$p = \frac{nR}{b + a \operatorname{cos}(\delta) \operatorname{cos}(\omega t) - a \operatorname{sen}(\delta) \operatorname{sen}(\omega t)} \quad (4.37)$$

$$p = \frac{nR}{b + a \operatorname{cos}(\omega t + \delta)} \quad (4.38)$$

Raccogliendo b e ponendo  $c = \frac{a}{b}$  risulta :

$$p = \frac{nR}{b [1 + c \cos(\omega t + \delta)]} \quad (4.40)$$

Si può così determinare analiticamente il valore della pressione media risolvendo l'integrale:

$$\begin{aligned} p_{media} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{nR}{b [1 + c \cos(\omega t + \delta)]} d(\omega t) \\ &= \frac{nR}{2\pi b} \left[ \frac{2}{\sqrt{1-c^2}} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-c^2}}{1+c} \tan \frac{\omega t + \delta}{2} \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{nR}{2\pi b} \frac{2\pi}{\sqrt{1-c^2}} \end{aligned} \quad (4.40)$$

I valori massimi e minimi della pressione sono determinabili per i valori estremi di  $\cos(\omega t + \theta)$ :

$$p_{max} = \frac{nR}{b(1-c)} = p_{media} \frac{\sqrt{1-c^2}}{1-c} \quad (4.41)$$

$$p_{min} = \frac{nR}{b(1+c)} = p_{media} \frac{\sqrt{1-c^2}}{1+c} \quad (4.42)$$

Si analizza ora il modello isothermico ideale da un punto di vista energetico. Per poter investigare meglio gli scambi di calore che avvengono nei due scambiatori di calore e nel rigeneratore, bisogna ricorrere alle equazioni dell'energia per il gas di lavoro. In figura 4.3 è schematizzata una cella che può rappresentare sia una cella di spazio di lavoro sia una cella di scambio di calore.

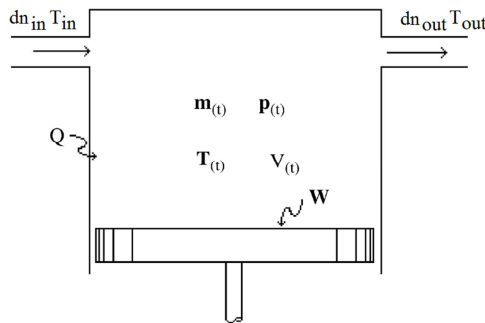


Fig. 4.3: rappresentazione schematica di una generica cella di lavoro del motore Stirling.

In base al primo principio della termodinamica, applicato ad una singola cella isoterma, considerando le trasformazioni istantaneamente isobare (p omogenea in tutto il volume di lavoro), il bilancio energetico per questa generica cella risulta essere il seguente:

$$c_p dn_{in} T_{in} + dQ = dW + dU + c_p dn_{out} T_{out} \quad (4.43)$$

- dove:
- $c_p$  = calore specifico del fluido a pressione costante
  - $c_p dn_{in} T_{in}$  = energia trasportata all'interno della cella dal flusso  $dn_{in}$  a temperatura  $T_{in}$ ;
  - $c_p dn_{out} T_{out}$  = energia trasportata fuori dalla cella dal flusso  $dn_{out}$  a temperatura  $T_{out}$ ;
  - $dQ$  = calore trasferito dallo scambiatore al fluido o viceversa;
  - $dW$  = lavoro fatto dalla cella
  - $dU$  = variazione di energia interna del fluido

Conoscendo le espressioni di  $dU$  e  $dW$ :

$$dW = p dV \quad (4.44)$$

$$dU = c_v d(nT) \quad (4.45)$$

e sostituendo si ottiene:

$$c_p dn_{in} T_{in} + dQ = p dV + c_v d(nT) + c_p dn_{out} T_{out} \quad (4.46)$$

$$c_p dn_{in} T_{in} - c_p dn_{out} T_{out} + dQ = p dV + c_v d(nT) \quad (4.47)$$

Essendo gli scambiatori di calore sono isotermi, quindi ( $T_{in} = T_{out} = T$ ), e la differenza del flusso di gas  $dn_{in} - dn_{out} = dn$  è pari alla percentuale di numero di moli accumulata nella cella, la (4.43) può essere così semplificata:

$$c_p (dn_{in} - dn_{out}) T + dQ = p dV + c_v dn T \quad (4.48)$$

$$c_p dn T + dQ = p dV + c_v dn T \quad (4.49)$$

Ricordando la relazione tra i calori specifici dei gas ideali  $R = c_p - c_v$ , la (4.49) diventa:

$$R T dn + dQ = p dV \quad (4.50)$$

Il calore netto  $Q$  che viene trasferito al gas di lavoro o ceduto dallo stesso allo scambiatore è dato dalla integrazione ciclica di  $dQ$

$$\begin{aligned} Q &= \oint (p dV + R T dn) \\ &= \oint p dV + \oint R T dn \end{aligned} \quad (4.51)$$

In base all'ipotesi di stato ciclico costante ( non vi è accumulo di gas durante il ciclo nelle celle  $\oint dn = 0$  ) e si ha dunque:

$$Q = W \quad (4.52)$$

Si definiscono quindi i calori trasferiti nella zona di espansione e nella zona di compressione:

$$Q_c = W_c = \oint p dV_c \quad (4.53)$$

$$Q_e = W_e = \oint p dV_e \quad (4.54)$$

e di conseguenza il lavoro totale:

$$W = W_c + W_e = \oint p dV_c + \oint p dV_e = \oint p (dV_c + dV_e) \quad (4.55)$$

Operando un opportuno cambio di variabile di integrazione si può ottenere:

$$W_c = \oint p dV_c = \int_0^{2\pi} p \left( \frac{dV_c}{d\vartheta} \right) d\vartheta \quad (4.56)$$

$$W_e = \oint p dV_e = \int_0^{2\pi} p \left( \frac{dV_e}{d\vartheta} \right) d\vartheta \quad (4.57)$$

dove ponendo  $\vartheta = \omega t$  nelle (4.23) e (4.24) si ha:

$$\frac{dV_c}{d\vartheta} = -V_p \sin(\vartheta) + V_d \sin(\vartheta + \alpha) \quad (4.58)$$

$$\frac{dV_e}{d\vartheta} = -V_d \sin(\vartheta + \alpha) \quad (4.59)$$

di conseguenza utilizzando l'espressione della pressione data dalla (4.40) si ha:

$$\begin{aligned} W_c &= \int_0^{2\pi} \frac{nR(-V_p \sin(\vartheta) + V_d \sin(\vartheta + \alpha))}{b [1 + c \cos(\vartheta + \delta)]} d\vartheta \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{nR V_p \sin(\vartheta)}{b [1 + c \cos(\vartheta + \delta)]} d\vartheta + \int_0^{2\pi} \frac{nR V_d \sin(\vartheta + \alpha)}{b [1 + c \cos(\vartheta + \delta)]} d\vartheta \\ &= - \frac{n R V_p}{b} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\vartheta)}{[1 + c \cos(\vartheta + \delta)]} d\vartheta + \frac{m R V_d}{b} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\vartheta + \alpha)}{[1 + c \cos(\vartheta + \delta)]} d\vartheta \end{aligned} \quad (4.60)$$

dove il primo integrale si risolve partendo con un cambio della variabile di integrazione. Si pone infatti  $\beta = \vartheta + \delta$ :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\vartheta)}{[1 + c \cos(\vartheta + \delta)]} d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\beta - \delta)}{[1 + c \cos(\beta)]} d\beta \quad (4.61)$$

Applicando ora le formule trigonometriche di sottrazione tra gli angoli

$$\text{sen}(x + y) = \text{sen}(x)\cos(y) - \cos(x)\text{sen}(y) \quad (4.62)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\beta - \delta)}{[1 + c \cos(\beta)]} d\beta = \\ &= \cos(\delta) \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\beta)}{[1 + c \cos(\beta)]} d\beta - \text{sen}(\delta) \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\beta)}{[1 + c \cos(\beta)]} d\beta \end{aligned} \quad (4.63)$$

dove:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\beta)}{[1 + c \cos(\beta)]} d\beta &= -\frac{1}{c} [\ln(1 + c \cos(\beta))]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{1}{c} [\ln(1 + c) - \ln(1 + c)]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned} \quad (4.64)$$

mentre:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\beta)}{[1 + c \cos(\beta)]} d\beta &= \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \left[ 1 - \frac{1}{[1 + c \cos(\beta)]} \right] d\beta \\ &= \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} d\beta - \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \frac{1}{[1 + c \cos(\beta)]} d\beta \\ &= \frac{2\pi}{c} - \frac{1}{c} \frac{2}{\sqrt{1 - c^2}} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - c^2}}{1 + c} \tan \frac{\beta}{2} \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{2\pi}{c} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} \right) \end{aligned} \quad (4.65)$$



Si risolve ora allo stesso modo l'integrale:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\vartheta + \alpha)}{[1 + c \cos(\vartheta + \delta)]} d\vartheta \\
 = & \cos(\alpha) \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\vartheta)}{[1 + c \cos(\vartheta + \delta)]} d\vartheta + \sin(\alpha) \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\vartheta)}{[1 + c \cos(\vartheta + \delta)]} d\vartheta \\
 = & -\cos(\alpha) \sin(\delta) \frac{2\pi}{c} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}\right) + \sin(\alpha) \cos(\delta) \frac{2\pi}{c} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}\right) \\
 = & [\sin(\alpha) \cos(\delta) - \cos(\alpha) \sin(\delta)] \frac{2\pi}{c} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}\right) \\
 = & [\sin(\alpha - \delta)] \frac{2\pi}{c} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}\right) \tag{4.66}
 \end{aligned}$$

Infine si può dunque scrivere:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\vartheta)}{[1 + c \cos(\vartheta + \delta)]} d\vartheta = -\sin(\delta) \frac{2\pi}{c} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}\right) \tag{4.67}$$

e:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\vartheta + \alpha)}{[1 + c \cos(\vartheta + \delta)]} d\vartheta = \sin(\alpha - \delta) \frac{2\pi}{c} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}\right) \tag{4.68}$$

quindi l'espressione del lavoro fatto nella camera di compressione è la seguente:

$$\begin{aligned}
 W_c &= \frac{n R}{b} \frac{2\pi}{c} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}\right) [V_p \sin(\delta) + V_d \sin(\alpha - \delta)] \\
 &= \frac{n R}{b} \frac{2\pi}{c} \left(\frac{\sqrt{1 - c^2} - 1}{\sqrt{1 - c^2}}\right) [V_p \sin(\delta) + V_d \sin(\alpha - \delta)] \\
 &= p_{media} 2\pi \left(\frac{\sqrt{1 - c^2} - 1}{c}\right) [V_p \sin(\delta) + V_d \sin(\alpha - \delta)] \tag{4.69}
 \end{aligned}$$

mentre l'espressione del lavoro fatto nella camera di espansione è la seguente:

$$\begin{aligned}
 W_e &= -V_d \sin(\alpha - \delta) \frac{n R}{b} \frac{2\pi}{c} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}\right) \\
 &= V_d \sin(\delta - \alpha) \frac{n R}{b} \frac{2\pi}{c} \left(\frac{\sqrt{1 - c^2} - 1}{\sqrt{1 - c^2}}\right) \\
 &= p_{media} 2\pi \left(\frac{\sqrt{1 - c^2} - 1}{c}\right) V_d \sin(\delta - \alpha) \tag{4.70}
 \end{aligned}$$

Il lavoro totale è dato dalla relazione:

$$\begin{aligned}
 W &= W_c + W_e \\
 &= p_{media} 2\pi \left(\frac{\sqrt{1 - c^2} - 1}{c}\right) V_p \sin(\delta) \tag{4.71}
 \end{aligned}$$

Il rendimento risulterà :

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{W}{Q_e} = \frac{W_c + W_e}{W_e} = 1 + \frac{W_c}{W_e} \\
 &= 1 + \frac{p_{media} 2\pi \left( \frac{\sqrt{1-c^2}-1}{c} \right) [V_p \sin(\delta) + V_d \sin(\alpha - \delta)]}{p_{media} 2\pi \left( \frac{\sqrt{1-c^2}-1}{c} \right) V_d \sin(\delta - \alpha)} \\
 &= 1 + \frac{V_p \sin(\delta) + V_d \sin(\alpha - \delta)}{V_d \sin(\delta - \alpha)} \\
 &= \frac{V_p \sin(\delta)}{V_d \sin(\delta - \alpha)} \\
 &= \frac{V_p}{V_d} \frac{\sin(\delta)}{\sin(\delta) \cos(\alpha) - \cos(\delta) \sin(\alpha)} \tag{4.72}
 \end{aligned}$$

Inserendo equazioni le (4.31) e (4.32) si ottiene:

$$\eta = \frac{V_p}{V_d} \frac{\left( \frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k} \right) \sin(\alpha)}{\left( \frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k} \right) \sin(\alpha) \cos(\alpha) - \left[ \frac{V_p}{T_k} + \left( \frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k} \right) \cos(\alpha) \right] \sin(\alpha)} \tag{4.73}$$

Semplificando il rendimento risulta essere pari a:

$$\eta = \frac{V_p \left( \frac{V_d}{T_h} - \frac{V_d}{T_k} \right) \sin(\alpha)}{V_d \left( -\frac{V_p}{T_k} \right) \sin(\alpha)} = \frac{V_p V_d \frac{T_k - T_h}{T_k T_h}}{V_d V_p \left( -\frac{1}{T_k} \right)} = 1 - \frac{T_k}{T_h} \tag{4.74}$$

che risulta essere uguale all'efficienza di Carnot. Si può dire infine che questo risultato è la diretta conseguenza delle ipotesi iniziali (in particolare il comportamento ideale del fluido ed il comportamento isoterma delle trasformazioni di compressione ed espansione). All'atto pratico, per effetto delle non idealità, il rapporto tra rendimento reale e quello teorico, nel migliore dei casi si aggira attorno al 35%.

Inoltre, si può dire che, nell'analisi isoterma, ci si è riferiti ad un modello ideale di motore Stirling in cui la temperatura del gas negli spazi di compressione e di espansione è mantenuta costante e rispettivamente pari alle temperature degli scambiatori di calore.

### 4.2.3 Distribuzione della massa nelle celle di lavoro

Per ipotesi la massa totale ( o il numero di moli totali ) del fluido operante nel ciclo è costante, ma variabile nel tempo è la sua distribuzione nei diversi componenti della macchina. Tale distribuzione può venire modellizzata in analogia con il circuito elettrico di figura 4.4 :

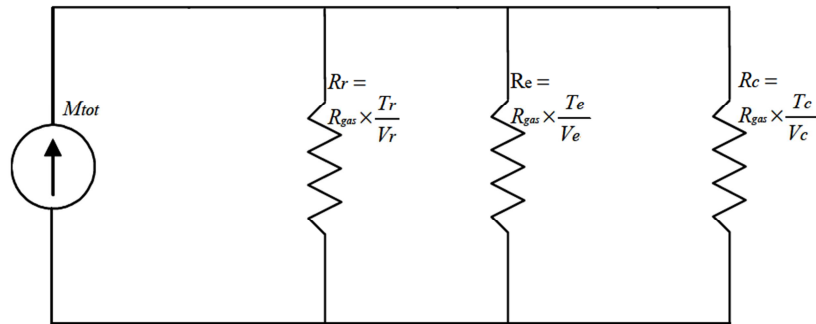


Fig. 4.4: circuito equivalente della distribuzione della massa nelle celle di lavoro

dove:  $M_{tot}$  = massa totale del gas contenuto nel pistone;  
 $R_{gas}$  = costante caratteristica del gas

In questa analogia la massa totale del gas o il numero di moli del gas viene rappresentata come un generatore ideale di corrente che produce una corrente costante nel tempo nel rispetto della legge di conservazione della massa. La pressione del gas di lavoro può essere associata alla tensione sui singoli resistori. Essendo questi in parallelo la tensione su ciascuno è la stessa, verificando, quindi, la condizione che la pressione sia uguale istante per istante in ciascuna parte del motore. Il valore delle resistenze dei resistori in parallelo è rappresentato dal rapporto tra la temperatura del gas ed il volume di ciascuna cella. Si può vedere che se la temperatura del gas aumenta anche la rispettiva resistenza cresce e di conseguenza diminuisce la corrente nel ramo, ossia la massa di gas nella cella di lavoro.

### 4.3 Modello adiabatico

Il modello ideale di motore cui si è fatto riferimento nell'analisi isoterma, porta ad una situazione paradossale in cui né il riscaldatore né il raffreddatore contribuiscono al trasferimento di calore in quanto l'integrale del flusso di calore esteso ad un ciclo risulta nullo. In questo modo, al fine di rispettare il secondo principio della termodinamica, tutto il calore deve necessariamente passare attraverso le porzioni della macchina non occupate dagli scambiatori; come ad esempio le pareti dei cilindri e la superficie esterna del pistone motore. Parti che però non sono realizzate per il trasferimento di calore. Gli scambiatori quindi risultano addirittura dannosi se non superflui in quanto causerebbero solamente un aumento dello spazio nocivo del motore. Nelle macchine reali quindi i processi di espansione e di compressione tendono ad essere adiabatici piuttosto che isotermi, ciò significa che il calore netto trasferito durante un ciclo deve essere dato dagli scambiatori di calore.

Si prende in considerazione il motore di figura 4.5 che, a differenza di quanto visto per il modello isoterma di Schmidt, dev'essere necessariamente suddiviso in cinque celle di lavoro. Nel modello infatti compaiono delle celle in cui sono collocati i due scambiatori di calore (raffreddatore e riscaldatore). Questo perché si ipotizza che le due trasformazioni che avvengono all'interno dei cilindri, cioè rispettivamente espansione e compressione, siano di fatto adiabatiche e siano a loro volta precedute da trasformazioni isoterme durante le quali si ha il trasferimento di calore negli scambiatori ausiliari complementari. L'individuazione fisica all'interno della macchina di tali volumi è poi da definirsi in base alla configurazione geometrica del motore stesso. La temperatura del fluido operante nelle camere di espansione e compressione non è costante ma oscilla attorno ad un valor medio che risulta essere rispettivamente maggiore della temperatura dello scambiatore

freddo per la camera di compressione e minore di quella dello scambiatore caldo per quanto riguarda la camera di espansione.

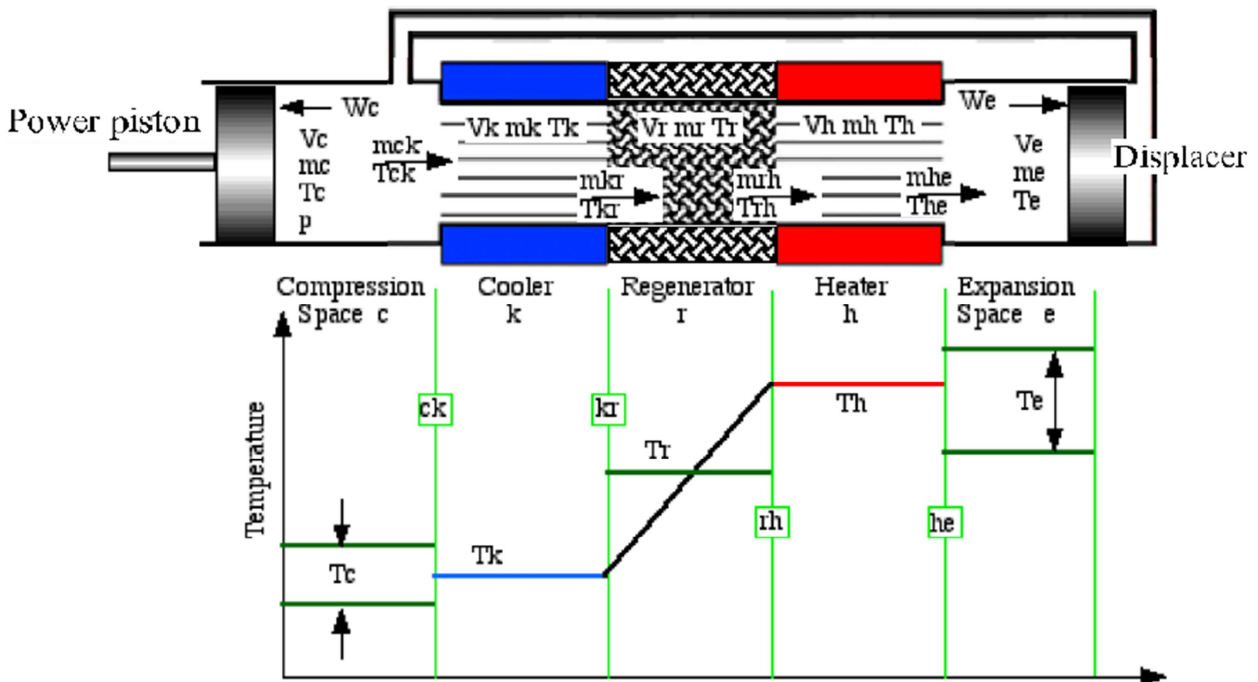


Fig. 4.5: profilo di temperatura del modello adiabatico.

### 4.3.1 Ipotesi di lavoro

Le ipotesi di lavoro su cui si basa l'analisi adiabatica sono le seguenti:

1. i volumi degli spazi di lavoro ( camera di espansione e di compressione) variano in modo sinusoidale ovvero moto sinusoidale di pistone e displacer;
2. il motore, schematizzato in figura 4.5, è costituito da cinque celle connesse in serie. Si distinguono:
  - camera di compressione ( c );
  - raffreddatore ( k );
  - rigeneratore ( r );
  - riscaldatore ( h );
  - camera di espansione ( e );
3. perdite per attrito tra organi in moto relativo trascurabili;
4. assenza di fughe di gas;
5. regime stazionario di funzionamento della macchina;
6. reversibilità delle trasformazioni subite dal fluido;
7. assenza di perdite di carico;
8. stessa pressione istantanea in tutta la massa di fluido;
9. profilo lineare di temperatura nel rigeneratore.

