

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

## Dynamics of Silent Universes

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Laureando

Guglielmo Frittoli

Anno Accademico 2018/2019



## Sommario

L'intento principale di questo elaborato è quello di investigare la dinamica di polvere irrotazionale e priva della componente magnetica del tensore di Weyl. Dopo aver imposto e discusso le condizioni iniziali, si ricavano le soluzioni della dinamica, esatte ma prive di simmetria. Infine, si passa all'analisi dei punti stazionari del sistema e dunque dei possibili modelli ottenibili, andando in particolar modo a studiare il sottocaso dei modelli di Szekeres. Gli elementi di fluido, non interagendo più tra di loro nell'evoluzione, vengono definiti *Silent Universes* e i loro modelli possono risultare una rappresentazione a larga scala dell'universo oltre l'orizzonte cosmologico.



<b>Introduzione</b>	<b>vii</b>
<b>1 Le equazioni di Einstein</b>	<b>1</b>
1.1 Le equazioni di Einstein . . . . .	1
1.1.1 Derivate covarianti e trasporto parallelo . . . . .	2
1.1.2 Curvatura . . . . .	2
1.1.3 Geodetiche . . . . .	4
1.1.4 Le Equazioni di Einstein . . . . .	6
<b>2 Le equazioni della dinamica</b>	<b>9</b>
2.1 La dinamica dei silent universes . . . . .	9
2.1.1 Le approssimazioni . . . . .	10
2.1.2 Le variabili in gioco . . . . .	10
2.1.3 Le equazioni della dinamica . . . . .	14
2.1.4 I Punti Stazionari . . . . .	17
<b>3 Studio dei punti stazionari</b>	<b>19</b>
3.1 Dinamica dei modelli di Szekeres . . . . .	19
3.1.1 Un panorama dello Spazio delle Fasi . . . . .	20
3.1.2 Interpretazione dei punti stazionari . . . . .	21
3.1.3 Le traiettorie Szekeres . . . . .	25
<b>4 Conclusione</b>	<b>27</b>



Nel 1915 Einstein presentò alla comunità scientifica l'equazione di campo alle derivate parziali non lineari che mette in correlazione la curvatura dello spaziotempo con il tensore di energia-impulso. Il risultato fu ottenuto grazie all'applicazione di successi recenti della geometria differenziale, quelli per esempio dovuti a Bianchi, e all'applicazione di soluzioni già note sulla curvatura dovute a Gauss e Riemann. Solo un anno dopo fu presentata da Schwarzschild una soluzione esatta dell'equazione. Da allora, ne furono proposte numerose altre, tali da descrivere numerosi modelli della metrica spaziotempo, e dunque dell'universo. Data la difficoltà di risoluzione di queste equazioni differenziali, risulta un problema non banale scegliere anche solo le condizioni iniziali.

In questo elaborato si vuole presentare una possibile soluzione, sotto opportune ipotesi, e studiare la dinamica dell'oggetto che soddisfa le condizioni. In particolare, questa tesi si è ispirata all'articolo [2] *Dynamics of Silent Universes* di M. Bruni, S. Matarrese e O. Pantano e ne segue i passi, presentandone i ragionamenti e i risultati. In particolare l'oggetto del nostro studio è stata una nuvola di polvere irrotazionale con componente magnetica del tensore di Weyl nulla. Questa terminologia nasce dalla formulazione dell'equazione di Einstein sotto una forma simile alle equazioni di Maxwell e tale risultato fu ottenuto da Ellis (1971) [5]. Si ottengono così le componenti elettriche e magnetiche del tensore di Weyl, ovvero il tensore che esprime il contributo a grandi distanze della curvatura. Ciò che nasce da questa particolare nuvola di polvere è il particolare concetto degli *universi silenti*. In questa configurazione, ogni elemento di fluido non interagisce attraverso onde sonore o gravitazionali con quelli circostanti e per questo tutti gli elementi vengono definiti silenti *silenti*. Le ipotesi assunte per la polvere sono quelle di  $p = \omega_{ab} = H_{ab} = 0$ , ovvero privo di pressione, irrotazionale e privo di componente magnetica. Le prime due ipotesi sono ragionevoli, mentre la terza risulta essere più discutibile. Di queste equazioni vincolari si parlerà più approfonditamente nel capitolo 2. Infatti, prima di studiare la dinamica del sistema scaturito dall'equazione di Einstein sotto quelle ipotesi, nel capitolo 1 è presentata la formulazione dell'equazione di Einstein stessa. In questo primo capitolo sono presentati in primo luogo i concetti matematici necessari per la fruibilità dell'elaborato e successivamente i ragionamenti che portarono Einstein a presentare la sua omonima equazione. Nel secondo capitolo, oltre alla spiegazione della scelta delle ipotesi, si descrive il sistema di equazioni differenziali semilineari ottenuto, ponendo l'attenzione sull'evoluzione temporale e le possibili proprietà. In

particolare, il sistema dinamico è descritto, sotto opportuni cambi di variabile, da quantità tutte dipendenti dal parametro di espansione sotto una particolare variabile temporale scelta appositamente, in modo da semplificare il più possibile le equazioni. Infine, nel terzo capitolo, si studiano gli stati stazionari del sistema, fondamentali per la descrizione dei *silent universes*. Infatti, le singolarità ottenute descrivono le possibilità di evoluzione e stadi finali delle traiettorie per i singoli elementi di fluido. Prima di studiare le famiglie di punti stazionari del sistema completo nella dinamica triassiale, si studiano i punti stazionari del caso degenere di Szekeres. Infine, l'ultima sezione è destinata alle conclusioni e alle considerazioni fisiche e matematiche sui risultati ottenuti. Nel corso di questo elaborato si utilizzerà la notazione di Einstein (eccetto laddove si voglia mettere in evidenza la natura matematica), le unità  $c = 8\pi G = 1$  e la segnatura  $(-, +, +, +)$ .



### 1.1 Le equazioni di Einstein

In questo primo capitolo si vogliono presentare i concetti, gli oggetti matematici e il formalismo necessario per la piena e scorrevole comprensione di questo elaborato. In primo luogo, dando per scontata la conoscenza di nozioni di base, consultabili *cosmology* [1], quali per esempio il tensore metrico, si vogliono esporre le idee fondamentali e le particolarità matematiche introdotte dalla Relatività Generale, al fine di arrivare alla derivazione e alla formulazione delle equazioni di Einstein, fulcro attorno al quale ruota la parte centrale di questa tesi. Per i concetti di geometria differenziale si è fatto riferimento all'omonimo libro [6]. Per l'equazione di Einstein, invece, ci si è avvalsi del Wald [10] e del Weinberg [11].

Prima della relatività ristretta le nozioni prerelativistiche di spazio e tempo pervadevano la formulazione delle leggi fisiche. Quando queste furono rigettate, rimaneva l'arduo compito di modificare e riformulare le leggi fisiche affinché fossero consistenti con la struttura di spaziotempo introdotta dalla relatività speciale. La teoria della gravitazione di Newton non era, ovviamente, consistente in quanto invoca la nozione di interazione istantanea tra i corpi interagenti ma poteva, con le giuste accortezze, essere modificata e corretta affinché rientrasse nel *framework* della relatività ristretta. Ciò che Einstein fece, invece, fu quello di trovare una teoria interamente nuova dello spaziotempo e della gravitazione, basandosi su due idee fondamentali.

La prima idea è quella che tutti i corpi sono influenzati dalla gravità e tutti i corpi cadono in un campo gravitazionale precisamente nello stesso modo. Questo fatto è noto come *principio di equivalenza* e nella teoria Newtoniana della gravitazione era espresso dall'affermazione che la forza gravitazionale è proporzionale alla massa inerziale. In relatività generale le traiettorie dei corpi in caduta libera sono delle geodetiche che seguono la particolare metrica dello spaziotempo.

La seconda idea prende spunto dal principio di Mach che Einstein accettò e ne fu fortemente motivato. La nuova teoria, presentata da Einstein, afferma che le proprietà, intrinseche e indipendenti dall'osservatore, dello spaziotempo sono de-

scritte dalla metrica dello spaziotempo, come in relatività ristretta. Però, la metrica non risulta essere necessariamente piatta ma la curvatura, ovvero la deviazione della metrica piatta, tiene conto degli effetti fisici che di solito vengono associati al campo gravitazionale. Inoltre, la curvatura dello spaziotempo è legata al tensore energia-impulso dell'energia della materia dello spaziotempo, attraverso l'equazione di Einstein.

Passiamo ora a ricavare le equazioni di Einstein, seguendo di fatto la linea di pensiero di Einstein stesso. Prima, però, è necessario richiamare brevemente qualche concetto matematico affinché l'esposizione successiva sia scorrevole.

### 1.1.1 Derivate covarianti e trasporto parallelo

Una *derivata covariante*,  $\nabla$ , su una varietà  $M$  è una mappa che associa ogni campo tensoriale differenziabile di tipo  $(k, l)$  ad un campo tensoriale di tipo  $(k, l + 1)$  e che soddisfa le seguenti proprietà:

- Linearità
- Regola di Leibnitz
- Commutatività con le contrazioni
- Consistenza con la nozione di vettori tangenti come derivate direzionali su un campo scalare
- Privo di torsione

In notazione con gli indici, se  $T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k}$  indica il campo tensoriale  $(k, l)$ , il risultato dell'azione di  $\nabla$  su  $T$  è indicato con  $\nabla_c T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k}$ .

In coordinate locali, si ottiene il risultato:

$$\nabla_a t^b = \partial_a t^b + \Gamma_{ac}^b t^c \quad (1.1)$$

dove con  $\partial$  si intende operatore di derivazione ordinaria e  $\Gamma$  è detto *coefficiente di Christoffel*.

A questo punto possiamo definire il concetto di *trasporto parallelo*. Dato un operatore di derivazione  $\nabla_a$  possiamo definire il concetto di trasporto parallelo di un vettore lungo la curva  $C$  con tangente  $t^a$ . Un vettore  $v^a$  considerato in ogni punto sulla curva è detto *trasportato parallelamente* se, mentre ci si muove lungo la curva, l'equazione

$$t^a \nabla_a v^b = 0 \quad (1.2)$$

è soddisfatta lungo  $C$ . Tale concetto si può generalizzare a tensori di tipo  $(k, l)$ .

### 1.1.2 Curvatura

Nel paragrafo precedente abbiamo mostrato che, dato un operatore di derivazione, esiste la nozione di come trasportare parallelamente un vettore da un punto  $p$  ad un punto  $q$  lungo una curva. Tuttavia, il vettore nello spazio tangente  $V_q$  che otteniamo tramite questo trasporto parallelo da  $V_p$  dipenderà in generale dalla scelta della

curva che li connette. Possiamo usare questa dipendenza per definire il concetto intrinseco di curvatura. Se conosciamo come trasportare parallelamente vettori lungo una curva, possiamo definire la derivata di un campo vettoriale nella direzione della curva. Il fallimento di un vettore nel ritornare al valore originale quando trasportato parallelamente lungo un'infinitesima curva chiusa si traduce nella mancanza di commutatività delle derivate. Da qui la nozione di curvatura può essere definita in termini del fallimento delle differenziazioni di un campo tensoriale nel commutare. Formalizziamo questi concetti.

Consideriamo un campo vettoriale  $\omega_c$ . La mappa  $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)$  definisce una mappa lineare da vettori duali in  $p$  a tensori in  $p$  di tipo  $(0, 3)$ . Esiste quindi un campo tensoriale  $R_{abc}{}^d$  così che

$$\nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d \quad (1.3)$$

dove  $R_{abc}{}^d$  è chiamato *tensore di curvatura di Riemann* che è direttamente correlato a quanto considerato prima. Ora enunciamo quattro proprietà fondamentali del tensore di Riemann:

- $R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d$
- $R_{[abc]}{}^d = 0$
- Per l'operatore di derivazione  $\nabla_a$  naturalmente associato con la metrica,  $\nabla_a g_{bc} = 0$ , abbiamo

$$R_{abcd} = -R_{abdc} \quad (1.4)$$

- vale l'identità di Bianchi:

$$\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0 \quad (1.5)$$

È, inoltre, utile decomporre il tensore di Riemann in un *trace part* e *trace free part*. Grazie alle proprietà di antisimmetria enunciate prima (1 e 3), la traccia del tensore di Riemann rispetto ai primi due o ultimi due indici svanisce. Tuttavia, la traccia rispetto il secondo e il quarto indice (o equivalentemente, primo e terzo) non si annulla e viene definito *tensore di Ricci*,  $R_{ac}$ .

$$R_{ac} = R_{abc}{}^b. \quad (1.6)$$

Dalle proprietà 1, 2 e 3 segue che il tensore di Riemann soddisfa anche la seguente regola di simmetria:

$$R_{abcd} = R_{cdab}.$$

Da questa si vede che  $R_{ab}$  soddisfa la proprietà di simmetria  $R_{ab} = R_{ba}$ .

La *curvatura scalare*,  $R$ , è definita come la traccia del tensore di Ricci:

$$R = R_a{}^a.$$

La *trace free part* è denominata *tensore di Weyl*,  $C_{abcd}$ , ed è definito per varietà di dimensione  $n \geq 3$  dall'equazione:

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{2}{n-2} (g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a}) - \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c} g_{d]b}.$$

Il tensore di Weyl soddisfa le proprietà di simmetria del tensore di Riemann oltre che essere privo di traccia rispetto a tutti gli indici. La contrazione dell'identità di Bianchi porta ad un'equazione importante soddisfatta dal tensore di Ricci  $R_{ab}$ . Si trova

$$\nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd} = 0. \quad (1.7)$$

Sollevando l'indice  $d$  con la metrica e contraendo  $b$  e  $d$ , otteniamo

$$\nabla_a R_c{}^a + \nabla_b R_c{}^b - \nabla_c R = 0 \quad (1.8)$$

oppure

$$\nabla^a G_{ab} = 0 \quad (1.9)$$

dove

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}. \quad (1.10)$$

Il tensore  $G_{ab}$  è chiamato tensore di Einstein e appare nell'equazione di Einstein. Abbiamo fino a questo punto definito il tensore di curvatura di Riemann e le equazioni che soddisfa. Tuttavia, non sono stati ancora mostrati metodi per la computazione effettiva di tale tensore. Dato che è una componente cruciale delle Equazioni di Einstein, presentiamo due metodi di calcolo, senza addentrarci nella matematica. Il primo è il metodo delle componenti in coordinate. Per farlo iniziamo scegliendo un sistema di coordinate. Esprimiamo la derivata covariante, applicata ad un vettore duale  $\omega_a$ , come

$$\nabla_a \omega_b = \partial_a \omega_b + \Gamma_{ab}^c \omega_c$$

Ora non rimane che porre quest'equazione all'interno dell'espressione del tensore di Riemann. Dunque, per calcolare  $R_{abc}{}^d$  a partire da una metrica  $g_{ab}$ , otteniamo in primo luogo i componenti della metrica in coordinate locali, da qui i coefficienti di Christoffel e da essi il tensore di Riemann. Il secondo metodo è quello della base tetraedica ortonormale. Mentre il primo metodo aveva il vantaggio di calcolare in maniera diretta la curvatura, per molte considerazioni è vantaggioso considerare una base ortonormale nel calcolo dei tensori e per questo il secondo metodo parte dalla scelta di una siffatta base.

