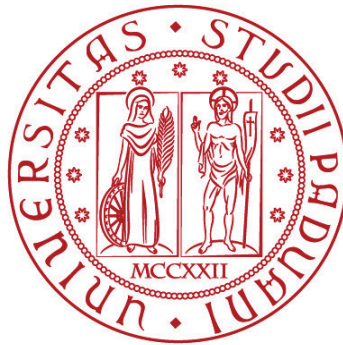


**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, EDILE E AMBIENTALE  
*Department Of Civil, Environmental and Architectural Engineering*

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Edile-Architettura



**TESI DI LAUREA MAGISTRALE**

**Formulazione a tre invarianti del modello  
Cam-Clay Modificato:  
implementazione numerica ed esempi pratici**

Relatore:  
Prof. GIOVANNA XOTTA  
Correlatore:  
Dr. NICO DE MARCHI

Laureando:  
ANGELA BARBIERO  
Matricola 1122636

**ANNO ACCADEMICO 2021-2022**



*Alla mia mamma Tiziana, il mio Re Mida,  
che trasforma davvero in oro tutto ciò che tocca,  
a cui mi basterebbe assomigliare anche solo un po'  
per essere sicura di essere una persona meravigliosa;  
a papà Piero, l'uomo più altruista che io conosca,  
a cui vuole bene il mondo intero,  
che è un genitore ma è soprattutto un amico;  
a mio fratello Davide, il mio punto di riferimento,  
che ho sempre cercato di emulare,  
sperando di esserci riuscita almeno un po';  
a Francesca e Natascia, le mie migliori amiche,  
così tanto mie che le sento come un'estensione di me stessa,  
che io non lo so se me le merito ma mi godo la fortuna di averle;  
a Nicolò, il mio fidanzato,  
perché ci sono cose destinate ad accadere più di altre,  
e noi siamo sicuramente destinati l'uno all'altra;  
a Kuma e Cariddi, i miei due cuori,  
rifugio sicuro nei momenti bui;  
al mio Milan,  
per le urla, le lacrime e la gioia incontenibile;  
a Giovanni e Vittoria,  
compagni insostituibili di questo viaggio;  
a Giovanna Xotta e Nico De Marchi, i miei relatori,  
persone pazienti e disponibili a cui va il merito di questo lavoro;  
e a tutti gli altri,  
Grazie.*



# ABSTRACT

La presente tesi ha come obiettivo l'implementazione di un modello costitutivo, adatto alla modellazione e all'analisi di terreni granulari e argillosi, ma estendibile anche a rocce e calcestruzzi.

Il modello considerato è il Cam-Clay Modificato (MCC) [17], basato sulla teoria dello stato critico e caratterizzato da una superficie di plasticità ellissoidale. In particolare, dato che i geomateriali sono caratterizzati da un comportamento allo snervamento che dipende dalla pressione, il modello a due invarianti è stato opportunamente esteso al terzo invariante. La superficie di snervamento viene quindi modificata mediante l'aggiunta della funzione di scala convessa, proposta da Willam e Warnke [21], che dipende dall'angolo di Lode e dall'ellitticità della curva. Viene inoltre considerata una funzione di energia potenziale che include un modulo elastico di taglio dipendente dalla pressione ed una legge di incrudimento non lineare [6].

La sua formulazione analitica è inserita nel contesto della teoria alle deformazioni finite [8], basata sulla decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione [18]. La soluzione delle equazioni evolutive del modello matematico è effettuata attraverso un algoritmo implicito [4], di tipo *return mapping* [23], definito nello spazio delle deformazioni principali.

Infine, il modello costitutivo sviluppato è stato implementato in un codice di ricerca [10] agli elementi finiti in ambiente MATLAB. Validazione, stabilità ed accuratezza della procedura numerica sono state verificate attraverso confronti con esempi numerici presenti in letteratura e nuove applicazioni pratiche.



# SOMMARIO

1. INTRODUZIONE .....	1
2. RICHIAMI AL METODO AGLI ELEMENTI FINITI .....	3
3. ELASTOPLASTICITÀ .....	5
3.1 Campo elastico e campo plastico .....	5
3.2 Incrudimento .....	6
3.3 Plasticità <b>J2</b> .....	8
4. DEFORMAZIONI FINITE .....	13
5. MODELLO COSTITUTIVO CAM-CLAY .....	17
5.1 Introduzione .....	17
5.2 Formulazione costitutiva iper-elastica .....	21
5.3 Cam-Clay Modificato a due invarianti .....	24
5.4 Cam-Clay Modificato a tre invarianti .....	27
5.4.1 Return mapping .....	31
6. CODICE DI CALCOLO .....	35
6.1 Pre-processore .....	35
6.2 Processore .....	37
6.3 Post-Processore .....	39
6.4 Implementazione del modello costitutivo .....	40
6.4.1 third.m .....	40
6.4.2 scalf.m .....	41
6.4.3 derf.m .....	42
6.4.4 tens_CCM3.m .....	43
6.4.5 Atang_CCM3.m .....	46
7. VERIFICA DEL MODELLO COSTITUTIVO .....	47
7.1 Test di un singolo elemento tridimensionale .....	47
7.1.1 Prova a compressione confinata .....	48
7.1.2 Prova a compressione semplice .....	51
7.1.3 Prova a taglio .....	56
7.1.4 Prova a taglio con spostamento imposto .....	60
7.1.5 Prova a compressione e taglio .....	70
7.2 Riproduzione di esempi numerici da letteratura .....	75
7.2.1 Test di compressione su un singolo nodo di un elemento finito .....	76
7.2.2 Consolidazione di un terreno soggetto a carico nastroforme in stato piano di deformazione .....	78

7.2.3 Consolidazione di un terreno soggetto a spostamenti imposti in stato piano di deformazione .....	85
8. ESEMPI NUMERICI .....	87
8.1 Consolidazione tridimensionale a compressione e a taglio di un terreno .....	87
8.2 Compressione e taglio di una colonna di terreno .....	95
9. CONCLUSIONI .....	105
10. BIBLIOGRAFIA .....	107



# 1. INTRODUZIONE

Con il termine geomateriali si identificano tutti i materiali porosi di formazione geologica, caratterizzati dalla presenza di una o più fasi. Fra essi riconosciamo terreni, rocce e conglomerati cementizi.

L'analisi del comportamento di questi materiali è da sempre oggetto di studio, non solo nel campo dell'ingegneria geotecnica, ma anche in generale per gli studiosi provenienti da altri settori della meccanica del continuo.

Rocce e terreni rimangono ad oggi tra i principali materiali da costruzione, impiegati in fondazioni, scavi, dighe e argini, giustificando quindi la considerazione dell'ingegneria geotecnica come una delle principali discipline nel campo dell'ingegneria civile.

La teoria dell'elasticità lineare è poco appropriata per descrivere il comportamento dei geomateriali, anche in un quadro tensio-deformativo lontano dalla rottura [8]. Essi manifestano infatti una risposta fortemente non-lineare, dovuta allo sviluppo di deformazioni irreversibili. La deformazione plastica consiste in quella quota di deformazione che non viene recuperata a seguito della rimozione del carico sollecitante, come accade invece per le deformazioni in campo elastico. Le proprietà del materiale e la presenza di una o più fasi influenzano l'ampiezza del campo elastico, oltre al meccanismo responsabile dell'innesco della deformazione plastica.

La comprensione e la modellazione della deformazione plastica è fondamentale in diversi campi, poiché essa influenza in modo significativo le prestazioni degli edifici ed in generale strutturale. In questo senso, è necessario disporre di adeguati modelli costitutivi, capaci di simulare in modo accurato e puntuale il comportamento dei geomateriali.

Lo sviluppo e l'impiego di suddetti modelli è stato fortemente rallentato dalle difficoltà legate alla loro applicazione, dovute all'eccessivo onere computazionale e alla frequente indisponibilità delle imprescindibili valutazioni sui parametri del materiale.

Tuttavia, negli ultimi decenni si sono compiuti importanti progressi relativi alle tecniche sperimentali e ai metodi computazionali, che hanno permesso significativi progressi nell'elaborazione di modelli costitutivi adeguati. Ne risulta una diffusa tendenza ad una trattazione unitaria dell'analisi geotecnica, cioè un modello matematico unico da impiegare nelle verifiche delle scelte progettuali.



## 2. RICHIAMI AL METODO AGLI ELEMENTI FINITI

Con l'espressione Metodo agli Elementi Finiti (FEM) [13] si intende un metodo per la risoluzione numerica di un'equazione differenziale, sia essa alle derivate totali o parziali. Il metodo consiste in un'approssimazione dell'equazione differenziale con un sistema di equazioni algebriche, permettendo di passare da un problema continuo con infiniti gradi di libertà a un problema discreto, cioè un sistema di equazioni con un numero finito di incognite che può essere risolto mediante un calcolatore.

Il FEM è una tecnica dell'analisi numerica volta ad ottenere soluzioni approssimate per una molteplicità di problemi. Questo metodo trova ampia applicazione nel campo della meccanica dei continui.

Nel FEM il dominio da analizzare è costituito dall'unione di molteplici sottodomini di forma elementare, gli elementi finiti appunto. Il dominio subisce quindi una discretizzazione. Il campo delle incognite viene espresso mediante funzioni approssimanti, definite all'interno di ciascun elemento. L'andamento di queste funzioni, dette funzioni di forma, è regolato dai valori che la variabile dipendente assume in specifici punti detti nodi.

I nodi sono posti tendenzialmente sul contorno degli elementi, in punti comuni a due o più elementi. Oltre ai nodi sul contorno, un elemento può presentare dei nodi al suo interno. I nodi vengono definiti all'interno del dominio di integrazione e sono punti in cui i valori della funzione approssimata risultano identici a quelli della funzione approssimante. I valori che la variabile assume sui nodi, ne definiscono univocamente l'andamento all'interno dell'elemento. Nella rappresentazione agli elementi finiti di un problema, i valori nodali della variabile rappresentano le nuove incognite. L'idea alla base dell'approssimazione usata nel metodo agli elementi finiti è quella di approssimare il vero andamento della funzione incognita con quello di alcune funzioni particolari ad andamento noto, generalmente polinomiali.



# 3. ELASTOPLASTICITÀ

In questo capitolo si illustrano i principi alla base della teoria dell'elastoplasticità, introducendo i concetti di campo elastico e campo plastico, di funzione di snervamento e del fenomeno di incrudimento. Quindi, si tratta brevemente il criterio di snervamento  $J_2$  formulato da von Mises, ampiamente impiegato prima della formulazione del Cam-Clay [17].

## 3.1 Campo elastico e campo plastico

Per comprendere l'elastoplasticità consideriamo un'asta monodimensionale soggetta ad un carico assiale di trazione, come indicato in Figura 3.1.1. Si indica con  $E$  il modulo di Young e con  $E_T$  il modulo tangenziale, oltre la tensione iniziale di snervamento a trazione  $\sigma_{YT} > 0$ . Se si considera invece un'asta soggetta ad un carico assiale di compressione la tensione iniziale di snervamento a compressione è  $\sigma_{YC} < 0$ . Per semplicità si assume  $\sigma_{YT} = \sigma_{CT} = \sigma_Y$ . Si definisce allora regione elastica il luogo degli stati tensionali compresi fra le tensioni iniziali di snervamento in trazione e in compressione:

$$E_\emptyset = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid -\sigma_{Y0} < \sigma < \sigma_{Y0}\} \tag{3.1.1}$$

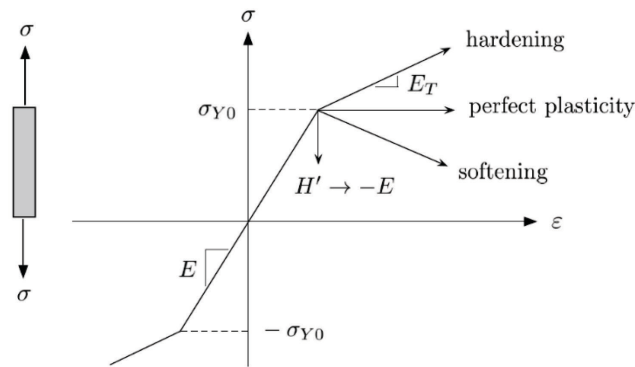


Figura 3.1.1: Carico monoassiale di un'asta elastoplastica [2].

Per ogni punto situato oltre la tensione di snervamento iniziale, la deformazione totale può essere decomposta in una componente elastica  $\varepsilon^e$  e in una plastica  $\varepsilon^p$ :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \tag{3.1.2}$$

L'equazione costitutiva per l'asta può quindi essere scritta come:

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \tag{3.1.3}$$

La funzione di snervamento può essere così definita:

$$f(\sigma, \sigma_{Y0}) = |\sigma| - \sigma_{Y0} \leq 0 \tag{3.1.4}$$

Si ottiene quindi che, nel caso in cui  $f(\sigma, \sigma_{Y0}) < 0$ , l'asta si deforma in campo elastico, mentre per  $f(\sigma, \sigma_{Y0}) = 0$  la deformazione avviene in campo plastico.

### 3.2 Incrudimento

Si è parlato di tensione di snervamento iniziale poiché, ad ogni fase di carico che porti il materiale al superamento del limite elastico, la superficie di snervamento dipende dall'evoluzione delle deformazioni plastiche e dunque anche la tensione di snervamento cambia. Tale fenomeno è detto incrudimento.

In particolare, si parla di incrudimento isotropo quando si verifica un'espansione omotetica della superficie di snervamento in tutte le direzioni, causando un aumento delle dimensioni della superficie di snervamento proporzionale all'incremento di deformazione plastica. La variazione incrementale  $\Delta\sigma_Y$  delle tensioni di snervamento in trazione e in compressione risulta quindi uguale in valore assoluto, implicando un'espansione del campo elastico di  $2\Delta\sigma_Y$ .

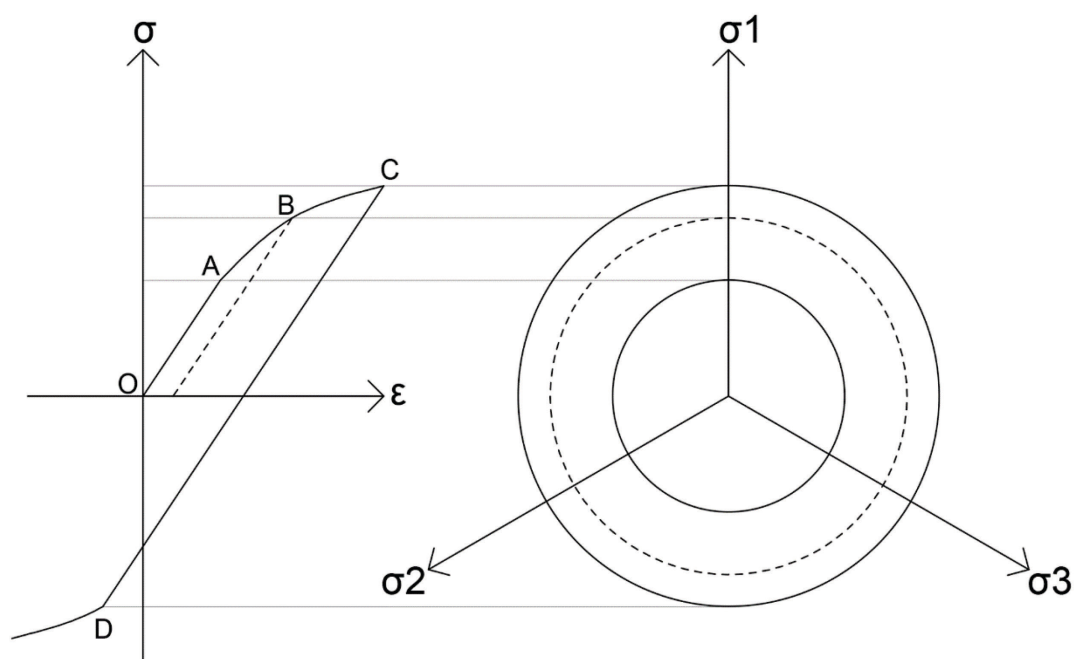


Figura 3.2.1: Incrudimento isotropo.

In riferimento alla Figura 3.2.1, si considera il materiale caricato da una forza di trazione fino al punto B con conseguente scarico. Durante una nuova fase di carico lo snervamento non avviene più nel punto A (snervamento iniziale), ma nel punto B. La nuova fase di carico si conclude nel punto C e si inverte il carico. Durante la fase di compressione lo snervamento avviene nel punto D, il cui valore tensoriale in modulo coincide con la tensione assunta dal punto C.

L'incrudimento isotropo, dunque, prevede un'espansione in tutte le direzioni della superficie di snervamento, senza cambiamenti di forma e traslazioni.

Si parla invece di incrudimento cinematico quando, per ogni variazione incrementale  $\Delta\sigma_Y$  della tensione di snervamento in trazione, avviene una variazione della tensione di snervamento in compressione pari a  $-\Delta\sigma_Y$ , e viceversa. In questo caso non avviene quindi nessun cambiamento dimensionale relativo alla superficie di snervamento, ma si verifica invece una traslazione della regione elastica. Tale fenomeno, che prende il nome di effetto Bauschinger [1], prevede la riduzione del valore della tensione di snervamento se si carica con direzione opposta a quella precedente, nel caso in cui il carico applicato abbia un'intensità tale da far superare il limite di snervamento del materiale vergine.

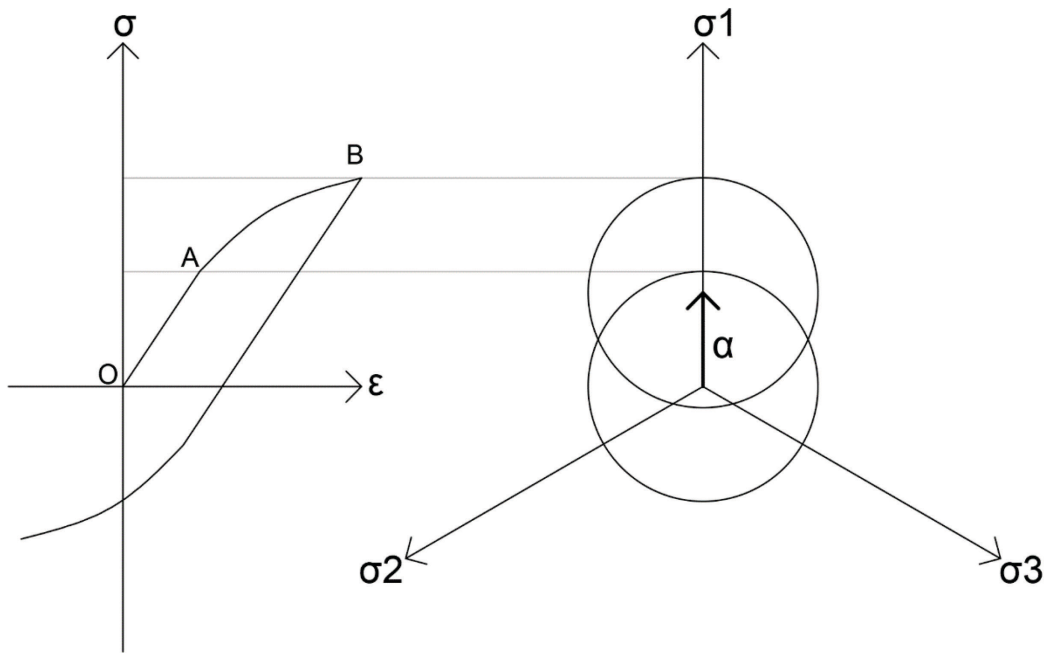


Figura 3.2.2: Incrudimento cinematico.

In relazione alla Figura 3.2.2, si considera il materiale vergine e scarico. La superficie di snervamento è centrata nell'origine degli assi. Il materiale viene sollecitato a trazione fino al punto B. Il punto di snervamento trasla quindi dal punto A (snervamento iniziale) al punto B (snervamento corrente). L'entità dello spostamento è detta *back stress*, e si indica con  $\alpha$ .

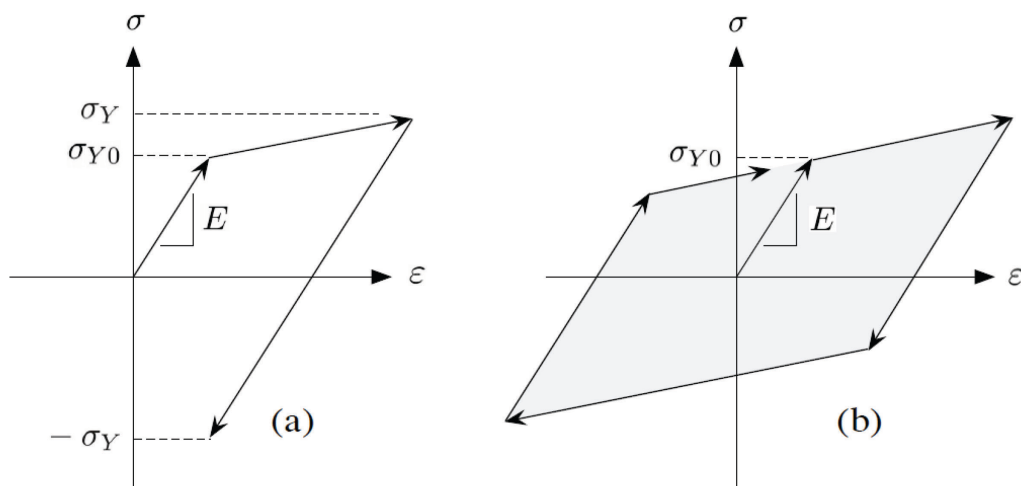


Figura 3.2.3: Tipi di incrudimento: a) isotropo; b) cinematico [2].

### 3.3 Plasticità $J_2$

Al fine di comprendere il modello costitutivo Cam-Clay Modificato che si vedrà in seguito, è utile introdurre brevemente i criteri di snervamento più impiegati prima della sua formulazione.

Durante i suoi studi condotti sui metalli, Tresca (1864) [19] concluse che il loro snervamento avviene quando la massima tensione di taglio raggiunge un certo valore, che coincide con la differenza fra la tensione principale maggiore  $\sigma_1$  e la tensione principale minore  $\sigma_3$ .

Il criterio di snervamento formulato da Tresca si può quindi riassumere come segue:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{max} = \sigma_Y \quad (3.3.1)$$

dove  $\sigma_Y > 0$  è la tensione di snervamento.

Cinquant'anni più tardi, von Mises (1913) [20] suggerì che lo snervamento dei metalli fosse governato dal secondo invariante del tensore delle tensioni deviatorico  $J_2$ . Rispetto al criterio di snervamento di Tresca, quello di von Mises si trova in migliore accordo con i dati sperimentali per i materiali duttili e la sua funzione di snervamento è di più facile implementazione. Questa sezione si concentra quindi su quest'ultimo criterio, che chiameremo semplicemente "plasticità  $J_2$ ".

L'invariante secondo del deviatore di tensione è così definito:

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} \quad (3.3.2)$$

dove il tensore delle tensioni deviatorico è:

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{1} \quad (3.3.3)$$

con  $p$  la tensione normale media.

Rispetto agli assi principali di tensione si ha:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \quad (3.3.4)$$

Per un carico monoassiale,  $J_2 = \frac{1}{3} \sigma^2$ ; per un carico biassiale,  $J_2 = \frac{1}{3} (\sigma_1 - \sigma_3)^2$ .

Consideriamo la funzione di snervamento che segue:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = \sqrt{2J_2} - \kappa \leq 0 \quad (3.3.5)$$

dove  $\sqrt{2J_2} = \|\mathbf{s}\|$  e  $\kappa > 0$  è una variabile interna di tipo plastico.

Imponendo  $f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0$  si definisce la superficie di snervamento per il modello di plasticità  $J_2$ .



Nello spazio delle tensioni principali, la funzione di snervamento può essere riscritta come:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \kappa) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} - \kappa \leq 0 \quad (3.3.6)$$

Poiché  $\kappa > 0$ , allora  $f < 0$  su ogni punto della diagonale spaziale definita dall'equazione:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \quad (3.3.7)$$

Ciò significa che la diagonale spaziale è contenuta nella regione elastica (vedi Figura 3.3.1).

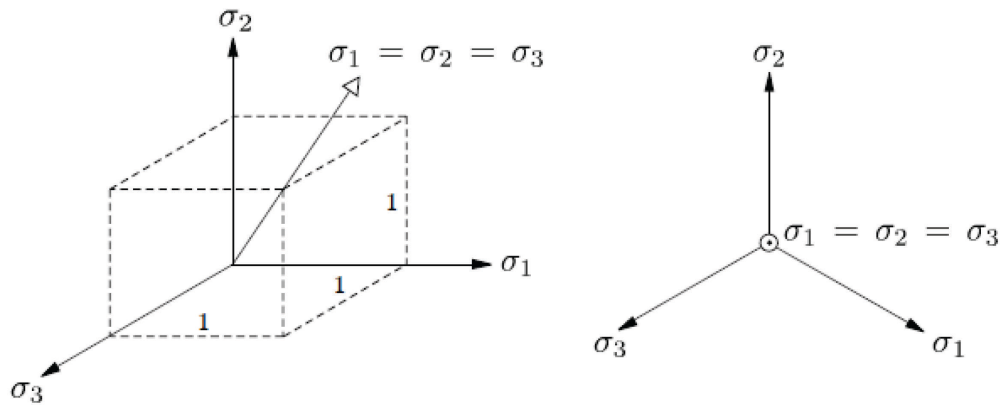


Figura 3.3.1: Diagonale spaziale e piano  $\pi$  [2].

Ruotiamo ora le coordinate degli assi con una rotazione positiva di  $\pi/4$  attorno all'asse  $\sigma_2$ , ottenendo la trasformazione  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \rightarrow (\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ . A questo punto si effettua una rotazione negativa di un angolo pari a  $\theta = \cos^{-1} \sqrt{2/3}$  attorno all'asse  $\sigma'_1$ , ottenendo la trasformazione  $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3) \rightarrow (\sigma''_1, \sigma''_2, \sigma''_3)$ . In questo modo il nuovo asse  $\sigma''_3$  coincide con la diagonale spaziale (vedi Figura 3.3.2).

Questa sequenza di rotazioni può essere così riassunta:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & \sqrt{2/3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma''_1 \\ \sigma''_2 \\ \sigma''_3 \end{pmatrix} \quad (3.3.8)$$

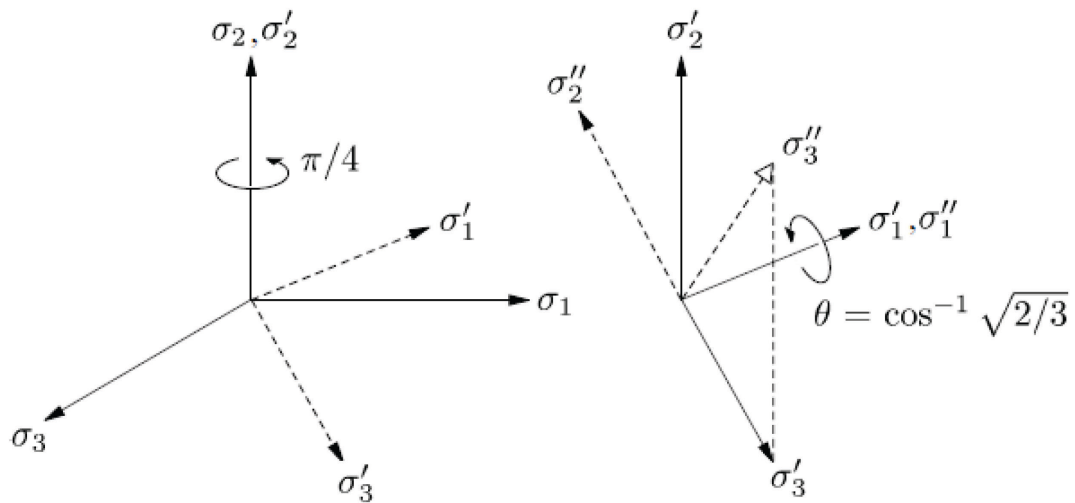


Figura 3.3.2: Sequenza di rotazioni degli assi principali di tensione [2].

Rispetto al sistema di riferimento appena definito la funzione di snervamento può essere allora riscritta come:

$$f(\sigma''_1, \sigma''_2, \sigma''_3, \kappa) = \sqrt{(\sigma''_1)^2 + (\sigma''_2)^2} - \kappa \leq 0$$

(3.3.9)

Nello spazio delle tensioni principali, la superficie di snervamento è un cilindro la cui circonferenza di base ha raggio pari a  $\kappa$  con centro sulla diagonale spaziale.

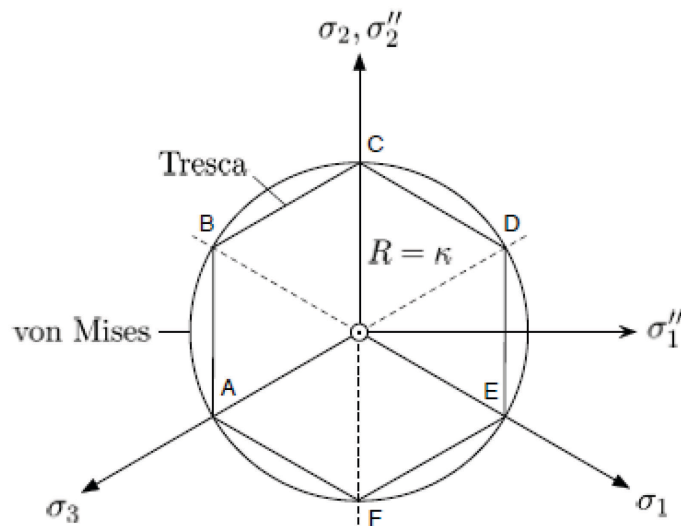


Figura 3.3.3: Superfici di snervamento Tresca e  $J_2$  sul piano deviatorico [2].

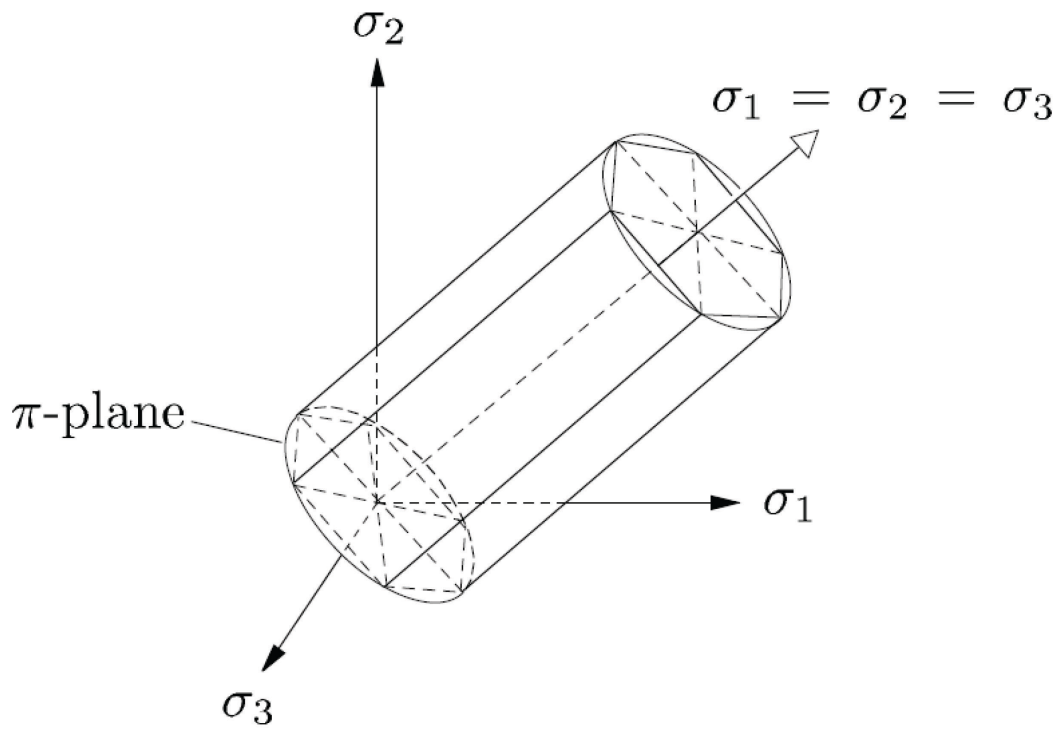


Figura 3.3.4: Superfici di snervamento Tresca e  $J_2$  nello spazio delle tensioni principali [2].

Il piano definito dall'equazione  $\sigma_3'' = 0$  o dall'equivalente  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$  è denominato piano  $\pi$ . Il piano  $\pi$  è perpendicolare alla diagonale spaziale e passa per l'origine degli assi delle tensioni principali. Su questo piano la superficie di snervamento  $J_2$  è una circonferenza di raggio  $\kappa$ .



## 4. DEFORMAZIONI FINITE

Molti materiali, tra cui terreni, rocce e calcestruzzi, possono sviluppare grandi deformazioni sia in campo elastico che plastico; pertanto la teoria classica delle deformazioni infinitesime risulta inadatta a rappresentare alcune applicazioni pratiche. Da ciò deriva la necessità di adottare una formulazione più completa. In questo capitolo si riassume quindi la formulazione teorica della teoria delle deformazioni finite in campo elasto-plastico, basata sulla decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione [14, 18], impiegata in molti codici agli elementi finiti per analisi non lineari.

La teoria considera tre diverse configurazioni del continuo: l'indeformata iniziale, la configurazione corrente deformata e una configurazione intermedia in cui non sono presenti stati di tensione, sulle quali vengono definite le variabili cinematiche (Figura 4.1).

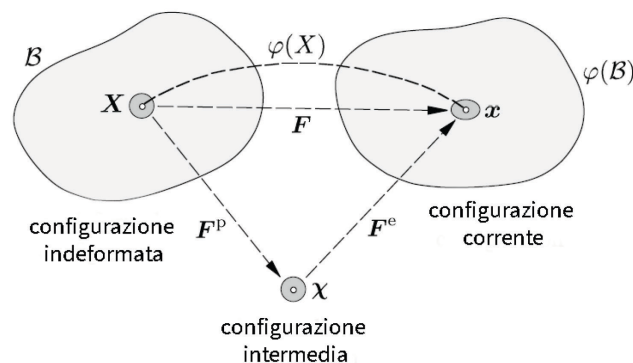


Figura 4.1: Configurazioni del continuo nella teoria delle deformazioni finite [2].

Consideriamo un continuo  $B$ , soggetto ad un moto  $\varphi$  invertibile (viene qui utilizzata la stessa notazione di Borja, indicando con lettere maiuscole le quantità nella configurazione indeformata (materiale) e con lettere minuscole le quantità correnti nella configurazione deformata (spaziale)). Definiamo alcune relazioni cinematiche fondamentali, tra cui le velocità ed accelerazioni materiale e spaziale [16]:

- $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$  posizione corrente;
- $\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)$  posizione iniziale indeformata;
- $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial t}$  velocità materiale;
- $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2}$  accelerazione materiale;
- $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \varphi(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t), t)}{\partial t}$  velocità spaziale;
- $\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$  accelerazione spaziale o locale;
- $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  accelerazione materiale del campo spaziale;
- $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}}$  gradiente di deformazione;
- $J = \det [\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)]$  Jacobiano del gradiente;
- $\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \dot{\varphi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{F}$  derivata temporale del gradiente;
- $\mathbf{l} = \nabla \mathbf{v}$  gradiente della velocità;

- $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$  tensore di deformazione sinistro di Cauchy-Green;
- $\mathbf{b} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{V}^2$  tensore di deformazione destro di Cauchy-Green;

dove  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  come  $\mathbf{R}$ , derivano dalla decomposizione polare del gradiente di deformazione  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$ . Tutte queste misure di deformazione ammettono la rappresentazione spettrale. Definiamo infine il tensore rateo di deformazione  $\mathbf{d} = \sum_{A=1}^3 \dot{\epsilon}_A \mathbf{n}^A \otimes \mathbf{n}^A$ , con  $\dot{\epsilon}_A \log(\lambda_A)$  l'allungamento logaritmico lungo una direzione principale.

Anche per quanto riguarda il campo delle tensioni, vengono definite nuove misure di sforzo. Oltre al tensore di Cauchy si definiscono altri tre tensori [16], sempre in funzione della configurazione che si sta considerando, che sono:

- $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$ : tensore simmetrico delle tensioni di Kirchhoff (spaziale come  $\boldsymbol{\sigma}$ );
- $\mathbf{P} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T}$ : primo tensore delle tensioni di Piola-Kirchhoff (non simmetrico);
- $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T}$ : secondo tensore delle tensioni di Piola-Kirchhoff (simmetrico);

Per quanto riguarda il modello costitutivo del materiale, si fa riferimento ad un modello iperelastico, che rispetta quindi l'obiettività nella risposta del solido ed il principio meccanico dell'isotropia. È possibile definire il potenziale elastico [7] attraverso gli invarianti di deformazione dei tensori di Cauchy-Green sinistro  $\mathbf{C}$  e destro  $\mathbf{b}$ . Le misure di tensione possono essere definite come la derivata rispetto al tensore di deformazione di Cauchy-Green destro del potenziale elastico:

$$\mathbf{P} = 2 \frac{\partial \psi(\mathbf{X}, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{F} \quad (4. 1)$$

$$\mathbf{S} = 2 \mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \psi(\mathbf{X}, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{F} \quad (4. 2)$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \mathbf{b} \frac{\partial \psi(\mathbf{X}, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \quad (4. 3)$$

Come è stato detto all'inizio di questo capitolo, oltre alla configurazione di riferimento iniziale e a quella finale, ci si riferisce anche ad una configurazione intermedia (Figura 4.1) in modo tale da poter decomporre il gradiente di deformazione in una parte elastica e una parte plastica, definita dalle seguenti mappe:

- $\boldsymbol{\chi} = \varphi^p(\mathbf{X}, t)$  configurazione intermedia;
- $\mathbf{x} = \varphi^e(\boldsymbol{\chi}) = \varphi^e(\varphi^p(\mathbf{X}, t)) \equiv \varphi(\mathbf{X}, t)$  posizione corrente.

La decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione può essere così definita:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \varphi^e}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \frac{\partial \varphi^p}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F}^e(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{F}^p(\mathbf{X}, t) \quad (4. 4)$$

e di conseguenza così i tensori di deformazione di Cauchy-Green sinistro  $\mathbf{C}^e$ , destro  $\mathbf{b}^e$  e la sua derivata temporale:

$$\mathbf{C}^e = \mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{F}^e \quad (4. 5)$$

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^{eT} \quad (4. 6)$$

$$\dot{\mathbf{b}}^e = \mathbf{l} \cdot \mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e \cdot \mathbf{l}^T + \mathcal{L}_v \mathbf{b}^e \quad (4. 7)$$

$$\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial C^{p-1}}{\partial t} \cdot \mathbf{F}^T \quad (4. 8)$$

Illustriamo ora brevemente alcune relazioni fondamentali per lo studio dell'elastoplasticità. Definita l'energia libera  $\psi(\mathbf{b}^e, \xi)$ , funzione del tensore  $\mathbf{b}$  e del vettore variabile interna plastica  $\xi$ , si riporta la disuguaglianza di dissipazione di energia, ovvero la seconda legge della termodinamica, attraverso le definizioni viste in precedenza [7]:

$$D = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \frac{d\psi}{dt} = \boldsymbol{\tau} : \left[ -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e) \cdot \mathbf{b}^{e-1} \right] + \mathbf{k} \cdot \dot{\xi} \geq 0 \quad (4. 9)$$

con  $\mathbf{k} = -\partial\psi/\partial\xi$  vettore di tensione interna plastica coniugato a  $\xi$ .

Definita una funzione di snervamento  $f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{k}) \leq 0$ , si caratterizza come flusso plastico la quantità inclusa fra parentesi quadre nella disequazione di dissipazione di energia:

$$-\frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e) \cdot \mathbf{b}^{e-1} = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (4. 10)$$

dove  $g$  è il potenziale plastico e  $\dot{\gamma}$  è il moltiplicatore plastico non-negativo.

Considerando una legge di incrudimento associato:

$$\dot{\xi} = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} \quad (4. 11)$$

La seconda legge della termodinamica diventa:

$$D = \dot{\gamma} \left( \boldsymbol{\tau} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} \right) \geq 0 \quad (4. 12)$$

che implica il rispetto delle seguenti condizioni:

1.  $\dot{\gamma} \geq 0$
2.  $f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{k}) \leq 0$
3.  $\dot{\gamma} f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{k}) = 0$

Con tutte queste equazioni a disposizione è possibile definire direttamente l'operatore tangente elastoplastico, che servirà per la determinazione dello stato tensionale e deformativo nella soluzione del problema al contorno:

$$\alpha^{ep} = \sum_{A=1}^3 \sum_{B=1}^3 \alpha_{AB}^{ep} \mathbf{m}^A \otimes \mathbf{m}^B + \sum_{A=1}^3 \sum_{A \neq B} \left( \frac{\tau_B - \tau_A}{\lambda_B^e - \lambda_A^e} \right) (\lambda_B^e \mathbf{m}^{AB} \otimes \mathbf{m}^{AB} + \lambda_A^e \mathbf{m}^{AB} \otimes \mathbf{m}^{BA}) \quad (4. 13)$$

dove  $\alpha_{AB}^{ep} = \partial \tau_A / \partial \varepsilon_B$  è il modulo elastoplastico lungo le direzioni principali.

Il calcolo degli allungamenti logaritmici  $\lambda_i^e$  nelle direzioni principali, che corrispondono alle componenti principali del tensore di Cauchy-Green destro, si ricavano, nel regime elastoplastico, attraverso una procedura "predictor-corrector", chiamata *product formula algorithm* sviluppata in [18], che si basa su calcolo del tensore di tentativo elastico dato dalla seguente espressione:

$$1. \quad \mathbf{b}_{n+1}^{e \ tr} \equiv \mathbf{b}^{e \ tr} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{b}_n^t \cdot \mathbf{f}^T \quad (4. 14)$$

e una successiva correzione plastica data dal flusso plastico, ottenuto per integrazione della derivata di Lie:

$$2. \quad \mathcal{L}_v \mathbf{b}^e = \sum_{A=1}^3 \mathcal{L}_v \lambda_A^e \mathbf{m}^A = -2\dot{\gamma} \sum_{A=1}^3 \frac{\partial g}{\partial \tau_A} \lambda_A^e \mathbf{m}^A \quad (4. 15)$$

con  $\mathbf{f}$  il gradiente di deformazione per il fissato intervallo di tempo.

Infine, la correttezza dello stato deformativo calcolato si verifica attraverso il rispetto della funzione di plasticità  $f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{k}) = 0$ . Per ulteriori approfondimenti e chiarimenti riguardo tale procedura si rimanda a [11,18].



## 5. MODELLO COSTITUTIVO CAM-CLAY

Molti materiali esibiscono deformazioni plastiche che non possono essere colte dalla teoria  $J_2$ . Esistono infatti diversi solidi che tendono a compattarsi o dilatarsi in modo inelastico e la cui forza di snervamento dipende dalla pressione di confinamento. La teoria  $J_2$  assume che non ci sia variazione plastica di volume e risulta pertanto inappropriata per modellare il comportamento deformativo inelastico di questi materiali. Per questo motivo, in questo capitolo si tratta il modello costitutivo Cam-Clay.

### 5.1 Introduzione

Andiamo ora a considerare dei modelli di plasticità governati da tutti e tre gli invarianti del tensore delle tensioni. Gli invarianti vengono assunti come variabili indipendenti per via del fatto che la funzione di snervamento deve essere indipendente dal sistema di riferimento.

Per un materiale elastico lineare isotropo, il tensore delle tensioni di Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  ed il tensore delle piccole deformazioni  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  sono coassiali; pertanto, hanno gli stessi autovettori  $\mathbf{n}^{(1)}$ ,  $\mathbf{n}^{(2)}$ ,  $\mathbf{n}^{(3)}$ . Ammettono quindi la decomposizione spettrale:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{A=1}^3 \sigma_A \mathbf{n}^{(A)} \otimes \mathbf{n}^{(A)} \quad (5.1.1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \sum_{A=1}^3 \varepsilon_A^e \mathbf{n}^{(A)} \otimes \mathbf{n}^{(A)} \quad (5.1.2)$$

Consideriamo la funzione di snervamento e la funzione del potenziale plastico nelle seguenti forme:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = \hat{f}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \boldsymbol{\kappa}) \quad (5.1.3)$$

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = \hat{g}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \boldsymbol{\kappa}) \quad (5.1.4)$$

Dalla regola della catena i gradienti rispetto a  $\boldsymbol{\sigma}$  sono pari a:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sum_{A=1}^3 f_A \frac{\partial \sigma_A}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.1.5)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sum_{A=1}^3 g_A \frac{\partial \sigma_A}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.1.6)$$

dove:

$$f_A = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \sigma_A} \quad (5.1.7)$$

$$g_A = \frac{\partial \hat{g}}{\partial \sigma_A} \quad (5.1.8)$$

Dalla definizione di direzione spettrale:

$$\dot{\sigma}_A = \frac{\partial \sigma_A}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{m}^{(A)} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (5.1.9)$$

quindi:

$$\frac{\partial \sigma_A}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{m}^{(A)} \quad (5.1.10)$$

Ne consegue che anche i gradienti delle funzioni di snervamento e di potenziale plastico ammettono la decomposizione spettrale:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sum_{A=1}^3 f_A \mathbf{n}^{(A)} \otimes \mathbf{n}^{(A)} \quad (5.1.11)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sum_{A=1}^3 g_A \mathbf{n}^{(A)} \otimes \mathbf{n}^{(A)} \quad (5.1.12)$$

I tensori  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ,  $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$  e  $\partial g / \partial \boldsymbol{\sigma}$  sono quindi tutti coassiali.

Si consideri una funzione isotropa del tensore delle tensioni in forma  $f(I_1, I_2, I_3)$  o  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Nello spazio delle tensioni principali le funzioni isotrope hanno l'asse idrostatico come asse generatore e la sezione trasversale sul piano deviatorico di una funzione isotropa dei primi due invarianti ha una forma circolare. Se aggiungiamo il terzo invariante, allora la sezione trasversale sul piano deviatorico non è più circolare, ma continua a mantenere la simmetria rispetto ai tre assi generatori delle tensioni principali. In questo caso è utile ricorrere alla rappresentazione mediante gli invarianti  $(I_1, J_2, \theta)$ , dove  $\theta$  è un angolo che ricopre un settore pari a  $\pi/3$  sul piano deviatorico, denominato angolo di Lode.

