Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

# Sulla dimostrabilità costruttiva del teorema di compattezza per modelli algebrici della logica proposizionale

Relatore:
Prof. Francesco Ciraulo

Laureando: Marco Barbieri
Matricola: 1155193

Anno Accademico 2022/2023

21/07/2023

# Indice

# Introduzione

Il teorema di compattezza costituisce uno strumento fondamentale della teoria dei modelli, la branca della logica matematica che studia le relazioni tra le teorie formali ed i loro modelli: esso afferma che esiste un modello per un insieme $\Gamma$ di formule di un linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ se e solo se esiste un modello per ogni sottoinsieme di $\Gamma$.
Se da un lato una delle due implicazioni del teorema risulta scontata, in quanto è evidente che ogni modello per un insieme $\Gamma$ di formule di un linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ è un modello per ogni sottoinsieme di $\Gamma$, l'altra implicazione non è affatto banale.
Se $\Gamma$ è infinito allora il teorema stabilisce un'equivalenza tra la soddisfacibilità dell'insieme infinito $\Gamma$ e la soddisfacibilità degli infiniti suoi sottoinsiemi finiti; se invece $\Gamma$ è finito allora il teorema è banale in quanto $\Gamma$ è un sottoinsieme finito di sè stesso.

Il teorema di compattezza per modelli della logica predicativa (del primo ordine) classica nel caso di linguaggi numerabili è stato dimostrato per la prima volta da Kurt Gödel, che nel 1930 lo ha ricavato dai teoremi di validità e completezza, utilizzando le relazioni che intercorrono tra gli aspetti semantici e quelli sintattici della logica predicativa classica. Nel 1936 Anatoly Malcev ha esteso il risultato di Gödel al caso di linguaggi arbitrari.
In seguito all'introduzione dell'ultraprodotto nell'ambito della teoria dei modelli, avvenuta grazie a Jerzy Łoś nel 1955, Alfred Tarski, Dana Scott ed Anne Morel hanno dimostrato il teorema di compattezza per modelli della logica predicativa classica nel caso di linguaggi arbitrari in modo puramente semantico, ovvero senza coinvolgere la nozione di dimostrabilità.
Questi due approcci rappresentano le dimostrazioni ad oggi più diffuse relativamente al teorema di compattezza (per una descrizione storica di questo teorema si veda, ad esempio, [1]).

Il nome del teorema di compattezza è dovuto al fatto che, per quanto riguarda il caso della logica proposizionale classica, lo si può ricavare dal teorema di Tychonoff, il quale afferma che il prodotto di spazi topologici compatti è compatto rispetto alla topologia prodotto.

Le applicazioni del teorema di compattezza sono molteplici e riguardano svariati ambiti della matematica, dalla logica matematica all'algebra astratta, dall'analisi non standard alla combinatoria. Tuttavia, a fronte della potenza del teorema nel garantire l'esistenza di modelli per teorie finitamente soddisfacibili, la costruzione di tali modelli non è effettiva in quanto la dimostrazione utilizza principi non costruttivi quali l'assioma della scelta o principi ad esso equivalenti.

Sulla base di queste considerazioni in merito alla non costruttività delle dimostrazioni del teorema di compattezza, il presente lavoro di tesi si prefigge lo scopo di indagare la dimostrabilità costruttiva del teorema di compattezza per modelli algebrici della logica proposizionale.

Lo studio è stato condotto utilizzando tre diverse tipologie di metateoria: una metateoria intuizionista, una metateoria classica (che, salvo dove diversamente specificato, è da intendersi senza assioma della scelta) ed una metateoria classica con assioma della scelta.

Chiaramente, la potenza dimostrativa di una metateoria classica con assioma della scelta è maggiore di quella di una metateoria classica, che a sua volta è maggiore di quella di una metateoria intuizionista.
D'altra parte, i risultati validi costruttivamente sono quelli dimostrabili utilizzando una metateoria intuizionista (anche se in alcuni contesti vengono considerati validi costruttivamente i risultati dimostrabili utilizzando una metateoria classica).
Salvo dove diversamente specificato, i risultati di questa tesi sono dimostrati utilizzando una metateoria intuizionista, in particolare sono dimostrati senza utilizzare dimostrazioni per assurdo o per casi.
Gli enunciati dimostrati utilizzando una metateoria classica sono contrassegnati dall'etichetta (LEM) per indicare il principio del terzo escluso (Law of Excluded Middle), che afferma che per ogni proposizione del metalinguaggio si ha che la proposizione è vera o che è vera la sua negazione.
Gli enunciati dimostrati utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta sono contrassegnati dall'etichetta (LEM+AC) per indicare il principio del terzo escluso e l'assioma della scelta (Axiom of Choice); quest'ultimo afferma che data una famiglia non vuota di insiemi non vuoti esiste una funzione che ad ogni insieme della famiglia fa corrispondere un suo elemento.

Si è scelto di studiare la dimostrabilità costruttiva del teorema di compattezza per modelli algebrici della logica proposizionale sia intuizionista che classica, per comprendere se e in che modo la logica gioca un ruolo nella dimostrabilità del teorema.

Sono sorte in modo naturale diverse definizioni di modello algebrico, in generale non equivalenti, a ciascuna delle quali corrisponde una versione del teorema di compattezza. La dimostrabilità di ciascuna versione del teorema di compattezza è stata analizzata sia nel caso di linguaggi arbitrari che nel caso di linguaggi numerabili.

Nel capitolo 1, dopo aver introdotto i linguaggi proposizionali, si presentano brevemente le regole sintattiche della logica proposizionale intuizionista e classica, evidenziandone gli aspetti comuni e le differenze.
Nel capitolo 2 si utilizzano le regole sintattiche della logica proposizionale intuizionista e classica per ricavare la struttura algebrica delle due logiche, si introducono quindi le algebre di Heyting e di Boole e se ne dimostrano alcune relazioni e proprietà elementari.
Nel capitolo 3 si definiscono diverse nozioni di modello algebrico e quindi di soddisfacibilità nel caso della logica proposizionale intuizionista e classica, quindi si studiano le implicazioni che intercorrono tra ciascuna nozione nel caso della logica proposizionale intuizionista e la corrispondente nozione nel caso della logica proposizionale classica.
Nel capitolo 4 si studiano le implicazioni che intercorrono tra le varie nozioni di modello algebrico e quindi di soddisfacibilità, sia nel caso della logica proposizionale intuizionista che nel caso della logica proposizionale classica.
Nei capitoli 5, 6 e 7 si studia la dimostrabilità delle varie versioni del teorema di compattezza per linguaggi proposizionali arbitrari ottenute in corrispondenza delle varie definizioni di soddisfacibilità, sia nel caso della logica proposizionale intuizionista che nel caso della logica proposizionale classica, utilizzando ciascuna delle tre metateorie (intuizionista, classica e classica con assioma della scelta).
Nei capitoli 8, 9 e 10 si studia la dimostrabilità delle varie versioni del teorema di compattezza per linguaggi proposizionali numerabili ottenute in corrispondenza delle varie definizioni di soddisfacibilità, sia nel caso della logica proposizionale intuizionista che nel caso della logica proposizionale classica, utilizzando ciascuna delle tre metateorie (intuizionista, classica e classica con assioma della scelta).
Nel capitolo 11, complementare al capitolo 4, si completa lo studio delle implicazioni che inter-

corrono tra le varie nozioni di modello algebrico e quindi di soddisfacibilità, sia nel caso della logica proposizionale intuizionista che nel caso della logica proposizionale classica.

# Capitolo 1

# Logica proposizionale

In questo capitolo si descrive la struttura di un linguaggio proposizionale, quindi si presentano la logica proposizionale intuizionista e classica dal punto di vista sintattico mediante il calcolo dei sequenti.

Una trattazione maggiormente dettagliata della struttura dei linguaggi proposizionali si trova in [2, capitolo 1]. Per una presentazione del calcolo dei sequenti per la logica classica e per la logica intuizionista si veda, ad esempio, [3, capitoli 2, 3, 5].

## 1.1 Linguaggio proposizionale

Si definisce la struttura di un linguaggio proposizionale.

**Definizione 1.1.1** (Linguaggio proposizionale)**.** *Un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è un insieme di simboli costituito da:*

- *costanti:* $\top$ *(proposizione vera) e* $\bot$ *(proposizione falsa);*
- *variabili proposizionali:* $p, q, r, \ldots$*;*
- *connettivi:* $\wedge$ *(congiunzione),* $\vee$ *(disgiunzione),* $\rightarrow$ *(implicazione) e* $\neg$ *(negazione);*
- *parentesi: ( e ).*

Dato un linguaggio proposizionale è possibile descriverne l'insieme delle proposizioni.

**Definizione 1.1.2** (Insieme delle proposizioni)**.** *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio proposizionale, l'insieme delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ è l'insieme $Prop(\mathcal{L})$ definito ricorsivamente dalle seguenti condizioni:*

- *le costanti $\bot$ e $\top$ del linguaggio $\mathcal{L}$ appartengono all'insieme $Prop(\mathcal{L})$;*
- *le variabili proposizionali del linguaggio $\mathcal{L}$ appartengono all'insieme $Prop(\mathcal{L})$;*
- *se $\phi, \psi \in Prop(\mathcal{L})$ allora $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi) \in Prop(\mathcal{L})$;*
- *se $\phi \in Prop(\mathcal{L})$ allora $(\neg\phi) \in Prop(\mathcal{L})$;*
- *nient'altro appartiene a $Prop(\mathcal{L})$.*

## 1.2 Logica proposizionale intuizionista

Gli strumenti che si utilizzano per descrivere sintassi della logica proposizionale sono le regole. Una regola, che in generale presenta un certo numero di premesse ed una conclusione, indica che se sono vere tutte le premesse allora è vera anche la conclusione. Una regola priva di premesse si dice un assioma.

Sia le premesse che le conclusioni delle regole si scrivono nella forma $\Gamma \vdash \phi$, dove $\Gamma$ è una lista di proposizioni che rappresentano le ipotesi e $\phi$ è una proposizione che rappresenta la tesi. Tale scrittura si dice un sequente e il suo significato è che se tutte le proposizioni in $\Gamma$ sono vere allora anche la proposizione $\phi$ è vera.
Le lettere greche minuscole indicano delle proposizioni mentre le lettere greche maiuscole indicano delle liste di proposizioni.

La prima regola della logica proposizionale intuizionista è l'assioma identità:

$$\text{(ax-id)}\ \frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}$$

Le regole che riguardano il connettivo congiunzione sono due, una per dimostrare un sequente in cui una congiunzione compare come ipotesi e una per dimostrare un sequente in cui una congiunzione compare come tesi:

$$(\wedge\text{-left})\ \frac{\Gamma, \phi, \psi \vdash \gamma}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \gamma} \qquad (\wedge\text{-right})\ \frac{\Gamma \vdash \phi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}$$

Le regole che riguardano il connettivo disgiunzione sono tre, una per dimostrare un sequente in cui una disgiunzione compare come ipotesi e due per dimostrare un sequente in cui una disgiunzione compare come tesi:

$$(\vee\text{-left})\ \frac{\Gamma, \phi \vdash \gamma \qquad \Gamma, \psi \vdash \gamma}{\Gamma, \phi \vee \psi \vdash \gamma} \qquad (\vee\text{-right-1})\ \frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} \quad (\vee\text{-right-2})\ \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi}$$

Gli assiomi che riguardano la proposizione vera e la proposizione falsa sono due:

$$(\text{ax-}\top)\ \frac{}{\Gamma \vdash \top} \qquad (\text{ax-}\bot)\ \frac{}{\Gamma, \bot \vdash \phi}$$

I due assiomi che riguardano la proposizione vera e la proposizione falsa sono equivalenti alle seguenti regole:

$$(\top\text{-right})\ \frac{\Gamma, \top \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi} \qquad (\bot\text{-left})\ \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}$$

Le regole che riguardano il connettivo implicazione sono due, una per dimostrare un sequente in cui un'implicazione compare come ipotesi e una per dimostrare un sequente in cui un'implicazione compare come tesi:

$$(\to\text{-left})\ \frac{\Gamma \vdash \phi \qquad \Gamma, \psi \vdash \gamma}{\Gamma, \phi \to \psi \vdash \gamma} \qquad (\to\text{-right})\ \frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \to \psi}$$

Le regole che riguardano il connettivo negazione, definito dall'equazione $\neg\phi \equiv \phi \to \bot$, sono quelle derivate dalle regole che riguardano il connettivo implicazione:

$$(\neg\text{-left})\ \frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \neg\phi \vdash \gamma} \qquad (\neg\text{-right})\ \frac{\Gamma, \phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\phi}$$

Oltre agli assiomi e alle regole logiche, il calcolo dei sequenti per la logica proposizionale intuizionista presenta delle regole strutturali.

La prima regola strutturale è la regola di indebolimento:

$$\text{(weakening)}\ \frac{\Gamma \vdash \gamma}{\Gamma, \phi \vdash \gamma}$$

La seconda regola strutturale è la regola di contrazione:

$$\text{(contraction)}\ \frac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \gamma}{\Gamma, \phi \vdash \gamma}$$

La terza regola strutturale è la regola di permutazione:

$$(\text{permutation})\ \frac{\Gamma, \phi, \psi, \Delta \vdash \gamma}{\Gamma, \psi, \phi, \Delta \vdash \gamma}$$

L'ultima regola del calcolo dei sequenti per la logica proposizionale intuizionista è la regola del taglio:

$$(\text{cut})\ \frac{\Gamma \vdash \phi \qquad \Gamma, \phi \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma}$$

## 1.3 Logica proposizionale classica

Tutte le regole della logica proposizionale intuizionista sono anche regole della logica proposizionale classica.

La logica proposizionale classica ha però un assioma in più rispetto alla logica proposizionale intuizionista, l'assioma del terzo escluso:

$$(\text{ax-excluded-middle})\ \frac{}{\vdash \phi \vee \neg\phi}$$

L'assioma del terzo escluso è equivalente a ciascuna delle seguenti regole:

$$(\text{double-negation})\ \frac{\Gamma \vdash \neg\neg\phi}{\Gamma \vdash \phi}$$

$$(\text{contradiction})\ \frac{\Gamma, \neg\phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}$$

$$(\text{consequentia-mirabilis})\ \frac{\Gamma, \neg\phi \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi}$$

# Capitolo 2

# Struttura algebrica della logica proposizionale

In questo capitolo si presentano le strutture algebriche che modellano i valori di verità nel caso della logica proposizionale intuizionista e classica, ovvero le algebre di Heyting e di Boole rispettivamente.

## 2.1 Insiemi parzialmente ordinati

Si vuole considerare l'insieme dei possibili valori di verità delle proposizioni e definire su di esso una relazione di ordine parziale $\leq$ che esprima il fatto che se $x \leq y$ allora $y$ è vero almeno quanto $x$.

**Definizione 2.1.1** (Relazione di ordine parziale)**.** *Una relazione di ordine parziale $\leq$ su un insieme $P$ è una relazione binaria su $P$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

| | | |
|---|---|---|
| *(riflessiva)* | $x \leq x$ | *per ogni* $x \in P$ |
| *(antisimmetrica)* | *se* $x \leq y$ *e* $y \leq x$ *allora* $x = y$ | *per ogni* $x, y \in P$ |
| *(transitiva)* | *se* $x \leq y$ *e* $y \leq z$ *allora* $x \leq z$ | *per ogni* $x, y, z \in P$ |

**Definizione 2.1.2** (Insieme parzialmente ordinato)**.** *Un insieme parzialmente ordinato è una struttura algebrica $(P, \leq)$ tale che $P$ è un insieme e $\leq$ è una relazione di ordine parziale su $P$.*

Analizzando la nozione di sequente $\Gamma \vdash \psi$ nel caso in cui l'insieme $\Gamma$ sia finito, cioè $\Gamma = \phi_1, \ldots, \phi_n$, si osserva che vale $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ se e solo se vale $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n \vdash \psi$, quindi la relazione $\vdash$ è una relazione binaria definita sull'insieme $\mathrm{Prop}(\mathcal{L})$.