### 1.1.3 Geodetiche

Intuitivamente, le geodetiche sono linee che "curvano il meno possibile"; sono le "linee più rette" possibili che si possono disegnare in una geometria curva. In maniera più precisa, definiamo *geodetica* la curva il cui vettore tangente è propagato parallelamente lungo tale curva. *geodetica* è una curva il cui vettore tangente  $T^a$  soddisfa l'equazione

$$T^a \nabla_a T^b = 0. \quad (1.11)$$

In realtà, rileggendo i requisiti "intuitivi" richiesti, si potrebbe richiedere solamente che il vettore tangente alla curva punti nella stessa direzione mentre viene trasportato parallelamente, ma che non mantenga la stessa lunghezza. Questo porterebbe a:

$$T^a \nabla_a T^b = \alpha T^b \quad (1.12)$$

dove  $\alpha$  è una funzione arbitraria sulla curva. Questo problema risulta solamente apparente in quanto è possibile applicare una riparametrizzazione e ritornare alla equazione omogenea. Possiamo indagare meglio la natura dell'equazione delle geodetiche scrivendo le componenti dell'equazione in coordinate affini. In un sistema di coordinate  $\psi$ , una geodetica è mappata nella curva  $x^\mu(t)$  in  $\mathbb{R}^n$ . Le componenti  $T^\mu$ , in una base di coordinate, soddisfano

$$\frac{dT^\mu}{dt} + \sum_{\sigma,\nu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} T^\sigma T^\nu = 0$$

Tuttavia le componenti sono semplicemente

$$T^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$$

quindi in coordinate, l'equazione diventa

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \sum_{\sigma,\nu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} \frac{dx^\sigma}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0.$$

Infine, ci proponiamo di ricavare l'equazione di deviazione delle geodetiche, equazione che si rapporta con la tendenza delle geodetiche di accelerare avvicinandosi o allontanandosi una dall'altra sulla curvatura della varietà. Denotiamo con  $\gamma_s(t)$  una famiglia di geodetiche tali che per ogni parametro  $s$  reale, la curva  $\gamma_s$  è una geodetica e la mappa  $(t, s) \rightarrow \gamma_s(t)$  è liscia, è biettiva e l'inversa è anch'essa liscia. Denotiamo con  $\Sigma$  la sottovarietà bidimensionale individuata dalle curve  $\gamma_s(t)$ . Possiamo scegliere  $s$  e  $t$  come coordinate di  $\Sigma$ . Il campo vettoriale  $T^a = (\partial/\partial t)^a$  è tangente alla famiglia di geodetiche e, quindi, soddisfa

$$T^a \nabla_a T^b = 0 \tag{1.13}$$

Il campo vettoriale  $X^a = (\partial/\partial s)^a$  rappresenta la distanza tra due geodetiche infinitamente vicine e tale vettore è chiamato *vettore di deviazione*. Dato che  $X^a$  e  $T^a$  sono campi vettoriali coordinati, commutano:

$$T^a \nabla_a X^b = X^a \nabla_a T^b \tag{1.14}$$

quindi vediamo che  $X^a T_a$  è costante lungo ogni geodetica e, attraverso riparametrizzazione, si può ottenere che tale prodotto sia nullo ovunque. Definiamo ora la quantità  $v^a = T^b \nabla_b X^a$  come la velocità di cambiamento lungo la geodetica della distanza rispetto ad una geodetica infinitesimamente vicina. Possiamo dunque interpretarla come la velocità relativa della curva vicina. Similarmente, possiamo definire un'analogia accelerazione che risulta essere dipendente dal tensore di curvatura di Riemann.

$$\begin{aligned} a^a &= T^c \nabla_c v^a = T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a) \\ &= T^c \nabla_c (X^b \nabla_b T^a) = (T^c \nabla_c X^b) (\nabla_b T_a) + X^b T^c \nabla_c \nabla_b T^a \\ &= (X^c \nabla_c T^b) (\nabla_b T_a) + X^b T^c \nabla_b \nabla_c T^a - R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \\ &= X^c \nabla_c (T^b \nabla_b T^a) - R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \\ &= -R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \end{aligned} \tag{1.15}$$

Quest'ultima è nota come l'equazione di *deviazione delle geodetiche*. Osserviamo che l'accelerazione è nulla solo se è nullo il tensore di curvatura.

#### 1.1.4 Le Equazioni di Einstein

Cerchiamo ora l'equazione che connetta la geometria dello spaziotempo con la distribuzione della materia. Un importante indizio sul procedimento con cui si può ricavare è dato dal confronto con la descrizione delle forze di marea nella gravità Newtoniana e relativistica. Nella teoria Newtoniana, il campo gravitazionale può essere rappresentato da un potenziale,  $\phi$ , e l'accelerazione di marea di due particelle vicine è data da  $-\left(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{\nabla}\phi$ , dove  $\vec{x}$  è il vettore di separazione delle particelle. Tuttavia, in relatività generale, dall'equazione dell'accelerazione delle geodetiche ricavata precedentemente, l'accelerazione di marea di due particelle vicine è data da  $-R_{cbd}{}^a x^b v^c v^d$  dove  $v^a$  è la quadrivelocità delle particelle e  $x^a$  è il vettore di deviazione. Questo suggerisce la seguente corrispondenza:

$$R_{cbd}{}^a v^c v^d \longleftrightarrow \partial_b \partial_a \phi \quad (1.16)$$

Tuttavia, l'equazione di Poisson ci dice che

$$\nabla^2 \phi = \rho \quad (1.17)$$

dove  $\rho$  è la densità di materia (i.e energia). Inoltre, in relatività speciale e generale le proprietà energetiche della materia sono descritte dal tensore energia-impulso  $T_{ab}$  e abbiamo la corrispondenza

$$T_{ab} v^a v^b \longleftrightarrow \rho \quad (1.18)$$

dove  $v^a$  è la quadrivelocità dell'osservatore. Queste due corrispondenze e l'equazione enunciata suggeriscono che  $R_{cad}{}^a v^c v^d = T_{cd} v^c v^d$ , che implica a sua volta che  $R_{cd} = T_{cd}$ . Questa fu l'equazione inizialmente postulata da Einstein la quale, tuttavia, comportava un'incongruenza insormontabile. È noto e corretto che  $\nabla^c T_{cd} = 0$ , ovvero l'espressione di conservazione dell'energia a livello locale. D'altra parte, le identità di Bianchi ci dicono che  $\nabla^c (R_{cd} - \frac{1}{2} g_{cd} R) = 0$ . Dunque, l'uguaglianza tra  $R_{cd}$  e  $T_{cd}$  implicherebbe  $\nabla_d R = 0$ , ovvero che  $R$ , e dunque  $T = T^a{}_a$ , è costante in tutto l'universo. Tale risultato è una restrizione non fisica sulla distribuzione di materia e ci costringe a rigettare l'equazione, come fece lo stesso Einstein poco tempo dopo averla presentata.

Tuttavia, questa difficoltà che si è presentata allo stesso tempo suggerisce una risoluzione. Infatti, se invece considerassimo

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = T_{ab} \quad (1.19)$$

non vi sarebbe più alcun conflitto tra l'identità di Bianchi e la conservazione locale dell'energia. Tale equazione di campo è quella desiderata della relatività generale. Fu formulata da Einstein nel 1915 ed è nota come *equazione di Einstein*. Dunque, se l'equazione presentata fosse vera, l'identità di Bianchi implicherebbe la conservazione locale dell'energia. Inoltre, le corrispondenze che ci hanno portato al risultato sbagliato non sono totalmente da scartare. Considerando la traccia, otteniamo

$$R = -T \quad (1.20)$$

e dunque,

$$R_{ab} = \left( T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right) \quad (1.21)$$

In situazioni in cui la teoria Newtoniana dovrebbe essere applicabile, l'energia della materia, misurata da un osservatore che è verosimilmente in quiete rispetto alle masse, è molto più grande degli stress materiali. Dunque abbiamo  $T \approx -\rho = -T_{ab}v^av^b$ . Dunque, in questo caso, si ha comunque  $R_{ab}v^av^b = T_{ab}v^av^b$ . Ad ogni modo, l'intero contenuto della relatività generale può essere riassunto come segue: *lo spaziotempo è una varietà  $M$  su cui è definita la metrica di Lorentz  $g_{ab}$ . La curvatura di  $g_{ab}$  è correlata alla distribuzione della materia nello spaziotempo secondo l'equazione di Einstein.* Una prima considerazione che si può effettuare è di stampo matematico. Se calcoliamo il tensore di curvatura in coordinate locali attraverso le componenti della metrica, troviamo che le equazioni di Einstein non è altro che un sistema accoppiati di equazioni alle derivate parziali non lineare del secondo ordine. Una seconda considerazione riguarda l'approccio che si dovrebbe avere nei suoi riguardi. In un certo senso, è analoga all'equazione di Maxwell con il tensore  $T_{ab}$  analogo alla sorgente del campo gravitazionale, nella stesso modo in cui la corrente  $j_a$  è la sorgente del campo elettromagnetico. Tuttavia vi è una fondamentale differenza: ha senso risolvere le equazioni di Maxwell a partire da una corrente nota, ma non vale l'analogia per l'equazione di Einstein. Infatti, si potrebbe risolvere specificando  $T_{ab}$  prima e trovando  $g_{ab}$  poi. Tuttavia, questo non ha molto senso perché fino a quando non è nota la metrica, non sappiamo come interpretare fisicamente il tensore energia impulso. Dunque, in questo caso, è necessario risolvere simultaneamente per la metrica dello spaziotempo e la distribuzione della materia. Questo contribuisce alla difficoltà di risoluzione delle equazioni.





#### 2.1 La dinamica dei silent universes

Come abbiamo visto, la risoluzione della equazione di Einstein comporta problematiche non banali e le sue risoluzioni possono essere molto diverse, in base alle assunzioni fatte. In particolare, a questo scopo, lo studio della dinamica di fluidi perfetti ricopre un ruolo di estrema importanza e le soluzioni rilevanti sono ottenute con tecniche diverse, a seconda della situazione: per esempio, un approccio newtoniano è spesso applicato per studiare perturbazioni su scale minori della distanza dell'orizzonte ma molto più grandi del raggio di Schwarzschild. Inoltre, spesso, metodi analitici sono sfruttati per seguire l'evoluzione di piccole perturbazioni e di rendere utili soluzioni approssimate per descrivere il sistema. Un trattamento relativistico, in cosmologia, è applicato per studiare perturbazioni lineari su grandi scale e/o all'inizio dei tempi, e per analizzare quelle poche soluzioni simmetriche dell'equazione di Einstein che sono utili nel contesto cosmologico. Sfortunatamente, una teoria che riesca a comprendere perturbazioni su piccola scala e a descrivere fenomeni di larga scala, è spesso ostacolata dalla poca presenza di simmetrie nel sistema. Una possibile visione del problema è rappresentata da un approccio *fluid-flow*, in cui le dinamiche seguono direttamente dallo studio delle variabili osservabili del fluido ideale e delle quantità tensoriali che descrivono la curvatura dello spazio tempo. Nasce quindi spontaneo investigare la dinamica dell'Universo, nell'era in cui domina la materia, associandola alla dinamica non-lineare della *polvere*, ovvero il concetto di fluido perfetto con la più semplice descrizione per il caso di materia priva di collisioni. Perché, però, si riescano a studiare le equazioni del moto e di Einstein, è necessario porre dei vincoli iniziali coerenti e fisicamente sensati. In questo capitolo, tratteremo dunque la dinamica del fluido ideale andando poi a commentare i risultati ottenuti. Pur seguendo i passi dell'omonimo titolo, è possibile trovare una trattazione più espansa e particolareggiata nella raccolta di articoli sui sistemi dinamici in cosmologia [5].

### 2.1.1 Le approssimazioni

Porre le condizioni iniziali, o approssimazioni, ad un problema di stampo fisico di tale portata non è semplice. Per questo, è necessario specificare che tipo di approssimazioni si cercano. Infatti, nel formulare una teoria fisica, si possono riscontrare due metodi di scelta nei vincoli da porre alle equazioni. Il primo, più di stampo matematico, lo chiameremo di *approssimazione esatta*, dove convogliano tutte le soluzioni esatte della teoria che si sta usando, ottenute sotto particolari assunzioni riguardanti, per esempio, le condizioni al contorno. Il secondo è più sperimentale e nasce dal confronto con i dati: le approssimazioni sono scelte in modo che le soluzioni della teoria, sebbene risultino più approssimative, collimino maggiormente con i dati sperimentali. Presentiamo e motiviamo ora le tre assunzioni esatte nello studio del fluido perfetto. La prima, immediata, è quella di considerare il fluido privo di pressione. La seconda è una restrizione cinematica che comporta l'irrotazionalità del fluido. Si trascura infatti la vorticosità e tale approssimazione risulta esatta, poiché è noto che un flusso inizialmente irrotazionale rimane tale, in assenza di effetti dissipativi. L'ultima assunzione, quella più controversa e discutibile è quella di considerare trascurabile lo scambio di segnale del campo gravitazionale, ovvero, in termini più precisi, ritenere nulla la componente magnetica del tensore di Weyl. Infatti, se si espandono al primo ordine le perturbazioni scalari dell'universo di Friedmann-Robertson-Walker (da qui FRW), si osserva che è trascurabile, fatto non vero, però, se si espande al secondo ordine. Rimanendo nell'espansione al primo ordine, l'assunzione risulta valida ed esatta. La trascurabilità della componente magnetica è una restrizione dinamica (in quanto agisce sul campo di marea) e ha due implicazioni: restringe la distribuzione spaziale del tensore di deformazione (*shear*) e anche la variazione spaziale del campo di marea della componente elettrica del tensore di Weyl. Può essere interpretata come una mancanza di induzione o radiazione del campo gravitazionale. Dunque, sotto queste tre approssimazioni, le soluzioni dell'equazione di Einstein risultano esatte per il fluido considerato. La vera particolarità di un tale fluido nasce dal fatto che per esso è possibile trovare una tetrad ortonormale con la quadrivelocità  $u^a$  che sia allo stesso tempo base per la *shear* e la componente elettrica del tensore di Weyl. Nel caso particolare in cui i vettori della tetrad siano ortogonali rispetto alle ipersuperfici, così che esista un sistema di coordinate in cui metrica, shear e componente elettrica siano diagonali, e il flusso sia geodetico,  $\dot{u}^a = 0$ , allora le equazioni si riducono a sole sei equazioni differenziali ordinarie. Fisicamente, l'equazione che determina il moto di ogni singolo elemento del fluido non è più influenzato dall'ambiente e procede come se fosse un universo separato. Da qui nasce il termine *silent universe*.

### 2.1.2 Le variabili in gioco

In questa sezione introdurremo brevemente le variabili idrodinamiche e del campo gravitazionale. Inoltre, daremo una delucidazione matematica sul particolare comportamento della quadrivelocità citata prima.