### 4.3.2 Analisi adiabatica per un motore Stirling in configurazione beta “free-piston” con scambiatori di calore ausiliari

Dal diagramma di distribuzione della temperatura di fig. si nota che le temperature negli spazi di compressione e di espansione ( $T_c$  e  $T_e$ ) non sono costanti, ma variano in accordo con l'espansione e la compressione che avvengono nel volume di lavoro. Il rigeneratore è adiabatico esternamente: il calore  $Q_r$  viene trasferito internamente dalla matrice del rigeneratore al gas che attraversa il volume del rigeneratore  $V_r$ . E' necessario, inoltre, introdurre il concetto di temperature condizionali secondo il quale il gas entrante o uscente dagli spazi di lavoro assume la temperatura che vige a monte del flusso (cioè quella dello spazio di lavoro che il fluido ha appena abbandonato). Quindi nel caso in questione si avrà:

$$T_{ck} = \begin{cases} T_k & \text{se } dn_c > 0 \text{ (cioè il gas sta entrando nella camera di compressione)} \\ T_c & \text{se } dn_c < 0 \text{ (cioè il gas sta uscendo dalla camera di compressione)} \end{cases}$$

$$T_{he} = \begin{cases} T_h & \text{se } dn_e > 0 \text{ (cioè il gas sta entrando nella camera di espansione)} \\ T_e & \text{se } dn_e < 0 \text{ (cioè il gas sta uscendo dalla camera di espansione)} \end{cases}$$

mentre

$$T_{rh} = T_h$$

e

$$T_{kr} = T_k$$

Definiamo quelle che sono le moli di ciascuna cella di lavoro partendo da quelle che sono le moli che vengono trasferite da una cella di lavoro all'altra nell'interfaccia tra le due celle.

$$n_c = -n_{ck} \quad (4.75)$$

$$n_k = n_{ck} - n_{kr} \quad (4.76)$$

$$n_r = n_{kr} - n_{rh} \quad (4.77)$$

$$n_h = n_{rh} - n_{he} \quad (4.78)$$

$$n_e = n_{he} \quad (4.79)$$

dove con  $n_{ij}$  si intende il numero di moli di gas che passa dalla i-esima cella alla j-esima. Di conseguenza si possono ottenere quelle che sono le portate massiche attraverso le relazioni:

$$dn_c = -dn_{ck} \quad (4.80)$$

$$dn_k = dn_{ck} - dn_{kr} \quad (4.81)$$

$$dn_r = dn_{kr} - dn_{rh} \quad (4.82)$$

$$dn_h = dn_{rh} - dn_{he} \quad (4.83)$$

$$dn_e = dn_{he} \quad (4.84)$$

La legge di conservazione della massa è ovviamente ancora valida:

$$n = n_c + n_k + n_r + n_h + n_e \quad (4.85)$$

che in forma differenziale diventa:

$$dn = dn_c + dn_k + dn_r + dn_h + dn_e = 0 \quad (4.86)$$

questo significa che la massa del fluido di lavoro si mantiene costante nel motore ( la massa entrante in una cella è bilanciata dall'uscita di massa in un altro settore ). L'espressione della pressione rimane come per l'analisi isoterma la seguente:

$$p = \frac{nR}{\frac{V_e}{T_e} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_c}{T_c}} \quad (4.87)$$

Prendendo l'equazione di stato del gas:

$$pV = nRT \quad (4.88)$$

facendone il logaritmo si ottiene:

$$\ln(pV) = \ln(nRT) \quad (4.89)$$

applicando le proprietà dei logaritmi:

$$\ln(p) + \ln(V) = \ln(n) + \ln(R) + \ln(T) \quad (4.90)$$

e differenziando:

$$d \ln(p) + d \ln(V) = d \ln(n) + d \ln(R) + d \ln(T) \quad (4.91)$$

$$\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dn}{n} + \frac{dR}{R} + \frac{dT}{T} \quad (4.92)$$

infine essendo  $\frac{dR}{R} = 0$  per la i-esima cella si ottiene:

$$\frac{dp_i}{p_i} + \frac{dV_i}{V_i} = \frac{dn_i}{n_i} + \frac{dT_i}{T_i} \quad (4.93)$$

Per ogni cella in cui c'è scambio di calore (cioè  $i = k, h, r$  ), dato che i rispettivi volumi e le rispettive temperature sono costanti, la forma differenziale dell'equazione di stato dei gas ideali è:

$$\frac{dp_i}{p_i} = \frac{dn_i}{n_i} \quad (4.94)$$

$$dn_i = \frac{n_i}{p_i} dp_i = \frac{V_i}{R T_i} dp_i \quad (4.95)$$

Andando a sostituire le relazioni trovate per il riscaldatore, per il rigeneratore e per il raffreddatore nella (4.85) si ottiene:

$$dn_c + dn_e + \frac{V_k}{T_k R} dp + \frac{V_r}{T_r R} dp + \frac{V_h}{T_h R} dp = 0 \quad (4.96)$$

$$dn_c + dn_e + \frac{dp}{R} \left( \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} \right) = 0 \quad (4.97)$$

Si cerca ora eliminare i termini  $dn_c$  e  $dn_e$  in modo da ottenere un'implicita equazione di  $dp$ . Per far ciò, con riferimento alla fig., si scrivono le equazioni dell'energia per ognuna delle celle:

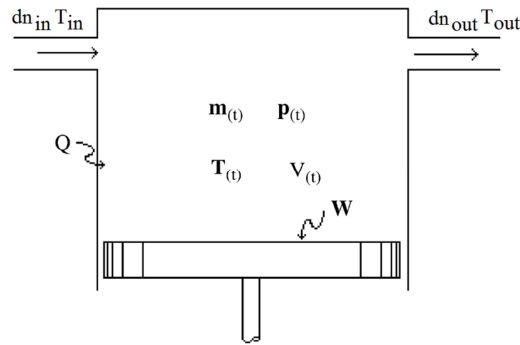


Fig. 4.6: rappresentazione schematica di una generica cella di lavoro del motore Stirling.

$$c_p dn_{in} T_{in} + dQ = dW + dU + c_p dn_{out} T_{out} \quad (4.98)$$

per la camera di compressione questa diventa:

$$c_p dn_c T_{ck} = dW + dU \quad (4.99)$$

essendo la compressione adiabatica  $dQ_k = 0$ .

Per il primo principio della termodinamica si può scrivere:

$$c_p dn_c T_{ck} = p dV + c_v d(n_c T_c) \quad (4.100)$$

sapendo che:

$$n_c T_c = \frac{p V_c}{R} \quad (4.101)$$

e differenziando:

$$d(n_c T_c) = \frac{d(p V_c)}{R} \quad (4.102)$$

$$= \frac{1}{R} (V_c dp + p dV_c) \quad (4.103)$$

Sostituendole nella (4.100) si ottiene:

$$c_p dn_c T_{ck} = p dV_c + \frac{1}{R} (V_c dp + p dV_c) \quad (4.104)$$

Introducendo ora le relazioni:

$$c_p = c_v + R \quad (4.105)$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \gamma \quad (4.106)$$

si può scrivere per prima cosa:

$$c_p dn_c T_{ck} = \frac{1}{R} (c_v V_c dp + c_p p dV_c) \quad (4.107)$$

e poi successivamente:

$$dn_c = \frac{p dV_c + \frac{V_c}{\gamma} dp}{R T_{ck}} \quad (4.108)$$

Lo stesso risultato può essere raggiunto anche per la cella di espansione partendo dal bilancio energetico:

$$c_p dn_e T_{he} = p dV + c_v d(n_e T_e) \quad (4.109)$$

Seguendo lo stesso procedimento si perviene infine a :

$$dn_e = \frac{p dV_e + \frac{V_e}{\gamma} dp}{R T_{he}} \quad (4.110)$$

A questo punto andando a sostituire le (4.108) (4.110) dentro alla (4.97) si ottiene:

$$\frac{p dV_c + \frac{V_c}{\gamma} dp}{R T_{ck}} + \frac{p dV_e + \frac{V_e}{\gamma} dp}{R T_{he}} + \frac{dp}{R} \left( \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} \right) = 0 \quad (4.111)$$

Attraverso alcuni passaggi:

$$\frac{p}{R T_{ck}} dV_c + \frac{V_c}{\gamma R T_{ck}} dp + \frac{1}{R} \left( \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} \right) dp + \frac{p}{R T_{he}} dV_e + \frac{V_e}{\gamma R T_{he}} dp = 0 \quad (4.112)$$

$$\left[ \frac{V_c}{\gamma R T_{ck}} + \frac{1}{R} \left( \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} \right) + \frac{V_e}{\gamma R T_{he}} \right] dp = - \frac{p}{R} \left( \frac{dV_c}{T_{ck}} + \frac{dV_e}{T_{he}} \right) \quad (4.113)$$

$$dp = \frac{- \frac{p}{R} \left( \frac{dV_c}{T_{ck}} + \frac{dV_e}{T_{he}} \right)}{\frac{V_c}{\gamma R T_{ck}} + \frac{1}{R} \left( \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} \right) + \frac{V_e}{\gamma R T_{he}}} \quad (4.114)$$

Raccogliendo e semplificando si arriva ad ottenere:

$$dp = -\gamma p \frac{\left( \frac{dV_c}{T_{ck}} + \frac{dV_e}{T_{he}} \right)}{\frac{V_c}{T_{ck}} + \gamma \left( \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} \right) + \frac{V_e}{T_{he}}} \quad (4.115)$$

Analizziamo ora gli scambiatori di calore: dalla (4.100) e dalla (4.109) si ottengono le equazioni per  $dT_c$  e  $dT_e$ :

$$dT_c = T_c \left( \frac{dp}{p} + \frac{dV_c}{V_c} - \frac{dn_c}{n_c} \right) \quad (4.116)$$

$$dT_e = T_e \left( \frac{dp}{p} + \frac{dV_e}{V_e} - \frac{dn_e}{n_e} \right) \quad (4.117)$$

Considerando ora le equazioni della conservazione dell'energia per le celle caratterizzate da scambiatori di calore ( $dW = 0$ ,  $T = \text{cost}$ ) e sostituendo le equazioni di stato trovate per le celle in cui hanno luogo gli scambi di calore la (4.98) diventa:

$$c_p dn_{in} T_{in} + dQ = c_v dn T + c_p dn_{out} T_{out} \quad (4.118)$$

$$c_p (dn_{in} T_{in} - dn_{out} T_{out}) + dQ = c_v dn T = V \frac{c_v}{R} dp \quad (4.119)$$

Si può fare questo ragionamento per le tre celle degli scambiatori di calore. Tenendo presente questi sono isotermi per le temperature condizionali valgono le relazioni (4.94) (4.95). Per il raffreddatore ( $T_{in} = T_{ck}$  e  $T_{out} = T_k$ ) si ha dunque che:

$$dQ_k = V_k \frac{c_v}{R} dp - c_p (T_{ck} dn_{ck} - T_k dn_{kr}) \quad (4.120)$$



Per il rigeneratore dove  $T_{kr} = T_k$  e  $T_{hr} = T_h$  si ricava:

$$dQ_r = V_r \frac{c_v}{R} dp - c_p(T_k dn_{kr} - T_h dn_{rh}) \quad (4.121)$$

Per il riscaldatore ( $T_{in} = T_{he}$  e  $T_{out} = T_h$ ):

$$dQ_h = V_h \frac{c_v}{R} dp - c_p(T_h dn_{rh} - T_{he} dn_{he}) \quad (4.122)$$

La variazione infinitesima del lavoro fatto nelle celle di espansione e di compressione è dato da:

$$dW = dW_e + dW_c \quad (4.123)$$

$$dW_c = p dV_c \quad (4.124)$$

$$dW_e = p dV_e \quad (4.125)$$

### 4.3.3 Metodi risolutivi

A causa della natura non lineare delle equazioni che descrivono il modello adiabatico (in particolare per quanto riguarda le temperature condizionali) si deve ricorrere ad una soluzione numerica. Per prima cosa, come fatto per l'analisi isoterma, si suppongono noti e sinusoidali gli andamenti di pistone e displacer e di conseguenza anche quello delle rispettive derivate. E', inoltre, ovviamente nota anche la geometria degli scambiatori di calore. La scelta del gas di lavoro specifica i parametri  $R$ ,  $c_p$ ,  $c_v$ , e  $\gamma$ . Le temperature di funzionamento  $T_k$  e  $T_h$  sono specificate, e quindi la temperatura logaritmica media del rigeneratore  $T_r$ . La massa del fluido di lavoro può essere nota oppure si può determinare in prima approssimazione in base a quella che si desidera essere la pressione media di lavoro. L'approccio che si può utilizzare è, dunque, quello di specificare la pressione media di esercizio e quindi utilizzare l'analisi isoterma per valutare  $m$ .

Si osserva che a parte i parametri costanti o conosciuti sopra citati, ci sono 22 variabili di cui 16 sono derivate. In letteratura si incontrano principalmente due approcci di risoluzione del sistema di equazioni. Il primo è quello indicato in [1], nel quale si propone di integrare l'equazione (4.115) ed una a scelta tra la (4.108) e la (4.110). Affinché poi tutte le incognite del problema siano completamente determinate si utilizzano l'equazione di continuità e l'equazione di stato dei gas ideali. Le condizioni iniziali da assegnare sono del tutto arbitrarie purché siano comunque dei valori il più possibile sensati e diversi da zero.

Il secondo metodo risolutivo lo si trova in [11] e prevede che si integrino sette equazioni differenziali. Tali equazioni sono le (4.116) (4.117) (4.120) (4.121) (4.122) (4.124) (4.125). Le condizioni iniziali che si consiglia assegnare al problema sono le seguenti:

$$T_c(0) = T_k$$

$$T_e(0) = T_h$$

$$Q_k(0) = 0$$

$$Q_r(0) = 0$$

$$Q_h(0) = 0$$

$$W_c(0) = 0$$

$$W_e(0) = 0$$

Entrambi i metodi comunque portano, come deve essere, agli stessi risultati. Il funzionamento a regime viene raggiunto dopo alcuni cicli di integrazione. L'esperienza ha dimostrato che la misura

più sensibile della convergenza del ciclo è il calore residuo del rigeneratore  $Q_r$  alla fine del ciclo, che dovrebbe essere pari a zero.

Una volta ottenuti gli andamenti in un ciclo delle grandezze incognite si può passare a calcolare le altre grandezze di importanza come:

- calore scambiato dal gas con il raffreddatore:

$$Q_k = \oint dQ_k \quad (4.126)$$

- calore scambiato dal gas con il riscaldatore:

$$Q_h = \oint dQ_h \quad (4.127)$$

- lavoro fatto dal gas nella camera di espansione:

$$W_e = \oint p dV_e \quad (4.128)$$

- lavoro fatto dal gas nella camera di compressione:

$$W_c = \oint p dV_c \quad (4.129)$$

- lavoro totale:

$$W = W_e + W_c \quad (4.130)$$

#### 4.3.4 Andamento della temperatura nelle camere di compressione ed espansione

Prendendo come esempio un generico motore Stirling che lavora tra le temperature  $T_h = 478 \text{ K}$  e  $T_k = 285 \text{ K}$  dalla simulazione si ottengono i seguenti andamenti della temperatura del fluido di lavoro nella camera di espansione e in quella di compressione.

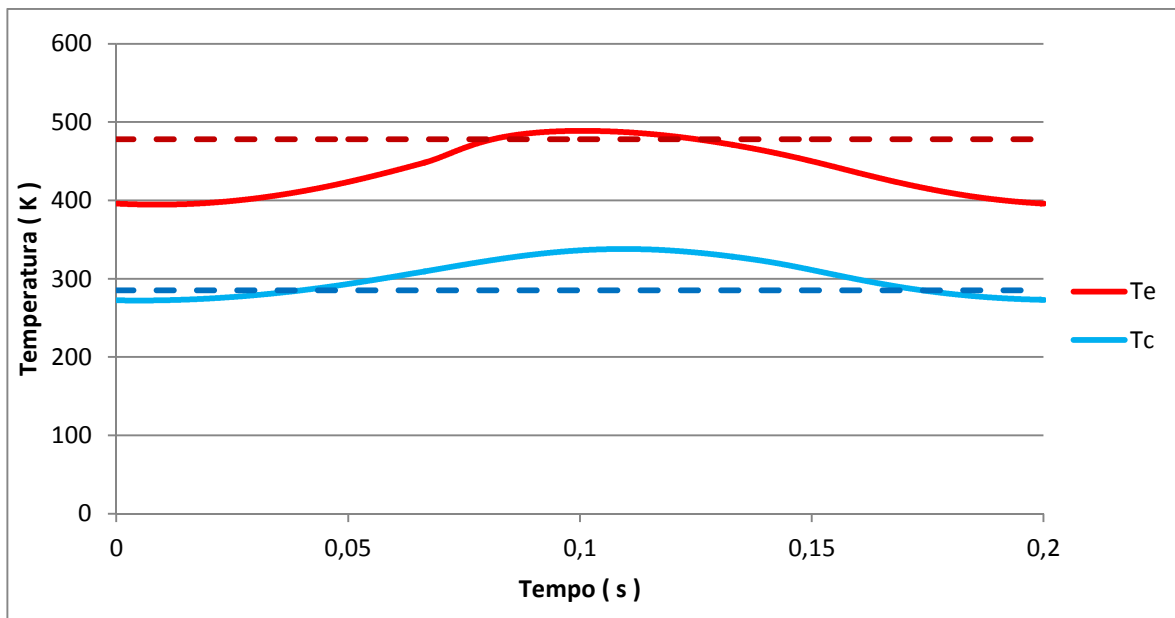


Fig. 4.7: andamento delle temperature nelle camere di espansione e di compressione.

E' interessante notare che la temperatura del gas nella camera di espansione può essere più elevata della temperatura delle pareti del riscaldatore e allo stesso modo quella del gas nella camera di compressione può essere inferiore a quella delle pareti del raffreddatore. Questo perché nella camera di espansione il fluido può venire surriscaldato a causa della compressione del volume della camera e in quella di compressione viene ulteriormente raffreddato dalla sua espansione.

## **Capitolo 5**

### ***Analisi disaccoppiata del motore Stirling***

#### **5.1 Introduzione**

Nei paragrafi successivi viene implementato un algoritmo iterativo per riprodurre un modello del secondo ordine ( o disaccoppiato ) che considera quelle che rappresentano le principali perdite della macchina. Questo approccio è largamente diffuso e utilizzato durante la fase di progettazione della macchina e fornisce, inoltre, una tecnica soddisfacente di simulazione. Il motore viene rappresentato da un insieme di blocchi separati tra loro ( da qui l'appellativo disaccoppiato ). Gli scambi di energia principali vengono determinati utilizzando l'analisi ideale isoterma o adiabatica. I valori ottenuti in uscita da queste tecniche vengono attenuati da una serie di perdite identificabili e presenti nel sistema. L'assunzione che si fa è che tutte queste quantità di energia siano additive. Nel caso delle portate massiche, queste vengono calcolate nell'ipotesi che non siano presenti all'interno della macchina le cadute di pressione. Le cadute di pressione vengono successivamente calcolate utilizzando quelle portate massiche. Questa tecnica è ragionevole finché le perdite di carico non sono troppo elevate. Come si vede, comunque, l'utilizzo dell'analisi disaccoppiata non implica una soluzione immediata del problema ma questa si ottiene solo dopo alcune iterazioni del ciclo. Questa analisi è utilizzata dai principali produttori di motori Stirling nei loro manuali: è velocemente implementabile ed il fatto che i vari effetti della macchina siano disaccoppiati permette facilmente di poter sostituire l'analisi termodinamica isoterma con quella adiabatica.

Sebbene l'analisi possa essere utilizzata per portare a determinate informazioni sulla macchina il suo primo obiettivo è quello di verificare le prestazioni della macchina ( o del progetto della macchina ) in termini di potenza in uscita e di efficienza energetica.

#### **5.2 Rigenerazione imperfetta**

Il rigeneratore si può considerare come uno scambiatore di calore in controcorrente. Tuttavia, a differenza degli scambiatori di calore convenzionali, non vi sono due distinti fluidi che lavorano come "flusso caldo" e "flusso freddo". Inoltre, il trasferimento di calore dal flusso caldo al materiale rigeneratore e poi dal materiale al flusso freddo non avvengono simultaneamente. Nel caso di perfetta rigenerazione quando il gas passa dal riscaldatore al raffreddatore cede una determinata quantità di calore che gli viene completamente restituita quando passa dal raffreddatore al riscaldatore. Quindi a regime in un ciclo il calore scambiato dal rigeneratore è pari a zero. In un rigeneratore reale, invece, durante la prima metà del ciclo, il flusso caldo ( cioè il fluido di lavoro proveniente dal riscaldatore ) entra nel rigeneratore a alta temperatura  $T_{h1}$ , e lo lascia a temperatura molto più bassa  $T_{h2}$ . Durante questo processo, la temperatura rigeneratore è leggermente inferiore alla temperatura della corrente calda. Quindi, il rigeneratore assorbe parte del calore e la immagazzina per la successiva metà del ciclo. Durante la seconda metà del ciclo, infatti, il flusso freddo ( cioè il fluido di lavoro proveniente dal raffreddatore ) entra nel rigeneratore a bassa

temperatura  $T_{k2}$ . La temperatura rigeneratore è leggermente più alto in questo caso, permettendo al materiale del rigeneratore di restituire la maggior parte del calore immagazzinato e quindi di aumentare la temperatura del fluido fino a  $T_{k1}$ . Quanto appena detto è rappresentato in figura 5.1.

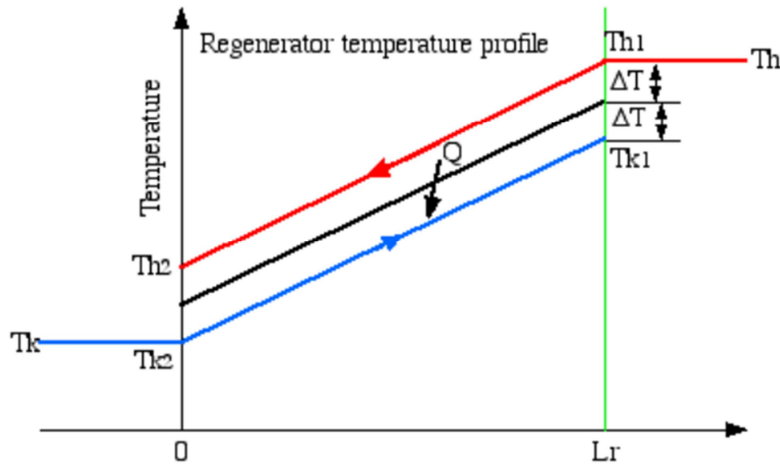


Fig. 5.1: profilo di temperatura del rigeneratore.