Consideriamo l'equazione caratteristica di un tensore simmetrico del secondo ordine:

$$\det(\boldsymbol{\varphi} - \varphi \mathbf{1}) = -\varphi^3 + I_1(\boldsymbol{\varphi})\varphi^2 - I_2(\boldsymbol{\varphi})\varphi + I_3(\boldsymbol{\varphi}) = 0 \quad (5.1.13)$$

dove:

$$I_1(\boldsymbol{\varphi}) = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \quad (5.1.14)$$

$$I_2(\boldsymbol{\varphi}) = \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2\varphi_3 + \varphi_1\varphi_3 \quad (5.1.15)$$

$$I_3(\boldsymbol{\varphi}) = \varphi_1\varphi_2\varphi_3 \quad (5.1.16)$$

con  $I_1, I_2, I_3$  invarianti di  $\boldsymbol{\varphi}$  e  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  i suoi autovalori.

Considerando la componente deviatorica  $\mathbf{s}$  del tensore delle tensioni di Cauchy, dalle eq. (5.1.13-5.1.16) l'equazione caratteristica di questo tensore è:

$$s^3 - J_2s - J_3 = 0 \quad (5.1.17)$$

dove  $s$  è un valore principale di  $\mathbf{s}$  e con:

$$J_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{s}^2) \quad (5.1.18)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{s}^3) \quad (5.1.19)$$

Si consideri l'identità:

$$\cos^3 \theta - \frac{3}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta = 0 \quad (5.1.20)$$

Riscrivendo  $s$  in coordinate polari e sostituendola nell'equazione caratteristica:

$$s = r \cos \theta \quad (5.1.21)$$

$$\cos^3 \theta - \frac{J_2}{r^2} \cos \theta - \frac{J_3}{r^3} = 0 \quad (5.1.22)$$

da cui si ottengono il raggio polare  $r$  e l'angolo  $\theta$ :

$$\frac{J_2}{r^2} = \frac{3}{4} \quad (5.1.23)$$

$$r = 2 \sqrt{\frac{J_2}{3}} \quad (5.1.24)$$

$$\frac{J_3}{r^3} = \frac{1}{4} \cos 3\theta$$

(5. 1. 25)

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}J_3}{2\sqrt{J_2^3}}$$

(5. 1. 26)

Si deve imporre la condizione  $0 \leq 3\theta \leq \pi$  al fine di avere  $-1 \leq \cos 3\theta \leq 1$ . Ne deriva che  $0 \leq \theta \leq \pi/3$ .

## 5.2 Formulazione costitutiva iper-elastica

Si definisce elastico un materiale che immagazzina energia senza dissiparla, per cui una volta rimossa la forza agente esso ritorna alla sua configurazione indeformata. Spesso i materiali elastici hanno un comportamento lineare, in quanto è lineare la curva sforzo-deformazione. Tuttavia, i materiali elastici possono esibire anche un comportamento non lineare, riconducibile principalmente a due fattori: non-linearità del materiale, per cui i parametri elastici dipendono in modo intrinseco dallo stato tensionale [3], e non linearità geometrica, per cui il campione sviluppa grandi deformazioni durante le prove.

Le proprietà elastiche dei geomateriali dipendono dalla pressione di confinamento e dalla densità, ed essi sono caratterizzati da range elastici molto ridotti.

Poiché i modelli di comportamento elastico devono essere conservativi, la formulazione iper-elastica è idonea a descrivere il comportamento di questi materiali, dal momento che l'equazione costitutiva viene derivata da una funzione dell'energia libera.

Un materiale si definisce iper-elastico se esiste una funzione di energia immagazzinata definita come segue:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (5.2.1)$$

Il tensore di elasticità tangenziale si ottiene dalla derivata seconda:

$$\mathbf{c}^e = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \frac{\partial^2 \psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e \otimes \partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (5.2.2)$$

Il tensore  $\mathbf{c}^e$  è definito positivo se l'energia immagazzinata è una funzione convessa delle deformazioni elastiche.

L'energia elastica immagazzinata può essere espressa in funzione degli invarianti di deformazione elastica:

$$\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \widetilde{\psi}^e(I_1(\boldsymbol{\varepsilon}^e), I_2(\boldsymbol{\varepsilon}^e), I_3(\boldsymbol{\varepsilon}^e)) \quad (5.2.3)$$

Da ciò ne consegue che  $\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)$  può essere espressa anche in funzione delle deformazioni elastiche principali:

$$\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \widehat{\psi}^e(\varepsilon_1^e, \varepsilon_2^e, \varepsilon_3^e) \quad (5.2.4)$$

Il tensore delle tensioni ammette quindi la decomposizione spettrale:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{A=1}^3 \sigma_A \mathbf{n}^{(A)} \otimes \mathbf{n}^{(A)} \quad (5.2.5)$$

$$\text{con } \sigma_A = \frac{\partial \widehat{\psi}^e}{\partial \varepsilon_A^e}.$$

Consideriamo ora la funzione di energia immagazzinata espressa secondo gli invarianti volumetrico  $\varepsilon_v^e$  e deviatorico  $\varepsilon_s^e$  delle deformazioni elastiche:

$$\widetilde{\psi}^e(\varepsilon_v^e, \varepsilon_s^e) = \widetilde{\psi}(\varepsilon_v^e) + \frac{3}{2}\mu^e \varepsilon_s^e{}^2 \quad (5.2.6)$$

dove:

$$\widetilde{\psi}(\varepsilon_v^e) = -p_0 \tilde{\kappa} \exp \omega \quad (5.2.7)$$

$$\omega = -\frac{\varepsilon_v^e - \varepsilon_{v0}^e}{\tilde{\kappa}} \quad (5.2.8)$$

$$\mu^e(\varepsilon_v^e) = \mu_0 + \frac{\alpha}{\tilde{\kappa}} \widetilde{\psi}(\varepsilon_v^e) \quad (5.2.9)$$

$\widetilde{\psi}(\varepsilon_v^e)$  identifica il contributo di energia libera immagazzinata dato dai carichi isotropi,  $\tilde{\kappa}$  è l'indice di compressibilità elastica (rigonfiamento),  $\mu^e(\varepsilon_v^e)$  è il modulo di rigidezza elastico a taglio,  $\mu_0$  il suo valore iniziale e  $\alpha$  è la costante di accoppiamento tra il modulo a taglio e la deformazione volumetrica. Gli invarianti di deformazione volumetrico e deviatorico si ricavano dalle seguenti espressioni:

$$\varepsilon_v^e = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \quad (5.2.10)$$

$$\varepsilon_s^e = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{e}^e\| \quad (5.2.11)$$

La componente deviatorica  $\mathbf{e}^e$  del tensore delle piccole deformazioni è pari a:

$$\mathbf{e}^e = \boldsymbol{\varepsilon}^e - \frac{1}{3} \varepsilon_v^e \mathbf{1} \quad (5.2.12)$$

La quantità  $\varepsilon_{v0}^e$  è la deformazione volumetrica elastica relativa alla tensione isotropa iniziale  $p_0$ . In termini di energia immagazzinata la legge costitutiva è definita dalla seguente equazione iper-elastica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{d\widetilde{\psi}^e(\varepsilon_v^e, \varepsilon_s^e)}{d\boldsymbol{\varepsilon}^e} = \frac{d\widetilde{\psi}^e(\varepsilon_v^e, \varepsilon_s^e)}{d\varepsilon_v^e} \frac{d\varepsilon_v^e}{d\boldsymbol{\varepsilon}^e} + \frac{d\widetilde{\psi}^e(\varepsilon_v^e, \varepsilon_s^e)}{d\varepsilon_s^e} \frac{d\varepsilon_s^e}{d\boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (5.2.13)$$

dove:

$$\frac{d\varepsilon_v^e}{d\boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbf{1} \quad (5.2.14)$$

$$\frac{d\varepsilon_s^e}{d\boldsymbol{\varepsilon}^e} = \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\mathbf{n}} \quad (5.2.15)$$

con  $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{e}^e}{\|\mathbf{e}^e\|}$ .

Allora la (5.2.13) può essere riscritta come:

$$\boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{1} + \sqrt{\frac{2}{3}}q\hat{\mathbf{n}} \quad (5.2.16)$$

dove:

$$p = \frac{d\widetilde{\psi}^e(\varepsilon_v^e, \varepsilon_s^e)}{d\varepsilon_v^e} \quad (5.2.17)$$

$$q = \frac{d\widetilde{\psi}^e(\varepsilon_v^e, \varepsilon_s^e)}{d\varepsilon_s^e} \quad (5.2.18)$$

È possibile esplicitare gli invarianti di tensione in funzione dei rispettivi invarianti di deformazione:

$$p = p_0 \exp \omega \left( 1 + \frac{3\alpha}{2\tilde{\kappa}} \varepsilon_s^{e2} \right) \quad (5.2.19)$$

$$q = 3(\mu_0 - \alpha p_0 \exp \omega) \varepsilon_s^e \quad (5.2.20)$$

La funzione di energia libera descritta esibisce un accoppiamento fra le risposte volumetrica e deviatorica. Al fine di comprendere questo con più chiarezza, consideriamo le derivate temporali degli invarianti di tensione:

$$\begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}^e \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_v^e \\ \dot{\varepsilon}_s^e \end{Bmatrix} \quad (5.2.21)$$

dove  $\mathbf{D}^e$  è la matrice Hessiana così definita:

$$\mathbf{D}^e = \begin{bmatrix} D_{11}^e & D_{12}^e \\ D_{21}^e & D_{22}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^2 / \partial \varepsilon_v^e \partial \varepsilon_v^e & \partial^2 / \partial \varepsilon_v^e \partial \varepsilon_s^e \\ \partial^2 / \partial \varepsilon_s^e \partial \varepsilon_v^e & \partial^2 / \partial \varepsilon_s^e \partial \varepsilon_s^e \end{bmatrix} \psi^e \quad (5.2.22)$$

Le singole componenti della matrice risultano:

$$\begin{aligned} D_{11}^e &= -\frac{p_0}{\tilde{\kappa}} \exp \omega \left( 1 + \frac{3\alpha}{\tilde{\kappa}} \varepsilon_s^{e2} \right) \\ D_{22}^e &= 3\mu_0 - 3\alpha p_0 \exp \omega \\ D_{12}^e &= D_{21}^e = \frac{3p_0 \alpha \varepsilon_s^e}{\tilde{\kappa}} \exp \omega \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

Se  $D_{12}^e = D_{21}^e \neq 0$  allora l'eq. (5.2.22) riflette un accoppiamento completo, ossia un incremento di deformazione elastica volumetrica provoca un incremento di tensione deviatorica, e viceversa.

Il tensore di elasticità tangenziale, in termini delle componenti della matrice Hessiana, è pari a:

$$\mathbf{c}^e = \frac{2}{3} D_{22}^e \mathbf{I} + \left( D_{11}^e - \frac{2}{9} D_{22}^e \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \sqrt{\frac{2}{3}} D_{12}^e (\mathbf{1} \otimes \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{1}) \quad (5.2.24)$$

### 5.3 Cam-Clay Modificato a due invarianti

La teoria dello stato critico è utile a descrivere il comportamento inelastico compattante o dilatante dei materiali granulari. La variazione inelastica di volume non è il semplice risultato di una compressione o trazione isotropa, ma è indotta dal taglio. Per pressioni di confinamento sufficientemente basse, il materiale granulare esibisce in genere una dilatazione indotta dal taglio, mentre a pressioni alte si verifica una compattazione indotta dal taglio. Tuttavia, un materiale che snerva allo stato critico non si compatta o dilata sotto effetto del taglio. Per descrivere lo snervamento in compressione, e la conseguente compattazione inelastica, la superficie di snervamento viene chiusa da una calotta in compressione che può espandersi o restringersi a seconda del meccanismo di deformazione. La linea di stato critico (CSL) separa la calotta in compressione dalla parte in dilatazione della superficie di snervamento.

Il modello Cam-Clay, sviluppato a Cambridge negli anni '60, è un modello costitutivo basato sulla teoria dell'elastoplasticità ed è il modello allo stato critico più impiegato. Le dimensioni della sezione deviatorica della superficie di snervamento aumentano percorrendo l'asse idrostatico nel verso della compressione. Si tratta quindi di una superficie di snervamento di tipo conico, la cui apertura lungo l'asse idrostatico viene chiusa mediante un'altra superficie per permettere la modellazione dello sviluppo di deformazione inelastica in compressione isotropa.

Questo modello costitutivo risolve anche il problema dell'incompatibilità fra l'ipotesi di normalità del flusso plastico ed il reale comportamento dei terreni. Il modello effettua una distinzione tra superficie di snervamento e superficie critica, che caratterizza la condizione ultima del materiale. La superficie critica è di tipo conico ed è il luogo degli stati tensionali caratterizzati dallo sviluppo di deformazione plastica a componente volumetrica nulla.

Il Cam-Clay Modificato fu proposto da Roscoe e Burland al fine di migliorare l'accordo del modello con i dati sperimentali e per estenderne il campo di applicabilità.

Questo modello si è dimostrato sufficientemente accurato nel descrivere il comportamento di argille normalconsolidate o debolmente sovraconsolidate in condizione di carico quasi-statiche e monotone. I parametri richiesti per il suo impiego sono pochi e ricavabili per mezzo di prove standard di laboratorio, il che giustifica il suo frequente utilizzo.

La curva di snervamento utilizzata dal Cam-Clay Modificato è di tipo ellittico, al fine di correggere la tendenza del Cam-Clay – in cui le curve di snervamento sono archi di spirale logaritmica – a sovrastimare gli incrementi di deformazione plastica deviatorica. Il criterio di snervamento viene definito da una funzione regolare convessa. Nei modelli di tipo Cam-Clay la resistenza del terreno è di tipo attritivo e la sua compressibilità è logaritmica.

La funzione di snervamento per il Cam-Clay Modificato è:

$$\tilde{f} = \frac{q^2}{M^2} + p(p - p_c) \leq 0 \quad (5.3.1)$$

dove  $p$  e  $q$  sono gli invarianti di tensione rispettivamente volumetrico e deviatorico, calcolati come:

$$p = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (5.3.2)$$



$$q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|s\|$$

(5.3.3)

In Figura 5.3.1 viene riportata la curva di snervamento del modello.

$M$  è una costante positiva che identifica la pendenza, nel piano  $p - q$ , della linea di stato critico e  $p_c$  è la pressione di preconsolidazione che coincide con la variabile di incrudimento. La superficie di snervamento è definita da  $f = 0$  ed è rappresentata da una semi-ellisse sul piano  $p - q$ .

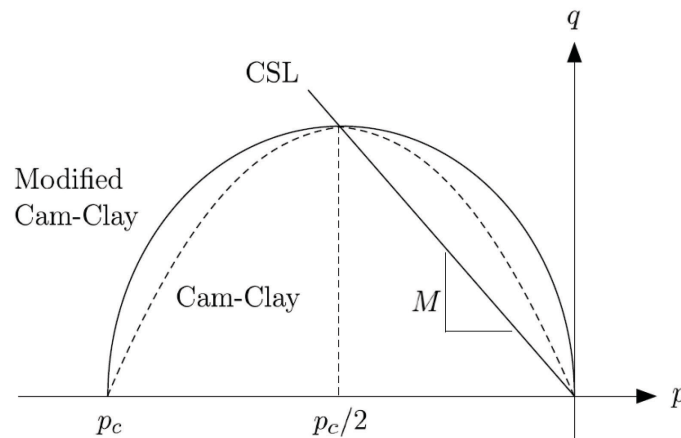


Figura 5.3.1: Superfici di snervamento del Cam-Clay e del Cam-Clay Modificato nel piano  $p - q$  [2].

Allo stato critico  $p_c = 2p$  quindi l'equazione della linea di stato critico, ottenuta imponendo  $\tilde{f} = 0$ , è:

$$q = -Mp$$

(5.3.4)

La pendenza della CSL dipende dall'angolo di attrito allo stato critico  $\Phi_{CS}$ , secondo la seguente relazione:

$$M = \frac{6 \sin \Phi_{CS}}{3 - \sin \Phi_{CS}}$$

(5.3.5)

La legge di incrudimento in deformazioni finite è data dalla seguente relazione incrementale:

$$\frac{\dot{v}}{v} = -\hat{\lambda} \frac{\dot{p}_c}{p_c}$$

(5.3.6)

dove  $\hat{\lambda}$  è l'indice di compressibilità in deformazioni finite,  $v = V/V_s$  è il volume specifico e  $\dot{v}$  è la sua variazione. Eseguendo un'integrazione per parti, si ricava la seguente relazione bi-logaritmica, illustrata in Figura 5.3.2:

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\hat{\lambda} \ln\left(\frac{p_c}{p_{c0}}\right)$$

(5.3.7)

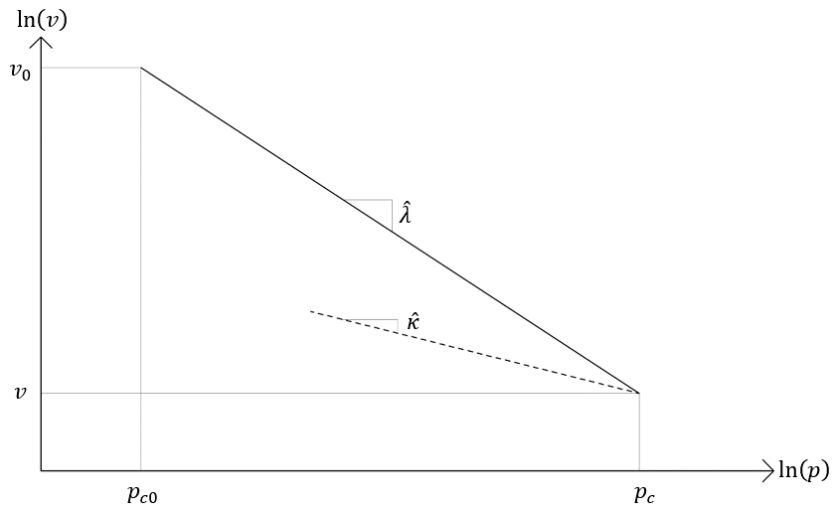


Figura 5.3.2: Legge di incrudimento bi-logaritmica in compressione isotropa.

Dalla decomposizione moltiplicativa del gradiente di deformazione  $\mathbf{F}$ , è possibile riscrivere la legge di incrudimento in termini di deformazione:

$$\dot{\varepsilon}_v = \dot{\varepsilon}_v^e + \dot{\varepsilon}_v^p = -\hat{\lambda} \frac{\dot{p}_c}{p_c}$$

(5.3.8)

Dalla (5.3.8) e considerando che:

$$\dot{\varepsilon}_v^e = -\hat{\kappa} \frac{\dot{p}_c}{p_c}$$

(5.3.9)

si ottiene:

$$\frac{\dot{p}_c}{p_c} = -\frac{1}{\hat{\lambda} - \hat{\kappa}} \dot{\varepsilon}_v^p$$

(5.3.10)

da cui si può ricavare l'espressione esatta della variabile di incrudimento  $\dot{p}_c$ .

I parametri  $\hat{\lambda}$  e  $\hat{\kappa}$  possono essere ricavati dai rispettivi parametri  $\tilde{\lambda}$  e  $\tilde{\kappa}$  in piccole deformazioni attraverso le seguenti relazioni:

$$\hat{\lambda} = \frac{\tilde{\lambda}}{1 - \tilde{\lambda}}$$

(5.3.11)

$$\hat{\kappa} = \frac{\tilde{\kappa}}{1 - \tilde{\kappa}}$$

(5.3.12)

## 5.4 Cam-Clay Modificato a tre invarianti

I carichi di snervamento per i materiali granulari sono noti per essere più alti in compressione che in trazione. Il modello a due invarianti, al fine di catturare questa caratteristica, deve essere implementato con il terzo invariante di tensione [12]. Si ricorre quindi all'utilizzo dell'angolo di Lode. In Figura 5.4.1 viene riportata la rappresentazione  $(p, q, \theta)$ , dove l'asse idrostatico funge da polo ed i tre assi positivi delle tensioni principali fungono da assi polari.

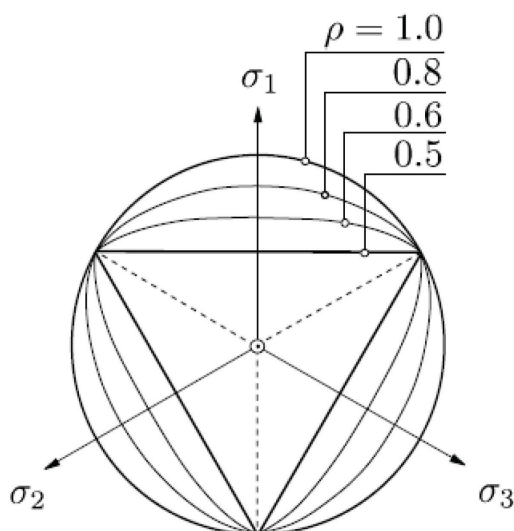


Figura 5.4.1: Funzione di snervamento ottenuta dalla funzione di scala di Willam & Warnke [2].

Si definisce ellitticità:

$$\rho = \frac{\|s\|_{ext}}{\|s\|_{com}}$$

(5. 4. 1)

dove  $\|s\|_{com}$  identifica il raggio sull'asse della tensione principale di compressione, mentre  $\|s\|_{ext}$  rappresenta il raggio sull'asse principale di trazione. L'ellitticità descrive la deviazione dalla rotondità della sezione trasversale della superficie di snervamento sul piano deviatorico. Il suo valore deve essere compreso tra 0,5 e 1. Il limite inferiore  $\rho = 0,5$  identifica una sezione trasversale triangolare, mentre il limite superiore  $\rho = 1$  rappresenta una sezione trasversale perfettamente circolare sul piano deviatorico. Nello specifico l'ellitticità non può assumere valori inferiori a 0,5 perché altrimenti la superficie di snervamento perde la convessità.

La funzione di snervamento, considerando anche il terzo invariante, diventa:

$$\tilde{f} = \zeta^2 \frac{q^2}{M^2} + p(p - p_c) \leq 0$$

(5. 4. 2)

dove  $\zeta = \zeta(\rho, \theta)$  è una funzione di scala che consente di riprodurre una tensione di snervamento più alta in compressione. Ricordando che  $0 \leq \theta \leq \pi/3$ ,  $\zeta$  deve soddisfare due condizioni al contorno: 1)  $\zeta = 1/\rho$  se  $\theta = 0$ ; 2)  $\zeta = 1$  se  $\theta = \pi/3$ .

William e Warnke (1974) [21] hanno proposto la seguente funzione di scala:

$$\zeta(\rho, \theta) = \frac{4(1 - \rho^2)(\cos \theta)^2 + (2\rho - 1)^2}{2(1 - \rho^2) \cos \theta + (2\rho - 1)\sqrt{4(1 - \rho^2)(\cos \theta)^2 + 5\rho^2 - 4\rho}} \quad (5.4.3)$$

Tale funzione è convessa per  $0,5 < \rho \leq 1$ .

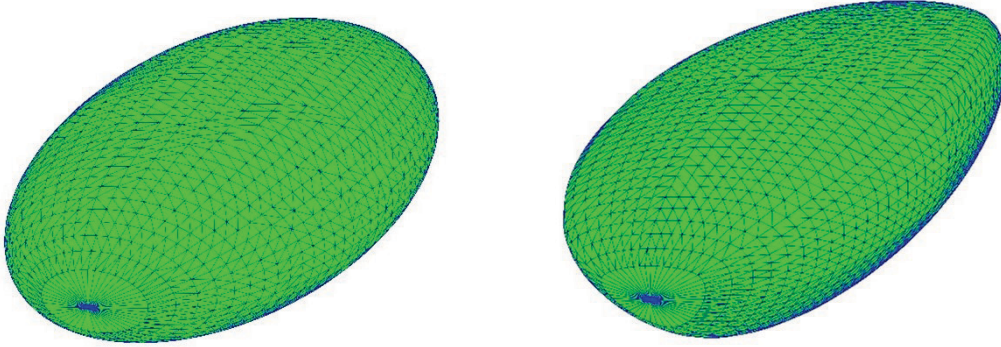


Figura 5.4.2: Superfici di snervamento. A sinistra: Cam-Clay a due invarianti; a destra: Cam-Clay a tre invarianti.

Al fine di imporre la condizione di consistenza è necessario ricavare la derivata della funzione di snervamento definita nella (5.4.2). Assumiamo che la funzione di snervamento possa essere decomposta nella seguente forma:

$$\tilde{f}(p, q, \theta) = f_1(p) + f_2(q, \theta) \quad (5.4.4)$$

Applicando la regola della catena si ottiene:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_A} = \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p} \delta_A + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma_A} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_A} \quad (5.4.5)$$

Sviluppando la derivata si ottiene:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_A} = \frac{1}{3} (2p - p_c) \delta_A + \zeta^2 \frac{2q}{M^2} \frac{\partial q}{\partial \sigma_A} + 2\zeta \frac{q^2}{M^2} \zeta' \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_A} \quad (5.4.6)$$

dove:

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma_A} = \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{n} \quad (5.4.7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma_A} = -\frac{2}{\sqrt{6}} \csc 3\theta \frac{\partial y}{\partial \sigma_A} \quad (5.4.8)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \sigma_A} = 3 \frac{s_A^2}{\chi^3} - 3 \frac{\text{tr}(\mathbf{s}^3) s_A}{\chi^5} - \frac{\delta_A}{\chi}$$

(5. 4. 9)

con  $\chi = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{s}^2)}$ .

Definendo con  $h$  e  $g$  rispettivamente il numeratore e il denominatore della funzione di scala, si ricava agevolmente la sua derivata prima come:

$$\zeta' = \frac{\partial \zeta(\rho, \theta)}{\partial \theta} = \frac{h'(\theta)g(\theta) - h(\theta)g'(\theta)}{g^2(\theta)}$$

(5. 4. 10)

dove:

$$h'(\theta) = -8(1 - \rho^2) \cos \theta \sin \theta$$

(5. 4. 11)

$$g'(\theta) = -2(1 - \rho^2) \sin \theta + \frac{(2\rho - 1)h'^2}{2\sqrt{4(1 - \rho^2) \cos^2 \theta + 5\rho^2 - 4\rho}}$$

(5. 4. 12)

La derivata seconda della funzione di snervamento si ottiene da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \sigma_A \partial \sigma_B} &= \frac{1}{9} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial p^2} \delta_A \delta_B + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q} \frac{\partial^2 q}{\partial \sigma_A \partial \sigma_B} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \sigma_A \partial \sigma_B} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial \sigma_A} \frac{\partial q}{\partial \sigma_B} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_A} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_B} \\ &+ \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial q \partial \theta} \left( \frac{\partial q}{\partial \sigma_A} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_B} + \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_A} \frac{\partial q}{\partial \sigma_B} \right) \end{aligned}$$

(5. 4. 13)

Sviluppando la derivata si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \sigma_A \partial \sigma_B} &= \frac{2}{9} \delta_A \delta_B + \zeta^2 \frac{2q}{M^2} \frac{\partial^2 q}{\partial \sigma_A \partial \sigma_B} + 2\zeta \frac{q^2}{M^2} \zeta' \frac{\partial^2 \theta}{\partial \sigma_A \partial \sigma_B} + \zeta^2 \frac{2}{M^2} \frac{\partial q}{\partial \sigma_A} \frac{\partial q}{\partial \sigma_B} \\ &+ 2 \frac{q^2}{M^2} (\zeta'^2 + \zeta \zeta'') \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_A} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_B} + \frac{4q\zeta\zeta'}{M^2} \left( \frac{\partial q}{\partial \sigma_A} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_B} + \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_A} \frac{\partial q}{\partial \sigma_B} \right) \end{aligned}$$

(5. 4. 14)

dove le derivate seconde degli invarianti di tensione rispetto alle tensioni principali sono:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \sigma_A \partial \sigma_B} = \frac{\sqrt{3/2}}{\chi} \left( \delta_{AB} - \frac{1}{3} \delta_A \delta_B - \frac{s_A s_B}{\chi^2} \right)$$

(5. 4. 15)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \sigma_A \partial \sigma_B} = - \left( \frac{2}{\sqrt{6}} \csc 3\theta \right) \frac{\partial^2 y}{\partial \sigma_A \partial \sigma_B} - (3 \cot 3\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_A} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_B}$$

(5. 4. 16)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \sigma_A \partial \sigma_B} = 6 \frac{s_A \delta_{AB}}{\chi^3} - 3 \frac{\text{tr}(\mathbf{s}^3)}{\chi^5} \left( \delta_{AB} - \frac{1}{3} \delta_A \delta_B - 5 \frac{s_A s_B}{\chi^2} \right) + \frac{1}{\chi^3} (\delta_A s_B + s_A \delta_B) - \frac{9}{\chi^5} (s_A s_B^2 + s_A^2 s_B)$$

(5. 4. 17)

Mentre la derivata seconda della funzione di scala è:

$$\zeta'' = \frac{\partial^2 \zeta(\rho, \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{[h''(\theta)g(\theta) + h'(\theta)g'(\theta) - h'(\theta)g'(\theta) - h'(\theta)g''(\theta)]g^2(\theta) - [h(\theta)g'(\theta)]g^{2'}(\theta)}{g^4(\theta)}$$

(5. 4. 18)

dove:

$$h''(\theta) = -8(1 - \rho^2)(4 \cos^2 \theta - 1)$$

(5. 4. 19)

$$g^{2'}(\theta) = 2g(\theta)g'(\theta)$$

(5. 4. 20)

$$g''(\theta) = -2(1 - \rho^2) \cos \theta + \frac{a}{4(4(1 - \rho^2) \cos^2 \theta + 5\rho^2 - 4\rho)}$$

(5. 4. 21)

con:

$$a = (2\rho - 1)h''(\theta)2\sqrt{4(1 - \rho^2) \cos^2 \theta + 5\rho^2 - 4\rho} - \frac{(2\rho - 1)h'^2(\theta)}{\sqrt{4(1 - \rho^2) \cos^2 \theta + 5\rho^2 - 4\rho}}$$

(5. 4. 22)

### 5.4.1 Return mapping

Consideriamo la decomposizione del tensore delle deformazioni:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ tr} - \Delta\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} \quad (5.4.1.1)$$

Dove  $g$  è la funzione del potenziale plastico e  $\Delta\lambda$  è il moltiplicatore plastico.

Mediante la decomposizione spettrale, la (5.4.1.1) diventa:

$$\sum_{A=1}^3 \varepsilon_A^e \mathbf{n}^{(A)} \otimes \mathbf{n}^{(A)} = \sum_{A=1}^3 \varepsilon_A^{e\ tr} \mathbf{n}^{tr(A)} \otimes \mathbf{n}^{tr(A)} - \Delta\lambda \sum_{A=1}^3 \frac{\partial \hat{g}}{\partial \sigma_A} \mathbf{n}^{(A)} \otimes \mathbf{n}^{(A)} \quad (5.4.1.2)$$

Poiché  $\mathbf{n}^{(A)} \otimes \mathbf{n}^{(A)} = \mathbf{n}^{tr(A)} \otimes \mathbf{n}^{tr(A)}$ :

$$\varepsilon_A^e = \varepsilon_A^{e\ tr} - \Delta\lambda \frac{\partial \hat{g}}{\partial \sigma_A} \quad (5.4.1.3)$$

Per completare la formulazione del problema, è necessario imporre la legge di incrudimento, con  $\kappa = p_{c,n}$  variabile di incrudimento:

$$\hat{l}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \kappa, \Delta\lambda) = \hat{L}(\varepsilon_1^e, \varepsilon_2^e, \varepsilon_3^e, \kappa, \Delta\lambda) = 0 \quad (5.4.1.4)$$

$$p_{c,n} - p_{c,n} e^{[-\Phi \Delta\lambda (2p - p_c)]} = 0 \quad (5.4.1.5)$$

con  $\Phi = \frac{1}{\hat{\lambda} - \hat{\kappa}}$ .

E la condizione di consistenza:

$$\hat{f}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \kappa) = \hat{F}(\varepsilon_1^e, \varepsilon_2^e, \varepsilon_3^e, \kappa) = 0 \quad (5.4.1.6)$$

$$\varsigma^2 \frac{q^2}{M^2} + p(p - p_c) = 0 \quad (5.4.1.7)$$

Lo step successivo è la risoluzione di un problema non lineare. Come prima cosa, si assembla il vettore locale del residuo:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^e - \varepsilon_1^{e\ tr} - \Delta\lambda g_1 \\ \varepsilon_2^e - \varepsilon_2^{e\ tr} - \Delta\lambda g_2 \\ \varepsilon_3^e - \varepsilon_3^{e\ tr} - \Delta\lambda g_3 \\ \hat{L}(\varepsilon_1^e, \varepsilon_2^e, \varepsilon_3^e, \kappa, \Delta\lambda) \\ \hat{F}(\varepsilon_1^e, \varepsilon_2^e, \varepsilon_3^e, \kappa) \end{Bmatrix} \quad (5.4.1.8)$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^e - \varepsilon_1^{e\ tr} - \Delta\lambda g_1 \\ \varepsilon_2^e - \varepsilon_2^{e\ tr} - \Delta\lambda g_2 \\ \varepsilon_3^e - \varepsilon_3^{e\ tr} - \Delta\lambda g_3 \\ p_{c,n} - p_{c,n} e^{[-\Phi\Delta\lambda(2p-p_c)]} \\ \zeta^2 \frac{q^2}{M^2} + p(p - p_c) \end{Bmatrix}$$

(5. 4. 1. 9)

ed il vettore delle incognite  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^e \\ \varepsilon_2^e \\ \varepsilon_3^e \\ p_{c,n} \\ \Delta\lambda \end{Bmatrix}$$

(5. 4. 1. 10)

$$\text{con } g_A = \frac{\partial \hat{g}}{\partial \sigma_A}.$$

Si ottengono cinque equazioni non lineari in cinque incognite, per la cui soluzione si ricorre al metodo di Newton-Raphson. Si costruisce quindi lo Jacobiano:

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{r}'(\mathbf{x}^k) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \Delta\lambda g_1 / \partial \kappa & g_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \Delta\lambda g_2 / \partial \kappa & g_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \Delta\lambda g_3 / \partial \kappa & g_3 \\ \partial \hat{L} / \partial \varepsilon_1^e & \partial \hat{L} / \partial \varepsilon_2^e & \partial \hat{L} / \partial \varepsilon_3^e & \partial \hat{L} / \partial \kappa & \partial \hat{L} / \partial \Delta\lambda \\ \partial \hat{F} / \partial \varepsilon_1^e & \partial \hat{F} / \partial \varepsilon_2^e & \partial \hat{F} / \partial \varepsilon_3^e & \partial \hat{F} / \partial \kappa & 0 \end{bmatrix}$$

(5. 4. 1. 11)

$$\text{con } c_{ij} = \delta_{ij} + \Delta\lambda \frac{\partial g_i}{\partial \varepsilon_j^e}.$$

Riconoscendo che le funzioni di snervamento e di potenziale plastico sono date in termini delle tensioni e non delle deformazioni elastiche, si valutano i gradienti di deformazione usando la regola della catena:

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \varepsilon_i^e} = \sum_{A=1}^3 \frac{\partial \hat{f}}{\partial \sigma_A} \frac{\partial^2 \widehat{\psi}^e}{\partial \varepsilon_A^e \partial \varepsilon_i^e}$$

(5. 4. 1. 12)

$$\frac{\partial g_i}{\partial \varepsilon_j^e} = \sum_{A=1}^3 \frac{\partial g_i}{\partial \sigma_A} \frac{\partial^2 \widehat{\psi}^e}{\partial \varepsilon_A^e \partial \varepsilon_j^e}$$

(5. 4. 1. 13)

dove il primo termine della sommatoria dell'eq. (5.4.1.13) corrisponde a:



$$\frac{\partial g_I}{\partial \sigma_A} = \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \sigma_I \partial \sigma_A} = H_{IA}$$

(5.4.1.14)

Il potenziale plastico quindi, già precedentemente calcolato al (5.1.4), può essere raccolto nella relativa matrice Hessiana  $\mathbf{H}$ . Il secondo termine dell'espressione (5.4.1.13) corrisponde al potenziale elastico. Anch'esso può essere rappresentato in modo compatto attraverso la matrice  $\mathbf{D}$  definita nello spazio delle direzioni principali:

$$\mathbf{D} = \left( D_{11}^e - \frac{2q}{9\varepsilon_S^e} D_{22}^e \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \sqrt{\frac{2}{3}} D_{12}^e (\mathbf{1} \otimes \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{1}) + \frac{2q}{3\varepsilon_S^e} D_{22}^e \mathbf{I}$$

(5.4.1.15)

dove  $\mathbf{D}^e$  è la matrice elastica Hessiana scritta nello spazio degli invarianti vista al (5.2.23).

È quindi possibile riscrivere in modo compatto il blocco quadrato di dimensione 3x3 della matrice algoritmica  $\mathbf{A}$  come:  $\mathbf{C} = \mathbf{I} + \Delta\lambda(\mathbf{H}\mathbf{D})$ ; il blocco rettangolare in basso dato dalla derivata della funzione di plasticità rispetto alle deformazioni principali si ricava dal prodotto tra il vettore delle derivate rispetto gli invarianti di tensione e la matrice  $\mathbf{D}$ . Il blocco rettangolare relativo alla derivata della legge di incrudimento rispetto alle deformazioni principali corrisponde a:

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial \varepsilon_i^e} = \sum_{A=1}^3 \frac{\partial \hat{L}}{\partial \sigma_A} \frac{\partial^2 \hat{\psi}^e}{\partial \varepsilon_A^e \partial \varepsilon_i^e}$$

(5.4.1.16)

che in forma matriciale compatta, si può scrivere come:

$$\hat{l}_A = \Delta\lambda \theta p_c \mathbf{1}^T (\mathbf{H}\mathbf{D})$$

(5.4.1.17)

Le prime tre componenti che appaiono nella quarta colonna della matrice  $\mathbf{A}$ , corrispondono al prodotto tra il moltiplicatore plastico e la derivata del potenziale plastico rispetto alla variabile di *hardening* ( $p_c$ ):

$$\Delta\lambda \frac{\partial \hat{g}_i}{\partial p_c} = -\frac{\Delta\lambda}{3} \mathbf{1}_i$$

(5.4.1.18)

Le componenti restanti sono pari alla derivata del potenziale plastico  $\hat{g}$  per le prime tre componenti dell'ultima colonna della matrice algoritmica  $\mathbf{A}$  mentre:

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial \kappa} = 1 - \theta p_c \Delta\lambda$$

(5.4.1.19)

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial \kappa} = -p$$

(5.4.1.20)

$$\partial \hat{L} / \partial \Delta \lambda = p_c \theta (2p - p_c)$$

(5. 4. 1. 21)

Si ricorda che la legge di *hardening*, così come il potenziale elastico, dipende solo dai primi due invarianti [3].

La procedura di *return mapping* [5] per il modello Cam-Clay a tre invarianti si può riassumere sinteticamente attraverso i seguenti passaggi:

1. Calcolo del tensore di deformazione elastico di tentativo:  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ tr} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ ;
2. Decomposizione spettrale del tensore di deformazione:
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ tr} = \sum_{A=1}^3 \varepsilon_A^{e\ tr} \mathbf{n}^{tr A} \otimes \mathbf{n}^{tr A};$$
3. Calcolo degli invarianti di tensione  $p^{tr}, q^{tr}, \vartheta^{tr}$ ;
4. Verifica della funzione di plasticità:  $f(p^{tr}, q^{tr}, \vartheta^{tr}) \leq 0$ 
  - 4.1. Sì, passo elastico.
  - 4.2. No, calcolo dello stato deformativo  $\boldsymbol{\varepsilon}_A^e$  e  $p_c$  tale che:  $f(p^{tr}, q^{tr}, \vartheta^{tr}) = 0$ ;
5. Calcolo delle tensioni nelle direzioni principali:  $\sigma_A^e = \partial \psi^e / \partial \varepsilon_A^e$ ;
6. Calcolo dello stato tensionale aggiornato:  $\sigma_{n+1} = \sum_{A=1}^3 \sigma_A^e \mathbf{n}^{tr A} \otimes \mathbf{n}^{tr A}$ ;
7. Calcolo dell'operatore algoritmico tangente  $\mathbf{a}_{AB}$ ;
8. Fine.

Il calcolo dell'operatore algoritmico tangente elasto-plastico  $\mathbf{a}_{AB}$  al punto (7) è necessario per la costruzione dell'operatore tangente consistente  $\mathbf{c}_{n+1}$  nello schema di Newton-Raphson globale, e si ricava dal primo blocco quadrato della matrice jacobiana inversa  $\mathbf{A}^{-1}$  moltiplicata per la matrice Hessiana nello spazio delle direzioni principali  $\mathbf{D}$ .

La matrice consistente si ricava attraverso la seguente relazione, in analogia con alla teoria in piccole deformazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n+1} = & \sum_{A=1}^3 \sum_{B=1}^3 \mathbf{a}_{AB} \mathbf{m}^A \otimes \mathbf{m}^B \\ & + \frac{1}{2} \sum_{A=1}^3 \sum_{A \neq B} \left( \frac{\sigma_B - \sigma_A}{\varepsilon_B^{e\ tr} - \varepsilon_A^{e\ tr}} \right) (\mathbf{m}^{AB} \otimes \mathbf{m}^{AB} + \mathbf{m}^{AB} \otimes \mathbf{m}^{BA}) \end{aligned}$$

(5. 4. 1. 22)

dove  $\mathbf{m}^A = \mathbf{n}^A \otimes \mathbf{n}^A$  è la base dell'autovettore  $\mathbf{n}^A$ , mentre  $\mathbf{m}^{AB} = \mathbf{n}^A \otimes \mathbf{n}^B$  è la base mista.

Considerando la teoria in deformazioni finite:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n+1} = & \sum_{A=1}^3 \sum_{B=1}^3 \mathbf{a}_{AB} \mathbf{m}^A \otimes \mathbf{m}^B \\ & + \sum_{A=1}^3 \sum_{A \neq B} \left( \frac{\boldsymbol{\tau}_B - \boldsymbol{\tau}_A}{\lambda_B^{e\ tr} - \lambda_A^{e\ tr}} \right) (\lambda_B^{e\ tr} \mathbf{m}^{AB} \otimes \mathbf{m}^{AB} + \lambda_A^{e\ tr} \mathbf{m}^{AB} \otimes \mathbf{m}^{BA}) \end{aligned}$$

(5. 4. 1. 23)

Dove  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  è il tensore di Kirchhoff, dato dal prodotto dello jacobiano di deformazione e il tensore delle tensioni di Cauchy. La variabile tensoriale  $\lambda$  rappresenta gli allungamenti lungo le direzioni principali ottenute dalla decomposizione spettrale del tensore di deformazione di Cauchy-Green sinistro  $\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ , con  $\mathbf{F}$  gradiente di deformazione.

## 6. CODICE DI CALCOLO

Questo capitolo contiene una descrizione dell'implementazione numerica del modello costitutivo, in ambiente MATLAB.

Il codice agli elementi finiti è articolato nei seguenti moduli [15]:

- Pre-processore (Capitolo 6.1);
- Processore (Capitolo 6.2);
- Post-processore (Capitolo 6.3).

### 6.1 Pre-processore

Il pre-processore è un modulo che permette la definizione delle seguenti grandezze:

- Nodi: punti del continuo, dei quali si vogliono conoscere le grandezze fisiche (spostamenti, tensioni, etc.);
- Elementi: definiti dalla discretizzazione del continuo e costituiti da un insieme di connessioni nodali;
- Proprietà del materiale: vengono definiti tutti i parametri del modello costitutivo del materiale;
- Vincoli: sono condizioni al contorno di spostamento imposte in un determinato nodo;
- Forzanti esterne: sono condizioni al contorno costituite da forze esterne. Possono essere di tipo nodale o distribuite;
- Time step: viene definita una successione temporale in cui sono applicati i carichi esterni o gli eventuali incrementi di carico.

Queste grandezze vengono memorizzate all'interno di matrici e sono le variabili che fungeranno da input per i moduli successivi. Per l'interfaccia grafica relativa al pre-processore si ricorre all'uso del programma commerciale *Straus7*.

Il file MATLAB *input.m* legge le quantità sopra descritte e le converte in matrici.

Le coordinate nodali vengono salvate all'interno della matrice  $X$ , dove ogni riga rappresenta il generico nodo  $n$ :

$$X(n, :) = [x_1^n \quad x_2^n \quad x_3^n]$$

La topologia degli elementi del modello è invece definita dalla matrice  $T$ , dove ogni riga rappresenta il generico elemento  $e$ :

$$T(e, :) = [node_1 \quad node_2 \quad \dots \quad node_{ne} \quad Prop.]$$

dove  $node_i$  corrisponde alla numerazione globale del nodo e  $Prop.$  è un numero che identifica la proprietà dell'elemento.

$G$  è la matrice delle proprietà ed ogni sua riga contiene tutte le proprietà del materiale, relative al singolo elemento finito:

$$G(i, 1:10) = [CC \quad \rho_s \quad \mu_0 \quad \alpha \quad \kappa \quad \lambda \quad M \quad P_0 \quad P_{c0} \quad \varepsilon_{v0}^e]$$
$$G(i, 11:20) = \left[ \rho \quad - \quad - \quad D \quad n \quad \rho_w \quad \mu_w \quad \frac{k_x}{\rho_w g} \quad \frac{k_y}{\rho_w g} \quad \frac{k_z}{\rho_w g} \right]$$

dove  $CC$  è un numero che identifica il tipo di modello costitutivo adottato. Gli altri parametri presenti in  $G$  sono relativi al modello Cam-Clay Modificato a tre invarianti; dunque, se si adotta un modello costitutivo diverso è necessario modificare le definizioni di tali parametri.

I vincoli sono racchiusi nella matrice  $C$ :

$$C = \begin{bmatrix} node_1 & dof_1 & value \\ node_1 & dof_2 & value \\ node_1 & dof_3 & value \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ node_n & dof_i & value \end{bmatrix}$$

dove nella prima colonna si ha il numero di nodo vincolato, nella seconda il grado di libertà e nella terza il valore dello spostamento. Il valore 0 identifica uno spostamento nullo.

Le forze concentrate vengono espresse mediante la matrice  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} node_1 & dof_1 & dof_2 & dof_3 \\ node_2 & dof_1 & dof_2 & dof_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ node_n & dof_1 & dof_2 & dof_3 \end{bmatrix}$$

dove nella prima colonna sono riportati i nodi, mentre nella seconda, nella terza e nella quarta sono riportati i valori delle forze rispettivamente in direzione  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

I carichi uniformemente distribuiti vengono riportati nella matrice  $pres$ :

$$pres = \begin{bmatrix} element_1 & face_1 & pres_1 & pres_2 & pres_3 \\ element_2 & face_2 & pres_1 & pres_2 & pres_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ element_e & face_s & pres_1 & pres_2 & pres_3 \end{bmatrix}$$

dove nella prima colonna è riportato il numero dell'elemento, nella seconda la faccia mentre nella terza, quarta e quinta il valore della pressione rispettivamente in direzione  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

All'interno del file di input vengono inoltre definite delle variabili necessarie all'avvio del processore.