Iniziamo dunque descrivendo il singolare comportamento delle geodetiche in una *congruenza*. Una congruenza in un aperto  $O$  appartenente ad una varietà è una

famiglia di curve tali che attraverso ogni  $p \in O$  passa una curva. Quindi le tangenti alla congruenza forniscono un campo vettoriale in  $O$  e, reciprocamente, ogni campo vettoriale continuo genera una congruenza di curve. La congruenza è detta liscia se il corrispondente campo vettoriale è liscio. Consideriamo ora una congruenza di geodetiche di tipo tempo. Senza perdita di generalità, possiamo assumere che le geodetiche siano parametrizzate dal tempo proprio, così che il campo vettoriale,  $\xi^a$ , di tangenti sia normalizzato,  $\xi^a \xi_a = -1$ . Quindi il campo tensoriale  $B_{ab}$ , definito da

$$B_{ab} = \nabla_b \xi_a \quad (2.1)$$

sarà puramente *spaziale*,

$$B_{ab} \xi^a = B^{ab} \xi_b = 0 \quad (2.2)$$

L'interpretazione fisica nasce dalle seguenti considerazioni. Consideriamo una sottofamiglia di geodetiche  $\gamma_s(\tau)$  nella congruenza e sia  $x^a$  il vettore di deviazione ortogonale da  $\gamma_0$  per questa sottofamiglia. Allora, abbiamo che la sua derivata di Lie rispetto al campo è nulla, ovvero

$$\mathcal{L}_\xi x^a = 0 \quad (2.3)$$

e quindi

$$\xi^b \nabla_b x^a = x^b \nabla_b \xi^a = B^a_b x^b \quad (2.4)$$

Dunque  $B^a_b$  è misura del fallimento di  $x^a$  di essere trasportato parallelamente. Un osservatore sulla geodetica  $\gamma_0$  vedrebbe le geodetiche vicino a lui allungarsi e ruotare in base al tensore. Possiamo allora definire una *metrica spaziale*  $h_{ab}$

$$h_{ab} = g_{ab} + \xi_a \xi_b \quad (2.5)$$

Quindi,  $h^a_b = g^{ac} h_{cb}$  proietta sul sottospazio dello spazio tangente perpendicolare a  $\xi^a$ . Definiamo allora *expansion*  $\theta$ , *shear*  $\sigma_{ab}$  e *twist*  $\omega_{ab}$  della convergenza come

$$\theta = B^{ab} h_{ab} \quad (2.6)$$

$$\sigma_{ab} = B_{(ab)} - \frac{1}{3} \theta h_{ab} \quad (2.7)$$

$$\omega_{ab} = B_{[ab]} \quad (2.8)$$

e dunque  $B_{ab}$  si può decomporre come

$$B_{ab} = \frac{1}{3} \theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} \quad (2.9)$$

Notiamo che in virtù della (2.2) e del teorema di Frobenius, la congruenza è ortogonale se e solo se si annulla la twist. Sempre dall'equazione (2.2) osserviamo che la shear e la twist sono puramente spaziali. Dalla (2.4), segue che lungo ogni geodetica di una congruenza,  $\theta$  rappresenta l'espansione delle geodetiche vicine,  $\sigma$  lo sforzo di taglio, ovvero la deformazione, e  $\omega$ , essendo la parte antisimmetrica, misura la rotazione. È chiaro che l'equazione di deviazione delle geodetiche fornirà gli andamenti per le variabili descritte. Tuttavia, possiamo ricavarceli. Abbiamo che:

$$\begin{aligned}
\xi^c \nabla_c B_{ab} &= \xi^c \nabla_c \nabla_b \xi_a = \xi^c \nabla_b \nabla_c \xi_a + R_{cba}{}^d \xi^c \xi_d \\
&= \nabla_b (\xi^c \nabla_c \xi_a) - (\nabla_b \xi^c) (\nabla_c \xi_a) + R_{cba}{}^d \xi^c \xi_d \\
&= -B^c{}_b B_{ac} + R_{cba}{}^d \xi^c \xi_d
\end{aligned} \tag{2.10}$$

e prendendone la traccia si ottiene la cosiddetta *equazione di Raychaudhuri*

$$\xi^c \nabla_c \theta = \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{cd}\xi^c\xi^d \tag{2.11}$$

la parte simmetrica e priva di traccia da

$$\xi^c \nabla_c \sigma_{ab} = -\frac{2}{3}\theta\sigma_{ab} - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - \omega_{ac}\omega^c{}_b + \frac{1}{3}h_{ab}(\sigma_{cd}\sigma^{cd} - \omega_{cd}\omega^{cd}) + C_{cbad}\xi^c\xi^d + \frac{1}{2}\tilde{R}_{ab} \tag{2.12}$$

e infine la parte antisimmetrica dell'equazione da

$$\xi^c \nabla_c \omega_{ab} = -\frac{2}{3}\theta\omega_{ab} - 2\sigma^c{}_{[b}\omega_{a]c} \tag{2.13}$$

Introduciamo e descriviamo ora l'oggetto del nostro studio, la *polvere*. Dato che parte dei concetti matematici sono stati già descritti e devono solo essere applicati e ribaditi, da ora in avanti si adotta una notazione più compatta che verrà poi mantenuta per il resto dell'elaborato. Utilizziamo per indicare le derivate covarianti il punto e virgola ; e la virgola , per le derivate parziali.

Consideriamo allora un fluido perfetto con quadrivelocità  $u^a$  tale che  $u^a u_a = -1$ . In ogni punto dello spazio tempo si può definire un tensore di proiezione di un osservatore comovente  $u^a$ :  $h^{ab} = g^{ab} + u^a u^b$ . Grazie a questi due oggetti possiamo dividere la derivata covariante di una qualsiasi quantità tensoriale in una derivata temporale e una spaziale. Avremo quindi che  $u_{a;b}$  avrà componente spaziale  $v_{ab} = h_a{}^c h_b{}^d u_{c;d}$  e temporale  $\dot{u}^a = u^a{}_{;b} u^b$ . Il punto sovrastante denota la differenziazione rispetto al tempo proprio di un osservatore comovente. Ritroviamo ora la descrizione analoga delle geodetiche della congruenza, con  $B_{ab} = v_{ab}$ : è infatti usuale dividere il tensore  $v_{ab}$  nella sua traccia  $\theta = v^a{}_a$ , nella sua parte simmetrica priva di traccia  $\sigma_{ab} = v_{(ab)} - \frac{1}{3}\theta h_{ab}$  e nella antisimmetrica  $\omega_{ab} = v_{[ab]}$ . Queste quantità cinematiche determinano la velocità relativa degli elementi di fluido vicini. In particolare, data una sfera di fluido ad ogni tempo iniziale,  $\theta$  descrive l'espansione scalare, ovvero l'aumento o contrazione medie del volume, la shear denota la deformazione in un ellissoide a volume fissato e la twist denota la rotazione rispetto ad un sistema localmente inerziale. Utilizzando queste variabili e la densità di materia è possibile dare una formulazione alternativa della relatività generale che sfrutta le quantità dinamiche  $E_{ab} = C_{abcd}u^c u^d$  e  $H_{ab} = \frac{1}{2}\eta_{ac}{}^{gh} C_{ghbd}u^c u^d$ , dove  $C_{abcd}$  è il tensore di Weyl. Queste due quantità nascono dalla riscrittura delle equazioni di Einstein e le identità di Bianchi in una forma simile alle equazioni di Maxwell. Nascono così la parte elettrica e la parte magnetica del tensore di Weyl. Fisicamente, il tensore di Weyl rappresenta il contributo della curvatura generato da sorgenti non locali. Mentre la parte elettrica ha un analogo Newtoniano, ovvero rappresenta il campo

generato da cariche statiche, l'interpretazione della componente magnetica risulta priva di analogia. Intuitivamente, si può pensare ad un analogo dei potenziali di Liénard–Wiechert.

Applichiamo ora le assunzioni imposte al fluido perfetto così descritto. Siamo, quindi interessati ad un fluido perfetto privo di pressione  $p = 0$  e di vorticosità  $\omega_{ab} = 0$ . Seguono subito due risultati:

- dato che  $p = 0$ , l'accelerazione svanisce come conseguenza dell'equazione di conservazione della quantità di moto. Il flusso del fluido, quindi, risulta essere una geodetica.
- dato che  $\omega_{ab} = 0$ , il flusso del fluido è una ipersuperficie ortogonale, ovvero esistono ipersuperfici di tipo spazio di cui  $u^a$  è il vettore normale. Da questo segue che è possibile utilizzare un sistema di coordinate spaziali e il tempo proprio come coordinata lungo le linee del flusso, definendo così, complessivamente, un sistema di coordinate comoventi.

Tuttavia, per comodità, utilizzeremo una tetrad ortonormale  $u^a, e_\alpha^a, u_a e_\alpha^a, e_\alpha^a e_a^\beta = \delta_\alpha^\beta$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  qui gli indici greci indicano i vettori) cosicché le componenti dei tensori siano scalari che possono essere misurati da osservatori comoventi, una tra queste la densità di materia. Imponiamo ora la terza fondamentale assunzione, ovvero che  $H_{ab} = 0$ . Come abbiamo detto in precedenza, sotto questa ipotesi è possibile trovare una base di autovettori comune per  $\sigma_{ab}$  e  $E_{ab}$ . Nella base scelta, risultano espressi nella maniera seguente

$$E_{ab} = \sum_{\alpha=1}^3 E_\alpha e_{\alpha a} e_{\alpha b} \quad \sigma_{ab} = \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_\alpha e_{\alpha a} e_{\alpha b} \quad (2.14)$$

con

$$\sum_{\alpha=1}^3 E_\alpha = \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_\alpha = 0 \quad \sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ab} \sigma^{ab} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_\alpha^2 \quad E^2 = \frac{1}{2} E_{ab} E^{ab} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 E_\alpha^2 \quad (2.15)$$

Inoltre, essendo i vettori ortogonali rispetto alle ipersuperfici, si hanno ripercussioni sulla metrica. Abbiamo così

$$u_a = -\delta_a^4 \quad e_{\alpha a} = l_\alpha \delta_a^\alpha \quad (2.16)$$

e quindi la metrica risulta

$$ds^2 = -dt^2 + \sum_{\alpha=1}^3 l_\alpha(x, t) (dx^\alpha)^2 \quad (2.17)$$

dove  $l_\alpha$  indica il riscaldamento delle lunghezze nelle tre direzioni dei vettori di base. Possiamo definire un fattore di scala medio, così che la velocità di espansione media

e le velocità di espansione nelle tre direzioni siano date da

$$\frac{\dot{l}}{l} = \frac{1}{3}\theta \quad \frac{\dot{l}_\alpha}{l_\alpha} = \sigma_\alpha + \frac{1}{3}\theta \quad (2.18)$$

Quindi,  $l$  è la media geometrica dei tre fattori, mentre  $\frac{1}{3}\theta$  è media delle velocità di espansione:

$$l = \prod_{\alpha=1}^3 l_\alpha^{1/3} \quad \frac{\dot{l}}{l} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\dot{l}_\alpha}{l_\alpha} \quad (2.19)$$

Con queste definizioni possiamo meglio osservare l'effetto del tensore di shear  $\sigma_{ab}$  in base agli autovalori. Consideriamo un elemento di fluido inizialmente sferico. Risulta che

- se vi sono due autovalori non negativi e uno strettamente negativo, la sfera tende ad appiattirsi. Questo corrisponde al fatto di avere una velocità di espansione in una direzione minore della velocità media
- se vi sono due autovalori negativi e uno positivo, la sfera tende ad una configurazione allungata. In questo caso due direzioni hanno velocità di espansione minore del valore medio locale.
- se due autovalori sono uguali, ovvero la shear è degenera, la configurazione piatta è uno sferoide oblato, mentre l'elungato è uno sferoide prolato.

Infine, seguendo una terminologia standardizzata, definiamo le singolarità come:

- *pointlike*, ovvero puntiforme, se tutte e tre  $l_\alpha \rightarrow 0$ .
- *cigar*, ovvero sigaro (in italiano detto anche carota), se due  $l_\alpha \rightarrow 0$  e il terzo tende all'infinito.
- *pancake* se due dei  $l_\alpha$  tendono ad un valore finito e il restante tende a zero all'avvicinarsi della singolarità.
- *cylinder* è il caso particolare in cui due tendono a zero e il restante ad un valore finito.

### 2.1.3 Le equazioni della dinamica

Abbiamo quindi introdotto le variabili necessarie per la descrizione della polvere.; esse sono  $\rho, \theta, \sigma_1, \sigma_2, E_1, E_2$ . Queste quantità possono essere viste come le componenti di un vettore  $X$  nello spazio delle fasi. Date le sei equazioni differenziali che governano l'evoluzione delle variabili, possiamo pensarle come il flusso sei-dimensionale di forma  $\dot{X} = V(x)$ , dove  $V$  ad ogni punto  $X$  è la tangente alle traiettorie nello spazio delle fasi. Il flusso  $V = V(X)$  è una funzione non lineare delle  $X$ , ovvero non dipendente dal tempo, così che le orbite nello spazio delle fasi non si intersecano. Abbiamo quindi il sistema autonomo:

$$\dot{\rho} = -\theta\rho \quad (2.20)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{3}\theta^2 - 2\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \frac{1}{2}\rho \quad (2.21)$$

$$\dot{\sigma}_1 = \frac{2}{3}\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{3}\sigma_1^2 - \frac{2}{3}\theta\sigma_1 - E_1 \quad (2.22)$$

$$\dot{\sigma}_2 = \frac{2}{3}\sigma_1(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{3}\sigma_2^2 - \frac{2}{3}\theta\sigma_2 - E_2 \quad (2.23)$$

$$\dot{E}_1 = E_1(\sigma_1 - \sigma_2) - E_2(\sigma_1 + 2\sigma_2) - \theta E_1 - \frac{1}{2}\rho\sigma_1 \quad (2.24)$$

$$\dot{E}_2 = E_2(\sigma_2 - \sigma_1) - E_1(\sigma_2 + 2\sigma_1) - \theta E_2 - \frac{1}{2}\rho\sigma_2 \quad (2.25)$$

La prima di queste equazioni è la conservazione della materia, la seconda è l'equazione di Raychaudhuri e le altre due coppie di equazioni rappresentano l'evoluzione della shear e della componente elettrica. Utilizzando (2.18) (2.19) (2.20) si ottiene

$$\rho = \frac{\rho_* l_*^3}{l_1 l_2 l_3} \quad (2.26)$$

dove le quantità contrassegnate con il pedice \* indicano le quantità ad un tempo arbitrario  $t_*$ . L'annullarsi di una delle distanze porta ad una singolarità. Per studiare la dinamica e le singolarità è conveniente introdurre un nuovo set di variabili adimensionali. Tuttavia, è possibile estrapolare diverse informazioni dal sistema già così presentato. In primo luogo è possibile possiamo vedere che  $divV = -5\theta$  e che dunque la divergenza dipende solo da  $\theta$ . Dunque, il sistema risulta dissipativo quando il fluido si espande ( $\theta > 0$ ) e al contrario quando si contrae. Inoltre, dall'equazione di Raychaudhuri osserviamo che  $\dot{\theta} < 0$ , con importanti implicazioni: una volta che  $\theta < 0$ , il collasso del fluido è irreversibile. L'unico punto stazionario del sistema risulta essere l'origine. Il sistema presentato ammette vari sottosistemi particolari. Il primo, immediato, è il caso del vuoto  $\rho = 0$ . Un altro è quello dei modelli piatti: questi sono dati da  $E_1 = E_2 = 0$ , una condizione che può essere mantenuta solo nel vuoto ( $\rho$ ) o se il campo è privo di shear. Per ultimo, sottolineiamo che questi modelli piatti nel vuoto,  $\rho = E_1 = E_2 = 0$ , corrispondono allo spazio di Minkowski. Il caso più particolare è quando  $\sigma_{ab}$  e  $E_{ab}$  ma per discuterne è necessario introdurre variabili adimensionali.

