



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Nuclei con alone: struttura e risposta elettromagnetica

Relatore

Prof./Dr. Jesús Casal Berbel

Laureando

Francesco Fontana

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Introduzione	3
1 Descrizione di stati legati in nuclei con alone	5
Modello a shell nucleare	5
Nucleo con alone: core + n	6
Base THO	8
^{11}Be : analisi degli stati legati	9
Variazione del potenziale $V(r)$	12
2 Probabilità di eccitazione elettrica dipolare B(E1)	15
Stati del continuo e probabilità di transizione ridotta $B(E\lambda)$	15
^{11}Be : calcolo della probabilità $B(E1)$	16
Variazione del potenziale $V(r)$	18
Confronto con dati sperimentali	21
3 Conclusioni	23

Introduzione

Il nucleo atomico è un sistema quantistico costituito da protoni e neutroni, ovvero fermioni di spin $s = \frac{1}{2}$ fortemente interagenti attraverso le interazioni nucleari deboli, forti e l'interazione elettromagnetica.

Il nucleo è dotato di massa ed occupa un volume finito, per cui possono essere definiti un raggio nucleare ed una densità nucleare. Siccome il volume del nucleo scala linearmente con il numero di massa, ne consegue che il raggio nucleare può essere espresso mediante l'equazione $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$, dove A è il numero di massa e $r_0 \simeq 1.2$ fm per i nuclei stabili (valore leggermente maggiore per i nuclei instabili). La densità, invece, risulta essere in prima approssimazione *costante* per la maggior parte dei nuclei della carta dei nuclidi e può essere parametrizzata in maniera semplice mediante:

$$\rho(r) = \rho_0 f(r) \quad (1)$$

dove ρ_0 rappresenta la densità centrale (valori tipici tra $0.15 - 0.2 \text{ fm}^{-3}$), mentre $f(r)$ è la funzione (o profilo) di Fermi, data da

$$f(r) = \left(1 + e^{\frac{(r-r_0)}{a}}\right)^{-1} \quad (2)$$

In quest'ultima equazione, il termine r_0 può essere identificato come il raggio a metà altezza, invece a rappresenta la diffusività (che qualitativamente indica come la superficie sia distribuita).

La struttura precisa del nucleo è difficile da dedurre analiticamente in quanto si tratta di un sistema a molti corpi ed una trattazione *statistica* risulterebbe poco efficace dato il numero non sufficientemente alto di elementi. Per una descrizione esaustiva di alcune classi di nuclei atomici sono stati sviluppati dei modelli tra i quali il **modello a shell nucleare**, ad opera di Göppert-Mayer, Wigner e Jensen (premio Nobel per la fisica - 1963), in analogia con il modello a shell atomico per gli elettroni. Questo modello fu inizialmente introdotto in quanto riusciva a predire il comportamento di specie nucleari aventi energie di legame particolarmente elevate in corrispondenza di certi valori di N e Z , i cosiddetti *numeri magici*, a causa della chiusura di una determinata shell. Nel modello a shell i nucleoni (ovvero i costituenti del nucleo) sono trattati come particelle immerse in un *potenziale medio* (o *campo medio*) attrattivo. Un esempio tipico di potenziale nucleare utilizzato nell'equazione di Schrödinger è il *potenziale di Wood-Saxon* che si può definire come una funzione di Fermi rovesciata, ovvero più intenso ove è presente una maggiore densità nucleare, ma che sarà limitato poiché esiste un numero finito di stati legati.

Con lo sviluppo di nuove tecniche, però, si è giunti alla scoperta di nuovi nuclei (*nuclei esotici*) che possiedono caratteristiche differenti da quelli della valle di stabilità. Il

termine ‘**esotico**’ rende bene l’idea di una regione (in questo caso della carta dei nuclidi) ancora non perfettamente conosciuta. I nuclei esotici presentano, infatti, “*anomalie*” rispetto ai classici nuclei stabili che si possono tradurre, ad esempio, in energie di legame dell’ordine della frazione del MeV oppure in fenomeni come l’effetto pelle, inversione di parità, l’**alone**, ecc. In particolare, i sistemi nucleari con *alone* sono caratterizzati da uno stato fondamentale in cui gli ultimi nucleoni sono debolmente legati e la distribuzione di materia dei nucleoni di valenza risulta maggiormente diffusa, estendendosi a grandi distanze rispetto al resto del nucleo.

Questo lavoro di tesi consiste nello studio del nucleo di ^{11}Be , che presenta *alone*, mediante un modello fenomenologico del tipo $\text{core} + n$, ed in modo particolare nella descrizione della sua struttura e delle transizioni elettromagnetiche collegate alle reazioni di *breakup*. I dati ed i valori ottenuti in questo elaborato sono stati calcolati mediante l’utilizzo di un programma nel linguaggio FORTRAN, THOx^[1], realizzato dal gruppo di fisica nucleare di Sevilla, che ha permesso il calcolo delle funzioni d’onda e le transizioni elettriche per un nucleo del tipo $\text{core} + n$.

Il Capitolo 1 fornirà una trattazione quantistica generale di un *nucleo con alone* ed una descrizione degli *stati legati* attraverso l’introduzione di una base THO, applicata poi al caso del ^{11}Be .

Invece, nel Capitolo 2 si studieranno *gli stati nel continuo* ed, in particolare, si introdurrà l’operatore di multipolo elettrico per poi proseguire con la discussione della *probabilità di transizione elettrica dipolare* ridotta $B(E1)$.

Nella conclusione, infine, sarà riassunto brevemente il contenuto di questo elaborato e saranno riepilogati i risultati rilevanti ottenuti nei precedenti capitoli.

Capitolo 1

Descrizione di stati legati in nuclei con alone

Modello a shell nucleare

Nel contesto del modello a shell nucleare, come accennato nell'introduzione, i nucleoni si possono trattare come particelle immerse in un *potenziale medio attrattivo*. Un tipico esempio di potenziale nucleare può essere il potenziale di *Wood-Saxon* della forma:

$$V(r) = V_0 f(r) \quad (1.1)$$

ove V_0 rappresenta la profondità della buca e $f(r)$ un profilo di fermi, come discusso nell'introduzione. Utilizzando questo potenziale nell'equazione di Schrödinger, tuttavia risulta ancora presente la degenerazione del momento angolare totale \vec{J} .

Per rimuoverla si introduce, quindi, un piccolo contributo dovuto all'interazione di spin-orbita, similmente a quanto accade nella fisica atomica, che contiene un termine operatoriale della forma

$$\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2) \quad (1.2)$$

moltiplicato per una funzione che tiene conto dell'intensità della perturbazione e della sua forma radiale:

$$V_{\vec{L} \cdot \vec{S}}(r) = V_{LS} \frac{df(r)}{dr} \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (1.3)$$

ove V_{LS} è una costante mentre si è usata la derivata del potenziale di Wood-Saxon in modo tale da avere una funzione piccata attorno alla superficie nucleare e, quindi, maggior contributo sulle funzioni d'onda concentrate in questa regione [fig. 1.1].

Risolviendo il sistema agli autovalori con Hamiltoniana $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$ dato da

$$H\psi(\vec{r}) = \varepsilon\psi(\vec{r}) \quad (1.4)$$

ove $V(r)$ è dato dalla somma di (1.1) e (1.3), si ottengono le energie ε_j degli stati di particella singola $|j, m_j, \ell, s\rangle$ che rappresentano rispettivamente il momento angolare totale, la sua proiezione lungo l'asse z , il momento angolare orbitale e lo spin.

Questi stati risultano inoltre "splittati" a seconda del valore del momento angolare totale \vec{J} , ovvero in $j_{\pm} = |\ell \pm \frac{1}{2}|$, per effetto del termine di spin-orbita, "*spin-orbit partners*".