Si definisce efficienza del rigeneratore  $\varepsilon$  il rapporto tra la reale potenza termica trasferita dal rigeneratore al fluido e la potenza termica massima che sarebbe trasferibile da un rigeneratore di lunghezza infinita.

$$\varepsilon = \frac{\text{potenza termica reale trasferita dal rigeneratore}}{\text{potenza termica massima trasferibile}} \quad (5.1)$$

L'efficienza di un rigeneratore varia da 0 (nessun effetto rigenerativo) a 1 (rigeneratore ideale). Ora per un sistema con un rigeneratore non ideale, il gas di lavoro entra nel riscaldatore ad una temperatura leggermente più bassa di quella delle pareti dello scambiatore. Ciò si traduce in una quantità di calore in più che dovrà essere fornita esternamente dal riscaldatore per aumentare la temperatura del gas a. Tutto ciò può essere scritto quantitativamente come segue:

$$Q_h = Q_{hi} + Q_{ri}(1 - \varepsilon) \quad (5.2)$$

dove:  $Q_{hi}$  = quantità di calore scambiato nel ciclo ideale;  
 $Q_{ri}$  = quantità di calore coinvolta nella rigenerazione nel ciclo ideale.

Allo stesso modo quando il gas entra nel raffreddatore avrà una temperatura leggermente più alta rispetto a quella delle pareti dello scambiatore. Questo si traduce in una quantità di calore aggiuntiva che dovrà essere asportata. Tutto ciò può essere scritto quantitativamente come segue:

$$Q_k = Q_{ki} - Q_{ri}(1 - \varepsilon) \quad (5.3)$$

dove:  $Q_{ki}$  = quantità di calore scambiato nel ciclo ideale.

Il termine  $Q_{ri}(1 - \varepsilon)$  che rappresenta l'ulteriore aggravio termico a cui vengono sottoposti gli scambiatori.

Il rendimento di un ciclo ideale si ricorda è espresso come:

$$\eta_i = \frac{Q_{hi} + Q_{ki}}{Q_{hi}} \quad (5.4)$$

mentre per un ciclo con imperfetta rigenerazione questa diventa:

$$\eta = \frac{Q_h + Q_k}{Q_h} \quad (5.5)$$

dove andando a sostituire si ottiene:

$$\eta = \frac{\eta_i}{1 + \frac{Q_{ri}(1 - \varepsilon)}{Q_{hi}}} \quad (5.6)$$

Assumendo una differenza di temperatura tra il rigeneratore ed i flussi caldo e freddo costante ed un profilo di temperatura lineare ( come rappresentato in figura ) l'efficienza del rigeneratore può anche essere espressa in termini di temperatura nel seguente modo:

$$\varepsilon = \frac{T_{h1} - T_{h2}}{T_{h1} - T_{k2}} \quad (5.7)$$

Dalla figura si vede che:

$$2\Delta T = T_{h2} - T_{k2} \quad (5.8)$$

e sostituendo si ottiene che:

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \frac{2\Delta T}{T_{h1} - T_{h2}}} \quad (5.9)$$

Ora da considerazioni di bilancio energetico la variazione di energia interna del flusso caldo è pari al calore trasferito dal flusso stesso al rigeneratore. In termini di potenza termica si può scrivere:

$$\dot{Q} = c_p \dot{m}_{ave}(T_{h1} - T_{h2}) = h_r A_{wr} \Delta T \quad (5.10)$$

- dove:  $\dot{Q}$  = potenza termica trasferita dal fluido al rigeneratore;  
 $\dot{m}$  = portata massica media che attraversa il rigeneratore [ kg/s ];  
 $h_r$  = coefficiente di scambio termico del rigeneratore;  
 $A_{wr}$  = superficie di scambio termico del rigeneratore.

Non essendo possibile estrarre dai modelli visti la portata massica all'interno degli scambiatori ( e quindi anche del rigeneratore ) ed essendo, inoltre, anche leggermente variabile  $\dot{m}$  fa riferimento al valore medio su un periodo della media aritmetica tra portata massica in ingresso e la portata massica in uscita da uno scambiatore. Per esempio nel caso del rigeneratore in questione i flussi di massa in ingresso ed in uscita sono rappresentati in figura:

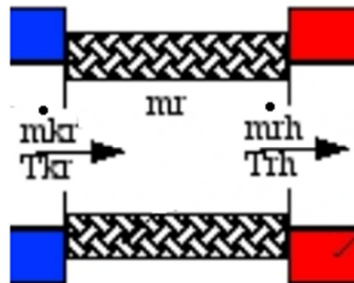


Fig. 5.2: portate massiche in ingresso ed in uscita dal rigeneratore.

- dove:  $\dot{m}_{kr}$  = portata massica in ingresso al rigeneratore;  
 $\dot{m}_{rh}$  = portata massica in uscita dal rigeneratore.

Queste portate si determinano rispettivamente come:

$$\dot{m}_{kr} = \frac{dm_{kr}}{dt} \quad (5.11)$$

$$\dot{m}_{rh} = \frac{dm_{rh}}{dt} \quad (5.12)$$

dove:  $A_r$  = sezione di ingresso del rigeneratore;

Infine:

$$\dot{m}_{ave} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \left( \frac{dm_{kr}}{dt} + \frac{dm_{rh}}{dt} \right) dt \quad (5.13)$$

Al fine di semplificare l'espressione dell'efficienza del rigeneratore si introduce la grandezza NTU ( *Numero di unità di trasporto* ) così definita:

$$NTU = \frac{h_r A_{wr}}{c_p \dot{m}} \quad (5.14)$$

E di conseguenza andando a sostituire:

$$\varepsilon = \frac{NTU}{2 + NTU} \quad (5.15)$$

Si noti che l'NTU è una caratteristica che dipende dalla geometria dello scambiatore oltre che dalle caratteristiche del gas di lavoro. Il carico aggiuntivo a cui sono sottoposti riscaldatore e raffreddatore a causa dell'inefficienza del rigeneratore si indica con  $Q_{rloss}$  e, come già visto è pari a:

$$Q_{rloss} = Q_{ri} ( 1 - \varepsilon ) \quad (5.16)$$

### 5.3 Perdite per conduzione

La conduzione è un altro meccanismo di perdita all'interno della macchina e viene discussa nel seguente paragrafo. Dato che i motori Stirling incorporano un lato caldo ( riscaldamento e lo spazio di espansione ) e un lato freddo ( raffreddatore e lo spazio di compressione ), ci sono possibilità di diretta conduzione di calore dal lato caldo verso il lato freddo. Come risultato di questo fenomeno si ha un aumento degli oneri termici sul riscaldatore che è chiamato a fornire una potenza termica aggiuntiva. Le perdite per conduzione nella loro forma più semplice sono calcolabili attraverso la relazione:

$$\dot{Q}_{cond} = \frac{k A}{L} \Delta T \quad (5.17)$$

dove:  $k$  = conducibilità del materiale nel quale avviene la conduzione del calore;

$L$  = lunghezza effettiva del percorso di conduzione;

$\Delta T$  = differenza di temperatura lungo il percorso di conduzione.

Poiché vi è una differenza di temperatura sostanziale tra spazio di espansione e spazio di compressione il displacer, che ha il compito di muovere il gas da una camera all'altra, se non progettato correttamente può fornire un ottimo percorso di conduzione per le perdite. Anche il rigeneratore è soggetto alla stessa differenza di temperatura ma avendo, nella maggior parte dei casi, un'area di conduzione relativamente piccola le perdite possono considerarsi trascurabili rispetto a quelle che si hanno nel displacer. Le perdite di conduzione nel displacer sono quindi:

$$\dot{Q}_{cond} = \frac{k A}{L} (T_h - T_k) \quad (5.18)$$

## 5.4 Perdite di carico

Finora è stato assunto che in ogni istante la pressione sia costante in ogni camera del motore. Tuttavia troviamo che i flussi di calore che avvengono negli scambiatori di calore richiedono una grande superficie di scambio termico tra il gas e lo scambiatore in questione. Questo requisito, assieme alla necessità contrastanti di un volume dello scambiatore a vuoto molto basso si traduce in scambiatori di calore con molti passaggi di piccolo diametro ed in parallelo. L'attrito viscoso associato al flusso attraverso gli scambiatori di calore infatti provocherà una caduta di pressione in tutti gli scambiatori di calore con l'effetto di ridurre la potenza del motore. Questo fenomeno è denominato *perdita di pompaggio* o perdita di carico. Si cercherà in questa sezione di quantificare questa perdita di potenza. Per prima cosa si dovrà valutare la caduta di pressione in tutti e tre gli scambiatori di calore rispetto alla pressione nella camera di compressione. Successivamente possiamo determinare il nuovo valore del lavoro svolto, integrando tutto il ciclo, come segue:

$$\begin{aligned} W &= W_e + W_c \\ &= \oint p dV_c + \oint (p - \Sigma \Delta p) dV_e \\ &= \oint p (dV_c + dV_e) - \oint \Sigma \Delta p dV_e \end{aligned} \quad (5.19)$$

dove la sommatoria è estesa ai tre scambiatori di calore ( riscaldatore, rigeneratore e raffreddatore).Quindi:

$$W = W_i - \Delta W \quad (5.20)$$

dove:  $W_i$  = lavoro ideale svolto in un ciclo;  
 $\Delta W$  = perdite di carico o perdite di pompaggio in un ciclo.

pertanto:

$$\Delta W = \oint \Sigma \Delta p dV_e \quad (5.21)$$

La perdita di carico  $\Delta p$  è dovuta all'attrito del fluido che scorre attraverso lo scambiatore di calore. Il modello assume l'ipotesi di moto unidimensionale del fluido. Tuttavia, i concetti fondamentali di attrito viscoso paradossalmente crollano sotto questa ipotesi. La legge di Newton per la viscosità afferma infatti che lo sforzo di taglio tra strati adiacenti di fluido è proporzionale alla viscosità ed al gradiente di velocità normale alla direzione del flusso di questi livelli, come mostrato:

$$\tau = -\mu \frac{du}{dz} \quad (5.22)$$

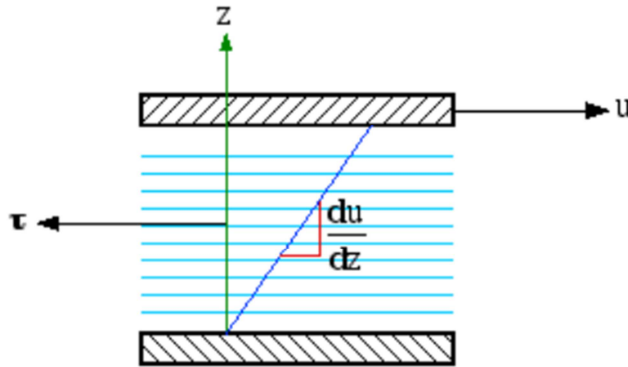


Fig. 5.3: sforzo di taglio tra due strati di fluido adiacenti.

Dall'equazione si vede che un fluido newtoniano non può sostenere un sforzo di taglio a meno che il flusso non sia bidimensionale. Questo paradosso viene superato, affermando che il flusso non è strettamente unidimensionale, ma piuttosto rappresentato dalla sua portata media. La viscosità dinamica  $\mu$  è sostanzialmente una misura della frizione interna che si verifica quando le molecole del fluido in uno strato collidono con le molecole di strati adiacenti che viaggiano a diverse velocità. Si può ritenere che la viscosità dinamica sia indipendente dalla pressione ma che sia in minima parte dipendente dalla temperatura. La sua dipendenza dalla temperatura per i gas di interesse si ottiene dalla figura sottostante:

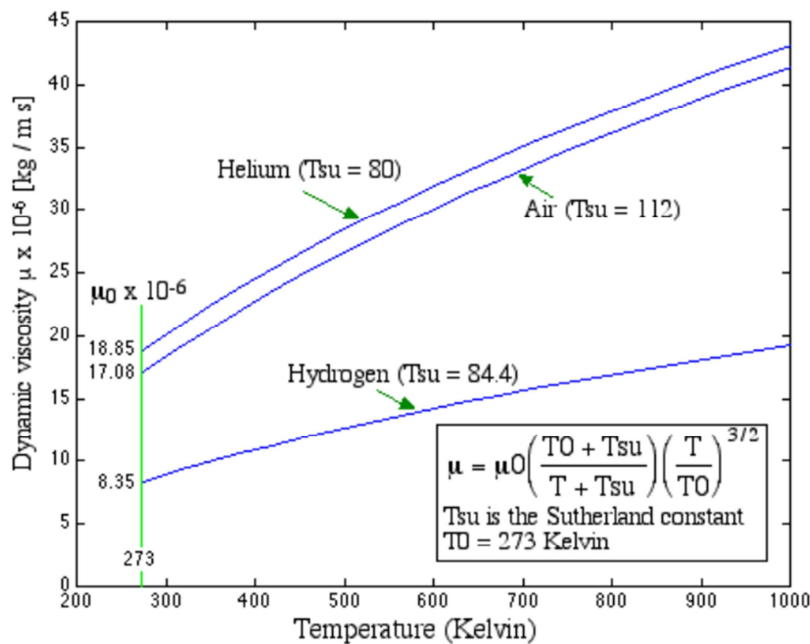


Fig. 5.4: variazione della viscosità con la temperatura dei principali gas utilizzati nei motori Stirling.

La forza d'attrito è legata allo sforzo tensionale di taglio attraverso la formula:

$$F = \tau A_w \tag{5.23}$$

dove:  $A_w$  = superficie di scambio termico tra fluido e scambiatore di calore.

Nella ricerca delle espressioni di lavoro per descrivere la perdita di pompaggio è necessario introdurre il concetto di *diametro idraulico*  $D_h$ , che descrive il rapporto tra le due variabili importanti di uno scambiatore di calore: il volume  $V$  e la superficie di scambio termico  $A_w$ :



$$D_h = 4 \frac{V}{A_w} \quad (5.24)$$

Il fattore 4 è incluso per comodità. Nel caso particolare di flusso in un tubo circolare (o un fascio omogeneo di tubi circolari) il diametro idraulico diventa così uguale al diametro del tubo interno. Sostituendo:

$$F = \frac{4 \tau V}{D_h} \quad (5.25)$$

Si passa ora a definire un coefficiente di attrito  $C_f$  come segue:

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho u^2} \quad (5.26)$$

dove:  $\rho$  = densità del fluido;  
 $u$  = la velocità del fluido.

Così sostituendo  $\tau$  nell'equazione forza si ottiene la forza in termini di coefficiente di attrito:

$$F = \frac{2 C_f \rho u^2 V}{D_h} \quad (5.27)$$

Sotto l'ipotesi di flusso quasi - stazionario (cioè senza forze di accelerazione o decelerazione) la forza di attrito è uguale ed opposte alla forza di caduta di pressione, in questo modo:

$$F = -\Delta p A \quad (5.28)$$

dove:  $A$  = area della sezione trasversale dello scambiatore.

Sostituendo, la perdita di carico  $\Delta p$  è dato da:

$$\Delta p = -\frac{2 C_f \rho u^2 V}{A D_h} \quad (5.29)$$

Si deve ora tenere in considerazione che  $\Delta p$  può essere positivo o negativo, a seconda della direzione del flusso. Tuttavia il secondo termine di questa equazione è sempre positivo, e quindi l'equazione viola il principio di conservazione della quantità di moto in caso di inversione del flusso. Infatti, ci si aspetta che la caduta di pressione cambi di segno una volta che il flusso del fluido inverte il verso del moto. Per risolvere questo ulteriore paradosso si definisce un *Coefficiente di attrito Reynolds* ( $C_{ref}$ ) moltiplicando il numero di Reynolds per il coefficiente di attrito come segue:

$$C_{ref} = Re C_f \quad (5.30)$$

Il numero di Reynolds è una quantità adimensionale che riunisce le caratteristiche del flusso del gas, della geometria dello scambiatore e delle proprietà del fluido. Si può definire come:

$$Re = \frac{\rho u_{ave} D_h}{\mu} \quad (5.31)$$

dove:  $\rho$  = densità del fluido;  
 $u$  = velocità media del fluido;  
 $D_h$  = diametro idraulico del condotto attraversato dal fluido;  
 $\mu$  = viscosità dinamica del fluido di lavoro.

Ai fini del calcolo del numero di Reynolds si utilizza la velocità media. Si deve specificare però che la velocità media si ottiene considerando istante per istante la velocità in valore assoluto anche se essa diventerebbe negativa in quanto il flusso di gas si inverte. Inoltre, come per quanto visto nel paragrafo trattante l'imperfetta rigenerazione, non si dispone della velocità istantanea del gas di lavoro ma solamente dei flussi di massa che passano da una cella di lavoro ad un'altra. Sapendo che la portata massica in uscita dalla cella  $i$ -esima e in ingresso in quella  $j$ -esima è pari a:

$$\dot{m}_{ij} = \frac{dm_{ij}}{dt} = \rho u_{ij} A_i \quad (5.32)$$

dove:  $A_{ij}$  = sezione di ingresso della  $i$ -esima cella.

Si può pertanto ricavare:

$$\rho u_{ij} = \frac{\dot{m}_{ij}}{A_i} \quad (5.33)$$

Analogamente a quanto fatto per il rigeneratore istante per istante si calcolerà la media aritmetica tra la portata massica in ingresso e quella in uscita dalla stessa cella così da calcolarne poi il valore medio su un periodo:

$$\dot{m}_{ave} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\dot{m}_{ij} + \dot{m}_{jk}}{2} dt \quad (5.34)$$

e poi in seguito sostituirlo nella (5.31) così da ottenere:

$$Re = \frac{D_h \dot{m}_{ave}}{\mu A_i} \quad (5.35)$$

Il numero di Reynolds è sempre positivo, indipendentemente dalla direzione del flusso. Così infine:

$$\Delta p = - \frac{2 C_{ref} \mu u V}{A D_h^2} \quad (5.36)$$

Questa equazione soddisfa il principio di conservazione della quantità di moto sia per flusso positivo che per quello negativo, dal momento che il segno della  $\Delta p$  è sempre correttamente legato al segno della velocità  $u$ .

Il coefficiente di attrito di Reynolds è reperibile da grafici o tabelle ma sapendo che il moto del flusso si mantiene laminare negli scambiatori e diventa turbolento nelle camere di compressione ed espansione si può prendere direttamente  $C_{ref}$  pari a 24 come consigliato in [11]. Anche in questo caso però si deve tener conto che la velocità del fluido non è nota ma deve essere ricavata da:

$$u = \frac{\dot{m}}{\rho A} \quad (5.37)$$

dove  $\dot{m}$  anche in questo caso è la media aritmetica istantanea tra la portata massica in ingresso e quella in uscita dalla stessa cella. Il valore della densità del gas in una generica cella, inoltre, non è costante ma varia in quanto pressione e temperatura variano. Può venire però facilmente calcolato come:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (5.38)$$

dove:  $m$  = massa del gas contenuto nella cella;  
 $V$  = volume della cella in questione.

Andando a sostituire si ottiene:

$$u = \frac{\dot{m} V}{m A} \quad (5.39)$$

Sostituendo nella (5.36) si arriva a :

$$\Delta p = - \frac{2 C_{ref} \mu \dot{m} V^2}{m A^2 D_h^2} \quad (5.40)$$

Sapendo che le perdite di carico sono calcolate negli scambiatori di calore che per ipotesi hanno volume costante si ha che:

$$\frac{V}{A} = L \quad (5.41)$$

dove:  $L$  = lunghezza dello scambiatore.

Infine, si ha quindi:

$$\Delta p = - \frac{2 C_{ref} \mu \dot{m} L^2}{m D_h^2} \quad (5.42)$$

In alternativa una stima valida delle perdite di carico può essere fatta partendo dalla valutazione di quello che è il volume “spazzato” della macchina. Tale parametro rappresenta il volume che viene occupato dal movimento del pistone e del displacer. Per intuire meglio di cosa si tratta basta prendere in considerazione una generica macchina di Stirling le cui camere di espansione e compressione varino sinusoidalmente con le relazioni:

$$\begin{aligned} V_c(t) &= A_p [x_p(t) + x_{p0}] \\ &= V_p(t) + V_{p0} \end{aligned} \quad (5.43)$$

dove:  $A_p$  = area del pistone;  
 $x_p(t)$  = variazione temporale del moto del pistone;  
 $x_{p0}$  = distanza media di oscillazione del pistone;

$$\begin{aligned} V_e(t) &= A_d [x_d(t) + x_{d0}] \\ &= V_d(t) + V_{d0} \end{aligned} \quad (5.44)$$

dove:  $A_p$  = area del displacer;  
 $x_p(t)$  = variazione temporale del moto del displacer;  
 $x_{p0}$  = distanza media di oscillazione del pistone;

Nell'esempio riportato il volume spazzato della macchina è pertanto:

$$V_{sw}(t) = V_p(t) + V_d(t) = A_p x_p(t) + A_d x_d(t) \quad (5.45)$$

Una volta noto  $V_{sw}$  si può stimare la velocità del fluido di lavoro all'interno della macchina, assumendo che questa si mantenga costante nel passare attraverso raffreddatore rigeneratore e riscaldatore, attraverso la formula suggerita in [12] :

$$u(t) = \frac{\omega V_{sw}(t)}{A} \quad (5.46)$$

e andando a sostituire nella (5.36) si può determinare la caduta di pressione per ogni singolo scambiatore di calore:

$$\Delta p(t) = -\frac{2 C_{ref} \mu V \omega V_{sw}(t)}{A^2 D_h^2} \quad (5.47)$$

Di seguito si riporta in grafico un confronto tra i risultati ottenuti attraverso le simulazioni effettuate con le due metodologie di calcolo.