Introduciamo quindi un set di variabili adimensionali

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm \sigma_2) \quad E_{\pm} = \frac{1}{2}(E_1 \pm E_2) \quad (2.27)$$

con cui si ha un nuovo flusso  $\dot{Y} = \Psi(Y)$  nello spazio delle fasi  $\{\rho, \theta, \sigma_+, \sigma_-, E_+, E_-\}$ , dato dal sistema a sei dimensioni.

$$\dot{\rho} = -\theta\rho \quad (2.28)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{3}\theta^2 - 6\sigma_+^2 - 2\sigma_-^2 - \frac{1}{2}\rho \quad (2.29)$$

$$\dot{\sigma}_+ = \sigma_+^2 - \frac{1}{3}\sigma_-^2 - \frac{2}{3}\theta\sigma_+ - E_+ \quad (2.30)$$

$$\dot{\sigma}_- = -2\sigma_-\sigma_+ - \frac{2}{3}\theta\sigma_- - E_- \quad (2.31)$$

$$\dot{E}_+ = \sigma_-E_- - 3E_+\sigma_+ - \theta E_+ - \frac{1}{2}\rho\sigma_+ \quad (2.32)$$

$$\dot{E}_- = \sigma_-E_+ - 3E_-\sigma_+ - \theta E_- - \frac{1}{2}\rho\sigma_- \quad (2.33)$$

la cui divergenza risulta ancora  $\text{div } \Psi = -5\theta$  il cui unico punto stazionario è l'origine. Ora il caso particolare è evidente:  $\sigma_- = 0$  implica  $E_- = 0$  e tali condizioni corrispondono a  $\sigma_1 = \sigma_3$  e  $E_1 = E_3$  oppure a  $\sigma_2 = \sigma_3$  e  $E_2 = E_3$ . Osserviamo che tale sistema è simmetrico sotto il cambio simultaneo di  $\sigma_-$  e  $E_-$ , che corrisponde allo scambio del primo e secondo asse. Si riduce così ad un sistema a quattro dimensioni con le due coordinate appena dette nulle. Tuttavia, questa situazione si verifica anche sotto altre determinate condizioni sulle variabili, ovvero che  $\sigma_+ = \pm\frac{1}{3}\sigma_-$  e  $E_+ = \pm\frac{1}{3}E_-$ . In entrambi i sistemi di equazioni le dinamiche interessanti avvengono all'infinito nello spazio delle fasi sei-dimensionale e per studiare casi simili è utile ricorrere a nuove variabili ( $\Omega, \Sigma_+, \Sigma_-, \epsilon_+, \epsilon_-$ ) prive di dimensioni che sono direttamente correlate alle quantità fisiche nel modo seguente:

$$\rho = \frac{1}{3}\Omega\theta^2 \quad \sigma_{\pm} = \Sigma_{\pm}\theta \quad E_{\pm} = \epsilon_{\pm}\theta^2 \quad (2.34)$$

Per una maggiore chiarezza sui passaggi intrapresi e sulla scelta di queste variabili si rimanda all'Arnol'd [9] Si può osservare subito che tali variabili risultano inutili nello studio del cambio del segno dell'espansione, ovvero nel caso  $\theta = 0$ , ma si rivelano una buona scelta per lo studio del collasso e delle singolarità iniziali. Inoltre, utilizzando queste variabili il sistema si semplifica notevolmente, fornendo

$$\dot{\theta} = -\theta^2 \left( \frac{1}{3} + 6\Sigma_+^2 + 22\Sigma_-^2 + \frac{1}{6}\Omega \right) \quad (2.35)$$

$$\dot{G} = \theta F(G) \quad (2.36)$$

dove  $G$  è il vettore posizione nello spazio delle fasi 5-dimensionale  $\{\Omega, \Sigma_+, \Sigma_-, \epsilon_+, \epsilon_-\}$ . Ora il fattore  $\theta$  ha andamento lineare, tranne che nell'equazione di Raychaudhuri dove l'andamento è quadratico. In questo nuovo sistema i punti stazionari sono dati dall'origine, come in precedenza, ma anche dall'iperpiano stazionario  $\theta = 0$ . Tuttavia, dalla nostra analisi non considereremo il piano dato che, in tale caso, le altre variabili divergono. Ciò che faremo, invece, è di dividere l'analisi nel caso  $\theta > 0$  e  $\theta < 0$  e per farlo è necessario introdurre una nuova variabile "temporale"

$$\tau = \pm \int \theta dt = \pm 3 \ln(l) \quad (2.37)$$

dove con il segno + indichiamo quando  $\theta > 0$  e il segno - con  $\theta < 0$ . Questa scelta assicura che  $d\tau/dt > 0$  qualunque sia il segno del parametro di espansione. In più,  $\tau$  è una variabile conveniente, poiché  $\tau \rightarrow \infty$  nelle vicinanze del collasso ( $|G| \rightarrow \infty$ ) o la singolarità iniziale, quando  $\theta \rightarrow -\infty$ , quando  $l \rightarrow 0$ . Inoltre,  $\tau \rightarrow \infty$  segnala anche la completa impossibilità di una configurazione con espansione infinita: in



tal caso  $\theta \rightarrow 0$  ma  $l \rightarrow \infty$ . Riscriviamo ora il sistema indicando con ' la derivata rispetto a  $\tau$  e nel caso  $\theta < 0$

$$\theta' = \theta \left[ \frac{1}{3} + 2(3\Sigma_+^2 + \Sigma_-^2) + \frac{1}{6}\Omega \right] \quad (2.38)$$

e per le altre variabili

$$\Omega' = -\frac{1}{3}\Omega [12(3\Sigma_+^2 + \Sigma_-^2) - 1 + \Omega] \quad (2.39)$$

$$\Sigma_+' = \Sigma_+ \left[ \frac{1}{3} - 2(3\Sigma_+^2 + \Sigma_-^2) - \Sigma_+ - \frac{1}{6}\Omega \right] + \frac{1}{3}\Sigma_-^2 + \epsilon_+ \quad (2.40)$$

$$\Sigma_-' = \Sigma_- \left[ \frac{1}{3} - 2(3\Sigma_+^2 + \Sigma_-^2) + 2\Sigma_+ - \frac{1}{6}\Omega \right] + \epsilon_- \quad (2.41)$$

$$\epsilon_+' = \epsilon_+ \left[ \frac{1}{3} - 4(3\Sigma_+^2 + \Sigma_-^2) + 3\Sigma_+ - \frac{1}{3}\Omega \right] - \Sigma_- \epsilon_- + \frac{1}{6}\Sigma_+ \Omega \quad (2.42)$$

$$\epsilon_-' = \epsilon_- \left[ \frac{1}{3} - 4(3\Sigma_+^2 + \Sigma_-^2) - 3\Sigma_+ - \frac{1}{3}\Omega \right] - 3\Sigma_- \epsilon_+ + \frac{1}{6}\Sigma_- \Omega \quad (2.43)$$

Da qui si possono fare diverse osservazioni. In primo luogo le ultime cinque equazioni non dipendono più dal parametro dell'espansione e ciò significa che abbiamo ottenuto una riduzione dimensionale, dato che ora si può analizzare la dinamica del flusso cinque-dimensionale  $G' = \pm F(G)$  (+ per espansione, - per contrazione) dato dal sottosistema delle equazioni prive di  $\theta$ . Inoltre, il cambio di segno di  $\theta$  corrisponde ora ad un *time reversal*  $\tau \rightarrow -\tau$  e questo significa che le dinamiche sono esattamente speculari sotto *time reversal*, nel senso che le traiettorie nello spazio delle fasi sono esattamente le stesse per  $\theta < 0$  e  $\theta > 0$  con l'unica differenza che la direzione della tangente alle traiettorie è cambiata da  $\tau$  a  $-\tau$ , ovvero  $\theta \rightarrow -\theta \Leftrightarrow G' \rightarrow -G'$ . In particolare, data questa equivalenza, si hanno importanti ripercussioni sulla natura dei punti stazionari: punti stabili (attrattori) diventano instabili (repulsori) e viceversa. Ovviamente punti di sella rimarranno tali. In definitiva, lo spazio delle fasi durante la contrazione è l'immagine specchiata dello spazio delle fasi durante l'espansione, con lo "specchiare" che inverte la direzione del tempo. Studiamo ora in dettaglio i punti stazionari.

#### 2.1.4 I Punti Stazionari

I punti stazionari del sistema sono punti per valori finiti e costanti delle variabili  $\omega, \Sigma_{\pm}, \epsilon_{\pm}$ . Quindi, denotando con il pedice S i punti stazionari, l'equazione di Raychaudhuri ai punti stazionari si riduce

$$\theta' = \pm\beta\theta \quad \beta = \frac{1}{3} + 2(3\Sigma_{+S}^2 + \Sigma_{-S}^2) + \frac{1}{6}\Omega_S \quad (2.44)$$

dove qui e in ciò che seguirà il segno superiore si riferisce alla fase di contrazione  $\theta < 0$  e quello inferiore per la fase di espansione  $\theta > 0$ . Questo da

$$\theta = \theta_* e^{\pm\beta(\tau-\tau_*)} \quad (2.45)$$

e

$$e^{(\tau-\tau_*)} = [1 + \beta\theta_*(t - t_*)]^{\mp 1/\beta} \quad (2.46)$$

Questa relazione tra  $\tau$  e  $t$  chiarisce che  $\tau \rightarrow \infty$  quando una singolarità è prossima. Per  $\theta, l, l_\alpha$  abbiamo

$$\theta = \frac{\theta_*}{1 + \beta\theta_*(t - t_*)} \quad (2.47)$$

$$l = l_*[1 + \beta\theta_*(t - t_*)]^{1/3\beta} \quad (2.48)$$

$$l_\alpha = l_{\alpha*}[1 + \beta\theta_*(t - t_*)]^{p_\alpha} \quad (2.49)$$

dove  $p_\alpha = (1/\beta)[(1/3) + \Sigma_\alpha]$  e  $\Sigma_1 = \Sigma_+ + \Sigma_-$ ,  $\Sigma_2 = \Sigma_+ - \Sigma_-$ ,  $\Sigma_3 = -2\Sigma_+$ . Da queste relazioni si osserva che l'espansione e la contrazione di ogni modello dato dal punto stazionario è monotono e fissato dal segno di  $\theta_*$ . Alle dipendenze di questo segno vi è una singolarità, o nel passato (singolarità iniziale per  $\theta_* > 0$ ) a  $t - t_* = -(\beta\theta_*)^{-1}$  o nel futuro ( $\theta_* < 0$ ) a  $t - t_* = (\beta|\theta_*|)^{-1}$ .

## CAPITOLO 3

---

### Studio dei punti stazionari

---

Fino ad ora abbiamo solamente studiato la forma delle equazioni che regolano la dinamica della nuvola di polvere, senza soffermarci troppo sui punti stazionari. In questo capitolo ci concentreremo su tale analisi in maniera approfondita. In particolare, in primo luogo analizzeremo il sottocaso delle soluzioni di Szekeres. Infatti, prima di procedere con l'analisi del più complicato sistema a cinque dimensioni, consideriamo il caso degenero con  $\Sigma_- = \epsilon_- = 0$ . Questo è descritto dal flusso tridimensionale  $g' = \pm f(g)$ , dove ancora il  $+$  rappresenta l'espansione e  $-$  la contrazione. Tale flusso risiede nello spazio delle fasi  $SZ3 = \{\Omega, \Sigma_+, \epsilon_+\}$  e può essere visualizzato, risultando istruttivo anche nel caso più generale. Di questo sottocaso troveremo i punti stazionari e ne individueremo la tipologia e il modello afferente e, inoltre, vedremo anche l'andamento asintotico delle traiettorie attorno ad alcuni punti. Successivamente, torneremo al caso generale triassiale e mostreremo che i modelli *silent* ammettono, nella fase di contrazione, un set di punti attrattivi, set che risulterà essere una curva chiusa nello spazio delle fasi a 5 dimensioni. Infine, anche nel caso più generale, studieremo l'andamento asintotico delle traiettorie nelle vicinanze dei punti stazionari.

### 3.1 Dinamica dei modelli di Szekeres

I modelli di Szekeres([8]) generalizzano le soluzioni Kanrowski-Sachs, FRW e Tolman-Bondi e sono studiati in grande dettaglio da molti autori interessati al caso delle equazioni di Einstein per le soluzioni inomogenee, senza simmetrie. Infatti, la metrica generalizzata proposta da Szekeres "sposta" i "centri di simmetria" in una maniera ben determinata. Il nostro elaborato è lungi dal descriverli in maniera dettagliata (si rimanda alla bibliografia) ma ci basta sapere che i modelli di polvere irrotazionale con la componente del campo magnetico nulla e con campi shear e elettrico degeneri (ovvero con due eguali autovalori) sono soluzioni di quelli Szekeres. Sebbene i modelli di Szekeres siano spesso divisi in due classi, la loro evoluzione

lungo le linee di flusso è la stessa per entrambe e dunque, essendo interessati proprio a questo, non le distingueremo.

### 3.1.1 Un panorama dello Spazio delle Fasi

Durante la fase di contrazione  $\theta < 0$  la dinamica dei modelli di Szekeres è data dai vincoli  $\Sigma_- = \epsilon_- = 0$  nelle equazioni del capitolo precedente. Otteniamo, dunque, otteniamo un sottosistema autonomo tridimensionale in SZ3,  $g' = -f(g)$ , ovvero

$$\Omega' = -\frac{1}{3}\Omega (36\Sigma_+^2 - 1 + \Omega) \quad (3.1)$$

$$\Sigma_+' = \Sigma_+ \left[ \frac{1}{3} - \Sigma_+ (1 + 6\Sigma_+) - \frac{1}{6}\Omega \right] + \epsilon_+ \quad (3.2)$$

$$\epsilon_+' = \epsilon_+ \left[ \frac{1}{3} - 3\Sigma_+ (4\Sigma_+ - 1) - \frac{1}{3}\Omega \right] + \frac{1}{6}\Sigma_+\Omega \quad (3.3)$$

mentre, ad ogni punto  $g$  di SZ3, l'equazione di Raychaudhuri da  $\tau = \tau(g)$ :

$$\theta' = \theta \left( \frac{1}{3} + 6\Sigma_+^2 + \frac{1}{6}\Omega \right) \quad (3.4)$$

La divergenza  $\text{div} f$  del flusso  $f$  in SZ3 è  $\text{div} f < 0$  per

$$\Omega > \frac{6}{7} (1 + \Sigma_+ - 42\Sigma_+^2) \quad (3.5)$$

Quindi, per  $\theta < 0$  il flusso  $f$  converge dappertutto in SZ3, tranne sotto la parabola individuata dalla disuguaglianza e, inoltre, si può osservare che la divergenza non dipende da  $\epsilon_+$ . Dall'equazione 3.1 osserviamo che le traiettorie non possono attraversare il piano  $\Omega = 0$ , che corrisponde al fatto che solo la sezione  $\Omega \geq 0$  dello spazio delle fasi ha significato fisico. Inoltre, dall'equazione 3.1 vediamo che  $\Omega' < 0$  per  $\Omega > 1 - 36\Sigma_+^2$ , ovvero ovunque l'equazione 3.5 è soddisfatta.

Dunque, si può concludere che per  $\theta < 0$  *generiche traiettorie in SZ3 convergono nel piano  $\Omega = 0$*  e dunque ci aspettiamo di trovare punti stazionari su questo piano. Possiamo allora trovare questi punti stazionari  $g_s$  e anche la loro natura studiando la Jacobiana del sistema e valutandola in ogni punto e ricavando i tre autovalori. I punti sono elencati nella Tabella 1, mentre gli autovalori sono presentati nella Tabella 2.