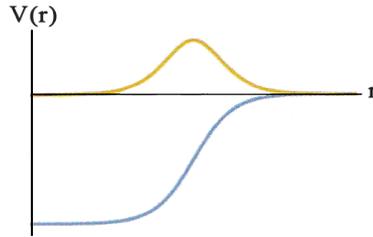


Figura 1.1: Esempio di un potenziale di Wood-Saxon (blu) e la sua derivata (arancione)

Si ottiene così una successione di livelli (*shell*) ad energia crescente al variare del numero quantico j che vengono occupati dal nucleone di valenza; questi stati vengono indicati mediante la notazione “ $N \ell_j$ ”, dove N rappresenta il numero di quanti di eccitazione ($N = 0, 1, 2, \dots$), oppure con la notazione (in seguito usata) “ j^P ”, ove P è l’autovalore dell’operatore parità e può assumere i valori (± 1) . Infatti, è noto come l’operatore parità \hat{P} applicato alla parte angolare della funzione d’onda, ossia le armoniche sferiche, dia

$$\hat{P} Y_\ell^m = (-1)^\ell Y_\ell^m \quad (1.5)$$

e, quindi, ad ogni incremento del numero quantico ℓ corrisponde un cambio di parità.

Questo modello funziona particolarmente bene per nuclei piccoli (con $A \leq 40$) ed in prossimità delle shell nucleari chiuse, permettendo di stimare efficacemente le energie degli stati legati ed altre loro proprietà.

In corrispondenza del riempimento delle shell nucleari, si può notare come i nuclei presentino delle energie di legame molto maggiori rispetto ai nuclei vicini (nella carta dei nuclidi), ovvero quelli con un nucleone in più o in meno.

Inoltre, utilizzando la notazione spettroscopica j^P , risulta che lo stato fondamentale di nuclei pari-pari con shell chiusa è sempre del tipo 0^+ .

Nucleo con alone: core + n

La specie nucleare esotica considerata in questa trattazione è quella dei *nuclei con alone* che presentano, come accennato nell’introduzione, distribuzioni di materia dei nucleoni di valenza maggiormente diffusa, a causa del fatto che sono debolmente legati. Di conseguenza i nuclei con alone presentano un raggio anormalmente grande. L’alone appare quando gli ultimi nucleoni sono così debolmente legati che la loro funzione d’onda si estende a distanze lontane dal resto del nucleo (chiamato *core*). Esistono nuclei con alone di un solo neutrone o protone (ex. $^{11}\text{Be} = ^{10}\text{Be} + n$, $^{17}\text{F} = ^{16}\text{O} + p$) oppure di due neutroni (ex. $^{11}\text{Li} = ^9\text{Li} + 2n$), che presentano sezioni d’urto di reazione maggiori rispetto agli altri nuclei.

In questo elaborato, verranno trattati solamente sistemi nucleari con alone che presentano un singolo nucleone in eccesso ad una *shell* (o *subshell*) chiusa, pertanto è possibile utilizzare un **modello a 2 corpi** del tipo *core + n*, ove il *core* sarà considerato inerte e n rappresenterà il nucleone di valenza, del quale verranno descritti i gradi di libertà. Matematicamente, il modello a shell nucleare consiste nella risoluzione dell’equazione di Schrödinger per particella singola, data da (1.4), utilizzando un potenziale medio, come ad esempio (1.1). Nel caso specifico, avendo a che fare con un modello a due corpi [fig.1.2], è conveniente usare il sistema di coordinate del centro di massa e distanza

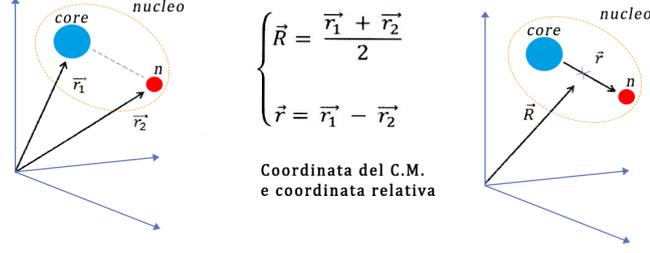


Figura 1.2: Modello a 2 corpi del tipo core + n, nelle coordinate del centro di massa (adattato da [2]).

relativa, assumendo inoltre che lo spin del core sia nullo mentre quello del nucleone di valenza sia fissato ($s = \frac{1}{2}$).

In queste coordinate, l'Hamiltoniana diventa

$$\hat{H} = \frac{\vec{P}_{C.M.}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(\vec{r}) \quad (1.6)$$

dove μ è la massa ridotta del sistema, M la somma delle masse $M = m_{core} + m_n$, mentre, tenendo conto che il potenziale nucleare è attrattivo e centrale, $V(\vec{r}) = V(r)$ che dipenderà solo dal modulo del vettore relativo.

Il termine cinetico del centro di massa nell'ultima espressione rappresenta una traslazione rigida di tutto il nucleo e non riguarda le energie intrinseche del sistema, pertanto verrà d'ora in poi omesso. In coordinate polari sferiche l'equazione di Schrödinger per l'operatore \hat{H} si scrive:

$$\hat{H}\Psi(\vec{r}) = \varepsilon\Psi(\vec{r}) \quad (1.7)$$

Il termine cinetico del moto relativo può essere visto come $\vec{p}^2 = \vec{p}_r^2 + \frac{\hat{L}^2}{r^2}$, ove \vec{p}_r è l'operatore momento angolare radiale, mentre \hat{L}^2 è il quadrato dell'operatore momento angolare orbitale. Si può procedere pertanto separando le variabili angolari (θ, ϕ) da quella radiale (r), ed in particolare, fattorizzando la funzione d'onda come

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{r}u(r) [Y_\ell(\theta, \phi) \otimes \chi_s]_j \quad (1.8)$$

ove j è il momento angolare totale mentre $u(r) = r\psi(r)$ rappresenta la funzione d'onda radiale ridotta. Considerando che \vec{p}_r^2 si può esprimere come un termine in $\frac{d^2}{dr^2}$ e tenendo conto che le armoniche sferiche sono autostati del operatore \hat{L}^2

$$\hat{L}^2 Y_\ell^m(\theta, \phi) = \hbar^2 \ell(\ell + 1) Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (1.9)$$

si ottiene quindi la seguente espressione per l'equazione agli autovalori (1.7):

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left(\frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2\mu r^2} + V(r) \right) u(r) = \varepsilon u(r) \quad (1.10)$$

Definendo $\varepsilon = 0$ come la soglia affinché il nucleone di valenza sia legato al core, ne consegue che gli autovalori dell'energia negativi ($\varepsilon < 0$) corrispondono a *stati legati* mentre per ($\varepsilon > 0$) si avrà uno spettro continuo dell'energia e *stati non legati*.

Base THO

Per lo studio delle proprietà dei nuclei con alone, è necessario quindi calcolare *computazionalmente* la funzione d'onda radiale ridotta per gli stati del sistema che, in questa trattazione, riguarderanno quello fondamentale ed i primi eccitati.

Si considerino, innanzitutto, le autofunzioni della parte radiale dell'oscillatore armonico

$$\phi_n^{\text{HO}}(s) = N_n H_n \left(\frac{s}{b} \right) e^{-\left(\frac{s}{b} \right)^2} \quad (1.11)$$

dove N_n sono costanti di normalizzazione, H_n i polinomi di Hermite n -esimi, mentre b è un parametro che determina la lunghezza dell'oscillatore armonico. Tali funzioni formano una base ortonormale e completa, pertanto possono essere usate per espandere gli autostati dell'Hamiltoniana, fissato un arbitrario potenziale. Computazionalmente, potendo usare solo un numero finito di stati per lo sviluppo delle autofunzioni e dato che gli stati legati hanno un andamento esponenziale decrescente a grandi distanze dal core, risulta non adeguato utilizzare la base dell'oscillatore armonico a causa del suo comportamento asintotico di tipo Gaussiano.