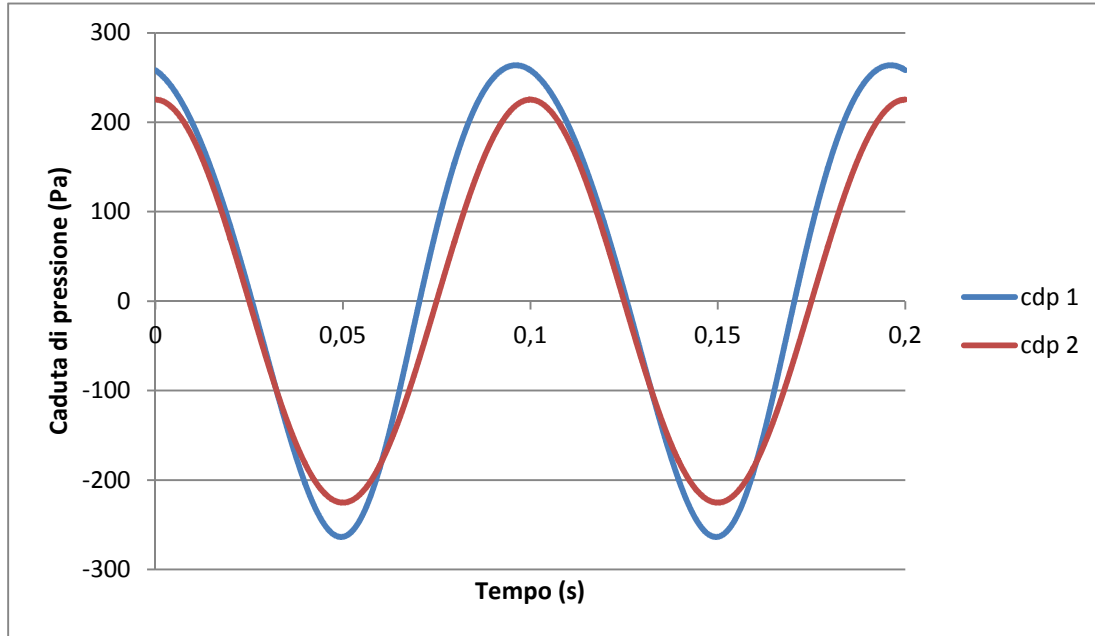


Fig. 5.5: andamento della caduta di pressione negli scambiatori calcolato utilizzando le portate massiche (cdp 1) e il volume spazzato (cdp 2)

Si può evidentemente notare un certo scostamento tra i due risultati. Ciò però non preclude l'utilizzo del primo metodo a discapito del secondo in quanto quest'ultimo viene largamente applicato in modellizzazioni di un motore Stirling accoppiato ad un generatore lineare che prevedono la linearizzazione delle equazioni del moto [13]. In questi casi la soluzione in questione fornisce gli strumenti per esprimere la caduta di pressione in funzione di quelle che sono le incognite del problema, cioè il movimento di pistone e displacer.

### 5.5 Limiti di prestazione degli scambiatori

Come visto sia il modello isoterma che quello adiabatico considerano gli scambi di calore isotermi. Tali scambi dipendono da vari fattori tra cui si può citare la frequenza di lavoro e la superficie che lo scambiatore mette a disposizione per il trasferimento di calore con il gas. Per tenere conto dell'effetto che hanno si può fare riferimento al profilo di temperatura di seguito riportato.

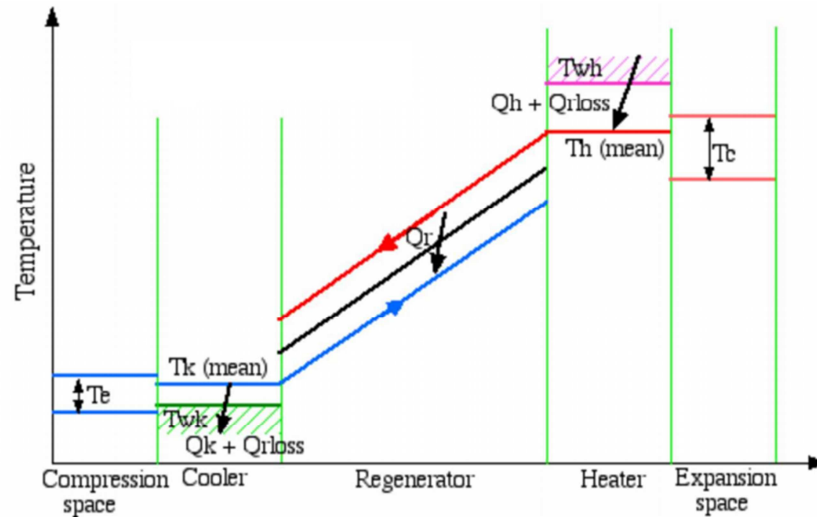


Fig. 5.6: profilo di temperatura nel motore Stirling.

Dal diagramma si osserva infatti che la non idealità degli scambiatori di calore influenza la temperatura media effettiva del gas all'interno degli stessi. Infatti, per quanto riguarda il gas contenuto all'interno del riscaldatore tale temperatura ( $T_h$ ) risulta essere leggermente inferiore rispetto a quella delle pareti del riscaldatore stesso ( $T_{wh}$ ). Viceversa il gas contenuto nel raffreddatore ha una temperatura media ( $T_k$ ) leggermente superiore rispetto a quella delle pareti del raffreddatore ( $T_{wk}$ ). Ciò comporta dei non trascurabili effetti su quelle che sono le prestazioni della macchina in quanto effettivamente andrà a lavorare tra due valori di temperatura la cui differenza è minore rispetto a quella che si ha tra gli scambiatori. Attraverso un metodo iterativo si possono determinare sia  $T_h$  che  $T_k$ . In primo luogo si considera lo scambio convettivo che avviene all'interno degli scambiatori attraverso la relazione:

$$dQ = h A_w (T_w - T) dt \quad (5.48)$$

che può essere riscritta nel seguente modo:

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = h A_w (T_w - T) \quad (5.49)$$

dove:  $\dot{Q}$  = potenza termica totale trasferita dallo scambiatore al fluido di lavoro ( include anche le perdite per rigenerazione imperfetta);

$A_w$  = superficie di scambio termico;

$T_w$  = temperatura delle pareti dello scambiatore;

$T$  = temperatura del gas nello scambiatore.

Al fine di riportare le unità dell'equazione (5.49) al calore netto trasferito in un ciclo si dividono entrambi i membri per la frequenza di lavoro  $f$  ottenendo :

$$Q = \frac{h A_w (T_w - T)}{f} \quad (5.50)$$

Rispettivamente per il riscaldatore e per il raffreddatore questa si può riscrivere come:

$$Q_h + Q_{r loss} = \frac{h_h A_{wh} (T_{wh} - T_h)}{f} \quad (5.51)$$

$$Q_k - Q_{r loss} = \frac{h_k A_{wk} (T_{wk} - T_k)}{f} \quad (5.52)$$

$Q_h$  e  $Q_k$  sono direttamente determinabili dall'analisi ideale ( isoterma o adiabatica ). Dunque si possono perciò riscrivere tali equazioni al fine di determinare i valori delle temperature  $T_h$  e  $T_k$  :

$$T_h = T_{wh} - \frac{f ( Q_h + Q_{r loss} )}{h_h A_{wh}} \quad (5.53)$$

$$T_k = T_{wk} - \frac{f ( Q_k - Q_{r loss} )}{h_k A_{wk}} \quad (5.54)$$

Dopo di che si procederà con una nuova iterazione dell'analisi ideale ( adiabatica o isoterma ) con le temperature appena ottenute sostituite all'interno del ciclo. Al termine sono disponibili altri valori di  $Q_h$  e  $Q_k$  con i quali si calcoleranno nuovamente le temperature medie effettive del gas all'interno dello scambiatore. Questo procedimento si ripete finché non si ha la convergenza. Cioè finché lo scarto tra i risultati di un'iterazione e di quella precedente non è inferiore ad una specificata tolleranza. Tutto ciò è riassumibile dallo schema a blocchi riportato di seguito.

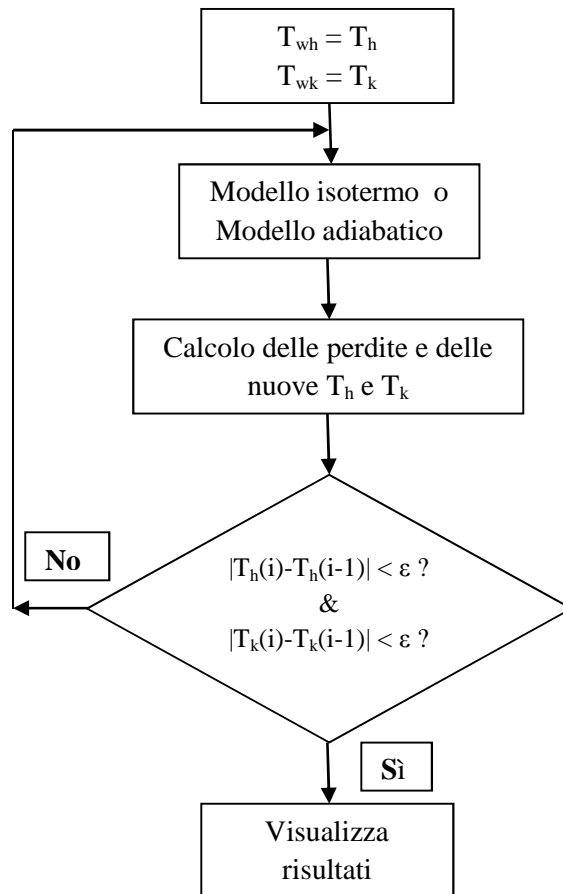


Fig. 5.7: schema a blocchi riassuntivo.

dove:  $\epsilon$  = tolleranza accettabile, scelta dall'operatore.

## 5.6 Coefficienti di scambio termico

I coefficienti di scambio termico convettivo sono generalmente determinati sperimentalmente in base anche alla geometria dello scambiatore. In prima approssimazione, considerando quanto suggerito in [14], si possono ricavare attraverso la seguente relazione:

$$h = \frac{C_{ref} k}{2D_h} \quad (5.55)$$

dove:  $C_{ref}$  = coefficiente di attrito di Reynolds;  
 $k$  = conducibilità termica del fluido;  
 $D_h$  = diametro idraulico dello scambiatore.

Dalla bibliografia possiamo utilizzare la relazione:

$$C_{ref} = 0,0791 (Re)^{0,75} \quad (5.56)$$

dove:  $Re$  = numero di Reynolds.

## 5.7 Confronto con dati sperimentali

Al fine di valutare l'attendibilità dei modelli finora illustrati i risultati vengono confrontati con i dati sperimentali di un prototipo realizzato da un'università californiana[12].

I dati relativi al primo prototipo sono i seguenti:

corsa del pistone:	11 cm
corsa del displacer:	15 cm
diametro del displacer:	10 cm
diametro del pistone:	10 cm
volume riscaldatore:	210 cm <sup>3</sup>
volume rigeneratore:	260 cm <sup>3</sup>
volume raffreddatore:	210 cm <sup>3</sup>
superficie di scambio riscaldatore:	0.35 m <sup>2</sup>
superficie di scambio rigeneratore:	1.9 m <sup>2</sup>
superficie di scambio raffreddatore:	0.37 m <sup>2</sup>
sezione trasversale riscaldatore:	0.0071 m <sup>2</sup>
sezione trasversale rigeneratore:	0.0065 m <sup>2</sup>
sezione trasversale raffreddatore:	0.0059 m <sup>2</sup>
frequenza di funzionamento:	3 Hz
temperatura riscaldatore:	478 K
temperatura raffreddatore:	285 K

Vengono riportati di seguito i risultati ottenuti con i vari modelli implementati. Inoltre vengono riportati i diagrammi pV del ciclo reale e di quello risultante dalle simulazioni.

Modello	Lavoro (J)	Calore trasmesso dal riscaldatore al fluido (J)	Calore ceduto dal fluido al raffreddatore (J)	Pressione media (MPa)	Rendimento (%)
Isoterma ideale	7.83	19.57	11.75	0.105	40
Isoterma con effetti degli scambiatori	6.88	40.04	13.66	0.105	16
Isoterma con cadute di pressione	6.22	40.38	13.56	0.105	14.5
Isoterma con effetti della conduzione interna	6.22	40.38	13.56	0.105	14.5
Dati sperimentali	5.3	56.38 (*)		0.103	9.4

Tabella 5.1: risultati simulazioni.

(\*) Il costruttore fornisce il dato dell'efficienza complessiva della macchina. Quindi il valore riportato nella casella corrisponde al valore del calore assorbito dalla macchina nel complesso. Tiene conto, quindi, anche delle perdite per convezione che la macchina ha verso l'ambiente esterno e le perdite per conduzione che si hanno tra il riscaldatore ed il raffreddatore e che sono state accennate nel capitolo 1.

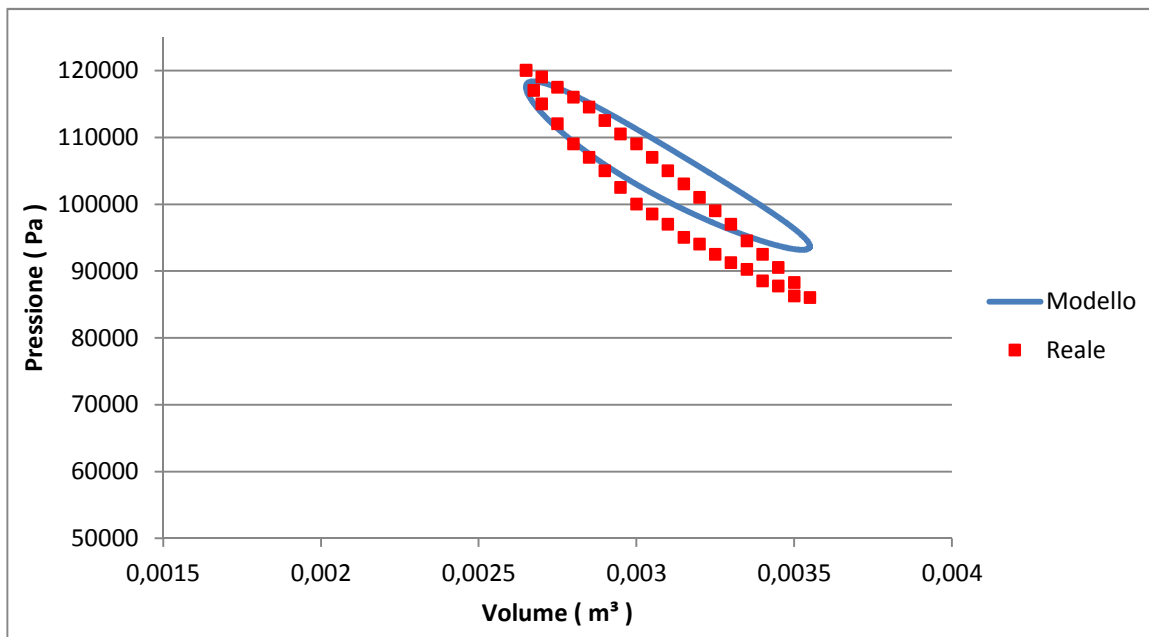


Fig. 5.8: diagramma pV.

Dalla tabella si vede che con quanto realizzato ci si discosta di circa il 17 % dalle prestazioni reali. Le altre perdite che non sono state prese in considerazione, ma che influiscono sul lavoro meccanico in uscita dalla macchina, sono le perdite per isteresi del gas. Queste perdite possono essere modellizzate come un coefficiente di attrito viscoso aggiuntivo qualora si riuscisse a realizzare il modello cinematico del motore nel suo complesso. Inoltre, si osserva che nel caso considerato le



perdite per conduzione sono praticamente ininfluenti in quanto il displacer è stato realizzato in politetrafluoroetilene.

Nel diagramma si nota uno scostamento per quanto riguarda il valore minimo della pressione raggiunta nel ciclo. Questo significa che rimane uno scostamento sensibile di temperatura tra il fluido di lavoro e le pareti del raffreddatore. Si potrebbe correggere questo aspetto andando ad aumentare il coefficiente di scambio termico dal lato del raffreddatore. Aumenterebbe così la sua efficienza di scambio termico e la temperatura del fluido di lavoro raggiungerebbe un valore più prossimo a quello delle pareti dello scambiatore ottenendo così quanto riportato in figura 5.9.

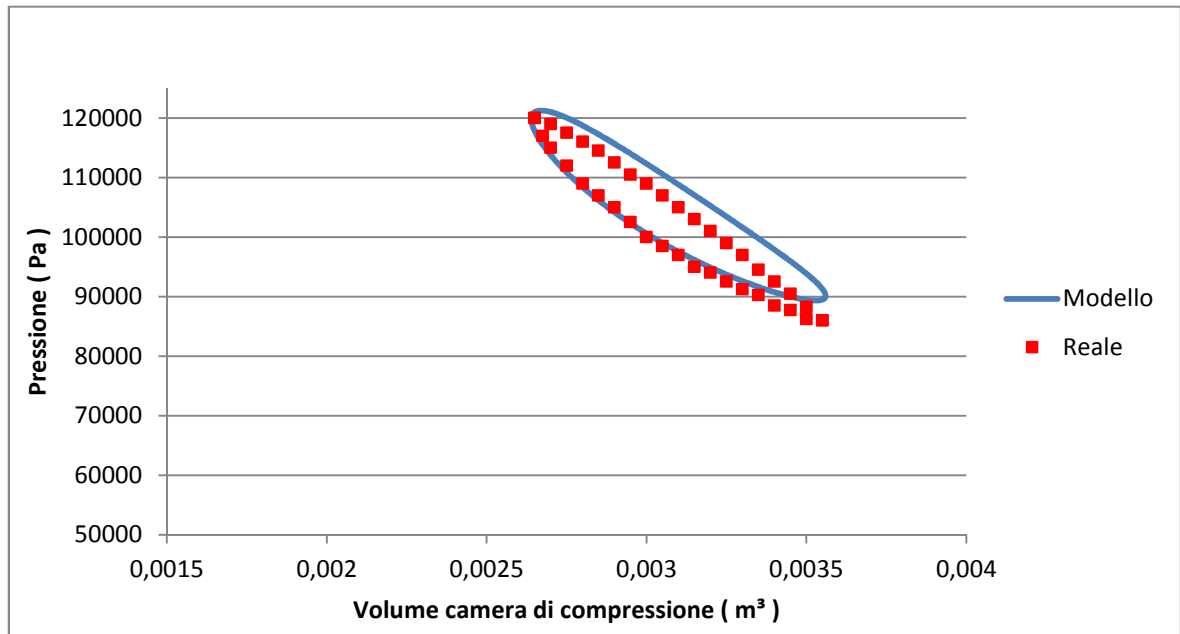


Fig. 5.9: diagramma pV.

Questo però porta ad un ulteriore scostamento tra il lavoro fatto realmente dal motore e quello calcolato nella simulazione.

Per il resto il modello creato può ritenersi accettabile. In primo luogo perché se si fosse in condizioni di progettazione il modello fornirebbe uno strumento che in prima approssimazione riproduce, senza conoscere nello specifico la geometria degli scambiatori, il comportamento della macchina.

In secondo luogo, in fase di verifica può essere da riferimento per i dati sperimentali che ci si attende dal motore.



## Capitolo 6

### *Modello cinematico di un motore Stirling free-piston*

#### **6.1 Introduzione**

Nel presente capitolo viene impostato un percorso d'analisi per un sistema formato da un motore Stirling free-piston ed un generatore elettrico lineare. L'assenza del manovellismo rende lo studio del funzionamento di una macchina in configurazione free-piston più complesso rispetto al caso di una macchina di Stirling dotata di manovellismo. Infatti, in questo ultimo caso l'analisi e il calcolo delle prestazioni della macchina può essere effettuato svincolando l'analisi della dinamica della macchina dalla termodinamica. Considerando ad esempio una configurazione alfa: una volta stabilito l'angolo di sfasamento tra i il moto reciproco dei due pistoni la dinamica della macchina, o meglio dei pistoni, risulta ben definita e assai poco influenzata dagli effetti termodinamici. Nel caso di una macchina free-piston la dinamica della macchina è influenzata dalla termodinamica e soprattutto dall'andamento della pressione. La termodinamica a sua volta è strettamente influenzata dalla dinamica delle masse che stabilisce la legge di variazione dei volumi. Pertanto la dinamica e la termodinamica sono strettamente legate e ciò richiede uno studio simultaneo dei due fenomeni.

Come osservato nel capitolo 2, non sono molti i motivi che possono spingere un progettista all'uso di un generatore lineare anziché rotante, tuttavia tale scelta si rivela essere la migliore quando si ha l'esigenza di contenere gli ingombri e non si hanno grandi potenze in gioco. Pertanto, le probabilità di futura diffusione di questo genere di sistema sembrano essere maggiori nel campo domestico. In precedenza si è infatti accennato a unità di microgenerazione inserite all'interno di caldaie. La tipologia di motore che sembra essere più adatta in quest'ambito di applicazione è la beta: come essa, infatti, non presenta alcuni svantaggi che penalizzano le altre tipologie, e si rivela essere poi la configurazione più compatta.

Nel capitolo 1 è stato analizzato il funzionamento del motore Stirling free-piston a partire dal ciclo ideale. Si è visto come un flusso di energia termica continuo e costante può essere trasformato in un moto alternativo mediante l'utilizzo di elementi meccanici capaci di accumulare e rilasciare ciclicamente quantitativi di energia ( volano o molla ). Sempre nello stesso capitolo sono state esaminate le cause che rendono il ciclo Stirling ideale contemporaneamente irrealizzabile e diverso dal ciclo reale, affrontando però in maniera piuttosto sommaria degli aspetti meccanici della questione. Nel presente capitolo si analizzano in maniera più dettagliata le forze in gioco, gli aspetti meccanici e cinematici del sistema; in secondo luogo si fa un cenno alla caratterizzazione del funzionamento del generatore elettrico lineare, così da poter avere una visione d'insieme del sistema. Per gli scambi termici dai quali traggono origine le forze si rimanda all'analisi fatta nel capitolo 3. Infine, è necessario specificare che la finalità del lavoro svolto dall'autore in questo capitolo non è quella di riprodurre il comportamento di un motore Stirling a partire dai dati di progetto, ma quello di realizzare un modello che riproduce con un algoritmo efficiente il comportamento di un motore Stirling esistente da delle prove sperimentali in determinate condizioni di esercizio. Algoritmo che può essere poi utilizzato per simularne il comportamento in

condizioni più generali. In questo modo si può prevedere il comportamento dell'azionamento completo nel suo complesso senza entrare nel dettaglio di come è stato o viene realizzato ciascun componente.