Il parametro  $dim$  può assumere i valori di 2 o 3, a seconda che si voglia analizzare un problema di deformazione piana o tridimensionale.

Il vettore dell'accelerazione di gravità, utile per il calcolo delle forze di volume, è definito come:

$$av = g[n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T$$

dove  $n_i$  sono le componenti del versore unitario della gravità.

Con il parametro  $nmax$  si indica il numero massimo di incrementi di carico, mentre con  $imax$  il numero massimo di iterazioni che lo schema di Newton-Raphson può effettuare ad ogni step.

I vettori di incremento delle forze applicate sono indicati con  $incrf$  e  $incrv$ .

La tolleranza sul residuo dello schema iterativo viene indicata con  $epsr$ .

Il numero di punti Gauss per lato per i quali effettuare l'integrazione è espresso da  $nip$ .

Il parametro  $nonlin$  può assumere i valori di 0 e 1, a seconda che si voglia effettuare un'analisi in piccole deformazioni ( $nonlin = 0$ ), o in deformazioni finite ( $nonlin = 1$ ).

## 6.2 Processore

Il processore si occupa della soluzione del problema.

Il codice è sviluppato in modo tale da permettere sia analisi in deformazioni finite, sia in deformazioni infinitesime. In questo modo l'utente può valutare l'influenza della non-linearità geometrica sul problema.

1. Per prima cosa vengono caricati i dati di input, ovvero i vettori e le matrici che sono stati generati nel pre-processore. Successivamente vengono definiti i seguenti parametri di sistema:
  - nmax: il numero totale di step temporali;
  - dof: il numero di gradi di libertà associati agli spostamenti;
  - ndof: il numero totale di gradi di libertà associati agli spostamenti;
  - ne: il numero di nodi di un singolo elemento finito;
  - nelem: il numero totale di elementi finiti.
2. Si procede quindi con l'inizializzazione dei seguenti vettori e matrici:
  - vettori spostamento;
  - p, sup, V: i vettori delle forze nodali, di superficie e di volume;
  - REsrec: la matrice in cui vengono salvati, ad ogni passo temporale, le norme dei residui delle relative iterazioni dello schema di Newton-Raphson;
  - Srec: la matrice in cui vengono salvati, ad ogni passo temporale e per ogni elemento, le componenti del tensore delle tensioni efficaci di Cauchy del terreno;
  - brec: la matrice in cui, nel caso di analisi in grandi deformazioni, vengono salvate le componenti del tensore di deformazione di Cauchy-Green sinistro, ad ogni passo temporale e per ogni elemento. Nel caso di analisi in piccole deformazioni, è il tensore elastico delle deformazioni;
  - PLrec: la matrice in cui vengono salvati, ad ogni passo temporale e per ogni elemento, le deformazioni plastiche volumetriche e deviatoriche e la pressione di sovra-consolidazione;
  - PQrec: la matrice in cui vengono salvati, ad ogni passo temporale e per ogni elemento, gli invarianti di tensione secondo Kirchhoff;
  - FLAGrec: la matrice logica che indica, ad ogni passo temporale e per ogni elemento, quali punti Gauss sono plasticizzati.
3. Il tensore di Cauchy-Green sinistro viene inizializzato pari al tensore identità, oppure pari a quello risultante di un'analisi deformativa precedente. In quest'ultimo caso verrà aggiornata anche la relativa pressione di sovra-consolidazione.
4. Si definiscono i vettori dei gradi di libertà vincolati e non e i vettori degli spostamenti imposti.
5. Vengono quindi riportati i vettori delle forze esterne riferite ai gradi di libertà globali.
6. Inizia il ciclo sui passi temporali, effettuando l'aggiornamento dei vettori del sistema.
7. Vengono richiamate le variabili plastiche al passo precedente.
8. Inizia il ciclo iterativo di Newton-Raphson e viene azzerata la variabile  $g$ .

9. Viene richiamata la subroutine *gKSolid.m* che calcola al passo temporale  $t$  le seguenti variabili:
  - il vettore globale delle forze interne  $g$ ;
  - l'operatore tangente del sistema  $K$ ;
  - le misure di tensione aggiornate, calcolate nei punti Gauss;
  - le misure di deformazione aggiornate, calcolate nei punti Gauss;
  - le variabili plastiche aggiornate, calcolate nei punti Gauss;
  - gli invarianti di tensione secondo Kirchhoff, calcolati nei punti Gauss;
  - la variabile logica che indica quali punti Gauss sono plasticizzati;
10. Si calcola il residuo.
11. Si verifica il criterio di convergenza. Se la verifica viene soddisfatta si esce dal ciclo, altrimenti si passa allo step successivo.
12. Si valuta la variazione dell'incremento di spostamento. La soluzione del sistema viene calcolata solo nei gradi di libertà non vincolati.
13. Si calcola il vettore di incremento dello spostamento e si ritorna al punto 8, per l'esecuzione di una nuova iterazione dello schema di Newton-Raphson.
14. Viene aggiornato il vettore spostamento e si ritorna al punto 6, per l'esecuzione di un nuovo step temporale.

### 6.3 Post-Processore

L'ultima parte del programma è un insieme di *Driver* e *Function* che consentono di visualizzare attraverso immagini e grafici i risultati del problema.

Il post-processore elabora tutte le variabili contenute nelle matrici descritte in precedenza:

- Srec: la matrice delle misure di tensione;
- brec: la matrice delle misure di deformazione;
- PLrec: la matrice delle variabili plastiche;
- PQrec: la matrice degli invarianti di tensione;
- FLAGrec: la matrice delle variabili logiche.

Queste matrici multidimensionali sono organizzate in modo tale che:

- il primo indice indichi una determinata variabile;
- il secondo indice indichi il punto Gauss cui fa riferimento;
- il terzo indice indichi l'elemento finito cui appartiene;
- il quarto indice indichi il passo temporale in cui è stato calcolato.

Per ulteriori dettagli si rimanda ai file MATLAB che costituiscono il codice di calcolo agli elementi finiti [10].

## 6.4 Implementazione del modello costitutivo

Questo paragrafo contiene le nuove *functions* implementate nel codice di calcolo per il modello Cam-Clay a tre invarianti e una breve spiegazione del loro funzionamento mediante sintetici richiami di teoria qualora necessario. La descrizione di queste *subroutines* riprende il classico formato MATLAB.

Gli aspetti principali trattati in questo paragrafo sono:

- Obiettivo: si descrive in modo sintetico gli obiettivi della *function*;
- Sintassi: si descrive il formato mediante il quale viene richiamata la *function*;
- Descrizione: esplicazione della *function* con richiami alla teoria.

### 6.4.1 third.m

#### Obiettivo

Calcolare gli invarianti di tensione (Capitoli 3.3 e 5.1).

#### Sintassi

```
[T, Jtre, Jdue, chi] = third(Q, n)
```

#### Descrizione

Partendo dalla tensione deviatorica  $q$  e dal vettore  $\mathbf{n}$ , si ricava il tensore deviatorico  $\mathbf{s}$ , il secondo invariante deviatorico di tensione  $J_2$ , il terzo invariante deviatorico di tensione  $J_3$  e l'angolo di Lode  $\theta$  attraverso le seguenti righe di codice:

```
%-----  
s=sqrt(2.0/3.0)*Q*n;  
Jdue=Q^2/3.0;  
chi=sqrt(2.0/3.0)*Q;  
Jtre=(s(1,1)^3+s(2,1)^3+s(3,1)^3)/3.0;  
  
num=3.0*sqrt(3.0)*Jtre;  
den=2.0*Jdue^(3/2);  
rap=num/den;  
nt=pi()/3.0;  
  
tollJ=1e-14;  
toll=1e-8;  
if Jdue<=tollJ  
    T= nt/2.0;  
elseif rap>=1.0  
    T=0.0+toll;  
elseif rap<=-1.0  
    T=nt-toll;  
else  
    T=(acos(rap))/3.0;  
end  
%-----
```

Il ciclo *if* nel calcolo dell'angolo di Lode svolge una duplice funzione:

- 1) imporre che l'angolo  $\theta$  sia compreso tra  $0^\circ$  e  $60^\circ$ ;
- 2) introdurre delle piccole perturbazioni ai valori estremi in modo da restringere il campo dei valori a  $0 < \theta < \pi/3$ , al fine di migliorare l'algoritmo e ottenere sempre tre valori distinti di tensione principale.



## 6.4.2 scalf.m

### Obiettivo

Calcolare la funzione di scala  $\zeta(\rho, \theta)$  e le sue derivate, prima e seconda, rispetto all'angolo di Lode (Capitolo 5.4).

### Sintassi

```
[Z,DZ,DDZ] = scalf(rho,T)
```

### Descrizione

Dalle equazioni viste al Capitolo 5.4, si calcolano le derivate prima e seconda della funzione di scala rispetto a  $\theta$  attraverso le seguenti righe di codice:

```
%-----  
% Willam and Warnke scaling function  
f=4.0*(1.0-rho^2)*(cos(T))^2+(2.0*rho-1.0)^2;  
r=sqrt(4.0*(1.0-rho^2)*(cos(T))^2+5.0*rho^2-4.0*rho);  
g=2.0*(1.0-rho^2)*cos(T)+(2.0*rho-1.0)*r;  
Z=f/g;  
  
% First derivative  
Df=-8.0*(1.0-rho^2)*(cos(T)*sin(T));  
Dg=-2.0*(1.0-rho^2)*sin(T)+(2.0*rho-1)*Df/(2.0*r);  
  
num=Df*g-Dg*f;  
den=g^2;  
DZ=num/den;  
  
% Second derivative  
DDf=-8.0*(1.0-rho^2)*(2.0*(cos(T))^2-1.0);  
a=(2.0*rho-1.0)*DDf*(2.0*r)-(2.0*rho-1.0)*Df^2/r;  
b=4.0*r^2;  
DDg=-2.0*(1.0-rho^2)*cos(T)+a/b;  
Dnum=DDf*g+Df*Dg-DDg*f-Dg*Df;  
Dden=2.0*g*Dg;  
numD=Dnum*den-Dden*num;  
denD=den^2;  
DDZ=numD/denD;  
%-----
```

### 6.4.3 derf.m

#### Obiettivo

Calcolare le derivate prime e seconde della funzione di snervamento  $f$  descritta in (Capitolo 5.4).

#### Sintassi

```
[ga, H]=derf(rho, P, Q, Pc, M, n)
```

#### Descrizione

Essendo il potenziale plastico pari alla funzione di spostamento, calcoliamo le derivate prime e seconde di tale funzione rispetto gli incrementi di deformazione lungo le direzioni principali di tensione, al fine di calcolare la matrice locale jacobiana  $A$  (Capitolo 5.4) dell'algoritmo di *return mapping*.

```
%-----  
d=ones(3,1); dm=d*d'; I=eye(3,3);  
sm=n*n'; sa2=[n(1,1)^2; n(2,1)^2; n(3,1)^2]; dq=sqrt(3.0/2.0)*n;  
  
sab=[n(1,1) 0 0  
      0 n(2,1) 0  
      0 0 n(3,1)];  
  
% stress invariants & scaling funtion  
[T,Jtre,~,chi] = third(Q,n);  
[Z,Zi,Zii] = scalf(rho,T);  
  
% derivatives  
if Q<=1.0e-6  
    dy=sa2;  
    dT=-(2.0*csc(3.0*T)/sqrt(6.0))*dy;  
    % Exp. 6.41 pag. 129 Borja Plasticity  
    ga=(2.0*P-Pc)*d/3.0+2.0*Q*(Z/M)^2*dq+2.0*(Q/M)^2*Z*Zi*dT;  
    d2q=zeros(3,3);  
    d2y=sab;  
    d2T=d2y;  
else  
    dy=sa2*3.0/chi-(9.0*Jtre*n)/chi^4-d/chi;  
    dT=-(2.0*csc(3.0*T)/sqrt(6.0))*dy;  
    % Exp. 6.41 pag. 129 Borja Plasticity  
    ga=(2.0*P-Pc)*d/3.0+2.0*Q*(Z/M)^2*dq+2.0*(Q/M)^2*Z*Zi*dT;  
    d2q=(sqrt(3.0/2.0)/chi)*(I-dm/3.0-sm);  
    d2y=(6.0*sab)/chi^2-(9.0*Jtre/chi^5)*(I-dm/3.0-5.0*sm)+...  
    (1.0/chi^2)*(d*n'+n*d')-(9.0/chi^2)*(n*sa2'+sa2*n');  
    d2T=-((2.0/sqrt(6.0))*csc(3.0*T))*d2y-(3.0*cot(3.0*T))*(dT*dT');  
end  
  
% Exp. 6.42 pag. 129 Borja Plasticity  
H=(2.0/9.0)*dm+(2.0*Q*(Z/M)^2)*d2q+(2*(Q/M)^2)*Z*Zi*d2T+...  
(2.0*(Z/M)^2)*(dq*dq')+(2.0*(Q/M)^2)*(Zi^2+Z*Zii)*(dT*dT')+...  
(4.0*(Q/M^2)*Z*Zi)*(dq*dT'+dT*dq');  
%-----
```

Le espressioni presenti in questa *function* corrispondono a quelle viste al Capitolo 5.4, quindi non verranno commentate. Le derivate prime della funzione di plasticità rispetto agli incrementi di deformazione principale sono raccolte nel vettore  $ga$ , mentre le derivate seconde nella matrice  $H$ .

#### 6.4.4 tens\_CCM3.m

##### Obiettivo

Calcolare lo stato deformativo e tensionale complessivo rispetto allo spazio degli invarianti e definire l'operatore tangente algoritmico elasto-plastico *Dep* visto al Capitolo 4.

##### Sintassi

```
[P,Q,Dep,epsev,epses,epsps,Pc,flag,fac,NORMErec,n] =  
tens_CCM3(Ge,epseTR,epsevTR,epsesTR,epspsn,Pcn,n)
```

##### Descrizione

Partendo dal vettore delle proprietà del materiale e dalle misure di deformazione di tentativo, nella prima parte si ricava lo stato tensionale di tentativo (*trial*) elastico e il valore della funzione di plasticità.

Nel caso in cui sia un valore diverso da 0, si esegue la procedura di *return mapping* nello spazio degli invarianti di deformazione, che consiste nell'implementazione dello schema di Newton-Raphson per la soluzione del sistema composto da tre equazioni di decomposizione (*predictor-corrector*) del tensore di deformazione, dalla legge di incrudimento e dalla condizione di consistenza, ovvero dalla funzione di plasticità.

La soluzione del sistema fornisce le deformazioni elastiche principali e plastiche nello spazio degli invarianti. Successivamente si calcola lo stato tensionale e si ricava la matrice tangente algoritmica necessaria per la costruzione della matrice del sistema totale.

```
%-----  
imax = 15;  
toll = 1.0e-7;  
NORMErec = zeros(imax,1);  
  
% Set isotropic elasto-plastic parameter  
mu0 = Ge(3);          alfa = Ge(4);  
kappa = Ge(5);        lambda = Ge(6);  
THETA = 1/(lambda-kappa);  
M = Ge(7);           P0 = Ge(8);  
epsev0 = Ge(10);      rho = Ge(11);  
  
% Compute trial stress invariants  
[Ptr,Qtr] = PQ_HY( epsevTR, epsesTR, P0, alfa, kappa, epsev0, mu0);  
  
% Compute third invariant  
[Ttr] = third(Qtr,n);  
  
% Scaling function  
[Ztr] = scalf(rho,Ttr);  
  
% Check for plasticity  
Ftr = (Ztr*Qtr/M)^2+Ptr*(Ptr-Pcn);  
  
Dp=eye(3,3);  
  
if Ftr > toll % PLASTIC STEP  
    flag = 1;  
  
    % Solve NR system  
    % Inizialize variables
```

```

x = zeros(5,1);
x(1:3,1) = epseTR;    % epse
x(4,1) = Pcn;
x(5,1) = 0.0;        % dgamma

xv=epsevTR;
xd=epsesTR;
P = Ptr;
Q = Qtr;
Z = Ztr;
Pc= Pcn;

for iter = 1:imax

    [ga,H]=derf(rho,P,Q,Pc,M,n);

    % evaluate residual
    r = [x(1:3,1) - epseTR + x(5,1)*ga
         x(4,1)-Pcn*exp(-THETA*(x(5,1)*(2.0*P-Pc)))
         (Z*Q/M)^2 + P*(P-Pc)];

    if iter == 1
        r0 = norm(r);%(5,1)
        if r0==0
            r0=1.0;
        end
        end
        norme = norm(r)/r0;
        NORMErec(iter,1)=norme;

    % check for convergence
    if norme < toll
        break
    else

        % evaluate tangent matrix for NR iteration
        A =
Atang_CCM3(x(5,1),xv,xd,epsesTR,P,Q,Pc,lambda,kappa,mu0,alfa,P0,epsev0
,n,ga,H);

        % solve for displacement increment
        dx = -(A\r);
        x = x + dx;

        % Update
        xv = x(1,1)+x(2,1)+x(3,1);
        es(:,1) = x(1:3,1)-xv/3.0;
        xd = sqrt(2.0/3.0)*norm(es);

        % update vector n
        if norm(es) == 0
            n(:,1) = es(:,1);
        else
            n(:,1) = es(:,1)/ norm(es);
        end

        % update stresses
        [P,Q] = PQ_HY(xv,xd,P0,alfa,kappa,epsev0,mu0);
        [T] = third(Q,n);

```

```

        Pc=x(4,1);
        Z = scalf(rho,T);

        % plastic deformations
        epspv = epsevTR-xv+epspvn;
        epsps = epsesTR-xd+epspsn;

        if iter == imax
            fprintf('\n No convergence RM \n');
            break
        end
    end
end

%Update variable
epsev = xv;
epses = xd;
Ast=inv(A);
Dp=Ast(1:3,1:3);

else % ELASTIC STEP
    flag = 0;
    %Update variable
    epsev = epsevTR;
    epses = epsesTR;

    epspv = epspvn;
    epsps = epspsn;

    Pc = Pcn;
    P = Ptr;
    Q = Qtr;
    T = Ttr;
    Z= Ztr;
end

% Compute algorithmic tangent operator:
d=ones(3,1);    dm=d*d';
I=eye(3,3);    nm=n*n';

De = DE_HY(epsev,epses,P,kappa,mu0,alfa,P0,epsev0);

if epsesTR == 0

Dep = (De(1,1)-2*De(2,2)/9.0)*dm+sqrt(2.0/3.0)*De(1,2)*(d*n')+...
      sqrt(2.0/3.0)*De(2,1)*(n*d')+((2.0*De(2,2))/3.0)*I;
else

Dep = (De(1,1)-2*Q/(9*epsesTR))*dm+sqrt(2.0/3.0)*De(1,2)*(d*n')+...
      sqrt(2.0/3.0)*De(2,1)*(n*d')+((2*Q)/(3*epsesTR))*(I-nm)+...
      (2/3)*De(2,2)*nm;
end

Dep=Dep*Dp;

OMEGA = -(epsev-epsev0)/kappa;
fac = mu0+(alfa/kappa)*(-P0*kappa*exp(OMEGA));
%-----

```

## 6.4.5 Atang\_CCM3.m

### Obiettivo

Costruire la matrice Jacobiana locale descritta nel Capitolo 5.4.

### Sintassi

```
[A] = Atang_CCM3(dgamma, epsev, epses, epsesTR, P, Q, Pc, lambda, kappa,  
mu0, alfa, P0, epsev0, n, ga, H)
```

### Descrizione

A partire dalla matrice Hessiana, dalle derivate della funzione di plasticità e della funzione di snervamento fatte rispetto agli invarianti di deformazione lungo le direzioni principali, si costruisce la matrice Jacobiana **A**.

```
%-----  
d=ones(3,1);      dm=d*d';  
I=eye(3,3);      nm=n*n';  
  
% Initialize matrices  
A = zeros(5);  
  
THETA = 1/(lambda-kappa);  
  
% Compute Hessian matrix D  
De = DE_HY(epsev, epses, P, kappa, mu0, alfa, P0, epsev0);  
  
if epsesTR == 0  
  
D = (De(1,1)-2*De(2,2)/9.0)*dm+sqrt(2.0/3.0)*De(1,2)*(d*n')+...  
    sqrt(2.0/3.0)*De(2,1)*(n*d'+((2.0*De(2,2))/3.0)*I);  
else  
  
D = (De(1,1)-(2*Q/(9.0*epsesTR)))*dm+sqrt(2.0/3.0)*De(1,2)*(d*n')+...  
    sqrt(2.0/3.0)*De(2,1)*(n*d'+((2.0*Q)/(3.0*epsesTR))*(I-nm)+...  
    (2.0/3.0)*De(2,2)*nm;  
end  
  
% Compute matrix A  
G =I+(H*D)*dgamma;  
  
dF=ga'*D  
  
sx=(dgamma*THETA*Pc*d'*H)*D;  
cx=1.0-THETA*Pc*dgamma;  
dx=Pc*THETA*(2.0*P-Pc);  
  
A(1:3,1:3) = G;  
A(4,1:3) = sx;  
A(5,1:3) = dF;  
A(1:3,4) = -(dgamma*d)/3.0;  
A(1:3,5) = ga;  
A(4,4) = cx;  
A(4,5) = dx;  
A(5,4) =-P;  
A(5,5) = 0.0;  
%-----
```

## 7. VERIFICA DEL MODELLO COSTITUTIVO

La verifica dell'affidabilità del modello costitutivo Cam-Clay Modificato implementato agli elementi finiti è stata effettuata attraverso due fasi: in primo luogo un singolo elemento finito tridimensionale è stato sottoposto a diverse condizioni di carico; successivamente, sono stati riprodotti degli esempi numerici presenti in letteratura al fine di confrontare i dati ottenuti.

Le simulazioni numeriche vengono svolte in piccole e grandi deformazioni, in modo da ottenere un confronto fra le due teorie, a due e a tre invarianti.

### 7.1 Test di un singolo elemento tridimensionale

Si considera un singolo elemento finito tridimensionale, che consiste in un cubo a 20 nodi, di lato pari a 1 m.

L'elemento finito viene sottoposto a varie prove di carico.

In tutte le analisi che seguono si trascura il peso proprio del terreno.

I parametri che caratterizzano il terreno oggetto di studio sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 1,0 \\ \tilde{\kappa} = 0,047 \\ \hat{\kappa} = 0,05 \\ \tilde{\lambda} = 0,15 \\ \hat{\lambda} = 0,18 \\ \rho = 0,8 \\ G = 1,0 \text{ MPa} \\ p_c = 100 \text{ kPa} \\ \varepsilon_{v0}^e = 0 \end{array} \right.$$

I grafici realizzati, inerenti alle prove di carico, fanno sempre riferimento al nodo sul vertice sommitale del cubo, di coordinate (1 m; 1 m; 1 m) rispetto all'origine del sistema di riferimento cartesiano.

Gli esempi che seguono sono utili alla verifica della coerenza del modello implementato con il reale comportamento del terreno.

Con "W-W LAD" si fa riferimento alle analisi svolte con il modello costitutivo a tre invarianti, considerando la funzione di scala come descritta da Willam & Warnke; "no LAD" indica le analisi che non dipendono dall'angolo di Lode.

### 7.1.1 Prova a compressione confinata

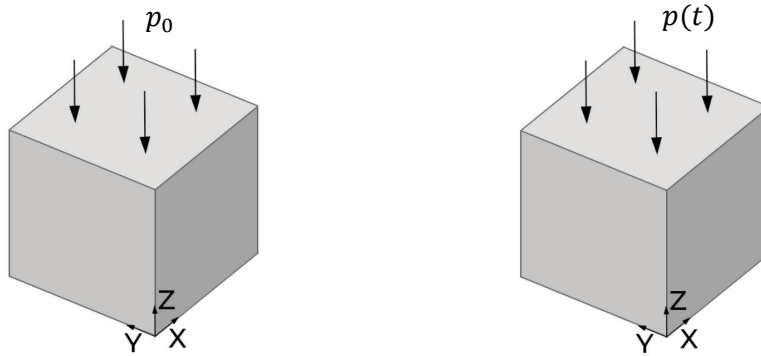


Figura 7.1.1.1: Condizioni di carico. A sinistra: pressione iniziale  $p_0$ ; a destra: pressione esterna variabile  $p(t)$ .

La faccia di base viene vincolata alla traslazione nelle tre direzioni. Le facce laterali sono vincolate alla traslazione fuori dal piano, ma libere di muoversi in direzione  $z$ .

La superficie superiore viene caricata con una pressione uniformemente distribuita e costante nel tempo  $p_0$ , di intensità pari a  $100 \text{ kPa}$ , in modo da equilibrare la pressione iniziale già presente nel terreno (Figura 7.1.1.1, sinistra).

La stessa faccia viene quindi caricata anche mediante una pressione di intensità crescente  $p(t)$  che raggiunge il valore di  $100 \text{ kPa}$  all'ultimo incremento (Figura 7.1.1.1, destra). In totale l'analisi si articola in 50 step.

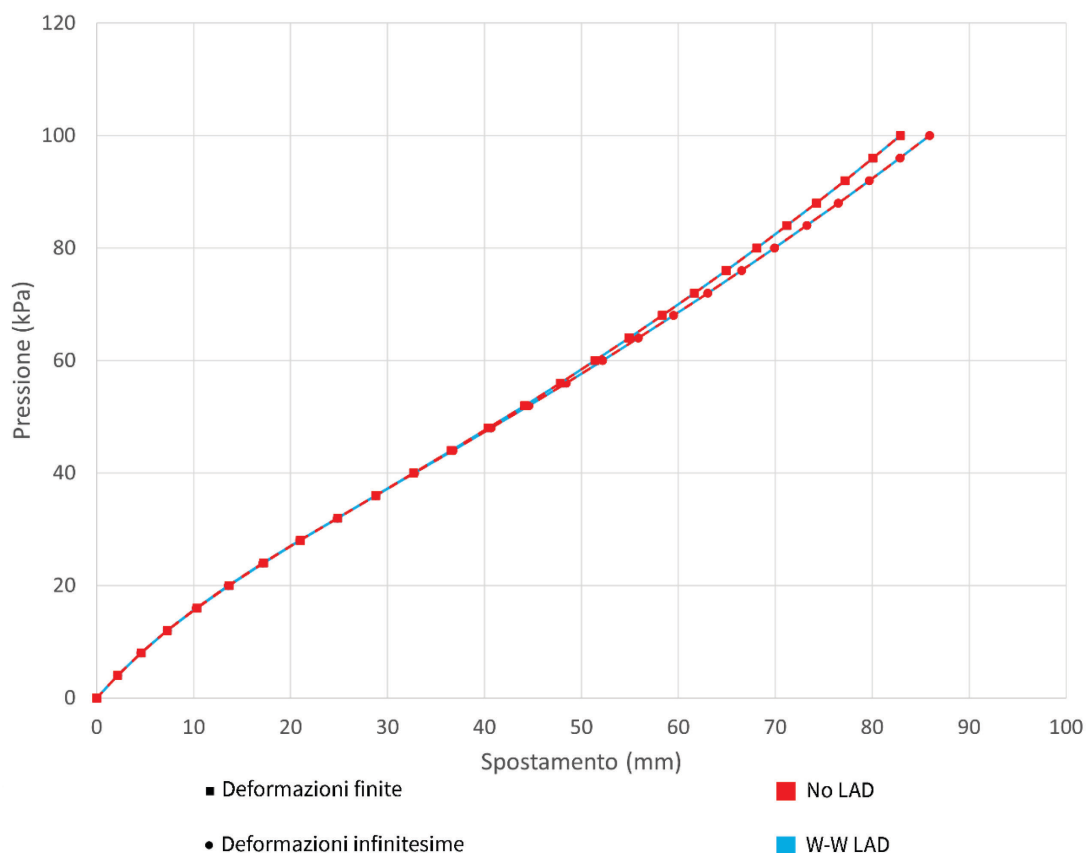


Figura 7.1.1.2: Diagramma pressione esterna  $p(t)$ -spostamento verticale. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.



Il provino subisce un abbassamento omogeneo della superficie superiore di circa  $86\text{ mm}$  nell'analisi in piccole deformazioni e di  $83\text{ mm}$  in deformazioni finite, al termine dell'analisi.

Il confinamento costringe  $\theta$  a rimanere costante a  $60^\circ$ , per cui il percorso tensionale si muove lungo uno degli assi principali di compressione. La funzione di scala assume quindi valore unitario, rendendo influente il terzo invariante. Da ciò deriva la totale coincidenza dei diagrammi pressione-spostamento a due e a tre invarianti, come si nota in Figura 7.1.1.2.

L'unica differenza riscontrabile è fra l'analisi in piccole e grandi deformazioni. Queste ultime infatti, all'ultimo step di carico, mostrano uno spostamento maggiore di quasi il 4%.

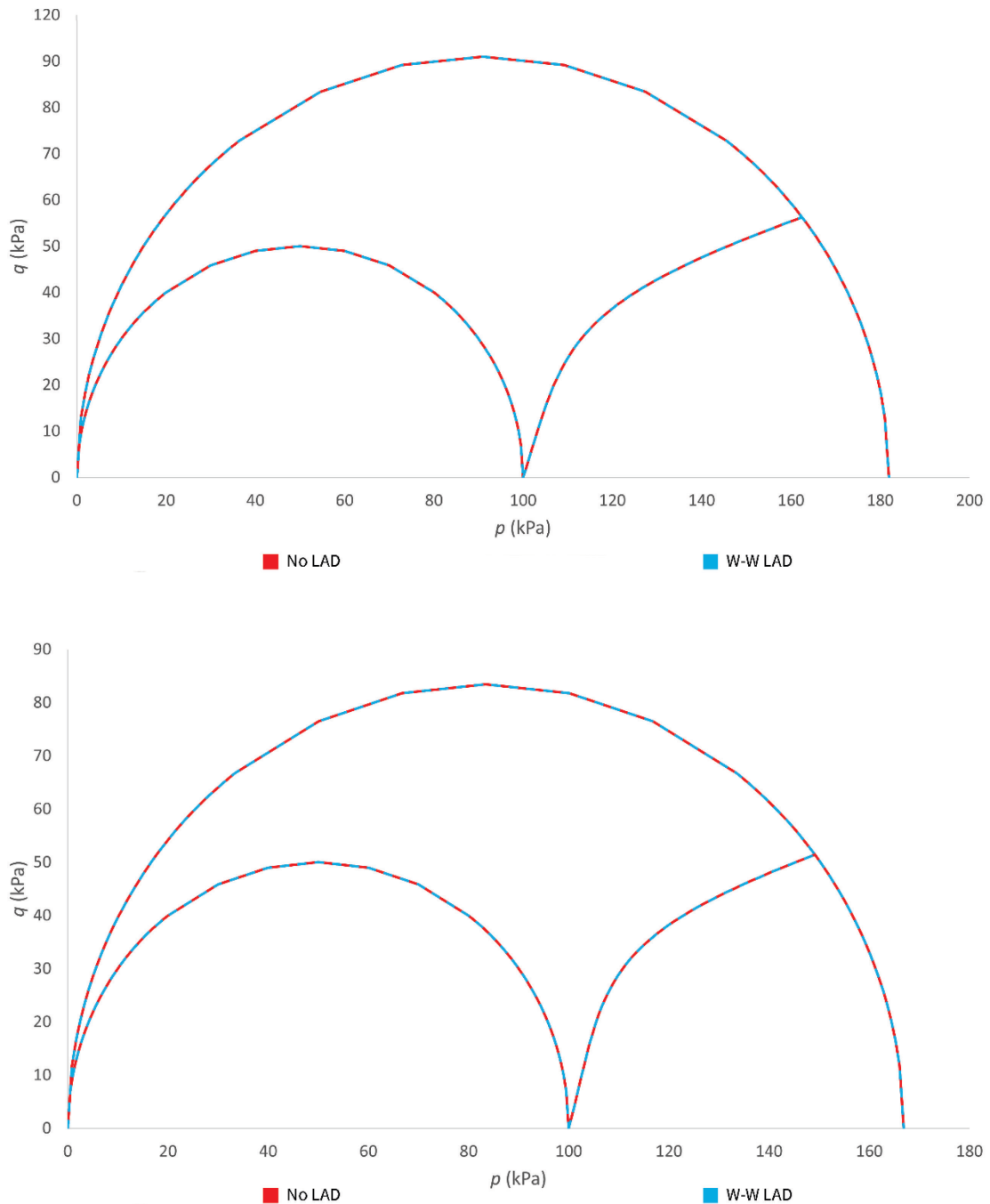


Figura 7.1.1.3: Percorso tensionale nel piano  $p - q$  e superfici di snervamento iniziale e finale. Confronto no LAD/W-W LAD. In alto: analisi in piccole deformazioni; in basso: analisi in grandi deformazioni.

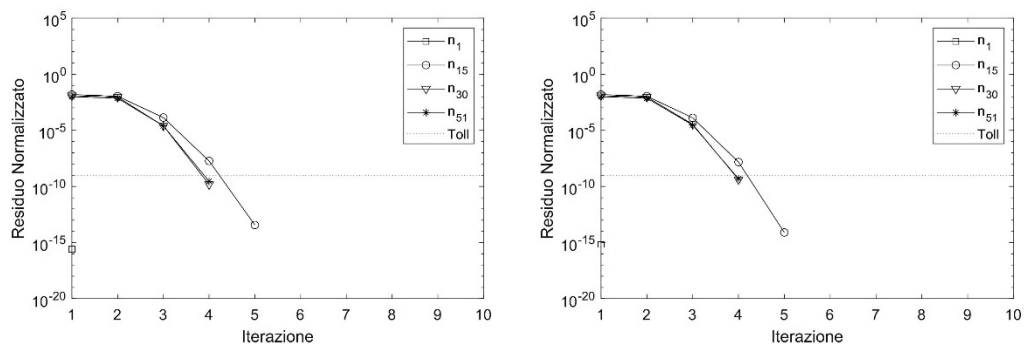


Figura 7.1.1.4: Velocità di convergenza del metodo di Newton-Raphson. A sinistra: analisi in piccole deformazioni; a destra: analisi in grandi deformazioni.

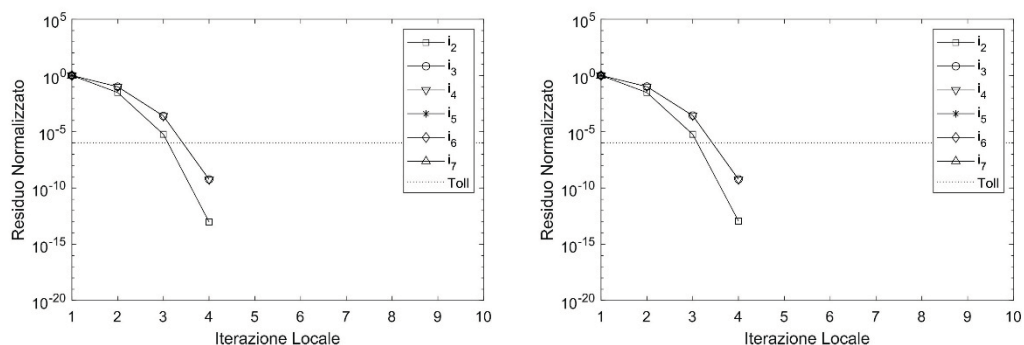


Figura 7.1.1.5: Velocità di convergenza dell'algorithm implicito di tipo *return mapping*. A sinistra: analisi in piccole deformazioni; a destra: analisi in grandi deformazioni.

Allo stesso modo, il percorso tensionale nel piano  $p - q$  (Figura 7.1.1.3) non risente dell'influenza dell'angolo di Lode.

La velocità di convergenza esterna del ciclo di Newton-Raphson, mostrata in Figura 7.1.1.4 per i passi temporali 1, 15, 30 e 51, è quadratica già dalla prima iterazione. La Figura 7.1.1.5 è relativa alla convergenza interna dell'algorithm implicito di tipo *return mapping*, per lo step di carico 51 e per le iterazioni esterne da 2 a 7. Anch'esso converge in modo quadratico.

### 7.1.2 Prova a compressione semplice

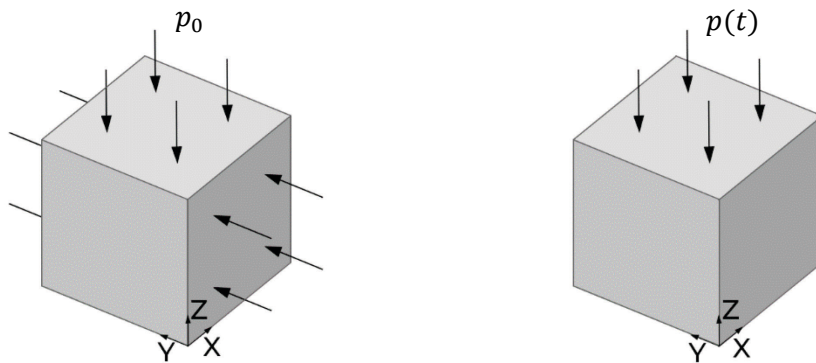


Figura 7.1.2.1: Condizioni di carico. A sinistra: pressione iniziale  $p_0$ ; a destra: pressione esterna variabile  $p(t)$ .

La faccia di base viene vincolata alla traslazione nelle tre direzioni. Alle due facce verticali parallele al piano  $y - z$  vengono impediti gli spostamenti fuori dal piano, mentre i punti appartenenti alle facce parallele al piano  $x - z$  sono liberi di muoversi in direzione  $y$ .

A queste ultime e alla superficie superiore viene inizialmente applicata una pressione  $p_0$  in direzione ortogonale a ciascuna faccia e con verso entrante nell'elemento finito, di intensità costante pari a  $100 \text{ kPa}$  (Figura 7.1.2.1, sinistra).

In una prima fase di carico, la superficie superiore viene inoltre caricata mediante una compressione  $p(t)$  uniformemente distribuita che raggiunge l'intensità di  $100 \text{ kPa}$  in 50 step temporali, a cui segue una fase di scarico della stessa durata fino al termine dell'analisi (Figura 7.1.2.1, destra). Si genera uno stato tensionale interno al provino di tipo triassiale.

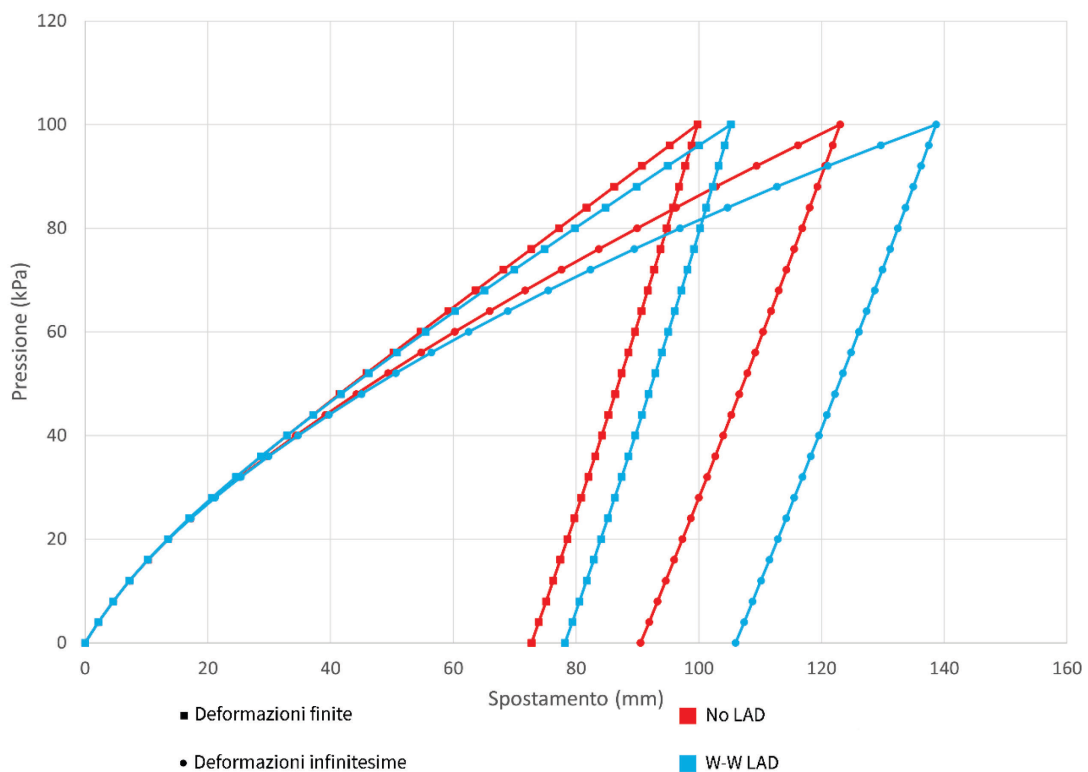


Figura 7.1.2.2: Diagramma pressione esterna  $p(t)$ -spostamento verticale. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

In Figura 7.1.2.2 si nota un'evidente differenza tra i grafici a seconda che il modello costitutivo impiegato sia il Cam-Clay a due o tre invarianti. Le analisi in deformazioni infinitesime restituiscono valori di spostamento maggiori, a parità di carico, rispetto a quelle in grandi deformazioni. In tutti i casi analizzati il provino subisce un abbassamento proporzionale agli incrementi di carico. Durante la fase di scarico, parte della deformazione viene recuperata.

In particolare, l'abbassamento residuo nell'analisi a tre invarianti in piccole deformazioni risulta maggiore di circa il 17% rispetto all'analogia a due. In deformazioni finite tale differenza è ridotta al 7,5%.

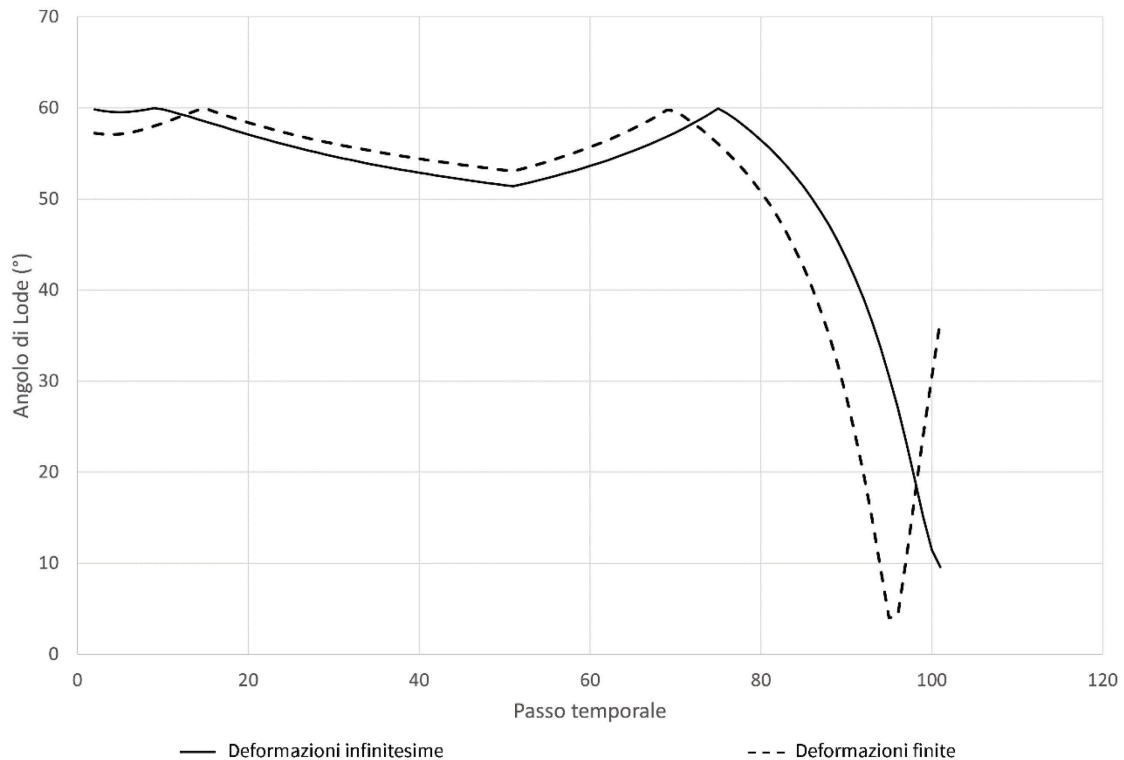


Figura 7.1.2.3: Andamento nel tempo dell'angolo di Lode. Confronto deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

La differenza tra i due modelli costitutivi è imputabile alla variazione dell'angolo di Lode (Figura 7.1.2.3) che si verifica in fase di carico, pari a circa  $10^\circ$ , rendendo così meno ripida la pendenza della curva W-W LAD. In fase di scarico la variabilità dell'angolo è ulteriormente evidente, ma, avvenendo la decompressione in modo elastico, essa non è in alcun modo influenzata da  $\theta$ , infatti la velocità di recupero delle deformazioni è la stessa per due e tre invarianti.

Il percorso tensionale nel piano  $p - q$  (Figura 7.1.2.4) mostra un'espansione della superficie plastica fino allo stato tensionale massimo al termine della fase di carico, mentre, una volta terminata la decompressione, il campione torna ad uno stato tensionale simile a quello iniziale. Il comportamento esibito dai due modelli costitutivi è simile, ma si svolge su percorsi tensionali diversi. Le curve relative al modello W-W LAD risultano schiacciate rispetto alle analoghe a due invarianti, proporzionalmente al valore assunto dalla funzione di scala.

L'analisi a tre invarianti restituisce valori di deformazione plastica deviatorica (Figura 7.1.2.5), il cui incremento cessa in fase di scarico, molto maggiori. In particolare, si ha +26% in deformazioni infinitesime e +12% in deformazioni finite. Le stesse considerazioni possono essere applicate allo sviluppo di deformazioni plastiche volumetriche (Figura 7.1.2.6).