**Tabella 3.1:** Punti Stazionari per i modelli degeneri

Punto	$\Omega$	$\Sigma_+$	$\epsilon_{-+}$	Contrazione	Espansione	modello
DI	1	0	0	Sferico	Sferico	FRW piatto
DII	0	0	0	Sferico	Sferico	Milne
DIII	0	1/6	0	Prolato	Oblato	Szekeres
DIV	0	-1/3	0	Oblato	Prolato	Kasner
DV	0	1/3	2/9	Prolato	Oblato	Kasner
DVI	0	-1/12	1/32	Oblato	Prolato	Szekeres
DVII	-3	-1/3	1/6	...	...	Non fisico

I punti con tutti gli autovalori negativi sono *asintoticamente stabili*; al contrario i punti con tutti gli autovalori positivi sono *instabili*; infine, i punti con almeno due autovalori di segno diverso sono punti di sella e dunque instabili. Come mostrato nel capitolo precedente, sappiamo che la parte destra delle equazioni 3.1-3.3 cambiano segno sotto l'inversione temporale, ovvero considerando la fase di espansione  $\theta > 0$ . Quindi, anche la Jacobiana cambia di segno, assieme alla traccia della  $\text{div } f$  e autovalori  $\lambda_i$ . Dunque, l'inuguaglianza 3.5 è opposta nella fase di espansione e le generiche traiettorie, questa volta, "fuggono" dal piano  $\Omega = 0$ . Di conseguenza gli autovalori cambiano di segno durante l'espansione e la contrazione e cambia di conseguenza anche la natura dei punti stazionari. Tale natura è descritta nella seconda tabella, in entrambi i casi. Per meglio illustrare il comportamento delle traiettorie nello spazio delle fasi SZ3, si presenta un plot del flusso di  $f$  sopra i punti DII e DV, durante la fase di contrazione. Da queste figure si vede chiaramente come durante la contrazione il punto DII ha carattere repulsivo, sebbene il flusso  $-f$  sopra di esso sia diretto verso il basso per valori all'incirca  $\Omega \lesssim 1$ ; il flusso  $-f$  sopra il punto DV è diretto verso di lui e DV è attrattivo.

**Tabella 3.2:** Autovalori della Jacobiana

Punto	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	Contrazione	Espansione
DI	-1/3	-1/3	1/2	Sella	Sella
DII	1/3	1/3	1/3	Repulsore	Attrattore
DIII	0	-1/2	1/2	Sella	Sella
DIV	-1	-1	-2	Attrattore	Repulsore
DV	-1	-5/3	-2/3	Attrattore	Repulsore
DVI	1/4	-1/4	5/8	Sella	Sella
DVII	-1	-1/2	1	Sella	Sella

La Figura 2 rappresenta la sezione sul piano  $\Omega = 0$  durante il collasso. La prima rappresentazione è data sul disco di Poincaré durante la contrazione, ovvero una mappa conforme del piano  $\{\Sigma_+, \epsilon_*\}$ , così che i margini rappresentino l'infinito nel piano. La seconda, invece, rappresenta la parte centrale dello stesso piano e include i cinque punti stazionari, durante l'espansione. Un confronto tra Figura 1 e Figura 2 rivela come, sopra ogni punto e per  $\Omega$  abbastanza piccolo, le traiettorie siano incredibilmente simili per  $\Omega = 0$ .

### 3.1.2 Interpretazione dei punti stazionari

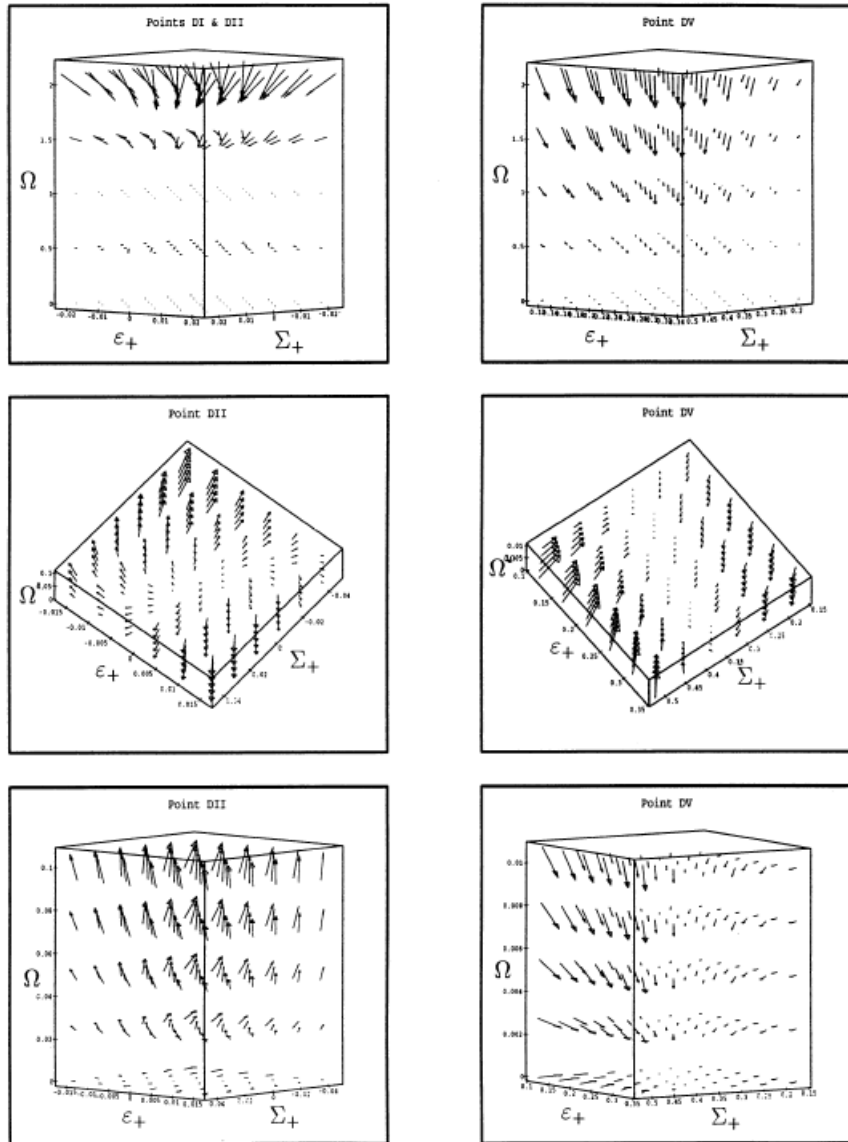
Diamo ora una interpretazione dei punti stazionari elencati nella Tabella 1. Ribadiamo che i punti sono gli stessi durante l'espansione  $\theta \geq 0$  e la contrazione  $\theta < 0$ . In generale, i punti stazionari rappresentano modelli che o si espandono per sempre da una singolarità iniziale (quando scegliamo il caso dell'espansione), o contraggono dall'infinito ad una singolarità futura (per  $\theta < 0$ , ovvero l'inverso temporale del primo caso). I valori di  $\beta$  e degli esponenti  $p_\alpha$  nell'equazione  $l_\alpha = l_{\alpha*}[1 + \beta\theta_*(t - t_*)]^{p_\alpha}$  sono dati dalla Tabella 3. Dunque, nel punto DI rappresenta un modello FRW piatto, non avendo componenti del di shear e di campo di marea. Il punto DII

rappresenta uno spazio *void* (vuoto in senso astronomico) conformemente piatto e privo di shear, localmente equivalente ad un modello di FRW aperto e vuoto (detto universo di Milne). Il punto DIII è una soluzione del vuoto non presente in letteratura. Usando i suoi valori dei parametri  $\beta$  e  $p_\alpha$ , è facile verificare che il punto DIV rappresenta un modello di Kasner (ovvero un universo anisotropo senza materia) con due direzioni in cui non vi è espansione e una singolarità a *pancake*. Similmente, il punto DV rappresenta un altro caso degenero di un modello di Kasner, con due direzioni che si espandono egualmente e una che si contrae, con una singolarità a sigaro. Il punto DVI è il limite della sottoclasse dei modelli Szekeres (verrà spiegato in maniera dettagliata più avanti). Il punto DVII è chiaramente non fisico, avendo  $\Omega < 0$ . In generale, configurazioni con  $\Sigma_+ > 0 (< 0)$  rappresentano un elemento di fluido sferico prolato (oblato) durante la contrazione (espansione).

**Tabella 3.3:** Esponenti e tipo di singolarità per le soluzioni stazionarie

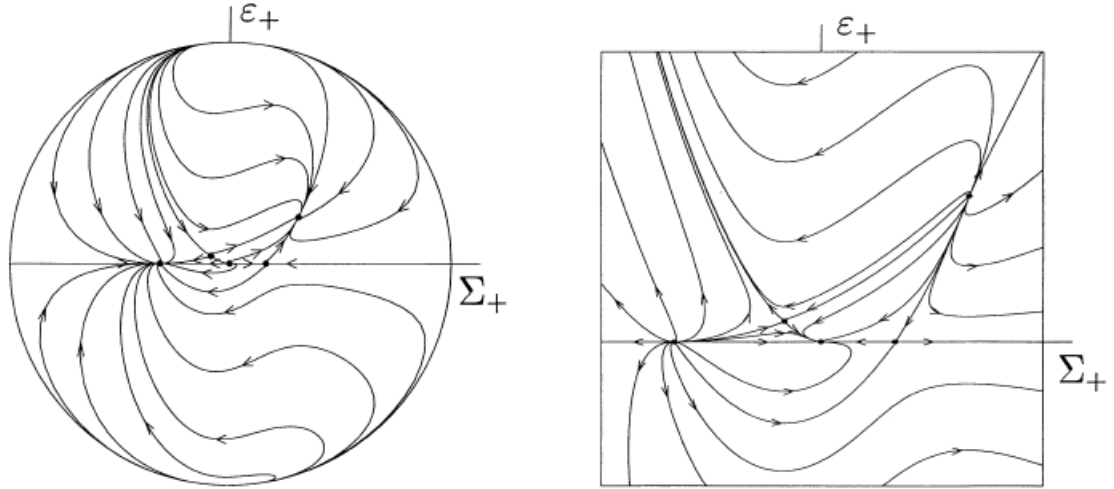
Punto	$\beta$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	Singolarità
DI	1/2	2/3	2/3	2/3	Puntiforme
DII	1/3	1	1	1	Puntiforme
DIII	1/2	1	1	0	Cilindrica
DIV	1	0	0	1	Pancake
DV	1	2/3	2/3	-1/3	Spindle
DVI	3/8	2/3	2/3	4/3	Puntiforme
DVII	1	$\Sigma p_\alpha = \Sigma p_\alpha^2 = 1$			Spindle o Pancake

Più dei punti stazionari, risultano degni di interesse i comportamenti delle traiettorie negli intorni di tali punti nello spazio delle fasi. Per i modelli di Szekeres, gli andamenti posso essere descritti studiando la Jacobiana  $J(g_s) = -[\partial f/\partial g](g_s)$  e i suoi autovalori, osservati per ogni punto  $g_s$  del sistema di equazioni 3.1-3.3. Questi autovalori sono elencati nella Tabella 2 per  $\theta < 0$ , ovvero nella fase di contrazione. I punti DI DIII e DVI sono sella e, dunque, sono instabili in ogni caso, tranne per peculiari condizioni iniziali. Il punto DII è un punto di repulsione durante la contrazione e un attrattore durante l'espansione: *rappresenta il destino finale degli universi voids che si espandono per sempre*, localmente equivalenti ad un universo di Milne. Il punto DIII è un punto di sella nel piano  $\{\Sigma_+, \epsilon_*\}$  ed è caratterizzato da un autovalore che scompare nella direzione fuori dal piano: è una soluzione del vuoto non ben identificata, ma essendo una sella, non desta alcun interesse. I punti DIV e DV Kasner sono repulsori durante l'espansione e attrattori durante il collasso. Dunque, il punto DIV rappresenta il destino finale dei pancake localmente antisimmetrici e il punto DV quello degli spindle. Il punto DVI è una sella, ma durante l'espansione ha solo un autovalore positivo e dunque vi è un set di traiettorie che ricadono su di esso. Questo punto corrisponde al limite  $t \rightarrow \infty$  dei modelli di Szekeres studiati da Bonnor e Tomimura. Il punto D VII è instabile.



**Figura 3.1:** Flusso dello spazio delle fasi per i modelli di Szekeres durante la contrazione  $\theta < 0$ , sopra i punti DII e DV. La lunghezza delle frecce è riscalata per ogni caso. Dall'alto al basso, sulla colonna sinistra: (*primo*) il flusso sopra il punto DII fino a  $\Omega \approx 2$ , includendo anche DI; (*secondo*) vista dall'alto del flusso sopra DI; (*terzo*) vista laterale del flusso sopra il punto DII. Sulla destra (dall'alto al basso): (*primo*) vista laterale del flusso sopra il punto DV fino a  $\Omega \approx 2$ ; (*primo*) vista dall'alto sopra il punto DV; (*terzo*) vista laterale.

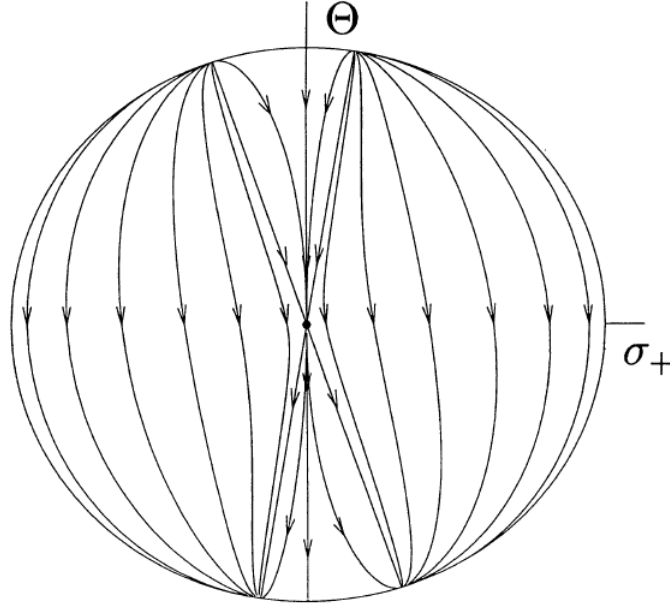
Veniamo ora alla Figura 2: i due plot rappresentano lo stesso piano e le stesse traiettorie ma differiscono nello scenario in quanto il primo rappresenta il collasso e il secondo l'espansione. I due attrattori D IV e D V nella prima figura sono instabili nella seconda, mentre l'origine, nel caso  $\theta > 0$ , è stabile e rappresenta lo stato finale dei voids. In particolare i tre punti sulla linea da sinistra a destra sono DIV, DII e DIII. I due punti sopra l'asse  $\epsilon_* = 0$  sono DVI (a sinistra) e DV (destra).



**Figura 3.2:** Il piano  $\Omega = 0$  vuoto per i modelli di Szekeres. *Sinistra:* il disco di Poincaré del piano  $\Sigma_+, \epsilon_+$  è mostrato per  $\theta < 0$ . *Destra:* la regione centrale del piano, includendo anche tutti i 5 punti stazionari per  $\theta > 0$ , mentre l'origine è ora stabile: rappresenta il destino finale dei voids. Dato che  $H_{ab} = 0$  per ipotesi,  $\rho = 0$  sul piano nella figura,  $\epsilon_+ = 0$  rappresenta lo spaziotempo di Minkowski: i tre punti sulla linea da sinistra a destra sono DIV, DII e DIII. I due punti sopra sono DVI (sinistra) e DV (destra).

Infine, la Figura 3 mostra il disco di Poincaré per il sottocaso  $\epsilon = \Omega = 0$ , ovvero per i modelli di Minkowski menzionati che appaiono nella Figura 2 sulla linea  $\epsilon_- = 0$ . Dato che solo  $\Sigma_+$  varia per questi modelli, si può ricorrere alle variabili  $\sigma_+$  e  $\theta$ , mostrando, quindi, la transizione da espansione a collasso. Sebbene le traiettorie nel piano  $\{\sigma_+, \theta\}$  siano semplicemente lo spaziotempo di Minkowski descritto in altre coordinate, rendono un'idea del comportamento generale. Il punto stazionario centrale è Minkowski nella sua forma comune (statica e priva di shear). In questa mappa conforme, le linee rette rimangono rette: l'asse verticale  $\sigma_+ = 0$  è un universo di Milne e il punto DII che si espande nella parte superiore e si contrae in quella inferiore. Le due linee  $\theta = 6\sigma_+$  e  $\theta = -3\sigma_+$  corrispondono ai punti DIII e DIV, rispettivamente. Le traiettorie racchiuse tra queste due linee nella parte superiore (inferiore) rappresentano schematicamente il comportamento dei voids che si espandono (contraggono) sempre. Le traiettorie al di fuori di queste due linee rappresentano configurazioni che prima si espandono e poi si contraggono e all'infinito le traiettorie vi tendono asintoticamente.