L'assioma identità nella forma $\phi \vdash \phi$ assicura che la relazione $\vdash$ è riflessiva, inoltre la regola del taglio garantisce che la relazione $\vdash$ è transitiva in quanto da $\phi \vdash \psi$ e $\psi \vdash \gamma$ si può dedurre che $\phi \vdash \gamma$. La relazione binaria $\vdash$ è quindi un preordine sull'insieme $\mathrm{Prop}(\mathcal{L})$.

**Definizione 2.1.3** (Preordine)**.** *Un preordine $\preceq$ su un insieme $P$ è una relazione binaria $\preceq$ su $P$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

| | | |
|---|---|---|
| *(riflessiva)* | $x \preceq x$ | *per ogni* $x \in P$ |
| *(transitiva)* | *se* $x \preceq y$ *e* $y \preceq z$ *allora* $x \preceq z$ | *per ogni* $x, y, z \in P$ |

**Definizione 2.1.4** (Insieme preordinato)**.** *Un insieme preordinato è una struttura algebrica $(P, \preceq)$ tale che $P$ è un insieme e $\preceq$ è un preordine su $P$.*

Tuttavia la relazione $\vdash$ non è una relazione di ordine parziale sull'insieme $\mathrm{Prop}(\mathcal{L})$ in quanto non è antisimmetrica, infatti valgono sia il sequente $\phi \vdash \phi \wedge \phi$ che il sequente $\phi \wedge \phi \vdash \phi$ ma le proposizioni $\phi$ e $\phi \wedge \phi$ sono diverse.

Una tecnica standard consente di definire una relazione di ordine parziale a partire da un preordine, costruendo un insieme quoziente rispetto ad una opportuna relazione di equivalenza.

**Definizione 2.1.5** (Relazione di equivalenza). *Una relazione di equivalenza $\sim$ su un insieme $S$ è una relazione binaria su $S$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

| | | |
|---|---|---|
| *(riflessiva)* | $x \sim x$ | *per ogni* $x \in S$ |
| *(simmetrica)* | *se* $x \sim y$ *allora* $y \sim x$ | *per ogni* $x, y \in S$ |
| *(transitiva)* | *se* $x \sim y$ *e* $y \sim z$ *allora* $x \sim z$ | *per ogni* $x, y, z \in S$ |

**Definizione 2.1.6** (Classe di equivalenza). *Sia $\sim$ una relazione di equivalenza su un insieme $S$. La classe di equivalenza modulo $\sim$ di un elemento $x \in S$ è l'insieme $[x]_\sim = \{y \in S \mid x \sim y\}$.*

**Definizione 2.1.7** (Insieme quoziente). *Sia $\sim$ una relazione di equivalenza su un insieme $S$. L'insieme quoziente di $S$ rispetto a $\sim$ è l'insieme $S/\sim\, = \{[x]_\sim \mid x \in S\}$.*

Si definisce una relazione di equivalenza $\sim_\vdash$ sull'insieme $\mathrm{Prop}(\mathcal{L})$ ponendo $\phi \sim_\vdash \psi$ se e solo se $\phi \vdash \psi$ e $\psi \vdash \phi$, si considerano le classi di equivalenza $[\phi]_\vdash = \{\psi \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L}) \mid \phi \sim_\vdash \psi\}$ e infine si definisce una relazione di ordine parziale $\leq_\vdash$ sull'insieme quoziente
$\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash\, = \{[\phi]_\vdash \mid \phi \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})\}$ ponendo $[\phi]_\vdash \leq_\vdash [\psi]_\vdash$ se e solo se vale $\phi \vdash \psi$. Si può dimostrare che la relazione binaria $\leq_\vdash$ è ben definita, cioè che non dipende dai rappresentanti delle classi di equivalenza.

L'insieme dei possibili valori di verità delle proposizioni deve quindi possedere una struttura di insieme parzialmente ordinato.

Si può dimostrare che $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash, \leq_\vdash)$ è un insieme parzialmente ordinato.

## 2.2 Reticoli

L'insieme dei possibili valori di verità delle proposizioni deve possedere una struttura di insieme parzialmente ordinato, tuttavia non tutti gli insiemi parzialmente ordinati sono adatti a modellare tali valori di verità.

Date due proposizioni $\phi$ e $\psi$ si ha che valgono i sequenti $\phi \wedge \psi \vdash \phi$ e $\phi \wedge \psi \vdash \psi$, quindi comunque presi due valori di verità $x$ e $y$, corrispondenti alle proposizioni $\phi$ e $\psi$ rispettivamente, deve esistere un valore di verità $z$, corrispondente alla proposizione $\phi \wedge \psi$, tale che $z \leq x$ e $z \leq y$. D'altra parte, per ogni proposizione $\gamma$ si ha che se $\gamma \vdash \phi$ e $\gamma \vdash \psi$ allora $\gamma \vdash \phi \wedge \psi$, dunque per ogni valore di verità $w$, corrispondente alla proposizione $\gamma$, se $w \leq x$ e $w \leq z$ allora deve essere che $w \leq z$.

La relazione d'ordine parziale $\leq$ sull'insieme dei valori di verità delle proposizioni deve quindi essere tale che per ogni coppia di valori di verità $x$ e $y$ esista un valore di verità $\inf\{x, y\}$ che è estremo inferiore dell'insieme $\{x, y\}$ rispetto alla relazione $\leq$.

**Definizione 2.2.1** (Estremo inferiore). *Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato e sia $S \subseteq P$.*
*Si dice che $z \in P$ è estremo inferiore di $S$ rispetto alla relazione $\leq$ se:*

- *$z \leq x$ per ogni $x \in S$;*
- *se esiste $y \in P$ tale che $y \leq x$ per ogni $x \in S$ allora $y \leq z$.*

Dati un insieme parzialmente ordinato $(P, \leq)$ e $S \subseteq P$ si può dimostrare che se esiste un estremo inferiore di $S$ rispetto alla relazione $\leq$ allora questo è unico, in tal caso l'estremo inferiore di $S$ rispetto alla relazione $\leq$ si indica con $\inf S$.

Date due proposizioni $\phi$ e $\psi$ si ha che valgono i sequenti $\phi \vdash \phi \vee \psi$ e $\psi \vdash \phi \vee \psi$, quindi comunque presi due valori di verità $x$ e $y$, corrispondenti alle proposizioni $\phi$ e $\psi$ rispettivamente, deve esistere un valore di verità $z$, corrispondente alla proposizione $\phi \vee \psi$, tale che $x \leq z$ e $y \leq z$. D'altra parte, per ogni proposizione $\gamma$ si ha che se $\phi \vdash \gamma$ e $\psi \vdash \gamma$ allora $\phi \wedge \psi \vdash \gamma$, dunque per ogni valore di verità $w$, corrispondente alla proposizione $\gamma$, se $x \leq w$ e $z \leq w$ allora deve essere che $z \leq w$.

La relazione d'ordine parziale $\leq$ sull'insieme dei valori di verità delle proposizioni deve quindi essere tale che per ogni coppia di valori di verità $x$ e $y$ esista un valore di verità $\sup\{x, y\}$ che è estremo superiore dell'insieme $\{x, y\}$ rispetto alla relazione $\leq$.

**Definizione 2.2.2** (Estremo superiore)**.** *Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato e sia $S \subseteq P$.*
*Si dice che $z \in P$ è estremo superiore di $S$ rispetto alla relazione $\leq$ se:*
- *$x \leq z$ per ogni $x \in S$;*
- *se esiste $y \in P$ tale che $x \leq y$ per ogni $x \in S$ allora $z \leq y$.*

Dati un insieme parzialmente ordinato $(P, \leq)$ e $S \subseteq P$ si può dimostrare che se esiste un estremo superiore di $S$ rispetto alla relazione $\leq$ allora questo è unico, in tal caso l"estremo superiore di $S$ rispetto alla relazione $\leq$ si indica con $\sup S$.

L'insieme dei possibili valori di verità delle proposizioni deve quindi possedere una struttura di insieme parzialmente ordinato in cui ogni coppia di elementi ammette estremo inferiore ed estremo superiore, ovvero di reticolo.

**Definizione 2.2.3** (Reticolo, definizione relazionale)**.** *Un reticolo è un insieme parzialmente ordinato $(L, \leq)$ tale che per ogni $x, y \in L$ esistano $\inf\{x, y\}$ e $\sup\{x, y\}$.*

In alternativa alla definizione relazionale, è possibile introdurre i reticoli mediante la definizione algebrica.

**Definizione 2.2.4** (Reticolo, definizione algebrica)**.** *Un reticolo è una struttura algebrica $(L, \wedge, \vee)$ tale che $L$ è un insieme e $\wedge$ e $\vee$ sono due operazioni binarie definite su $L$ che soddisfano le seguenti proprietà:*

| | | |
|---|---|---|
| *(associativa 1)* | $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ | *per ogni $x, y, z \in L$* |
| *(associativa 2)* | $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ | *per ogni $x, y, z \in L$* |
| *(commutativa 1)* | $x \wedge y = y \wedge x$ | *per ogni $x, y \in L$* |
| *(commutativa 2)* | $x \vee y = y \vee x$ | *per ogni $x, y \in L$* |
| *(assorbimento 1)* | $x \wedge (x \vee y) = x$ | *per ogni $x, y \in L$* |
| *(assorbimento 2)* | $x \vee (x \wedge y) = x$ | *per ogni $x, y \in L$* |

Si può dimostrare che la definizione relazionale di reticolo è equivalente alla definizione algebrica. Se $(L, \leq)$ è un reticolo secondo la definizione relazionale allora si può costruire un reticolo secondo la definizione algebrica $(L, \wedge, \vee)$ ponendo $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ e $x \vee y = \sup\{x, y\}$, viceversa se $(L, \wedge, \vee)$ è un reticolo secondo la definizione algebrica allora si può costruire un reticolo secondo la definizione relazionale $(L, \leq)$ ponendo $x \leq y$ se e solo se $x = x \wedge y$ (o equivalentemente ponendo $x \leq y$ se e solo se $y = x \vee y$). Queste due costruzioni sono una l'inversa dell'altra, dunque la definizione relazionale di reticolo è equivalente alla definizione algebrica. Per una dimostrazione dettagliata dell'equivalenza delle due definizioni di reticolo si veda, ad esempio, [4, capitolo 1, sezione 5].

Le proprietà di assorbimento delle operazioni di un reticolo comportano le proprietà di idempotenza.

**Proposizione 2.2.5.** *Sia $(L, \wedge, \vee)$ un reticolo. Le operazioni $\wedge$ e $\vee$ soddisfano le seguenti proprietà:*
*(idempotenza 1)* $x \wedge x = x$ *per ogni* $x \in L$
*(idempotenza 2)* $x \vee x = x$ *per ogni* $x \in L$

*Dimostrazione.* Per ogni $x \in L$ si ha che $x \wedge x = x \wedge (x \vee (x \wedge x)) = x$.
Per ogni $x \in L$ si ha che $x \vee x = x \vee (x \wedge (x \vee x)) = x$. □

Si possono definire due operazioni binarie $\wedge_{\vdash}$ e $\vee_{\vdash}$ su $\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash$ ponendo $[\phi]_{\vdash} \wedge_{\vdash} [\phi]_{\vdash} = [\phi \wedge \psi]_{\vdash}$ e $[\phi]_{\vdash} \vee_{\vdash} [\phi]_{\vdash} = [\phi \vee \psi]_{\vdash}$. Si può dimostrare che le operazioni binarie $\wedge_{\vdash}$ e $\vee_{\vdash}$ sono ben definite, cioè che non dipendono dai rappresentanti delle classi di equivalenza, e che $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash, \wedge_{\vdash}, \vee_{\vdash})$ è un reticolo.

## 2.3 Reticoli distributivi

L'insieme dei possibili valori di verità delle proposizioni deve possedere una struttura di reticolo, tuttavia non tutti i reticoli sono adatti a modellare tali valori di verità.

La validità dei sequenti $\phi \wedge (\psi \vee \gamma) \vdash (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \gamma)$ e $(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \gamma) \vdash \phi \wedge (\psi \vee \gamma)$ assicura che la congiunzione distribuisce sulla disgiunzione. Quindi comunque presi tre valori di verità $x$, $y$ e $z$, corrispondenti alle proposizioni $\phi$, $\psi$ e $\gamma$ rispettivamente, deve valere la condizione $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Allo stesso modo la validità dei sequenti $\phi \vee (\psi \wedge \gamma) \vdash (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \gamma)$ e $(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \gamma) \vdash \phi \vee (\psi \wedge \gamma)$ assicura che la disgiunzione distribuisce sulla congiunzione. Quindi comunque presi tre valori di verità $x$, $y$ e $z$, corrispondenti alle proposizioni $\phi$, $\psi$ e $\gamma$ rispettivamente, deve valere la condizione $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

L'insieme dei possibili valori di verità delle proposizioni deve quindi possedere una struttura di reticolo distributivo.

**Definizione 2.3.1** (Reticolo distributivo)**.** *Un reticolo distributivo è un reticolo $(L, \wedge, \vee)$ tale che le operazioni $\wedge$ e $\vee$ soddisfano le seguenti proprietà:*
*(distributiva 1)* $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ *per ogni* $x, y, z \in L$
*(distributiva 2)* $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ *per ogni* $x, y, z \in L$

Un reticolo soddisfa una delle due proprietà distributive se e solo se soddisfa l'altra.

**Proposizione 2.3.2.** *Sia $(L, \wedge, \vee)$ un reticolo. Le operazioni $\wedge$ e $\vee$ soddisfano la proprietà (distributiva 1) se e solo se soddisfano la proprietà (distributiva 2).*

*Dimostrazione.* Si supponga che le operazioni $\wedge$ e $\vee$ soddisfino la proprietà (distributiva 1), allora per ogni $x, y, z \in L$ si ha che

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &= (x \vee (x \wedge y)) \vee (y \wedge z) = (x \vee (y \wedge x)) \vee (y \wedge z) = x \vee ((y \wedge x) \vee (y \wedge z)) = \\ &= x \vee (y \wedge (x \vee z)) = (x \wedge (x \vee z)) \vee (y \wedge (x \vee z)) = ((x \vee z) \wedge x) \vee ((x \vee z) \wedge y) = \\ &= (x \vee z) \wedge (x \vee y) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \end{aligned}$$

dunque le operazioni $\wedge$ e $\vee$ soddisfano la proprietà (distributiva 2).
Si supponga che le operazioni $\wedge$ e $\vee$ soddisfino la proprietà (distributiva 2), allora per ogni

$x, y, z \in L$ si ha che

$$\begin{aligned} x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge (x \vee y)) \wedge (y \vee z) = (x \wedge (y \vee x)) \wedge (y \vee z) = x \wedge ((y \vee x) \wedge (y \vee z)) = \\ &= x \wedge (y \vee (x \wedge z)) = (x \vee (x \wedge z)) \wedge (y \vee (x \wedge z)) = ((x \wedge z) \vee x) \wedge ((x \wedge z) \vee y) = \\ &= (x \wedge z) \vee (x \wedge y) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \end{aligned}$$

dunque le operazioni $\wedge$ e $\vee$ soddisfano la proprietà (distributiva 1). $\square$

Si può dimostrare che $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash, \wedge_\vdash, \vee_\vdash)$ è un reticolo distributivo.