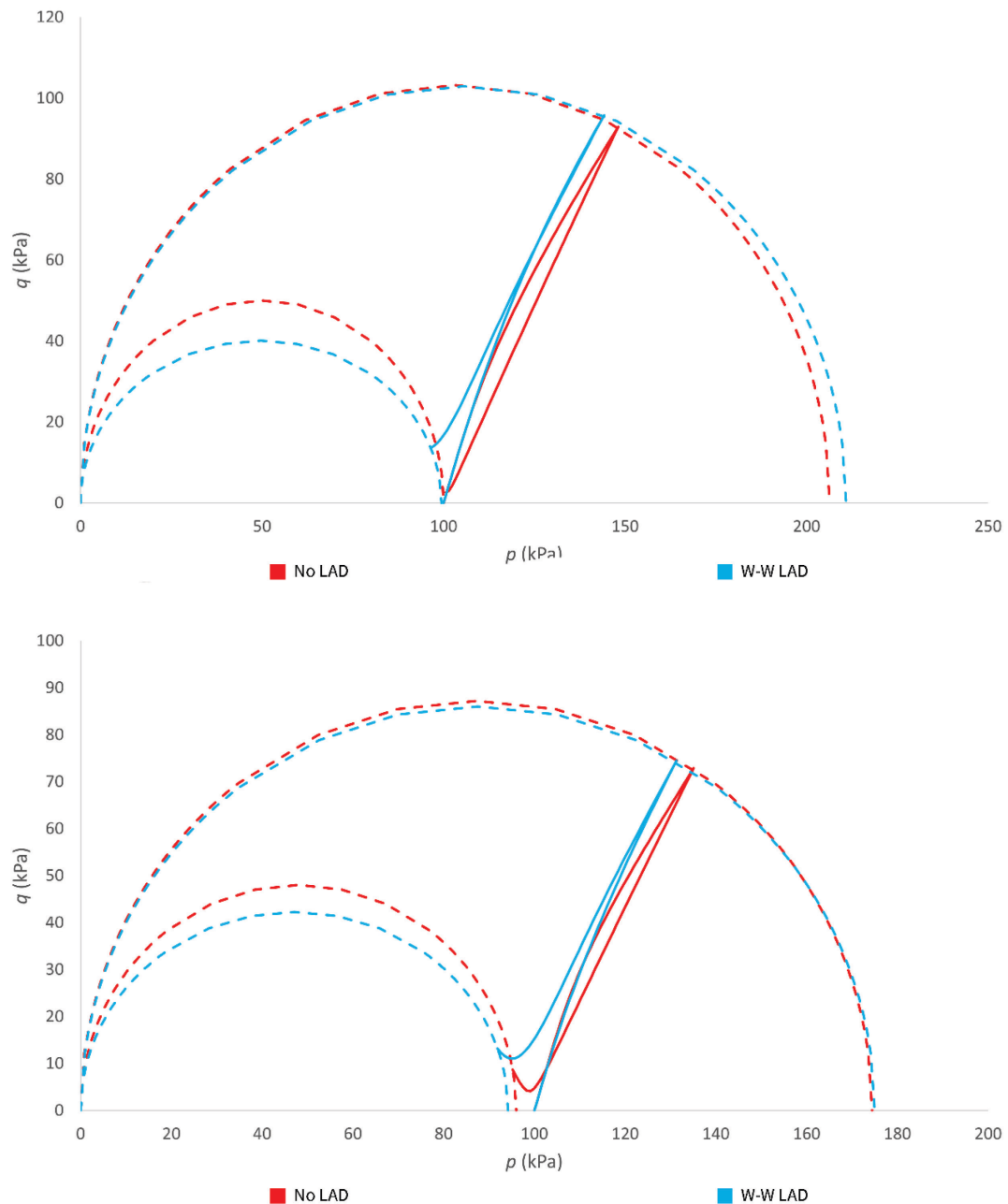


Figura 7.1.2.4: Percorso tensionale nel piano  $p - q$  e superfici di snervamento iniziale e di massima espansione. Confronto no LAD/W-W LAD. In alto: analisi in piccole deformazioni; in basso: analisi in grandi deformazioni.

In Figura 7.1.2.7 è rappresentata la variazione di volume specifico in funzione della tensione volumetrica. Si può notare come, sotto l'effetto della compressione, si verifichi una diminuzione del volume specifico, definito come il rapporto fra il volume totale del terreno ed il volume della fase solida. Dunque, a parità di volume di quest'ultima fase, la compressione causa una riduzione del volume totale. La pendenza meno ripida assunta identifica il parametro  $\kappa$ , ossia il recupero elastico, mentre l'altra pendenza rappresenta  $\lambda$ , ossia lo schiacciamento del terreno in fase di carico (vedi Figura 5.3.2). Basandosi sulla teoria delle piccole deformazioni si nota come, al fine di raggiungere uno stesso livello di volume specifico, l'analisi a tre invarianti necessita di una pressione volumetrica maggiore rispetto al modello costitutivo no LAD. La situazione è invertita nella teoria delle grandi deformazioni poiché in essa l'influenza del terzo invariante non è tale da necessitare di una pressione di confinamento maggiore rispetto al modello a due invarianti.

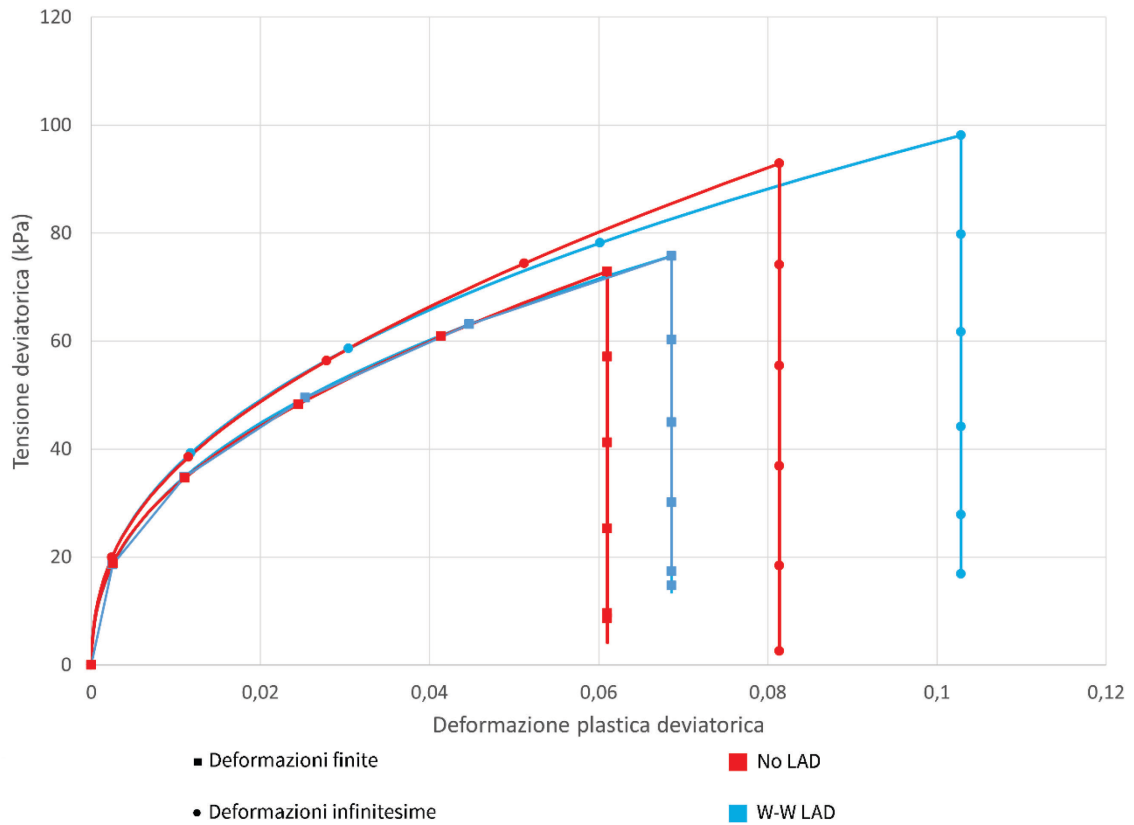


Figura 7.1.2.5: Diagramma tensione deviatorica-deformazione plastica deviatorica. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

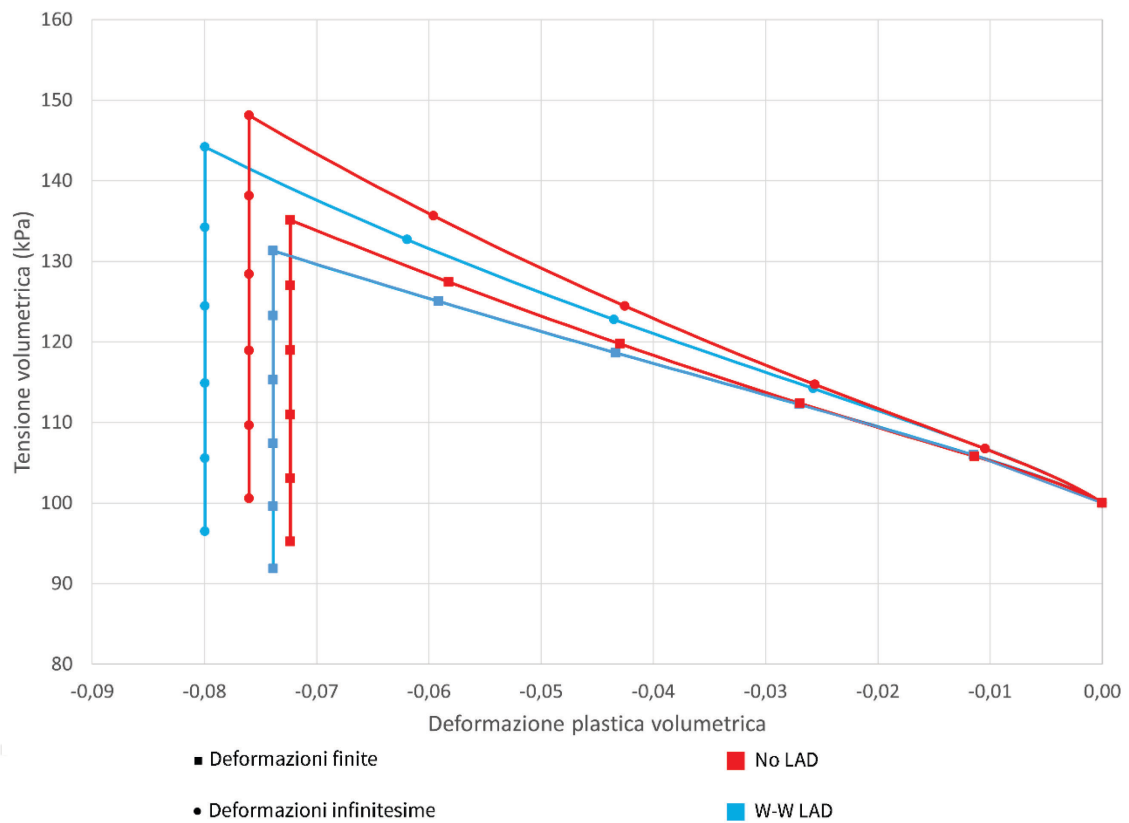


Figura 7.1.2.6: Diagramma tensione volumetrica-deformazione plastica volumetrica. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

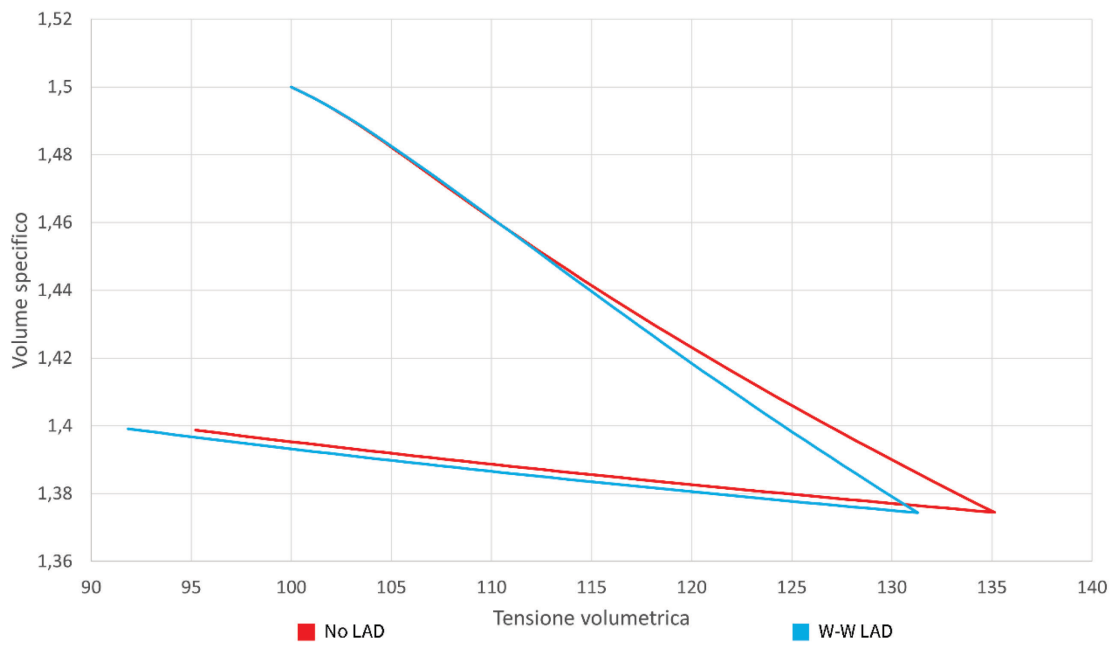
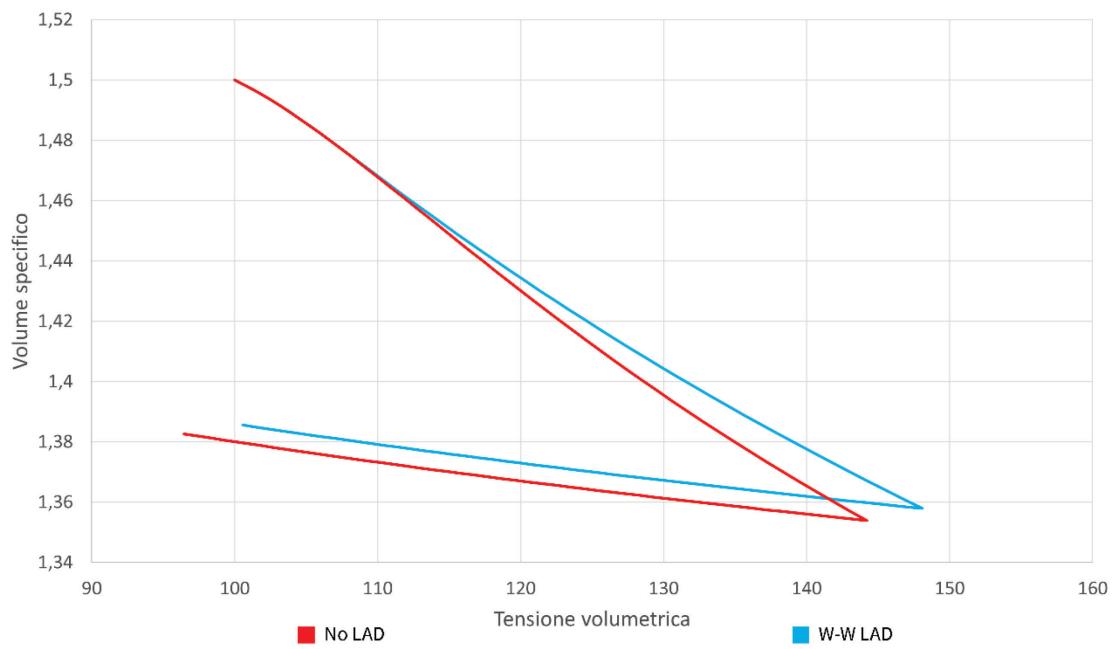


Figura 7.1.2.7: Diagramma volume specifico-tensione volumetrica. Confronto no LAD/W-W LAD. In alto: analisi in piccole deformazioni; in basso: analisi in grandi deformazioni.

### 7.1.3 Prova a taglio

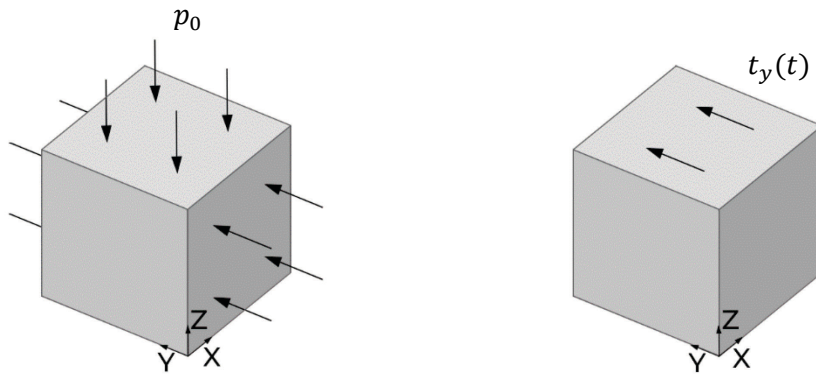


Figura 7.1.3.1: Condizioni di carico. A sinistra: pressione iniziale  $p_0$ ; a destra: tensione di taglio esterna variabile  $t_y(t)$ .

La faccia di base viene vincolata alla traslazione nelle tre direzioni. Alle due facce verticali parallele al piano  $y - z$  vengono impediti gli spostamenti fuori dal piano, mentre i punti appartenenti alle facce parallele al piano  $x - z$  sono liberi di muoversi in direzione  $y$ .

Queste ultime e la superficie superiore vengono caricate inizialmente con una pressione  $p_0$  in direzione ortogonale a ciascuna faccia e con verso entrante nell'elemento finito, di intensità costante pari a  $100 \text{ kPa}$  (Figura 7.1.3.1, sinistra).

La faccia superiore viene ulteriormente caricata mediante una forza di taglio  $t_y(t)$  agente in direzione  $y$  di  $5,5 \text{ kPa}$ , raggiunti in 50 incrementi di carico (Figura 7.1.3.1, destra). Successivamente il carico viene progressivamente rimosso in un lasso di tempo coincidente con la fase di carico.

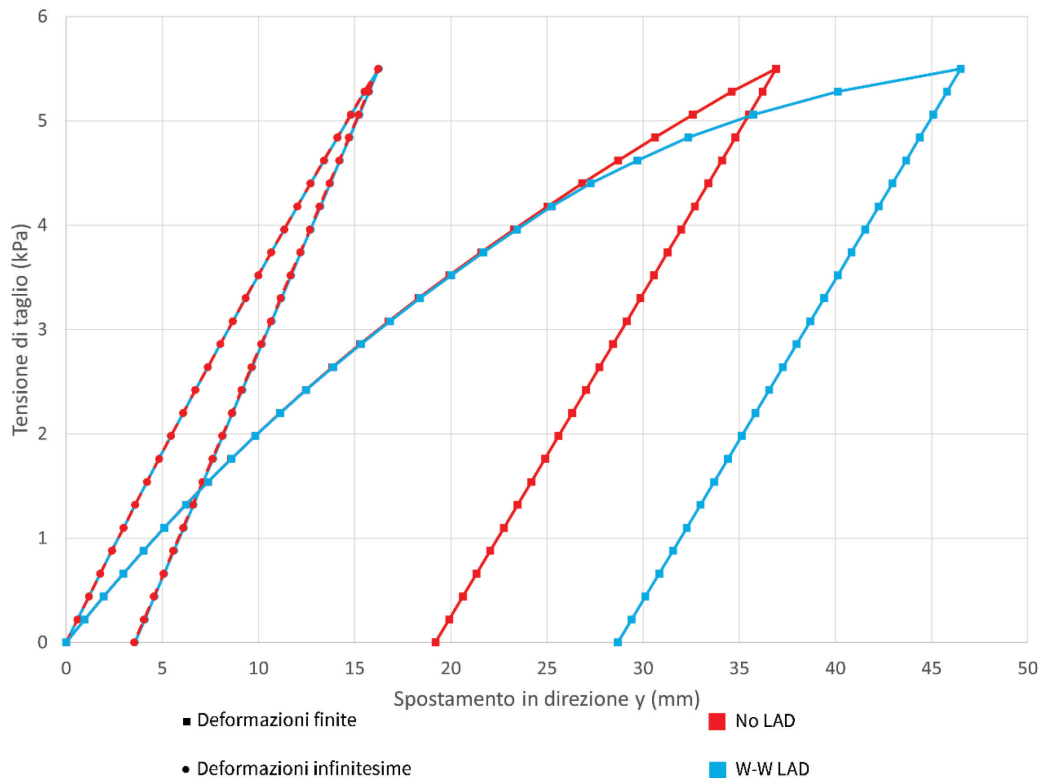


Figura 7.1.3.2: Diagramma tensione di taglio esterna  $t_y(t)$ -spostamento orizzontale. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.



Per quanto concerne l'analisi in piccole deformazioni, dalla Figura 7.1.3.2 si evince come, la quantità di deformazione plastica relativamente bassa che insorge, causi una differenza molto ridotta fra i due modelli costitutivi, per cui si ottengono dei grafici quasi sovrapposti che si discostano di un valore inferiore all'1%.

L'analisi in grandi deformazioni mostra invece uno sviluppo di deformazione plastica considerevole; pertanto l'introduzione del terzo invariante causa degli spostamenti residui che differiscono di circa il 50% al termine dell'analisi. Come visto in precedenza, la fase di scarico avviene sempre in campo elastico.

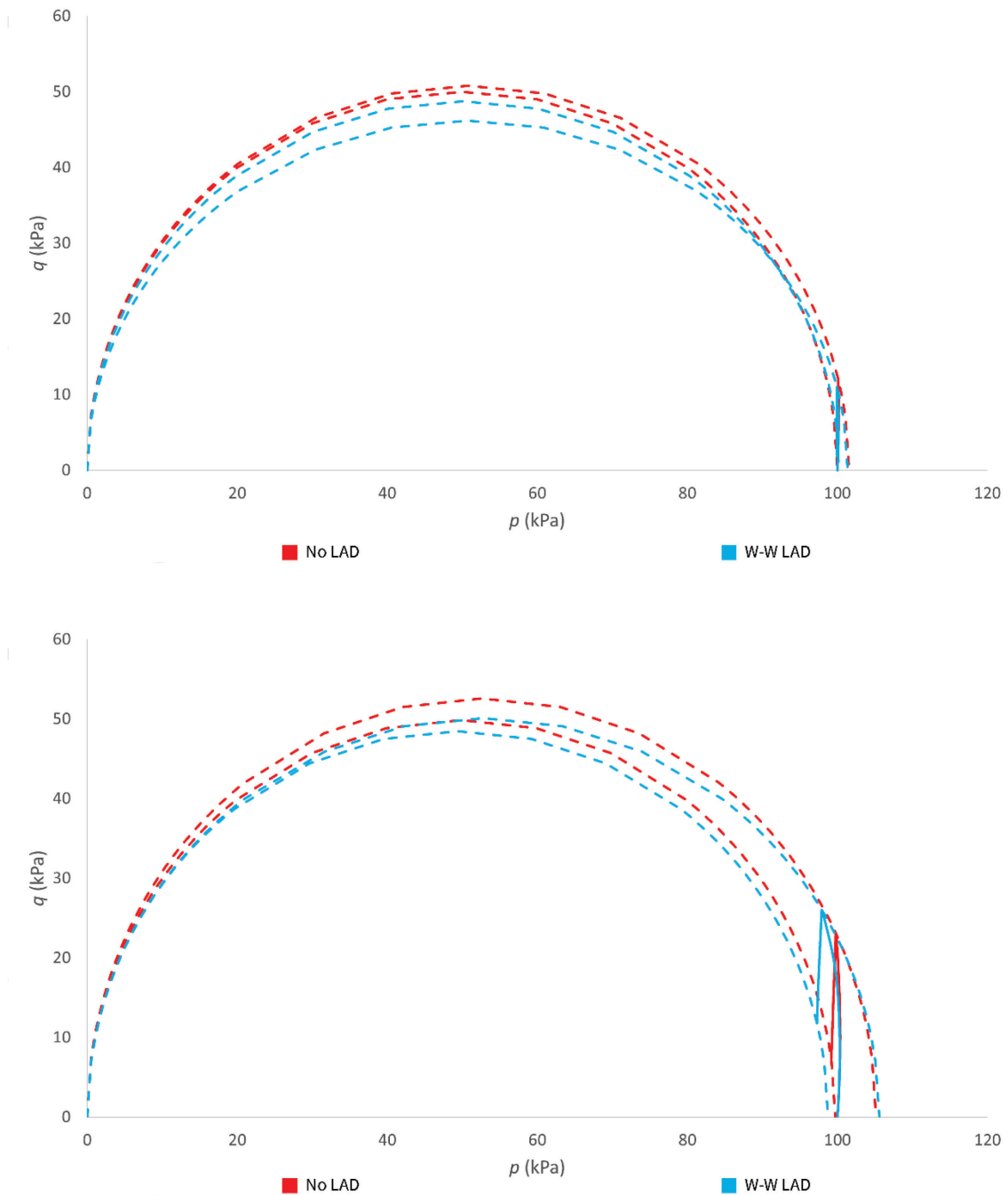


Figura 7.1.3.3: Percorso tensionale nel piano  $p - q$  e superfici di snervamento iniziale e di massima espansione. Confronto no LAD/W-W LAD. In alto: analisi in piccole deformazioni; in basso: analisi in grandi deformazioni.

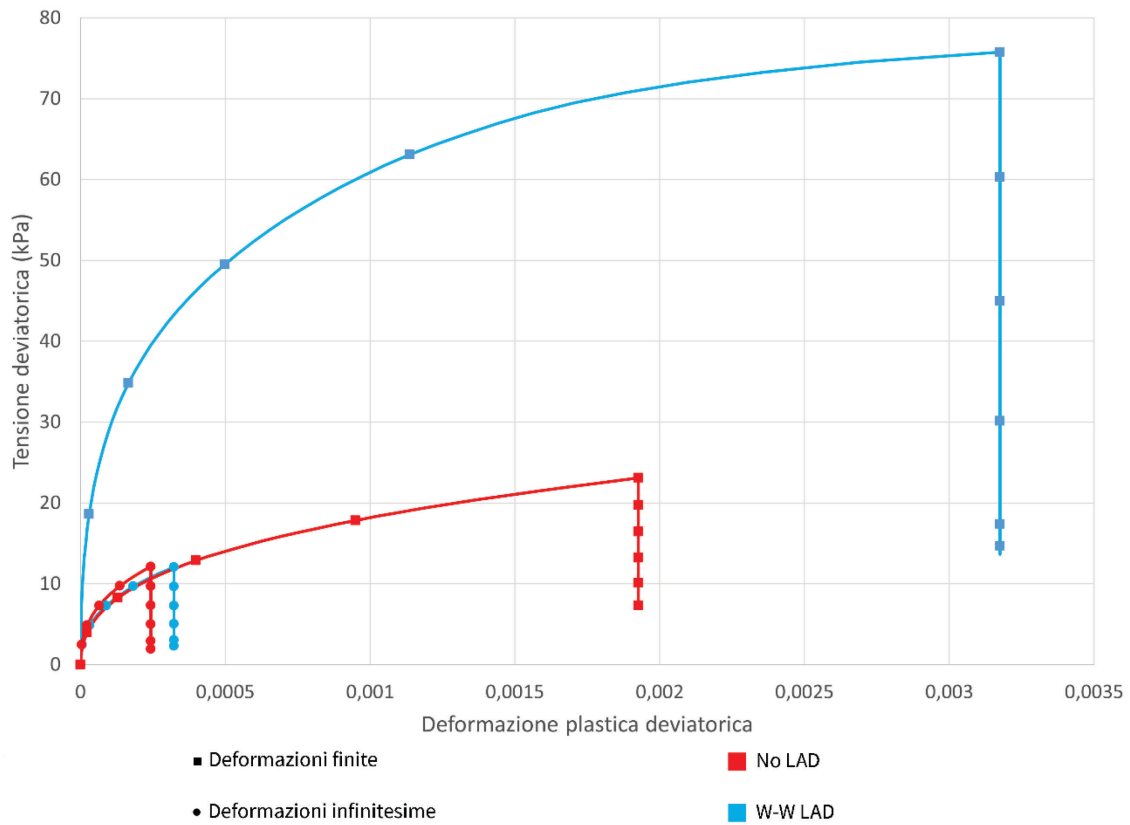


Figura 7.1.3.4: Diagramma tensione deviatorica-deformazione plastica deviatorica. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

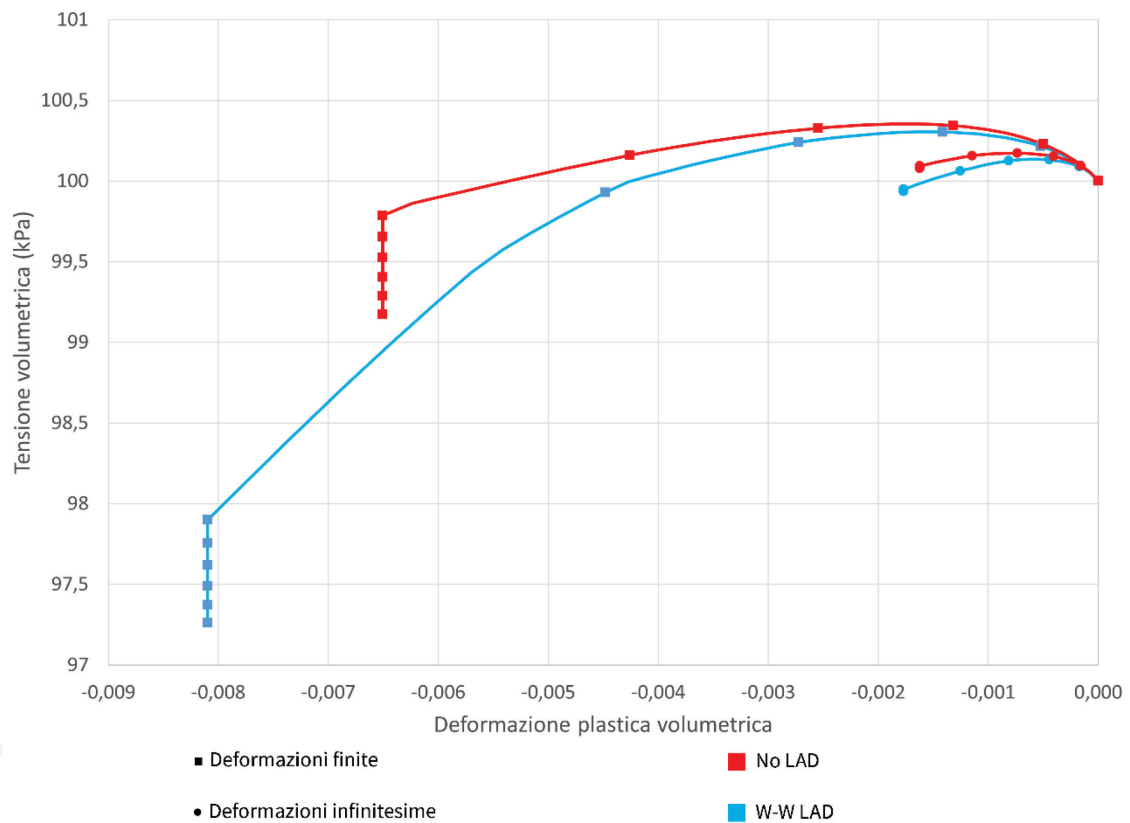


Figura 7.1.3.5: Diagramma tensione volumetrica-deformazione plastica volumetrica. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

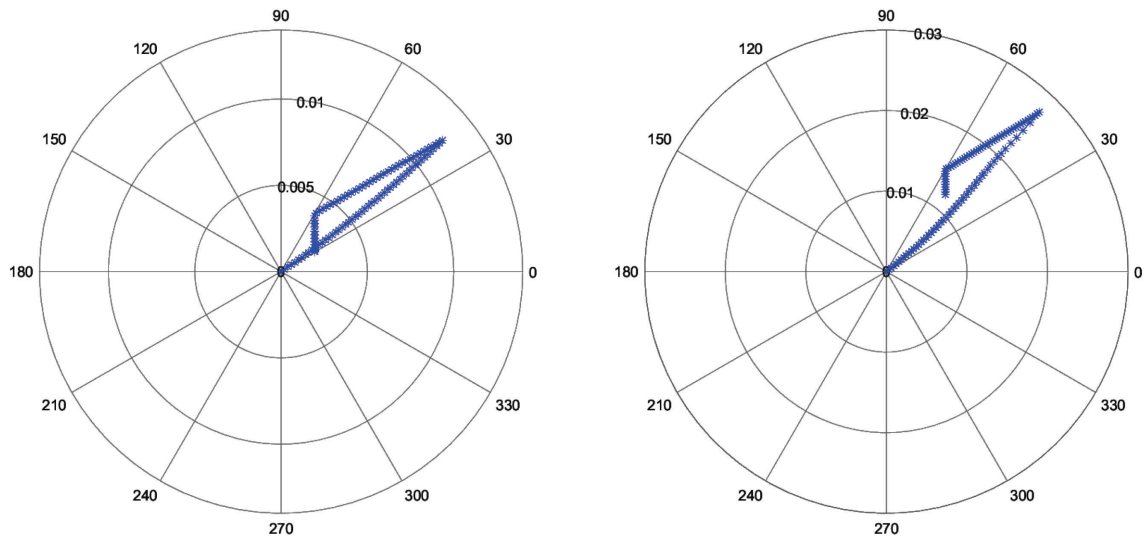


Figura 7.1.3.6: Diagramma polare della variazione dell'angolo di Lode e della tensione deviatorica. A sinistra: analisi in piccole deformazioni; a destra: analisi in grandi deformazioni.

Dalla Figura 7.1.3.3 si coglie uno scarto ridotto fra le superfici plastiche iniziali e di fine carico. Il carico agente è infatti una pressione di taglio che causa una variazione principalmente della tensione deviatorica. Inoltre, i 5,5 *kPa* applicati non sono tali da indurre variazioni tensionali importanti.

A conferma di quanto precedentemente detto in merito allo sviluppo di deformazioni plastiche, in Figura 7.1.3.4 si notano appunto delle deformazioni plastiche deviatoriche che, nell'analisi in piccole deformazioni, risultano assolutamente irrilevanti rispetto a quelle che si verificano nell'analisi in deformazioni finite. È evidente come l'influenza dell'angolo di Lode (Figura 7.1.3.6) ne condizioni l'insorgere: l'analisi a tre invarianti restituisce infatti deformazioni superiori del 65% rispetto all'analoga a due.

Tale differenza è evidente anche nelle deformazioni plastiche volumetriche (Figura 7.1.3.5), sebbene assumano valori esigui sotto l'effetto di carichi taglienti.

Dagli esempi 7.1.2 e 7.1.3 si colgono degli aspetti fondamentali delle teorie considerate. Le analisi in deformazioni finite fanno uso di misure di deformazioni logaritmiche e di tensioni associate (tensore di Kirchhoff) più accurate rispetto alle deformazioni infinitesime, e sono dunque più idonee per interpretare meglio il reale comportamento dei solidi soggetti ad elevati gradienti di spostamento, rotazione, deformazione. In compressione si ottengono infatti valori di spostamento minori rispetto alle piccole deformazioni poiché si tiene conto del progressivo irrigidimento del solido, mentre sotto effetto del taglio gli spostamenti risultano maggiori per l'effetto "rammollente".

### 7.1.4 Prova a taglio con spostamento imposto

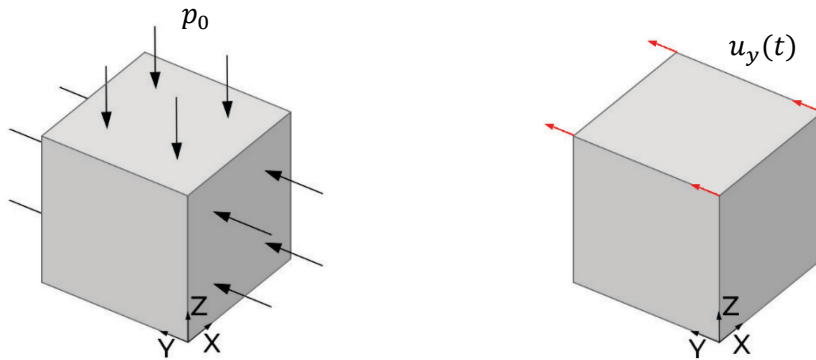


Figura 7.1.4.1: Condizioni di carico. A sinistra: pressione iniziale  $p_0$ ; a destra: spostamento imposto variabile  $u_y(t)$ .

La faccia di base viene vincolata alla traslazione nelle tre direzioni. Alle due facce verticali parallele al piano  $y - z$  vengono impediti gli spostamenti fuori dal piano, mentre i punti appartenenti alle facce parallele al piano  $x - z$  sono liberi di muoversi in direzione  $y$ .

Queste ultime e la superficie superiore vengono caricate con una pressione  $p_0$  in direzione ortogonale a ciascuna faccia e con verso entrante nell'elemento finito, di intensità costante pari a  $100 \text{ kPa}$  (Figura 7.1.4.1, sinistra).

Inoltre, in direzione  $y$  si imprime un incremento di spostamento  $u_y(t)$  costante ad ogni step pari a  $2,5 \text{ mm}$  ai nodi appartenenti alla superficie superiore (Figura 7.1.4.1, destra). Al termine dei 220 step totali dell'analisi, si avrà uno spostamento finale pari a  $55 \text{ cm}$ .

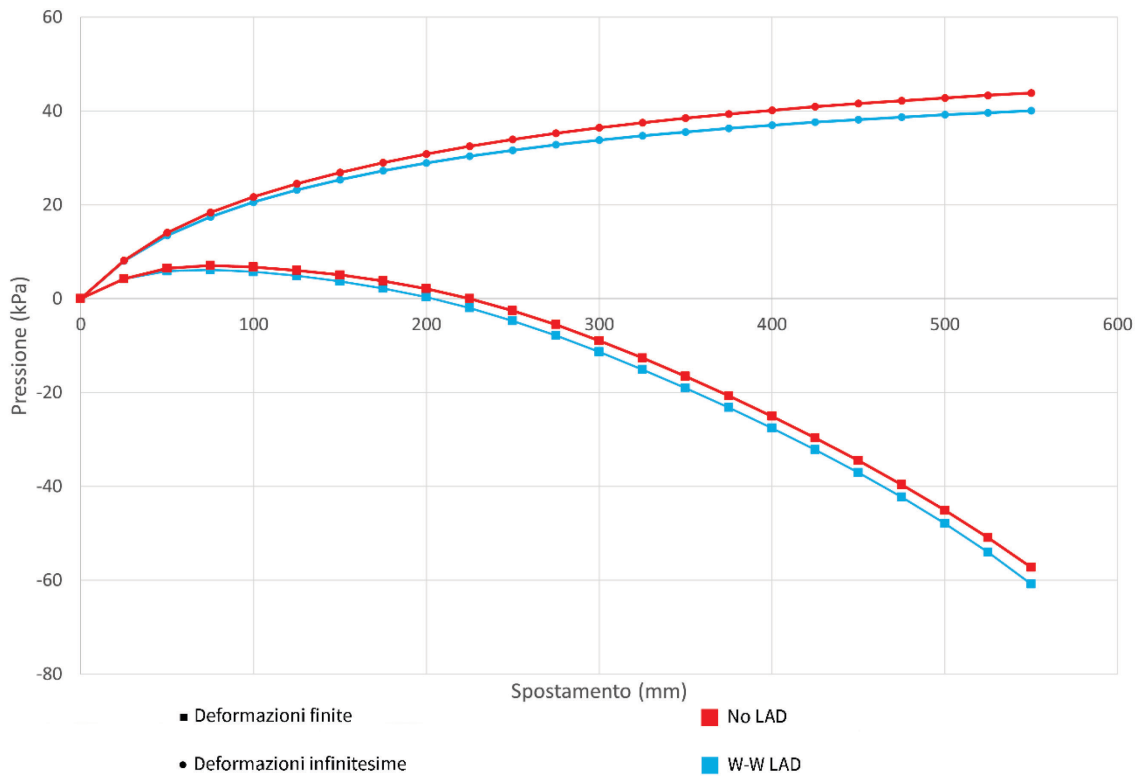


Figura 7.1.4.2: Diagramma pressione interna-spostamento imposto orizzontale  $u_y(t)$ . Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

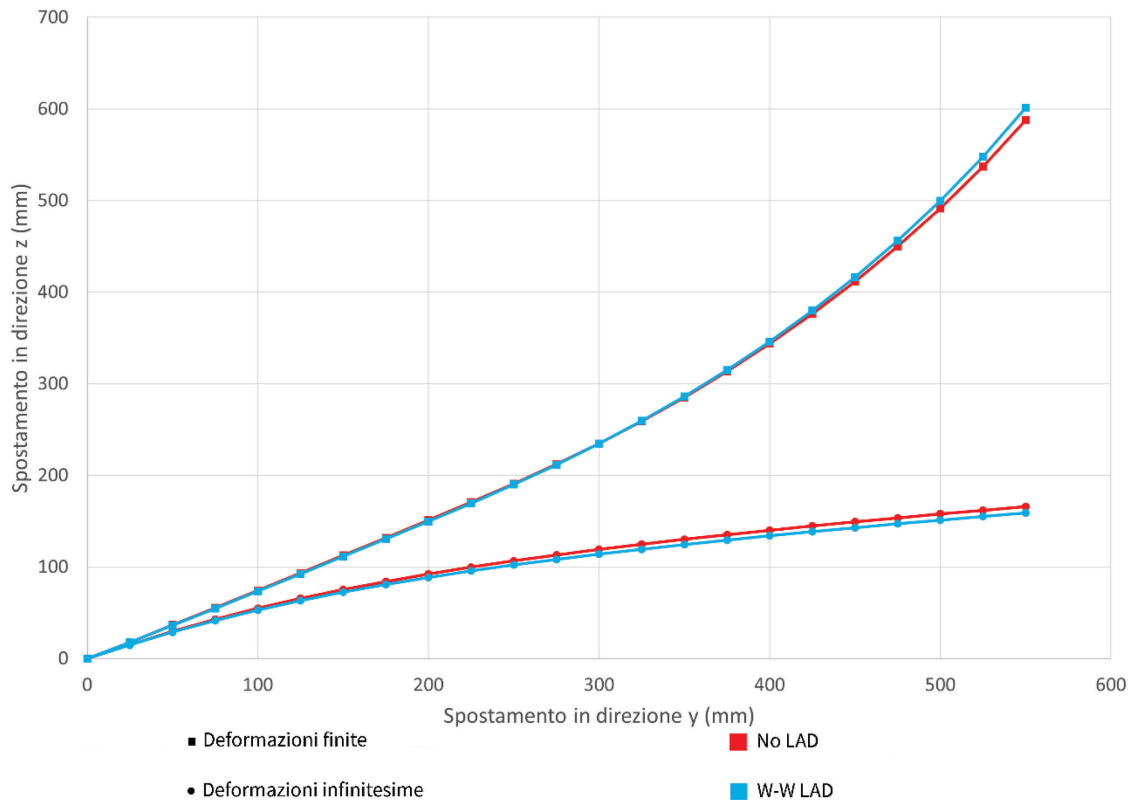


Figura 7.1.4.3: Diagramma spostamento verticale-spostamento orizzontale imposto  $u_y(t)$ . Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

In Figura 7.1.4.2 si nota come l'analisi svolta in grandi deformazioni, permetta di cogliere il comportamento rammollente del terreno poiché, a differenza delle piccole deformazioni in cui si fa riferimento alla configurazione indeformata, esse tengono conto della variazione di volume che si verifica ad ogni step temporale. La differenza percentuale di tensione fra le due teorie, sia a due sia a tre invarianti, si attesta attorno al 250%.

Dalla Figura 7.1.4.3 invece si può apprezzare come l'abbassamento subito dal provino aumenta in modo quasi lineare con lo spostamento orizzontale nell'analisi in deformazioni infinitesime, mentre segue un andamento simile a una funzione quadratica in deformazioni finite.

In merito allo stato tensionale nel piano  $p - q$  (Figura 7.1.4.4), relativamente alle piccole deformazioni si ha un avvicinamento alla linea di stato critico con l'aumento dell'azione tagliante. In figura, oltre al percorso tensionale, viene rappresentata la superficie di plasticità al termine dell'analisi. Per quanto concerne le deformazioni finite, si nota invece che il percorso tensionale si sposta nella zona di *softening* (Figura 7.1.4.5), per cui si ha una riduzione della superficie di snervamento ed una conseguente riduzione dello stato tensionale all'interno del provino.

In merito allo sviluppo di deformazione plastica deviatorica (Figura 7.1.4.6), si nota uno sviluppo limitato in piccole deformazioni, che esibiscono una tensione deviatorica in costante aumento. Al contrario in grandi deformazioni si ha un grande sviluppo di deformazione plastica, con la tensione deviatorica che aumenta in una prima fase e decresce quando si entra nella fase rammollente.

Per quanto riguarda le componenti volumetriche (Figura 7.1.4.7), l'analisi in deformazioni infinitesime restituisce una deformazione plastica che cresce all'aumentare dell'azione

tagliante. Anche la tensione volumetrica interna al provino aumenta progressivamente dopo una lieve flessione iniziale. In grandi deformazioni invece, si verificano delle deformazioni plastiche a compressione in una prima fase, che poi diventano di trazione. La tensione è in costante diminuzione.

In Figura 7.1.4.8 si osserva la variazione subita dall'angolo di Lode. L'analisi in piccole deformazioni esibisce un'oscillazione che si aggira sui  $10^\circ$ , mentre nelle deformazioni finite il valore di  $\theta$  cambia di oltre  $30^\circ$ ; si ha quindi uno stato tensionale che si dirige verso un'asse principale di tensione positiva (vedi Figura 5.4.1).