Un approccio alternativo consiste nell'effettuare un cambio di coordinate arbitrario $s \rightarrow r(s)$ tale che l'andamento gaussiano sia convertito in uno esponenziale decrescente. Questo processo dà luogo alle autofunzioni di base chiamate *Transformed Harmonic Oscillator* (**THO**), definite da

$$\phi_n^{\text{THO}}(r) = \sqrt{\frac{ds}{dr}} \phi_n^{\text{HO}}(s(r)) \quad (1.12)$$

ideali per la descrizione di stati debolmente legati. Queste funzioni, per costruzione, formano una base anch'essa ortonormale e completa, e la normalizzazione risulta data da

$$\int_0^\infty dr |\phi_n^{\text{THO}}(r)|^2 = 1 \quad (1.13)$$

Tenendo presente che per piccoli valori del raggio r l'oscillatore armonico dà una buona approssimazione di un generico potenziale attrattivo, anche $s(r)$ dovrà essere proporzionale a r per $r \rightarrow 0$. Per $s \rightarrow \infty$, invece, si ha che $\phi_n^{\text{HO}}(s)$ è proporzionale a $\sim \exp\left(\frac{s^2}{b^2}\right)$, mentre per quanto riguarda $\phi_n^{\text{THO}}(s)$, imponendo asintoticamente un andamento $\sim \exp(-r)$, si ottiene $\left(\frac{s^2}{b^2}\right) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} -r$.

Per determinare univocamente la forma funzionale delle $\phi_n^{\text{THO}}(r)$, però, è necessaria una parametrizzazione che soddisfi le condizioni di asintoticità sopra descritte. La funzione $s(r)$ che verrà utilizzata in questo elaborato è della forma [3]:

$$s(r; \gamma, m) = \frac{1}{\sqrt{2}b} \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^m + \left(\frac{1}{\gamma\sqrt{r}}\right)^m} \right]^{\frac{1}{m}} \quad (1.14)$$

con b , γ e m parametri da fissare. Si può notare come quest'ultima funzione asintoticamente vada come $s(r) \sim \frac{\gamma}{b} \sqrt{\frac{r}{2}}$, per cui le $\phi_n^{\text{THO}}(r)$ avranno un andamento all'infinito come $\sim \exp\left(-\frac{\gamma^2 r}{2b^2}\right)$. Il rapporto $\frac{\gamma}{b}$ può essere associato ad un momento lineare efficace $k_{eff} = \frac{\gamma^2}{2b^2}$ che determina il comportamento asintotico della base THO ed in particolare più il rapporto cresce, più le funzioni si concentreranno a distanze radiali inferiori, corrispondenti ad energie più elevate.

In questo modo si può quindi costruire una base di dimensione arbitraria N , $|\text{THO}, i\rangle_{i=1\dots N}$ dove le funzioni $\phi_n^{\text{THO}}(r) = \langle r|\text{THO}, i\rangle$ saranno una base per gli stati legati. Aumentando N ci si aspetta una trattazione sempre più accurata per fenomeni d'azione oltre il raggio d'azione del potenziale, scontrandosi però con le approssimazioni numeriche di natura computazionale dovuti alla risoluzione finita dell'elaboratore.

Le $|\text{THO}, i\rangle$ non saranno necessariamente autostati dell'Hamiltoniana, pertanto si procede alla sua diagonalizzazione nella base costruita dagli N stati $|\text{THO}, i\rangle$. Lo sviluppo della parte radiale degli autostati di \hat{H} nella base THO è dato da

$$\langle r|n\rangle = \Psi_n(r) = \sum_{i=1}^N C_{n,i} \phi_i^{\text{THO}}(r), \quad (1.15)$$

ove $|n\rangle_{n=1\dots N}$ sono autostati dell'Hamiltoniana mentre $C_{n,i} = \langle \text{THO}, i|n\rangle$ sono coefficienti che si ottengono diagonalizzando l'Hamiltoniana nella base THO. Risolvendo l'equazione di Schrödinger $\hat{H}\Psi_n = \varepsilon_n\Psi_n$ che in forma matriciale risulta

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2N} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ H_{N1} & H_{N2} & \dots & H_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{n,1} \\ C_{n,2} \\ \vdots \\ C_{n,N} \end{pmatrix} = \varepsilon_n \begin{pmatrix} C_{n,1} \\ C_{n,2} \\ \vdots \\ C_{n,N} \end{pmatrix},$$

ove gli elementi di matrice sono $H_{ij} = \langle \text{THO}, i|\hat{H}|\text{THO}, j\rangle$, si ottengono gli autovalori $\{\varepsilon_n\}_{n=1\dots N}$. Gli autostati relativi ad energie negative, all'aumentare di N , tenderanno agli stati legati del sistema, mentre quelli relativi ad energie positive forniranno una rappresentazione *discreta* degli stati del continuo (*pseudostati*). Per $N \rightarrow \infty$ questi ultimi autostati tenderanno agli stati del continuo se viene rispettata la relazione di completezza $\sum_1^N |\text{THO}, i\rangle \langle \text{THO}, i| = 1$. È bene precisare, inoltre, che in questa trattazione la base $|\text{THO}, i\rangle$ verrà utilizzata soltanto per la descrizione degli stati legati, mentre per gli stati del continuo saranno utilizzate delle funzioni d'onda diverse, che saranno descritte al capitolo 2.

¹¹Be: analisi degli stati legati

Si tratterà ora nello specifico il nucleo di ¹¹Be che presenta alone. Questo nucleo esotico è formato da 4 protoni e 7 neutroni e, secondo il modello a shell, focalizzandosi sulla buca di potenziale dei neutroni, risultano riempite completamente le shell $1s_{1/2}$ e $1p_{3/2}$ mentre l'ultimo nucleone dovrebbe essere nel livello $1p_{1/2}$. In realtà la shell occupata dall'ultimo neutrone è la $2s_{1/2}$ e ciò è dovuto ad un fenomeno chiamato *inversione di parità*. Di fatto, accade che la shell $2s_{1/2}$ (parità positiva) si abbassa energeticamente al di sotto della $1p_{1/2}$ (con parità negativa, vedi equazione (1.5)), manifestando quindi un cambio di parità. Lo stato fondamentale (o *ground state*) del nucleo in esame risulta pertanto, nella notazione j^P , dato da $(\frac{1}{2}^+)$, mentre il primo stato eccitato legato sarà $(\frac{1}{2}^-)$. Riempiendo completamente la shell $1p_{3/2}$, il nucleo di ¹¹Be può essere ben descritto, come discusso in precedenza, da un modello a 2 corpi del tipo core + n , ove il core è rappresentato dal nucleo ¹⁰Be, mentre n è l'ultimo neutrone (nucleone di valenza) debolmente legato. Il core è stato considerato inerte perciò lo si è assunto nello stato $j^P = 0^+$. Per lo studio degli stati legati del sistema, sono state calcolate le funzioni d'onda radiali ridotte del nucleone di valenza, espandendole mediante la base $\phi_n^{\text{THO}}(r)$. Si è risolta, poi, l'equazione

di Schrödinger (1.10), diagonalizzando l'Hamiltoniana con questi stati, e si sono ricavati i valori delle energie corrispondenti.

Il potenziale $V(r)$ utilizzato è un tipico potenziale di Wood-Saxon, della forma

$$V(r) = \left[V_0 + V_{LS}(\vec{L} \cdot \vec{S}) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right] f(r) \quad (1.16)$$

ove $f(r)$ è il profilo di fermi. In questa trattazione stati utilizzati dei parametri opportuni^[4] in modo tale da riprodurre i valori sperimentali delle energie del ^{11}Be , riepilogati nella seguente tabella [tab. 1.1]:

V_0	V_{LS}	a	R_0
[MeV]	[MeV fm ²]	[fm]	[fm]
-62.52	21.0	0.6	2.585

Tabella 1.1: Parametri del potenziale $V(r)$ per il nucleo ^{11}Be .