## 2.4 Reticoli limitati

L'insieme dei possibili valori di verità delle proposizioni deve possedere una struttura di reticolo distributivo, tuttavia non tutti i reticoli distributivi sono adatti a modellare tali valori di verità.

L'assioma del vero nella forma $\phi \vdash \top$ assicura che, comunque preso un valore di verità $x$ corrispondente alla proposizione $\phi$, il valore di verità 1 della proposizione $\top$ soddisfa la condizione $x \leq 1$, ovvero che il valore di verità della proposizione $\top$ è l'elemento massimo dell'insieme dei possibili valori di verità delle proposizioni.

L'assioma del falso nella forma $\bot \vdash \phi$ assicura che, comunque preso un valore di verità $x$ corrispondente alla proposizione $\phi$, il valore di verità 0 della proposizione $\bot$ soddisfa la condizione $0 \leq x$, ovvero che il valore di verità della proposizione $\bot$ è l'elemento minimo dell'insieme dei possibili valori di verità delle proposizioni.

L'insieme dei possibili valori di verità delle proposizioni, oltre a dover possedere una struttura di reticolo distributivo, deve quindi possedere una struttura di reticolo limitato.

**Definizione 2.4.1** (Reticolo limitato, definizione relazionale)**.** *Un reticolo limitato è una struttura algebrica $(L, \leq, 1, 0)$ tale che $(L, \leq)$ è un reticolo, $1 \in L$ è il massimo elemento di $L$ rispetto a $\leq$ (cioè $x \leq 1$ per ogni $x \in L$) e $0 \in L$ è il minimo elemento di $L$ rispetto a $\leq$ (cioè $0 \leq x$ per ogni $x \in L$).*

In alternativa alla definizione relazionale, è possibile introdurre i reticoli limitati mediante la definizione algebrica.

**Definizione 2.4.2** (Reticolo limitato, definizione algebrica)**.** *Un reticolo limitato è una struttura algebrica $(L, \wedge, \vee, 1, 0)$ tale che $(L, \wedge, \vee)$ è un reticolo, $1 \in L$ è l'elemento neutro per l'operazione $\wedge$ (cioè $x \wedge 1 = x = 1 \wedge x$ per ogni $x \in L$) e $0 \in L$ è l'elemento neutro per l'operazione $\vee$ (cioè $x \vee 0 = x = 0 \vee x$ per ogni $x \in L$).*

Si può dimostrare che la definizione relazionale di reticolo limitato è equivalente alla definizione algebrica. Infatti 1 è il massimo elemento di $L$ rispetto a $\leq$ se e solo se è l'elemento neutro per l'operazione $\wedge$ e 0 è il minimo elemento di $L$ rispetto a $\leq$ se e solo se è l'elemento neutro per l'operazione $\vee$.

Si possono definire $1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash} = [\top]_\vdash$ e $0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash} = [\bot]_\vdash$. Si può dimostrare che $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash, \wedge_\vdash, \vee_\vdash, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash})$ è un reticolo distributivo e limitato.

## 2.5 Algebre di Heyting

Per quanto riguarda la logica proposizionale intuizionista, l'insieme dei valori di verità delle proposizioni deve possedere una struttura di reticolo distributivo e limitato, tuttavia non tutti i reticoli distributivi e limitati sono adatti a modellare tali valori di verità.

Si può dimostrare che vale il sequente $\gamma \vdash \phi \to \psi$ se e solo se vale il sequente $\gamma \wedge \phi \vdash \psi$. Quindi comunque presi tre valori di verità $x$, $y$ e $z$, corrispondenti alle proposizioni $\phi$, $\psi$ e $\gamma$ rispettivamente, deve esistere un valore di verità $w$, corrispondente alla proposizione $\phi \to \psi$, tale che $z \leq w$ se e solo se $z \wedge x \leq y$. L'elemento $w$ è detto una implicazione tra $x$ e $y$.

**Definizione 2.5.1** (Implicazione)**.** *Sia $(L, \wedge, \vee)$ un reticolo. Dati $x, y \in L$, una implicazione tra $x$ e $y$ è un elemento $w \in L$ tale che per ogni $z \in L$ si ha che $z \leq w$ se e solo se $z \wedge x \leq y$. Una implicazione su $(L, \wedge, \vee)$ è un'operazione binaria $\to$ su $L$ tale che per ogni $x, y \in L$ si ha che $x \to y$ è un'implicazione tra $x$ e $y$.*

Se esiste una implicazione su un reticolo allora questa è unica.

**Proposizione 2.5.2.** *Sia $(L, \wedge, \vee)$ un reticolo. Se esiste una implicazione su $(L, \wedge, \vee)$ allora questa è unica.*

*Dimostrazione.* Siano $\to_1$ e $\to_2$ due implicazioni su $(L, \wedge, \vee)$.
Siano $x, y \in L$.
Per ogni $z \in L$ si ha che $z \leq x \to_1 y$ se e solo se $z \wedge x \leq y$ e che $z \leq x \to_2 y$ se e solo se $z \wedge x \leq y$, dunque per ogni $z \in L$ si ha che $z \leq x \to_1 y$ se e solo se $z \leq x \to_2 y$.
In particolare, ponendo $z = x \to_1 y$ e $z = x \to_2 y$ rispettivamente, si ricava che $x \to_1 y \leq x \to_1 y$ se e solo se $x \to_1 y \leq x \to_2 y$ e che $x \to_2 y \leq x \to_1 y$ se e solo se $x \to_2 y \leq x \to_2 y$, ovvero che $x \to_1 y \leq x \to_2 y$ e che $x \to_2 y \leq x \to_1 y$, da cui segue che $x \to_1 y = x \to_2 y$.
Per l'arbitrarietà di $x, y \in L$ si ha quindi che le due implicazioni $\to_1$ e $\to_2$ coincidono. $\square$

Per quanto riguarda la logica proposizionale intuizionista, l'insieme dei possibili valori di verità delle proposizioni, oltre a dover possedere una struttura di reticolo distributivo e limitato, deve quindi ammettere l'implicazione, cioè deve essere un'algebra di Heyting.

**Definizione 2.5.3** (Algebra di Heyting, definizione naturale)**.** *Un'algebra di Heyting è una struttura algebrica $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ tale che $(H, \wedge, \vee)$ è un reticolo distributivo, $(H, \wedge, \vee, 1, 0)$ è un reticolo limitato e $\to$ è l'implicazione su $(H, \wedge, \vee)$.*

Se un reticolo ammette l'implicazione allora è distributivo.

**Proposizione 2.5.4.** *Sia $(L, \wedge, \vee)$ un reticolo e sia $\to$ l'implicazione su $(L, \wedge, \vee)$. Allora il reticolo $(L, \wedge, \vee)$ è distributivo.*

*Dimostrazione.* Si vuole dimostrare che le operazioni $\wedge$ e $\vee$ soddisfano la proprietà (distributiva 1).
Siano $x, y, z \in L$.
Si ha che $y \wedge x = x \wedge y \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ e che $z \wedge x = x \wedge z \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, allora si ha che $y \leq x \to ((x \wedge y) \vee (x \wedge z))$ e che $z \leq x \to ((x \wedge y) \vee (x \wedge z))$, dunque si ha che $y \vee z \leq x \to ((x \wedge y) \vee (x \wedge z))$, cioè che $x \wedge (y \vee z) = (y \vee z) \wedge x \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
Siccome $x \wedge y \leq x$ e $x \wedge z \leq x$ si ha che $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x$ e siccome $x \wedge y \leq y$ e $x \wedge z \leq z$ si ha che $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq y \vee z$, quindi si ha che $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$.
Siccome $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ e $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$ si ha che $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
Per l'arbitrarietà di $x, y, z \in L$ si ha quindi che le operazioni $\wedge$ e $\vee$ soddisfano la proprietà (distributiva 1).
Per la proposizione 2.3.2 si ha che le operazioni $\wedge$ e $\vee$ soddisfano anche la proprietà (distributiva 2), dunque il reticolo $(L, \wedge, \vee)$ è distributivo. $\square$

La condizione relativa ai reticoli distributivi, presente nella definizione di algebra di Heyting, non è quindi necessaria.

**Definizione 2.5.5** (Algebra di Heyting, definizione minimale)**.** *Un'algebra di Heyting è una struttura algebrica* $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ *tale che* $(H, \wedge, \vee, 1, 0)$ *è un reticolo limitato e* $\to$ *è l'implicazione su* $(H, \wedge, \vee)$*.*

Una importante proprietà delle algebre di Heyting è il modus ponens.

**Lemma 2.5.6.** *Sia* $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ *un'algebra di Heyting. Per ogni* $x, y \in H$ *si ha che* $(x \to y) \wedge x \leq y$*.*

*Dimostrazione.* Per ogni $x, y \in H$ si ha che $x \to y \leq x \to y$, dunque $(x \to y) \wedge x \leq y$. □

In un'algebra di Heyting l'implicazione soddisfa la proprietà transitiva.

**Lemma 2.5.7.** *Sia* $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ *un'algebra di Heyting. Per ogni* $x, y, z \in H$ *si ha che* $(x \to y) \wedge (y \to z) \leq x \to z$*.*

*Dimostrazione.* Per ogni $x, y, z \in H$ si ha che $(x \to y) \wedge x \leq y$, allora

$$((x \to y) \wedge (y \to z)) \wedge x = ((y \to z) \wedge (x \to y)) \wedge x = (y \to z) \wedge ((x \to y) \wedge x) \leq (y \to z) \wedge y \leq$$
$$\leq z,$$

quindi $(x \to y) \wedge (y \to z) \leq x \to z$. □

In un'algebra di Heyting si ha che un elemento è minore o uguale ad un'altro se e solo se l'implicazione tra il primo e il secondo è il massimo elemento.

**Lemma 2.5.8.** *Sia* $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ *un'algebra di Heyting. Per ogni* $x, y \in H$ *si ha che* $x \leq y$ *se e solo se* $x \to y = 1$*.*

*Dimostrazione.* Per ogni $x, y \in H$ si ha che $x \leq y$ se e solo se $1 \wedge x \leq y$ se e solo se $1 \leq x \to y$ se e solo se $x \to y = 1$. □

In un'algebra di Heyting l'implicazione tra il massimo elemento e il minimo elemento è il minimo elemento e l'implicazione tra il minimo elemento e il massimo elemento è il massimo elemento.

**Lemma 2.5.9.** *Sia* $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ *un'algebra di Heyting. Si ha che* $1 \to 0 = 0$ *e che* $0 \to 1 = 1$*.*

*Dimostrazione.* Si ha che $1 \to 0 = (1 \to 0) \wedge 1 \leq 0$, cioè che $1 \to 0 = 0$.
Si ha che $0 \leq 1$, quindi $0 \to 1 = 1$. □

Si può definire l'operazione unaria di pseudocomplemento su un'algebra di Heyting.

**Definizione 2.5.10** (Pseudocomplemento)**.** *Lo pseudocomplemento su un'algebra di Heyting* $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ *è l'operazione unaria* $-$ *definita su* $H$ *ponendo* $-x = x \to 0$ *per ogni* $x \in H$*.*

In un'algebra di Heyting lo pseudocomplemento inverte gli ordini.

**Lemma 2.5.11.** *Sia* $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ *un'algebra di Heyting e sia* $-$ *lo pseudocomplemento su* $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$*. Per ogni* $x, y \in H$ *tali che* $x \leq y$ *si ha che* $-y \leq -x$*.*

*Dimostrazione.* Per ogni $x, y \in H$ si ha che se $x \leq y$ allora $(-y) \wedge x \leq (-y) \wedge y = (y \to 0) \wedge y \leq 0$, quindi $-y \leq x \to 0 = -x$. □

In un'algebra di Heyting ogni elemento è minore o uguale del suo doppio pseudocomplemento.

**Lemma 2.5.12.** *Sia* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *un'algebra di Heyting e sia* $-$ *l'operazione di pseudocomplemento su* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$*. Per ogni* $x \in H$ *si ha che* $x \leq - - x$*.*

*Dimostrazione.* Per ogni $x \in H$ si ha che $x \wedge (-x) = x \wedge (x \rightarrow 0) = (x \rightarrow 0) \wedge x \leq 0$, ovvero che $x \leq (-x) \rightarrow 0 = -(-x) = - - x$. $\square$

In un'algebra di Heyting il triplo pseudocomplemento di qualsiasi elemento è lo pseudocomplemento dell'elemento stesso.

**Lemma 2.5.13.** *Sia* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *un'algebra di Heyting e sia* $-$ *l'operazione di pseudocomplemento su* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$*. Per ogni* $x \in H$ *si ha che* $- - -x = -x$*.*

*Dimostrazione.* Per ogni $x \in H$ si ha che $x \leq - - x$, quindi
$(- - -x) \wedge x \leq (- - -x) \wedge (- - x) = (-(- - x)) \wedge (- - x) = ((- - x) \rightarrow 0) \wedge (- - x) \leq 0$,
dunque $- - -x \leq x \rightarrow 0 = -x$.
Si ha che $-x \leq - - (-x) = - - -x$.
Dal fatto che $- - -x \leq -x$ e che $-x \leq - - -x$ segue che $- - -x = -x$. $\square$

In un'algebra di Heyting il massimo elemento ed il minimo elemento sono uno lo pseudocomplemento dell'altro.

**Lemma 2.5.14.** *Sia* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *un'algebra di Heyting e sia* $-$ *lo pseudocomplemento su* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$*. Si ha che* $-1 = 0$ *e che* $-0 = 1$*.*

*Dimostrazione.* Si ha che $-1 = 1 \rightarrow 0 = (1 \rightarrow 0) \wedge 1 \leq 0$, cioè che $-1 = 0$.
Si ha che $1 \wedge 0 \leq 0$, cioè che $1 \leq 0 \rightarrow 0 = -0$, ovvero che $-0 = 1$. $\square$

In un'algebra di Heyting vale una legge di De Morgan.

**Lemma 2.5.15.** *Sia* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *un'algebra di Heyting e sia* $-$ *lo pseudocomplemento su* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$*. Per ogni* $x, y \in H$ *si ha che* $-(x \vee y) = (-x) \wedge (-y)$*.*

*Dimostrazione.* Siano $x, y \in H$.
Si ha che $x \leq x \vee y$, allora $-(x \vee y) \leq -x$.
Si ha che $y \leq x \vee y$, allora $-(x \vee y) \leq -y$.
Dal fatto che $-(x \vee y) \leq -x$ e che $-(x \vee y) \leq -y$ segue che $-(x \vee y) \leq (-x) \wedge (-y)$.
Si ha che $((-x) \wedge (-y)) \wedge x = ((-y) \wedge (-x)) \wedge x = (-y) \wedge ((-x) \wedge x) \leq (-x) \wedge x = (x \rightarrow 0) \wedge x \leq 0$ e che $((-x) \wedge (-y)) \wedge y = (-x) \wedge ((-y) \wedge y) \leq (-y) \wedge y = (y \rightarrow 0) \wedge y \leq 0$, allora $((-x) \wedge (-y)) \wedge (x \vee y) = (((-x) \wedge (-y)) \wedge x) \vee (((-x) \wedge (-y)) \wedge y) \leq 0$, quindi
$(-x) \wedge (-y) \leq (x \vee y) \rightarrow 0 = -(x \vee y)$.
Dal fatto che $-(x \vee y) \leq (-x) \wedge (-y)$ e che $(-x) \wedge (-y) \leq -(x \vee y)$ segue che $-(x \vee y) = (-x) \wedge (-y)$.
$\square$

Si può definire un'operazioni binaria $\rightarrow_{\vdash}$ su $\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash$ ponendo $[\phi]_{\vdash} \rightarrow_{\vdash} [\phi]_{\vdash} = [\phi \rightarrow \psi]_{\vdash}$. Si può dimostrare che l'operazione binaria $\rightarrow_{\vdash}$ è ben definita, cioè che non dipende dai rappresentanti delle classi di equivalenza, che è l'implicazione su $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash, \wedge_{\vdash}, \vee_{\vdash})$ e che $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash, \wedge_{\vdash}, \vee_{\vdash}, \rightarrow_{\vdash}, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash})$ è un'algebra di Heyting, detta algebra di Lindenbaum della logica proposizionale intuizionista.