**Figura 3.3:** Il disco di Poincaré del piano  $\theta, \sigma_+$  che corrisponde all'asse  $\epsilon_+ = 0$  in Fig 2. Il comportamento di queste traiettorie nello spazio di Minkowski illustrano semplicemente che il caso di situazioni più complicate. Il punto stazionario centrale è uno spaziotempo di Minkowski nella sua forma usuale (statico e privo di shear). In queste mappe conformi le linee rette rimangono rette: l'asse verticale  $\sigma_+ = 0$  è un universo di Milne; il punto DII (che si espande nella metà superiore e si contrae in quella inferiore); due linee rette  $\theta = 6\sigma_+$  e  $\theta = -3\sigma_+$  corrispondono ai punti DIII e DIV rispettivamente.

### 3.1.3 Le traiettorie Szekeres

Riportiamo qui la soluzione del sistema del caso ristretto al caso degenere per i modelli di Szekeres, ovvero  $\sigma_- = 0$  e  $E_- = 0$ . Ci concentreremo qui sulla soluzione delle equazioni che descrivono l'evoluzione temporale, senza considerare la dipendenza spaziale delle varie quantità, ovvero senza dovere studiare le equazioni che vincolano lo spazio. L'analisi che si segue è quella di Goode e Wainwright (1982) [4], variando leggermente la notazione e interessandoci, come già detto, solo alla evoluzione temporale. Fino ad un cambio di scala che è costante lungo le linee di flusso, possiamo scrivere

$$l_1(x, t) = l_2(x, t) = S(x, t) \quad (3.6)$$

e

$$l_3(x, t) = S(x, t)Z(x, t) \quad (3.7)$$

che implica  $\rho = M/S^3Z$ , con  $M$  una costante di integrazione che dipende dallo spazio, e

$$\theta = 3\frac{\dot{S}}{S} + \frac{\dot{Z}}{Z} \quad \sigma_+ = -\frac{1}{3}\frac{\dot{Z}}{Z} \quad (3.8)$$

Sostituendo le espressioni nelle equazioni di evoluzione temporale, otteniamo

$$E_+ = -\frac{M}{6S^3Z} + \frac{N}{S^3} \quad (3.9)$$

dove  $N$  è un'altra costante di integrazione che generalmente dipende dallo spazio. Le equazioni di evoluzione per l'espansione scalare e la shear sono semplificate dall'introduzione della funzione  $F = Z - M/6N$  che porta alle equazioni

$$\ddot{F} + 2\frac{\dot{S}}{S}\dot{F} = 3\frac{N}{S^3}F \quad (3.10)$$

$$\ddot{S} = -\frac{N}{S^2} \quad (3.11)$$

L'ultima equazione può essere integrata per ottenere

$$\left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 = 2\frac{N}{S^3} - \frac{k}{S^2} \quad (3.12)$$

dove  $k$  è una costante di integrazione. Riscalando  $S$  e  $N$  si può normalizzare  $k$  affinché possa assumere valori  $1, 0, -1$ . Dunque, è chiaro che la funzione  $S$  è equivalente al fattore di scala dei modelli FRW nella fase dominata dalla materia, nel senso che, per ogni elemento di fluido,  $S$  soddisfa l'equazione di Friedmann per un modello aperto, piatto o chiuso, a seconda del valore di  $k$ . La funzione  $F$ , invece, soddisfa l'equazione 3.10 che è l'equazione delle perturbazioni lineari attorno a FRW. Si ha

$$F = -\beta^{(+)}f^{(+)} - \beta^{(-)}f^{(-)} \quad (3.13)$$

dove  $f^{(+)}$  e  $f^{(-)}$  rappresentano i modi di crescita e decrescita delle perturbazioni lineari attorno a FRW e  $\beta^{(+)}$ ,  $\beta^{(-)}$  determinano le corrispondenti estensioni (generalmente dipendenti dallo spazio). Le soluzioni delle equazioni 3.10 e 3.12 possono essere trovate, per esempio nel Peebles(1980) [7]. Riportiamo le soluzioni.

$$S = Nh'(\eta) \quad t - t_0 = Nh(\eta) \quad (3.14)$$

dove

$$h(\eta) = \begin{cases} \sinh(\eta) - \eta & , \quad k = -1 \\ \frac{1}{6}\eta^3 & , \quad k = 0 \\ \eta - \sin(\eta) & , \quad k = +1 \end{cases} \quad (3.15)$$

qui l'indice denota la differenziazione rispetto all'*angolo di sviluppo*  $\eta$  e  $t_0$  è una costante (generalmente dipendente dallo spazio). I modi di crescita e decrescita sono

$$f^{(+)} = \begin{cases} \frac{6N}{S} \left[1 - \left(\frac{\eta}{2}\right) \coth\left(\frac{\eta}{2}\right)\right] + 1 & , \quad k = -1 \\ \frac{1}{10}\eta^2 & , \quad k = 0 \\ \frac{6N}{S} \left[1 - \left(\frac{\eta}{2}\right) \cot\left(\frac{\eta}{2}\right)\right] - 1 & , \quad k = +1 \end{cases} \quad (3.16)$$

$$f^{(-)} = \begin{cases} \frac{6N}{S} \coth\left(\frac{\eta}{2}\right) & , \quad k = -1 \\ 24\eta^3 & , \quad k = 0 \\ \frac{6N}{S} \cot\left(\frac{\eta}{2}\right) & , \quad k = +1 \end{cases} \quad (3.17)$$

Goode e Wainwright mostrarono che, per  $k = -1$  oppure  $0$ , la singolarità finale nei modelli di Szekeres può essere solo di tipo pancake e corrisponde a  $Z \rightarrow =$ ; per  $k = +1$  la singolarità è puntiforme quando  $\beta^{(+)} = \beta^{(-)}/\pi$  (in corrispondenza di  $S \rightarrow 0$ ), a sigaro quando  $\beta^{(+)} < \beta^{(-)}/\pi$  (sempre per  $S \leftarrow 0$  e a pancake quando  $\beta^{(+)} > \beta^{(-)}/\pi$  (quando  $Z \rightarrow = 0$ ).

## 3.2 Dinamica Triassiale

In questa sezione studiamo i punti stazionari del sistema triassiale generale, con particolare enfasi sul set di punti attrattivi che è dato dalla famiglia di soluzioni di Kasner del vuoto. Successivamente, descriveremo il comportamento asintotico delle traiettorie nelle vicinanze di ogni punto DI-DVI, per una condizione arbitraria iniziale nell'intorno dello spazio delle fasi cinque-dimensionali PS5.

### 3.2.1 Set di attrattori Kasner durante la contrazione

Studiamo ora la dinamica triassiale che risulta essere simile ai modelli Szekeres. Anche in questo caso, durante il collasso, le traiettorie sono dirette verso il piano  $\Omega = 0$ , dato che l'equazione

$$\Omega' = -\frac{1}{3}\Omega [12(3\Sigma_+^2 + \Sigma_-^2) - 1 + \Omega] \quad (3.18)$$

implica  $\Omega' < 0$  e

$$\text{div}G < 0 \quad \Omega > 1 - 12\Sigma^2 \quad (3.19)$$

dove  $\Sigma^2 = 3\Sigma_+^2 + \Sigma_-^2$  è la grandezza della shear priva di dimensioni. Vi è, tuttavia, una importante differenza: in aggiunta ai punti DI-DVII (che ovviamente sono stazionari anche per il caso generale) vi sono ora famiglie di punti stazionari che formano una curva chiusa in PS5 e che sono attrattori durante la fase di contrazione.

**Tabella 3.4:** Punti stazionari per il sistema triassiale (T) generale

Punto	$\Omega$	$\Sigma_+$	$\Sigma_-$	$\epsilon_+$	$\epsilon_-$	Collasso	Espansione	Modello
TI	0	-1/12	1/4	0	0	Allungato	Piatto	Szekeres
TII	0	1/24	1/8	-1/64	-3/64	Piatto	Allungato	Szekeres
TIII	0	$\Sigma_+$	$\Sigma_-(\Sigma_+)$	$\epsilon_+(\Sigma_+)$	$\epsilon_-(\Sigma_+)$	Allungato o Piatto		Kasner
TIV	-3	1/6	1/2	-1/12	-1/4	...	...	Non fisico

I nuovi punti sono elencati nella Tabella 4. Per ogni punto  $T$  vi è il corrispettivo  $\bar{T}$  dato dalla mappa  $\Sigma_- \rightarrow -\Sigma_-$ ,  $\epsilon_- \rightarrow -\epsilon_-$ . Gli autovalori  $\lambda_i$  della Jacobiana  $J = -F(G_s)$  ad ogni punto stazionario del sistema (2.39)-(2.43) sono dati nella successiva tabella.

Tabella 3.5: Autovalori della Jacobiana e tipologia di punto

Punto	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	Collasso	Espansione
DI	-1/3	1/2	1/2	-1/3	-1/3	Sella	Sella
DII	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	Repulsore	Attrattore
DIII	0	-1/2	-1/2	1/2	1/2	Sella	Sella
DIV	-1	0	-2	-1	-1	Attrattore	Repulsore
DV	-1	0	-2/3	-5/3	-5/3	Attrattore	Repulsore
DVI	1/4	1/4	5/8	$5/16-i\sqrt{15}/16$	$5/16+i\sqrt{15}/16$	Sella	Sella
DVII	-1	-1/2	1	$1/4-i7/4$	$1/4+i7/4$	Sella	Sella
TI	0	-1/2	-1/2	1/2	1/2	Sella	Sella
TII	1/4	-1/4	5/8	$5/16-i\sqrt{15}/16$	$5/16+i\sqrt{15}/16$	Sella	Sella
TIII	-1	0	$-4/3+2\Sigma_+$	$-4/3-\Sigma_+ - \sqrt{1-9\Sigma_+^2}/\sqrt{3}$	$-4/3-\Sigma_+ + \sqrt{1-9\Sigma_+^2}/\sqrt{3}$	Attrattore	Repulsore
TIV	-1	-1/2	1	$1/4-i\sqrt{7}/4$	$1/4+i\sqrt{7}/4$	Sella	Sella

Il valore di  $\beta$  nell'equazione dei punti stazionari e gli esponenti  $p_\alpha$  sono in Tabella 3. I punti *TI* e *TII* sono repliche di *DIII* e *DVI*. I punti della famiglia *TIII* sono parametrizzati da  $\Sigma_+$

$$\Sigma_-(\Sigma_+) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-9\Sigma_+^2} \quad (3.20)$$

$$\epsilon_+(\Sigma_+) = \frac{1}{3}\Sigma_+ (6\Sigma_+ + 1) - \frac{1}{9} \quad (3.21)$$

$$\epsilon_-(\Sigma_+) = -\frac{\sqrt{3}}{9} (6\Sigma_+ - 1) \sqrt{1-9\Sigma_+^2} \quad (3.22)$$

con la condizione  $-\frac{1}{3} \leq \Sigma_+ \leq \frac{1}{3}$ . Dunque, la famiglia *TIII* è una curva nello spazio delle fasi 5-dimensionale PS5 e, in particolare, giace sull'iperpiano  $\Omega = 0$ . Chiamiamo ora  $\Lambda = \Lambda(\Sigma_+)$  la curva parametrizzata da  $\Sigma_+$  che è proiettata sul piano  $\{\Sigma_+, \Sigma_-\}$  sull'ellisse

$$3\Sigma^2 = 9\Sigma_+^2 + 3\Sigma_-^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\theta^2 \quad (3.23)$$

L'ellisse può essere rappresentato nella forma parametrica usando la grandezza  $\Sigma$  della shear adimensionale e l'angolo  $\alpha$  nel piano  $\{\Sigma_+, [1/\sqrt{3}]\Sigma_-\}$ . Allo stesso modo la curva  $\Lambda$  in PS5 è proiettata nel piano  $\{\epsilon_+, \epsilon_-\}$  attraverso le equazioni (??)-?? e può essere rappresentata in forma parametrica attraverso la grandezza  $\epsilon^2 = 3\epsilon_+^2 + \epsilon_-^2$  e l'angolo  $\beta$  nel piano  $\{\epsilon_+, [1/\sqrt{3}]\epsilon_-\}$ . Dato che la curva è parametrizzata da  $\Sigma_+$ ,  $\beta$  è funzione di  $\alpha$  e usando  $\beta = -\frac{1}{2}\alpha$  otteniamo le curve.

$$\Sigma_+ = \frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma_\Lambda \cos(\alpha) \quad \Sigma_- = \Sigma_\Lambda \sin(\alpha) \quad (3.24)$$

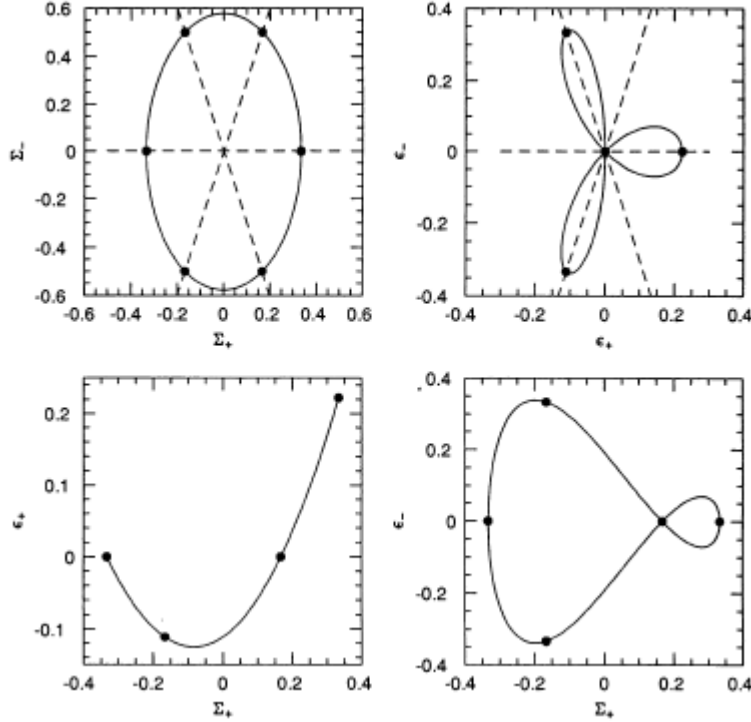
e

$$\epsilon_+ = \frac{1}{\sqrt{3}}\epsilon_\Lambda(\beta) \cos(\alpha) \quad \epsilon_- = \epsilon_\Lambda(\beta) \sin(\alpha) \quad (3.25)$$

con

$$\Sigma_\Lambda = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \epsilon_\Lambda(\beta) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cos(3\beta) \quad (3.26)$$

Queste curve sono mostrate in Figura 4, dove nel piano  $\{\epsilon_+, [1/\sqrt{3}]\epsilon_-\}$  vi è una curva caratterizzata da tre lobi con periodo  $\pi$ .



**Figura 3.4:** Rappresentazione (*in alto*) dell'intera famiglia di attrattori  $\{TIII, \overline{TIII}\}$  tramite i due piani.

Le linee tratteggiate corrispondono a  $\Sigma_-/\Sigma_+ = 0, \pm 3$  e  $\epsilon_-/\epsilon_+ = 0, \pm 3$  alle configurazioni degeneri e dividono i piani in sei settori fisicamente equivalenti. I punti, invece, rappresentano i punti degeneri di attrattori. Lo spindle è  $\Sigma_+ = \frac{1}{3}$ , con le due repliche per  $\Sigma_+ = -\frac{1}{6}$ ; Gli altri tre punti sono il pancake. Quest'ultimo appare nell'origine del piano  $\{\epsilon_+, \epsilon_-\}$  assieme alle repliche. Gli altri punti su tale piano sono solo spindles.