In primo luogo, si è cercato il numero N di stati THO tale per cui l'energia dello stato fondamentale, ottenuto dalla diagonalizzazione dell'Hamiltoniana, non vari significativamente all'aumentare dello stesso. In [fig. 1.3] sulla destra è rappresentato l'andamento dell'energia $E_{G.S.}$ dello stato fondamentale ($\frac{1}{2}^+$) in funzione del numero di stati di base N . Alla sinistra, invece, sono rappresentati gli andamenti delle funzioni d'onda radiali ridotte $u(r)$ dello stato fondamentale in funzione della distanza relativa, per alcuni valori di N . Degno di nota è il fatto che le funzioni d'onda siano visibilmente differenti in corrispondenza dei primi valori di N , mentre risultino pressoché identiche dal valore $N = 20$ in poi.

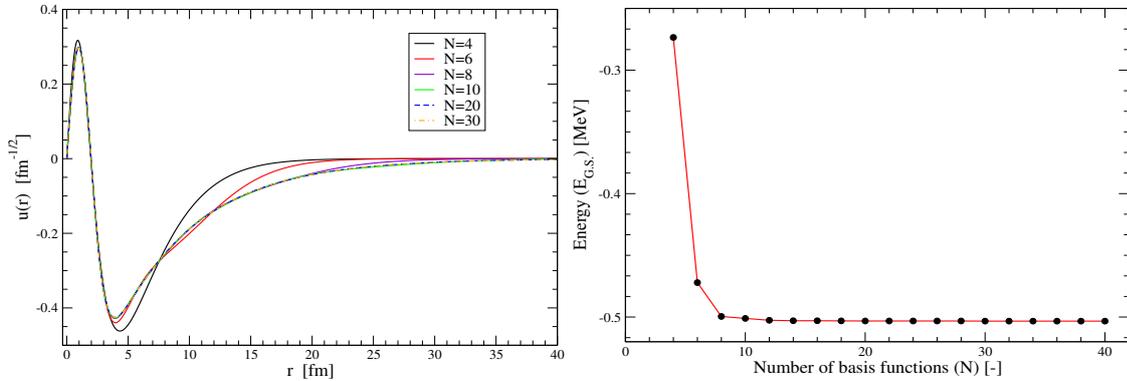
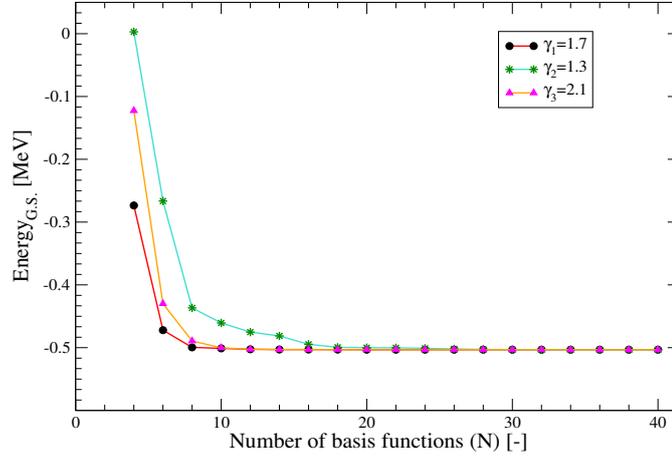


Figura 1.3: *Left panel:* Funzione d'onda radiale ridotta $u(r)$ del *ground state* al variare di N ; *Right panel:* Convergenza dell'energia $E_{G.S.}$ al variare del numero di stati N .

Al fine di evitare errori di tipo computazionale (come ad esempio delle oscillazioni numeriche a grandi distanze dovute allo sviluppo degli stati mediante la base $|\text{THO}, i\rangle$), si è assunto $N = 25$ come valore a convergenza. Questo valore è stato poi utilizzato in tutti i successivi calcoli. Durante l'analisi di tutto l'elaborato sono stati utilizzati i parametri indicati in [tab. 1.2], presenti nell'equazione (1.14) per la costruzione della base THO, ove b assume un valore tipico mentre γ è stato scelto affinché si abbia una più veloce convergenza dell'energia $E_{G.S.}$ [vedere fig. 1.4].

m	b	γ
[-]	[fm]	[fm $^{\frac{1}{2}}$]
4	1.6	1.7

 Tabella 1.2: Valori dei parametri utilizzati per la definizione della funzione $s(r)$

 Figura 1.4: Convergenza dell'energia $E_{G.S.}$ al variare di N , per 3 diversi valori di γ

Il nucleo di ^{11}Be presenta due stati legati: lo stato fondamentale ($\frac{1}{2}^+$) ed il primo eccitato ($\frac{1}{2}^-$). In [fig.1.5] sono rappresentate le funzioni d'onda $u(r)$ per entrambi gli stati legati, mentre le loro energie sono rispettivamente:

$$E_{G.S.} = -0.5033 \text{ MeV} ; \quad E_{1/2^-} = -0.1851 \text{ MeV}$$

Da questi grafici risulta evidente che, per entrambi gli stati legati del ^{11}Be , le funzioni d'onda abbiano una grande estensione radiale, come ci si aspetta in presenza di alone.

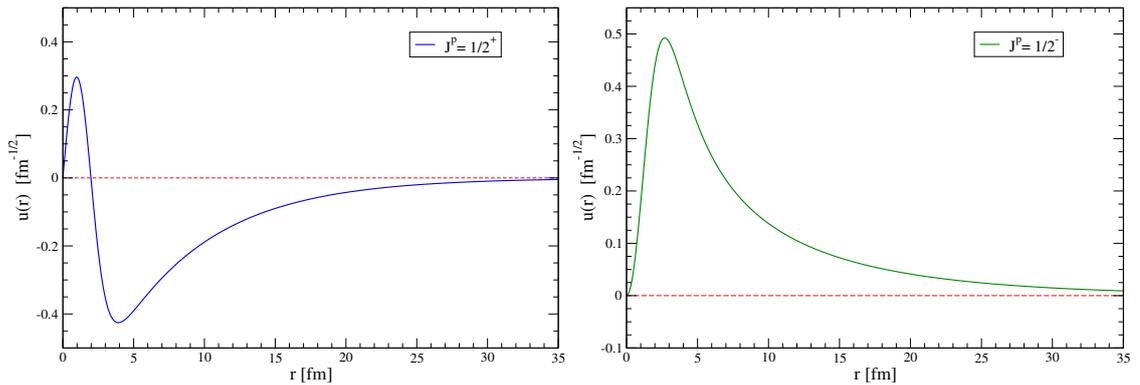


Figura 1.5: *Left panel:* Funzione d'onda radiale ridotta $u(r)$ del *ground state* ($\frac{1}{2}^+$);
Right panel: Funzione d'onda radiale ridotta $u(r)$ del primo stato eccitato ($\frac{1}{2}^-$).

Variation of the potential $V(r)$

Nel seguente paragrafo si è analizzato l'andamento della funzione d'onda del *ground state* ($\ell = 0$) e la relativa energia al variare del termine centrale V_0 del potenziale $V(r)$. Analizzando il grafico di [fig. 1.6] si osserva un andamento quadratico dell'energia dello stato fondamentale $E_{G.S.}$ in funzione dell'ampiezza V_0 del potenziale, considerato in un ampio range di valori tra $[-70\text{MeV}, -57\text{MeV}]$.