## 2.6 Algebre di Boole

Per quanto riguarda la logica proposizionale classica, l'insieme dei valori di verità delle proposizioni deve possedere una struttura di reticolo distributivo e limitato e deve ammettere l'implicazione, tuttavia non tutti i reticoli distributivi e limitati che ammettono l'implicazione sono adatti a modellare tali valori di verità.

L'assioma del terzo escluso $\vdash \phi \vee \neg\phi$ assicura che valga il sequente $\top \vdash \phi \vee \neg\phi$, quindi comunque preso un valore di verità $x$, relativo alla proposizione $\phi$, detto $y$ il valore di verità della proposizione $\neg\phi$, il valore di verità $x \vee y$ relativo alla proposizione $\phi \vee \neg\phi$ deve essere l'elemento massimo dell'insieme dei possibili valori di verità delle proposizioni.

Grazie alla validità del sequente $\phi \wedge \neg\phi \vdash \bot$ si ha che, comunque preso un valore di verità $x$, relativo alla proposizione $\phi$, detto $y$ il valore di verità della proposizione $\neg\phi$, il valore di verità $x \wedge y$ relativo alla proposizione $\phi \wedge \neg\phi$ deve essere l'elemento minimo dell'insieme dei possibili valori di verità delle proposizioni.

Quindi comunque preso un valore di verità $x$, corrispondente alla proposizione $\phi$, deve esistere un valore di verità $y$, corrispondente alla proposizione $\neg\phi$, tale che $x \vee y = 1$ e $x \wedge y = 0$. L'elemento $y$ è detto un complemento di $x$.

**Definizione 2.6.1** (Complemento)**.** *Sia $(L, \wedge, \vee, 1, 0)$ un reticolo limitato. Dato $x \in L$, un complemento di $x$ è un elemento $y \in L$ tale che $x \vee y = 1$ e $x \wedge y = 0$. Un complemento su $(L, \wedge, \vee, 1, 0)$ è un'operazione unaria $\neg$ su $L$ tale che per ogni $x \in L$ si ha che $\neg x$ è un complemento di $x$.*

Se esiste un complemento su un reticolo limitato e distributivo allora questo è unico.

**Proposizione 2.6.2.** *Sia $(L, \wedge, \vee, 1, 0)$ un reticolo limitato tale che il reticolo $(L, \wedge, \vee)$ sia distributivo. Se esiste un complemento su $(L, \wedge, \vee, 1, 0)$ allora questo è unico.*

*Dimostrazione.* Siano $\neg_1$ e $\neg_2$ due complementi su $(L, \wedge, \vee, 1, 0)$.
Sia $x \in L$.
Si ha che

$$\neg_1 x = \neg_1 x \wedge 1 = \neg_1 x \wedge (x \vee \neg_2 x) = (\neg_1 x \wedge x) \vee (\neg_1 x \wedge \neg_2 x) = 0 \vee (\neg_1 x \wedge \neg_2 x) =$$
$$= (x \wedge \neg_2 x) \vee (\neg_1 x \wedge \neg_2 x) = (\neg_2 x \wedge x) \vee (\neg_2 x \wedge \neg_1 x) = \neg_2 x \wedge (x \vee \neg_1 x) = \neg_2 x \wedge 1 = \neg_2 x.$$

Per l'arbitrarietà di $x \in L$ si ha quindi che i due complementi $\neg_1$ e $\neg_2$ coincidono. □

Per quanto riguarda la logica proposizionale classica, l'insieme dei possibili valori di verità delle proposizioni, oltre a dover possedere una struttura di reticolo distributivo e limitato e a dover ammettere l'implicazione, deve quindi ammettere il complemento, cioè deve essere un'algebra di Boole.

**Definizione 2.6.3** (Algebra di Boole, definizione naturale)**.** *Un'algebra di Boole è una struttura algebrica $(B, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, 1, 0)$ tale che $(B, \wedge, \vee)$ è un reticolo distributivo, $(B, \wedge, \vee, 1, 0)$ è un reticolo limitato, $\rightarrow$ è l'implicazione su $(B, \wedge, \vee)$ e $\neg$ è il complemento su $(B, \wedge, \vee, 1, 0)$.*

In particolare, si ha che ogni algebra di Boole è un'algebra di Heyting.

**Proposizione 2.6.4.** *Ogni algebra di Boole è un'algebra di Heyting.*

*Dimostrazione.* Sia $(B, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, 1, 0)$ un'algebra di Boole, allora si ha che $(B, \wedge, \vee, 1, 0)$ è un reticolo limitato e che $\rightarrow$ è l'implicazione su $(B, \wedge, \vee)$, quindi $(B, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ è un'algebra di Heyting. □

Se un reticolo distributivo e limitato ammette il complemento allora quest'ultimo è una involuzione.

**Lemma 2.6.5.** *Sia* $(L, \wedge, \vee, 1, 0)$ *un reticolo limitato tale che il reticolo* $(L, \wedge, \vee)$ *sia distributivo. Se esiste il complemento* $\neg$ *su* $(L, \wedge, \vee, 1, 0)$ *allora per ogni* $x \in L$ *si ha che* $\neg\neg x = x$.

*Dimostrazione.* Si supponga che esista il complemento $\neg$ su $(L, \wedge, \vee, 1, 0)$.
Per ogni $x \in L$ si ha che $\neg x \vee x = x \vee \neg x = 1$ e che $\neg x \wedge x = x \wedge \neg x = 0$, dunque per ogni $x \in L$ il complemento di $\neg x$ è $x$, cioè per ogni $x \in L$ si ha che $\neg\neg x = x$. □

Se un reticolo distributivo e limitato ammette il complemento allora in tale reticolo valgono le leggi di De Morgan.

**Lemma 2.6.6.** *Sia* $(L, \wedge, \vee, 1, 0)$ *un reticolo limitato tale che il reticolo* $(L, \wedge, \vee)$ *sia distributivo. Se esiste il complemento* $\neg$ *su* $(L, \wedge, \vee, 1, 0)$ *allora per ogni* $x, y \in L$ *si ha che* $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ *e che* $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$.

*Dimostrazione.* Si supponga che esista il complemento $\neg$ su $(L, \wedge, \vee, 1, 0)$.
Per ogni $x, y \in L$ si ha che

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \vee (\neg x \vee \neg y) &= (\neg x \vee \neg y) \vee (x \wedge y) = ((\neg x \vee \neg y) \vee x) \wedge ((\neg x \vee \neg y) \vee y) = \\ &= (x \vee (\neg x \vee \neg y)) \wedge ((\neg x \vee \neg y) \vee y) = ((x \vee \neg x) \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee (\neg y \vee y)) = \\ &= ((x \vee \neg x) \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee (y \vee \neg y)) = (1 \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1\end{aligned}$$

e che

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee \neg y) &= ((x \wedge y) \wedge \neg x) \vee ((x \wedge y) \wedge \neg y) = (\neg x \wedge (x \wedge y)) \vee ((x \wedge y) \wedge \neg y) = \\ &= ((\neg x \wedge x) \wedge y) \vee (x \wedge (y \wedge \neg y)) = ((x \wedge \neg x) \wedge y) \vee (x \wedge (y \wedge \neg y)) = \\ &= (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0) = 0 \vee 0,\end{aligned}$$

dunque per ogni $x, y \in L$ il complemento di $x \wedge y$ è $\neg x \vee \neg y$, cioè per ogni $x, y \in L$ si ha che $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$.
Per ogni $x, y \in L$ si ha che

$$\begin{aligned}(x \vee y) \vee (\neg x \wedge \neg y) &= ((x \vee y) \vee \neg x) \wedge ((x \vee y) \vee \neg y) = (\neg x \vee (x \vee y)) \wedge ((x \vee y) \vee \neg y) = \\ &= ((\neg x \vee x) \vee y) \wedge (x \vee (y \vee \neg y)) = ((x \vee \neg x) \vee y) \wedge (x \vee (y \vee \neg y)) = \\ &= (1 \vee y) \wedge (x \vee 1) = 1 \wedge 1\end{aligned}$$

e che

$$\begin{aligned}(x \vee y) \wedge (\neg x \wedge \neg y) &= (\neg x \wedge \neg y) \wedge (x \vee y) = ((\neg x \wedge \neg y) \wedge x) \vee ((\neg x \wedge \neg y) \wedge y) = \\ &= (x \wedge (\neg x \wedge \neg y)) \vee ((\neg x \wedge \neg y) \wedge y) = ((x \wedge \neg x) \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge (\neg y \wedge y)) = \\ &= ((x \wedge \neg x) \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge (y \wedge \neg y)) = (0 \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0,\end{aligned}$$

dunque per ogni $x, y \in L$ il complemento di $x \vee y$ è $\neg x \wedge \neg y$, cioè per ogni $x, y \in L$ si ha che $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$. □

Se un reticolo distributivo e limitato ammette il complemento allora ammette anche l'implicazione.

**Proposizione 2.6.7.** *Sia* $(L, \wedge, \vee, 1, 0)$ *un reticolo limitato tale che il reticolo* $(L, \wedge, \vee)$ *sia distributivo. Se esiste il complemento* $\neg$ *su* $(L, \wedge, \vee, 1, 0)$ *allora l'operazione binaria* $\to$ *definita su* $L$ *ponendo* $x \to y = \neg(x \wedge \neg y)$ *per ogni* $x, y \in L$ *è l'implicazione su* $(L, \wedge, \vee)$.

*Dimostrazione.* Si supponga che esista il complemento $\neg$ su $(L, \wedge, \vee, 1, 0)$.
Si definisce l'operazione binaria $\to$ su $L$ ponendo $x \to y = \neg(x \wedge \neg y)$ per ogni $x, y \in L$.
Siano $x, y \in L$.

Si ha che $x \to y = \neg(x \wedge \neg y) = \neg x \vee \neg\neg y = \neg x \vee y$.
Per ogni $z \in L$ si ha che se $z \wedge x \leq y$ allora
$z \leq \neg x \vee z = (\neg x \vee z) \wedge 1 = (\neg x \vee z) \wedge (x \vee \neg x) = (\neg x \vee z) \wedge (\neg x \vee x) = \neg x \vee (z \wedge x) \leq$
$\leq \neg x \vee y = x \to y$
e che se $z \leq x \to y$ allora
$z \wedge x \leq (x \to y) \wedge x = (\neg x \vee y) \wedge x = x \wedge (\neg x \vee y) = (x \wedge \neg x) \vee (x \wedge y) = 0 \vee (x \wedge y) =$
$= x \wedge y \leq y$,
dunque per ogni $z \in L$ si ha che $z \leq x \to y$ se e solo se $z \wedge x \leq y$, cioè $x \to y$ è l'implilcazione tra $x$ e $y$.
Per l'arbitrarietà di $x, y \in L$ si ha quindi che l'operazione $\to$ è l'implicazione su $(L, \wedge, \vee)$. □

La condizione relativa all'implicazione, presente nella definizione di algebra di Boole, non è quindi necessaria.

**Definizione 2.6.8** (Algebra di Boole, definizione minimale)**.** *Un'algebra di Boole è una struttura algebrica* $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ *tale che* $(B, \wedge, \vee)$ *è un reticolo distributivo,* $(B, \wedge, \vee, 1, 0)$ *è un reticolo limitato e* $\neg$ *è il complemento su* $(B, \wedge, \vee, 1, 0)$*.*

In un'algebra di Boole il massimo elemento ed il minimo elemento sono uno il complemento dell'altro.

**Lemma 2.6.9.** *Sia* $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ *un'algebra di Boole. Si ha che* $\neg 1 = 0$ *e che* $\neg 0 = 1$*.*

*Dimostrazione.* Si ha che $1 \vee 0 = 1$ e che $1 \wedge 0 = 0$, quindi $\neg 1 = 0$.
Si ha che $0 \vee 1 = 1$ e che $0 \wedge 1 = 0$, quindi $\neg 0 = 1$. □

In un'algebra di Boole lo pseudocomplemento coincide con il complemento.

**Lemma 2.6.10.** *Sia* $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ *un'algebra di Boole, sia* $\to$ *l'implicazione su* $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ *e sia* $-$ *lo pseudocomplemento sull'algebra di Heyting* $(B, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$*. Per ogni* $x \in B$ *si ha che* $-x = \neg x$*.*

*Dimostrazione.* L'implicazione è definita ponendo $x \to y = \neg(x \wedge \neg y)$ per ogni $x, y \in B$ e lo pseudocomplemento è definito ponendo $-x = x \to 0$ per ogni $x \in B$.
Per ogni $x \in B$ si ha che $-x = x \to 0 = \neg(x \wedge \neg 0) = \neg(x \wedge 1) = \neg x$. □

Si può definire un'operazioni unaria $\neg_\vdash$ su $\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash$ ponendo $\neg[\phi]_\vdash = [\neg\phi]_\vdash$. Si può dimostrare che l'operazione unaria $\neg_\vdash$ è ben definita, cioè che non dipende dai rappresentanti delle classi di equivalenza, che è il complemento su $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash, \wedge_\vdash, \vee_\vdash, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash})$ e che $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash, \wedge_\vdash, \vee_\vdash, \neg_\vdash, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash})$ è un'algebra di Boole, detta algebra di Lindenbaum della logica proposizionale classica.

# Capitolo 3

# Modelli algebrici

In questo capitolo si introducono alcune nozioni di modello algebrico e le relative nozioni di soddisfacibilità nel caso della logica proposizionale intuizionista e classica, quindi se ne analizzano le relazioni utilizzando una metateoria intuizionista, una metateoria classica ed una metateoria classica con assioma della scelta.

## 3.1 Modelli intuizionisti

Una valutazione delle proposizioni di un linguaggio proposizionale è una funzione che associa a ciascuna proposizione del linguaggio un valore di verità, rispettando la proposizione vera, la proposizione falsa e i connettivi congiunzione, disgiunzione e implicazione.

**Definizione 3.1.1** (Valutazione). *Una valutazione delle proposizioni di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ in un'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ è una funzione $V : Prop(\mathcal{L}) \to H$ tale che:*

- $V(\top) = 1$*;*
- $V(\bot) = 0$*;*
- *se* $\phi, \psi \in Prop(\mathcal{L})$ *allora* $V(\phi \wedge \psi) = V(\phi) \wedge V(\psi)$*;*
- *se* $\phi, \psi \in Prop(\mathcal{L})$ *allora* $V(\phi \vee \psi) = V(\phi) \vee V(\psi)$*;*
- *se* $\phi, \psi \in Prop(\mathcal{L})$ *allora* $V(\phi \to \psi) = V(\phi) \to V(\psi)$*.*

Se $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ è un'algebra di Heyting, $V$ è una valutazione delle proposizioni di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ e $\phi \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})$ allora $V(\neg\phi) = V(\phi \to \bot) = V(\phi) \to V(\bot) = V(\phi) \to 0 = -V(\phi)$.