## 6.2 Equazione del modello cinematico

In linea di principio il motore Stirling che si va ad analizzare, al fine di estrarne il modello matematico, è schematizzato in figura:

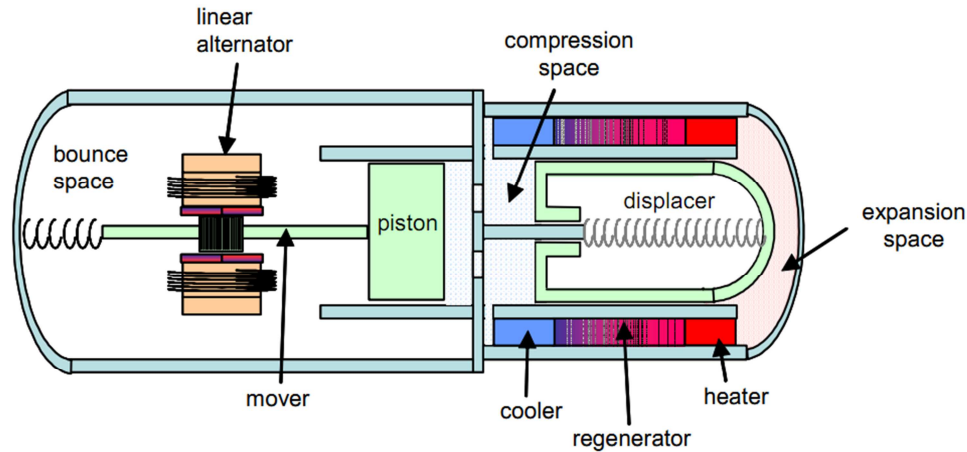


Fig. 6.1: rappresentazione grafica di uno Stirling free-piston beta accoppiato ad un generatore di tipo lineare

Dal punto di vista meccanico, il motore Stirling è un sistema apparentemente semplice: esso è costituito da due organi mobili, il displacer e il pistone, i quali, sollecitati da forze variabili nel tempo con frequenza opportuna, realizzano ognuno un'oscillazione d'ampiezza e frequenza costanti. Ognuno di essi rappresenta, insieme ad una molla (meccanica o a gas), quello che in fisica prende il nome di sistema risonante meccanico. Per ricavare l'equazione della dinamica del pistone (che rappresenta la parte di principale interesse in quanto è il pistone che interagisce con il traslocatore sul quale è posizionato il generatore lineare) si devono considerare le varie forze che agiscono nel sistema. Queste sono visibili nella figura 6.2 :

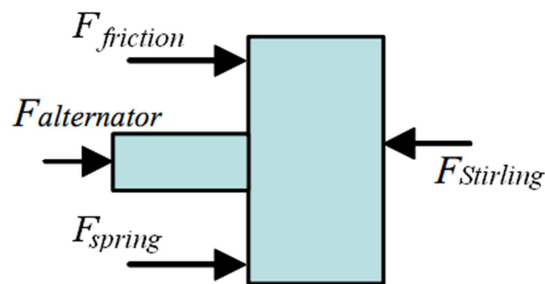


Fig. 6.2: forze agenti sul pistone

### 6.2.1 Azione del motore

La prima forza da considerare è quella che viene esplicitata dal motore Stirling. Come già detto nell'introduzione di questo capitolo, in questo tipo di macchina la dinamica e la termodinamica sono strettamente legate. Ciò richiede uno studio simultaneo dei due fenomeni. Proprio per questo, attraverso l'utilizzo di Simulink non vi è stata la possibilità di allacciare ad uno dei modelli visti nel capitolo 4 una determinazione cinematica del moto di pistone e displacer. Infatti, entrambi i

modelli riportati presentano come grandezze impresse del sistema i movimenti dei pistoni. Una volta che questi ultimi venissero tolti e sostituiti con una loro determinazione dinamica ( cioè derivante dalla soluzione di ulteriori equazioni differenziali ) il sistema diventerebbe un sistema di tipo armonico smorzato in oscillazione libera. Conseguentemente si avrebbe perciò un decremento esponenziale dell'ampiezza del moto dei pistoni fino all'arresto degli stessi. Inoltre, per quanto visto in [15], la realizzazione al Simulink di un modello che contenga all'interno sia l'aspetto dinamico che quello termodinamico richiederebbe un enorme onere computazionale e allo stesso tempo non sarebbe di grande utilità qualora si volesse progettare un sistema di controllo.

Da qui la necessità di ricercare un modo per esprimere tale forza in funzione dello spostamento del pistone e della sua velocità come riportato di seguito.

$$F_{Stirling} = F(x, \dot{x}) \quad (6.1)$$

dove:  $x$  = spostamento del sistema pistone traslatore;  
 $\dot{x}$  = velocità del sistema pistone-traslatore.

### 6.2.2 Azione dell'attrito

Il secondo aspetto meccanico che si prende in considerazione è la forza di attrito. Questa forza è presente laddove ci sia un moto relativo fra superfici. Essa affligge quindi il movimento del pistone e del displacer all'interno dei rispettivi cilindri. Al fine di ottenerne una riduzione, di norma gli organi mobili dei motori Stirling free-piston hanno una sezione leggermente inferiore rispetto a quella del relativo cilindro, in maniera tale che vi sia la possibilità, per una piccolissima quantità del fluido di lavoro, di separare le due superfici metalliche, e trasformare così un attrito di tipo radente in un attrito di tipo viscoso. L'attrito viscoso, come è noto, è proporzionale alla velocità del organo che è in movimento e quindi si può rappresentare tramite un coefficiente moltiplicativo della velocità del pistone. Tale coefficiente varia in funzione della temperatura e della viscosità del fluido di lavoro e deve tenere conto anche di quelle che sono le perdite per isteresi del gas. Queste perdite si hanno in conseguenza del fatto che il processo termodinamico che si verifica nel gas non è perfettamente reversibile; vi è, infatti, una certa quantità di lavoro dissipato in più in ogni ciclo. Siccome anche queste perdite possono essere modellizzate come una forza di attrito viscoso vengono dunque inserite nel coefficiente di proporzionalità tra forza e velocità del pistone sopra citato. Inoltre, se si utilizzasse una molla a gas anch'essa porterebbe con sé tali perdite. Perdite di cui si deve adeguatamente tenere conto. In definitiva le forze d'attrito che si oppongono al moto sono rappresentate nel modo riportato di seguito:

$$F_{friction} = b \dot{x} \quad (6.2)$$

dove:  $b$  = coefficiente di attrito.

### 6.2.3 Azione della molla

L'azione della molla si esplica attraverso una forza che è proporzionale allo spostamento del pistone dal suo punto medio di oscillazione. Tale forza tende in ogni istante a riportare la massa del sistema nella posizione di equilibrio.

$$F_{spring} = k_s x \quad (6.3)$$

dove:  $k$  = costante elastica della molla.

## Capitolo 6

La costante elastica della molla viene scelta affinché assieme alla massa del pistone – traslatore riproduca, alla frequenza di funzionamento che si desidera, il comportamento di un oscillatore armonico. Quindi partendo dalla relazione che lega assieme questi tre parametri in un sistema risonante meccanico:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_s}{m}} \quad (6.4)$$

Si ricava perciò:

$$k_s = \omega^2 m \quad (6.5)$$

In realtà si deve anche tenere conto di una costante elastica equivalente che risulta essere intrinseca al ciclo di Stirling. Se, infatti, si prende in considerazione il ciclo e se lo si osserva sul piano F- x ( forza – spostamento ) lo si può pensare riprodotto matematicamente dall'equazione di una retta in aggiunta ad una funzione matematica che oscilla attorno a questa. Come è noto l'equazione di una retta è composta da un coefficiente angolare che moltiplica l'ascissa del sistema ( in questo caso lo spostamento del pistone ) più un termine noto identificato come ordinata all'origine. Se si prende in considerazione solamente il termine formato da coefficiente angolare e dall'ascissa si può notare che, in questo caso, esso ha la stessa espressione della forza esercitata da una molla. Da qui la possibilità di considerare una costante elastica interna al ciclo di Stirling e pari al coefficiente angolare di tale retta. Quanto appena detto è sicuramente di più facile comprensione se si osserva la rappresentazione di figura:

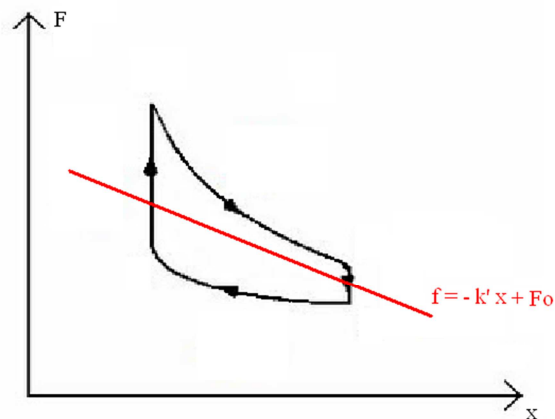


Fig. 6.4: costante elastica equivalente del ciclo di Stirling.

Quindi si indica con  $k'$  la costante elastica interna al ciclo termodinamico. Questo fatto implica pertanto che, pur scegliendo in base all'equazione (6.4) una costante elastica della molla meccanica  $k_s$  che si presume essere risonante alla pulsazione  $\omega$ , la reale pulsazione non è  $\omega$  ma  $\omega^*$ . La nuova pulsazione  $\omega^*$  è, inoltre, leggermente più grande di quella attesa. Lo si può notare dalla relazione con cui essa viene determinata:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{k_s + k'}{m}} \quad (6.6)$$

### 6.2.4 Forza del generatore elettrico

La forza resistente applicata dal generatore elettrico lineare nasce dall'interazione tra la corrente che percorre il carico allacciato al generatore e il campo magnetico prodotto dallo stesso. In questa

tesi si è scelto di non scendere nel dettaglio della ricostruzione di tale forza ma si è optato per una modellizzazione che la esprime in modo proporzionale alla velocità, analogamente a quanto fatto per la forza di attrito. Questa assunzione può essere facilmente giustificata se si considera che nella maggior parte dei generatori lineari il flusso magnetico concatenato con gli avvolgimenti è una funzione lineare del moto del pistone. Come è noto il fenomeno della trasmissione e della trasformazione dell'energia dalla forma meccanica alla forma elettrica avviene al traferro della macchina lineare. In tale punto si ha infatti un moto relativo fra indotto ed induttore, grazie al quale l'indotto si ritrova soggetto all'azione di un flusso magnetico variabile nel tempo; ne consegue quindi che nei conduttori dell'indotto venga a nascere una forza elettromotrice di intensità proporzionale alla velocità con la quale varia il flusso concatenato ai conduttori stessi, secondo quanto descritto dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$e(t) = \frac{d\varphi}{dt} \quad (6.7)$$

Questa relazione si può scrivere anche come:

$$e(t) = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (6.8)$$

che diventa:

$$e(t) = \frac{d\varphi}{dx} \dot{x} = r(x) \cdot \dot{x}(t) \quad (6.9)$$

dove:  $\dot{x}$  = velocità del sistema pistone-traslattore.

La funzione  $r(x)$  può essere definita, ad esempio, attraverso l'analisi col metodo degli elementi finiti del campo magnetico risultante al traferro (somma vettoriale del campo generato dall'induttore e della reazione d'indotto). Tale analisi va condotta lungo una traiettoria rettilinea sulla quale, dal punto di vista dell'induttore, i conduttori dell'indotto si muovono. Nella maggior parte dei casi essa è una costante positiva. In alcuni particolari generatori lineari il flusso è una funzione complessa del moto del traslattore e della corrente e quindi la (6.9) non è più valida. Tuttavia questa situazione particolare non viene presa in considerazione. A questo punto, sapendo che:

- la forza resistente del generatore proporzionale alla corrente;
- la corrente in prima approssimazione proporzionale attraverso l'impedenza di carico alla forza elettromotrice indotta;
- la forza elettromotrice è proporzionale alla velocità del traslattore;

è comprensibile affermare che la forza meccanica esplicita dal generatore lineare sia proporzionale anch'essa alla velocità del sistema pistone-traslattore come di seguito riportato.

$$F_{alternator} = k_g \dot{x} \quad (6.10)$$

Pertanto, l'equazione di equilibrio delle forze tenendo conto del termine inerziale legato alla massa è la seguente:

$$F_{stirling} = F_{inertial} + F_{friction} + F_{alternator} + F_{spring} \quad (6.10)$$

che andando a sostituire diventa:

$$F(x, \dot{x}) = m \ddot{x} + b \dot{x} + k_g \dot{x} + k_s x \quad (6.11)$$

dove:  $m$  = massa del sistema pistone - traslattore;

$\ddot{x}$  = accelerazione del sistema pistone - traslatore.

Infine, visto che non si approfondiscono gli aspetti legati al generatore elettrico lineare è possibile raccogliere in un unico termine tali effetti e quelli degli attriti di tipo viscoso. Pertanto si esprimeranno con un unico coefficiente di carico.

$$F(x, \dot{x}) = m \ddot{x} + k_L \dot{x} + k_s x \quad (6.12)$$

### 6.3 Forza nel ciclo teorico

Come prima analisi del modello cinematico si prende in considerazione il ciclo teorico della macchina di Stirling presentato nel capitolo 1. La forza in uscita dal motore può essere espressa analiticamente come una funzione dello spostamento e della velocità del pistone. Partendo dall'equazione di stato dei gas ideali si ricava la relazione che esprime la pressione:

$$p(t) = \frac{m_g R T}{V(t)} \quad (6.13)$$

dove:  $V(t)$  = volume del motore entro cui è contenuto il gas;  
 $m_g$  = massa del gas contenuto nel motore.

La forza in uscita dal motore non è altro che la pressione esercitata dal gas per la superficie del pistone:

$$F_c(t) = p(t) \cdot A_p \quad (6.14)$$

Riconducendo il volume alla variazione della posizione del pistone nel tempo si può scrivere:

$$V(t) = x_p(t) \cdot A_p \quad (6.15)$$

dove l'andamento della posizione del pistone si esprime come:

$$x_p(t) = x(t) + x_0 \quad (6.16)$$

dove:  $x_0$  = posizione media di oscillazione del pistone.

Inoltre si deve tener conto che, essendo il ciclo limitato da due isoterme, la temperatura assume due diversi valori a seconda che si sia nella fase di compressione o di espansione. La fase di compressione avviene alla temperatura più bassa  $T_k$ . Durante questa fase la velocità del pistone è negativa. Viceversa la fase di espansione avviene alla temperatura più elevata  $T_h$  durante il semiperiodo in cui la velocità del pistone è positiva.

Partendo dalla (6.13) e andando a sostituire le (6.14) (6.15) e (6.16) si ottiene:

$$F(t) = \frac{m_g R T}{x_0 + x(t)} \quad (6.17)$$

Collegando assieme il fatto che quando  $\dot{x}$  è negativo il ciclo si muove sull'isoterma  $T_k$  mentre quando  $\dot{x}$  è positivo il ciclo si muove lungo quella  $T_h$  si può ricostruire l'andamento della forza in funzione della posizione del pistone e della sua velocità nel seguente modo:

$$F(t) = \frac{m_g R T}{x_0 + x(t)} = \frac{m_g R (T_{media} \pm \Delta T)}{x_0 + x(t)} \quad (6.18)$$

dove:  $T_{media}$  = media aritmetica tra  $T_h$  e  $T_k$ ;  
 $\Delta T$  = scostamento tra  $T_{media}$  e  $T_h$  che equivale anche allo scostamento tra  $T_m$  e  $T_k$ .



Infine:

$$\begin{aligned}
 F(x, \dot{x}) &= \frac{m_g R (T_{media} \pm \Delta T)}{x_0 + x(t)} \\
 &= \frac{m_g R T_{media} + m_g R \Delta T \operatorname{sgn}[\dot{x}(t)]}{x_0 + x(t)} \\
 &= \frac{K + \Delta K \operatorname{sgn}[\dot{x}(t)]}{x_0 + x(t)} \tag{6.19}
 \end{aligned}$$

A tal punto è necessario introdurre alcune considerazioni sulla molla. Anch'essa ha una propria posizione media di oscillazione. È opportuno individuare questa posizione media di oscillazione in quanto permette di capire se in condizioni di riposo del pistone la molla stessa si trovi sottoposta ad una forza di trazione o di compressione. Per far ciò si devono fare delle considerazioni di tipo energetico. Chiamando  $x_{0s}$  la posizione media di oscillazione della molla ed  $s$  la semicorsa del pistone l'energia elastica immagazzinata dalla molla quando il pistone raggiunge le estremità della sua corsa e quindi la molla è nella situazione di massima compressione o di massima trazione è data dalla relazione:

$$E = \frac{1}{2} k_s [(x_0 + s - x_{0s})^2 - (x_0 - s - x_{0s})^2] \tag{6.20}$$

dove:  $k_s$  = è la costante elastica della molla.

Svolgendo i calcoli e semplificando si ottiene:

$$E = 2 k_s s (x_0 - x_{0s}) \tag{6.21}$$

L'energia potenziale della molla deve uguagliare il lavoro fatto dal pistone su di essa durante la fase di compressione in modo tale che l'intera energia venga restituita durante la fase di espansione. Il lavoro fatto dal pistone durante la fase di compressione non è altro che l'area sottesa dall'isoterma inferiore nel diagramma pV (pressione volume) o in quello Fx (forza spostamento) come mostrato in figura:

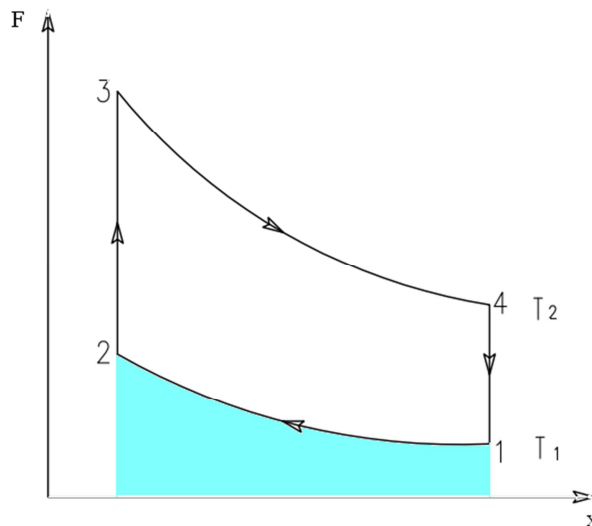


Fig. 6.5: lavoro del pistone in fase di compressione.

Quest'area è analiticamente determinabile attraverso l'integrale:

$$E = \int_{-s}^s \frac{K - \Delta K}{x_0 + x} dx \quad (6.22)$$

La risoluzione di suddetto integrale conduce alla relazione:

$$E = (K - \Delta K) \ln\left(\frac{x_0 + s}{x_0 - s}\right) \quad (6.23)$$

Infine uguagliando la (6.21) e la (6.23) si può facilmente determinare la posizione media di oscillazione della molla:

$$x_{0s} = x_0 - \frac{(K - \Delta K)}{2 k_s s} \ln\left(\frac{x_0 + s}{x_0 - s}\right) \quad (6.24)$$

### 6.3.1 Implementazione numerica

A questo punto si è passati ad implementare numericamente il modello. Si è preso come riferimento un motore Stirling che presenta le seguenti caratteristiche:

corsa del pistone:	4 cm;
posizione di oscillazione media del pistone:	20 cm;
diametro del pistone:	10 cm;
temperatura riscaldatore:	478 K;
temperatura raffreddatore:	285 K;
fluido di lavoro:	aria;
massa del gas:	4 g;
massa pistone-traslatore	6.4kg;

Prima di passare all'implementazione con il Matlab - Simulink, è stato effettuato un "tuning" preliminare dei parametri con il software Mathematica. Il sistema di equazioni differenziali preso in considerazione è stato il seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{K + \Delta K \operatorname{sgn}[v(t)]}{x(t) + x_0} = m \frac{dv(t)}{dt} + k_L v(t) + k_s [x(t) + x_0 - x_{0s}] \\ v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \\ x(0) = 0 \\ v(0) = v_0 \end{array} \right. \quad (6.25)$$

dove  $x(0)$  e  $v(0)$  sono le condizioni iniziali necessarie per la risoluzione del sistema. Si è scelto di imporre  $x(0) = 0$  per far partire il pistone dalla sua posizione di riposo mentre per  $v(0)$  si è scelto un valore di 0,8 m/s. Tale valore è stato scelto in quanto si è ritenuto che esso potesse essere in prima approssimazione plausibile con quella che sarebbe stata la dinamica del sistema. Il valore della velocità iniziale non è, infatti, di primaria importanza perché quello che rimane comunque l'obiettivo finale è l'analisi del sistema nella sua condizione di regime e non di come il sistema stesso evolva durante il transitorio iniziale. Per questo è bastato solamente assegnare ad  $v(0)$  un valore che non risultasse completamente fuori da ogni logica.

Questa "sintonizzazione" dei parametri si è resa necessario per determinare l'entità di quello che si può definire l'elemento stabilizzante del sistema, cioè il coefficiente di carico  $k_L$ . Infatti se questo

fosse troppo basso si avrebbe che la velocità e l'ampiezza del moto del pistone continuano ad aumentare. Viceversa se questo fosse troppo elevato si avrebbe un effetto smorzante dissipativo che andrebbe a prevalere. Si avrebbero quindi delle oscillazioni della velocità e della posizione del pistone che andrebbero via via smorzandosi nel tempo fino ad arrestarsi in un punto.

Fatto ciò si è passati alla riproduzione dello stesso modello con il Simulink al fine di confrontare i risultati in uscita dalle due simulazioni. Il modello implementato al Simulink è riportato in figura 6.5.