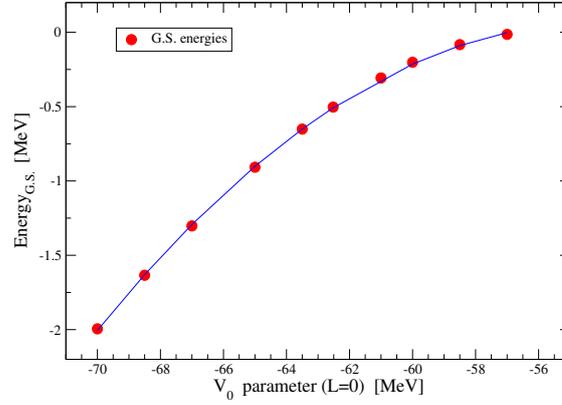


Figura 1.6: Andamento quadratico dell'energia $E_{G.S.}$ in funzione del termine di tipo centrale $V_0(\ell = 0)$ del potenziale $V(r)$.

In seguito ci si è focalizzati nello studio di 4 casi, rispettivamente:

$$V_1 = -60.00 \text{ MeV}, V_2 = -61.00 \text{ MeV}, V_3 = -62.52 \text{ MeV}, V_4 = -65.00 \text{ MeV}$$

a cui corrispondono le seguenti energie del *ground state*:

$$E_1 = -0.2020 \text{ MeV}, E_2 = -0.3072 \text{ MeV}, E_3 = -0.5033 \text{ MeV}, E_4 = -0.9078 \text{ MeV}$$

dove il valore del potenziale V_3 e della relativa energia E_3 corrispondono agli stessi valori utilizzati nella sezione precedente, indicati rispettivamente con V_0 e $E_{G.S.}$.

In [fig.1.7] è rappresentata la funzione d'onda ridotta $u(r)$ per ciascun potenziale considerato $\{V_i\}_{i=1,2,3,4}$. Inoltre ne è stato calcolato anche il modulo quadro $|u(r)|^2$, che rappresenta la densità di probabilità di trovare il neutrone ad una certa distanza dal core.

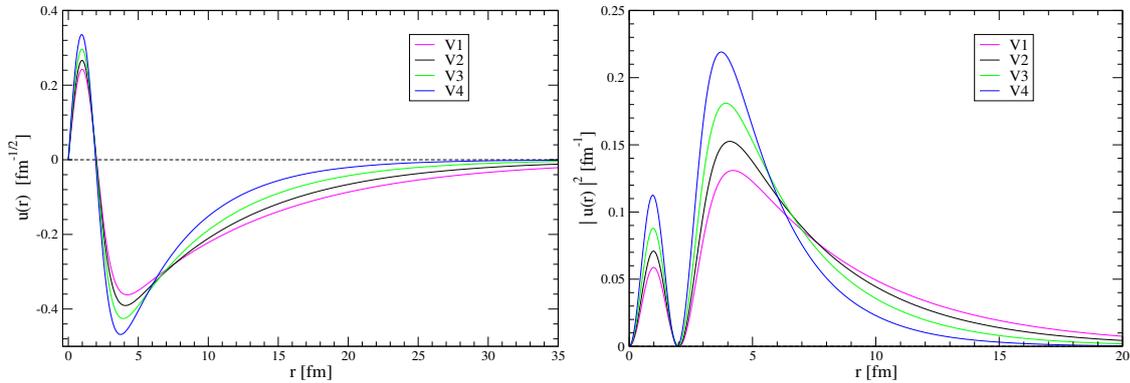


Figura 1.7: *Left panel:* Funzione d'onda $u(r)$ del *G.S.* per ciascun potenziale $\{V_i\}_{i=1,2,3,4}$; *Right panel:* Andamento di $|u(r)|^2$ in funzione della distanza r al variare del potenziale $\{V_i\}_{i=1,2,3,4}$.

Da un rapido calcolo si è ricavato che la probabilità di trovare il nucleone ad una distanza $r > 10$ fm è di $\sim 26.1\%$ nel caso del potenziale V_1 , mentre il $\sim 5.5\%$ con V_4 . Ciò è facilmente spiegabile dal fatto che il termine centrale V_0 rappresenta l'ampiezza della buca di potenziale; pertanto più il suo valore (in modulo) aumenta, tanto più l'energia dello stato fondamentale diminuisce, manifestandosi con una funzione d'onda meno estesa.

I risultati ottenuti sono consistenti con quanto detto in precedenza sulle proprietà dei nuclei con alone. In particolare, si sono ottenuti dei valori piccoli in energia in accordo con una descrizione del neutrone debolmente legato al core. L'alone, infatti, inteso come un'estensione anomala della funzione d'onda, appare più evidente quando il nucleone di valenza possiede un'energia prossima alla soglia del continuo.

Capitolo 2

Probabilità di eccitazione elettrica dipolare B(E1)

Stati del continuo e probabilità di transizione ridotta $B(E\lambda)$

Una proprietà importante nello studio delle reazioni nucleari e dei processi di decadimento elettromagnetico è data dalle probabilità di transizione elettrica di multipolo $B(E\lambda)$. Spesso le reazioni nucleari coinvolgono eccitazioni multipolari dei nuclei, pertanto il calcolo di queste probabilità permette di stimare i contributi di multipolo nelle reazioni stesse. Per i nuclei con alone, in particolare, ci si aspetta una risposta elettromagnetica importante dal *ground state* al continuo, dovuto al fatto che possiedono uno o più nucleoni di valenza molto debolmente legati, come verrà in seguito confermato per il ^{11}Be .

Nello specifico, poiché si è trattato il nucleo in un modello del tipo core + n dove il core è stato considerato inerte mentre il nucleone di valenza è l'unico ad occupare una shell non chiusa, ci si aspetta che le probabilità $B(E\lambda)$ ottenute dall'eccitazione dell'ultimo neutrone rappresentino una buona stima delle probabilità di transizione elettrica effettive del nucleo. In questo capitolo verrà trattato sia il caso in cui le eccitazioni del nucleo avvengano tra stati legati, sia il caso in cui queste ultime ne causino la rottura (reazioni di *breakup*).

Come accennato alla fine della precedente sezione “Base THO”, la descrizione degli stati legati è avvenuta mediante l'utilizzo della base $|\text{THO}, i\rangle$. Invece, per quanto riguarda gli stati nel continuo, le loro proprietà sono completamente determinate dagli sfasamenti δ_ℓ che possono essere ottenuti studiando la funzione d'onda per $r \rightarrow \infty$. Il potenziale attrattivo nucleare, infatti, farà sì che le autofunzioni subiscano un ritardo di fase, tanto minore quanto più grande è l'autovalore dell'energia dello stato, poiché come ci si aspetta, stati di energia molto alta risentano poco della perturbazione dovuta dalla buca di potenziale. Pertanto gli stati al continuo sono stati parametrizzati mediante delle funzioni $\varphi_\ell(k, r)$, ottenute integrando numericamente l'equazione differenziale (1.10) con la condizione che il loro andamento sia della forma ^[3]

$$\varphi_\ell(k, r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\cos \delta_\ell(k) F_\ell(kr) + \sin \delta_\ell(k) G_\ell(kr) \right] \quad (2.1)$$

ove $k = \frac{\sqrt{2\mu\varepsilon}}{\hbar}$, mentre F_ℓ e G_ℓ sono funzioni regolari ed irregolari di Coulomb, cioè soluzioni dell'equazione di Schrödinger per un potenziale coulombiano.

Il calcolo delle probabilità di transizione ridotta $B(E\lambda)$ avviene in modi diversi a seconda che lo stato iniziale e finale siano entrambi legati o che quest'ultimo sia uno stato nel continuo.

Nel primo caso, indicando con $|J_i\rangle$ lo stato iniziale e con $|J_f\rangle$ lo stato finale, si definisce la probabilità di transizione elettrica ridotta come

$$B(E\lambda, J_i \rightarrow J_f) = \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} \left| \langle J_f || \mathcal{M}(E\lambda) || J_i \rangle \right|^2 \quad (2.2)$$

dove \mathcal{M} rappresenta l'operatore di multipolo elettrico

$$\mathcal{M}(E\lambda) = eZ_{eff}^{(\lambda)} r^\lambda Y_{\lambda,\mu} \quad (2.3)$$

mentre $Z_{eff}^{(\lambda)}$ la carica effettiva della forma

$$Z_{eff}^{(\lambda)} = Z_v \left(\frac{m_c}{m_v + m_c} \right)^\lambda + Z_c \left(-\frac{m_v}{m_v + m_c} \right)^\lambda \quad (2.4)$$

Contestualizzando quest'ultima equazione, i pedici c e v si riferiscono rispettivamente a core e nucleoni di valenza, ma possono essere visti, in una descrizione più ampia, come i prodotti di una generica reazione $a \rightarrow c + v$.