Un modello intuizionista per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale è dato da un'algebra di Heyting non banale che rappresenta i possibili valori di verità delle proposizioni e da una valutazione delle proposizioni del linguaggio nell'algebra di Heyting che valuta vere tutte le proposizioni in $\Gamma$. Il motivo per il quale si richiede che l'algebra di Heyting non sia banale, ovvero che non sia costituita da un solo elemento, è che si vuole evitare di trattare il caso in cui il vero ed il falso coincidono.

**Definizione 3.1.2** (Modello intuizionista). *Un modello intuizionista per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è una coppia $((H, \wedge, \vee, \to, 1, 0), V)$ in cui $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ è un'algebra di Heyting non banale e $V$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ tale che $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma$.*

**Definizione 3.1.3** (Soddisfacibilità intuizionista)**.** *Un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *è soddisfacibile intuizionisticamente se esiste un modello intuizionista per* $\Gamma$*.*

Un 2-modello per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale è un modello intuizionista per $\Gamma$ in cui tutte le proposizioni del linguaggio possono essere valutate solo vere o false.

**Definizione 3.1.4** (2-modello, definizione intuizionista)**.** *Un 2-modello per un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *è un modello intuizionista* $((H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0), V)$ *per* $\Gamma$ *tale che* $H = \{0, 1\}$*.*

**Definizione 3.1.5** (2-soddisfacibilità, definizione intuizionista)**.** *Un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *è 2-soddisfacibile se esiste un 2-modello per* $\Gamma$*.*

Un insieme numerabile è un insieme tale che ad ogni elemento si può associare un numero naturale distinto.

**Definizione 3.1.6** (Insieme numerabile)**.** *Un insieme* $S$ *è numerabile se esiste una funzione iniettiva* $f : S \rightarrow \mathbb{N}$*.*

Un'algebra di Heyting numerabile è un'algebra di Heyting il cui insieme di supporto è numerabile.

**Definizione 3.1.7** (Algebra di Heyting numerabile)**.** *Un'algebra di Heyting numerabile è un'algebra di Heyting* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *tale che l'insieme* $H$ *è numerabile.*

Un N-modello intuizionista per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è un modello intuizionista per $\Gamma$ in cui tutte le proposizioni del linguaggio possono essere valutate solo in un un insieme numerabile di valori di verità.

**Definizione 3.1.8** (N-modello intuizionista)**.** *Un N-modello intuizionista per un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *è un modello intuizionista* $((H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0), V)$ *per* $\Gamma$ *tale che l'algebra di Heyting* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *è numerabile.*

**Definizione 3.1.9** (N-soddisfacibilità intuizionista)**.** *Un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *è N-soddisfacibile intuizionisticamente se esiste un N-modello intuizionista per* $\Gamma$*.*

## 3.2 Modelli classici

Se $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ è un'algebra di Boole, $\rightarrow$ è l'implicazione su $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$, $-$ è lo pseudocomplemento su $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$, $V$ è una valutazione delle proposizioni di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ nell'algebra di Boole $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ e $\phi \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})$ allora
$V(\neg\phi) = V(\phi \rightarrow \bot) = V(\phi) \rightarrow V(\bot) = V(\phi) \rightarrow 0 = -V(\phi) = \neg V(\phi)$.

Un modello classico per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale è dato da un'algebra di Boole non banale che rappresenta i possibili valori di verità delle proposizioni e da una valutazione delle proposizioni del linguaggio nell'algebra di Boole che valuta vere tutte le proposizioni in $\Gamma$.

**Definizione 3.2.1** (Modello classico)**.** *Un modello classico per un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *è una coppia* $((B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0), V)$ *in cui* $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ *è un'algebra di Boole non banale e* $V$ *è una valutazione delle proposizioni del linguaggio* $\mathcal{L}$ *nell'algebra di Boole* $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ *tale che* $V(\phi) = 1$ *per ogni* $\phi \in \Gamma$*.*

**Definizione 3.2.2** (Soddisfacibilità classica)**.** *Un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *è soddisfacibile classicamente se esiste un modello classico per* $\Gamma$*.*

Un 2-modello per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale è un modello classico per $\Gamma$ in cui tutte le proposizioni del linguaggio possono essere valutate solo vere o false.

**Definizione 3.2.3** (2-modello, definizione classica)**.** *Un 2-modello per un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *è un modello classico* $((B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0), V)$ *per* $\Gamma$ *tale che* $B = \{0, 1\}$*.*

**Definizione 3.2.4** (2-soddisfacibilità, definizione classica)**.** *Un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *è 2-soddisfacibile se esiste un 2-modello per* $\Gamma$*.*

Siccome l'unica algebra di Heyting di due elementi $(\{0, 1\}, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ coincide con l'unica algebra di Boole di due elementi, le nozioni di 2-modello e di 2-soddisfacibilità definite nel caso della logica proposizionale classica (definizioni 3.2.3 e 3.2.4) sono equivalenti alle rispettive nozioni definite nel caso della logica proposizionale intuizionista (definizioni 3.1.4 e 3.1.5).

Un'algebra di Boole numerabile è un'algebra di Boole il cui insieme di supporto è numerabile.

**Definizione 3.2.5** (Algebra di Boole numerabile)**.** *Un'algebra di Boole numerabile è un'algebra di Boole* $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ *tale che l'insieme* $B$ *è numerabile.*

Un N-modello classico per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è un modello classico per $\Gamma$ in cui tutte le proposizioni del linguaggio possono essere valutate solo in un un insieme numerabile di valori di verità.

**Definizione 3.2.6** (N-modello classico)**.** *Un N-modello classico per un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *è un modello classico* $((B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0), V)$ *per* $\Gamma$ *tale che l'algebra di Boole* $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ *è numerabile.*

**Definizione 3.2.7** (N-soddisfacibilità classica)**.** *Un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *è N-soddisfacibile classicamente se esiste un N-modello classico per* $\Gamma$*.*

## 3.3 Soddisfacibilità intuizionista vs soddisfacibilità classica

Si vuole dimostrare che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente se e solo se è soddisfacibile classicamente.

Grazie al fatto che ogni algebra di Boole è un'algebra di Heyting si ha che ogni modello classico per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è un modello intuizionista per $\Gamma$, si ha dunque che se $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente.

**Teorema 3.3.1.** *Se un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *è soddisfacibile classicamente allora* $\Gamma$ *è soddisfacibile intuizionisticamente.*

*Dimostrazione.* Si supponga che $\Gamma$ sia soddisfacibile classicamente, allora esiste un modello classico per $\Gamma$, ovvero esistono un'algebra di Boole non banale $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ ed una valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Boole $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ tale che $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma$.
Siccome ogni algebra di Boole è un'algebra di Heyting per la proposizione 2.6.4, si ha che l'algebra di Boole $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ è un'algebra di Heyting, allora $((B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0), V)$ è un modello intuizionista per $\Gamma$, dunque $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente. $\square$

Per dimostrare il viceversa, ovvero che se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente, è necessaria una costruzione più articolata.

Gli elementi di un'algebra di Heyting che coincidono con il loro doppio pseudocomplemento si dicono elementi regolari.

**Definizione 3.3.2** (Elemento regolare). *Sia $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ un'algebra di Heyting e sia $-$ lo pseudocomplemento su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$. Un elemento $x \in H$ è regolare se $- - x = x$.*

L'insieme degli elementi regolari di un'algebra di Heyting si può atteggiare ad algebra di Boole.

**Proposizione 3.3.3.** *Sia $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ un'algebra di Heyting e sia $-$ lo pseudocomplemento su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$. Si definisce l'insieme $H_{reg} = \{x \in H \mid - - x = x\}$. Si definiscono due operazioni binarie $\wedge_{reg}$ e $\vee_{reg}$ su $H_{reg}$ ponendo $x \wedge_{reg} y = x \wedge y$ e $x \vee_{reg} y = - - (x \vee y)$. Si definisce un'operazione unaria $\neg_{reg}$ su $H_{reg}$ ponendo $\neg_{reg} x = -x$. Si definiscono $1_{H_{reg}} = 1$ e $0_{H_{reg}} = 0$. Si ha che $(H_{reg}, \wedge_{reg}, \vee_{reg}, \neg_{reg}, 1_{H_{reg}}, 0_{H_{reg}})$ è un'algebra di Boole. Inoltre, se $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ è un'algebra di Heyting non banale allora $(H_{reg}, \wedge_{reg}, \vee_{reg}, \neg_{reg}, 1_{H_{reg}}, 0_{H_{reg}})$ è un'algebra di Boole non banale.*

Una dimostrazione della proposizione 3.3.3 si trova in [5, pagina 10].

La proposizione 3.3.3 consente di definire la nozione di algebra di Boole degli elementi regolari di un'algebra di Heyting.

**Definizione 3.3.4** (Algebra di Boole degli elementi regolari). *Sia $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ un'algebra di Heyting e sia $-$ lo pseudocomplemento su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$. L'algebra di Boole degli elementi regolari di $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ è l'algebra di Boole $(H_{reg}, \wedge_{reg}, \vee_{reg}, \neg_{reg}, 1_{H_{reg}}, 0_{H_{reg}})$ in cui $H_{reg} = \{x \in H \mid - - x = x\}$ è l'insieme degli elementi regolari di $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$, $\wedge_{reg}$ e $\wedge_{reg}$ sono le operazioni binarie su $H_{reg}$ definite ponendo $x \wedge_{reg} y = x \wedge y$ e $x \vee_{reg} y = - - (x \vee y)$, $\neg_{reg}$ è l'operazione unaria su $H_{reg}$ definita ponendo $\neg_{reg} x = -x$, $1_{H_{reg}} = 1$ e $0_{H_{reg}} = 0$.*

L'algebra di Boole degli elementi regolari di un'algebra di Heyting non è una sottoalgebra dell'algebra di Heyting in quanto l'operazione di sup sull'algebra di Boole degli elementi regolari non è indotta dall'operazione di sup dell'algebra di Heyting.

In un'algebra di Heyting il doppio pseudocomplemento commuta con l'inf.

**Lemma 3.3.5.** *Sia $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ un'algebra di Heyting e sia $-$ lo pseudocomplemento su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$. Per ogni $x, y \in H$ si ha che $- - (x \wedge y) = (- - x) \wedge (- - y)$.*

*Dimostrazione.* Siano $x, y \in H$.
Si ha che $x \wedge y \leq x$, quindi $-x \leq -(x \wedge y)$, dunque $- - (x \wedge y) \leq - - x$.
Si ha che $x \wedge y \leq y$, quindi $-y \leq -(x \wedge y)$, dunque $- - (x \wedge y) \leq - - y$.
Dal fatto che $- - (x \wedge y) \leq - - x$ e che $- - (x \wedge y) \leq - - y$ segue che $- - (x \wedge y) \leq (- - x) \wedge (- - y)$.
Si ha che $((-(x \wedge y)) \wedge x) \wedge y = (-(x \wedge y)) \wedge (x \wedge y) = ((x \wedge y) \rightarrow 0) \wedge (x \wedge y) \leq 0$, allora

$-(x \wedge y) \wedge x \leq y \to 0 = -y$, quindi $-(x \wedge y) \leq x \to (-y)$, dunque

$$
\begin{aligned}
((- - x) \wedge (- - y)) \wedge (-(x \wedge y)) &\leq ((- - x) \wedge (- - y)) \wedge (x \to (-y)) = \\
&= (- - x) \wedge ((- - y) \wedge (x \to (-y))) = \\
&= (- - x) \wedge ((-(-y)) \wedge (x \to (-y))) = \\
&= (- - x) \wedge (((-y) \to 0) \wedge (x \to (-y))) = \\
&= (- - x) \wedge ((x \to (-y)) \wedge ((-y) \to 0)) \leq \\
&\leq (- - x) \wedge (x \to 0) = (-(-x)) \wedge (x \to 0) = \\
&= (-(-x)) \wedge (-x) = ((-x) \to 0) \wedge (-x) \leq 0,
\end{aligned}
$$

da cui $(- - x) \wedge (- - y) \leq (-(x \wedge y)) \to 0 = -(-(x \wedge y)) = - - (x \wedge y)$.
Dal fatto che $- - (x \wedge y) \leq (- - x) \wedge (- - y)$ e che $(- - x) \wedge (- - y) \leq - - (x \wedge y)$ segue che $- - (x \wedge y) = (- - x) \wedge (- - y)$. □

In un'algebra di Heyting lo pseudocomplemento dell'implicazione tra due elementi coincide con l'inf tra il doppio pseudocomplemento del primo elemento e lo pseudocomplemento del secondo elemento.

**Lemma 3.3.6.** *Sia $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ un'algebra di Heyting e sia $-$ lo pseudocomplemento su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$. Per ogni $x, y \in H$ si ha che $-(x \to y) = (- - x) \wedge (-y)$.*

*Dimostrazione.* Siano $x, y \in H$.
Si ha che $(-x) \wedge x = (x \to 0) \wedge x \leq 0 \leq y$, allora $-x \leq x \to y$, quindi $-(x \to y) \leq - - x$.
Si ha che $y \wedge x \leq y$, allora $y \leq x \to y$, quindi $-(x \to y) \leq -y$.
Dal fatto che $-(x \to y) \leq - - x$ e che $-(x \to y) \leq -y$ segue che $-(x \to y) \leq (- - x) \wedge (-y)$.
Si ha che $(-y) \wedge (x \to y) = (y \to 0) \wedge (x \to y) = (x \to y) \wedge (y \to 0) \leq x \to 0$, allora

$$
\begin{aligned}
((- - x) \wedge (-y)) \wedge (x \to y) &= (- - x) \wedge ((-y) \wedge (x \to y)) \leq (- - x) \wedge (x \to 0) = \\
&= (- - x) \wedge (-x) = (-(-x)) \wedge (-x) = ((-x) \to 0) \wedge (-x) \leq 0,
\end{aligned}
$$

quindi $(- - x) \wedge (-y) \leq (x \to y) \to 0 = -(x \to y)$.
Dal fatto che $-(x \to y) \leq (- - x) \wedge (-y)$ e che $(- - x) \wedge (-y) \leq -(x \to y)$ segue che $-(x \to y) = (- - x) \wedge (-y)$. □

Uno strumento fondamentale per studiare le relazioni tra le nozioni di soddisfacibilità intuizionista e di soddisfacibilità classica è costituito dagli omomorfismi di algebre di Heyting.

**Definizione 3.3.7** (Omomorfismo di algebre di Heyting)**.** *Un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ all'algebra di Heyting $(H', \wedge', \vee', \to', 0', 1')$ è una funzione $f : H \to H'$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

- $f(1) = 1'$ ;
- $f(0) = 0'$;
- $f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y)$;
- $f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y)$;
- $f(x \to y) = f(x) \to' f(y)$.

Gli omomorfismi di algebre di Heyting rispettano gli ordini.

**Lemma 3.3.8.** *Siano $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ e $(H', \wedge', \vee', \to', 0', 1')$ due algebre di Heyting e sia $f$ un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ all'algebra di Heyting $(H', \wedge', \vee', \to', 0', 1')$. Per ogni $x, y \in H$ si ha che se $x \leq y$ allora $f(x) \leq' f(y)$.*

*Dimostrazione.* Per ogni $x, y \in H$ si ha che se $x \leq y$ allora $x = x \wedge y$, quindi
$f(x) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y)$, dunque $f(x) \leq' f(y)$. □

L'analogia tra le definizioni di valutazione delle proposizioni di un linguaggio proposizionale e di omomorfismo di algebre di Heyting consente di dimostrare che componendo una valutazione delle proposizioni del linguaggio con un omomorfismo di algebre di Heyting si ottiene nuovamente una valutazione delle proposizioni del linguaggio.