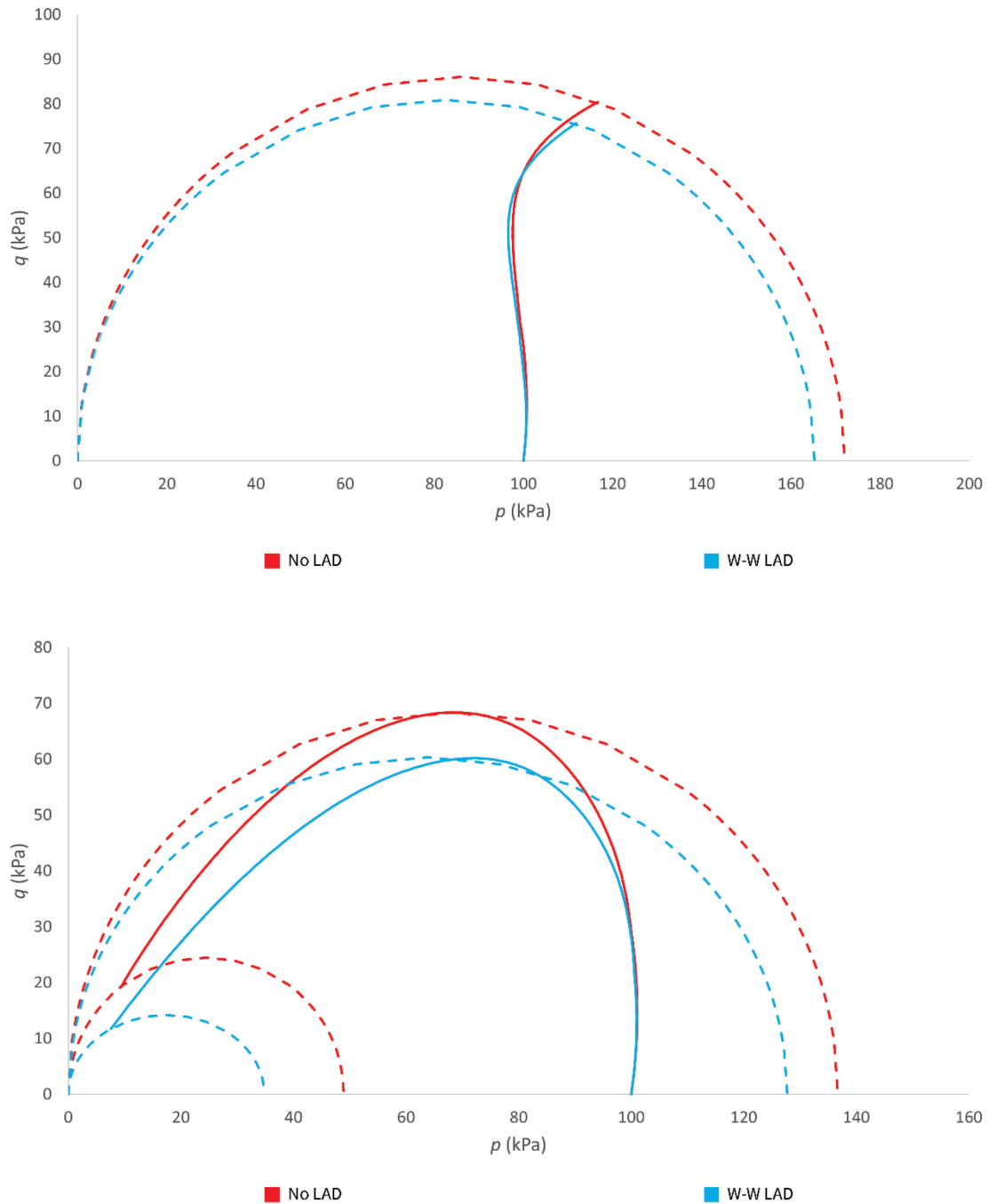


Figura 7.1.4.4: Percorso tensionale nel piano  $p - q$  e superfici di snervamento iniziale e di massima espansione. Confronto no LAD/W-W LAD. In alto: analisi in piccole deformazioni; in basso: analisi in grandi deformazioni.

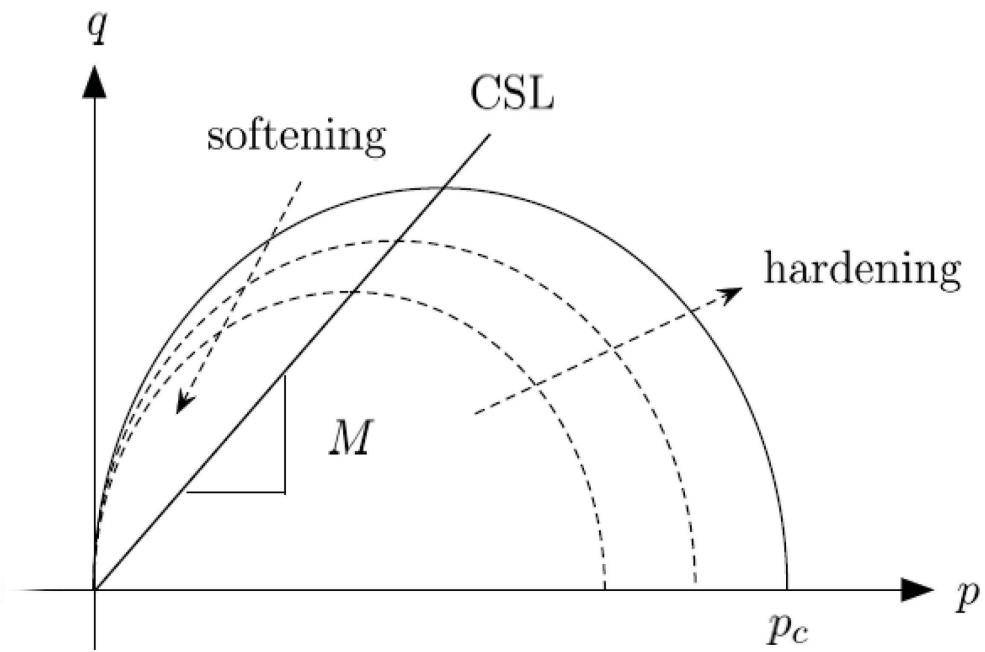


Figura 7.1.4.5: Incrudimento e rammollimento per il modello di plasticità Cam-Clay Modificato [2].

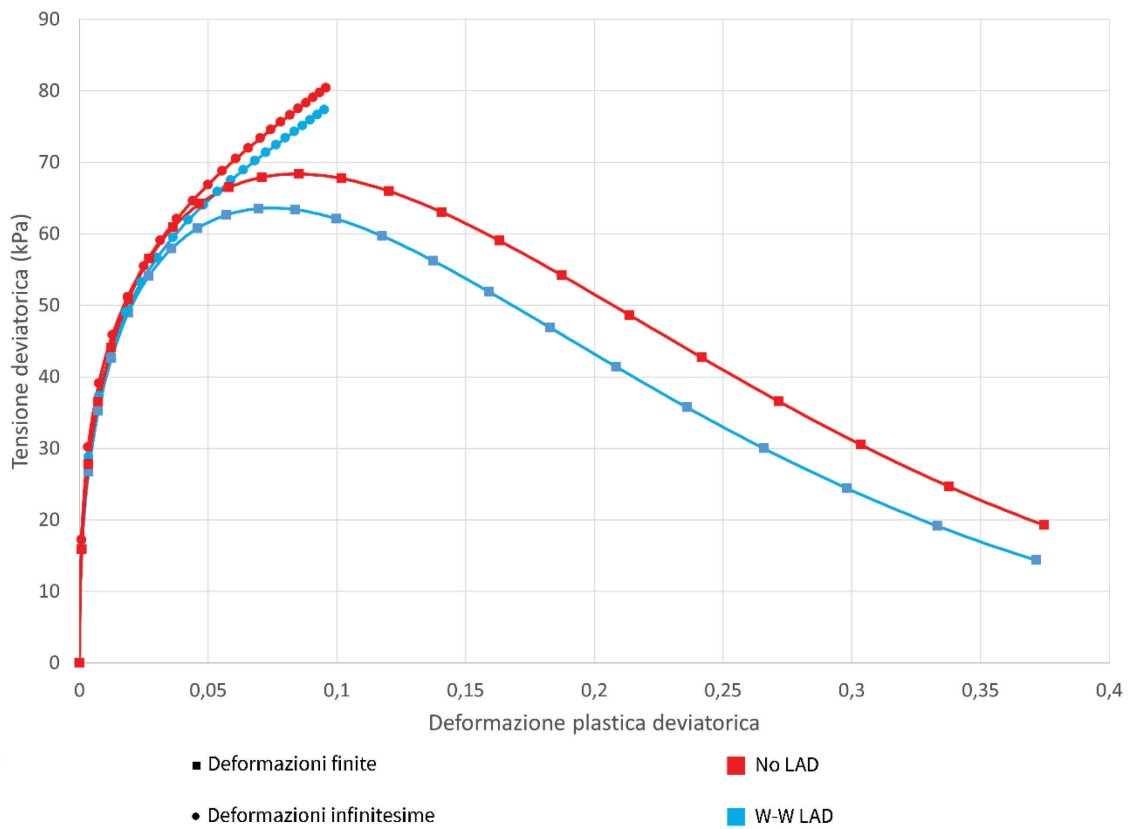


Figura 7.1.4.6: Diagramma tensione deviatorica-deformazione plastica deviatorica. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

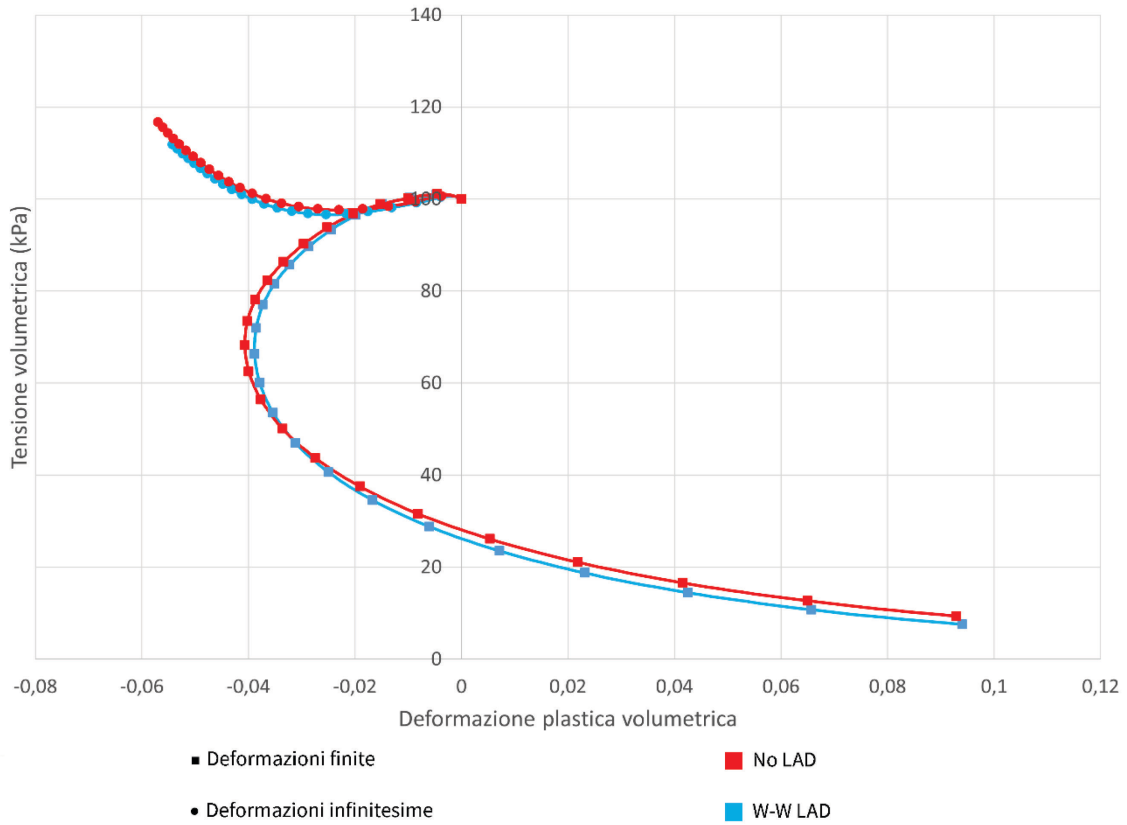


Figura 7.1.4.7: Diagramma tensione volumetrica-deformazione plastica volumetrica. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

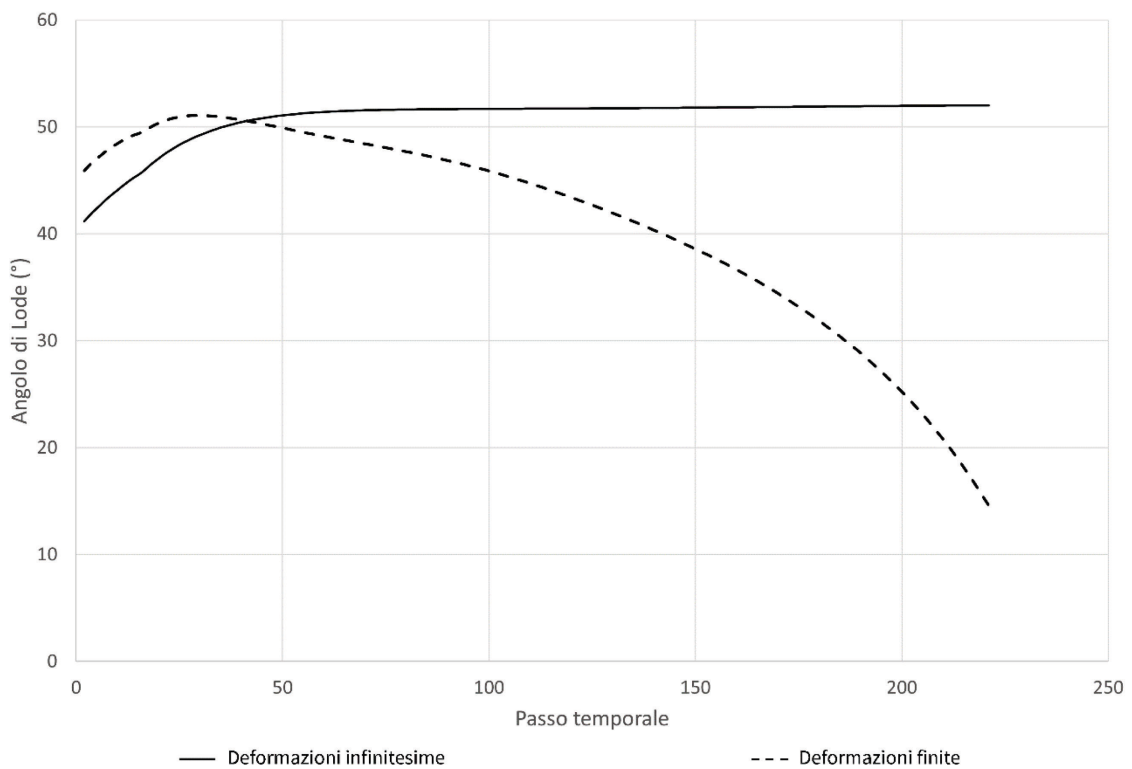


Figura 7.1.4.8: Andamento nel tempo dell'angolo di Lode. Confronto deformazioni infinitesime/deformazioni finite.



Lo stesso test viene ripetuto vincolando anche i nodi appartenenti alla faccia superiore alla traslazione verticale e aumentando gli incrementi di spostamento a 5 mm. Considerando i 300 step temporali, si otterrà uno spostamento orizzontale finale pari a 150 cm.

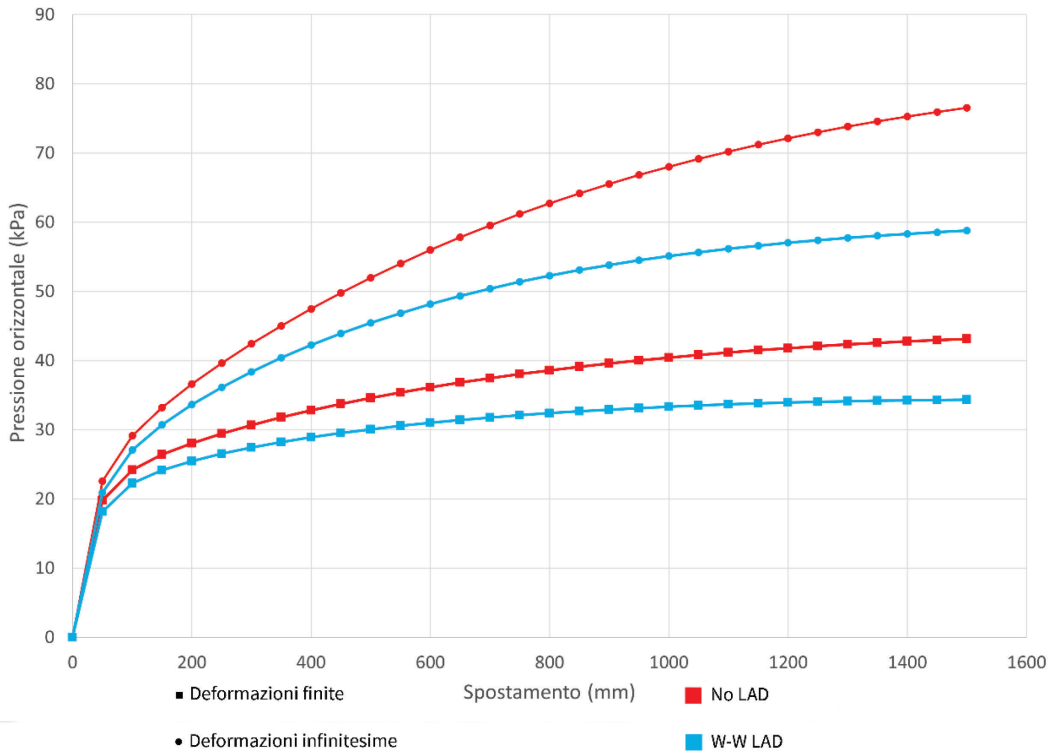


Figura 7.1.4.9: Diagramma pressione interna orizzontale-spostamento imposto orizzontale  $u_y(t)$ . Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

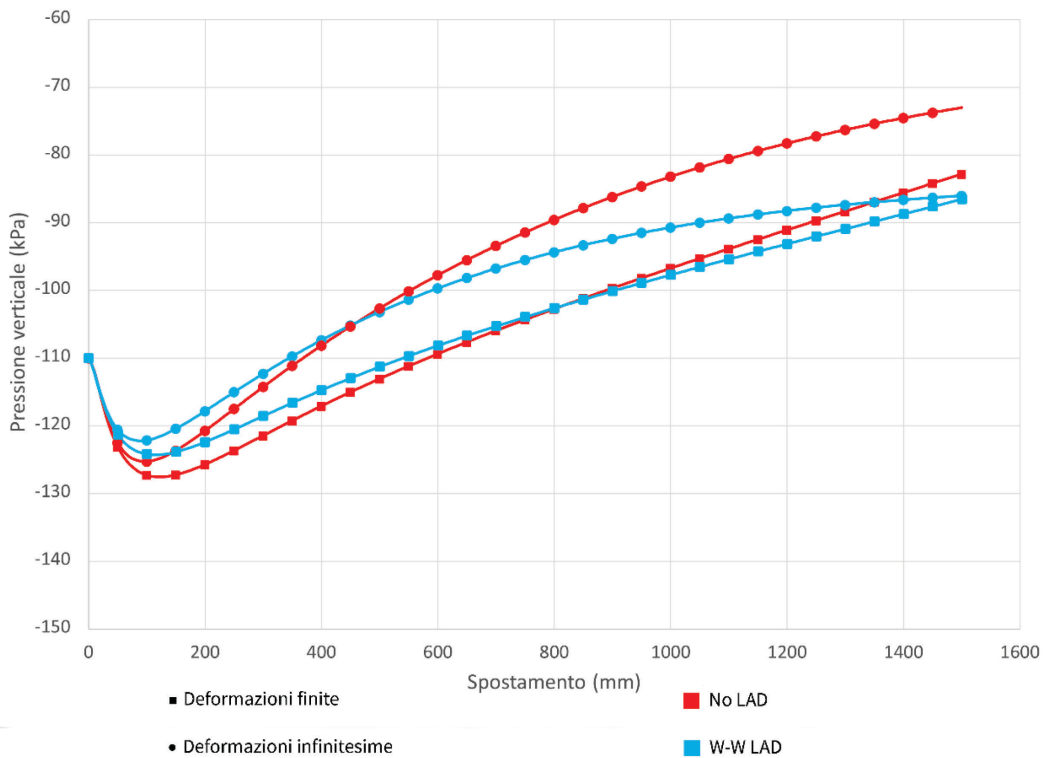


Figura 7.1.4.10: Diagramma pressione interna verticale-spostamento imposto orizzontale  $u_y(t)$ . Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

In Figura 7.1.4.9 si nota come al crescere dell'azione tagliante esterna, le tensioni orizzontali interne al provino aumentano progressivamente, in particolare nelle analisi in piccole deformazioni. La differenza fra i due modelli costitutivi in termini di tensioni interne si attesta attorno al 30% per le deformazioni infinitesime e al 25% per le deformazioni finite, con valori maggiori per le analisi no LAD.

In merito alle tensioni verticali (Figura 7.1.4.10), in tutti i casi presi in esame si ha una prima fase in cui il solido si irrigidisce sotto l'azione tagliante, andando in compressione, e una fase successiva in cui il materiale diventa rammollente e va in trazione.

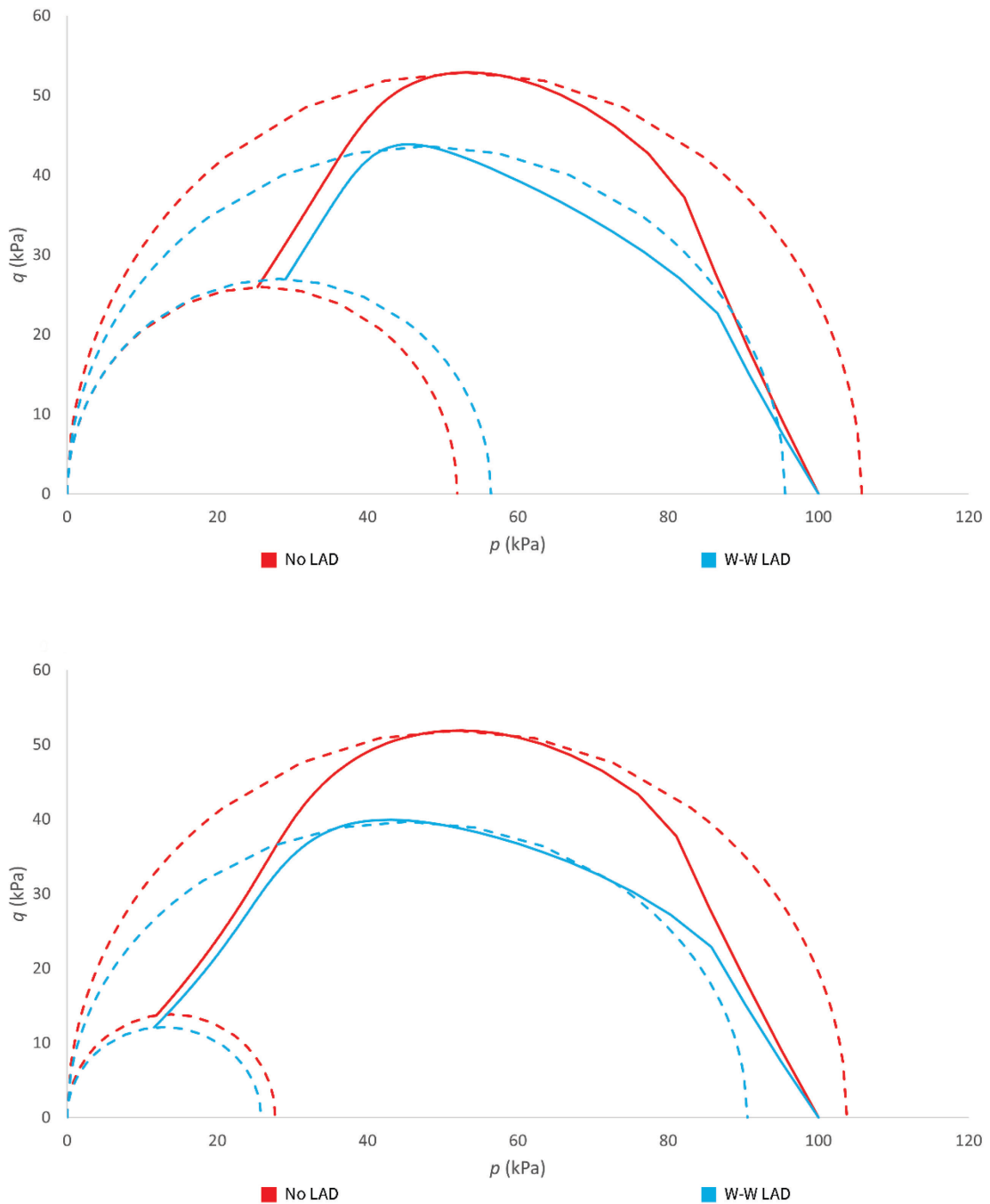


Figura 7.1.4.11: Percorso tensionale nel piano  $p - q$  e superfici di snervamento iniziale e di massima espansione. Confronto no LAD/W-W LAD. In alto: analisi in piccole deformazioni; in basso: analisi in grandi deformazioni.

In Figura 7.1.4.11 le analisi, in piccole e grandi deformazioni, mostrano lo stesso comportamento. Nelle analisi no LAD la superficie di snervamento mostra una fase di espansione, a cui segue una riduzione della superficie stessa a causa del fenomeno di *softening*. L'analisi W-W LAD affronta invece una prima fase elastica in cui la superficie plastica non subisce variazioni, per poi diminuire anch'essa con il comportamento rammollente.

Lo studio della deformazione plastica deviatorica (Figura 7.1.4.12) mostra in tutti i casi, al crescere della deformazione plastica, una progressiva diminuzione della tensione deviatorica.

Per quanto riguarda quella volumetrica invece (Figura 7.1.4.13), si può constatare che la teoria delle deformazioni infinitesime restituisce valori di deformazioni plastiche volumetriche sensibilmente inferiori alle deformazioni finite. Si nota inoltre che, a una prima fase in cui le deformazioni sono a compressione, segue un intervallo più consistente in cui, al decrescere della tensione volumetrica, aumentano le deformazioni plastiche a trazione.

L'andamento nel tempo dell'angolo di Lode (Figura 7.1.4.14) è molto variabile durante i primi step di carico, ma assume poi una tendenza più costante. Il valore di  $\theta$  al termine del carico è di  $47^\circ$  e  $44^\circ$ , rispettivamente in deformazioni infinitesime e finite.

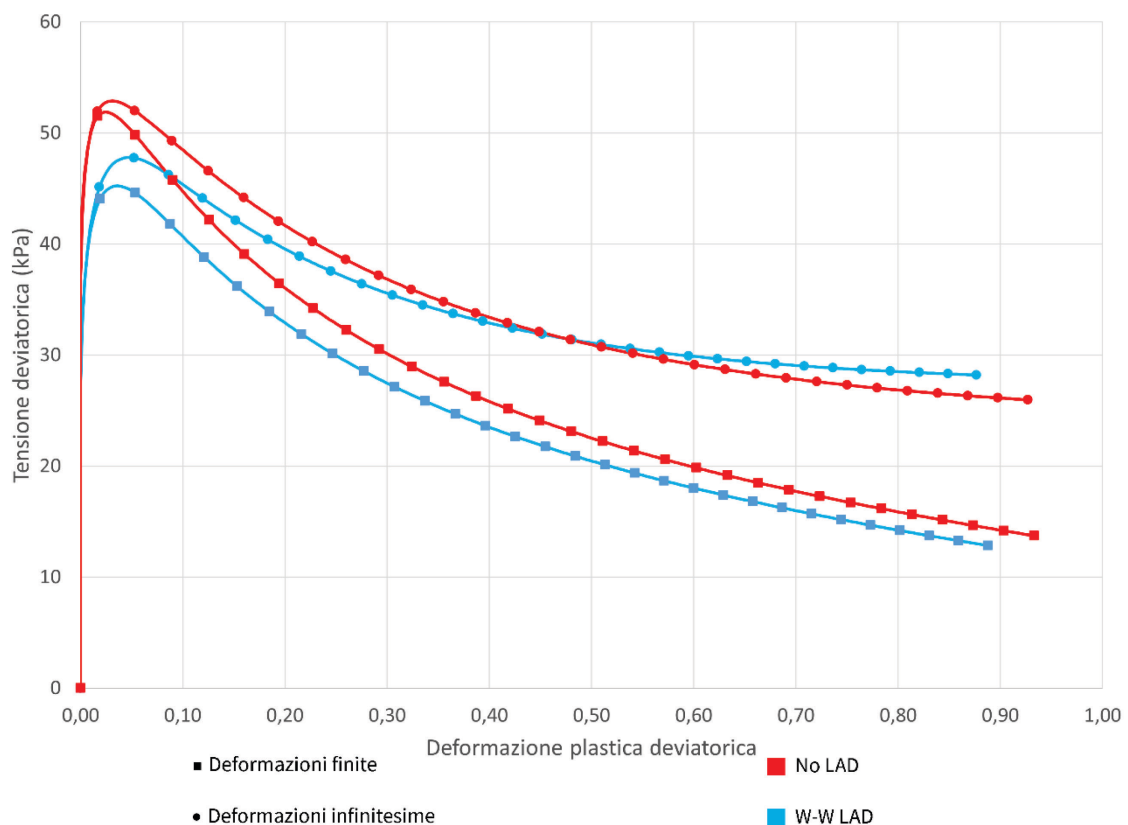


Figura 7.1.4.12: Diagramma tensione deviatorica-deformazione plastica deviatorica. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

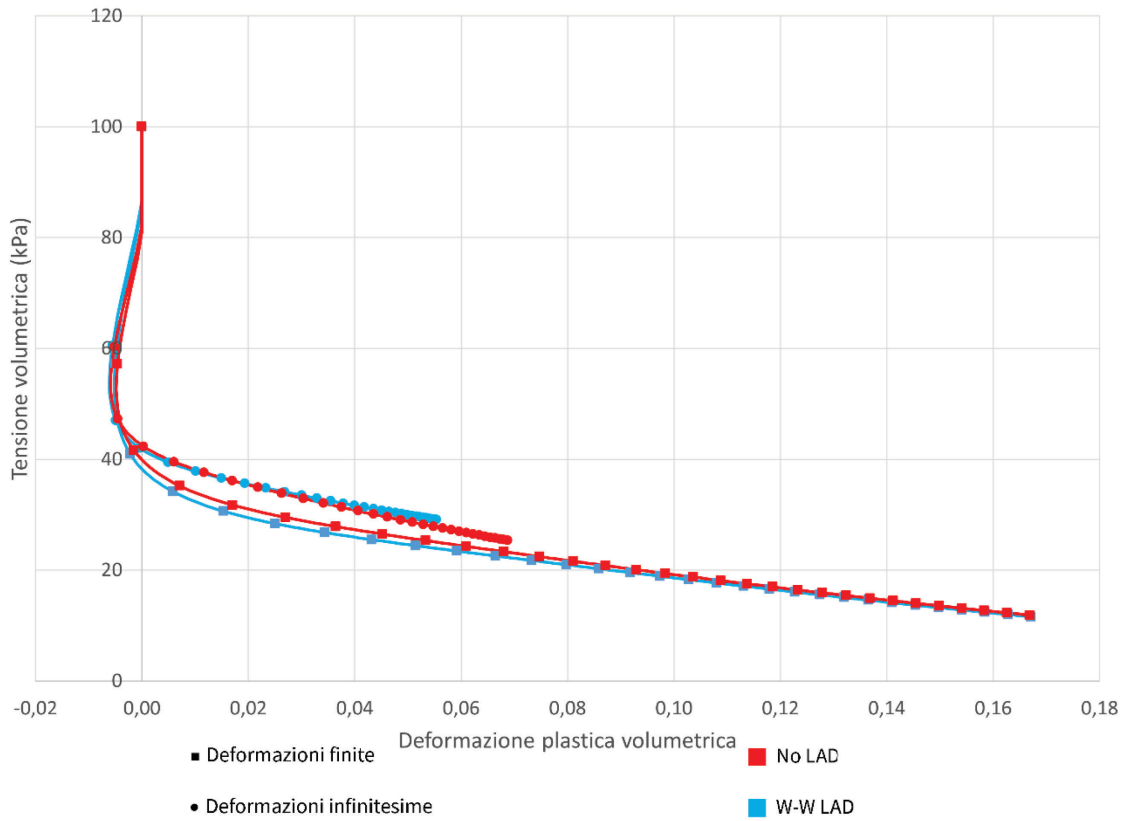


Figura 7.1.4.13: Diagramma tensione volumetrica-deformazione plastica volumetrica. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

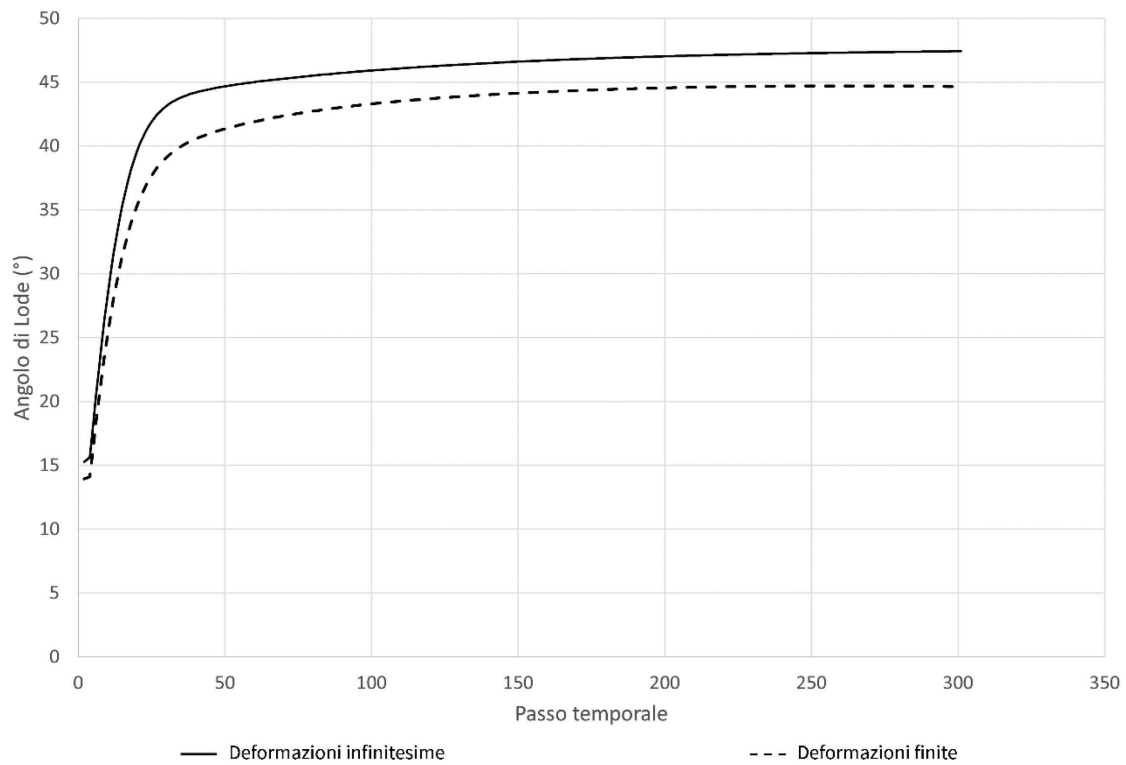


Figura 7.1.4.14: Andamento nel tempo dell'angolo di Lode. Confronto deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

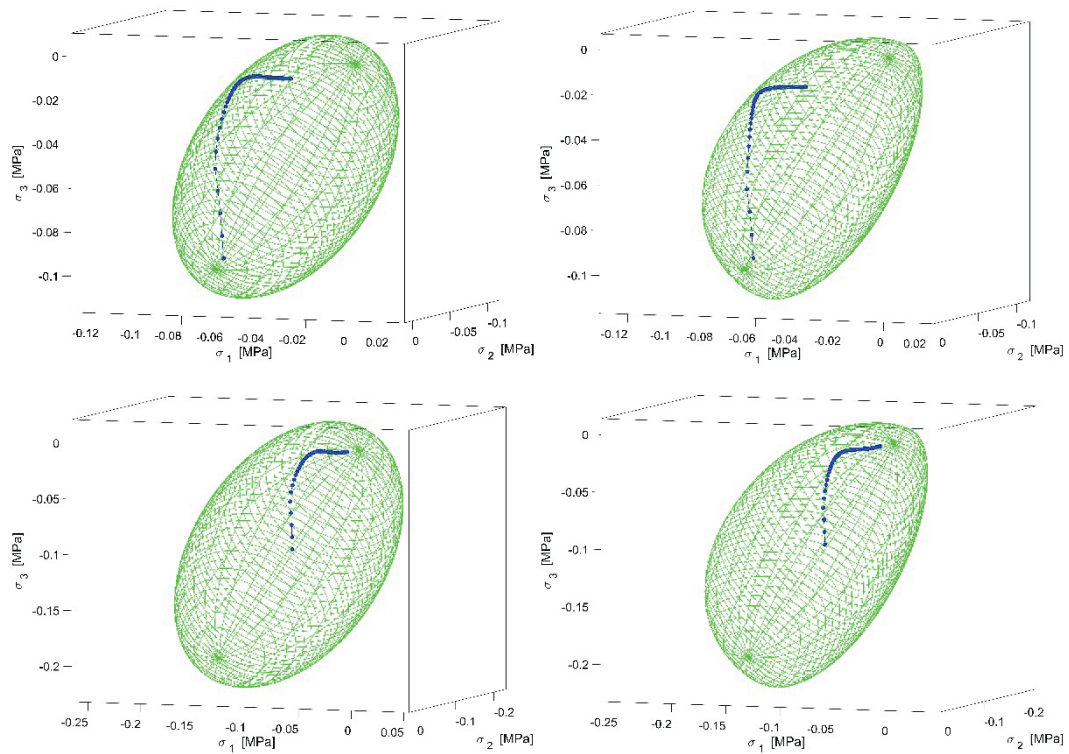


Figura 7.1.4.15: Superficie di snervamento di massima espansione e relativo percorso tensionale. In alto: analisi in piccole deformazioni; in basso: analisi in grandi deformazioni. A sinistra: no LAD; a destra: W-W LAD.

In Figura 7.1.4.15 è possibile cogliere le differenze fra la superficie di snervamento del modello costitutivo Cam-Clay a due e a tre invarianti. Il modello no LAD ha una superficie plastica di tipo ellissoidale, mentre la superficie del modello W-W LAD risulta più schiacciata. È inoltre visibile il percorso tensionale lungo le direzioni principali del punto Gauss preso a riferimento.

### 7.1.5 Prova a compressione e taglio

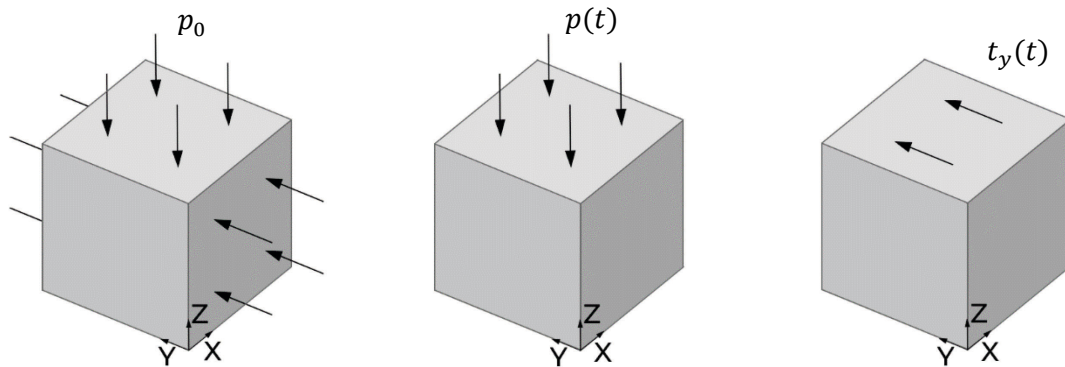


Figura 7.1.5.1: Condizioni di carico. A sinistra: pressione iniziale  $p_0$ ; al centro: pressione esterna variabile  $p(t)$ ; a destra: tensione di taglio esterna variabile  $t_y(t)$ .

La faccia di base viene vincolata alla traslazione nelle tre direzioni. Alle due facce verticali parallele al piano  $y - z$  vengono impediti gli spostamenti fuori dal piano, mentre i punti appartenenti alle facce parallele al piano  $x - z$  sono liberi di muoversi in direzione  $y$ .

Queste ultime e la superficie superiore vengono caricate con una pressione  $p_0$  in direzione ortogonale a ciascuna faccia e con verso entrante nell'elemento finito, di intensità costante pari a  $100 \text{ kPa}$  (Figura 7.1.5.1, sinistra).

Inoltre, la superficie superiore viene caricata con una pressione uniformemente distribuita  $p(t)$  che incrementa il suo valore fino a raggiungere l'intensità di  $100 \text{ kPa}$  al  $50^\circ$  step di carico, per poi mantenersi costante fino al termine dell'analisi (Figura 7.1.5.1, centro). Allo stesso tempo, essa è anche soggetta a una forza di taglio  $t_y(t)$  in direzione  $y$  che si attiva a metà analisi ed incrementa il suo valore fino a  $10 \text{ kPa}$  al termine della stessa (Figura 7.1.5.1, destra).

Per quanto concerne il diagramma degli spostamenti orizzontali (Figura 7.1.5.2) si nota come, prima dell'attivazione della tensione a taglio, gli spostamenti maggiori causati dalla compressione si verificano per le analisi in piccole deformazioni. Sotto l'azione tagliante però la situazione si inverte e le analisi in grandi deformazioni assumono una pendenza molto più ripida, in particolare a tre invarianti. In merito alle deformazioni infinitesime, la distanza delle due curve è di circa il 33%, mentre per le deformazioni finite è del 37%.

Le stesse considerazioni possono essere tratte anche dal grafico sugli spostamenti verticali (Figura 7.1.5.3) che evidenzia la minore pendenza assunta dalle curve inerenti alle piccole deformazioni durante gli incrementi di pressione, e al contrario una velocità di deformazione maggiore per le grandi deformazioni durante la fase di stabilizzazione della pressione verticale e di applicazione della tensione di taglio.

Il percorso tensionale nel piano  $p - q$  (Figura 7.1.5.4), mostra un comportamento simile fra le due teorie, con un cambio di direzione verso la linea di stato critico al momento del subentro del taglio.

Gli sviluppi di deformazione plastica deviatorica (Figura 7.1.5.5) e volumetrica (7.1.5.6) sono maggiori per le analisi in grandi deformazioni e W-W LAD. In particolare, all'aumentare della deformazione plastica volumetrica si riscontra un decremento della tensione volumetrica causata dal taglio.

Infine, l'andamento dell'angolo di Lode (Figura 7.1.5.7) segue un percorso abbastanza lineare nel tempo in entrambe le analisi, con una variazione complessiva attorno ai 10°.