Nel secondo caso, invece, nella transizione da uno stato legato al continuo $|kJ_f\rangle$ la precedente definizione (2.2) è sostituita da

$$\frac{dB(E\lambda)}{d\varepsilon} = \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} \frac{\mu_{vc}k}{(2\pi)^3 \hbar^2} \left| \langle kJ_f || \mathcal{M}(E\lambda) || J_i \rangle \right|^2 \quad (2.5)$$

ove μ_{vc} è la massa ridotta del sistema, invece $k = \frac{\sqrt{2\mu_{vc}\varepsilon}}{\hbar}$. Da notare, il fattore aggiuntivo $(\mu_{vc}k/(2\pi)^3 \hbar^2)$ che appare in (2.5) rispetto a (2.2), è consistente sia con la condizione di normalizzazione per le funzioni del continuo $\langle kJ | k'J \rangle = \delta(k - k')$, sia con l'andamento asintotico di (2.1).

¹¹Be: calcolo della probabilità $B(E1)$

Si procederà ora ad analizzare le eccitazioni elettriche del nucleo ¹¹Be, ed in particolare si studieranno le transizioni dipolari elettriche a partire dal suo stato fondamentale. Queste transizioni elettriche consistono nell'assorbimento da parte del nucleo di fotoni che per la conservazione del momento angolare, definendo \vec{J}_i il momento angolare dello stato iniziale e \vec{J}_f quello dello stato finale, devono trasportare un momento angolare quantizzato $\lambda_\gamma = 1$, dove $\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{\lambda}_\gamma$, mentre per la conservazione della parità, gli stati finali dovranno essere di parità invertita. Ne discende, infatti, la seguente regola di selezione per il momento angolare

$$|\vec{J}_i - \vec{J}_f| \leq \lambda_\gamma \leq |\vec{J}_i + \vec{J}_f| \quad (2.6)$$

da cui si ricava che a partire dallo stato fondamentale $1/2^+$, con transizioni elettriche dipolari si raggiungono gli stati $1/2^-$ e $3/2^-$, che corrispondono agli stati di particella singola $p_{1/2}$ e $p_{3/2}$.

Più nel dettaglio nel caso in esame del ¹¹Be descritto mediante un modello del tipo core + n , ove il core è inerte mentre n è un neutrone debolmente legato, è possibile

semplificare l'espressione (2.4). Infatti, sapendo che il neutrone non ha carica, il primo termine risulta nullo, pertanto si ottiene

$$Z_{eff}^{(\lambda)} = Z_c \left(-\frac{\mu_{vc}}{m_c} \right)^\lambda \quad (2.7)$$

ove μ_{vc} è la massa ridotta del sistema. La probabilità di transizione elettrica ridotta $B(E1)$ dipende, come già visto, dall'elemento di matrice ridotto dell'operatore di multipolo, definito da

$$\langle f || \mathcal{M}(E\lambda) || i \rangle = e Z_{eff}^{(\lambda)} \langle f | r^\lambda | i \rangle \langle (l_f s_f) J_f || Y_\lambda || (l_i s_i) J_i \rangle \quad (2.8)$$

ove \mathcal{M} è della stessa forma di (2.3) mentre $\langle f | r^\lambda | i \rangle$ è l'integrale di r^λ con la parte radiale della funzione d'onda iniziale e finale. Inoltre l'ultimo termine risulta essere l'elemento di matrice ridotto delle armoniche sferiche, dato in funzione del momento angolare e di spin. In quest'elaborato, il *ground state* $(1/2^+)_{G.S.}$ sarà lo stato iniziale $|i\rangle$, mentre come stato finale $|f\rangle$ verrà considerato sia lo stato eccitato legato $(1/2^-)_{bound}$ sia gli stati del continuo $1/2^-$ e $3/2^-$.

Utilizzando il potenziale precedentemente indicato come V_3 , il valore di probabilità ridotta $B(E1)$ dallo stato fondamentale allo stato eccitato legato è di

$$B(E1)_{[(1/2^+)_{G.S.} \rightarrow (1/2^-)_{bound}]} = 0.2607 \text{ e}^2 \text{ fm}^2 \quad (2.9)$$

Poi, in [fig. 2.1] sono rappresentati gli andamenti della probabilità di transizione elettrica $dB(E1)/d\varepsilon$ in funzione dell'energia ε , per la transizione agli stati eccitati del continuo $1/2^-$ e $3/2^-$.

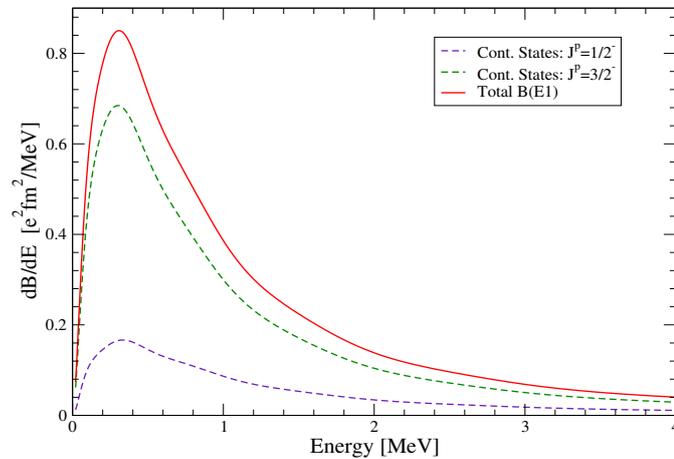


Figura 2.1: Andamento delle curve $dB(E1)/d\varepsilon$ per le transizioni dal *ground state* agli stati $1/2^-$ (in viola) e $3/2^-$ (in verde) del continuo. La curva in rosso rappresenta la somma dei due precedenti contributi.

Integrando le curve appena illustrate si ottengono i contributi che ciascuna transizione apporta alla probabilità di transizione elettrica ridotta $B(E1)$. Dato che fra tutti gli stati eccitati $1/2^-$, il primo (in ordine di energia) risulta essere l'unico stato legato, si sono considerati separatamente i loro contributi alla probabilità di transizione elettrica ridotta $B(E1)$, come indicato in [tab. 2.1, colonna “ V_3 ”]. Inoltre, si può notare come il contributo dato dalla transizione allo stato $3/2^-$ sia molto maggiore rispetto a quello

dato da $1/2^-$. Ciò è causato principalmente da due fattori: il primo riguarda il fatto che una parte della probabilità agli stati $1/2^-$ viene esaurita nella transizione verso lo stato legato $(1/2^-)_{bound}$; il secondo invece si ricava considerando che lo stato $3/2^-$ ha un più alto valore del momento angolare totale, e di conseguenza una degenerazione maggiore, che si traduce in una probabilità di transizione elettrica dipolare $B(E1)$ più elevata. Si può osservare, infine, come entrambi i contributi siano concentrati prevalentemente ad energie molto basse e questo aspetto rappresenta una delle proprietà caratterizzanti dell'alone.

Variazione del potenziale $V(r)$

Analogamente a quanto fatto nel capitolo precedente, si analizzerà ora la dipendenza della probabilità di transizione elettrica dipolare ridotta $B(E1)$ al variare del potenziale $V(r)$. In questa trattazione verrà variato solamente il termine centrale V_0 del potenziale $V(r)$ e, pertanto, saranno utilizzati i medesimi valori usati in precedenza, ossia $\{V_i\}_{i=1,2,3,4}$.