**Proposizione 3.3.9.** *Siano* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *e* $(H', \wedge', \vee', \rightarrow', 1', 0')$ *due algebre di Heyting, sia* $V$ *una valutazione delle proposizioni di un linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *nell'algebra di Heyting* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *e sia* $f$ *un omomorfismo dall'algebra di Heyting* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *all'algebra di Heyting* $(H', \wedge', \vee', \rightarrow', 1', 0')$. *Si ha che* $V' = f \circ V$ *è una valutazione delle proposizioni del linguaggio* $\mathcal{L}$ *nell'algebra di Heyting* $(H', \wedge', \vee', \rightarrow', 1', 0')$.

*Dimostrazione.* Si ha che $V'(\top) = (f \circ V)(\top) = f(V(\top)) = f(1) = 1'$.
Si ha che $V'(\bot) = (f \circ V)(\bot) = f(V(\bot)) = f(0) = 0'$.
Si ha che

$$\begin{aligned} V'(\phi \wedge \psi) &= (f \circ V)(\phi \wedge \psi) = f(V(\phi \wedge \psi)) = f(V(\phi) \wedge V(\psi)) = f(V(\phi)) \wedge' f(V(\psi)) = \\ &= (f \circ V)(\phi) \wedge' (f \circ V)(\psi) = V'(\phi) \wedge' V'(\psi). \end{aligned}$$

Si ha che

$$\begin{aligned} V'(\phi \vee \psi) &= (f \circ V)(\phi \vee \psi) = f(V(\phi \vee \psi)) = f(V(\phi) \vee V(\psi)) = f(V(\phi)) \vee' f(V(\psi)) = \\ &= (f \circ V)(\phi) \vee' (f \circ V)(\psi) = V'(\phi) \vee' V'(\psi). \end{aligned}$$

Si ha che

$$\begin{aligned} V'(\phi \rightarrow \psi) &= (f \circ V)(\phi \rightarrow \psi) = f(V(\phi \rightarrow \psi)) = f(V(\phi) \rightarrow V(\psi)) = f(V(\phi)) \rightarrow' f(V(\psi)) = \\ &= (f \circ V)(\phi) \rightarrow' (f \circ V)(\psi) = V'(\phi) \rightarrow' V'(\psi). \end{aligned}$$

□

La funzione che associa ad ogni elemento di un'algebra di Heyting il suo doppio pseudocomplemento è un omomorfismo dall'algebra di Heyting all'algebra di Boole degli elementi regolari dell'algebra di Heyting.

**Proposizione 3.3.10.** *Sia* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *un'algebra di Heyting, sia* $-$ *lo pseudocomplemento su* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$, *sia* $(H_{reg}, \wedge_{reg}, \vee_{reg}, \neg_{reg}, 1_{H_{reg}}, 0_{H_{reg}})$ *l'algebra di Boole degli elementi regolari di* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *e sia* $\rightarrow_{reg}$ *l'implicazione su* $(H_{reg}, \wedge_{reg}, \vee_{reg}, \neg_{reg}, 1_{H_{reg}}, 0_{H_{reg}})$. *Si definisce una funzione* $\pi_{reg} : H \rightarrow H_{reg}$ *ponendo* $\pi_{reg}(x) = - - x$. *Si ha che la funzione* $\pi_{reg}$ *è ben definita ed è un omomorfismo dall'algebra di Heyting* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *all'algebra di Heyting* $(H_{reg}, \wedge_{reg}, \vee_{reg}, \rightarrow_{reg}, 1_{H_{reg}}, 0_{H_{reg}})$.

*Dimostrazione.* Si vuole dimostrare che $\pi_{\text{reg}}$ è ben definita.
Per ogni $x \in H$ si ha che $- - \pi_{\text{reg}}(x) = - - (- - x) = - - -(-x) = -(-x) = - - x = \pi_{\text{reg}}(x)$, quindi che $\pi_{\text{reg}}(x) \in H_{\text{reg}}$.
Si ha quindi che $\pi_{\text{reg}}$ è ben definita.
Si vuole dimostrare che $\pi_{\text{reg}}$ è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ all'algebra di Heyting $(H_{\text{reg}}, \wedge_{\text{reg}}, \vee_{\text{reg}}, \rightarrow_{\text{reg}}, 1_{H_{\text{reg}}}, 0_{H_{\text{reg}}})$.
Si ha che $\pi_{\text{reg}}(1) = - - 1 = -(-1) = -0 = 1 = 1_{H_{\text{reg}}}$.
Si ha che $\pi_{\text{reg}}(0) = - - 0 = -(-0) = -1 = 0 = 0_{H_{\text{reg}}}$.
Si ha che $\pi_{\text{reg}}(x \wedge y) = - - (x \wedge y) = (- - x) \wedge (- - y) = \pi_{\text{reg}}(x) \wedge \pi_{\text{reg}}(y) = \pi_{\text{reg}}(x) \wedge_{\text{reg}} \pi_{\text{reg}}(y)$.
Si ha che

$$\begin{aligned} \pi_{\text{reg}}(x \vee y) &= - - (x \vee y) = -(-(x \vee y)) = -((-x) \wedge (-y)) = -((- - -x) \wedge (- - -y)) = \\ &= -((-(- - x)) \wedge (-(- - y))) = -(-((- - x) \vee (- - y))) = \\ &= - - ((- - x) \vee (- - y)) = - - (\pi_{\text{reg}}(x) \vee \pi_{\text{reg}}(y)) = \pi_{\text{reg}}(x) \vee_{\text{reg}} \pi_{\text{reg}}(y). \end{aligned}$$

Si ha che
$\pi_{\text{reg}}(x \to y) = - - (x \to y) = -(-(x \to y)) = -((- - x) \wedge (-y)) = -((- - x) \wedge (- - -y)) =$
$= -((- - x) \wedge (-(- - y))) = -(\pi_{\text{reg}}(x) \wedge (-\pi_{\text{reg}}(y))) =$
$= -(\pi_{\text{reg}}(x) \wedge (\neg_{\text{reg}}\pi_{\text{reg}}(y))) = -(\pi_{\text{reg}}(x) \wedge_{\text{reg}} (\neg_{\text{reg}}\pi_{\text{reg}}(y))) =$
$= \neg_{\text{reg}}(\pi_{\text{reg}}(x) \wedge_{\text{reg}} (\neg_{\text{reg}}\pi_{\text{reg}}(y))) = \pi_{\text{reg}}(x) \to_{\text{reg}} \pi_{\text{reg}}(y)$.
Si ha quindi che $\pi_{\text{reg}}$ è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ all'algebra di Heyting $(H_{\text{reg}}, \wedge_{\text{reg}}, \vee_{\text{reg}}, \to_{\text{reg}}, 1_{H_{\text{reg}}}, 0_{H_{\text{reg}}})$. □

Si può dimostrare che se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente.

**Teorema 3.3.11.** *Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente.*

*Dimostrazione.* Si supponga che $\Gamma$ sia soddisfacibile intuizionisticamente, allora esiste un modello intuizionista per $\Gamma$, ovvero esistono un'algebra di Heyting non banale $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ ed una valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ tale che $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma$.
Sia $(H_{\text{reg}}, \wedge_{\text{reg}}, \vee_{\text{reg}}, \neg_{\text{reg}}, 1_{H_{\text{reg}}}, 0_{H_{\text{reg}}})$ l'algebra di Boole degli elementi regolari di $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$, siccome l'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ è non banale si ha che l'algebra di Boole $(H_{\text{reg}}, \wedge_{\text{reg}}, \vee_{\text{reg}}, \neg_{\text{reg}}, 1_{H_{\text{reg}}}, 0_{H_{\text{reg}}})$ è non banale per la proposizione 3.3.3.
Sia $-$ lo pseudocomplemento su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$.
Si definisce una funzione $\pi_{\text{reg}} : H \to H_{\text{reg}}$ ponendo $\pi_{\text{reg}}(x) = - - x$. Per la proposizione 3.3.10 si ha che la funzione $\pi_{\text{reg}}$ è ben definita ed è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ all'algebra di Boole $(H_{\text{reg}}, \wedge_{\text{reg}}, \vee_{\text{reg}}, \neg_{\text{reg}}, 1_{H_{\text{reg}}}, 0_{H_{\text{reg}}})$.
Siccome $V$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ e $\pi_F$ è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ all'algebra di Boole $(H_{\text{reg}}, \wedge_{\text{reg}}, \vee_{\text{reg}}, \neg_{\text{reg}}, 1_{H_{\text{reg}}}, 0_{H_{\text{reg}}})$ si ha che $V_{\text{reg}} = \pi_{\text{reg}} \circ V$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Boole $(H_{\text{reg}}, \wedge_{\text{reg}}, \vee_{\text{reg}}, \neg_{\text{reg}}, 1_{H_{\text{reg}}}, 0_{H_{\text{reg}}})$ per la proposizione 3.3.9.
Per ogni $\phi \in \Gamma$ si ha che $V_{\text{reg}}(\phi) = (\pi_{\text{reg}} \circ V)(\phi) = \pi_{\text{reg}}(V(\phi)) = \pi_{\text{reg}}(1) = 1_{H_{\text{reg}}}$.
Si ha quindi che $((H_{\text{reg}}, \wedge_{\text{reg}}, \vee_{\text{reg}}, \neg_{\text{reg}}, 1_{H_{\text{reg}}}, 0_{H_{\text{reg}}}), V_{\text{reg}})$ è un modello classico per $\Gamma$, dunque $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente. □

Si ha quindi che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente se e solo se $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente.

**Teorema 3.3.12.** *Un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente se e solo se $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente.*

*Dimostrazione.* Se $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente per il teorema 3.3.11. Viceversa, se $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 3.3.1. □

Il risultato precedente, ovvero il fatto che la soddisfacibilità intuizionista coincida con la soddisfacibilità classica, vale per la logica proposizionale ma non per la logica predicativa.
Ad esempio, la formula $(\neg\forall x\phi(x)) \wedge (\neg\exists x\neg\phi(x))$ è soddisfacibile intuizionisticamente ma non è soddisfacibile classicamente.

Una costruzione canonica permette di ottenere un'algebra di Heyting completa (cioè tale che ogni sottoinsieme dell'algebra di Heyting ammetta estremo inferiore ed estremo superiore) a partire da uno spazio topologico $(X, \tau)$: si definisce un'operazione binaria $\rightarrow$ su $\tau$ ponendo $\mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2 = \bigcup\{\mathcal{O} \in \tau \mid \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_2\}$, si può dimostrare che $(\tau, \cap, \cup, \rightarrow, X, \varnothing)$ è un'algebra di Heyting completa.
Dato un dominio $D$, si può definire una valutazione $V_D$ delle formule di un linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting completa $(\tau, \cap, \cup, \rightarrow, X, \varnothing)$ ponendo $V(\top) = 1$, $V(\bot) = 0$, $V(\phi \wedge \psi) = V(\phi) \cap V(\psi)$, $V(\phi \vee \psi) = V(\phi) \cup V(\psi)$, $V(\phi \rightarrow \psi) = V(\phi) \rightarrow V(\psi)$, $V(\forall x \phi(x)) = \mathrm{Int}(\bigcap_{d \in D} V(\phi(d)))$ e $V(\exists x \phi(x)) = \bigcup_{d \in D} V(\phi(d))$.
In particolare, a partire dallo spazio topologico $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$, dove $\tau_{\mathbb{R}}$ è la topologia standard su $\mathbb{R}$, si può costruire l'algebra di Heyting completa $(\tau_{\mathbb{R}}, \cap, \cup, \rightarrow, \mathbb{R}, \varnothing)$, inoltre, considerando come dominio l'insieme $D = \mathbb{R}$ si può definire una valutazione $V_{\mathbb{R}}$ delle formule di un linguaggio predicativo $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ nell'algebra di Heyting completa $(\tau_{\mathbb{R}}, \cap, \cup, \rightarrow, \mathbb{R}, \varnothing)$ ponendo $V_{\mathbb{R}}(A(d)) = \mathbb{R} \setminus \{d\}$.
Si ha che

$$
\begin{aligned}
V_{\mathbb{R}}((\neg \forall x \phi(x)) \wedge (\neg \exists x \neg \phi(x))) &= V_{\mathbb{R}}(\neg \forall x \phi(x)) \cap V_{\mathbb{R}}(\neg \exists x \neg \phi(x)) = \\
&= V_{\mathbb{R}}((\forall x \phi(x)) \rightarrow \bot) \cap V_{\mathbb{R}}((\exists x \neg \phi(x)) \rightarrow \bot) = \\
&= (V_{\mathbb{R}}(\forall x \phi(x)) \rightarrow V_{\mathbb{R}}(\bot)) \cap (V_{\mathbb{R}}(\exists x \neg \phi(x)) \rightarrow V_{\mathbb{R}}(\bot)) = \\
&= ((\mathrm{Int}(\bigcap_{d \in \mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}(\phi(d)))) \rightarrow \varnothing) \cap ((\bigcup_{d \in \mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}(\neg \phi(d))) \rightarrow \varnothing) = \\
&= ((\mathrm{Int}(\bigcap_{d \in \mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}(\phi(d)))) \rightarrow \varnothing) \cap ((\bigcup_{d \in \mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}(\phi(d) \rightarrow \bot)) \rightarrow \varnothing) = \\
&= ((\mathrm{Int}(\bigcap_{d \in \mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}(\phi(d)))) \rightarrow \varnothing) \cap ((\bigcup_{d \in \mathbb{R}} (V_{\mathbb{R}}(\phi(d)) \rightarrow V_{\mathbb{R}}(\bot))) \rightarrow \varnothing) = \\
&= ((\mathrm{Int}(\bigcap_{d \in \mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}(\phi(d)))) \rightarrow \varnothing) \cap ((\bigcup_{d \in \mathbb{R}} (V_{\mathbb{R}}(\phi(d)) \rightarrow \varnothing)) \rightarrow \varnothing) = \\
&= ((\mathrm{Int}(\bigcap_{d \in \mathbb{R}} (\mathbb{R} \setminus \{d\}))) \rightarrow \varnothing) \cap ((\bigcup_{d \in \mathbb{R}} ((\mathbb{R} \setminus \{d\}) \rightarrow \varnothing)) \rightarrow \varnothing) = \\
&= ((\mathrm{Int}(\varnothing)) \rightarrow \varnothing) \cap ((\bigcup_{d \in \mathbb{R}} (\bigcup\{\mathcal{O} \in \tau_{\mathbb{R}} \mid (\mathbb{R} \setminus \{d\}) \cap \mathcal{O} \subseteq \varnothing\})) \rightarrow \varnothing) = \\
&= ((\mathrm{Int}(\varnothing)) \rightarrow \varnothing) \cap ((\bigcup_{d \in \mathbb{R}} (\bigcup\{\varnothing\})) \rightarrow \varnothing) = \\
&= ((\mathrm{Int}(\varnothing)) \rightarrow \varnothing) \cap ((\bigcup_{d \in \mathbb{R}} (\varnothing)) \rightarrow \varnothing) = (\varnothing \rightarrow \varnothing) \cap (\varnothing \rightarrow \varnothing) = \\
&= \bigcup\{\mathcal{O} \in \tau_{\mathbb{R}} \mid \varnothing \cap \mathcal{O} \subseteq \varnothing\} \cap \bigcup\{\mathcal{O} \in \tau_{\mathbb{R}} \mid \varnothing \cap \mathcal{O} \subseteq \varnothing\} = \\
&= \bigcup\{\mathcal{O} \in \tau_{\mathbb{R}}\} \cap \bigcup\{\mathcal{O} \in \tau_{\mathbb{R}}\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Si ha quindi che la formula $(\neg \forall x \phi(x)) \wedge (\neg \exists x \neg \phi(x))$ è soddisfacibile intuizionisticamente.