La curva  $\Lambda$  include tutti punti di  $TIII$  e  $\overline{TIII}$  con le configurazioni degeneri Szekeres rappresentate dai punti nelle intersezioni con le curve  $\Sigma_- = \epsilon_- = 0$ ,  $\Sigma_- = \pm 3\Sigma_+$  e  $\epsilon_- = \pm 3\epsilon_+$  rappresentati dalle linee tratteggiate. Sulla curva  $\Lambda$  i punti  $TIV$ ,  $\overline{TIV}$  sono repliche di D VII: tutti i punti stazionari non fisici sono degeneri. Il punto  $TIII$  con  $\Sigma_+ = -\frac{1}{3}$  è DIV e i punti  $TIII$  e  $\overline{TIII}$  con  $\Sigma_+ = \frac{1}{6}$  sono repliche: queste sono le uniche soluzioni della famiglia di punti che finiscono in una singolarità pancake. Il punto  $TIII$  con  $\Sigma_+ = \frac{1}{3}$  è DV e  $TIII, \overline{TIII}$ , con  $\Sigma_+ = -\frac{1}{6}$  sono le repliche. Queste soluzioni finiscono in una singolarità a sigaro. Durante il collasso (espansione) i punti in  $TIII$  rappresenta ellissoidi piatti (allungati) per  $-1/3 \leq \Sigma_+ \leq -1/[2\sqrt{3}]$  e per  $0 \leq \Sigma_+ \leq -1/[2\sqrt{3}]$ , e ellissoidi allungati (piatti) per  $-1/[2\sqrt{3}] \leq \Sigma_+ \leq 0$  e per  $-1/[2\sqrt{3}] \leq \Sigma_+ \leq 1/3$ . Usando nelle equazioni

$$ds^2 = -dt^2 + \sum_{\alpha=1}^3 l_\alpha(x, t)(dx^\alpha)^2 \quad l_\alpha = l_{\alpha*}[1 + \beta\theta_*(t - t_*)]^{p_\alpha} \quad (3.27)$$

i valori di  $\beta$  e  $p_\alpha$  dati nella Tabella 3, è facile verificare che le intere famiglie di  $TIII, \overline{TIII}$ , localmente, corrisponde alle soluzioni del vuoto Kasner della relatività

generale. In questo set vi è una sola singolarità a pancake (data da DIV e le repliche), mentre la singolarità generica per un modello Kasner è spindle.

Nella Tabella 5 sono mostrati gli autovalori della Jacobiana  $J(G_s)$  calcolata in ogni punto stazionario  $G_s$  del sistema generale di equazioni, per  $\theta < 0$  (ricordando che i segni si invertono tutti nel caso dell'espansione). Sono anche inclusi i punti DI-DVII del caso Szekeres, già elencati nella Tabella 1, affinché si possano vedere meglio le proprietà di stabilità nell'intero spazio delle fasi PS5. In particolare, il punto DI, che rappresenta il modello FRW piatto, è ancora una volta una sella e dunque instabile sia durante la contrazione sia durante l'espansione. Il punto DII (modello di Milne) è ancora una volta un attrattore per i voids in espansione. Osservando gli autovalori  $\lambda$ , è immediato notare che i punti  $TI, TII$ , e  $TIV$ , rispettivamente, equivalenti a DIII, DVI e DVII. Inoltre, i punti DIV e DV sono inclusi nella famiglia  $TIII$  e i loro autovalori sono ottenuti imponendo i vincoli  $\Sigma_+ = -\frac{1}{3}$ ,  $\Sigma_+ = \frac{1}{6}$  e  $\Sigma_+ = -\frac{1}{6}$ ,  $\Sigma_+ = \frac{1}{3}$  negli autovalori della famiglia  $TIII$ . Osserviamo che il punto DII è asintoticamente stabile nella fase espansiva, essendo tutti gli autovalori negativi.

Tutti i punti di sella sono degeneri e hanno almeno due autovalori di segno opposto: quello negativo corrisponde all'autovalore nella direzione delle traiettorie speciali lungo le quali ci si avvicina al punto. Per esempio, nella fase di contrazione il modello FRW chiuso e il modello di Szekeres finiscono nel punto DI.

I punti della famiglia  $TIII$  hanno  $\lambda_2 = 0$  e  $\lambda_i < 0 (i \neq 2)$  durante la contrazione. Dunque, il risultato dell'analisi della stabilità della linearizzazione è che nella fase di contrazione la curva  $\Lambda$  è un insieme di attrattori. Ogni punto su  $\Lambda$  dato da un valore di  $\Sigma_+$  è asintoticamente stabile contro una perturbazione nel sottospazio 4-dimensionale in PS5 ed è semplicemente stabile nella direzione dei punti vicini su  $\Lambda$  dati da  $\Sigma_+ + \delta\Sigma_+$ . In altre parole, la scomparsa di uno degli autovalori indica un'invarianza nella direzione tangente alla curva di attrattori nello spazio delle fasi, così che per ogni punto della curva  $\Lambda$  vi sia un sottospazio quadridimensionale da cui è ottenuto questo punto. Dunque, questo sottospazio quadridimensionale è composto da tutte le traiettorie che finiscono su quel punto. Dunque, concludiamo che ogni punto sulla curva  $\Lambda$ , che rappresenta localmente un set Kasner di soluzioni omogenee del vuoto della relatività generale, è un attrattore per un set di configurazioni genericamente triassiali che è precisamente il set di traiettoria che forma il sottospazio quadridimensionale che passa attraverso il punto. Dunque, la generica configurazione triassiale che passa attraverso il *turnaround* tende ad un punto sulla curva  $\Lambda$  e collassa ad una singolarità triassiale spindle simil Kasner. A causa della nostra scelta della variabile temporale, data dall'equazione  $e^{(\tau-\tau_*)} = [1 + \beta\theta_*(t - t_*)]^{-1/\beta}$ , l'avvicinarsi alla singolarità è asintotico in PS5, come è espresso da  $\tau \rightarrow \infty$ , ma avviene in un tempo proprio  $t$ . Questo "avvicinarsi" sarà meglio chiarito nella sezione successiva quando analizzeremo meglio l'analisi asintotica. Inoltre, il fatto che vicino alla singolarità la materia non sia importante, come mostrato da  $\Omega \rightarrow 0$  non dovrebbe sorprendere. Vicino alla singolarità, densità e espansione non sono connesse, così che la densità sia inomogenea, con  $\rho \rightarrow \infty$  ma  $\Omega \rightarrow 0$ , mentre la metrica può essere anche omogenea, come per esempio in un modello particolare Szekeres.

È doveroso sottolineare che la discussione precedente, sebbene provi e espliciti la natura attrattiva di ogni punto sulla curva  $\Lambda$ , è in un certo senso incompleto. Infatti, si dovrebbe almeno dimostrare che, almeno localmente, una quantità  $Q$  è conservata,

parametrizzata nello stesso modo in cui è parametrizzata  $\Lambda$ , che folia lo spazio delle fasi PS5. Dunque, per ogni punto  $G_\Lambda$  su  $\Lambda$  ci sarebbe una superficie che vi passa attraverso e le traiettorie che giacciono sulla superficie cadrebbero asintoticamente su  $G_\Lambda$ . L'autovettore  $J(G_\Lambda)$  che corrisponde all'autovalore nullo, essendo tangente alla curva, sarebbe trasverso (non necessariamente ortogonale) a queste superfici e mapperebbe il moto da una superficie all'altra. Sfortunatamente, questa quantità conservata non è stata ricavata, sebbene test numerici indicano che dovrebbe esserci.

### 3.2.2 Comportamenti asintotici attorno a punti stazionari

Possiamo ora osservare l'andamento asintotico delle soluzioni generali per il sistema di equazioni in un intorno di ogni punto. Questo si può ottenere usando la Jacobiana del sistema calcolata per ogni punto stazionario, risolvendo e studiando il sistema linearizzato  $G = J(G_s)G$  con un'arbitraria condizione stazionaria  $G_*$  scelta, però, vicino al punto stazionario  $G_s$ . Con questa approssimazione risolviamo il problema diretto, ovvero rispondiamo alla domanda dove una traiettoria che inizia in un intorno di  $G_s$  finisce. Lasciamo da parte il problema inverso, ovvero quello di determinare i dati iniziali nelle vicinanze di  $G_s$  da cui le traiettorie cadrebbero su  $G_s$  stesso. Per tutti i punti, eccetto DI, DII e DVI, diamo ora il comportamento nella fase di contrazione  $\theta < 0$  in termini di tempo  $\tau$ . Il comportamento nel tempo proprio è ottenuto dall'equazione  $e^{(\tau-\tau_*)} = [1 + \beta\theta_*(t-t_*)]^{\mp 1/\beta}$ . Per il punto DII osserviamo il comportamento nell'avvicinarsi al punto, ovvero nella fase di espansione. È importante notare che gli esponenti della funzione esponenziale  $\exp(\tau - \tau_*)$  sono gli autovalori della Jacobiana  $\lambda_i$  elencati in Tabella 2 e 5. Presentiamo ora i punti e nell'elenco seguente  $\Omega_*$ ,  $\Sigma_{\pm*}$ ,  $\epsilon_{\pm*}$  sono valori arbitrari iniziali per le corrispondenti variabili. In particolare, più sono vicini ai valori del punto stazionario, più vicina la soluzione asintotica è alla vera traiettoria che cade nel punto.

*Punto DI*— $\beta = \frac{1}{2}, \theta_* > 0$

$$\Omega = 1 + (\Omega_* - 1) e^{1/3(\tau-\tau_*)} \quad (3.28)$$

$$\Sigma_{\pm} = \frac{2}{5} (\Sigma_{\pm*} - 3\epsilon_{\pm*}) e^{1/3(\tau-\tau_*)} + \frac{3}{5} (\Sigma_{\pm*} + 2\epsilon_{\pm*}) e^{-1/2(\tau-\tau_*)} \quad (3.29)$$

$$\epsilon_{\pm} = \frac{1}{5} (\Sigma_{\pm*} - 3\epsilon_{\pm*}) e^{1/3(\tau-\tau_*)} + \frac{1}{5} (\Sigma_{\pm*} + 2\epsilon_{\pm*}) e^{-1/2(\tau-\tau_*)} \quad (3.30)$$

Il punto DI rappresenta un universo FRW piatto e l'integrazione del sistema linearizzato mostra comportamenti noti. Studiando il sistema linearizzato si ha una sella cinque-dimensionale che repelle lungo l'asse  $\Omega$ , fornendo l'informazione necessaria per sapere l'instabilità del modello FRW piatto (il cosiddetto *flatness problema*). Dunque, vi è un piano che contiene due direzioni  $\Sigma_{\pm} - 3\epsilon_{\pm}$  lungo cui si lascia il punto DI e un piano che contiene le direzioni  $\Sigma_{\pm} + 2\epsilon_{\pm}$  su cui ci si avvicina al punto. Le prime due direzioni corrispondono alla degenerazione con autovalori  $\lambda = \frac{1}{3}$  e le altre due per  $\lambda = -\frac{1}{2}$ . Le normali a questi due piani forniscono le direzioni dei modi perturbativi di pura crescita e pura contrazione riguardo un universo FRW piatto nella fase dominata dalla materia. I due modi hanno andamento  $t^{\frac{2}{3}}$  e  $t^{-1}$ .

*Punto DII*— $\beta = \frac{1}{3}, \theta_* > 0$

$$\Omega = \Omega_* e^{-1/3(\tau - \tau_*)} \quad (3.31)$$

$$\Sigma_{\pm} = [\Sigma_{\pm*} - \epsilon_{\pm*}(\tau - \tau_*)] e^{-1/3(\tau - \tau_*)} \quad (3.32)$$

$$\epsilon_{\pm} = \epsilon_{\pm*} e^{-1/3(\tau - \tau_*)} \quad (3.33)$$

Questo punto rappresenta un universo di Milne: ogni elemento di volume che cade nel suo bacino di attrazione diventa un void di forma sferica. Come abbiamo detto un universo di Milne è localmente equivalente ad un universo FRW aperto vuoto. Il fatto che le configurazioni che si espandono finiscono in un vuoto sferico è un risultato ben noto della teoria Newtoniana e si hanno gli stessi risultati in un contesto relativistico.

*Punto DIII*— $\beta = \frac{1}{2}, \theta_* < 0$

$$\Omega = \Omega_* \quad (3.34)$$

$$\Sigma_+ = -\frac{1}{6} + (\Sigma_{+*} - \epsilon_{+*} + \frac{1}{9}\Omega_* + \frac{1}{6})e^{-1/2(\tau - \tau_*)} \quad (3.35)$$

$$\Sigma_- = (\Sigma_{-*} + \epsilon_{-*})e^{-1/2(\tau - \tau_*)} - \epsilon_{-*}e^{-1/2(\tau - \tau_*)} \quad (3.36)$$

$$\epsilon_+ = (\epsilon_{+*} + \frac{1}{18}\Omega_*)e^{1/2(\tau - \tau_*)} - \frac{1}{18}\Omega_* \quad (3.37)$$

$$\epsilon_- = \epsilon_{-*}e^{-1/2(\tau - \tau_*)} \quad (3.38)$$

Il punto di sella è una soluzione particolare Szekeres che appartiene al sottoinsieme di traiettorie ottenute ponendo  $M = N = 0$  nella soluzione particolare descritta precedentemente. Corrisponde ad uno spaziotempo di Minkowski in forma nascosta. Per rimanere in questa condizione bisogna imporre  $\Sigma_{-*} = -\epsilon_{-*}$  e  $\epsilon_{+*} = -\frac{1}{8}\Omega_*$ . Inoltre,  $\Omega_* = 0$  è richiesto per cadere su DIII.

*Punto DIV*— $\beta = 1, \theta_* < 0$

$$\Omega = \Omega_* e^{-(\tau - \tau_*)} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_+ = & -\frac{1}{3} + \{[(\Sigma_{+*} + \frac{1}{3}) + (\epsilon_{+*} + \frac{1}{18}\Omega_*)] + \\ & + \frac{1}{18}(\Omega_* - \epsilon_{+*})(\tau - \tau_*)\} e^{-(\tau - \tau_*)} - (\epsilon_{+*} + \frac{1}{18}\Omega_*)e^{-2(\tau - \tau_*)} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\Sigma_- = (\Sigma_{-*} - \epsilon_{-*})e^{-(\tau - \tau_*)} + \epsilon_{-*} \quad (3.41)$$

$$\epsilon_+ = (\epsilon_{+*} + \frac{1}{18}\Omega_*)e^{-2(\tau - \tau_*)} - \frac{1}{18}\Omega_* e^{-(\tau - \tau_*)} \quad (3.42)$$

$$\epsilon_- = \epsilon_{-*} \quad (3.43)$$

Questo punto rappresenta il pancake degenero (Szekeres). La traiettoria, iniziando con generiche condizioni iniziali nell'intorno del punto, finisce vicino al punto della famiglia *TIII* (che rappresenta uno spindle), a meno che non si scelga la condizione iniziale  $\epsilon_* = 0$ , quella per cui la traiettoria cade sul punto DIV. Questo risultato è in accordo con le simulazioni numeriche e analisi condotte da Croudace et al. (1994) ed è anche in accordo con il comportamento asintotico di  $\epsilon_{\pm}$  vicino alla singolarità.