Utilizzando le espressioni (2.2) e (2.5), rispettivamente per le transizioni allo stato legato ed agli stati del continuo, si sono ottenuti i contributi alla probabilità di transizione ridotta $B(E1)$ per ciascun potenziale $\{V_i\}_{i=1,2,3,4}$. I valori sono stati raccolti nella seguente tabella [tab. 2.1]:

Probabilità di transizione elettrica ridotta $B(E1)$				
	V_1	V_2	V_3	V_4
$G.S. \rightarrow \frac{1}{2}_{bound}^- [e^2\text{fm}^2]$	0.3216	0.2958	0.2607	0.2149
$G.S. \rightarrow \frac{1}{2}_{cont.}^- [e^2\text{fm}^2]$	0.6736	0.4281	0.2467	0.1205
$G.S. \rightarrow \frac{3}{2}_{cont.}^- [e^2\text{fm}^2]$	1.8487	1.2936	0.8476	0.4931
$B(E1)_{cont.}^{TOT} [e^2\text{fm}^2]$	2.5223	1.7222	1.0943	0.6137

Tabella 2.1: Contributi alla probabilità di transizione elettrica dipolare ridotta $B(E1)$ calcolati dallo stato fondamentale ($G.S.$) a rispettivamente il primo stato eccitato legato $(1/2^-)_{bound}$ e gli stati del continuo $1/2^-$ e $3/2^-$. L'ultima riga è data dalla somma dei due contributi al continuo precedenti e rappresenta il valore totale $B(E1)_{cont.}$.

Una rappresentazione dei valori di [tab. 2.1] delle probabilità $B(E1)$ al continuo, in funzione dell'energia del *ground state*, per ciascun potenziale $\{V_i\}_{i=1,2,3,4}$ è data in [fig. 2.4]. In generale, si nota come in presenza di un potenziale nucleare via via meno intenso in modulo, a parità di transizione, la probabilità di eccitazione elettrica $B(E1)$ risulti invece più elevata. Ciò è causato dal fatto che l'energia del *ground state* si abbassa all'aumentare del modulo del potenziale, pertanto più l'energia $\varepsilon_{G.S.}$ è prossima alla soglia del continuo, più è facile che il sistema venga eccitato. In [fig. 2.2] è illustrato l'andamento della probabilità di transizione elettrica $dB(E1)/d\varepsilon$ dei soli stati al continuo in funzione dell'energia ε , per ciascun potenziale $\{V_i\}_{i=1,2,3,4}$. Sono state evidenziate inoltre, mediante il tratteggio verticale, le relative energie in cui indicativamente le curve in esame raggiungono il valore massimo. Si è verificato poi, in modo approssimato, l'andamento lineare della posizione di questi picchi nelle distribuzioni $dB(E1)/d\varepsilon$ rispetto ai corrispondenti valori di energia dello stato fondamentale [fig. 2.3].

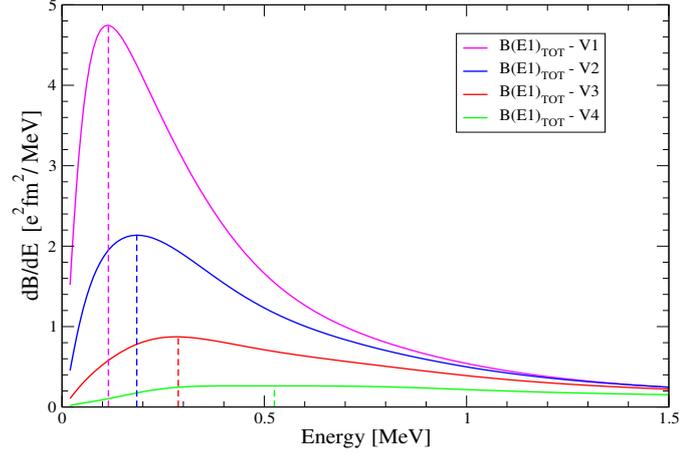


Figura 2.2: Distribuzioni $dB(E1)/d\varepsilon$ degli stati al continuo (somma dei due contributi $(\frac{1}{2}^-)_{cont.}$ e $(\frac{3}{2}^-)_{cont.}$) al variare del potenziale $\{V_i\}_{i=1,2,3,4}$.

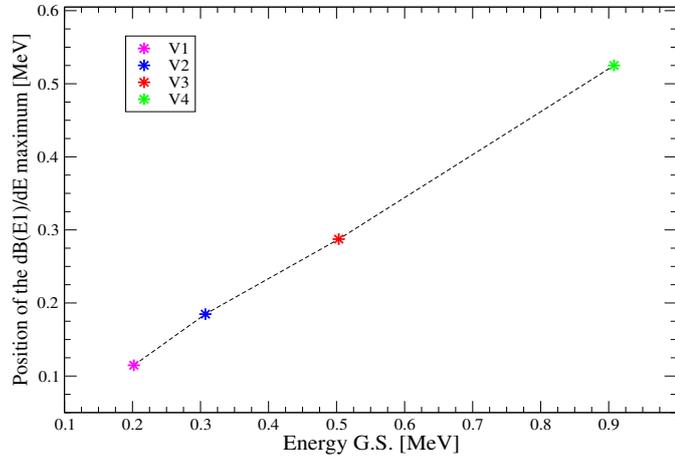


Figura 2.3: Andamento delle energie associate al valore massimo nella distribuzione $dB(E1)/d\varepsilon$ degli stati al continuo in funzione del modulo dell'energia del *ground state*, per ciascun potenziale $\{V_i\}_{i=1,2,3,4}$.

Infatti, è previsto che la distribuzione $dB(E1)/d\varepsilon$ nelle transizioni da stati di particella singola s a quelli p , sia descritta da ^[5]

$$\frac{dB(E1)}{d\varepsilon}(s \rightarrow p) = \frac{3\hbar^2}{\pi^2\mu} (Z_{eff} e)^2 \frac{\sqrt{\varepsilon_{G.S.}} \varepsilon^{3/2}}{(\varepsilon + \varepsilon_{G.S.})^4} \quad (2.10)$$

che presenta un massimo caratteristico a $\varepsilon = \frac{3}{5}\varepsilon_{G.S.}$, come verificato approssimativamente dai risultati ottenuti.

Infine, sono stati rappresentati separatamente in [fig. 2.4] i contributi apportati alla probabilità di transizione elettrica dipolare $B(E1)$ da ciascuna delle transizioni possibili verso stati del continuo, in funzione dell'energia del *ground state*. Per una più immediata comprensione, nell'asse delle ascisse, si è considerato il valore assoluto dell'energia dello stato fondamentale.

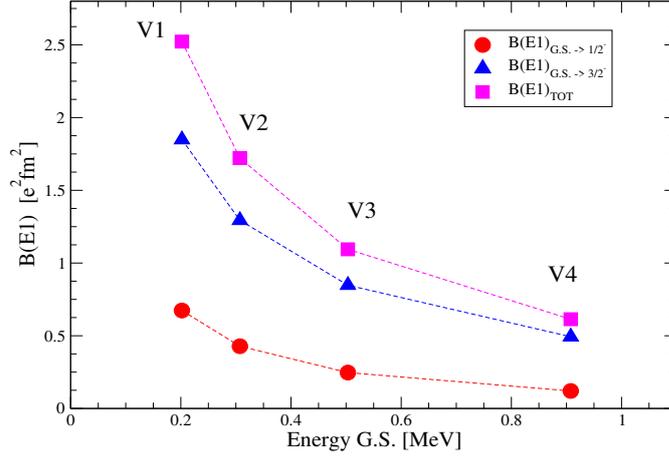


Figura 2.4: Valori della probabilità di transizione elettrica $B(E1)$ a stati del continuo in funzione dell'energia (in modulo) del *ground state* a ciascun potenziale $\{V_i\}_{i=1,2,3,4}$. Sono rappresentati rispettivamente: in *rosso* i contributi dovuti alle transizioni verso stati $(1/2^-)$ nel continuo, in *blu* quelli dovuti alle transizioni verso stati $(3/2^-)$ nel continuo ed, infine, in *magenta* la somma dei due precedenti contributi che corrisponde al valore totale $B(E1)$.