Si vuole dimostrare che in ogni algebra di Boole completa $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$, per ogni insieme $\{x_i \in B \mid i \in I\}$, si ha che $\bigwedge_{i \in I} \neg x_i = \neg \bigvee_{i \in I} x_i$, ovvero che $\neg \bigvee_{i \in I} x_i$ è l'estremo inferiore dell'insieme $\{\neg x_i \mid i \in I\}$.
Si ha che $x_j \leq \bigwedge_{i \in I} x_i$ per ogni $j \in I$, allora $\neg \bigwedge_{i \in I} x_i \leq \neg x_j$ per ogni $j \in I$.
Se $y \leq \neg x_j$ per ogni $j \in I$ allora $x_j = \neg\neg x_j \leq \neg y$ per ogni $j \in I$, quindi $\bigvee_{i \in I} x_i \leq \neg y$, dunque $y = \neg\neg y \leq \neg \bigvee_{i \in I} x_i$.
Si ha quindi che $\neg \bigvee_{i \in I} x_i$ è l'estremo inferiore dell'insieme $\{\neg x_i \mid i \in I\}$, ovvero che $\bigwedge_{i \in I} \neg x_i = \neg \bigvee_{i \in I} x_i$.
Dato un dominio $D$, una valutazione $V_D$ delle formule di un linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ in un'al-

gebra di Boole completa $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ deve rispettare le condizioni $V_D(\top) = 1$, $V_D(\bot) = 0$, $V_D(\phi \wedge \psi) = V_D(\phi) \wedge V_D(\psi)$, $V_D(\phi \vee \psi) = V_D(\phi) \vee V_D(\psi)$, $V_D(\phi \to \psi) = V_D(\phi) \to V_D(\psi)$, $V_D(\forall x\phi(x)) = \bigwedge_{d\in D} V_D(\phi(d))$ e $V_D(\exists x\phi(x)) = \bigvee_{d\in D} V_D(\phi(d))$.
Si ha che

$$\begin{aligned}
V_D((\neg\forall x\phi(x)) \wedge (\neg\exists x\neg\phi(x))) &= V_D((\neg\forall x\phi(x))) \wedge V_D(\neg\exists x\neg\phi(x)) = \\
&= (\neg V_D((\forall x\phi(x)))) \wedge (\neg V_D(\exists x\neg\phi(x))) = \\
&= (\neg \bigwedge_{d\in D} V_D(\phi(d))) \wedge (\neg \bigvee_{d\in D} V_D(\neg\phi(d))) = \\
&= (\neg \bigwedge_{d\in D} V_D(\phi(d))) \wedge ( \bigwedge_{d\in D} \neg V_D(\neg\phi(d))) = \\
&= (\neg \bigwedge_{d\in D} V_D(\phi(d))) \wedge ( \bigwedge_{d\in D} \neg\neg V_D(\phi(d))) = \\
&= (\neg \bigwedge_{d\in D} V_D(\phi(d))) \wedge ( \bigwedge_{d\in D} V_D(\phi(d))) = \\
&= ( \bigwedge_{d\in D} V_D(\phi(d))) \wedge (\neg \bigwedge_{d\in D} V_D(\phi(d))) = 0.
\end{aligned}$$

Si ha quindi che la formula $(\neg\forall x\phi(x)) \wedge (\neg\exists x\neg\phi(x))$ non è soddisfacibile classicamente.

## 3.4 N-soddisfacibilità intuizionista vs N-soddisfacibilità classica

Si vuole dimostrare che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente se e solo se è N-soddisfacibile classicamente.

Grazie al fatto che ogni algebra di Boole è un'algebra di Heyting si ha che ogni N-modello classico per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è un N-modello intuizionista per $\Gamma$, si ha dunque che se $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.

**Teorema 3.4.1.** *Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.*

*Dimostrazione.* Si supponga che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile classicamente, allora esiste un N-modello classico per $\Gamma$, ovvero esistono un'algebra di Boole non banale numerabile $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ ed una valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Boole $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ tale che $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma$.
Siccome ogni algebra di Boole è un'algebra di Heyting per la proposizione 2.6.4, si ha che l'algebra di Boole $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ è un'algebra di Heyting non banale numerabile, allora $((B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0), V)$ è un N-modello intuizionista per $\Gamma$, dunque $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente. □

Si ha che l'algebra di Boole degli elementi regolari di un'algebra di Heyting numerabile è numerabile.

**Proposizione 3.4.2.** *Sia $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ un'algebra di Heyting e sia $(H_{reg}, \wedge_{reg}, \vee_{reg}, \neg_{reg}, 1_{H_{reg}}, 0_{H_{reg}})$ l'algebra di Boole degli elementi regolari di $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$. Se l'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ è numerabile allora l'algebra di Boole $(H_{reg}, \wedge_{reg}, \vee_{reg}, \neg_{reg}, 1_{H_{reg}}, 0_{H_{reg}})$ è numerabile.*

*Dimostrazione.* Si supponga che l'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ sia numerabile, allora l'insieme $H$ è numerabile, quindi esiste una funzione iniettiva $f : H \rightarrow \mathbb{N}$.
Sia $-$ lo pseudocomplemento su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$, si ha che $H_{\text{reg}} = \{x \in H \mid --x = x\} \subseteq H$, allora la funzione $g : H_{\text{reg}} \rightarrow \mathbb{N}$ definita ponendo $g(x) = f(x)$ è iniettiva, quindi l'algebra di Boole $(H_{\text{reg}}, \wedge_{\text{reg}}, \vee_{\text{reg}}, \neg_{\text{reg}}, 1_{H_{\text{reg}}}, 0_{H_{\text{reg}}})$ è numerabile. □

Si può dimostrare che se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente.

**Teorema 3.4.3.** *Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente.*

*Dimostrazione.* Si supponga che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile intuizionisticamente, allora esiste un N-modello intuizionista per $\Gamma$, ovvero esistono un'algebra di Heyting non banale numerabile $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ ed una valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ tale che $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma$.
Sia $(H_{\text{reg}}, \wedge_{\text{reg}}, \vee_{\text{reg}}, \neg_{\text{reg}}, 1_{H_{\text{reg}}}, 0_{H_{\text{reg}}})$ l'algebra di Boole degli elementi regolari di $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$, siccome l'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ è non banale si ha che l'algebra di Boole $(H_{\text{reg}}, \wedge_{\text{reg}}, \vee_{\text{reg}}, \neg_{\text{reg}}, 1_{H_{\text{reg}}}, 0_{H_{\text{reg}}})$ è non banale per la proposizione 3.3.3 e siccome l'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ è numerabile si ha che l'algebra di Boole $(H_{\text{reg}}, \wedge_{\text{reg}}, \vee_{\text{reg}}, \neg_{\text{reg}}, 1_{H_{\text{reg}}}, 0_{H_{\text{reg}}})$ è numerabile per la proposizione 3.4.2.
Sia $-$ lo pseudocomplemento su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$.
Si definisce una funzione $\pi_{\text{reg}} : H \rightarrow H_{\text{reg}}$ ponendo $\pi_{\text{reg}}(x) = --x$. Per la proposizione 3.3.10 si ha che la funzione $\pi_{\text{reg}}$ è ben definita ed è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ all'algebra di Boole $(H_{\text{reg}}, \wedge_{\text{reg}}, \vee_{\text{reg}}, \neg_{\text{reg}}, 1_{H_{\text{reg}}}, 0_{H_{\text{reg}}})$.
Siccome $V$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e $\pi_F$ è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ all'algebra di Boole $(H_{\text{reg}}, \wedge_{\text{reg}}, \vee_{\text{reg}}, \neg_{\text{reg}}, 1_{H_{\text{reg}}}, 0_{H_{\text{reg}}})$ si ha che $V_{\text{reg}} = \pi_{\text{reg}} \circ V$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Boole $(H_{\text{reg}}, \wedge_{\text{reg}}, \vee_{\text{reg}}, \neg_{\text{reg}}, 1_{H_{\text{reg}}}, 0_{H_{\text{reg}}})$ per la proposizione 3.3.9.
Per ogni $\phi \in \Gamma$ si ha che $V_{\text{reg}}(\phi) = (\pi_{\text{reg}} \circ V)(\phi) = \pi_{\text{reg}}(V(\phi)) = \pi_{\text{reg}}(1) = 1_{H_{\text{reg}}}$.
Si ha quindi che $((H_{\text{reg}}, \wedge_{\text{reg}}, \vee_{\text{reg}}, \neg_{\text{reg}}, 1_{H_{\text{reg}}}, 0_{H_{\text{reg}}}), V_{\text{reg}})$ è un N-modello classico per $\Gamma$, dunque $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente. □

Si ha quindi che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente se e solo se $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente.

**Teorema 3.4.4.** *Un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente se e solo se $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente.*

*Dimostrazione.* Se $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente per il teorema 3.4.3. Viceversa, se $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 3.4.1. □

# Capitolo 4

# Soddisfacibilità vs 2-soddisfacibilità vs N-soddisfacibilità (prima parte)

In questo capitolo si dimostrano le implicazioni che intercorrono tra soddisfacibilità intuizionista (rispettivamente classica), 2-soddisfacibilità e N-soddisfacibilità intuizionista (rispettivamente classica) utilizzando una metateoria intuizionista, una metateoria classica ed una metateoria classica con assioma della scelta.

## 4.1 Relazioni in una metateoria intuizionista

Chiaramente ogni 2-modello per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è un N-modello intuizionista per $\Gamma$, quindi se $\Gamma$ è 2-soddisfacibile allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.

**Teorema 4.1.1.** *Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è 2-soddisfacibile allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.*

*Dimostrazione.* Si supponga che $\Gamma$ sia 2-soddisfacibile, allora esiste un 2-modello per $\Gamma$, ovvero esiste una valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting di due elementi $(\{0,1\}, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ tale che $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma$.
Si definisce una funzione $f : \{0,1\} \rightarrow \mathbb{N}$ ponendo $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, si ha che la funzione $f$ è iniettiva, quindi l'algebra di Heyting di due elementi $(\{0,1\}, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ è numerabile.
Allora si ha che $((\{0,1\}, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0), V)$ è un N-modello intuizionista per $\Gamma$, dunque $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente. $\square$

Chiaramente ogni N-modello intuizionista per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è un modello intuizionista per $\Gamma$, quindi se $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente.

**Teorema 4.1.2.** *Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente.*

*Dimostrazione.* Si supponga che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile intuizionisticamente, allora esiste un N-modello per $\Gamma$, ovvero esistono un'algebra di Heyting non banale numerabile $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ ed una valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ tale che $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma$.

Allora si ha che $((H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0), V)$ è un modello intuizionista per $\Gamma$, dunque $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente. $\square$

Utilizzando una metateoria intuizionista, i teoremi 4.1.1 e 4.1.2 garantiscono quindi che per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ valgono le seguenti implicazioni:
($\Gamma$ è 2-soddisfacibile) $\Rightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente) $\Rightarrow$ ($\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente)
Si dimostrerà nel seguito (sezione 11.1) che in una metateoria intuizionista si ha che:
($\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente) $\not\Rightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente) e
($\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente) $\not\Rightarrow$ ($\Gamma$ è 2-soddisfacibile)

Chiaramente ogni 2-modello per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è un N-modello classico per $\Gamma$, quindi se $\Gamma$ è 2-soddisfacibile allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente.

**Teorema 4.1.3.** *Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è 2-soddisfacibile allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente.*

*Dimostrazione.* Si supponga che $\Gamma$ sia 2-soddisfacibile, allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 4.1.1, quindi $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente per il teorema 3.4.3. $\square$

Chiaramente ogni N-modello classico per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è un modello classico per $\Gamma$, quindi se $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente.

**Teorema 4.1.4.** *Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente.*

*Dimostrazione.* Si supponga che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile classicamente, allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 3.4.1, quindi $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 4.1.2, dunque $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente per il teorema 3.3.11. $\square$

Utilizzando una metateoria intuizionista, i teoremi 4.1.3 e 4.1.4 garantiscono quindi che per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ valgono le seguenti implicazioni:
($\Gamma$ è 2-soddisfacibile) $\Rightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente) $\Rightarrow$ ($\Gamma$ è soddisfacibile classicamente)
Si dimostrerà nel seguito (sezione 11.1) che in una metateoria intuizionista si ha che:
($\Gamma$ è soddisfacibile classicamente) $\not\Rightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente) e
($\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente) $\not\Rightarrow$ ($\Gamma$ è 2-soddisfacibile)

## 4.2 Relazioni in una metateoria classica

Utilizzando una metateoria classica si può dimostrare che se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.

Uno strumento fondamentale per studiare le relazioni tra le varie nozioni di soddisfacibilità è costituito dai filtri.

**Definizione 4.2.1** (Filtro)**.** *Un filtro su un'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ è un sottoinsieme $F \subseteq H$ tale che:*
- $1 \in F$;
- *se* $x \in F$, $y \in H$ *e* $x \leq y$ *allora* $y \in F$;

- *se $x, y \in F$ allora $x \wedge y \in F$.*

Un filtro su un'algebra di Heyting si dice proprio se non contiene il minimo elemento dell'algebra di Heyting.

**Definizione 4.2.2** (Filtro proprio)**.** *Un filtro $F$ su un'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ è proprio se $0 \notin F$.*

Si utilizza la notazione $Y \subseteq_\omega X$ per indicare che $Y$ è un sottoinsieme finito dell'insieme $X$.

Un sottoinsieme di un'algebra di Heyting può essere esteso ad un filtro sull'algebra di Heyting.

**Proposizione 4.2.3.** *Sia $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ un'algebra di Heyting e sia $X \subseteq H$. Si ha che l'insieme $\uparrow X = \{x \in H \mid \text{esiste } Y \subseteq_\omega X \text{ tale che } \bigwedge Y \leq x\}$ è un filtro su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$. Inoltre si ha che $X \subseteq \uparrow X$.*

*Dimostrazione.* Si ha che $\varnothing \subseteq_\omega X$ e che $\bigwedge \varnothing = 1$, quindi $1 \in \uparrow X$.
Se $x \in \uparrow X$, $y \in H$ e $x \leq y$ allora esiste $Y \subseteq_\omega X$ tale che $\bigwedge Y \leq x \leq y$, quindi $y \in \uparrow X$.
Se $x, y \in \uparrow X$ allora esistono $Y, Z \subseteq_\omega X$ tali che $\bigwedge Y \leq x$ e $\bigwedge Z \leq y$, dunque si ha che $Y \cup Z \subseteq_\omega X$ e che $\bigwedge (Y \cup Z) = (\bigwedge Y) \wedge (\bigwedge Z) \leq x \wedge y$, quindi $x \wedge y \in \uparrow X$.
Si ha quindi che $\uparrow X$ è un filtro su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$.
Se $x \in X$ allora si ha che $\{x\} \subseteq_\omega X$ e che $\bigwedge \{x\} = x$, quindi $x \in \uparrow X$.
Si ha quindi che $X \subseteq \uparrow X$. □

La proposizione 4.2.3 consente di definire la nozione di filtro generato da un sottoinsieme di un'algebra di Heyting.

**Definizione 4.2.4** (Filtro generato)**.** *Sia $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ un'algebra di Heyting e sia $X \subseteq H$. Il filtro generato da $X$ è il filtro $\uparrow X = \{x \in H \mid \text{esiste } Y \subseteq_\omega X \text{ tale che } \bigwedge Y \leq x\}$ su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$.*

Il filtro generato da un sottoinsieme di un'algebra di Heyting è il più piccolo filtro sull'algebra di Heyting contenente il sottoinsieme stesso.