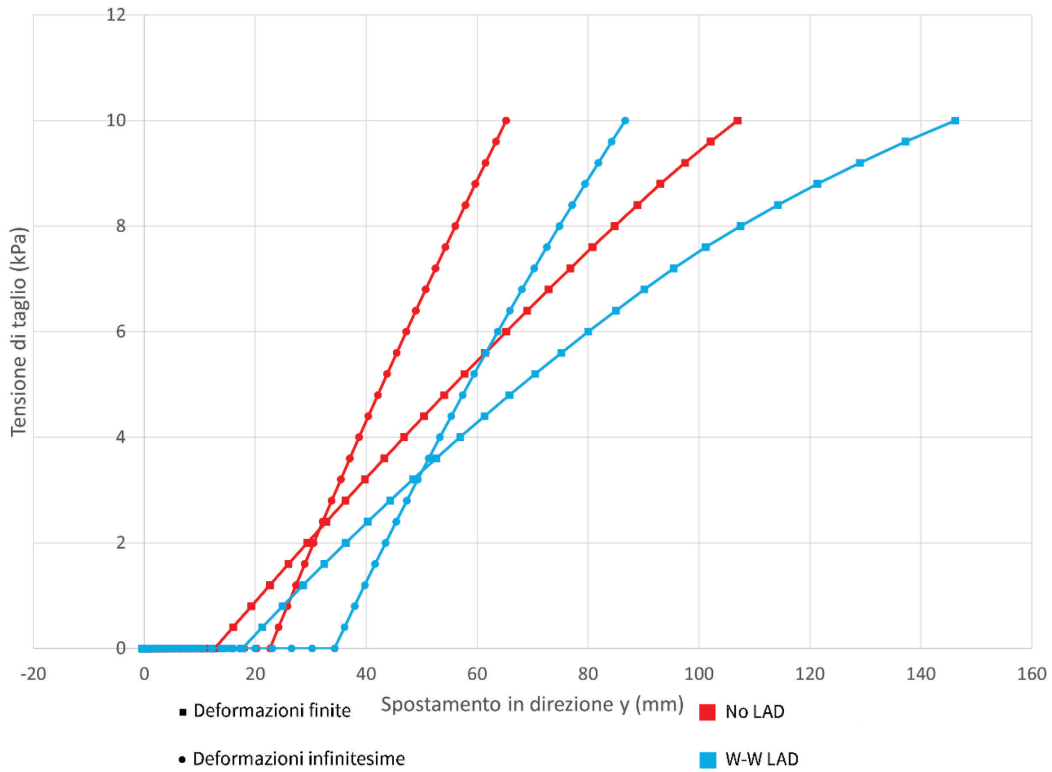


Figura 7.1.5.2: Diagramma tensione di taglio esterna  $t_y(t)$ -spostamento orizzontale. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

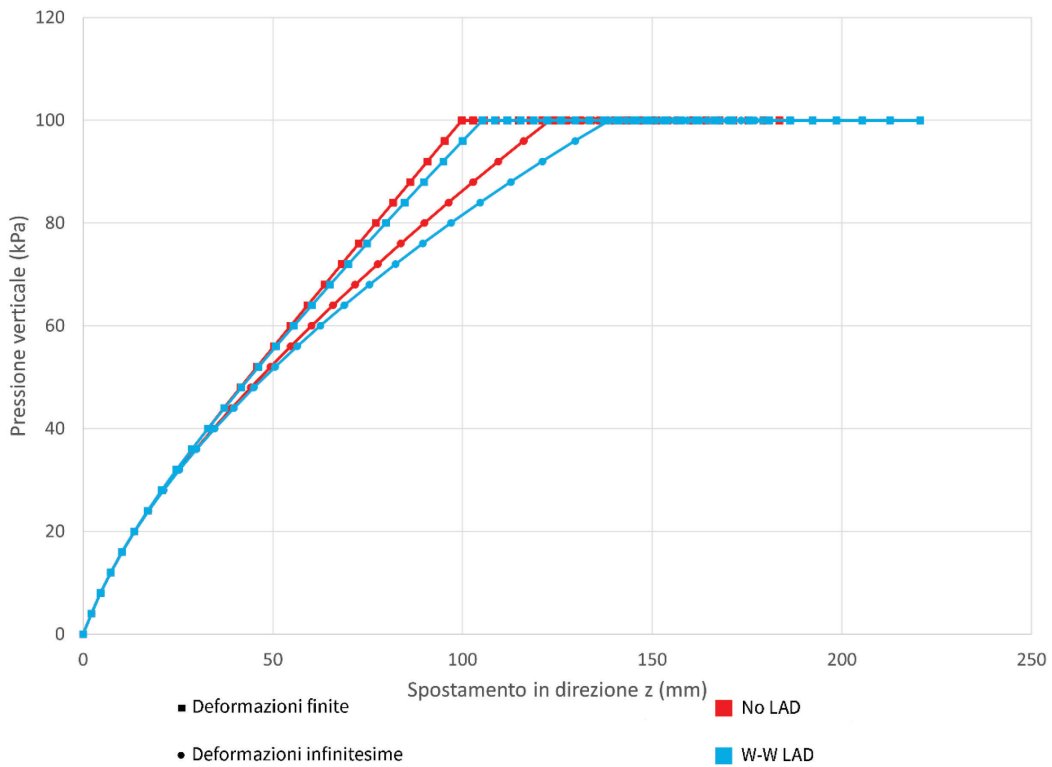


Figura 7.1.5.3: Diagramma pressione esterna  $p(t)$ -spostamento verticale. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

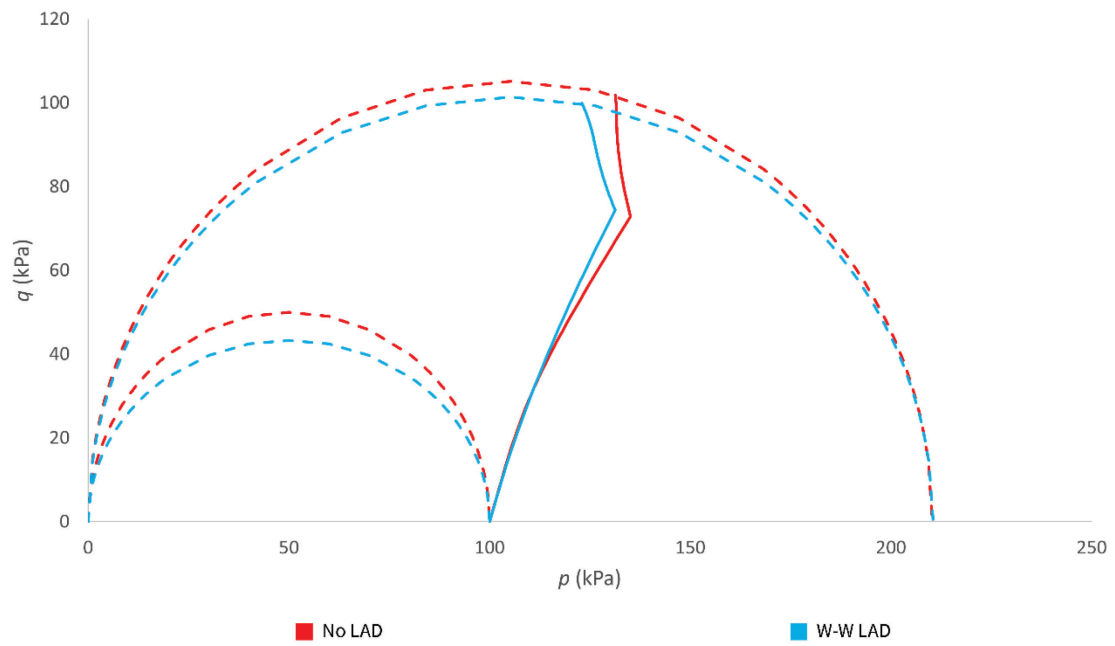
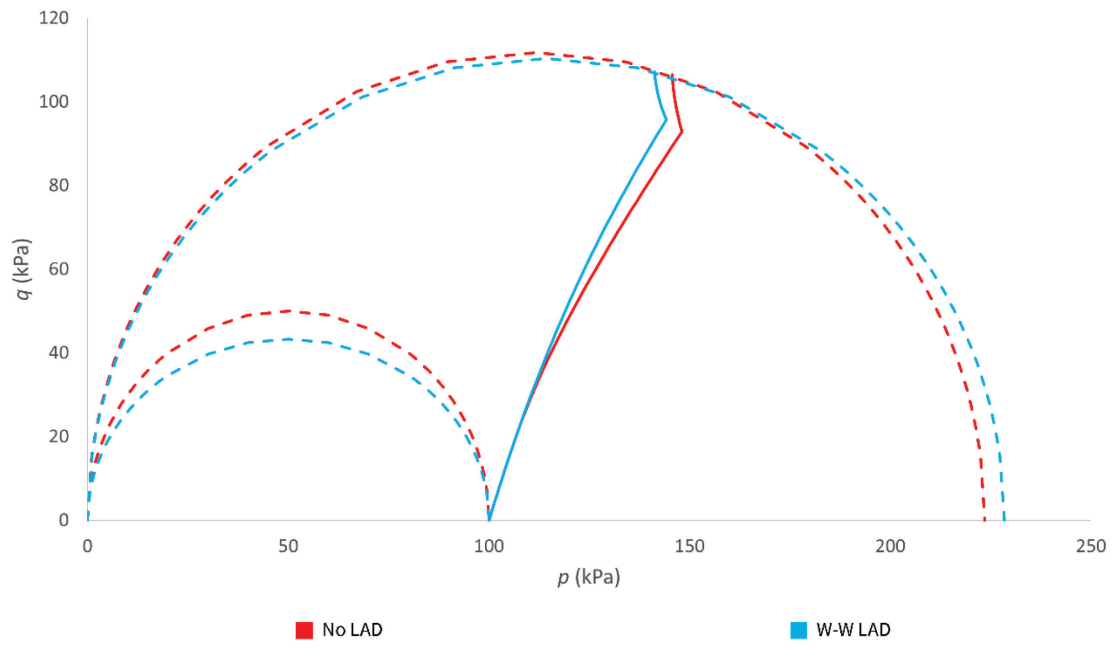


Figura 7.1.5.4: Percorso tensionale nel piano  $p - q$  e superfici di snervamento iniziale e finale. Confronto no LAD/W-W LAD. In alto: analisi in piccole deformazioni; in basso: analisi in grandi deformazioni.



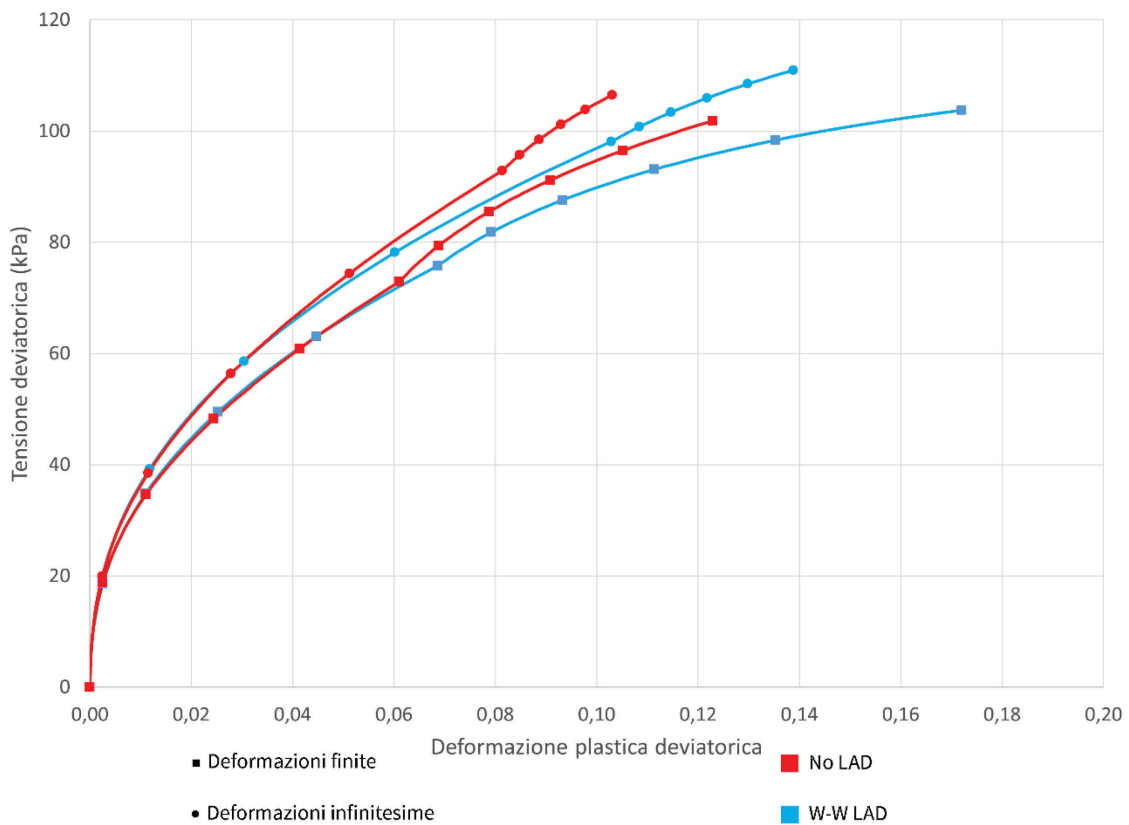


Figura 7.1.5.5: Diagramma tensione deviatorica-deformazione plastica deviatorica. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

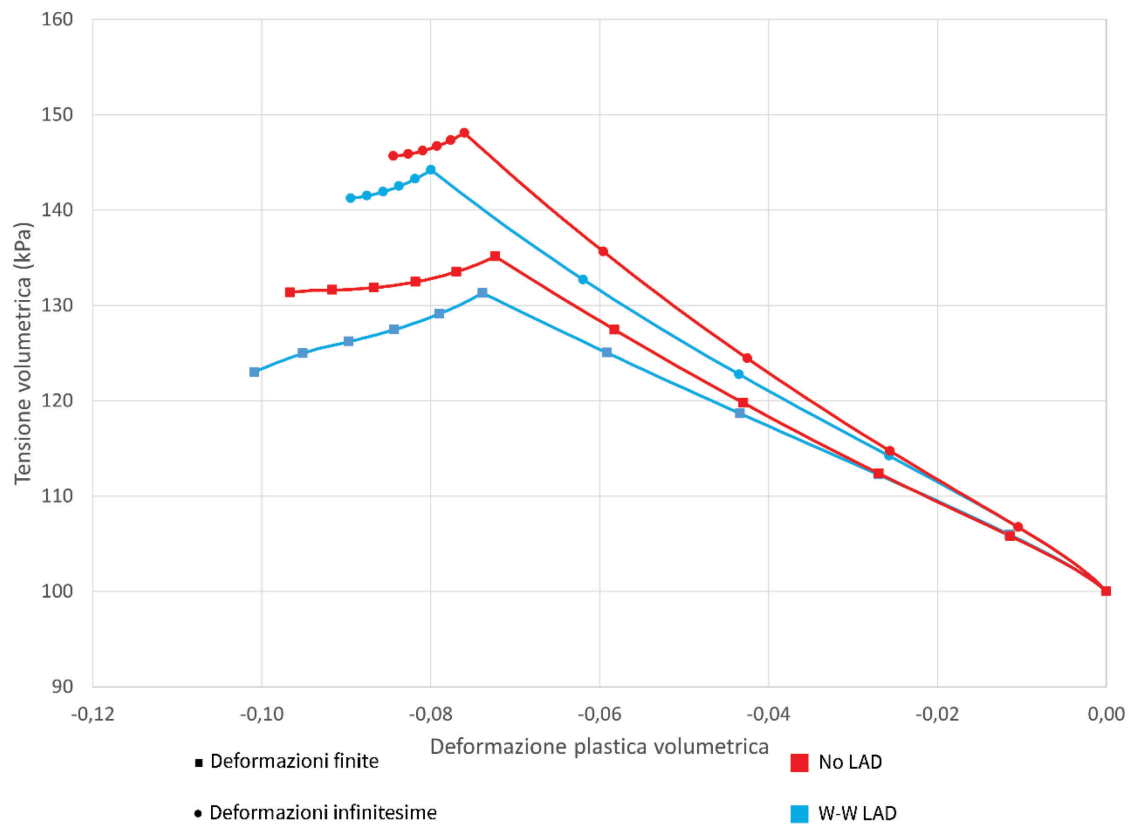


Figura 7.1.5.6: Diagramma tensione volumetrica-deformazione plastica volumetrica. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

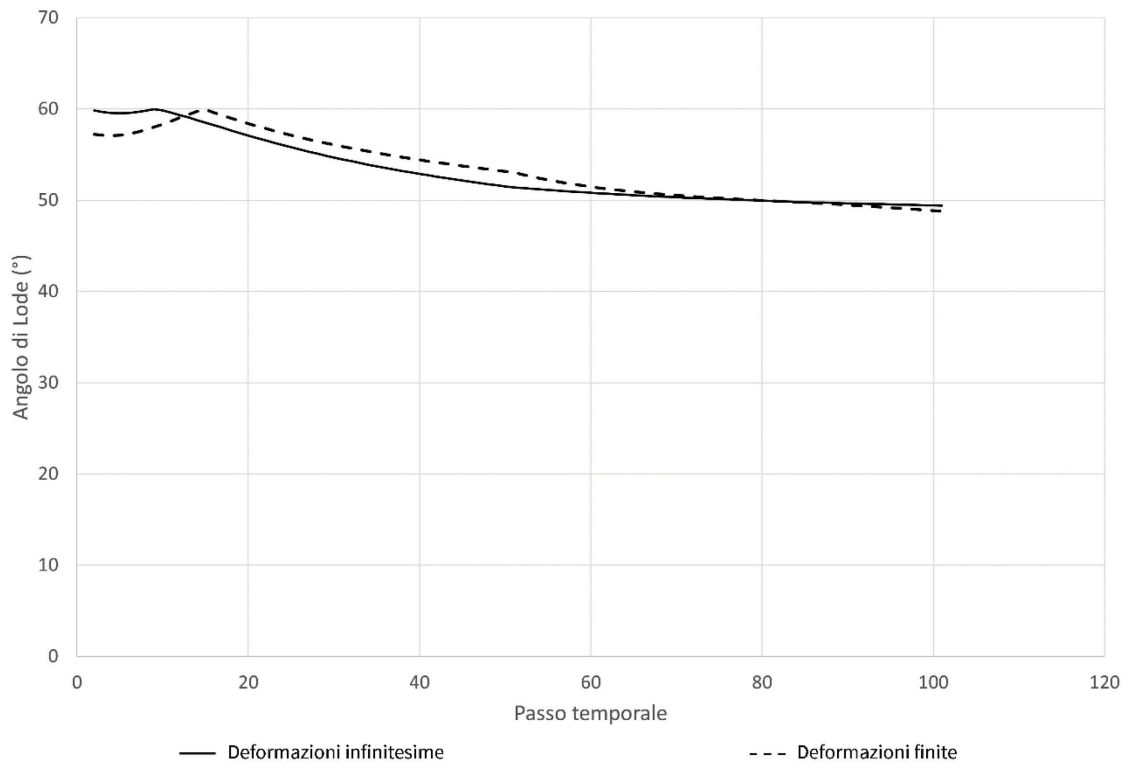


Figura 7.1.5.7: Andamento nel tempo dell'angolo di Lode. Confronto deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

## 7.2 Riproduzione di esempi numerici da letteratura

Come anticipato in precedenza, si considerano ora degli esempi numerici presenti in letteratura. Essi vengono fedelmente riprodotti al fine di confrontare gli esiti delle analisi, in modo tale da verificare la correttezza delle *functions* che sono state implementate.

In particolare, si fa riferimento a tre esempi:

- Test di compressione su un singolo nodo di un elemento finito [9];
- Consolidazione di un terreno soggetto a carico nastriforme in stato piano di deformazione [6];
- Consolidazione di un terreno soggetto a spostamenti imposti in stato piano di deformazione [9].

### 7.2.1 Test di compressione su un singolo nodo di un elemento finito

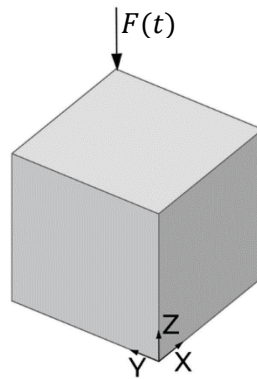


Figura 7.2.1.1: Condizioni di carico. Forza esterna variabile  $F$ .

Al fine di valutare l'affidabilità del modello costitutivo nella versione 3D, si esegue un'analisi agli elementi finiti in piccole deformazioni.

Si considera un singolo elemento finito di dimensioni unitarie; un elemento cubico 8 nodi.

Esso è vincolato alla base alla traslazione verticale e a due facce verticali contigue alle traslazioni ad esse rispettivamente ortogonali.

Questo cubo viene inizialmente sottoposto a una pressione idrostatica uniforme e costante di  $100 \text{ kPa}$  sulle facce non vincolate, e successivamente viene applicata una forza concentrata verticale  $F(t)$  di  $20 \text{ kN}$  in corrispondenza del vertice superiore non vincolato, mediante 10 incrementi di carico (Figura 7.2.1.1).

I parametri del materiale sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 1,22 \\ \tilde{\kappa} = 0,01 \\ \hat{\kappa} \cong 0,01 \\ \tilde{\lambda} = 0,1 \\ \hat{\lambda} = 0,11 \\ \rho = 0,7 \\ G = 5,0 \text{ MPa} \\ p_c = 100 \text{ kPa} \\ \varepsilon_{v0}^e = 0 \end{array} \right.$$

Per la simulazione numerica si è considerato il caso in cui  $\alpha = \gamma = 1$ , che è stato analizzato sia considerando la dipendenza dall'angolo di Lode (W-W LAD), sia con il modello costitutivo a due soli invarianti (no LAD). I risultati da letteratura e quelli ottenuti dalla simulazione vengono riportati in Figura 7.2.1.2 ed in Tabella 7.2.1.1, da cui si può constatare una quasi totale corrispondenza di risultati, in particolare per il caso W-W LAD con una differenza percentuale quasi sempre al di sotto del 2%.

Si osserva inoltre che l'introduzione dell'angolo di Lode comporta in tutti i casi in esame spostamenti maggiori a parità di carico, a causa di uno sviluppo maggiore di deformazione plastica.

NO LAD				
FORZA (kN)	Coombs & Crouch (2011)	Simulazione numerica		Differenza % fra deformazioni infinitesime
	Deformazioni infinitesime	Deformazioni finite		
	SPOSTAMENTO (mm)			
0	0,00	0,00	0,00	/
2	1,49	1,72	1,78	15,44
4	3,83	4,03	4,22	5,22
6	7,73	7,10	7,50	-8,15
8	10,80	11,09	11,77	2,69
10	15,94	16,09	17,14	0,94
12	21,48	22,16	23,64	3,17
14	28,88	29,29	31,25	1,42
16	36,49	37,45	39,90	2,63
18	45,83	46,52	49,46	1,51
20	55,31	56,42	59,81	2,01

W-W LAD				
FORZA (kN)	Coombs & Crouch (2011)	Simulazione numerica		Differenza % fra deformazioni infinitesime
	Deformazioni infinitesime	Deformazioni finite		
	SPOSTAMENTO (mm)			
0	0,00	0,00	0,00	/
2	1,26	1,80	1,87	42,86
4	4,45	4,39	4,62	-1,35
6	8,13	8,01	8,51	-1,48
8	12,30	12,87	13,77	4,63
10	19,42	19,10	20,52	-1,65
12	27,33	26,74	28,80	-2,16
14	36,39	35,75	38,52	-1,76
16	46,76	46,02	49,50	-1,58
18	57,89	57,41	61,55	-0,83
20	70,14	69,73	74,45	-0,58

Tabella 7.2.1.1: Valori di forza esterna  $F(t)$  e spostamento e relative differenze percentuali. Confronto Coombs & Crouch/simulazione numerica e deformazioni infinitesime/deformazioni finite. In alto: no LAD; in basso: W-W LAD.

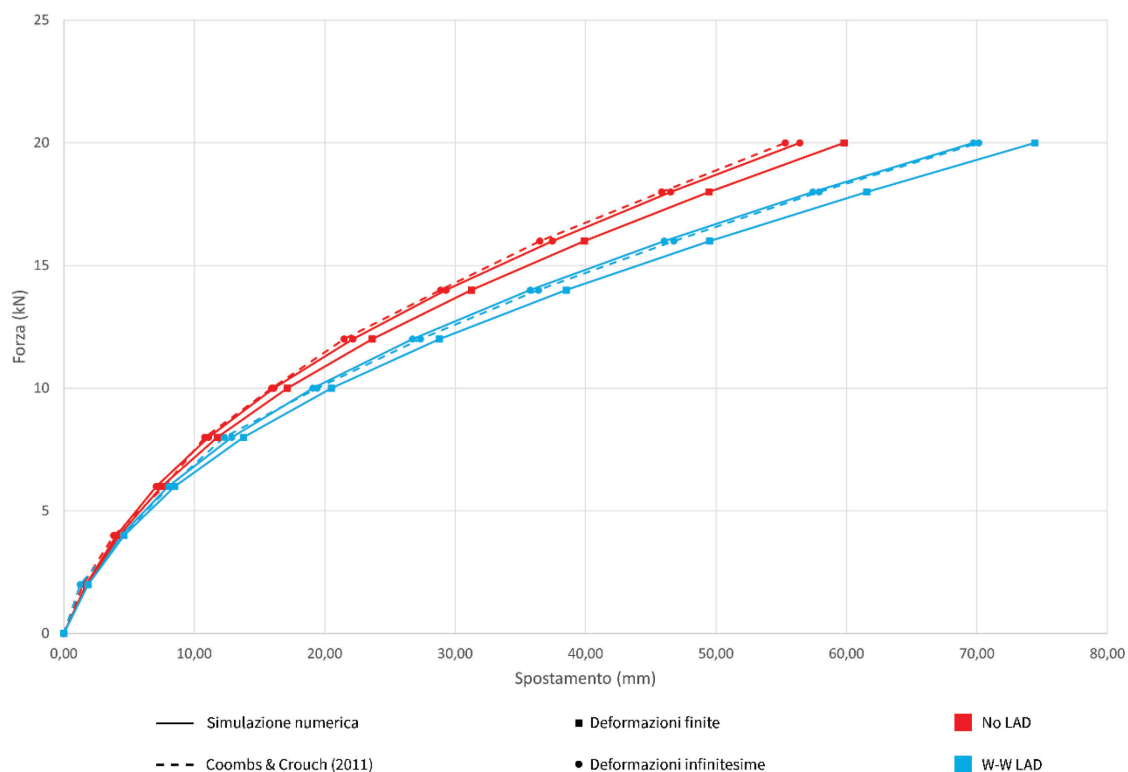


Figura 7.2.1.2: Diagramma forza esterna  $F(t)$ -spostamento verticale. Confronto Coombs & Crouch/simulazione numerica, no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

Per completezza la stessa analisi è stata svolta anche in deformazioni finite. In questo caso si può osservare come, a parità di carico, si ottengano spostamenti maggiori.

## 7.2.2 Consolidazione di un terreno soggetto a carico nastroiforme in stato piano di deformazione

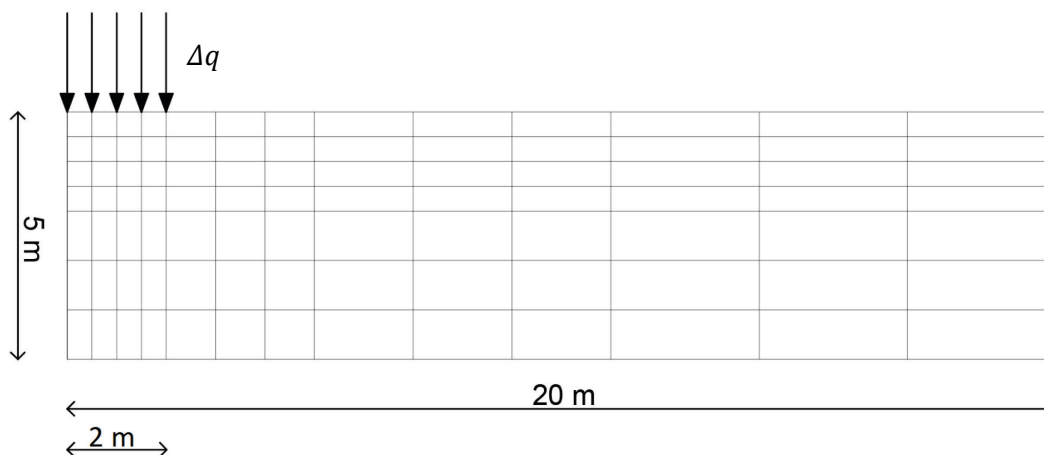


Figura 7.2.2.1: Condizioni di carico. Pressione verticale esterna  $\Delta q$ .

Viene qui effettuato il confronto con le analisi ad elementi finiti condotte Borja e Tamagnini, in piccole deformazioni ed in deformazioni finite, di una fascia di fondazione flessibile su argilla, usando il modello costitutivo Cam-Clay Modificato.

Il dominio si estende per una larghezza di 40 m in  $x$  e un'altezza di 5 m in  $y$ , mentre la fondazione flessibile è larga 4 m. Considerando la simmetria è possibile discretizzare solo metà problema, prendendo quindi in esame mezza base della fondazione pari a 2 m e utilizzando 91 elementi quadrilateri piani a 8 nodi, per un totale di 314 nodi. La discretizzazione del modello si effettua mediante elementi di dimensione variabile a seconda della vicinanza al carico esterno: in orizzontale, con quattro fasce da 0,5 m, tre fasce da 1 m, tre fasce da 2 m, tre fasce da 3 m; in verticale, con quattro fasce da 0,5 m, tre fasce da 1 m.

In Figura 7.2.2.1 è riprodotta la mesh bidimensionale e la relativa discretizzazione.

Considerando la bidimensionalità del problema, vengono impediti le traslazioni fuori dal piano e si considerano solo due direzioni per gli spostamenti. La base viene vincolata alla traslazione verticale e orizzontale, mentre agli spigoli verticali è impedito il solo spostamento in direzione  $x$ .

L'azione della fascia flessibile, come si riporta in Figura 7.2.2.1, viene rappresentata da un carico verticale uniformemente distribuito, applicato in modo graduale e di intensità pari a  $\Delta q = 90 \text{ kPa}$  (Figura 7.2.2.1).

Si presume che la falda freatica sia a livello della superficie del terreno.

Le condizioni iniziali in termini di tensioni e pressioni di pre-consolidazione vengono ricavate da un'analisi preliminare in piccole deformazioni, in cui si applica il peso proprio dell'argilla e si determinano le tensioni di Cauchy nei punti Gauss di integrazione. Gli spostamenti vengono quindi riportati a zero. La simulazione in condizioni drenate parte da uno stato iniziale sovraconsolidato.

I parametri assunti dal modello costitutivo sono i seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 1,05 \\ \tilde{\kappa} = 0,0177 \\ \hat{\kappa} = 0,018 \\ \tilde{\lambda} = 0,115 \\ \hat{\lambda} = 0,115 \\ \rho = 1,0 \\ G = 5,4 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

La simulazione numerica in due dimensioni è stata effettuata utilizzando il modello costitutivo Cam-Clay Modificato a due invarianti, in piccole e grandi deformazioni.

Deformazioni infinitesime			
Pressione (kPa)	Borja & Tamagnini (1998)	Simulazione numerica	DIFFERENZA %
	SPOSTAMENTO (mm)		
0	0,00	0,00	/
3	14,00	15,63	11,66
6	36,00	40,00	11,12
9	66,00	71,62	8,52
12	104,00	111,08	6,81
15	140,00	157,54	12,53
18	186,00	208,11	11,89
21	236,00	260,15	10,23
24	290,00	310,75	7,16
27	330,00	359,82	9,04
30	382,00	407,03	6,55
33	422,00	452,68	7,27
36	474,00	496,97	4,85
39	518,00	540,11	4,27
42	560,00	582,22	3,97
45	602,00	623,39	3,55
48	646,00	663,73	2,74
51	684,00	703,32	2,83
54	726,00	742,28	2,24
57	762,00	780,72	2,46
60	798,00	818,80	2,61
63	834,00	856,49	2,70
66	870,00	893,82	2,74
69	908,00	930,79	2,51
72	944,00	967,44	2,48
75	982,00	1003,80	2,22
78	1016,00	1039,90	2,35
81	1054,00	1075,74	2,06
84	1090,00	1111,35	1,96
87	1124,00	1146,74	2,02
90	1156,00	1181,91	2,24

Tabella 7.2.2.1: Valori di pressione esterna  $\Delta q$  e spostamento e relative differenze percentuali. Confronto no LAD Borja & Tamagnini/simulazione numerica in deformazioni infinitesime.

Deformazioni finite			
	Borja & Tamagnini (1998)	Simulazione numerica	
Pressione (kPa)	SPOSTAMENTO (mm)		DIFFERENZA %
0	0,00	0,00	/
3	14,00	15,66	11,82
6	36,00	40,08	11,34
9	64,00	71,64	11,94
12	102,00	111,15	8,97
15	140,00	157,94	12,81
18	182,00	208,63	14,63
21	232,00	259,47	11,84
24	284,00	307,77	8,37
27	330,00	353,89	7,24
30	380,00	397,66	4,65
33	420,00	439,35	4,61
36	464,00	479,22	3,28
39	498,00	517,50	3,92
42	540,00	554,37	2,66
45	574,00	589,96	2,78
48	610,00	624,40	2,36
51	644,00	657,77	2,14
54	676,00	690,17	2,10
57	708,00	721,66	1,93
60	738,00	752,28	1,94
63	768,00	782,09	1,83
66	798,00	811,11	1,64
69	828,00	839,40	1,38
72	854,00	867,00	1,52
75	880,00	893,96	1,59
78	908,00	920,32	1,36
81	934,00	946,11	1,30
84	958,00	971,37	1,40
87	982,00	996,13	1,44
90	1000,00	1020,44	2,04

Tabella 7.2.2.2: Valori di pressione esterna  $\Delta q$  e spostamento e relative differenze percentuali. Confronto no LAD Borja & Tamagnini/simulazione numerica in deformazioni finite.

I risultati ottenuti dalla simulazione numerica risultano molto attendibili, sia per la teoria delle deformazioni infinitesime sia per le deformazioni finite. In entrambi i casi infatti, dopo un assestamento iniziale, l'errore che si commette (Tabelle 7.2.2.1 e 7.2.2.2) è di circa il 2%.

Dalla Figura 7.2.2.2 si nota come l'analisi in piccole deformazioni restituisca valori di spostamento maggiori del 16% a parità di carico. Le stesse considerazioni possono essere colte anche dalla configurazione deformata (Figura 7.2.2.3).



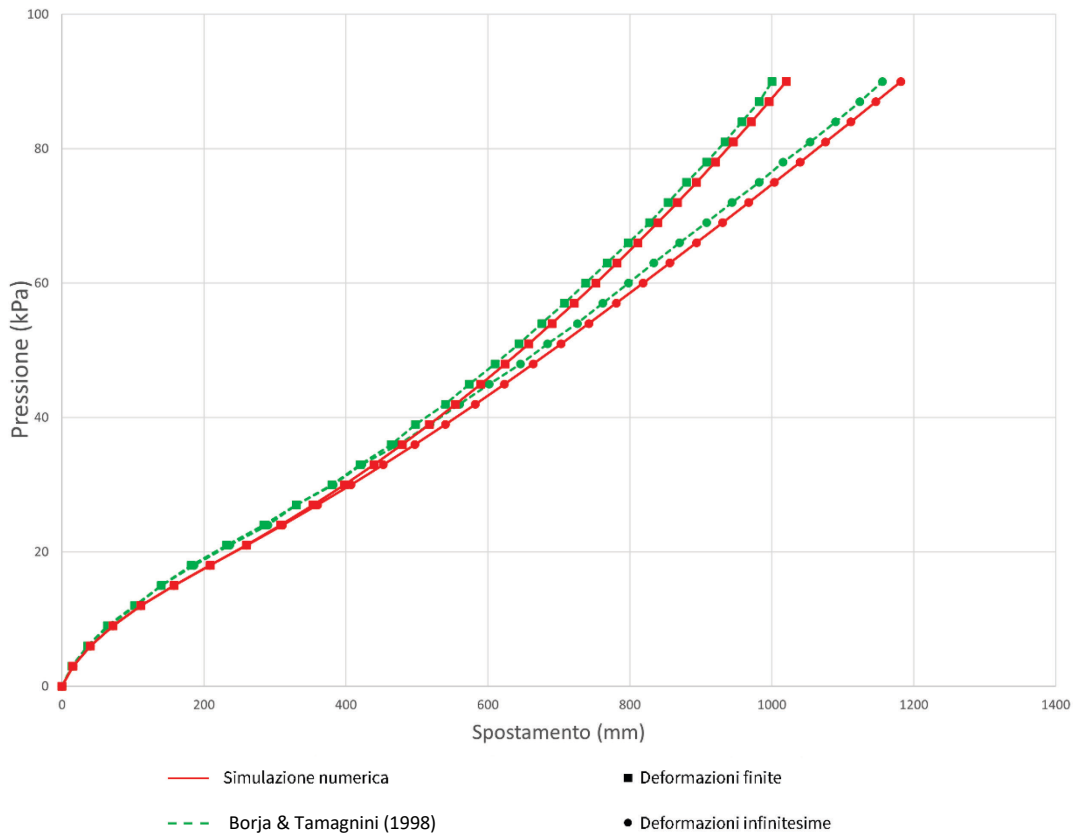


Figura 7.2.2.2: Diagramma pressione esterna  $\Delta q$ -spostamento verticale. Confronto no LAD Borja & Tamagnini/simulazione numerica e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

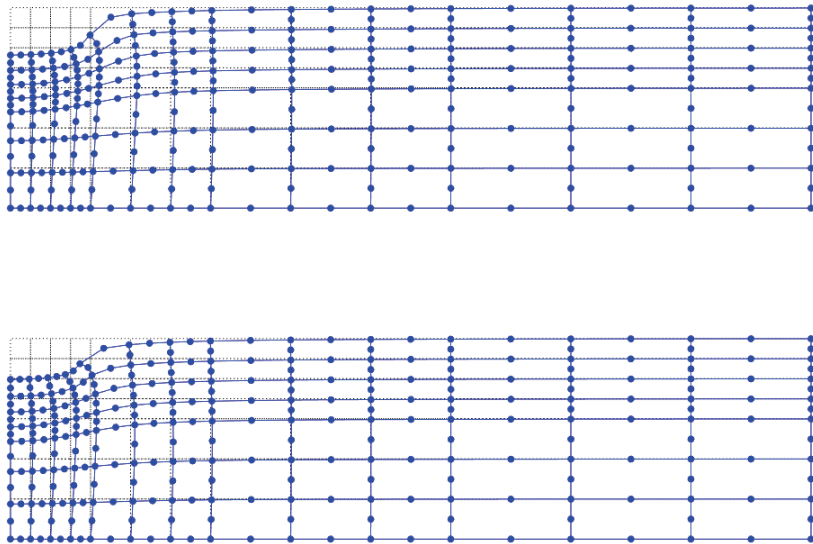


Figura 7.2.2.3: Configurazione deformata nell'analisi no LAD. In alto: analisi in piccole deformazioni; in basso: analisi in grandi deformazioni.

Al fine di ottenere un confronto, lo stesso test è stato ripetuto estendendo l'analisi al terzo invariante, ma introducendo una pressione uniformemente distribuita su tutta la superficie in modo da equilibrare la pressione iniziale presente nel terreno.

In questo caso quindi l'inizializzazione viene effettuata mediante un'analisi in piccole deformazioni in cui si applica, oltre al peso proprio, anche la pressione uniformemente distribuita sulla superficie superiore.

I parametri del modello sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 1,05 \\ \bar{\kappa} = 0,0177 \\ \hat{\kappa} = 0,018 \\ \tilde{\lambda} = 0,115 \\ \hat{\lambda} = 0,115 \\ \rho = 0,9 \\ G = 5,4 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

Deformazioni infinitesime			
Pressione (kPa)	NO LAD	W-W LAD	DIFFERENZA %
	SPOSTAMENTO (mm)		
0	0,00	12,30	/
3	40,01	51,65	29,09
6	81,21	87,95	8,30
9	121,72	126,18	3,67
12	161,41	163,90	1,54
15	200,29	203,46	1,58
18	238,36	243,62	2,20
21	275,65	284,02	3,04
24	312,18	323,36	3,58
27	347,97	364,24	4,68
30	383,08	404,26	5,53
33	417,53	444,83	6,54
36	451,37	484,07	7,24
39	484,64	524,48	8,22
42	517,37	563,61	8,94
45	549,60	604,50	9,99
48	581,39	639,20	9,94
51	612,78	672,23	9,70
54	643,80	704,88	9,49
57	674,48	737,06	9,28
60	704,84	769,02	9,11
63	734,91	800,81	8,97
66	764,70	832,42	8,86
69	794,21	863,74	8,75
72	823,48	894,87	8,67
75	852,49	925,85	8,61
78	881,27	956,69	8,56
81	909,82	987,34	8,52
84	938,15	1017,78	8,49
87	966,26	1048,15	8,47
90	994,18	1078,51	8,48

Tabella 7.2.2.3: Valori di pressione esterna  $\Delta q$  e spostamento e relative differenze percentuali. Confronto no LAD/W-W LAD in deformazioni infinitesime.

Deformazioni finite			
Pressione (kPa)	NO LAD	W-W LAD	DIFFERENZA %
	SPOSTAMENTO (mm)		
0	0,00	12,23	/
3	41,19	59,10	43,50
6	83,19	98,08	17,90
9	124,00	138,37	11,59
12	163,49	178,22	9,01
15	201,70	219,04	8,59
18	238,68	259,22	8,60
21	274,49	300,08	9,32
24	309,17	339,39	9,78
27	342,80	378,00	10,27
30	375,43	415,24	10,60
33	407,14	451,84	10,98
36	438,00	486,79	11,14
39	468,05	517,80	10,63
42	497,34	546,96	9,98
45	525,91	576,21	9,57
48	553,79	604,32	9,12
51	581,03	631,76	8,73
54	607,68	658,66	8,39
57	633,75	684,94	8,08
60	659,27	710,80	7,82
63	684,24	736,15	7,59
66	708,72	761,04	7,38
69	732,70	785,50	7,21
72	756,22	809,31	7,02
75	779,31	833,17	6,91
78	802,00	856,31	6,77
81	824,31	878,93	6,63
84	846,26	901,85	6,57
87	867,87	924,28	6,50
90	889,14	946,04	6,40

Tabella 7.2.2.4: Valori di pressione esterna  $\Delta q$  e spostamento e relative differenze percentuali. Confronto no LAD/W-W LAD in deformazioni finite.

Dalle tabelle 7.2.2.3 e 7.2.2.4 e dalla Figura 7.2.2.4 è possibile notare che le analisi condotte considerando l'influenza della funzione di scala di Willam & Warnke restituiscono valori di spostamento maggiori a parità di carico, sia nel caso in cui si considerino le piccole deformazioni sia per le grandi deformazioni. Il comportamento complessivo resta comunque inalterato.

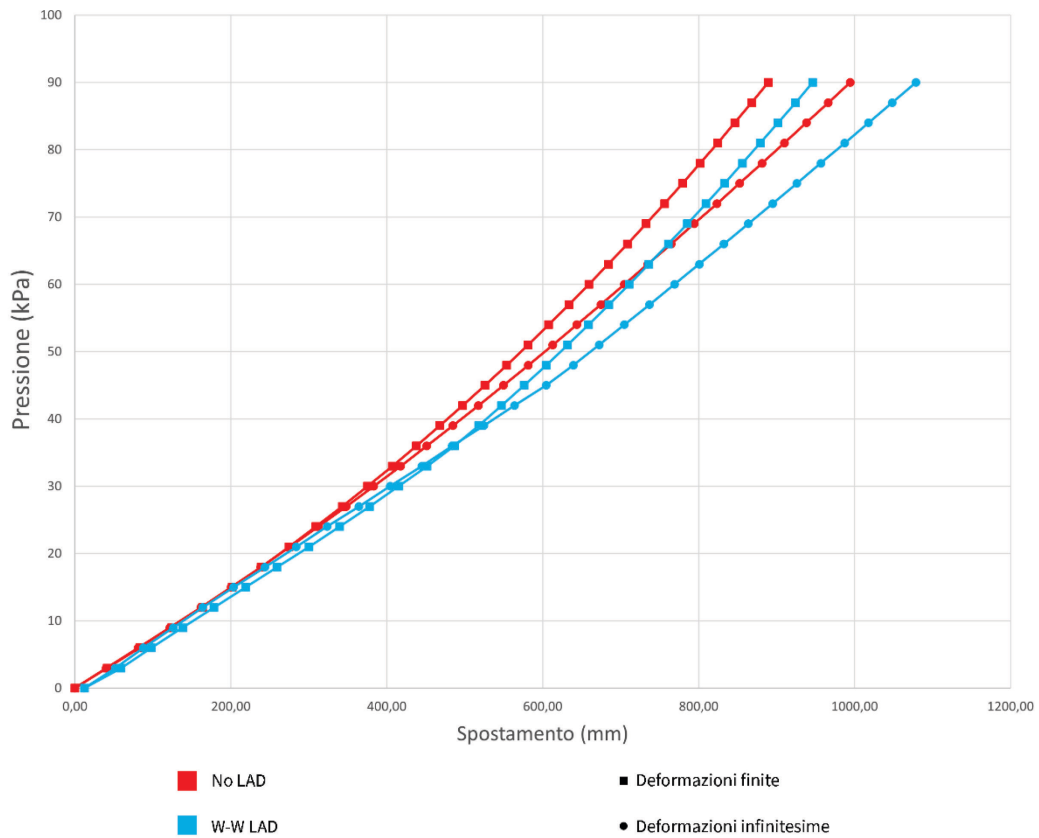


Figura 7.2.2.4: Diagramma pressione esterna  $\Delta q$ -spostamento verticale. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

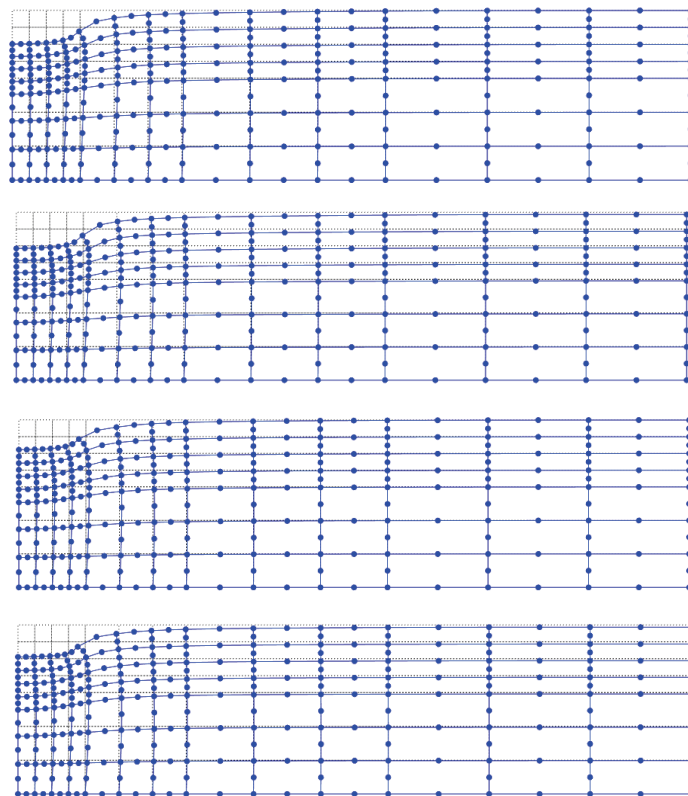


Figura 7.2.2.5: Configurazione deformata. Dall'alto verso il basso: piccole deformazioni a due invarianti, piccole deformazioni a tre invarianti, grandi deformazioni a due invarianti, grandi deformazioni a tre invarianti.

### 7.2.3 Consolidazione di un terreno soggetto a spostamenti imposti in stato piano di deformazione

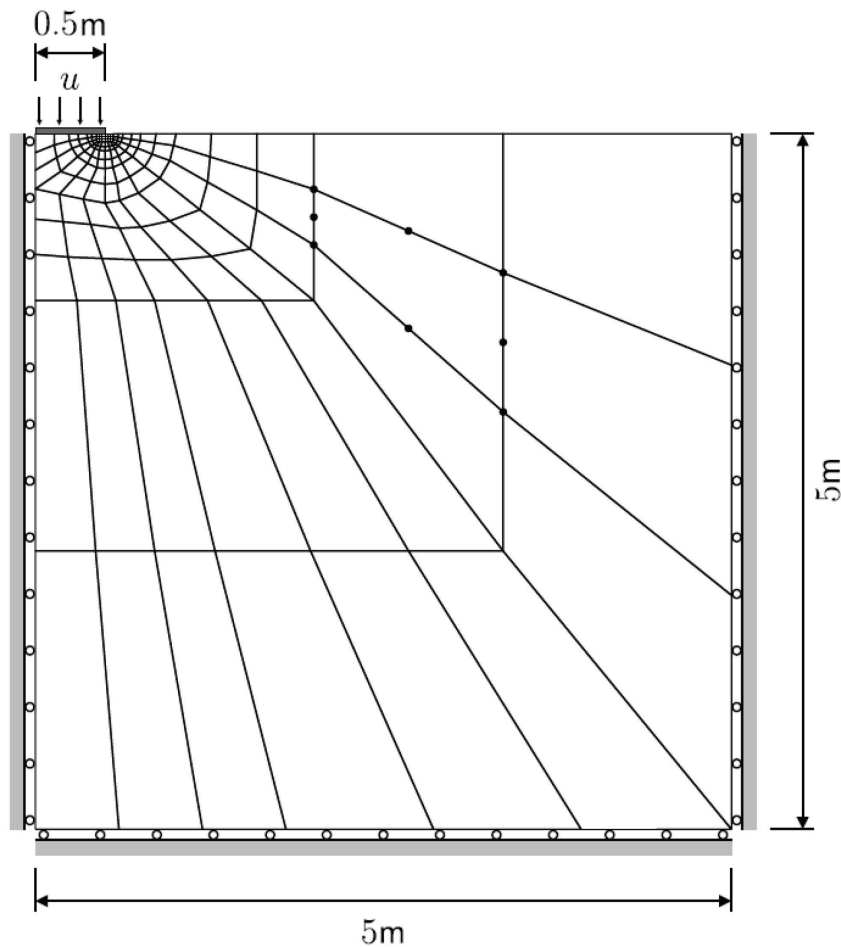


Figura 7.2.3.1: Condizioni di carico. Spostamento imposto variabile  $u(t)$  [9].

Si conduce l'analisi in piccole deformazioni della deformazione piana di un elemento finito costituito da un basamento a nastro rigido di larghezza pari a 1 m che si appoggia su di un terreno di cui viene trascurato il peso, al fine di provare l'attendibilità del modello con un problema agli elementi finiti più complesso. Considerata la simmetria, si analizza solo metà del problema.