Approssimativamente, quest'ultimo grafico conferma l'andamento teorico atteso di $B(E1)$ (nel quale viene considerato un modello a 2 corpi ove il core è completamente inerte) che risulta inversamente proporzionale all'energia dello stato fondamentale, descritto da [5]

$$B(E1) = \frac{3\hbar^2}{16\pi} \frac{(Z_{eff} e)^2}{\mu} \frac{1}{\varepsilon_{G.S.}} F(\varepsilon_{G.S.}, R) \quad (2.11)$$

ove $F(\varepsilon_{G.S.}, R)$ è un fattore correttivo che dipende in generale dal raggio R del potenziale. In definitiva, lo studio della probabilità di transizione elettrica $E1$ come funzione della ampiezza del potenziale attrattivo, e pertanto dell'energia di legame del neutrone di valenza, ci permette di affermare che più il sistema è vicino alla soglia, maggiore sarà la sua probabilità di eccitazione che, inoltre, si concentrerà a energie più basse nel continuo. Questo fenomeno gioca un ruolo fondamentale nella fisica dell'alone.

Confronto con dati sperimentali

In conclusione, si è effettuato un confronto tra dei dati sperimentali ^[6] e l'andamento teorico della probabilità di transizione ridotta $dB(E1)/d\varepsilon$ al continuo per il ^{11}Be . In particolare, in [fig. 2.5] la curva teorica è data dalla somma dei contributi a $B(E1)$ delle transizioni dallo stato fondamentale a gli stati al continuo $1/2^-$ e $3/2^-$, ove si è utilizzato come ampiezza del potenziale il valore precedentemente indicato come V_3 . Siccome la risoluzione in energia del set di dati è molto buona, non è stata effettuata la convoluzione dell'andamento teorico con la funzione di risoluzione sperimentale, in quanto l'effetto è trascurabile.

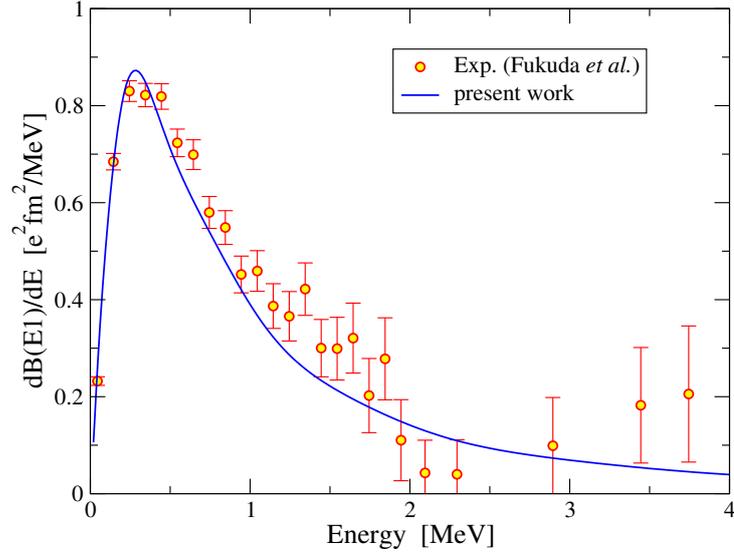


Figura 2.5: Confronto con i dati sperimentali ^[6] della distribuzione $dB(E1)/d\varepsilon$ dal *ground state* a stati del continuo per il nucleo ^{11}Be .

Da notare, inoltre, come la distribuzione dei dati sperimentali sia in buon accordo con l'andamento teorico calcolato, in particolare nella regione a basse energie, dove sono più concentrate le transizioni elettriche. Infine, è importante ricordare come questo accordo con i dati sia stato ottenuto, nonostante la semplice descrizione del sistema con un modello a due corpi del tipo $\text{core} + n$.

Capitolo 3

Conclusioni

L'obiettivo di questo elaborato era descrivere le caratteristiche rilevanti dei sistemi nucleari esotici, focalizzandosi sulle proprietà peculiari dei nuclei con alone. Per far ciò, è stato preso in considerazione il ^{11}Be , nucleo noto per possedere struttura di alone di un neutrone. Dopo avere introdotto il modello a shell nucleare ed utilizzando un modello fenomenologico del tipo $\text{core} + n$, sono state analizzate le funzioni d'onda radiali ridotte $u(r)$ per lo stato fondamentale e per gli stati eccitati di questo sistema. Per la descrizione degli stati legati, sono state utilizzate le autofunzioni di base dell'oscillatore armonico, opportunamente trasformate (THO) per poter simulare accuratamente il comportamento asintotico del sistema in presenza di un potenziale limitato. Si è poi studiato l'andamento delle funzioni d'onda e la relativa energia del *ground state* al variare del termine centrale del potenziale nucleare considerato. Come atteso, si sono ottenute delle funzioni d'onda molto estese a conferma del fatto che il nucleone di valenza risulta poco legato al core, e di conseguenza la probabilità di trovarlo a grandi distanze da esso è rilevante. Successivamente, si sono descritti gli stati del continuo ed, in particolare, le eccitazioni elettriche $E1$ dallo stato fondamentale al continuo per il ^{11}Be . La parametrizzazione di questi stati non legati è avvenuta mediante delle funzioni, ottenute tramite integrazione numerica dell'equazione di Schrödinger, che rispecchiassero asintoticamente il loro andamento oscillante. Dopo aver introdotto l'operatore di multipolo elettrico $\mathcal{M}(E\lambda)$, ci si è concentrati nel calcolo della probabilità di transizione elettrica dipolare $B(E1)$ del caso in esame. Se ne è dunque, analizzato il comportamento al variare dell'ampiezza del potenziale nucleare, verificando inoltre l'andamento iperbolico della $B(E1)$ totale al continuo in funzione dell'energia del *ground state*. Si è potuto osservare che, tanto più l'energia del sistema è prossima alla soglia del continuo, maggiore sarà la probabilità di eccitazione verso stati non legati. Inoltre, si è notato come la probabilità di transizione $B(E1)$ risulta più elevata in corrispondenza di basse energie del continuo, proprietà questa, caratterizzante dei sistemi con alone. Infine, si è confrontato un set di dati sperimentali del ^{11}Be con la distribuzione $dB(E1)/dE$ calcolata in precedenza, riscontrando un buon accordo tra di loro.

Bibliografia

- [1] THOx: A coupled-channels code for CDCC calculations with core excitations, developed by the Seville group.
Source code available at: <https://github.com/MarioGomezRamos/THOx>
- [2] L. Fortunato. “*Appunti di fisica nucleare*” (2nd edition) (2019).
- [3] J. A. Lay, A. M. Moro, J. M. Arias, J. Gómez-Camacho. “*Exploring continuum structures with a pseudo-state basis*”. In: *Phys. Rev. C* 82, 024605 (2010)
- [4] P. Capel, G. Golstein, D. Baye. “*Time-dependent analysis of the breakup of ^{11}Be on ^{12}C at 67 MeV/nucleon*”. In: *Phys. Rev. C* 70, 064605 (2004)
- [5] M. A. Nagarajan, S. M. Lenzi, A. Vitturi. “*Low-lying dipole strength for weakly bound system: A simple analytic estimate*” In: *Eur. Phys. J.A* 24, 63-67 (2005)
- [6] N. Fukuda et al. “*Coulomb and nuclear breakup of a halo nucleus ^{11}Be* ” In: *Phys. Rev. C* 70, 054606 (2004)