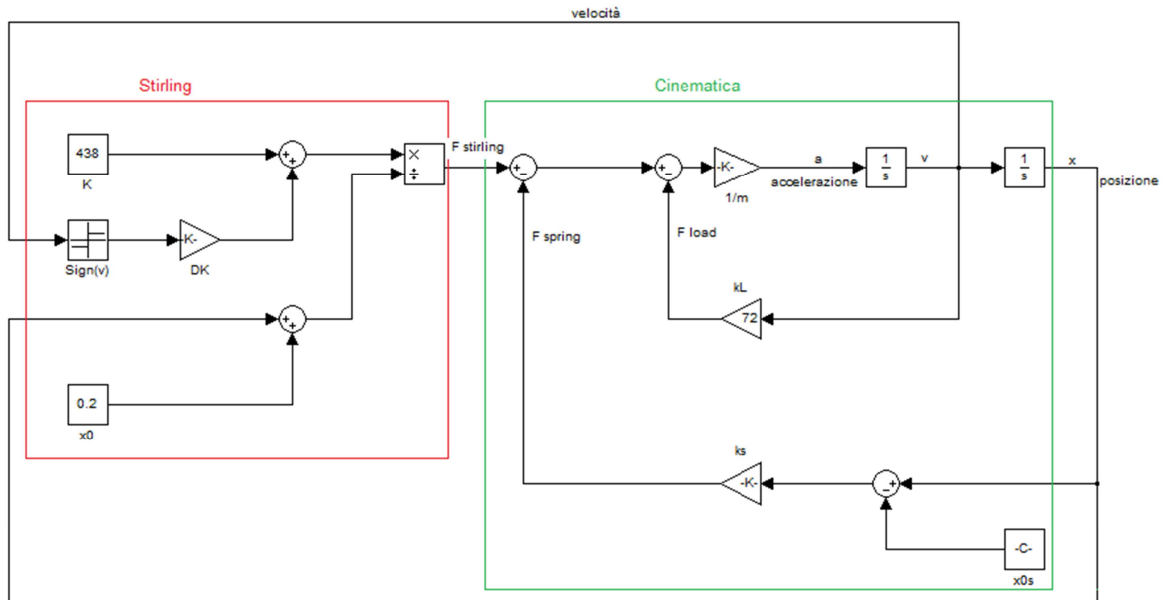


Fig. 6.6: modello cinematico dell'azionamento motore Stirling (ciclo teorico) - generatore elettrico lineare.

Nella figura 6.6 sono distinguibili la parte in cui vengono riportate le integrazioni dell'equazione cinematica (racchiusa dalla linea verde) e la parte che riproduce il ciclo Stirling (racchiusa dalla linea rossa). Constatato che i risultati ottenuti dalla simulazione in Mathematica e quelli ottenuti da quella in Simulink fossero uguali si è proseguito il lavoro rimanendo nell'ambiente Simulink.

I risultati ottenuti sono riportati di seguito:

$$\begin{aligned}
 K &= 438 \text{ J} \\
 \Delta K &= 111 \text{ J} \\
 s &= 0.04 \text{ m} \\
 \omega &= 250 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\
 x_0 &= 0.2 \text{ m} \\
 m &= 6.4 \text{ kg} \\
 k_L &= 72 \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \\
 k_s &= 3.886 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \\
 x_{0s} &= 0.194 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Si riportano anche l'andamento della forza in funzione dello spostamento del pistone ed in funzione del tempo; l'andamento della velocità e della posizione del pistone in funzione del tempo:

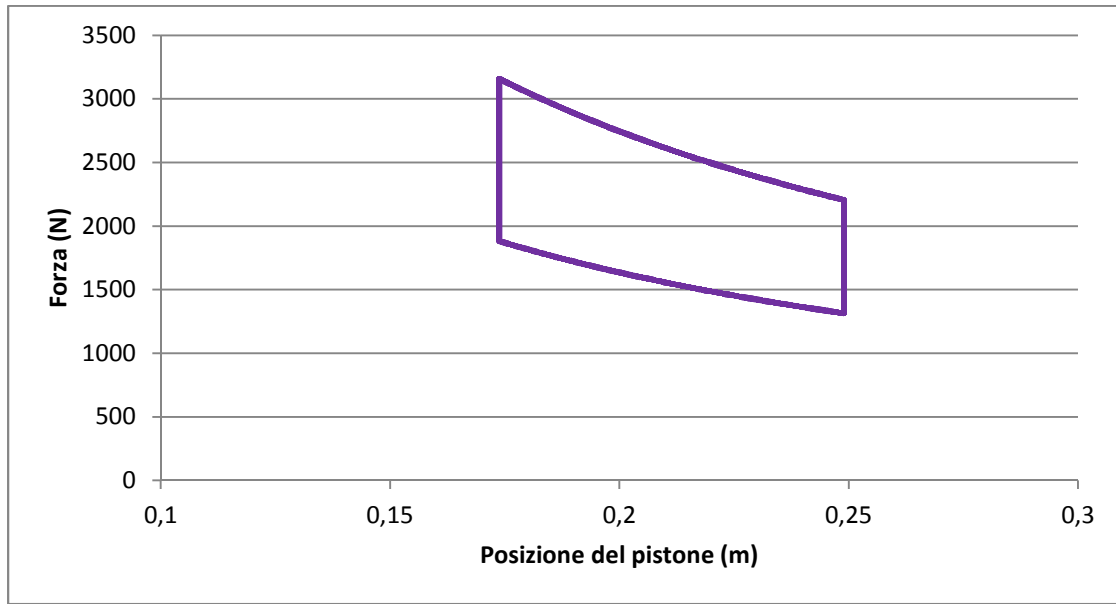


Fig. 6.7: andamento della forza in funzione dello spostamento.

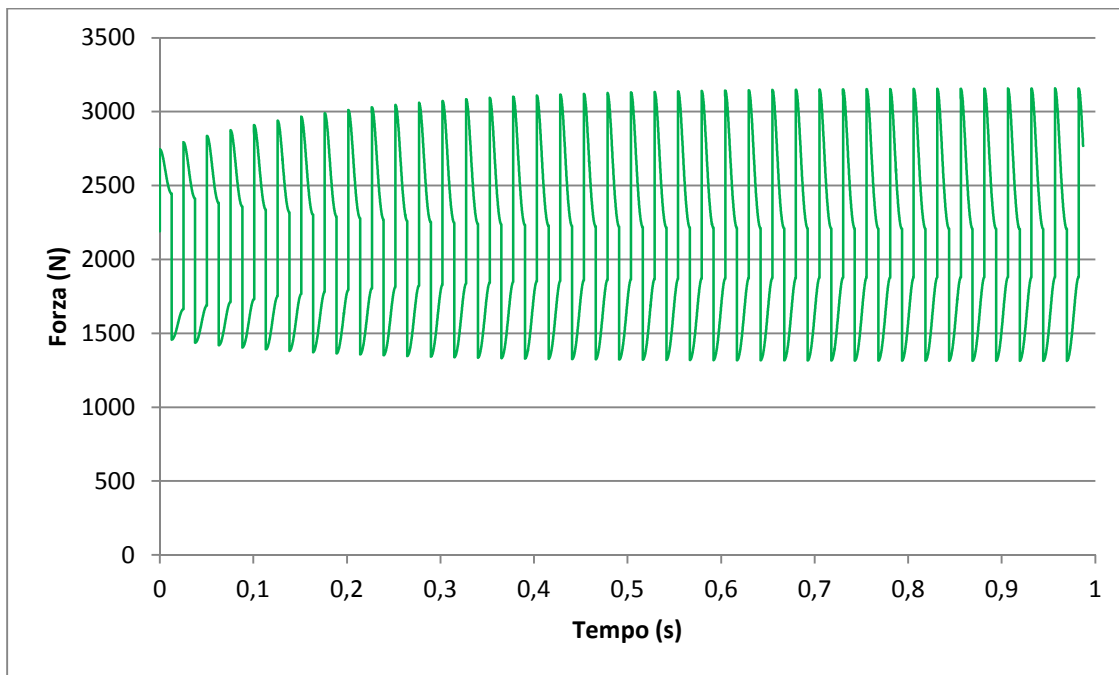


Fig. 6.8: andamento della forza in funzione del tempo.

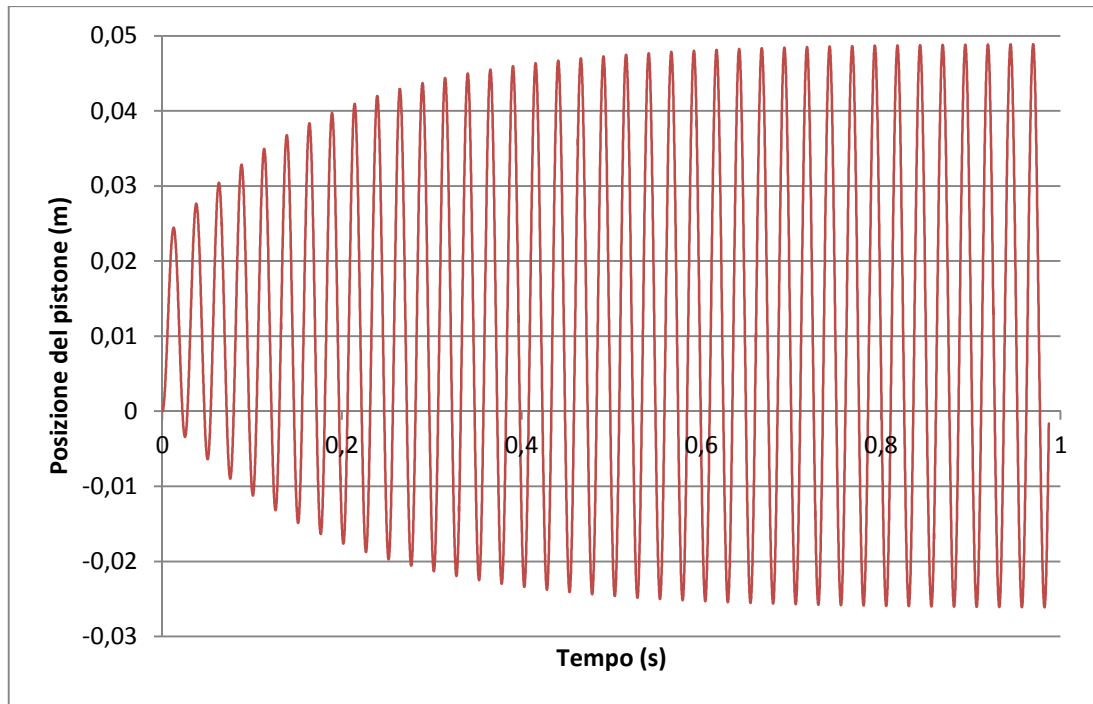


Fig. 6.9: andamento della posizione del pistone in funzione del tempo.

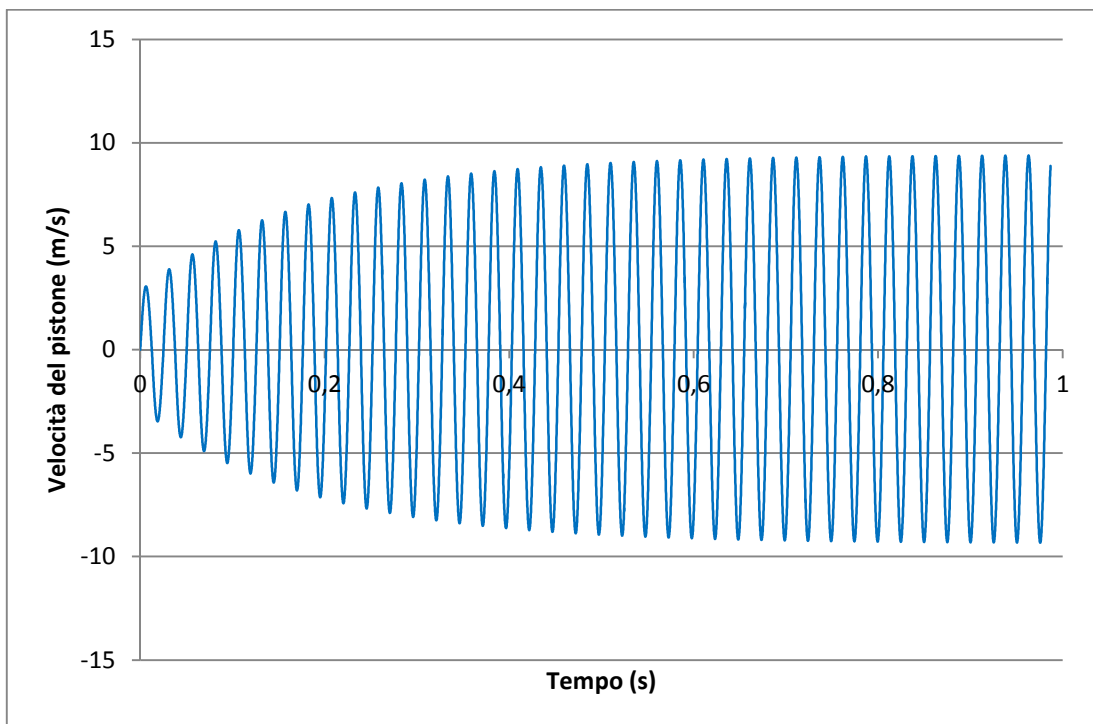


Fig. 6.10: andamento della velocità del pistone in funzione del tempo.

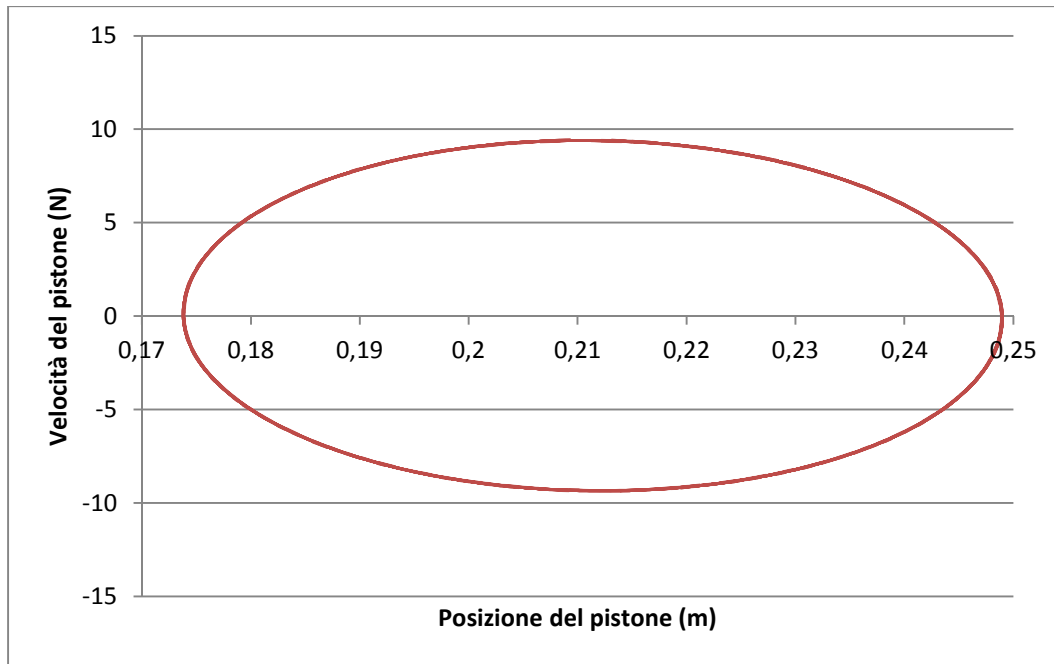


Fig. 6.11: andamento della velocità del pistone in funzione della posizione del pistone stesso.

L'andamento della velocità del pistone in funzione della posizione del pistone stesso, riportato in figura 6.11 è rappresentato da un'ellisse. Si poteva intuire a priori che il risultato sarebbe stato un'ellisse dal fatto che si ha dalla composizione di due moti sinusoidali di diversa ampiezza lungo due assi ortogonali.

#### 6.4 Modello semplificato di ciclo Stirling

Quanto finora visto in questo capitolo si riferisce a quello che avviene per un ciclo teorico della macchina di Stirling. Quindi non vengono presi in considerazione i fenomeni di non idealità che incidono negativamente sul rendimento del motore. Al fine di ottenere sul piano F-x l'andamento di un ciclo di Stirling semplificato ma che allo stesso tempo possa riprodurre approssimativamente quello che potrebbe essere un ciclo reale si può generalizzare la (6.19) utilizzando la seguente espressione della forza:

$$F(t) = \frac{K(t)}{x_0 + x(t)} \quad (6.26)$$

dove il numeratore di questa espressione si ottiene integrando nel tempo l'equazione:

$$\dot{K} = G_h(x)(K_h - K) + G_k(x)(K_k - K) \quad (6.27)$$

dove:  $G_h(x)$  = funzione dello spostamento del pistone che rappresenta il trasferimento di calore dal riscaldatore al fluido di lavoro;

$G_k(x)$  = funzione dello spostamento del pistone che rappresenta il trasferimento di calore dal fluido di lavoro al raffreddatore.

$K_h$  è un coefficiente proporzionale alla temperatura del riscaldatore e pari a :

$$K_h = m_g R T_h \quad (6.28)$$

Mentre  $K_k$  è un coefficiente proporzionale alla temperatura nel raffreddatore pari a :

$$K_k = m_g R T_k \quad (6.29)$$

Dove  $m_g$  ed  $R$  sono rispettivamente la massa del gas di lavoro e la costante universale di tale gas.

L'andamento delle funzioni  $G_h(x)$  e  $G_k(x)$  viene riportato in figura :

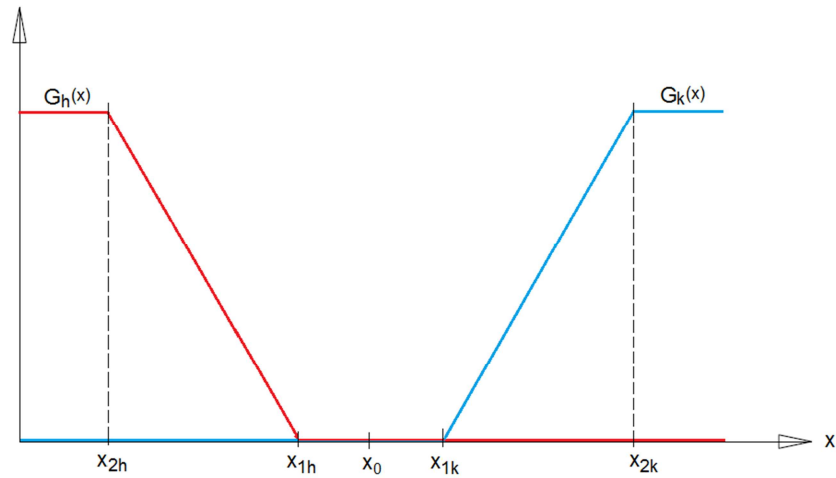


Fig. 6.11: andamento di  $G_h(x)$  e  $G_k(x)$

Dove  $x_{1h}$ ,  $x_{2h}$ ,  $x_{1k}$ ,  $x_{2k}$  sono posizioni contenute nella corsa del pistone. Queste, come anche i valori massimi di  $G_h(x)$  e di  $G_k(x)$ , possono essere variate al fine di riprodurre quelle che sono le prestazioni effettive degli scambiatori di calore della macchina. L'asse delle ascisse rappresenta ovviamente la posizione del pistone. Si può immediatamente osservare che si è supposto che il trasferimento di calore, sia nel riscaldatore che nel raffreddatore, raggiunga il proprio valore massimo variando linearmente con la posizione. Ciò può costituire un'analogia con quanto espresso nel capitolo 4 dove si assumeva un profilo lineare della temperatura nel passaggio tra riscaldatore e raffreddatore.

L'equazione (6.27), integrata ed implementata al Simulink, porta a quanto riportato in figura 6.12.

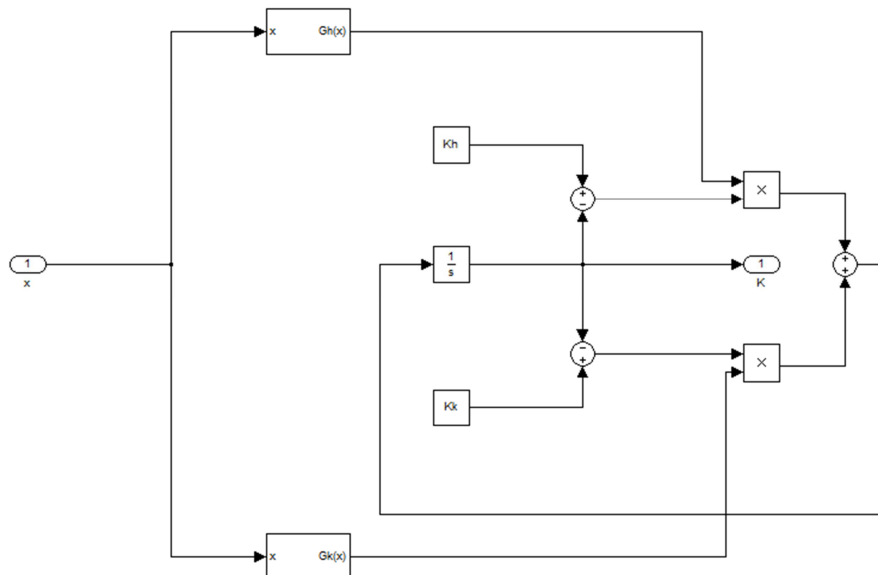


Fig. 6.12: schema dell'implementazione in Simulink dell'equazione (6.27) per il calcolo di  $K(t)$ .

All'interno del blocco che riproduce la funzione  $G_h(x)$  viene implementato il codice Simulink riportato in figura 6.13.

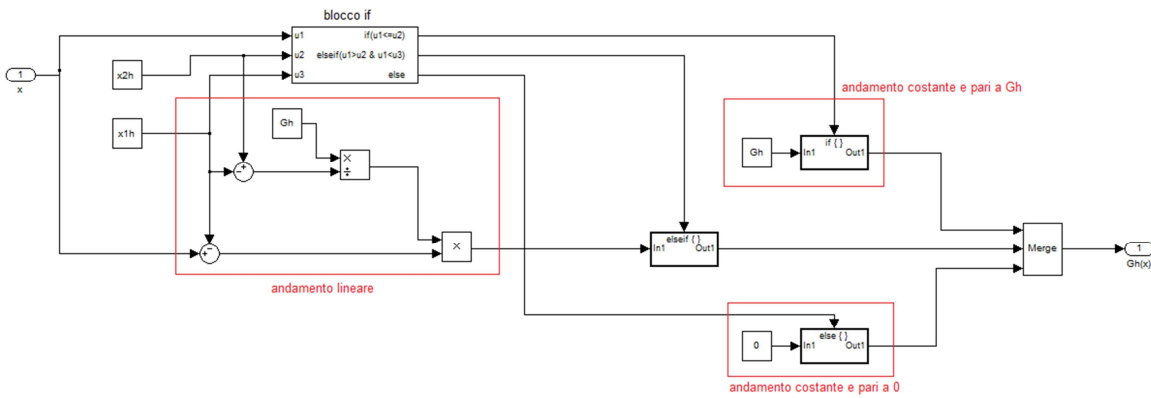


Fig. 6.13: schema dell'implementazione al Simulink della funzione  $G_h(x)$ .