Scegliendo  $\epsilon_{\pm*}$  piccolo, il punto vicino  $TIII$  è caratterizzato da  $\Sigma_{\pm} \simeq -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\epsilon_{-}^2$  e  $\epsilon_{+} \simeq \frac{1}{2}\epsilon_{-}^2$ , mentre  $\Sigma_{-} \simeq \epsilon_{-}\epsilon_{-*}$ . Dunque al primo ordine la differenza tra DIV e il punto  $TIII$  vicino è vista solo nelle espressioni di  $\Sigma_{-}$  e  $\epsilon_{-}$ .

*Punto DV*— $\beta = 1, \theta_* < 0$

$$\Omega = \Omega_* e^{-(\tau-\tau_*)} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{+} = & \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\Omega_* e^{-(\tau-\tau_*)} + (\epsilon_{+*} - \frac{2}{3}\Sigma_{+*} + \\ & + \frac{1}{18}\Omega_*)e^{-2/3(\tau-\tau_*)} + (\frac{5}{3}\Sigma_{+*} - \epsilon_{+*} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\Omega_*)e^{-5/3(\tau-\tau_*)} \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{-} = & \frac{2}{3}(2\Sigma_{-*} + \epsilon_{-*}) + \\ & - \frac{1}{5}(\Sigma_{-*} + 3\epsilon_{-*})e^{-5/3(\tau-\tau_*)} \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{+} = & \frac{2}{9} - \frac{1}{6}\Omega_* e^{-(\tau-\tau_*)} + \frac{5}{3}(\epsilon_{+*} - \frac{2}{3}\Sigma_{+*} + \\ & + \frac{1}{18}\Omega_*)e^{-2/3(\tau-\tau_*)} + (\frac{5}{3}\Sigma_{+*} - \epsilon_{+*} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\Omega_*)e^{-5/3(\tau-\tau_*)} \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\epsilon_{-} = -\frac{1}{5}(2\Sigma_{+*} + \epsilon_{-*}) + \frac{2}{5}(\Sigma_{-*} + 3\epsilon_{-*})e^{-5/3(\tau-\tau_*)} \quad (3.48)$$

Questo punto rappresenta lo spindle degenero. Il comportamento nell'intorno del punto è molto simile a quello attorno DIV. Una generica traiettoria cade in un punto vicino TIII (ovvero un altro spindle), al primo ordine visto solo in  $\Sigma_{-}$  e  $\epsilon_{-}$  con la caratteristica  $\Sigma_{-*} = -\epsilon_{-*}$ . La condizione iniziale particolare affinché una traiettoria ricada sul punto DV è  $\epsilon_{-*} = -2\Sigma_{-*}$ , mostrando che questo punto è un attrattore.

*Punto DVI*— $\beta = \frac{3}{8}, \theta_* > 0$

$$\Omega = \Omega_* e^{-1/4(\tau-\tau_*)} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{+} = & -\frac{1}{12} + (\frac{5}{7}\Sigma_{+*} + \frac{8}{7}\epsilon_{+*} - \frac{23}{63}\Omega_* + \frac{1}{42})e^{-5/8(\tau-\tau_*)} + \\ & + (\frac{2}{7}\Sigma_{+*} - \frac{8}{7} - \frac{19}{63}\Omega_* + \frac{5}{84})e^{1/4(\tau-\tau_*)} + \frac{2}{3}\Omega_* e^{-1/4(\tau-\tau_*)} \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\Sigma_{-} = \left\{ \Sigma_{-*} \cos \left[ \frac{\sqrt{15}}{16} (\tau - \tau_*) \right] - \frac{1}{\sqrt{15}} (16\epsilon_{-*} - 3\Sigma_{-*}) \sin \left[ \frac{\sqrt{15}}{16} (\tau - \tau_*) \right] \right\} e^{-5/16(\tau-\tau_*)} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{+} = & \frac{1}{32} + \left( \frac{5}{28}\Sigma_{+*} + \frac{2}{7}\epsilon_{+*} - \frac{23}{252}\Omega_* + \frac{1}{168} \right) e^{-5/8(\tau-\tau_*)} + \\ & \left( -\frac{5}{28}\Sigma_{+*} + \frac{5}{7}\epsilon_{+*} - \frac{95}{504}\Omega_* - \frac{25}{672} \right) e^{1/4(\tau-\tau_*)} - \frac{7}{72}\Omega_* e^{-1/4(\tau-\tau_*)} \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\epsilon_{-} = \left\{ \epsilon_{-*} \cos \left[ \frac{\sqrt{15}}{16} (\tau - \tau_*) \right] - \frac{1}{\sqrt{15}} \left( 3\epsilon_{-*} - \frac{3}{2}\Sigma_{-*} \right) \sin \left[ \frac{\sqrt{15}}{16} (\tau - \tau_*) \right] \right\} e^{-5/16(\tau-\tau_*)} \quad (3.53)$$

Questo punto di sella è anche una soluzione particolare Szekeres che appartiene al sottoinsieme di traiettorie ottenute ponendo  $M = 0$  nelle soluzioni delle traiettorie Szekeres. Corrisponde ad un modello particolare ottenuto da Bonnor e Tomimura (1976) come il limite  $t \rightarrow \infty$  di modelli Szekeres che si espandono. Dalle equazioni di questo punto si può osservare che ci sono condizioni iniziali speciali per cui l'unico modo di crescita, dato da  $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ , è soppresso. Per questo set particolare, DVI è un attrattore.

## CAPITOLO 4

---

### Conclusione

---

In questa tesi si è portata avanti una disamina approfondita del sistema generale delle equazioni che regolano il moto della polvere, sotto le ipotesi presentate. Abbiamo dunque studiato la dinamica non-lineare della polvere irrotazionale con componente magnetica nulla del tensore di Weyl. Questo tipo di dinamica è completamente descritta da sei equazioni differenziali del primo ordine quasi lineari a cui si aggiungono le equazioni di vincolo, ricavate in forma generale da Ellis (1971), che si riducono al caso  $p = \omega_{ab} = H_{ab} = 0$ . Secondo la teoria delle equazioni differenziali, queste equazioni che restringono la dinamica del moto ci permettono di ridurre il problema dei valori iniziali delle equazioni generali al problema del valore iniziale caratteristico, dove le uniche caratteristiche che sopravvivono delle equazioni sono le linee di flusso. Dunque, per i modelli trovati, tutte le informazioni per ogni elemento di fluido sono quelle codificate nella superficie del frame iniziale. Infatti, le ipotesi applicate non permettono lo scambio di informazioni dopo il frame iniziale: nessuna onda sonora o gravitazionale può scambiare informazioni tra elementi di fluido vicini dopo il frame iniziale, così che questi modelli si possano definire *silenti*. Tuttavia, codificato dalla componente elettrica del tensore di Weyl, vi è sempre interazione, anche al di là dell'orizzonte della particella, dato dal campo Coulombiano generato dalla materia distante. Questa interazione è la ragione per cui si ha una forma a spindle delle singolarità trovate. La differenza con la cosmologia Newtoniana risiede proprio in questo, nell'arbitrarietà delle condizioni su  $E_{ab}$  nel caso Newtoniano. Con appropriate condizioni si può sempre trovare una soluzione Newtoniana che corrisponda ad una relativistica ma non la situazione opposta. Questo problema studiato è un'applicazione della cosmologia relativistica, ma si potrebbe pensare di interpretare i modelli di universi silenti come una approssimazione, utile per situazioni più generali, ovvero al di là dei casi particolari che risolvono esattamente le equazioni dei vincoli richiesti da  $H_{ab}$ . In particolare, si potrebbe essere interessati se tale formalismo può essere applicato alle perturbazioni non lineari in un universo FRW dominato dalla materia. In particolare, si potrebbe applicare al problema generale di instabilità gravitazionale della *collisionless matter*. Alla vista di questi

risultati interessanti, è naturale porsi domande. Quella più ovvia è se si dovrebbe utilizzare la relatività generale con la formazione strutturale nell'universo. È noto che l'approssimazione newtoniana ha diverse limitazioni: non può essere applicata su scale comparabili, o superiori, dell'orizzonte cosmologico e non può essere applicato a perturbazioni non lineari, quando l'interazione gravitazionale diventa troppo forte. Queste limitazioni ci portano ad utilizzare il formalismo trovato proprio in questi due casi, ovvero descrivere l'universo per distanze al di là dell'orizzonte e studiare le perturbazioni cosmologiche non lineari durante la contrazione.

In primo luogo, su scale superiori dal raggio di Hubble, non è possibile alcuna comunicazione causale, così che ogni zona dell'universo a quella scala si evolve indipendentemente dalle zone limitrofe: le onde sonore e gravitazionali sono semplicemente troppo lente per trasportare segnale utile. Ciò che emerge è una visione dell'universo a grandi scale suddiviso in branche o zone che si evolvono in maniera non lineare e indipendente, in accordo con le equazioni trovate. Solo un piccolo set di queste zone può essere approssimato a FRW, mentre la maggior parte si espande fino ad un vuoto sferico o è destinata ad andare incontro alla fase di contrazione fino a qualche configurazione di tipo Kasner.

Il secondo caso è un'applicazione del formalismo in relazione alle fasi finali di espansione, o contrazione, delle perturbazioni scalari in un *background* FRW. Finché ci limitiamo a considerare le configurazioni in espansione, la situazione sembra essere completamente determinata: l'attrattore DII è un void sferico per la fase di espansione. Questo, durante la fase di espansione di una regione con poca densità, non ha alcun effetto dinamico e non sorprende poiché in tal caso il campo gravitazionale non cresce troppo, mentre la tendenza a creare perturbazioni sferiche previene l'occorrenza di una componente magnetica degna di rilievo. In questo caso l'approssimazione Newtoniana fornisce già la soluzione al problema. Risulta, in realtà, più problematica la dinamica della contrazione. Diamo ora una visione della "storia" della perturbazione scalare. I primi tempi la componente magnetica è trascurabile dato che appare solo al secondo ordine. Tuttavia, in tempi più recenti, la sua presenza è generalmente causata dalla presenza di gradienti spaziali del campo perturbativo iniziale. In questo stadio, la presenza di  $H_{ab}$  segnala un flusso non nullo dell'informazione gravitazionale che proviene dall'ambiente circostante. Questo "informa" il campo di marea elettrico che la situazione della materia circostante è cambiata rispetto alle condizioni iniziali e di conseguenza la componente elettrica modifica il campo di shear che, di risposta, influisce sull'espansione e densità dell'elemento del fluido, come prescritto dall'equazione di Raychaudhuri e l'equazione di conservazione di massa. Dunque, si ha una mescolanza di due contributi all'evoluzione dell'elemento di fluido: l'imprinting della condizione iniziale del "singolo" elemento e le condizioni iniziali del "resto del mondo". Capire quale di questi due effetti ha predominanza, dipende da numerose variabili. Vi è, ad esempio, la forma del particolare elemento di fluido, la natura delle condizioni iniziali, come ad esempio il tipo di materia priva di collisioni, le statistiche delle perturbazioni e altre. Un problema ancora aperto è capire ciò che accade molto tempo dopo che un elemento di fluido ha "svoltato" e la sua evoluzione si distacca dall'evoluzione generale. È necessario, però, puntualizzare il fatto che non vi è una mappa uno a uno tra le configurazioni finali e le condizioni iniziali, piuttosto, accade che gli elementi di fluido iniziano la

loro evoluzione e la finiscono in accordo con il sistema di equazioni locali ma, nel mezzo, si possono avere situazioni non locali molto complicate. A questa visione si aggiunge una conseguenza non banale: dato che la configurazione a pancake (DIV e repliche) attrae solo elementi di fluido esattamente degeneri, nessun elemento di fluido generico finisce in una contrazione a pancake, ovvero non vi è nessun dato iniziale non degenero che possa far accadere *shell crossing*. Dunque, il destino di ogni elemento di fluido privo di pressione è una singolarità spindle.

Tuttavia, se ciò fosse vero, si potrebbe porre il problema in quale modo una componente magnetica non nulla del tensore di Weyl potrebbe modificare l'immagine rappresentata prima. A questo punto si può speculare sui contributi che potrebbe apportare al sistema. Potrebbe, per esempio, introdurre nuove configurazioni stazionarie non triviali, oppure potrebbe stabilizzare i punti di sella o repulsori già trovati; potrebbe addirittura destabilizzare punti ritenuti stabili o, infine, modificare il bacino di attrazione dei punti stabili, per esempio agendo in qualche modo sulla singolarità a pancake in modo che attragga traiettorie. Tutti questi casi, eccetto la possibilità di nuove configurazioni, possono essere studiati come piccole perturbazioni attorno punti stazionari. In qualche caso è già nota la risposta, per esempio perturbazioni attorno a FRW ci dicono che il punto DI non è stabile per il contributo di  $H_{ab}$ . Le casistiche rimanenti, invece, devono essere studiate ma in ogni modo si può giungere già adesso ad un risultato: se il bacino di attrazione della singolarità pancake fosse allargato dalla presenza di una componente  $H_{ab}$  non nulla, significherebbe che lo *shell crossing* accade anche nel problema relativistico non degenero solo per l'interazione non lineare con l'ambiente.

L'analisi degli universi silenti non si esaurisce così ma lascia ancora spazio a diversi quesiti aperti. Consideriamo innanzitutto il problema dell'evoluzione temporale che abbiamo attaccato in questa tesi nei riguardi degli universi silenti, assumendo, ovviamente, che siano rispettate le condizioni iniziali tali che soddisfino le equazioni dei vincoli. Certamente vi sarà il caso particolare di un particolare set di condizioni iniziali del FRW perturbato che soddisfi *esattamente* le equazioni vincolari, sicuramente interessante da studiare. Altre domande aperte riguardano il destino di configurazioni generiche triassiali che contraggono fino a collassare nelle singolarità a spindle degli attrattori Kasner. Per esempio ci si potrebbe chiedere se effettivamente sono reali, data la mancanza di gradienti di pressione che agiscono sulla gravità. Inoltre, la proprietà di inversione temporale della formulazione della dinamica presentata mostra che vi è un set Kasner che è anche un repulsore per per generiche traiettorie che si "espandono", partendo da una singolarità spindle. Sfortunatamente, vi è il problema di isotropia dell'universo osservato e del suo stato iniziale. Le risposte a queste domande sono parziali e richiedono una trattazione esaustiva che non competono questa tesi. Ci è sembrato, però, doveroso almeno presentare i problemi non risolti della dinamica.



---

## Bibliografia

---

- [1] Daniell Baumann. “Cosmology”. In: vol. Part III Mathematical Tripos.
- [2] Marco Bruni, Sabino Matarrese e Ornella Pantano. “Dynamics of silent universes”. In: *Astrophys. J.* 445 (1995).
- [3] G. F. R. Ellis. *General Relativity and Cosmology*. A cura di R. K. Sachs. [3rd ed.] New York: Academy, 1971.
- [4] S. W. Goode e J. Wainwright. “Singularities and evolution of the Szekeres cosmological models”. In: *Phys. Rev. D* 26 (12 1982), pp. 3315–3326.
- [5] G. F. R. Ellis J. Wainwright. *Dynamical Systems in Cosmology*. Cambridge University Press, 1997, pp. 271–286.
- [6] Francesca Tovena (auth.) Marco Abate. *Geometria Differenziale*. 1st Edition. UNITEXT-La Matematica per il 3+2. Springer Milan, 2011.
- [7] P. J. E. Peebles. *The Large-Scale of the Universe*. [3rd ed.] Princeton: Princeton University Press, 1980.
- [8] P. Szekeres. “A Class of Inhomogeneous Cosmological Models”. In: *Commun. Math. Phys.* ().
- [9] Roger Cooke Vladimir I. Arnol’d Vladimir I. Arnold. *Ordinary differential equations*. [3rd ed.] New York :, Springer-Verlag, 1992.
- [10] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [11] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of GR*. First Edition. John Wiley e Sons, 1972.