Consideriamo una porzione di terreno di larghezza e profondità pari a 5 m. La discretizzazione avviene per mezzo di 135 elementi quadrilateri a 8 nodi, con quattro punti di quadratura. La fascia considerata si assume essere rigida e ha uno spostamento verticale imposto  $u(t)$  di 300 mm, che avviene per mezzo di 100 incrementi uguali (Figura 7.2.3.1).

I parametri del terreno sono:

$$\begin{cases} M = 0,4458 \\ \kappa = 0,0322 \\ \lambda = 0,161 \\ \rho = 0,7953 \\ G = 2,329 \text{ MPa} \\ p_c = 400 \text{ kPa} \\ \varepsilon_{v0}^e = 0 \end{cases}$$

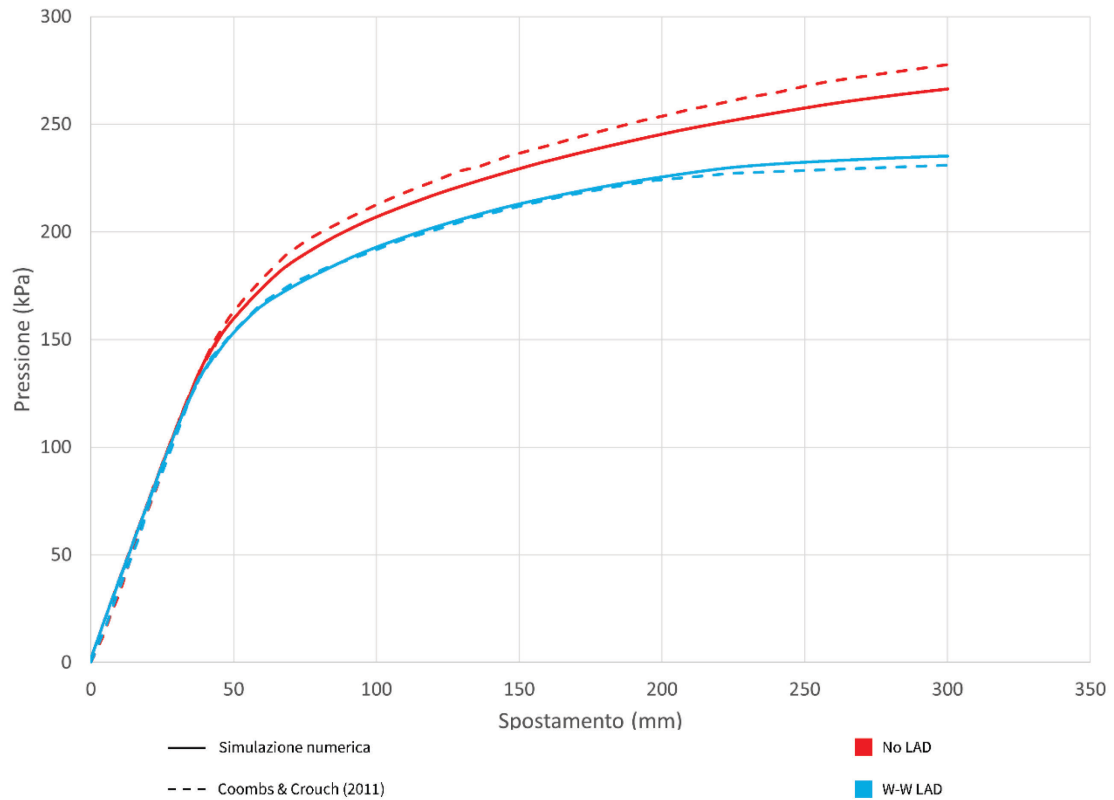


Figura 7.2.3.2: Diagramma pressione interna-spostamento imposto orizzontale  $u(t)$ . Confronto Coombs & Crouch e no LAD/W-W LAD.

La simulazione restituisce risultati particolarmente attendibili, soprattutto per quanto concerne l'analisi condotta con il modello costitutivo Cam-Clay Modificato a tre invarianti. Al termine dell'analisi a due invarianti essa differisce di circa il 4% dai risultati riportati nell'articolo di Coombs e Crouch, mentre il modello W-W LAD commette un errore inferiore al 2%. Le tensioni interne al provino risultano maggiori nell'analisi no LAD (Figura 7.2.3.3).

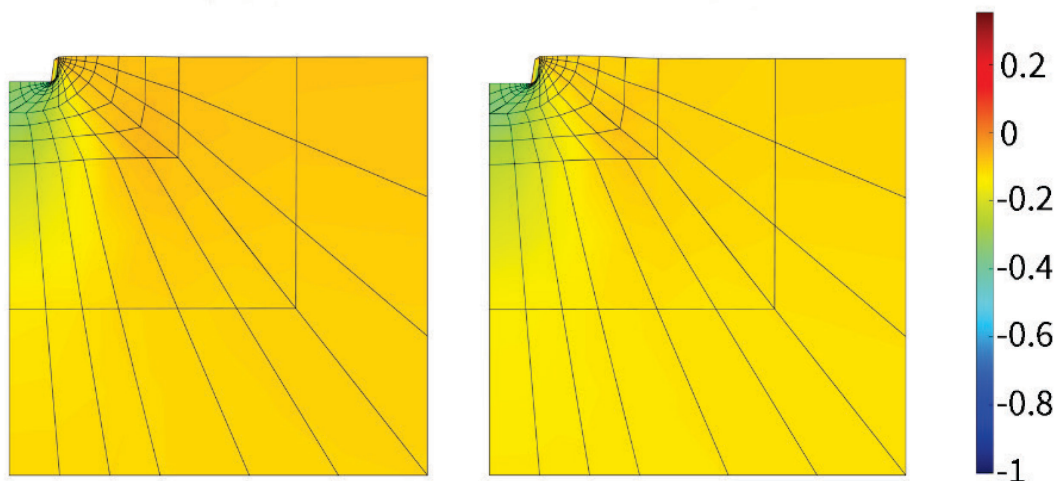


Figura 7.2.3.3: Configurazione deformata e andamento della tensione  $\sigma_z$ . A sinistra: analisi a due invarianti; a destra: analisi a tre invarianti.

## 8. ESEMPI NUMERICI

L'obiettivo di questo capitolo, oltre ad illustrare tutte le potenzialità del modello costitutivo elastoplastico implementato, è quello di studiare alcuni aspetti legati alla consolidazione del terreno soggetto ad azioni esterne. L'utilizzo del modello costitutivo Cam-Clay a tre invarianti permette di simulare in modo accurato il comportamento meccanico del terreno, sia in campo elastico che in condizioni di rottura.

### 8.1 Consolidazione tridimensionale a compressione e a taglio di un terreno

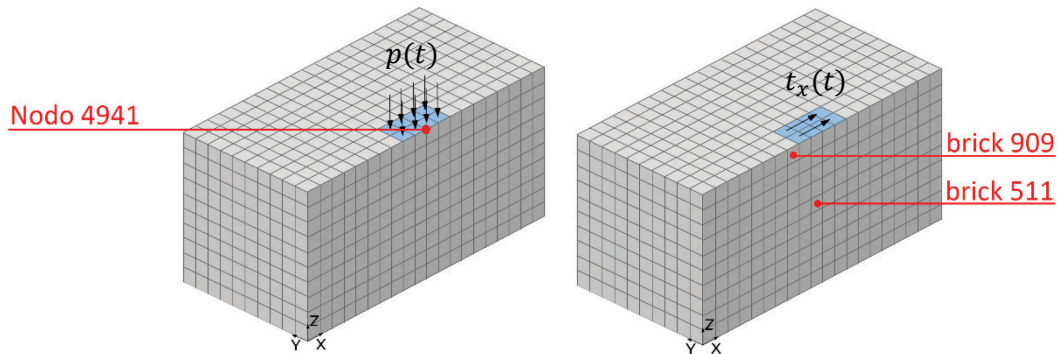


Figura 8.1.1: Condizioni di carico. A sinistra: pressione esterna variabile  $p(t)$ ; a destra: tensione di taglio esterna variabile  $t_x(t)$ .

Si considera uno spazio tridimensionale di lunghezza  $x$  pari a  $20\text{ m}$ , larghezza  $y$  pari a  $10\text{ m}$  e altezza  $z$  di  $10\text{ m}$ . Il dominio viene discretizzato mediante  $2000$  elementi *brick* a  $20$  nodi, di lato pari a  $1\text{ m}$ , per un totale di  $9581$  nodi.

La superficie di base viene vincolata alla traslazione verticale mentre le facce verticali sono vincolate alle traslazioni rispettivamente ad esse ortogonali. La superficie superiore non è vincolata, ad eccezione dei nodi appartenenti agli spigoli.

Una pressione uniforme e costante di  $50\text{ kPa}$  è distribuita su tutta la superficie superiore, in modo tale da equilibrare la pressione iniziale già presente nel terreno.

Inoltre, in corrispondenza della mezzeria di uno degli spigoli superiori lungo  $x$ ,  $8$  elementi *brick* vengono caricati da una pressione verticale di intensità pari a  $200\text{ kPa}$  (Figura 8.1.1, sinistra). La stessa area di  $8\text{ m}^2$  è anche soggetta a una forza di taglio in direzione  $x$  di intensità pari a  $20\text{ kPa}$  (Figura 8.1.1, destra). Tutte le forze vengono applicate mediante  $100$  incrementi di carico. Il peso proprio del terreno viene trascurato.

I parametri del terreno sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 1,0 \\ \tilde{\kappa} = 0,019 \\ \hat{\kappa} = 0,02 \\ \tilde{\lambda} = 0,038 \\ \hat{\lambda} = 0,04 \\ \rho = 0,9 \\ G = 5,0\text{ MPa} \\ p_c = 50\text{ kPa} \\ \varepsilon_{v0}^e = 0 \end{array} \right.$$

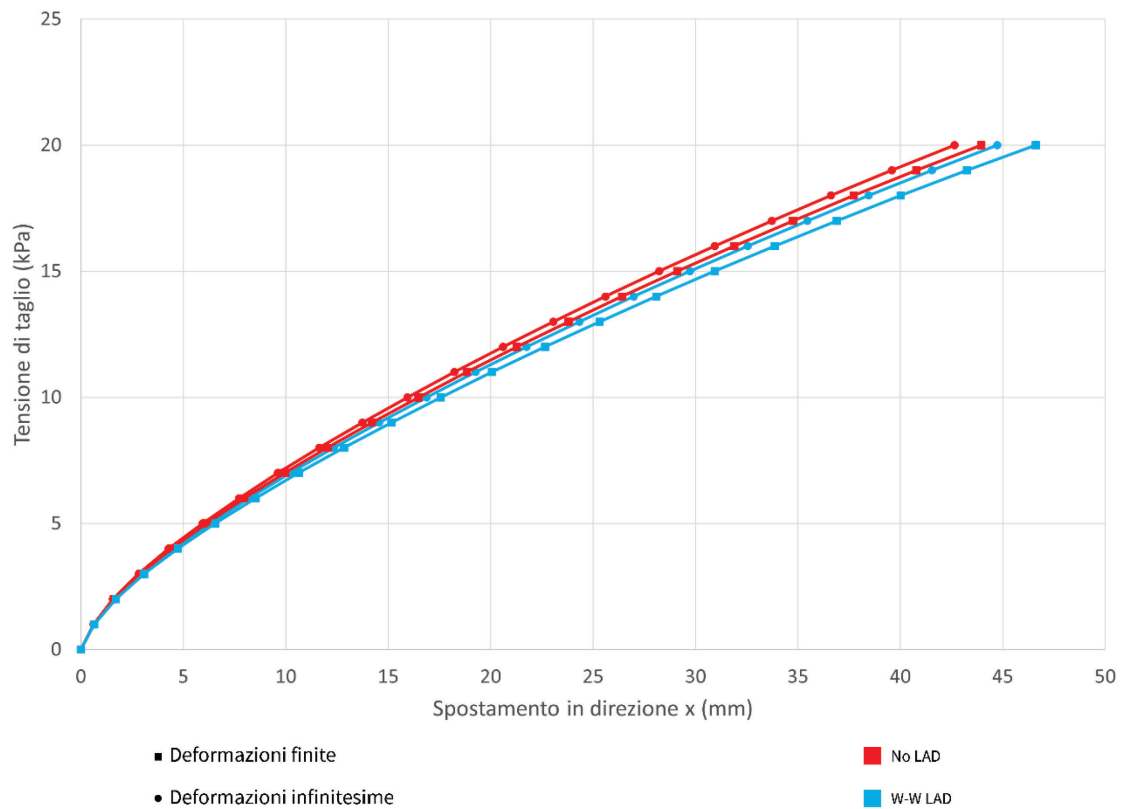


Figura 8.1.2: Diagramma tensione di taglio esterna  $t_x(t)$ -spostamento orizzontale. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinite/deformazioni finite.

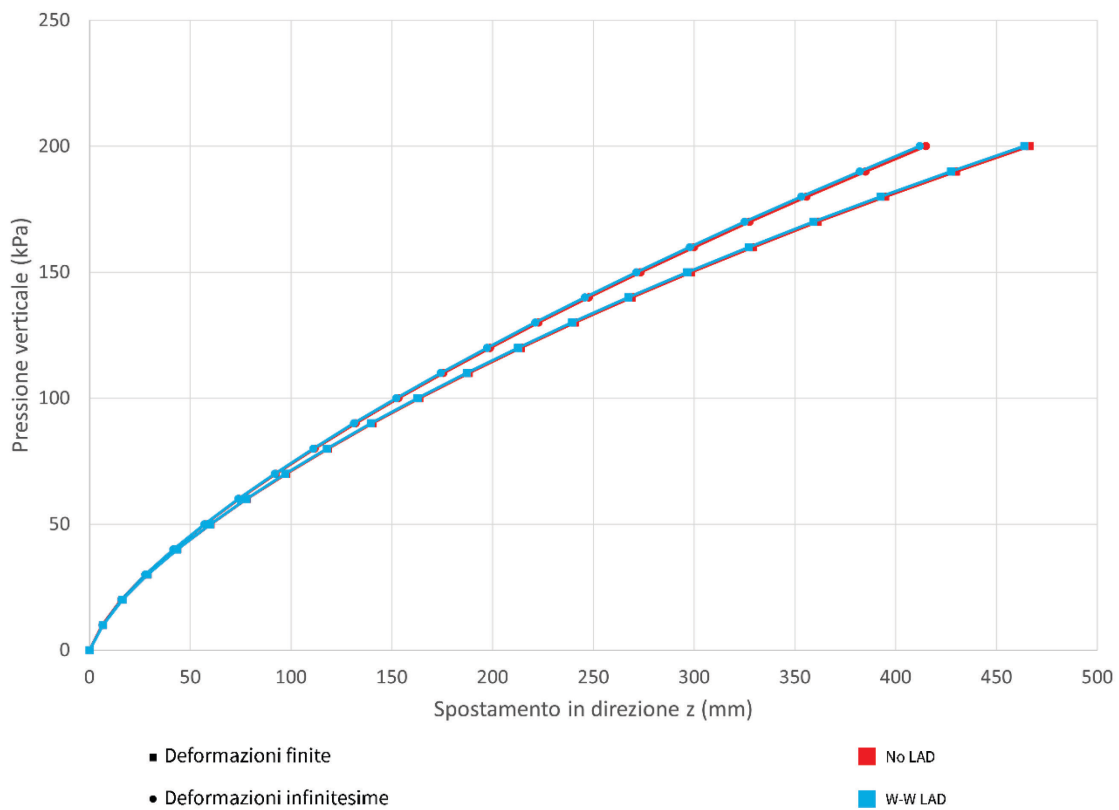


Figura 8.1.3: Diagramma pressione esterna  $p(t)$ -spostamento verticale. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinite/deformazioni finite.



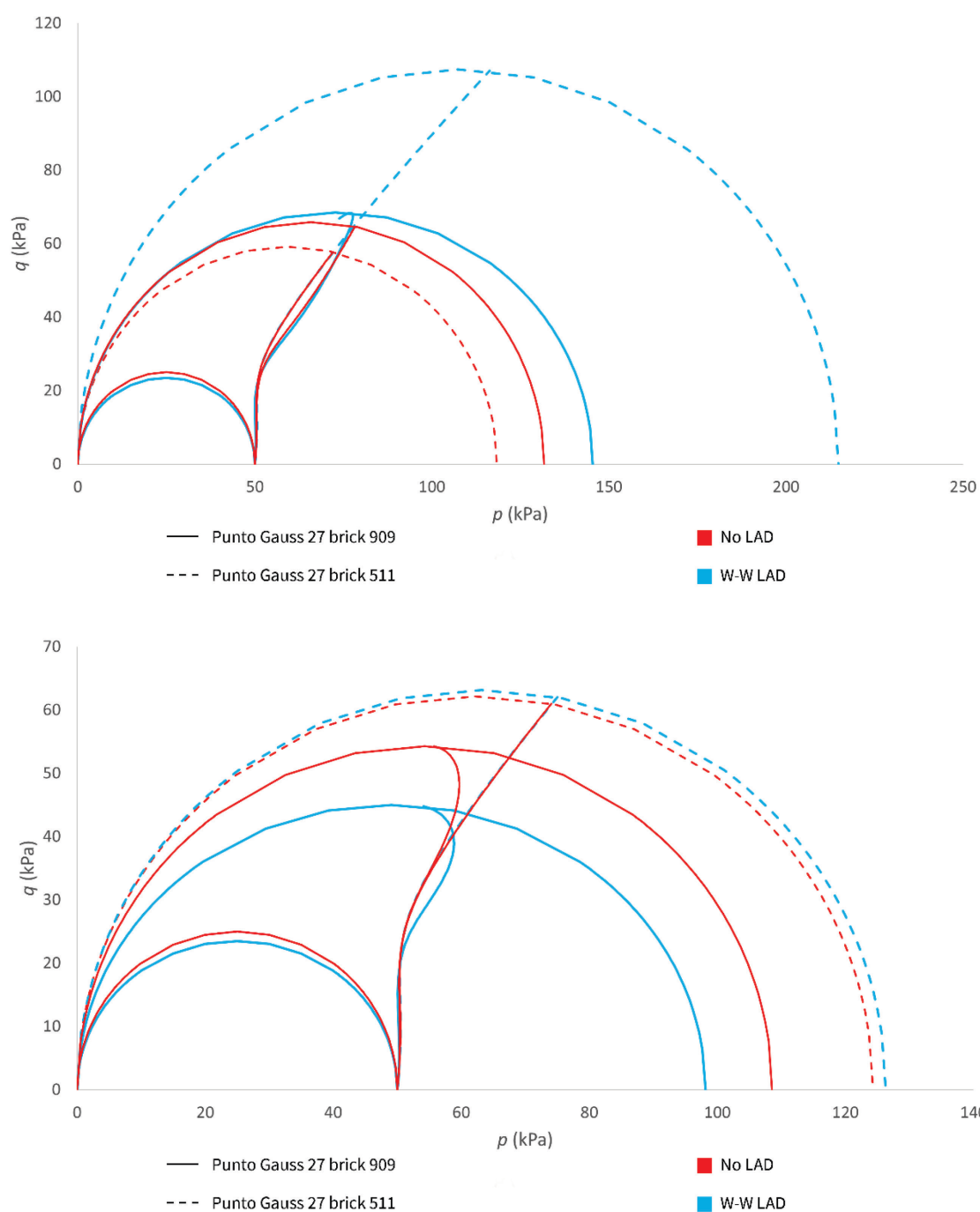


Figura 8.1.4: Percorso tensionale nel piano  $p - q$  e superfici di snervamento iniziale e di massima espansione. Confronto no LAD/W-W LAD e punto Gauss 27 brick 909/511. In alto: analisi in piccole deformazioni; in basso: analisi in grandi deformazioni.

I diagrammi tensione-spostamento sono stati realizzati per il nodo 4941 (Figura 8.1.1), situato su uno spigolo superiore della *mesh*, di coordinate  $(10\text{ m}; 0\text{ m}; 10\text{ m})$ .

Si osserva come, per quanto concerne lo spostamento verticale (Figura 8.1.3), il terzo invariante di tensione non influisca in modo considerevole sulle deformazioni, per cui si ottengono risultati quasi sovrapposti. Negli spostamenti orizzontali invece la differenza è più evidente, per cui si

arriva a deformazioni maggiori a parità di carico per i modelli W-W LAD. La differenza fra le due analisi in piccole deformazioni è del 5%, ed in deformazioni finite sale al 6%.

I successivi grafici realizzati sono relativi a due punti Gauss considerati su elementi diversi (Figura 8.1.1): il punto Gauss 27 dell'elemento 511, che è un elemento di bordo ubicato sotto l'influenza diretta del carico a una profondità di 4 m, e il punto Gauss 27 dell'elemento 909, scostato rispetto all'area caricata. Il primo dei due punti citati ha coordinate (9,89 m; 0,89 m; 5,89 m) rispetto all'origine del sistema di riferimento; le coordinate del punto sull'elemento 909 sono (7,89 m; 0,89 m; 9,89 m).

Il comportamento dei due elementi finiti risulta significativamente diverso poiché il brick 511 è soggetto ad una compressione triassiale crescente per tutta la durata dell'analisi, mentre il 909 subisce una decompressione grazie all'azione di taglio applicata.

In merito alla Figura 8.1.4 si osserva che, nel piano  $p - q$ , per i due punti Gauss considerati si hanno degli stati tensionali iniziali che si equivalgono sia nelle analisi a due sia a tre invarianti, in piccole e grandi deformazioni.

Per quanto riguarda il punto Gauss appartenente all'elemento 511, si nota che la tensione raggiunta al termine dell'analisi in piccole deformazioni è significativamente maggiore considerando l'angolo di Lode, sebbene il percorso tensionale sia circa il medesimo. Al contrario in grandi deformazioni le tensioni finali si scostano di un valore esiguo, poiché l'angolo di Lode si mantiene pressoché costante di  $60^\circ$  (Figura 8.1.7); rendendo quindi unitario il valore della funzione di scala.

In merito al punto Gauss appartenente all'elemento 909, si può invece constatare che le tensioni finali non si discostano di molto nell'analisi in piccole deformazioni, ma il percorso tensionale seguito nell'analisi a tre invarianti si avvicina alla linea di stato critico. In grandi deformazioni tale situazione si verifica per entrambe le analisi e, considerate le oscillazioni di  $\theta$  (Figura 8.1.7), le tensioni finali differiscono di circa il 10%.

Per l'analisi in piccole deformazioni, il grafico tensione-deformazione plastica inerente alla componente deviatorica (Figura 8.1.5) restituisce lo stesso andamento relativamente al punto Gauss considerato sull'elemento 511, ma con uno sviluppo di deformazione plastica decisamente più rilevante nell'analisi W-W LAD. Sull'elemento 909 la distanza fra i due modelli costitutivi è ulteriormente evidente: l'analisi a tre invarianti restituisce valori di deformazione superiori di quasi quattro volte a quelli ottenuti per i due invarianti. La teoria in deformazioni finite suggerisce considerazioni simili ma si nota una minor differenza per il punto sull'elemento 511. L'elemento 909 vede un incremento delle tensioni deviatoriche più consistente nell'analisi no LAD.

In Figura 8.1.6 si nota un incremento di deformazione volumetrica a compressione con l'aumento della tensione volumetrica per entrambi gli elementi. Nell'analisi a tre invarianti la tensione deviatorica dell'elemento 909 subisce un decremento durante gli ultimi step di carico, in piccole deformazioni. Questa diminuzione dello stato tensionale si verifica per entrambi i modelli costitutivi nell'analisi in grandi deformazioni.

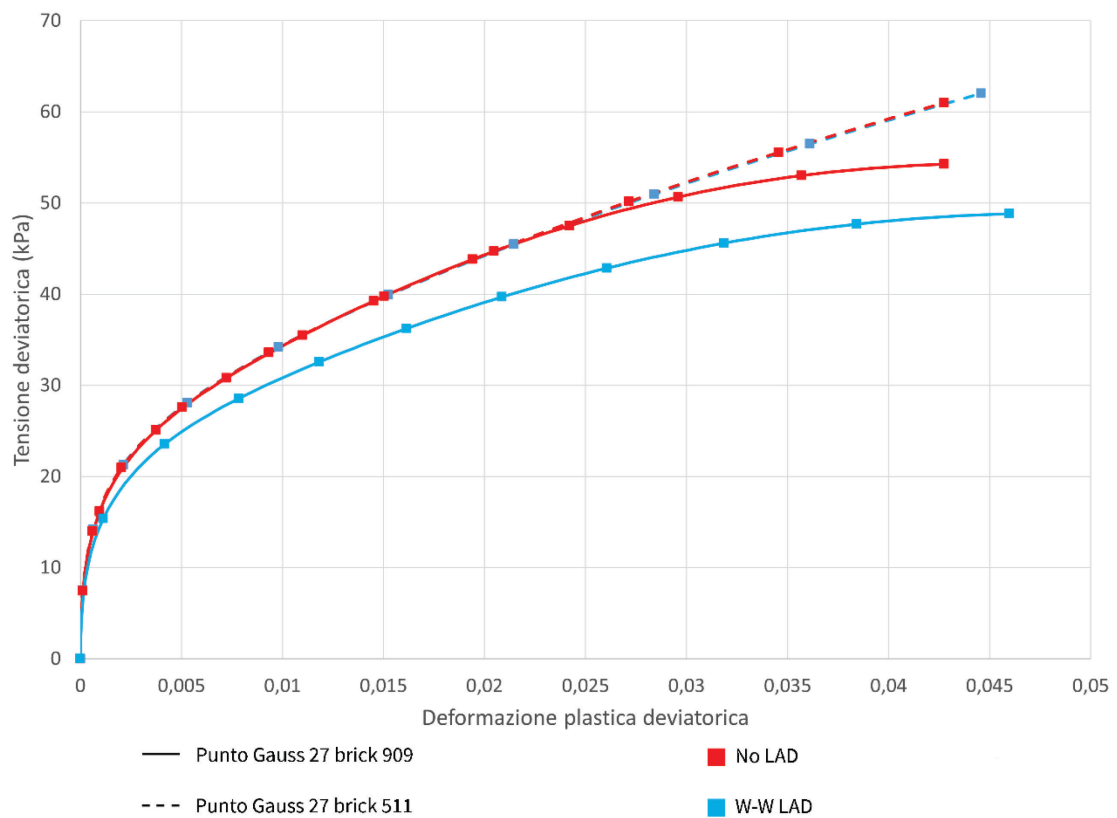
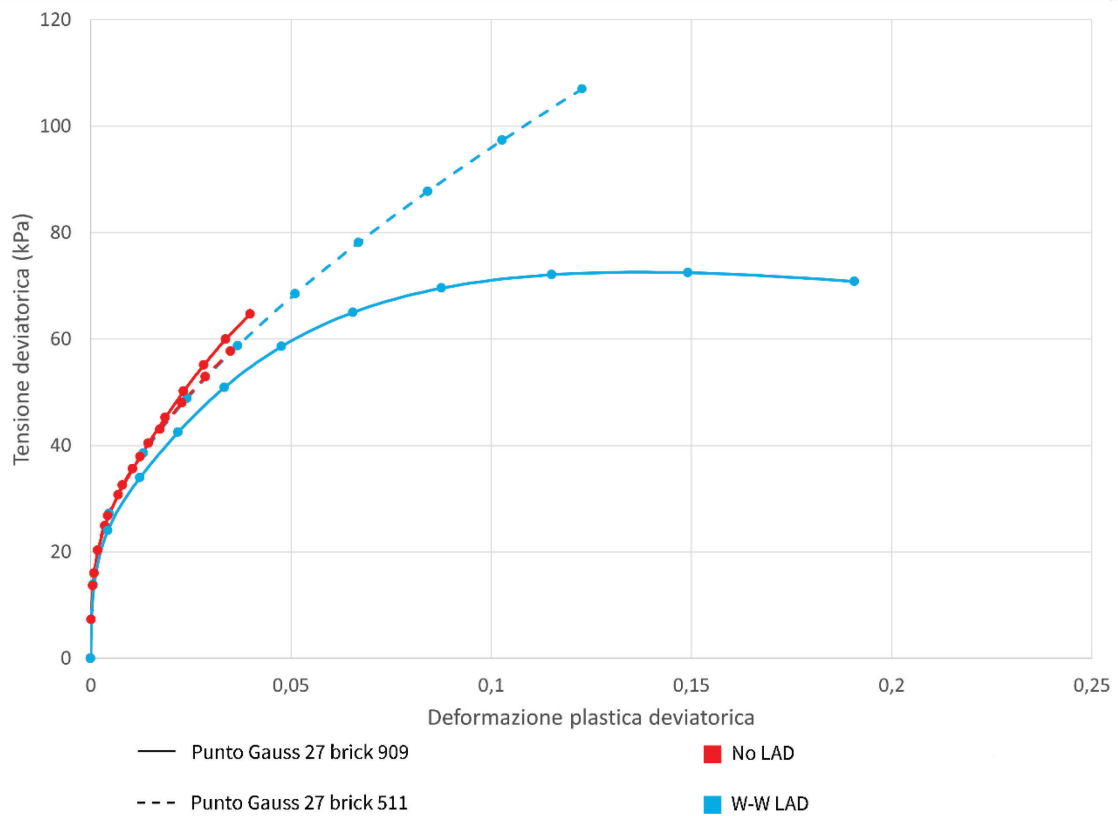


Figura 8.1.5: Diagramma tensione deviatorica-deformazione plastica deviatorica. Confronto no LAD/W-W LAD e punto Gauss 27 brick 909/511. In alto: analisi in piccole deformazioni; in basso: analisi in grandi deformazioni.

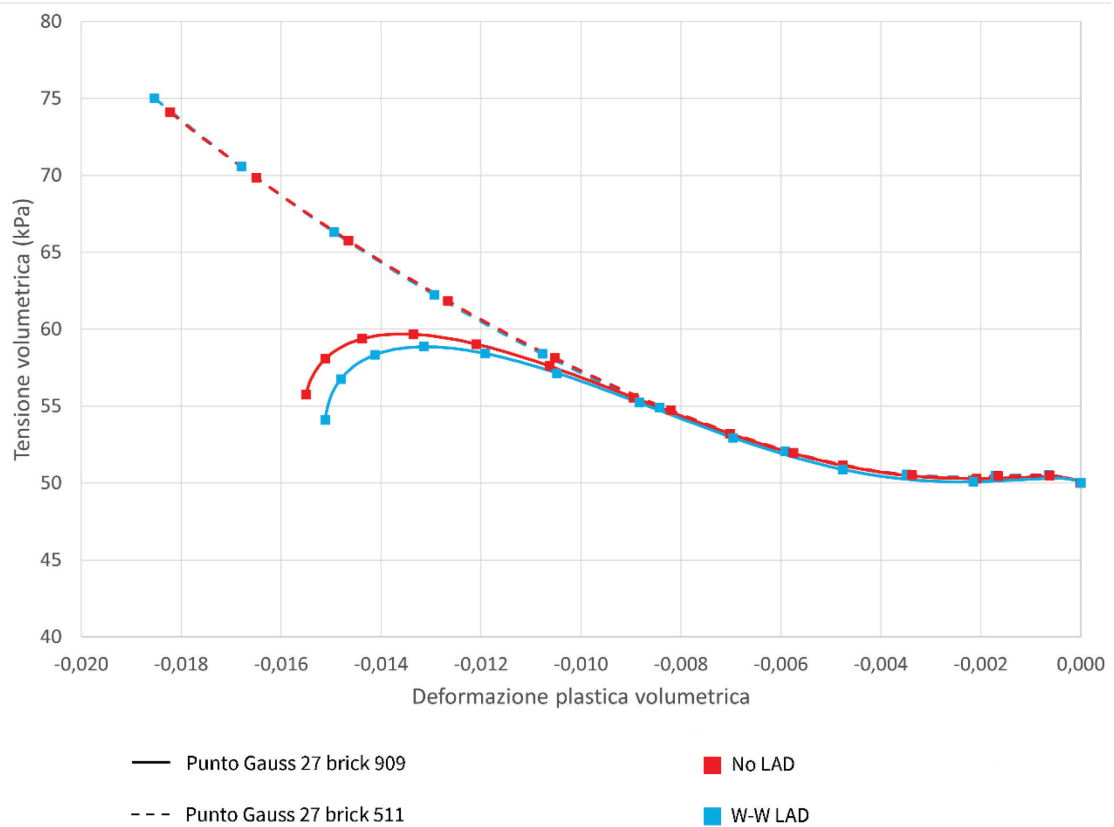
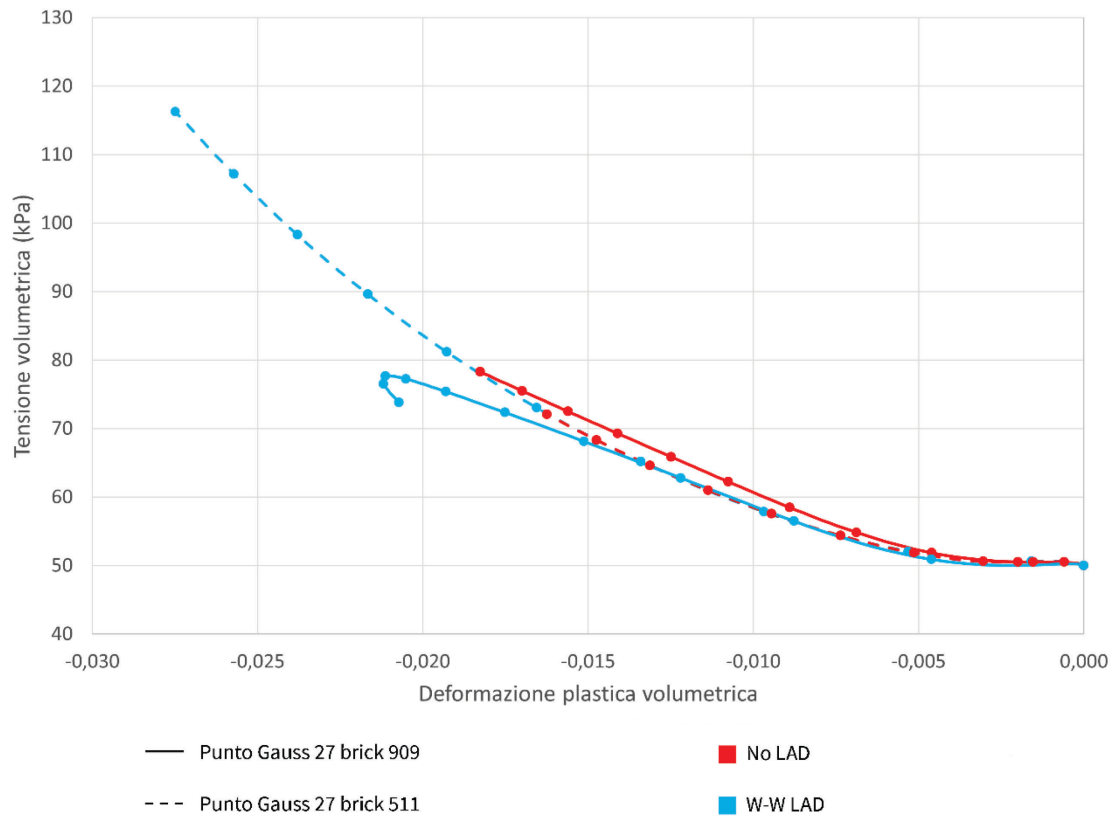


Figura 8.1.6: Diagramma tensione volumetrica-deformazione plastica volumetrica. Confronto no LAD/W-W LAD e punto Gauss 27 brick 909/511. In alto: analisi in piccole deformazioni; in basso: analisi in grandi deformazioni.

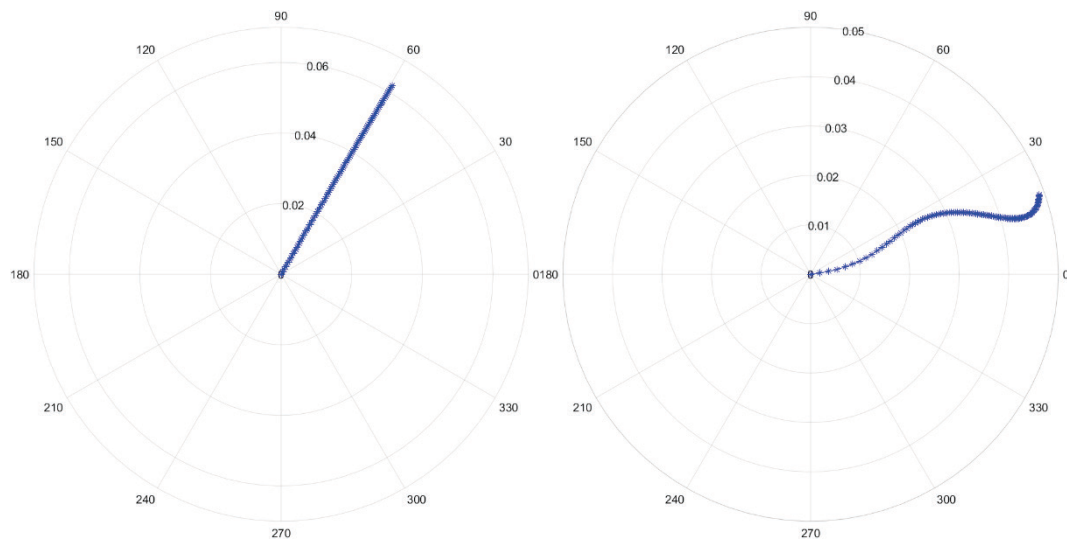


Figura 8.1.7: Diagramma polare della variazione dell'angolo di Lode e della tensione deviatorica in grandi deformazioni. A sinistra: punto Gauss 27 dell'elemento 511; a destra: punto Gauss 27 dell'elemento 909.

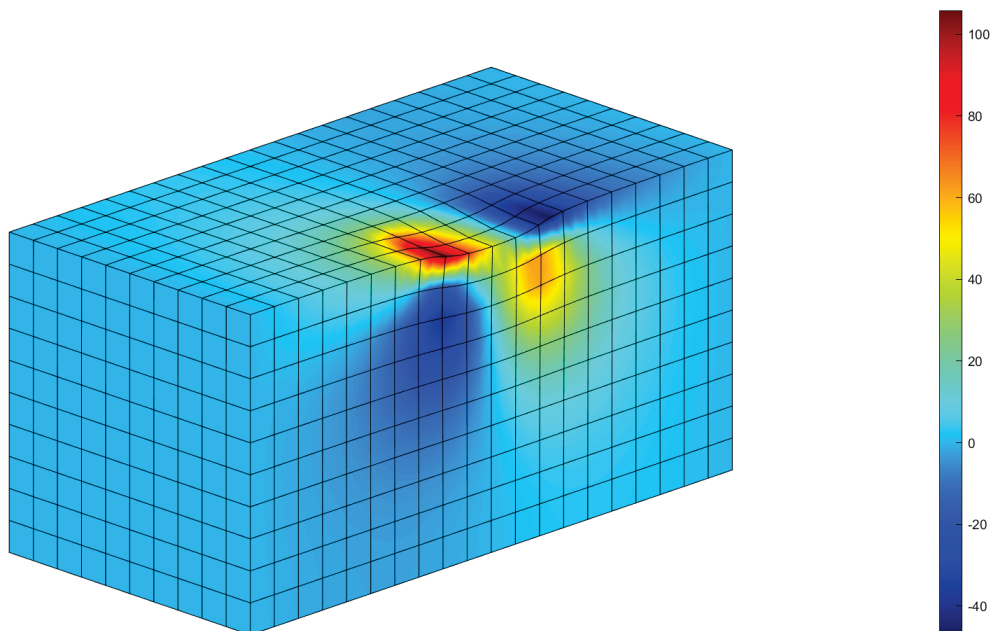


Figura 8.1.8: Configurazione deformata e mappa di colore degli spostamenti nodali in direzione orizzontale nell'analisi W-W LAD in deformazioni finite.

In Figura 8.1.8 è rappresentata la configurazione deformata assunta per l'analisi col modello costitutivo a tre invarianti in deformazioni finite, ed il *contour* degli spostamenti nodali in direzione orizzontale  $x$ . Si osserva che, a seguito dell'applicazione del taglio, si generano delle zone in compressione o in trazione ai margini dell'area caricata. Il valore degli spostamenti diminuisce via via progressivamente allontanandosi dalla zona di carico.

Relativamente alla variazione della tensione deviatorica (Figura 8.1.9, sinistra) si osserva che, ad una profondità di circa  $2,5 m$  dall'area caricata, si viene a creare una superficie a forma di semicerchio in cui si ha un picco di tensione deviatorica. Questa è una zona di possibile rottura del campione. In merito all'invariante volumetrico (Figura 8.1.9, destra), si notano i bulbi di tensione, che assume valori decrescenti all'aumentare della distanza dalle pressioni esterne.

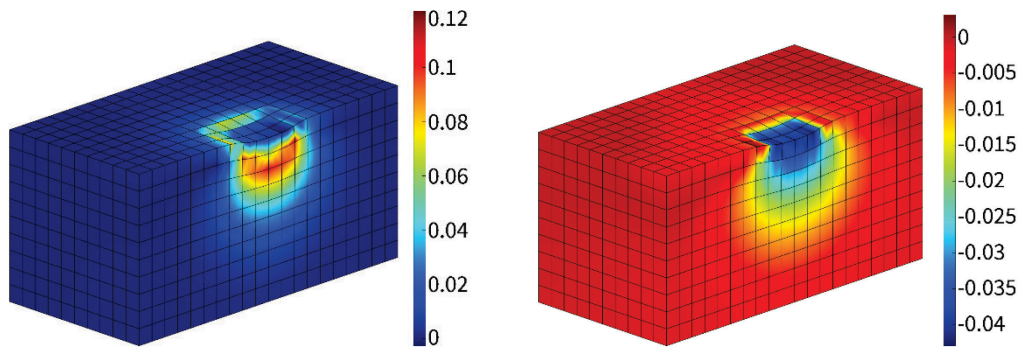


Figura 8.1.9: Configurazione deformata e mappa di colore degli invarianti di tensione nell'analisi W-W LAD in deformazioni finite. A sinistra: invariante deviatorico; a destra: invariante volumetrico.

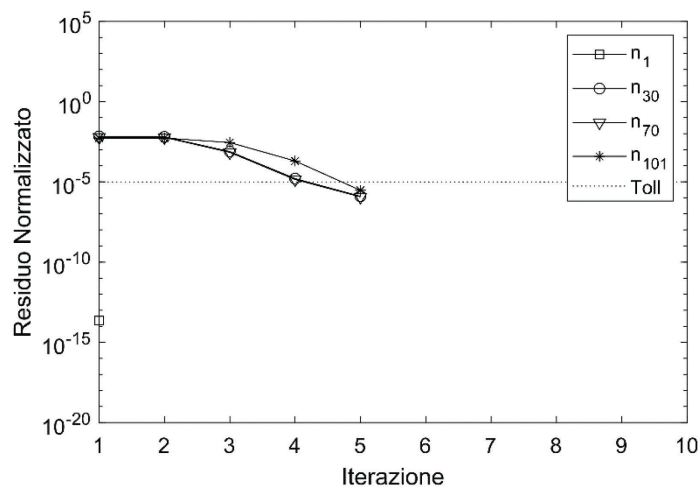


Figura 8.1.10: velocità di convergenza del metodo Newton-Raphson. Analisi a tre invarianti in deformazioni finite.

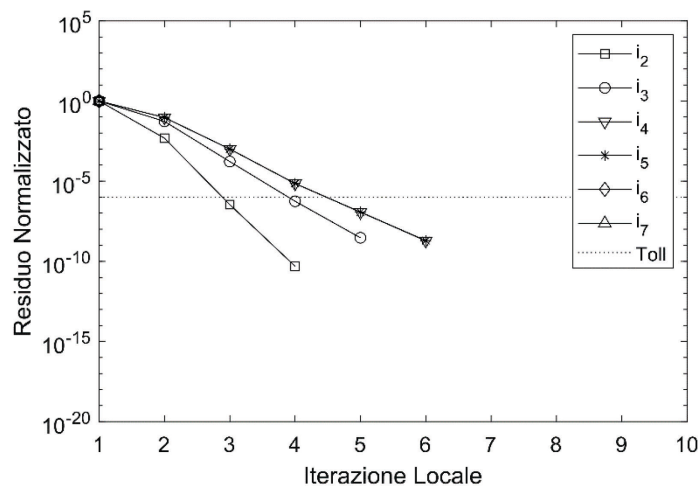


Figura 8.1.11: velocità di convergenza dell'algorithm implicito di tipo *return mapping*. Analisi a tre invarianti in deformazioni finite.

La velocità di convergenza esterna del ciclo di Newton-Raphson viene riportata in Figura 8.1.10 per i passi temporali 1, 30, 70 e 101, e risulta quadratica già dalla prima iterazione. La Figura 8.1.11 è invece relativa alla convergenza interna dell'algorithm implicito di tipo *return mapping*, per l'ultimo step di carico e per le iterazioni esterne da 2 a 7. Anch'esso converge in modo quadratico.

## 8.2 Compressione e taglio di una colonna di terreno

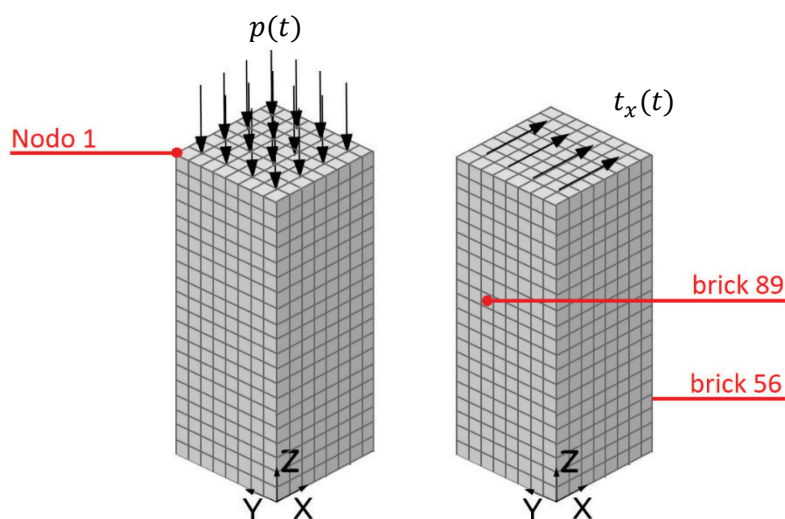


Figura 8.2.1: Condizioni di carico. A sinistra: pressione esterna variabile  $p(t)$ ; a destra: tensione di taglio esterna variabile  $t_x(t)$ .

Si considera uno spazio tridimensionale di base  $4 \times 4 \text{ m}$  e altezza  $z$  di  $10 \text{ m}$ . Il dominio viene discretizzato mediante 1280 elementi *brick* a 20 nodi, di lato pari a  $0,5 \text{ m}$ , per un totale di 6345 nodi.