In figura 6.13 sono evidenziate le tre zone che caratterizzano l'andamento di  $G_h(x)$  in funzione della posizione del pistone: la zona ad andamento costante a valore  $G_h$ , la zona con andamento lineare, e la zona in cui  $G_h(x)$  è nulla. La zona con andamento lineare è riprodotto dalla retta di equazione:

$$G_h(x) = G_h \frac{x - x_{1h}}{x_{2h} - x_{1h}} \quad (6.30)$$

Il blocco "if" assieme ai blocchi "if action" (con il contorno in grassetto) permette di fornire in uscita uno tra i tre andamenti evidenziati, in funzione del valore della posizione del pistone  $x$ .

Quanto contenuto all'interno di questo blocco Simulink si ripete in maniera analoga all'interno del blocco che riproduce la funzione  $G_k(x)$ .

La parte riguardante l'integrazione dell'equazione cinematica rimane la stessa vista nel paragrafo precedente.

Per fornire una spiegazione semplificata di quanto accade nel modello, nel suo complesso, si può supporre inizialmente che il pistone si trovi nella sua posizione media  $x_0$  e che  $K(0)$  sia pari a:

$$K(0) = m_g R T_{media} \quad (6.31)$$

A questo punto ipotizzando che il pistone cominci a muoversi verso destra si ha che  $G_h(x)$  inizia ad aumentare, mentre  $G_k(x)$  rimane ferma a zero. Dato il fatto che poi  $(K_h - K)$  è maggiore di zero si ha che anche  $\dot{K}$  è positivo. Questo significa che  $K$  aumenta. Una volta che si è raggiunto l'equilibrio termico nel riscaldatore (cioè la temperatura del gas ha raggiunto la temperatura del riscaldatore e quindi  $K_h = K$ ) si ha che  $\dot{K} = 0$ . Nel frattempo il pistone ha continuato a nella sua corsa e arrivando nella zona in cui  $G_k(x)$  non è più pari a zero ma viceversa lo è  $G_h(x)$ . Quindi,  $\dot{K}$  diventa negativo e di conseguenza  $K$  inizia a scendere.  $K$  scende fino a che anche nel lato dello scambiatore freddo non si raggiunge l'equilibrio termico (cioè la temperatura del gas ha raggiunto quella del raffreddatore e perciò  $K_k = K$ ). Il ciclo a questo punto può ripetersi identicamente a quanto descritto. Occorre però fare una precisazione: non è detto infatti che l'equilibrio termico venga raggiunto sempre in entrambi gli scambiatori di calore. Infatti può accadere che a causa dell'elevata velocità di funzionamento del motore la temperatura non riesca a raggiungere quella delle pareti dello scambiatore. Sul piano  $F-x$  questo si traduce nel fatto che il ciclo non riesce a raggiungere quelle che sono le curve isoterme che delimitano il ciclo teorico ma rimane all'interno del ciclo teorico stesso. Questo effetto è facilmente osservabile dalla figura 6.14:



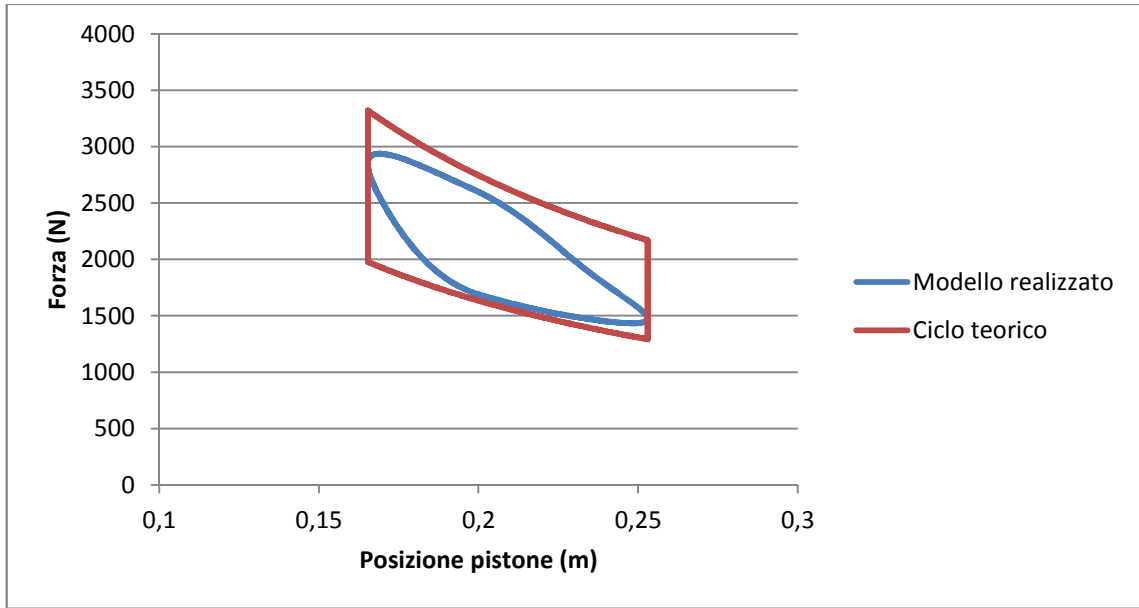


Fig. 6.14: confronto tra ciclo teorico e simulazione del modello realizzato.

Una formalizzazione compatta delle funzioni  $G_h(x)$  e  $G_k(x)$  può essere fatta nella modalità descritta di seguito. Per prima cosa si considera la posizione relativa del pistone rispetto alla sua posizione media di oscillazione, che risulta pari a zero quando la posizione assoluta del pistone è  $x_0$ . Dopo di che si definisce la funzione  $R(x)$  nel seguente modo:

$$R(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad (6.32)$$

Rappresentata graficamente in figura 6.15:

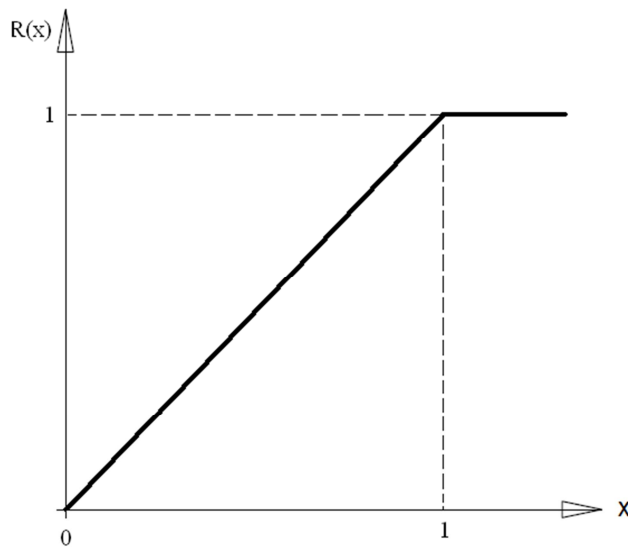


Fig. 6.15: funzione  $R(x)$ .

E' possibile variare la pendenza della rampa in salita nel seguente modo:

$$R_k \left( G \frac{x}{x_2} \right) = \begin{cases} \frac{G}{x_2} x & \text{se } 0 \leq x < x_2 \\ G & \text{se } x \geq x_2 \end{cases} \quad (6.33)$$

## Capitolo 6

Per ottenere in seguito anche una traslazione orizzontale della funzione di una quantità  $x_1$  è necessario solamente apportare la seguente modifica:

$$R_k \left( G \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < x_1 \\ G \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & \text{se } x_1 \leq x < x_2 \\ G & \text{se } x \geq x_2 \end{cases} \quad (6.34)$$

La rappresentazione di questa nuova funzione è riportata in figura 6.16:

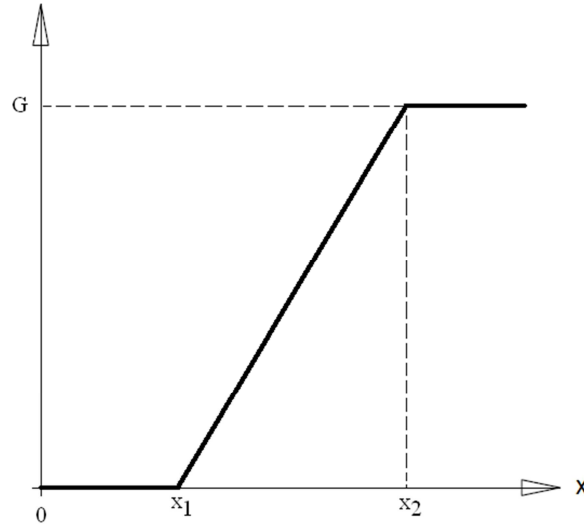


Fig. 6.16: rappresentazione della funzione (6.34).

A questo punto si può notare che si è arrivati ad identificare una funzione che può rappresentare la  $G_k(x)$  riportata in figura. Lo stesso può essere fatto anche per la  $G_h(x)$ . È necessario semplicemente rendere simmetrica la funzione sopra ottenuta rispetto all'asse delle ordinate come rappresentato in figura 6.17.

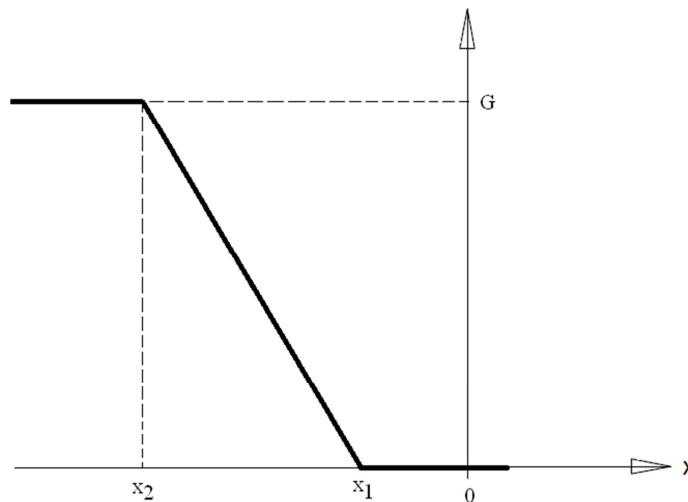


Fig. 6.17: rappresentazione simmetrica rispetto all'asse delle ordinate della funzione (6.34).

La funzione così ottenuta può essere espressa come di seguito riportato:

$$R_h \left( G \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_1 \leq x < 0 \\ G \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & \text{se } x_2 \leq x < x_1 \\ G & \text{se } x \leq x_2 \end{cases} \quad (6.35)$$

Infine, sempre ricordando che è stata presa in considerazione la posizione del pistone relativa al punto medio di oscillazione, la funzione che riproduce lo scambio termico nel riscaldatore e nel raffreddatore può venire scritta unendo le due funzioni precedentemente definite nel seguente modo:

$$G(x) = R_k \left( G_k \frac{x - x_{1k}'}{x_{2k}' - x_{1k}'} \right) + R_h \left( G_h \frac{x - x_{1h}'}{x_{2h}' - x_{1h}'} \right) \quad (6.36)$$

dove, con riferimento alla figura si indicano con:

$$x_{1k}' = x_{1k} - x_0 \quad (6.37)$$

$$x_{2k}' = x_{2k} - x_0 \quad (6.38)$$

$$x_{1h}' = x_{1h} - x_0 \quad (6.39)$$

$$x_{2h}' = x_{2h} - x_0 \quad (6.40)$$

Per completezza si riporta anche l'espressione che assumerebbe la funzione  $G(x)$  qualora si volesse considerare la posizione effettiva del pistone e non più quella relativa. Essa è data dall'equazione:

$$G(x) = R_k \left( G_k \frac{x - x_{1k}}{x_{2k} - x_{1k}} \right) + R_h \left( G_h \frac{x_{1h} - x}{x_{1h} - x_{2h}} \right) \quad (6.41)$$

Che risulta equivalente alla (6.36) eccetto per i termini  $x_{1h}$ ,  $x_{2h}$ ,  $x_{1k}$ ,  $x_{2k}$ .

## 6.5 Calcolo della potenza meccanica

Il lavoro istantaneo prodotto dal motore si può facilmente determinare attraverso la più che nota relazione:

$$W(t) = F(t)x(t) \quad (6.42)$$

Se si considera tale andamento su un periodo e se si effettua la differenza tra il valore finale e quello iniziale si ottiene il lavoro prodotto dal motore su quel ciclo. Dopo di che si divide per la frequenza delle oscillazioni ottenendo così anche la potenza meccanica in uscita dal motore. La realizzazione di quanto appena detto attraverso Matlab-Simulink può avvenire tramite due diverse modalità. Entrambe si effettuano in una fase di post processing, cioè dopo che la simulazione è terminata. La prima è quella prendere da Simulink un array di valori ottenuti dalla (6.42) ad ogni passo di integrazione. Questo insieme di valori deve coprire l'intervallo temporale di un ciclo. Ciò è possibile visto che il passo di integrazione del sistema è noto e a patto che lo stesso rimanga fisso o che le sue variazioni siano trascurabili. In seguito facendo la differenza tra l'ultimo valore dell'array e il primo si perviene al lavoro prodotto in un ciclo. Il secondo metodo è quello di prendere dalla simulazione in Simulink un numero elevato di campioni sempre della (6.42). Dopo di che in ambiente Matlab oppure in ambiente Excel si effettua una regressione lineare di questi campioni ottenendo così l'equazione di una retta. Il coefficiente angolare di tale retta rappresenta proprio la potenza erogata dal motore e si determina attraverso la relazione:

$$P = \frac{\sum_0^N (W_i - \bar{W})(t_i - \bar{t})}{\sum_0^N (t_i - \bar{t})^2} \quad (6.43)$$

dove  $W_i$  è il valore del lavoro preso all'istante  $t_i$ , mentre  $\bar{W}$  e  $\bar{t}$  sono i valori medi dei campioni considerati. Attraverso l'utilizzo di Simulink è possibile implementare la relazione (6.43). E' necessario solamente riprodurre la sommatoria attraverso un blocco integratore ed inserire il blocco "mean" che permette di calcolare i valori medi  $\bar{W}$  e  $\bar{t}$ . Così facendo si ottiene quanto riportato in figura 6.18:

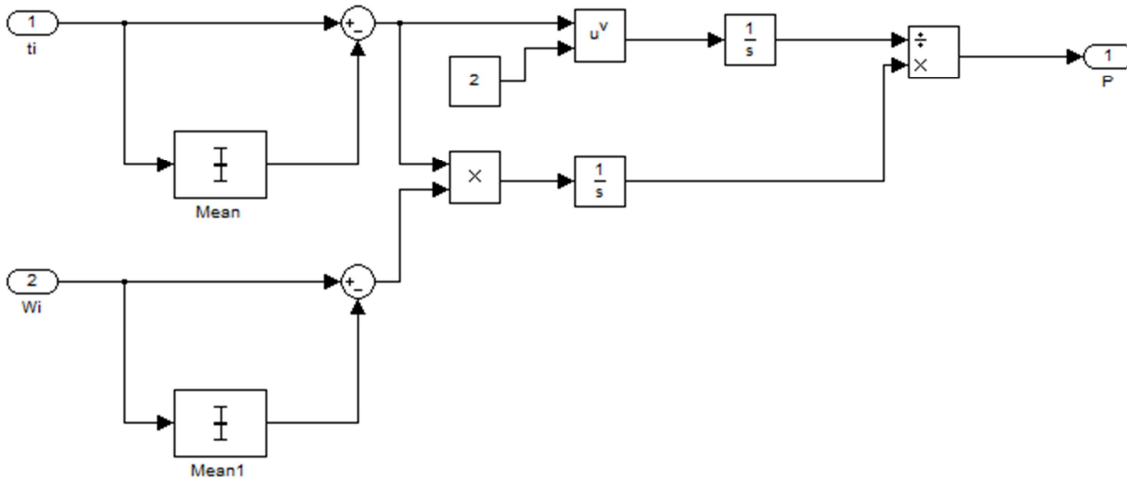


Fig. 6.18: implementazione in Simulink della relazione (6.42).

Attraverso il secondo metodo descritto non è necessario individuare con precisione l'inizio e la fine di un ciclo. Si deve però tenere presente che è necessario prelevare un numero di campioni elevato in modo tale che, se anche il numero di periodi contenuto in questo intervallo non è un numero intero, i campioni del periodo incompleto non influenzino il risultato della regressione. Ad ogni modo, entrambi i casi si deve avere l'accortezza di non prelevare campioni negli istanti iniziali della simulazione: in quanto potrebbero falsare il risultato.

Il secondo metodo, che è quello scelto per le simulazioni effettuate, può essere più facilmente compreso osservando la figura 6.19.

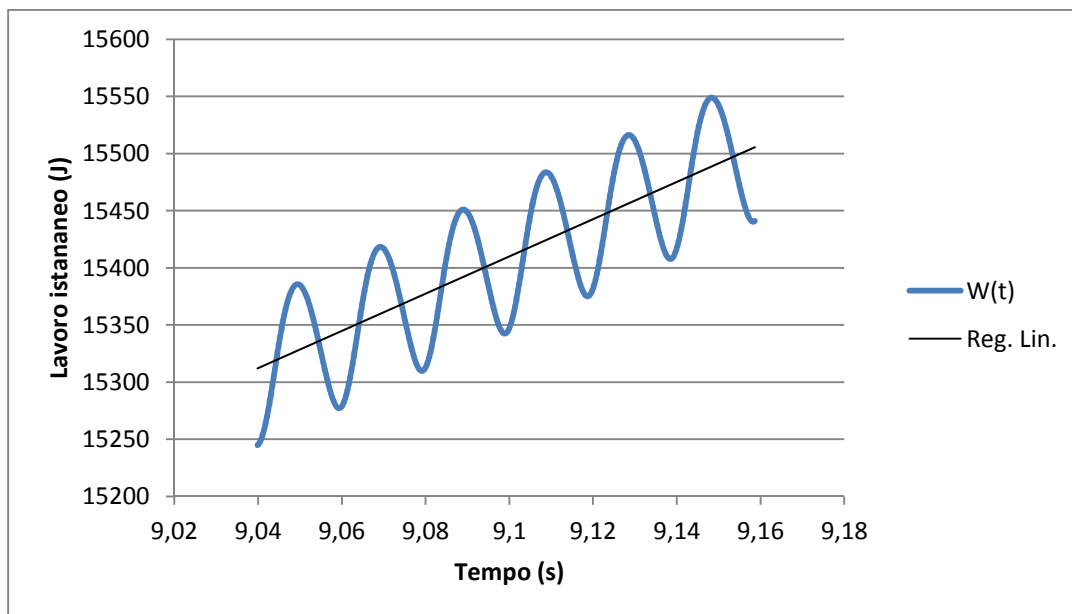


Fig. 6.19: andamento del lavoro meccanico istantaneo.

In figura la curva azzurra rappresenta il lavoro istantaneo prodotto dal motore, che ha andamento oscillatorio e nel complesso crescente in quanto ad ogni ciclo il lavoro complessivo risulta positivo, mentre in nero è riportata la retta che interpola tale andamento e il cui coefficiente angolare rappresenta la potenza meccanica del motore.

La potenza generata dal motore, per ovvi motivi di bilancio energetico, deve essere uguale alla potenza che viene dissipata dal termine viscoso del modello cinematico, ovvero dal termine che modella il carico. Per ottenere questo valore si prende in considerazione il lavoro dato dalla seguente equazione:

$$W_L(t) = F_L(t)x(t) \tag{6.44}$$

Successivamente si applica un'altra volta il metodo descritto in precedenza. Quello che si ottiene graficamente viene raffigurato in figura 6.20.

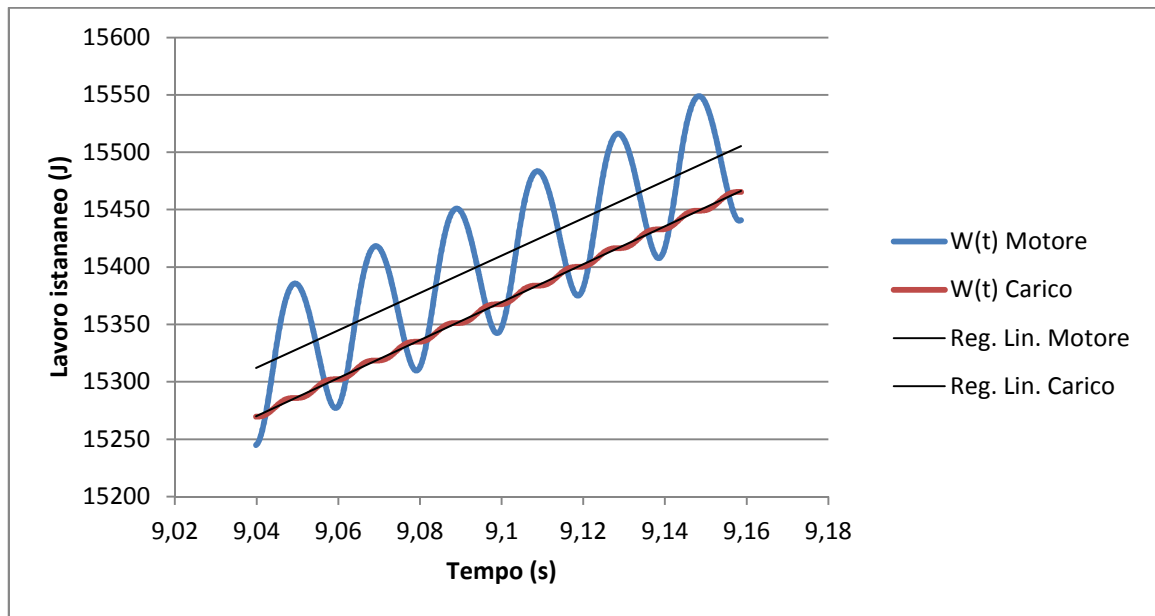


Fig. 6.20: andamento del lavoro meccanico istantaneo nel motore (curva azzurra) e nel carico (curva rossa).

Quello che è interessante notare in questo grafico è che le pendenze delle due rette coincidono. Ciò significa, come è corretto che sia, che la potenza nei due casi è la stessa. L'andamento del lavoro istantaneo è oscillatorio e complessivamente crescente in entrambi i casi ma non è affatto coincidente. Questo è comprensibile se si pensa che parte dell'energia presente nel sistema viene accumulata sotto forma di energia meccanica dalla molla.

### 6.5 Risultati delle simulazioni

Una volta che si è ultimato il modello è di interesse osservare il comportamento dello stesso in diverse condizioni di utilizzo. Ciò si ottiene facendo variare alcuni parametri del sistema così da ottenere le relazioni fondamentali che intercorrono tra questi parametri e le prestazioni del modello. Particolarmente interessanti sono i casi in cui si impone la variazione di più di un parametro, come si vede nei grafici seguenti. Da questi si intuisce la possibilità di ottenere le caratteristiche di funzionamento volute, variando le condizioni operative. Il primo parametro che si è fatto variare è stato il coefficiente di carico  $k_L$ . Successivamente è stata fatta variare anche la costante elastica della molla  $k_s$ . I parametri di cui si osservano le variazioni, invece, sono quelli che caratterizzano completamente la dinamica dell'elemento mobile e le prestazioni del motore. Si tratta quindi

dell'oscillazione massima del pistone del lavoro e della potenza del motore. I risultati di queste simulazioni sono riportati nei grafici che seguono.

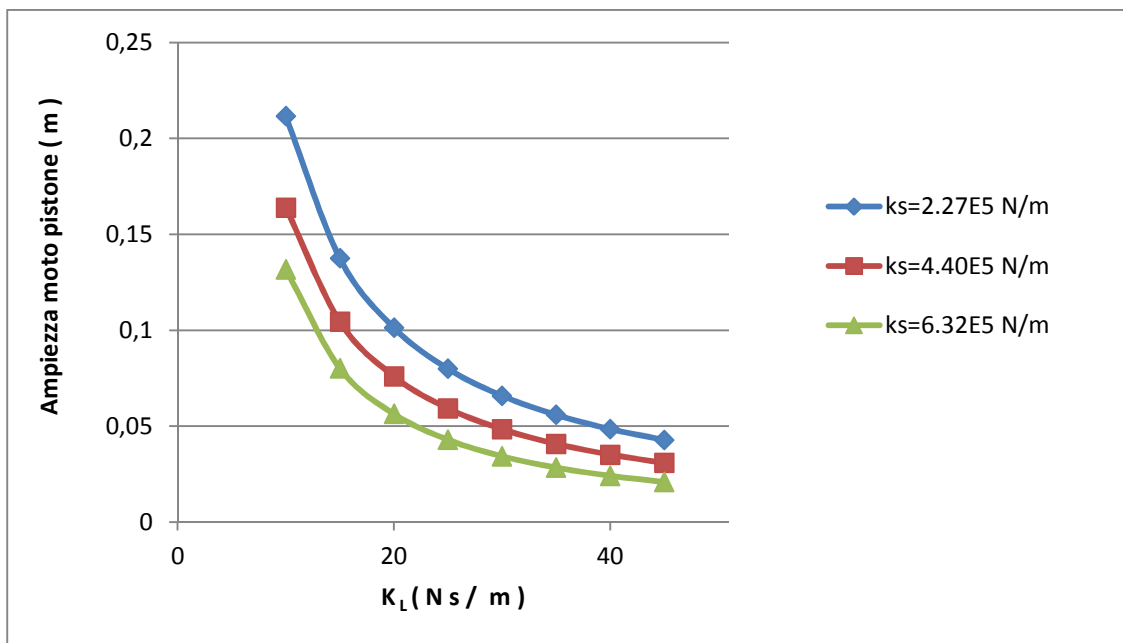


Fig. 6.21: ampiezza di oscillazione del pistone in funzione del coefficiente di carico.

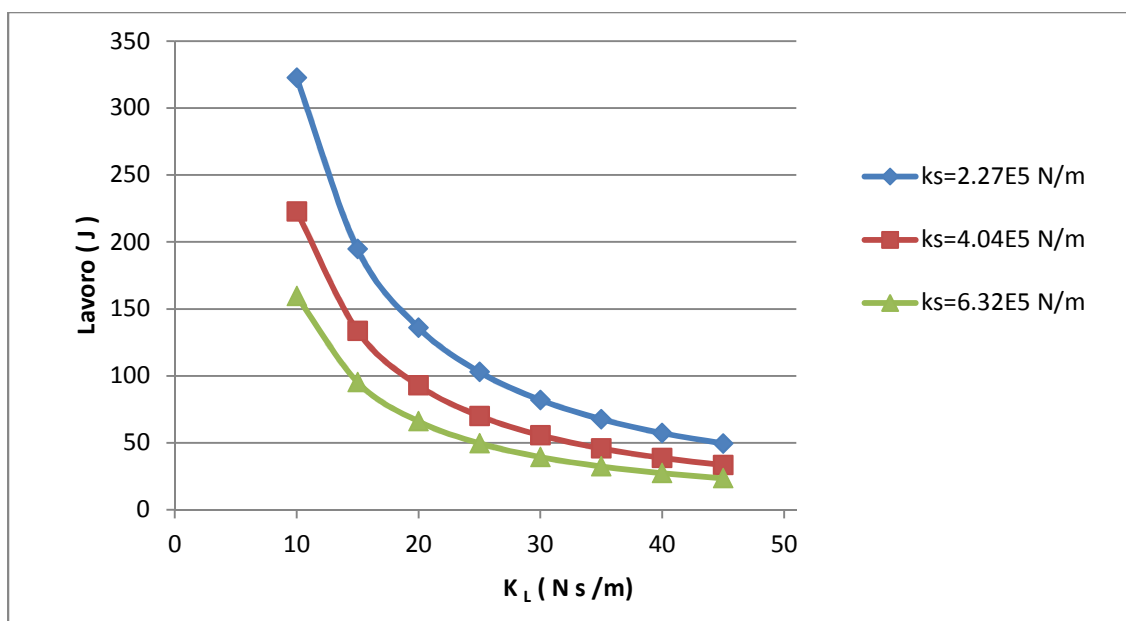


Fig. 6.22: lavoro in funzione del coefficiente di carico.

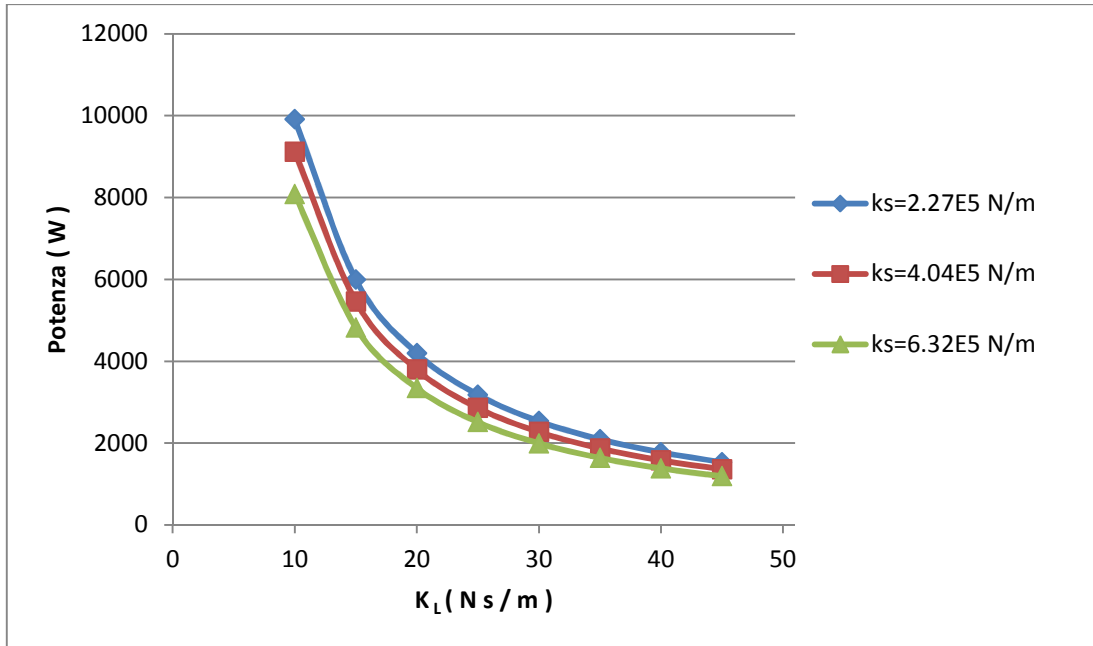


Fig. 6.23: potenza in funzione del coefficiente di carico.

I grafici riportati mostrano che l'influenza del coefficiente di carico si fa sentire soprattutto sull'ampiezza di oscillazione del pistone. L'ampiezza del moto del pistone determina quello che è il volume di lavoro della macchina e di conseguenza anche il lavoro meccanico prodotto dal motore visto che questo è dato dalla relazione:

$$W = \oint p dV \quad (6.45)$$

La variazione della costante elastica della molla invece porta ad una variazione della frequenza delle oscillazioni del pistone. L'influenza della stessa sulla potenza è meno sensibile: lo dimostra il fatto che le curve di figura 6.19 non sono molto distanti tra loro.

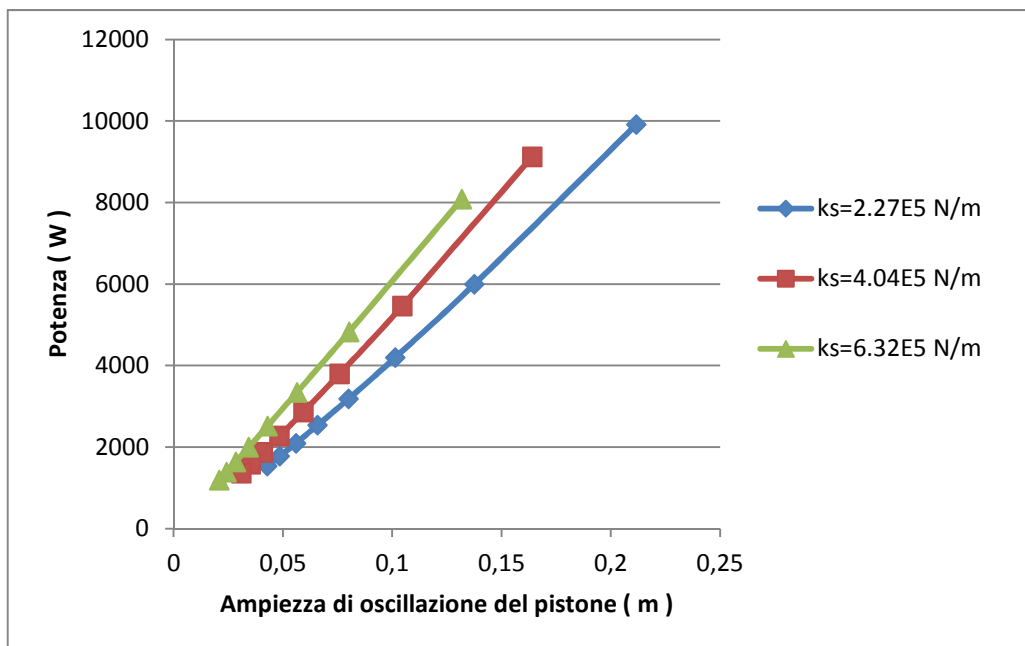


Fig. 6.24: potenza in funzione dell'ampiezza di oscillazione del pistone.

La figura 6.24 indica una relazione di linearità tra la potenza e l'ampiezza delle oscillazioni del pistone. Ciò è riscontrabile anche in letteratura [17] con la differenza che la potenza è espressa in funzione del volume di lavoro della macchina. Il risultato mantiene comunque la sua validità. Inoltre, si può osservare che, come è intuibile, a parità di ampiezza della corsa è maggiore la potenza nelle condizioni di funzionamento a frequenza più alta.

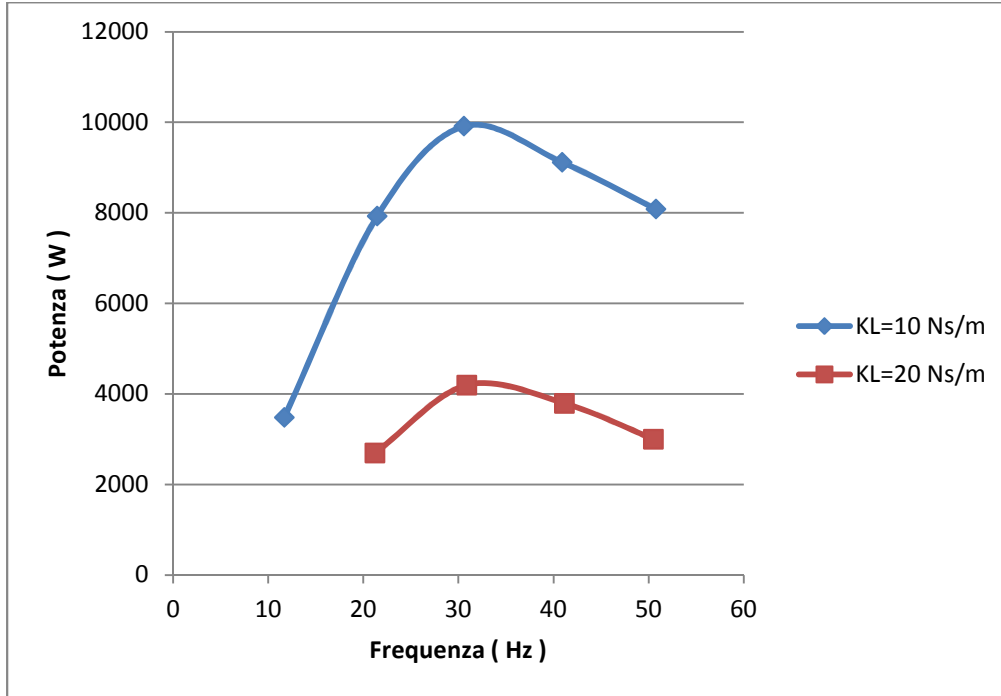


Fig. 6.25: potenza in funzione della frequenza delle oscillazioni.

La figura 6.25 mostra la presenza di un punto di massima potenza in corrispondenza di una determinata frequenza di funzionamento. Purtroppo in questa figura non è stato possibile ampliare il range di operazione della frequenza in quanto per valori esterni a quelli dell'intervallo interessato le oscillazioni risultavano essere di ampiezza smorzata nel tempo.

Infine è bene sottolineare che in tutte le simulazioni effettuate per realizzare i diagrammi appena descritti, il moto del pistone ha mostrato sempre lo stesso comportamento qualitativo, con oscillazioni di ampiezza crescente nel tempo fino al raggiungimento di una condizione di stazionarietà. Con tale termine intendendo una situazione con delle oscillazioni periodiche di ampiezza e frequenza costanti.



## *Conclusioni*

L'analisi sul motore Stirling descritta in questo lavoro di tesi ha affrontato sia l'aspetto legato ai fenomeni termodinamici che avvengono all'interno di una macchina di questo tipo; sia l'aspetto meccanico caratterizzato dalla dinamica del sistema. Dinamica che è legata principalmente al particolare tipo di configurazione meccanica presa in considerazione (configurazione free-piston). Questi due aspetti sono stati esaminati però in maniera distinta l'uno dall'altro e ciò ha portato alla realizzazione di altrettanti modelli matematici.

Il modello descritto nei capitoli 4 e 5 è stato realizzato considerando dapprima uno studio approfondito dei fenomeni termici. Ciò è avvenuto attraverso considerazioni sul bilancio dell'energia termica interna al sistema e attraverso considerazioni riguardanti la conservazione della massa del fluido di lavoro. Successivamente sono state esaminate le principali cause di scostamento del ciclo reale da quello ideale inserendo nell'analisi anche le caratteristiche geometriche degli scambiatori di calore e proprietà idrauliche legate al moto del fluido. Si è così riusciti a modellizzare matematicamente anche queste non idealità così da poter essere inserite nel modello in codice Matlab-Simulink. Quanto in questo modo realizzato, nei risultati finali a confronto con dati sperimentali, ha riscontrato un discreto grado approssimazione. Il modello però presenta una limitazione notevole ai fini dell'applicazione che si desidera riprodurre in questo lavoro di tesi. Infatti, questo risulta essere utile qualora l'andamento del moto del pistone sia noto a priori.

L'analisi descritta nel capitolo 6 invece pone maggiore attenzione sulla dinamica del sistema soffermandosi sull'origine e sugli effetti delle forze che agiscono sul sistema pistone traslatore. Il modello realizzato dopo tali considerazioni non considera la totalità dei fenomeni termodinamici che caratterizzano una macchina di Stirling. Nonostante ciò i risultati che ottenuti possono ritenersi comunque soddisfacenti. Lo studio parametrico che ha condotto ai grafici riportati alla fine del capitolo 6 ha mostrato la possibilità di utilizzare il modello in più configurazioni operative. Ciò ha anche permesso di determinare in prima approssimazione che tipo di relazione intercorre tra le grandezze che definiscono le prestazioni del motore e i parametri meccanici che sono stati modificati. Il modello si presta ad ulteriori simulazioni in cui i parametri da variare potrebbero essere rappresentati dalle temperature di lavoro. In particolare la temperatura del riscaldatore, che dipende dal tipo di sorgente termica per cui è realizzato il motore ( solare, biomassa, ecc... ). Il modello può essere affinato implementando una modellizzazione del carico più precisa e dettagliata.

Infine, con questo lavoro l'autore si augura di aver contribuito, anche se in piccola parte, a spingere ulteriormente verso lo sviluppo di questa tecnologia.



## ***Bibliografia***

- [1] Alessandro Semenzato, tesi di laurea "*Modello di generatore elettrico lineare azionato da motore Stirling free-piston*" Università degli Studi di Padova;
- [2] V. Naso "*La Macchina di Stirling*" Editoriale ESA;
- [3] <http://stirlingfreepiston.blogspot.com/>;
- [4] Nicole Benedetti, tesi di laurea "*Il motore stirling tra tradizione e innovazione: una scommessa per il futuro*";
- [5] P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci, "*Fisica I Meccanica – Termodinamica*", EdiSES Edizioni
- [6] E. Lewandowski T. Regan "*Overview of the GRC Stirling Converter System Dynamic Model*" Sest, Inc., Middleburg Heights, Ohio;
- [7] Mauro Andriollo, Antonino di Gerlando, "*Guide lineari di tipo elettromagnetico: principi di funzionamento ed applicazioni*", Dipartimento di Ingegneria Elettrotecnica del Politecnico di Milano;
- [8] [http://www.die.unipd.it/personale/doc/Martinelli\\_Giovanni/didattica/corsi/Macchine\\_Elettriche\\_Speciali](http://www.die.unipd.it/personale/doc/Martinelli_Giovanni/didattica/corsi/Macchine_Elettriche_Speciali), pagina docente del prof. G. Martinelli del dipartimento di Ingegneria Elettrica dell'Università di Padova;
- [9] "*Transverse Flux Machine*"; Keri, Mechatronics Research Group;
- [10] G. Walker, Graham, "*Stirling engines*", Oxford University press, ISBN 0-19-856209-8;
- [11] <http://www.sesusa.org> ;
- [12] Artin Der Minassians tesi di dottorato "*Stirling Engines for Low-Temperature Solar-Thermal-Electric Power Generation*" University of California at Berkeley ;
- [13] J. Bher, F. Lanzetta, P. Nika "*Optimization of a dual free piston Stirling engine*" Applied Thermal Engineering 27 (2007) 802–811 ;
- [14] A.J. Organ "*The Regenerator and the Stirling engine*" London: MEP, 1997;
- [15] S. Bittanti, A. De Marco , M. Farina, S. Spelta "*Modelling and simulation of a dish stirling solar engine*" Dipartimento di Elettronica e Informazione, Politecnico di Milano ;
- [16] Luca Dall'Ora, tesi di laurea "*Analisi di generatori lineari tubolari a magnete permanente per mezzo di reti magnetiche equivalenti*" Università degli Studi di Padova ;
- [17] F. Formosa "*Coupled thermodynamic–dynamic semi-analytical model of free piston Stirling engines*" Energy Conversion and Management 52 (2011) 2098–2109;
- [18] dal sito [http://it.wikipedia.org/wiki/Motore\\_Stirling](http://it.wikipedia.org/wiki/Motore_Stirling);
- [19] <http://www.sunpower.com>;
- [20] [http://dma.ing.uniroma1.it/LAB\\_MACCHINE/V160.pdf](http://dma.ing.uniroma1.it/LAB_MACCHINE/V160.pdf) ;
- [21] <http://www.sunmachine.com/> ;

- [22] Seong-Young Kim, David M. Berchowitz, "Specific Power Estimations for Free-Piston Stirling Engines", presentato alla "46th International Energy Conversion Engineering Conference and Exhibit (IECEC)", pubblicato da AIAA (American Institute of Aeronautics and Astronautics);
- [23] G. Benvenuto, F. de Monte, "Analysis of free-piston Stirling engine/linear alternator system part 1: theory" *Journal of propulsion and power*, Vol. 11 No.5 1995;
- [24] G. Benvenuto, F. de Monte, "Analysis of free-piston Stirling engine/linear alternator system part 2: results" *Journal of propulsion and power*, Vol. 11 No.5 1995;
- [25] Keys, London, "Compact heat exchanger", McGraw-Hill, New York, 1964;
- [26] G. Benvenuto, F. de Monte, F. Farina, "Dynamic behaviour prediction of free-piston Stirling engines", *Proceedings of the 25th Intersociety Energy Conversion Engineering Conference*, 1990;
- [27] G. Benvenuto, F. de Monte, "The effect of nonlinear thermo-fluid-dynamic terms on free-piston Stirling machine stability", *Proceedings of the 31th Intersociety Energy Conversion Engineering Conference*, 1996;
- [28] E.D. Rogdakis, N.A. Bormpilas, I.K. Koniakos, "A thermodynamic study for the optimization of stable operation of free piston Stirling engine" *Energy conversion and management* Vol. 45, 2004;
- [29] F. de Monte, G. Benvenuto, "Reflections on free-piston Stirling engines, part 1: cyclic steady operation", *Journal of propulsion and power*, Vol. 14 No.4 1998;
- [30] F. de Monte, G. Benvenuto, "Reflections on free-piston Stirling engines, part 2: stable operation", *Journal of propulsion and power*, Vol. 14 No.4 1998.