La superficie di base viene vincolata rispetto a tutte le direzioni di spostamento, mentre le due facce verticali parallele al piano  $x - z$  sono vincolate alla traslazione fuori dal piano. Le rimanenti due facce verticali e la superficie superiore sono libere.

Una pressione uniforme di  $50 \text{ kPa}$  è distribuita sulle tre superfici non vincolate, in modo tale da equilibrare la pressione iniziale già presente nel terreno. Essa si mantiene costante nel tempo.

I carichi vengono applicati gradualmente mediante 160 incrementi. In particolare, si applica una pressione uniformemente distribuita  $p(t)$  in sommità, con intensità crescente nei primi 100 step fino al suo massimo valore pari a  $60 \text{ kPa}$  (Figura 8.2.1, sinistra), che mantiene per il resto dell'analisi, e una forza di taglio  $t_x(t)$  in direzione  $x$  che si mantiene nulla fino allo step 100 e poi incrementa gradualmente fino al termine dell'analisi per raggiungere i  $1,2 \text{ kPa}$  (Figura 8.2.1, destra).

Il peso proprio del terreno viene trascurato.

I parametri del terreno sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = 1,0 \\ \tilde{\kappa} = 0,0019 \\ \hat{\kappa} = 0,002 \\ \tilde{\lambda} = 0,0059 \\ \hat{\lambda} = 0,006 \\ \rho = 0,8 \\ G = 5,0 \text{ MPa} \\ p_c = 50 \text{ kPa} \\ \varepsilon_{v0}^e = 0 \end{array} \right.$$

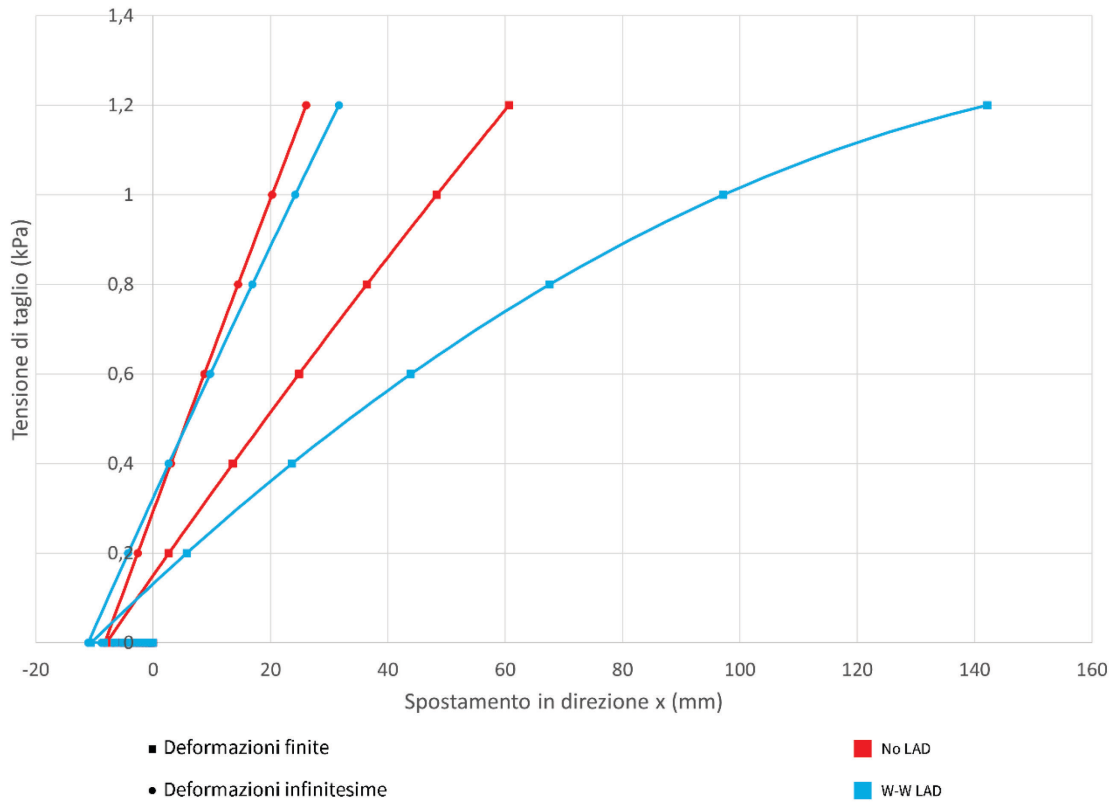


Figura 8.2.2: Diagramma tensione di taglio esterna  $t_x(t)$ -spostamento orizzontale. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.

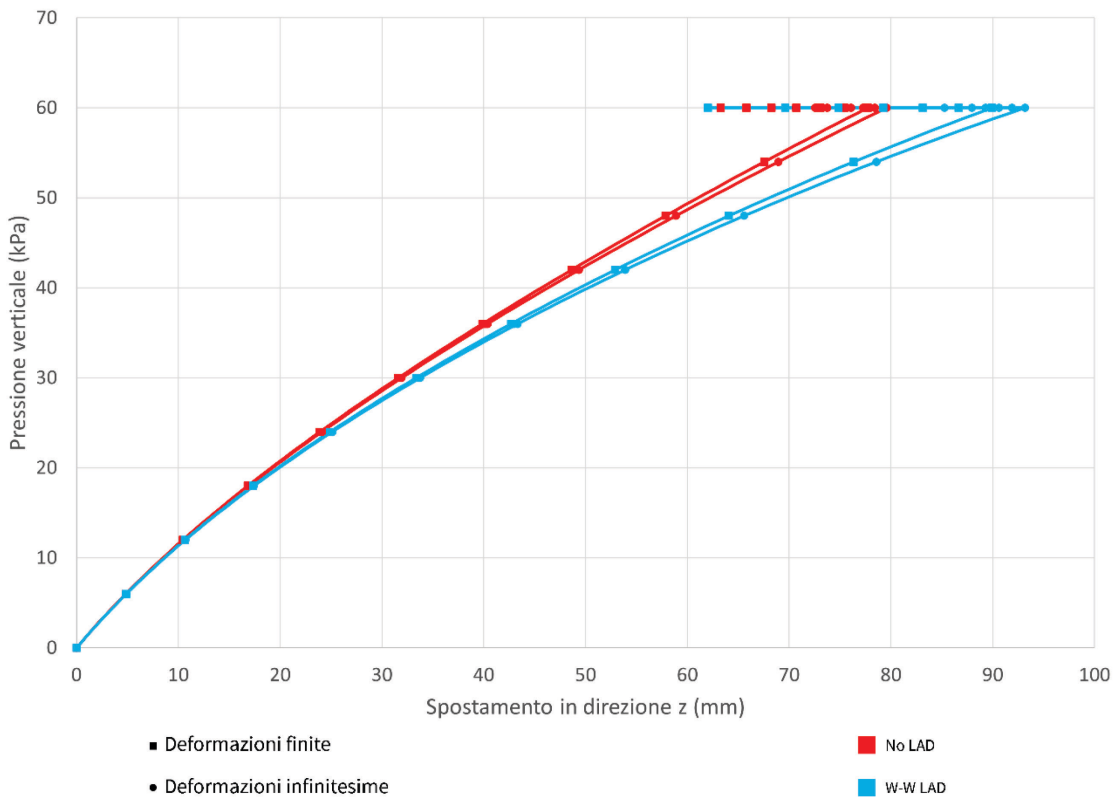


Figura 8.2.3: Diagramma pressione esterna  $p(t)$ -spostamento verticale. Confronto no LAD/W-W LAD e deformazioni infinitesime/deformazioni finite.



I diagrammi tensione-spostamento sono stati realizzati per il nodo 1 (Figura 8.2.1), situato a uno dei vertici superiori della *mesh*, di coordinate (0 m; 4 m; 10 m).

Per quanto riguarda lo spostamento orizzontale (Figura 8.2.2), si nota che, durante la fase di carico in cui il provino è soggetto alla sola compressione, il nodo si muove con verso opposto a quello del taglio. Gli ultimi 60 step temporali, con gli incrementi dell'azione tagliante, comportano un'inversione di tendenza. Tutti i diagrammi, esclusa l'analisi W-W LAD in grandi deformazioni, hanno un andamento abbastanza lineare. La teoria delle deformazioni finite mostra invece che l'influenza dell'angolo di Lode implica un comportamento quasi parabolico, con lo sviluppo di spostamenti molto maggiori. Il Cam-Clay a tre invarianti comporta un incremento degli spostamenti del 21% in deformazioni infinitesime e addirittura del 134% in deformazioni finite.

Considerazioni analoghe sono applicabili agli spostamenti verticali (Figura 8.2.3), in cui si nota che gli spostamenti maggiori si verificano per l'analisi W-W LAD in piccole deformazioni. Si può inoltre constatare che al termine della fase di compressione, il campione recupera in parte l'abbassamento sotto effetto del taglio.

I successivi grafici realizzati sono relativi a due punti Gauss considerati su elementi diversi (Figura 8.2.1): il punto Gauss 27 dell'elemento 56, che è un elemento di bordo ubicato sulla superficie compressa dall'azione tagliante, e il punto Gauss 27 dell'elemento 89, che si trova sulla faccia opposta. Le coordinate dei due punti sono rispettivamente: (0,94 m; 1,94 m; 3,94 m) per l'elemento 56 e (0,94 m; 2,94 m; 5,94 m) per l'elemento 89 rispetto all'origine del sistema cartesiano.

I due punti considerati differiscono per la tensione massima raggiunta (Figura 8.2.4) poiché il punto Gauss appartenente al *brick* 56, già compresso dall'azione verticale agente, aumenta ulteriormente il proprio stato di compressione a causa dell'azione esterna di taglio. Al contrario l'altro punto considerato, dopo aver raggiunto lo stato tensionale massimo a causa della pressione, subisce una decompressione elastica, per cui il percorso tensionale inverte la direzione ma la superficie di snervamento non si modifica. In piccole deformazioni, considerando il terzo invariante, si raggiungono livelli di tensione deviatorica leggermente inferiori rispetto all'analisi a due invarianti, per effetto dello schiacciamento della superficie plastica. In deformazioni finite l'ascendente dell'angolo di Lode è più marcato, soprattutto sull'elemento 56, portando il valore di  $p$  a -2% e di  $q$  a +8% rispetto all'analisi no LAD.

Un discorso simile riguarda lo sviluppo di deformazione deviatorica, che aumenta in modo considerevole sotto l'azione tagliante per l'elemento 56.

A conferma di quanto osservato, i grafici relativi alle deformazioni plastiche (Figure 8.2.5 e 8.2.6) esibiscono un continuo aumento della deformazione per l'elemento soggetto a compressione crescente, mentre per il *brick* 89 si interrompe al termine dell'azione di compressione esterna, con una conseguente diminuzione dello stato tensionale deviatorico interno.

La Figura 8.2.7 riporta l'andamento nel tempo dell'angolo di Lode. Si osserva che in fase di compressione del provino, la variazione è la stessa per i due elementi, mentre durante l'applicazione della forza orizzontale  $\theta$  aumenta il suo valore per il punto Gauss del *brick* 89, verso la direzione di trazione e al contrario diminuisce verso la direzione di compressione per l'elemento 56.

Infine, nelle Figure 8.2.8 e 8.2.9 vengono riportate la *mesh* deformata ed i *contour* delle deformazioni plastiche. Si possono qui apprezzare le zone che sviluppano maggiore plasticità.

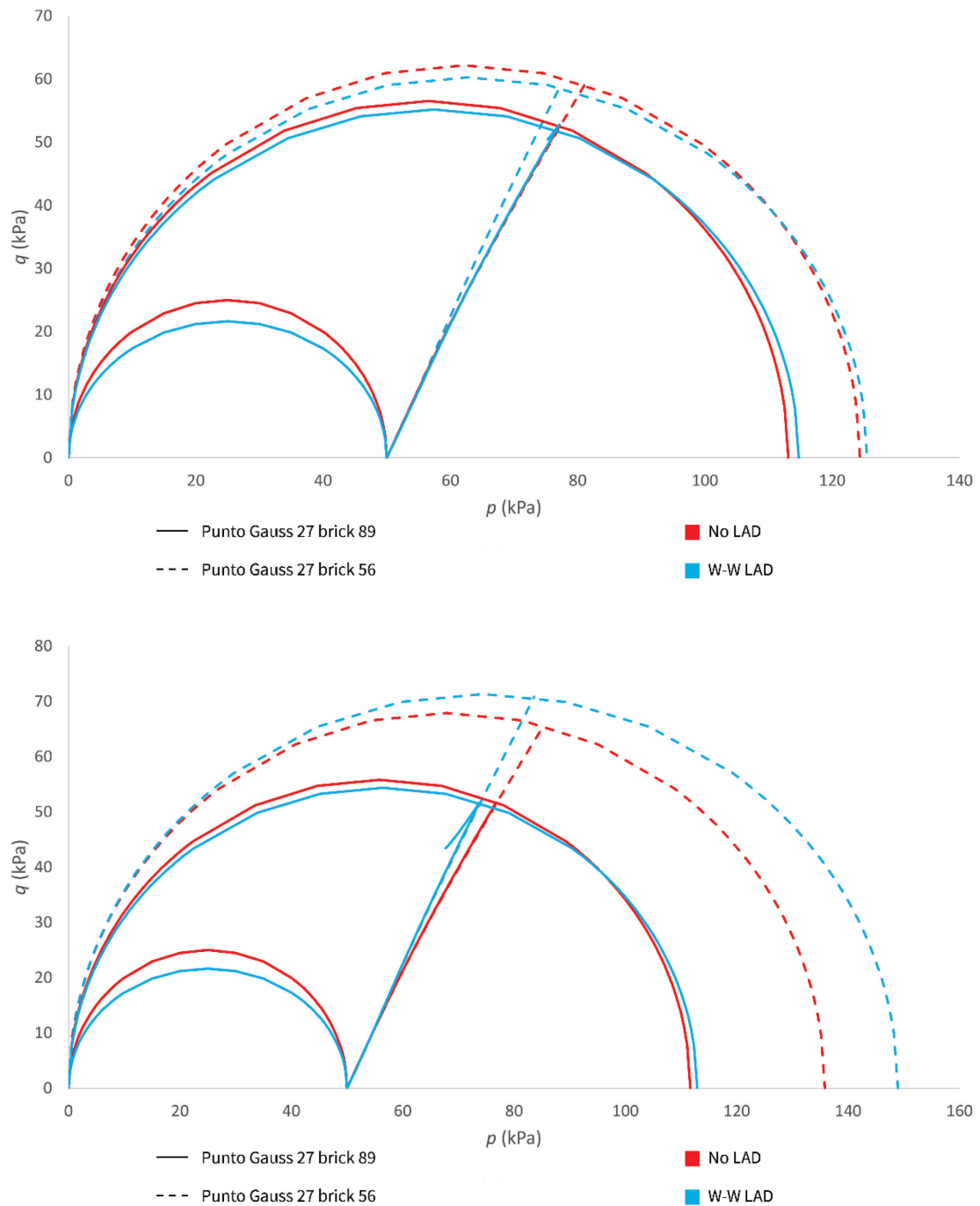
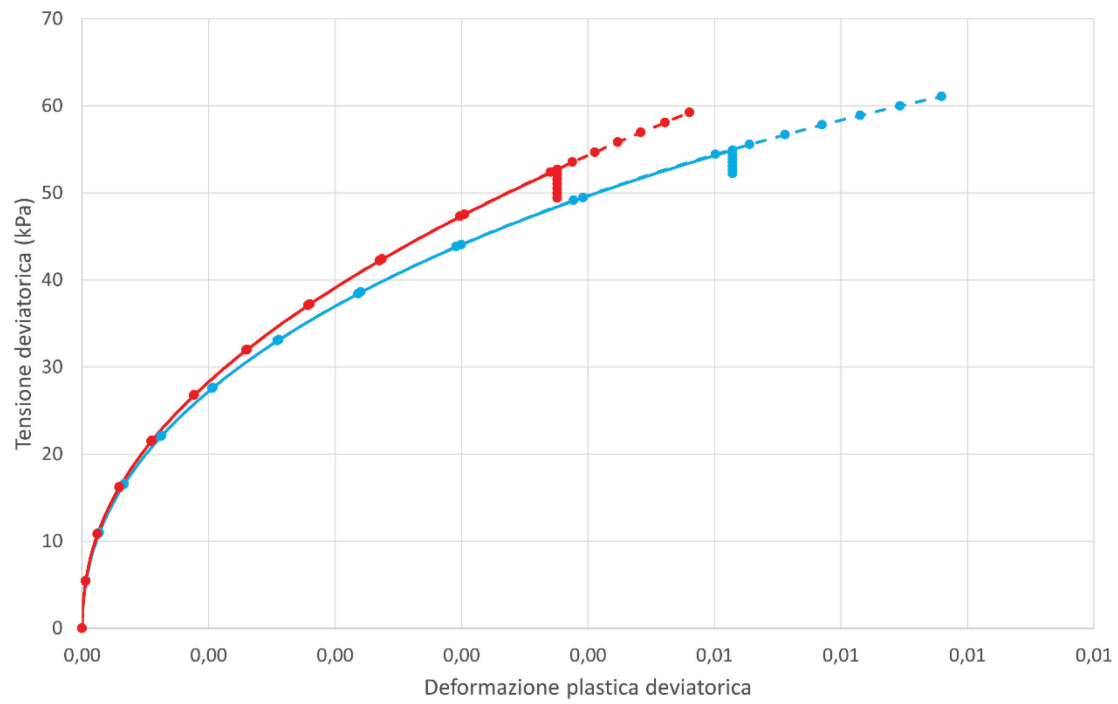
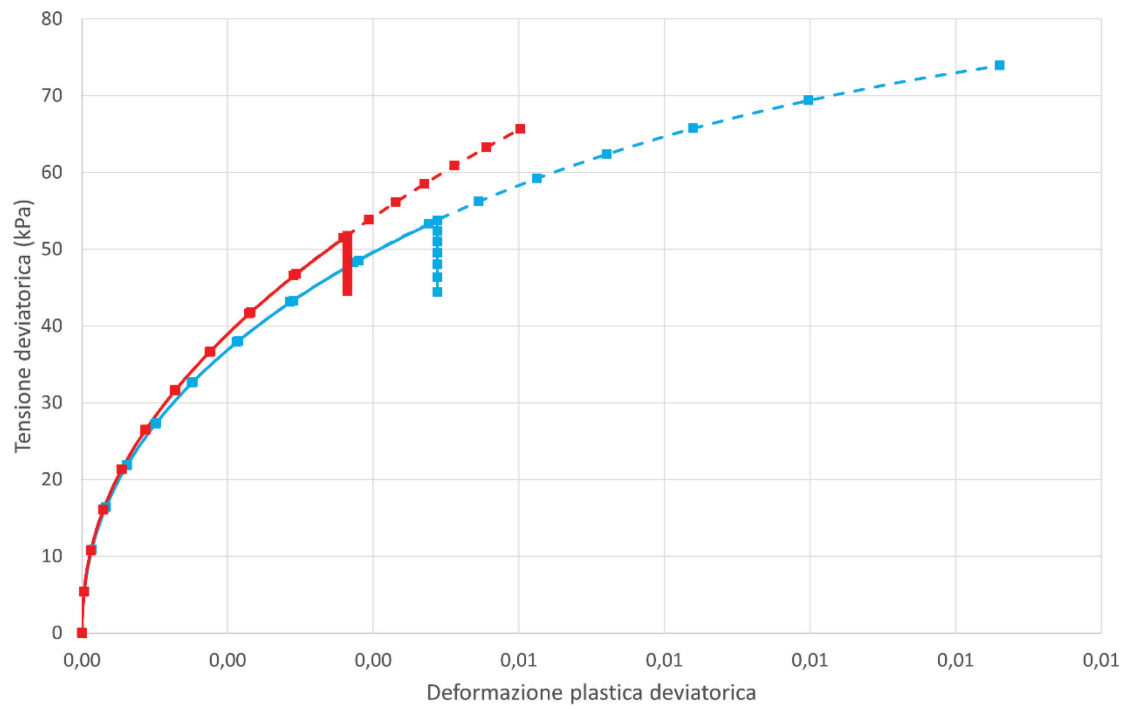


Figura 8.2.4: Percorso tensionale nel piano  $p - q$  e superfici di snervamento iniziale e di massima espansione. Confronto no LAD/W-W LAD e punto Gauss 27 brick 89/56. In alto: analisi in piccole deformazioni; in basso: analisi in grandi deformazioni.



— Punto Gauss 27 brick 89                      ■ No LAD  
 - - - Punto Gauss 27 brick 56                    ■ W-W LAD



— Punto Gauss 27 brick 89                      ■ No LAD  
 - - - Punto Gauss 27 brick 56                    ■ W-W LAD

Figura 8.2.5: Diagramma tensione deviatorica-deformazione plastica deviatorica. Confronto no LAD/W-W LAD e punto Gauss 27 brick 89/56. In alto: analisi in piccole deformazioni; in basso: analisi in grandi deformazioni.

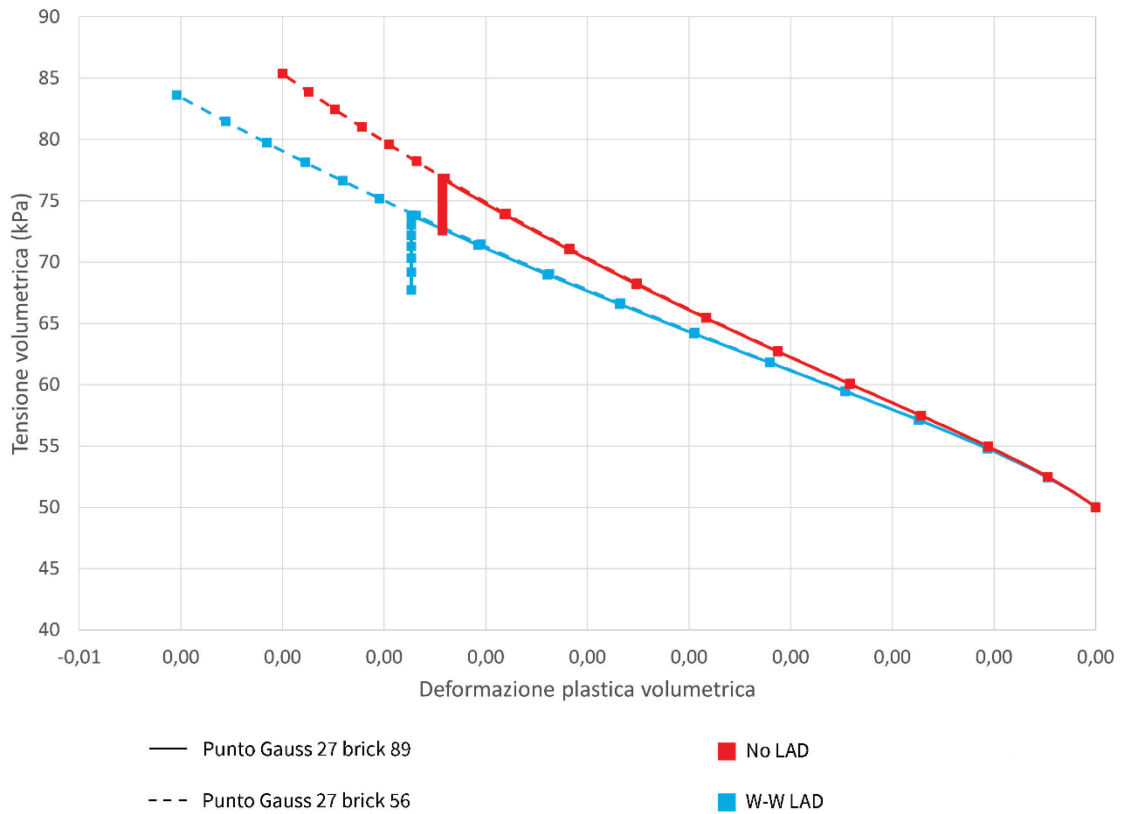
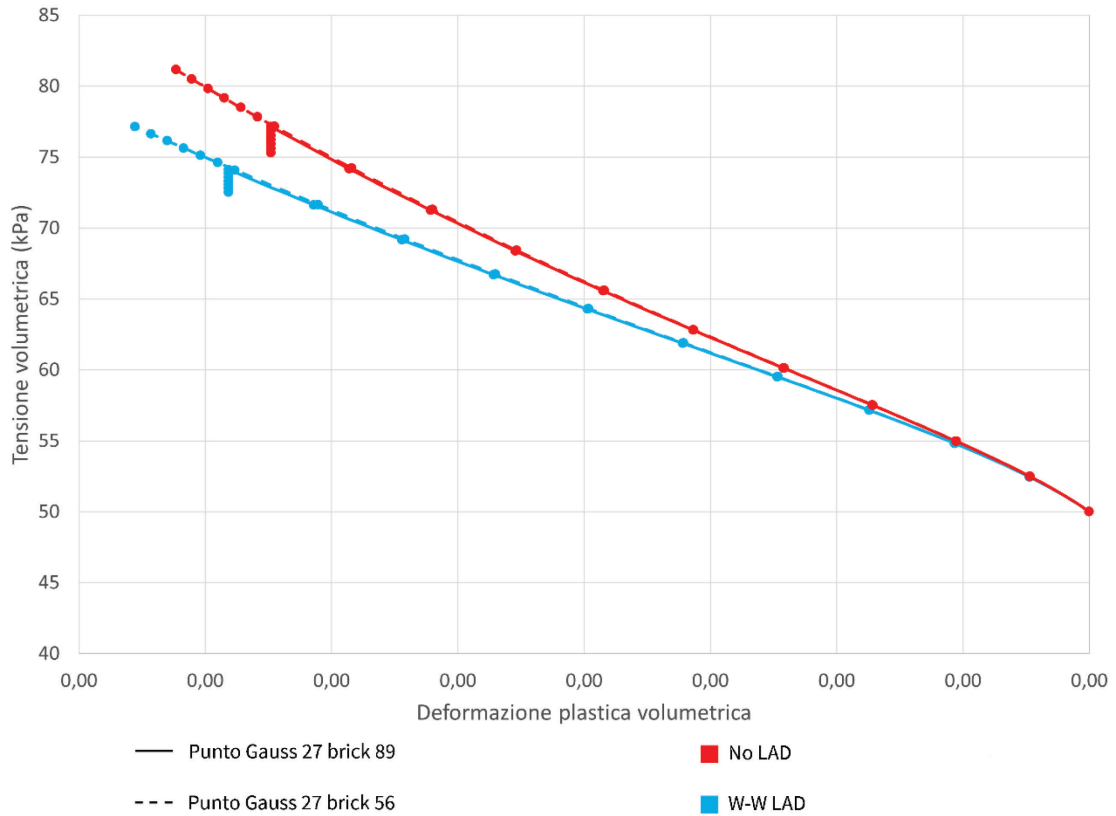


Figura 8.2.6: Diagramma tensione volumetrica-deformazione plastica volumetrica. Confronto no LAD/W-W LAD e punto Gauss 27 brick 89/56. In alto: analisi in piccole deformazioni; in basso: analisi in grandi deformazioni.

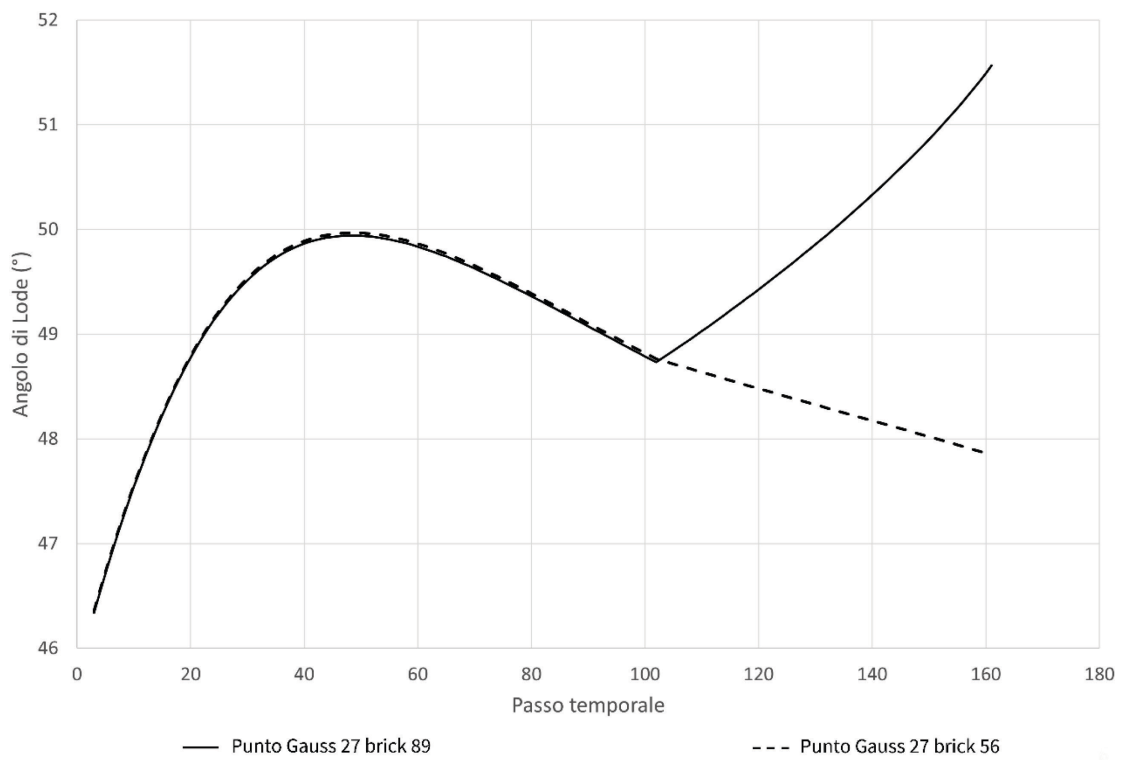
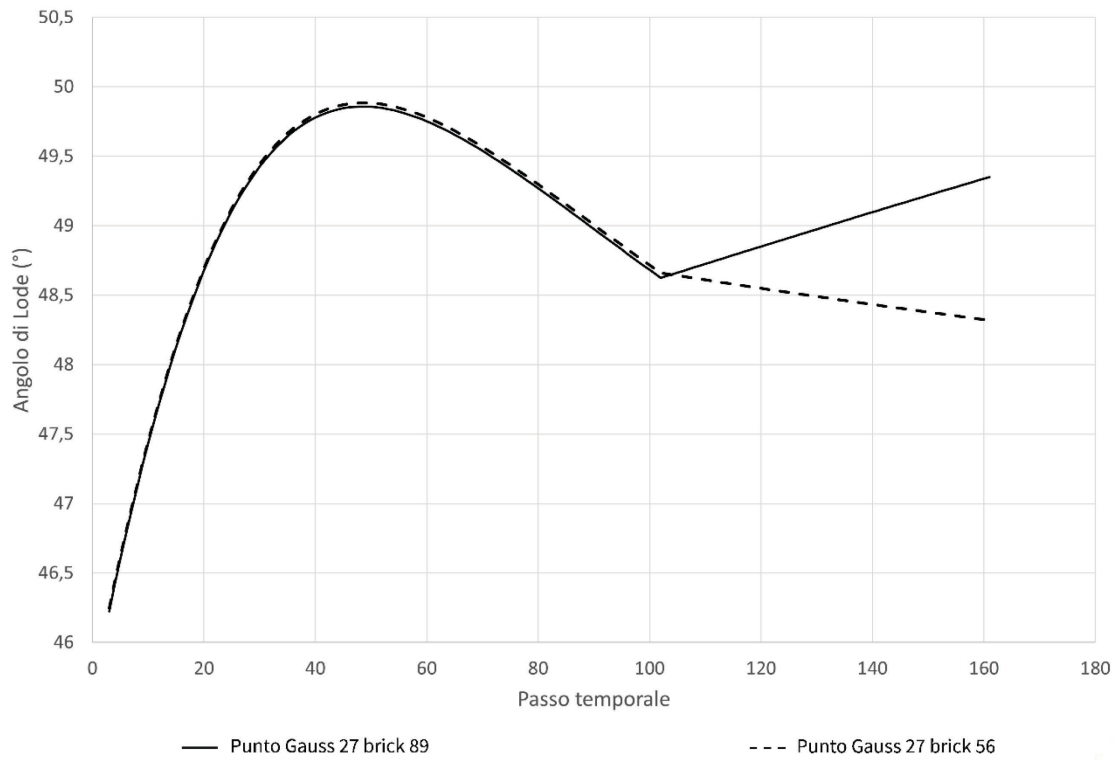


Figura 8.2.7: Andamento nel tempo dell'angolo di Lode. Confronto punto Gauss 27 brick 89/56. In alto: analisi in piccole deformazioni; in basso: analisi in grandi deformazioni.

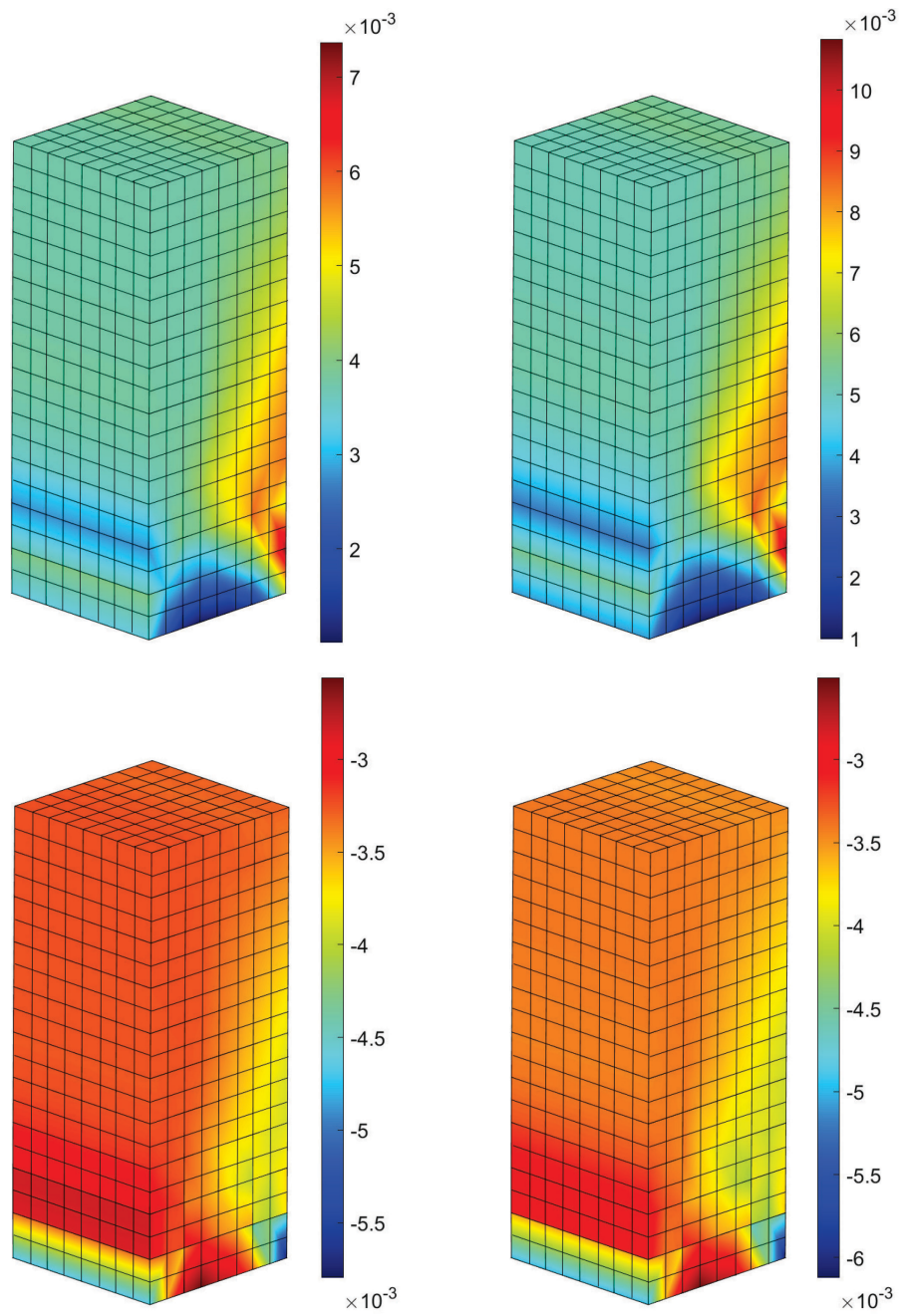


Figura 8.2.8: Configurazione deformata in deformazioni infinitesime e mappa di colore delle deformazioni plastiche. In alto: deformazioni plastiche deviatoriche; in basso: deformazioni plastiche volumetriche. A sinistra: analisi a due invarianti; a destra: analisi a tre invarianti.

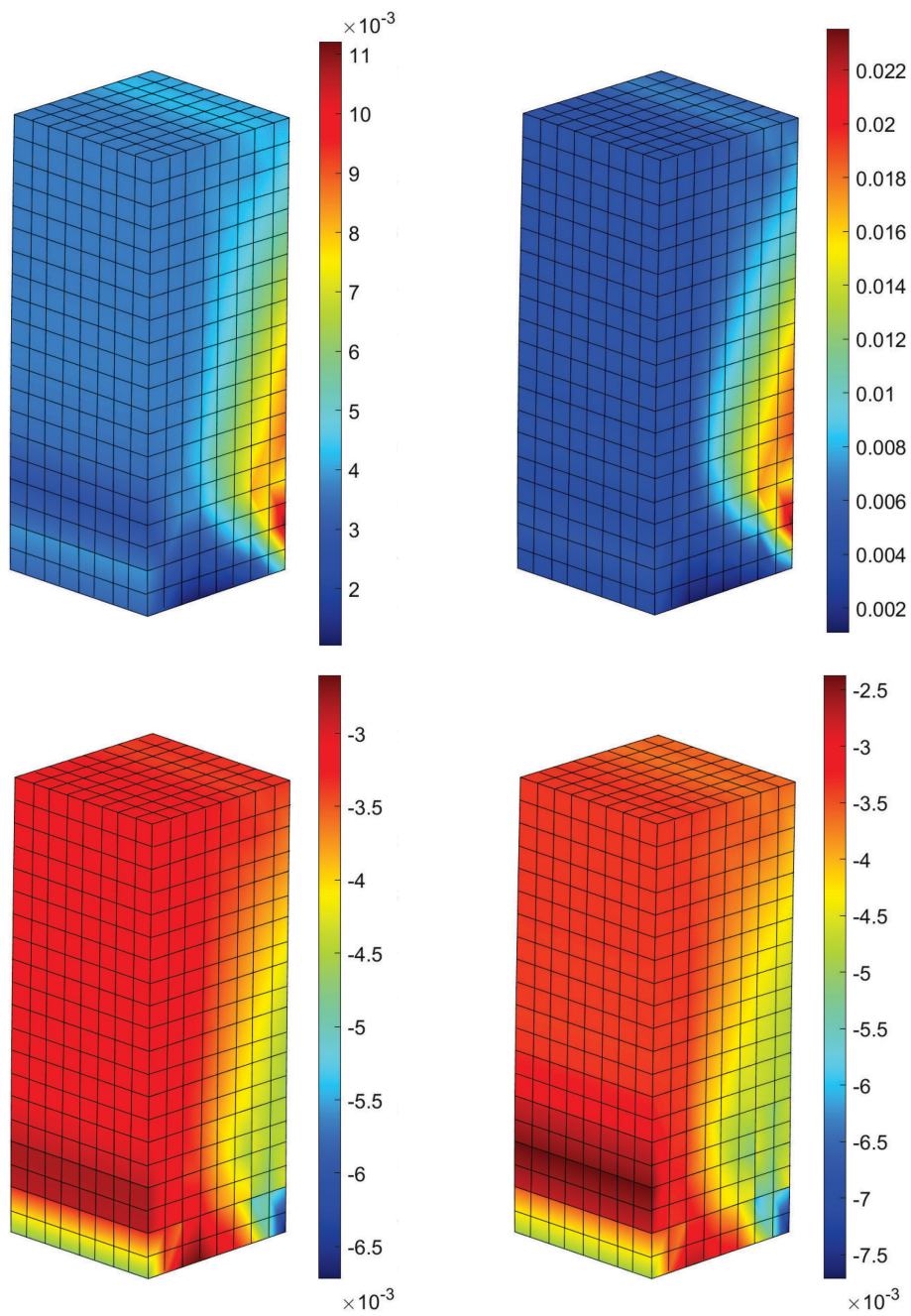


Figura 8.2.9: Configurazione deformata in deformazioni finite e mappa di colore delle deformazioni plastiche. In alto: deformazioni plastiche deviatoriche; in basso: deformazioni plastiche volumetriche. A sinistra: analisi a due invarianti; a destra: analisi a tre invarianti.





## 9. CONCLUSIONI

In questa tesi si è implementato un modello costitutivo per la simulazione del comportamento di terreni granulari e argillosi. Esso è stato introdotto in un codice di ricerca universitario [10] al fine di condurre analisi di consolidazione di geomateriali.

Il legame costitutivo sviluppato corrisponde al Cam-Clay Modificato, il quale è in grado di valutare con esattezza lo stato deformativo del terreno sia in campo elastico sia in campo plastico, fino al limite di rottura.

In questo modello si è considerata una superficie di plasticità dipendente dal terzo invariante di tensione, al fine di caratterizzare la tendenza dei materiali granulari a sviluppare forze di snervamento maggiori in compressione che in trazione. Inoltre, si adottano un modulo elastico a taglio e una legge di incrudimento non lineari, per descrivere in modo più accurato il comportamento post-elastico.

Tale modello elastoplastico è stato definito nello spazio delle deformazioni principali, al fine di ottenere un algoritmo implicito di *return mapping* stabile ed efficiente.

L'implementazione è stata estesa anche al regime delle deformazioni finite, attraverso opportune misure di tensione e deformazione, per valutare più accuratamente la rigidità del solido soggetto a elevati gradienti di spostamento, deformazione, rotazione e tensione.

I test condotti sul singolo elemento tridimensionale sono stati utili a verificare ed appurare la coerenza della risposta del campione rispetto alle condizioni di carico esterne e l'accordo con le leggi costitutive. Inoltre, è stata validata la stabilità e l'accuratezza dell'algoritmo di *return mapping*.

I confronti con gli esempi numerici da letteratura hanno evidenziato l'effettiva correttezza delle *functions* implementate. Si riscontra infatti una quasi totale coincidenza di risultati.

Infine, attraverso due applicazioni pratiche – quali l'analisi di un terreno con un'area soggetta a compressione e taglio e la modellazione di una colonna di terreno la cui superficie superiore è interamente compressa e soggetta ad azione tagliente – si è dimostrata l'efficacia generale nella rappresentazione del reale comportamento di terreni granulari ed argille espansive.

Si conclude che l'estensione del Cam-Clay Modificato al terzo invariante di tensione, nonostante l'innegabile sovraccarico in termini di onere computazionale, risulta fondamentale per l'interpretazione effettiva dello stato tensionale e deformativo dei geomateriali, soprattutto in quelle analisi che prevedono una fase di compressione a cui segue lo scarico del provino o per le sollecitazioni di taglio.



## 10. BIBLIOGRAFIA

- [1] Bauschinger J., *Ueber die Quercontraction und -Dilatation bei der Längenausdehnung und -Zusammendrückung prismatischer Körper*, Lipsia, 1879
- [2] Borja R. I., *Plasticity Modeling and Computation*, Stanford, Springer, 2013
- [3] Borja R. I., *Cam-Clay plasticity, Part II: Implicit integration of constitutive equation based on a nonlinear elastic stress predictor*, in "Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering", 88(2), 225-240, 1991
- [4] Borja R. I., Lee S. R. *Cam-clay plasticity, part I: implicit integration of elasto-plastic constitutive relations*, in "Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering", 78(1), 49-72, 1990
- [5] Borja R. I., Sama K. M., Sanz P. F., *On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models*, in "Computer methods in applied mechanics and engineering", 192(9-10), 1227-1258, 2003
- [6] Borja R. I., Tamagnini C., *Cam-clay plasticity. Part III: extension of the infinitesimal model to include finite strains*, in "Computer methods in applied mechanics and engineering", 155, Stanford, Elsevier, 1998, pp. 73-95
- [7] Borja R. I., Tamagnini C., Amorosi A., *Coupling plasticity and energy-conserving elasticity models for clays*, in "Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering", 123, 948-957, 1997
- [8] Callari C., *Modellazione elasto-plastica in deformazioni finite delle argille tenere: aspetti teorici e computazionali*, 2007
- [9] Coombs W. M., Crouch R. S., *Algorithmic issues for three-invariant hyperplastic critical state models*, in "Computer methods in applied mechanics and engineering", 200(25-28), 2297-2318, 2011
- [10] De Marchi N., Salomoni V., Spiezia N., *Effects of Finite Strains in Fully Coupled 3D Geomechanical Simulations*, in "International Journal of Geomechanics", 19(4), 04019008, 2019
- [11] de Souza Neto E. A., Peric D., Owen D. R. J., *Computational Methods for Plasticity Theory and Applications*, Chichester, Wiley, 2008
- [12] Foster C. D., Regueiro R. A., Fossum A. F., Borja R. I., *Implicit numerical integration of a three-invariant, isotropic/kinematic hardening cap plasticity model for geomaterials*, in "Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering", 194(50-52), 5109-5138, 2005
- [13] Hughes T. J. R., *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*, New York, Dover, 2000
- [14] Krenk S., *Non Linear Modeling And Analysis Of Solids And Structures*, Cambridge, Cambridge University Press, 2009
- [15] Krenk S., Nielsen M. B., *NLSolid. Matlab Toolbox for FE-Analysis of Continuum Problems Ver. 1.0*, University of Denmark, 2010
- [16] Marsden J. E., Hughes T. J. R., *Mathematical Foundations of Elasticity*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1983
- [17] Roscoe K. H., Burland, J. H., *On the generalized stress-strain behaviour of 'wet' Clay*, in "Heyman J., Leckie F. A. (eds.) Engineering Plasticity", Cambridge, Cambridge University Press, 1968, pp. 535-609
- [18] Simo J. C., Hughes T. J. R., *Computational Inelasticity*, New York, Springer, 1998
- [19] Tresca H., *Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions. Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, Paris 59, 1864, pp. 754-758

- [20] von Mises R., *Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand*, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse 1*, 1913, pp. 582-592
- [21] Willam K. J., Warnke E. P., *Constitutive model for triaxial behavior of concrete. Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses*, in "International Association for Bridges and Structural Engineering", Bergamo, 1974