**Proposizione 4.2.5.** *Sia $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ un'algebra di Heyting e sia $X \subseteq H$. Il filtro generato da $X$ è il più piccolo (rispetto all'inclusione) filtro su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ contenente $X$.*

*Dimostrazione.* Per la proposizione 4.2.3 si ha che il filtro generato da $X$ contiene $X$.
Si vuole dimostrare che $\uparrow X$ è il più piccolo filtro su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ contenente $X$, ovvero che se $F$ è un filtro su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ contenente $X$ allora si ha che $\uparrow X \subseteq F$.
Sia $F$ un filtro su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ e sia $x \in \uparrow X$, allora esiste $Y \subseteq_\omega X$ tale che $\bigwedge Y \leq x$, siccome $F$ è un filtro su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ contenente $X$ si ha che $Y \subseteq_\omega X \subseteq F$, quindi $\bigwedge Y \in F$, dunque $x \in F$.
Si ha quindi che $\uparrow X$ è il più piccolo filtro su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ contenente $X$. □

Una proprietà importante per estendere un sottoinsieme di un'algebra di Heyting ad un filtro proprio è la proprietà dell'intersezione finita.

**Definizione 4.2.6** (Proprietà dell'intersezione finita)**.** *Sia $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ un'algebra di Heyting e sia $X \subseteq H$. L'insieme $X$ gode della proprietà dell'intersezione finita se per ogni $Y \subseteq_\omega X$ si ha che $\bigwedge Y \neq 0$.*

Il filtro generato da un sottoinsieme di un'algebra di Heyting è proprio se è solo se il sottoinsieme gode della proprietà dell'intersezione finita.

**Proposizione 4.2.7.** *Sia $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ un'algebra di Heyting e sia $X \subseteq H$. Si ha che il filtro generato da $X$ è proprio se e solo se l'insieme $X$ gode della proprietà dell'intersezione finita.*

*Dimostrazione.* Si ha che il filtro generato da $X$ è proprio se e solo se $0 \notin \uparrow X$ se e solo non esiste $Y \subseteq_\omega X$ tale che $\bigwedge Y \leq 0$ se e solo se per ogni $Y \subseteq_\omega X$ si ha che $\bigwedge Y \neq 0$ se e solo se il filtro generato da $X$ gode della proprietà dell'intersezione finita. $\square$

Una particolare classe di filtri consente di costruire un 2-modello per un insieme di proposizioni di un linguaggio proposizionale a partire da un modello intuizionista per l'insieme di proposizioni, si tratta dei filtri massimali.

**Definizione 4.2.8** (Filtro massimale)**.** *Un filtro proprio $F$ su un'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ è massimale se per ogni $x \in H$ tale che $x \notin F$ si ha che $\uparrow(F \cup \{x\}) = H$.*

Data una catena monotona di filtri su un'algebra di Heyting si ha che la loro unione è un filtro sull'algebra di Heyting, inoltre se tutti i filtri della catena sono propri allora anche la loro unione è un filtro proprio.

**Proposizione 4.2.9.** *Sia $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ un'algebra di Heyting, sia $\alpha$ un ordinale e sia $(F_\lambda)_{\lambda<\alpha}$ una catena ascendente o discendente (rispetto all'inclusione) di filtri su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$. Si ha che $F = \bigcup_{\lambda<\alpha} F_\lambda$ è un filtro su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$. Inoltre, se ciascun filtro della catena $(F_\lambda)_{\lambda<\alpha}$ è proprio allora anche il filtro $F$ è proprio.*

*Dimostrazione.* Si vuole dimostrare che $F$ è un filtro su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$.
Si ha che $1 \in F_\lambda$ per ogni $\lambda < \alpha$, quindi $1 \in \bigcup_{\lambda<\alpha} F_\lambda = F$.
Se $x \in F$ allora esiste $\bar{\lambda} < \alpha$ tale che $x \in F_{\bar{\lambda}}$, dunque se $y \in H$ e $x \leq y$ si ha che $y \in F_{\bar{\lambda}}$ in quanto $F_{\bar{\lambda}}$ è un filtro su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$, quindi $y \in \bigcup_{\lambda<\alpha} F_\lambda = F$.
Se $x, y \in F$ allora esistono $\bar{\lambda}_1 < \alpha$ e $\bar{\lambda}_2 < \alpha$ tali che $x \in F_{\bar{\lambda}_1}$ e $y \in F_{\bar{\lambda}2}$, siccome $(F_\lambda)_{\lambda<\alpha}$ una catena ascendente o discendente di filtri su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ non è restrittivo supporre che $F_{\bar{\lambda}_1} \subseteq F_{\bar{\lambda}_2}$, si ha quindi che $x, y \in F_{\bar{\lambda}_2}$, dunque $x \wedge y \in F_{\bar{\lambda}_2}$ perchè $F_{\bar{\lambda}_2}$ è un filtro su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$, ne segue che $x \wedge y \in \bigcup_{\lambda<\alpha} F_\lambda = F$.
Si ha quindi che $F$ è un filtro su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$.
Se ciascun filtro della catena $(F_\lambda)_{\lambda<\alpha}$ è proprio allora $0 \notin F_\lambda$ per ogni $\lambda < \alpha$, quindi $0 \notin \bigcup_{\lambda<\alpha} F_\lambda = F$, dunque il filtro $F$ è proprio. $\square$

Utilizzando una metateoria classica si può dimostrare che un sottoinsieme di un'algebra di Heyting numerabile che gode della proprietà dell'intersezione finita può essere esteso ad un filtro massimale.

**Proposizione (LEM) 4.2.10.** *Sia $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ un'algebra di Heyting non banale numerabile e sia $X \subseteq H$ un sottoinsieme di $H$ che gode della proprietà dell'intersezione finita. Allora esiste un filtro massimale $F$ su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ tale che $X \subseteq F$.*

*Dimostrazione.* Siccome $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ è un'algebra di Heyting numerabile si ha che l'insieme $H$ è numerabile, cioè esiste una funzione iniettiva $f : H \rightarrow \mathbb{N}$.
Posto $I = f(H) \subseteq \mathbb{N}$, si definisce una funzione $g : I \rightarrow \mathbb{N}$ ponendo $g(n) = |\{m \in I \mid m < n\}|$.
Chiaramente si ha che $g$ è una funzione iniettiva, inoltre si ha che $g(I)$ è un segmento iniziale di $\mathbb{N}$ per costruzione.
Si definisce una funzione $h : H \rightarrow \mathbb{N}$ ponendo $h = g \circ f$, siccome $f$ e $g$ sono funzioni iniettive si ha che $h$ è una funzione iniettiva inoltre si ha che $h(H) = (g \circ f)(H) = g(f(H)) = g(I)$ è un

segmento iniziale di $\mathbb{N}$.
Posto $J = h(H) \subseteq \mathbb{N}$, si definisce una funzione $\bar{h} : H \to J$ ponendo $\bar{h}(x) = h(x)$ per ogni $x \in H$, si ha che $\bar{h}$ è una funzione biiettiva perchè è ottenuta dalla restrizione del codominio all'immagine della funzione iniettiva $h$.
La funzione $\bar{h}^{-1} : J \to H$, inversa della funzione $\bar{h}$, associa ad ogni elemento del segmento iniziale di $\mathbb{N}$ un elemento di $H$ e consente quindi di costruire una lista $x_0, \ldots, x_n, \ldots$ di tutti gli elementi di $H$.
Per la proposizione 4.2.3 si ha che $\uparrow X$ è un filtro su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$, inoltre siccome $X$ gode della proprietà dell'intersezione finita si ha che $\uparrow X$ è un filtro proprio per la proposizione 4.2.7.
La proposizione 4.2.9 consente di definire induttivamente la seguente catena ascendente di filtri propri su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$:

$$\begin{cases} F_0 = \uparrow X \\ F_{n+1} = \begin{cases} \uparrow(F_n \cup \{x_n\}) & \text{se } 0 \notin \uparrow(F_n \cup \{x_n\}) \\ F_n & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{cases}$$

Si definisce $F = \bigcup_{n \in J} F_n$, si ha che $F$ è un filtro proprio su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ per la proposizione 4.2.9.
Si vuole dimostrare che $F$ è un filtro massimale su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$.
Se $x_m \in H$ e $x_m \notin F$ allora si ha che $x_m \notin F_n$ per ogni $n \in J$, in particolare si ha che $x_m \notin F_{m+1}$, quindi non è verificata la condizione $0 \notin \uparrow(F_m \cup \{x_m\})$, dunque utilizzando l'eliminazione della doppia negazione si ha che $0 \in \uparrow(F_m \cup \{x_m\})$, da cui $\uparrow(F_m \cup \{x_m\}) = H$, perciò $\uparrow(F \cup \{x_m\}) = H$ in quanto $F_m \subseteq F$.
Si ha quindi che $F$ è un filtro massimale su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$.
Per la proposizione 4.2.3 si ha che $X \subseteq \uparrow X = F_0 \subseteq F$. $\square$

Si osservi che il filtro massimale che si ottiene dalla costruzione descritta nella dimostrazione della proposizione 4.2.10 dipende dalla funzione iniettiva utilizzata per listare gli elementi dell'algebra di Heyting, quindi scelte diverse della funzione iniettiva utilizzata per listare gli elementi dell'algebra di Heyting possono portare alla costruzione di filtri massimali diversi.

La catena di filtri propri $(F_n)_{n \in J}$ costruita nella dimostrazione della proposizione 4.2.10 è definita per casi, richiedendo quindi il principio del terzo escluso.
Si potrebbe tuttavia ridefinire la catena di filtri propri utilizzando una metateoria intuizionista nel modo seguente (l'idea è tratta da [6, teorema 2.2]):

$$\begin{cases} F_0 = \uparrow X \\ F_{n+1} = \uparrow(F_n \cup \{y \in H \mid y = x_n \text{ e } 0 \notin \uparrow(F_n \cup \{y\})\}). \end{cases}$$

La dimostrazione della proposizione 4.2.10 necessiterebbe comunque di una metateoria classica perchè per mostrare che il filtro $F = \bigcup_{n \in J} F_n$ è massimale utilizza l'eliminazione della doppia negazione.

Un filtro su un'algebra di Heyting induce una relazione di equivalenza sull'algebra di Heyting.

**Proposizione 4.2.11.** *Sia $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ un'algebra di Heyting e sia $F$ un filtro su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$. Si definisce una relazione binaria $\sim_F$ su $H$ ponendo $x \sim_F y$ se e solo se $(x \to y) \wedge (y \to x) \in F$. La relazione $\sim_F$ è una relazione di equivalenza sull'insieme $H$.*

*Dimostrazione.* Si vuole dimostrare che la relazione $\sim_F$ è riflessiva.
Per ogni $x \in H$ si ha che $(x \to x) \wedge (x \to x) = 1 \wedge 1 = 1 \in F$, dunque $x \sim_F x$.
Si ha quindi che che la relazione $\sim_F$ è riflessiva.
Si vuole dimostrare che la relazione $\sim_F$ è simmetrica.
Se $x \sim_F y$ allora $(x \to y) \wedge (y \to x) \in F$, quindi $(y \to x) \wedge (x \to y) = (x \to y) \wedge (y \to x) \in F$,

dunque $y \sim_F x$.
Si ha quindi che la relazione $\sim_F$ è simmetrica.
Si vuole dimostrare che la relazione $\sim_F$ è transitiva.
Si supponga che $x \sim_F y$ e $y \sim_F z$, allora $(x \to y) \wedge (y \to x) \in F$ e $(y \to z) \wedge (z \to y) \in F$.
Da $(x \to y) \wedge (y \to x) \in F$, essendo $(x \to y) \wedge (y \to x) \leq x \to y$ e $(x \to y) \wedge (y \to x) \leq y \to x$, segue che $x \to y \in F$ e che $y \to x \in F$.
Da $(y \to z) \wedge (z \to y) \in F$, essendo $(y \to z) \wedge (z \to y) \leq y \to z$ e $(y \to z) \wedge (z \to y) \leq z \to y$ segue che $y \to z \in F$ e che $z \to y \in F$.
Si ha dunque che $(x \to y) \wedge (y \to z) \in F$ e che $(z \to y) \wedge (y \to x) \in F$.
Si ha che $(x \to y) \wedge x \leq y$ e che $(y \to z) \wedge y \leq z$, allora

$$((x \to y) \wedge (y \to z)) \wedge x = ((y \to z) \wedge (x \to y)) \wedge x = (y \to z) \wedge ((x \to y) \wedge x) \leq (y \to z) \wedge y \leq \leq z,$$

quindi $(x \to y) \wedge (y \to z) \leq x \to z$.
Siccome $(x \to y) \wedge (y \to z) \in F$ e $(x \to y) \wedge (y \to z) \leq x \to z$ si ha che $x \to z \in F$.
Si ha che $(z \to y) \wedge z \leq y$ e che $(y \to x) \wedge y \leq x$, allora

$$((z \to y) \wedge (y \to x)) \wedge z = ((y \to x) \wedge (z \to y)) \wedge z = (y \to x) \wedge ((z \to y) \wedge z) \leq (y \to x) \wedge y \leq \leq x,$$

quindi $(z \to y) \wedge (y \to x) \leq z \to x$.
Siccome $(z \to y) \wedge (y \to x) \in F$ e $(z \to y) \wedge (y \to x) \leq z \to x$ si ha che $z \to x \in F$.
Dal fatto che $x \to z \in F$ e che $z \to x \in F$ segue che $(x \to z) \wedge (z \to x) \in F$, dunque che $x \sim_F z$.
Si ha quindi che la relazione $\sim_F$ è transitiva.
La relazione $\sim_F$ è dunque una relazione di equivalenza sull'insieme $H$. □

La relazione di equivalenza indotta da un filtro su un'algebra di Heyting consente di definire delle operazioni sull'insieme quoziente dell'algebra di Heyting rispetto alla relazione di equivalenza.

**Proposizione 4.2.12.** *Sia $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ un'algebra di Heyting e sia $F$ un filtro su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$. Sia $\sim_F$ la relazione di equivalenza definita su $H$ ponendo $x \sim_F y$ se e solo se $(x \to y) \wedge (y \to x) \in F$. Sia $H/F = \{[x]_F \mid x \in H\}$ l'insieme quoziente di $H$ rispetto a $\sim_F$. Si definiscono tre operazioni binarie $\wedge_F$, $\vee_F$ e $\to_F$ su $H/F$ ponendo $[x]_F \wedge_F [y]_F = [x \wedge y]_F$, $[x]_F \vee_F [y]_F = [x \vee y]_F$ e $[x]_F \to_F [y]_F = [x \to y]_F$. Si ha che le operazioni $\wedge_F$, $\vee_F$ e $\to_F$ sono ben definite, cioè non dipendono dai rappresentanti delle classi di equivalenza.*

*Dimostrazione.* Si ha che la relazione $\sim_F$ è una relazione di equivalenza su $H$ per la proposizione 4.2.11.
Si vuole dimostrare che l'operazione binaria $\wedge_F$ è ben definita.
Si supponga che $[x_1]_F = [x_2]_F$ e $[y_1]_F = [y_2]_F$, allora $x_1 \sim_F x_2$ e $y_1 \sim_F y_2$, cioè $(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1) \in F$ e $(y_1 \to y_2) \wedge (y_2 \to y_1) \in F$.
Da $(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1) \in F$, essendo $(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1) \leq x_1 \to x_2$ e $(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1) \leq x_2 \to x_1$, segue che $x_1 \to x_2 \in F$ e che $x_2 \to x_1 \in F$.
Da $(y_1 \to y_2) \wedge (y_2 \to y_1) \in F$, essendo $(y_1 \to y_2) \wedge (y_2 \to y_1) \leq y_1 \to y_2$ e $(y_1 \to y_2) \wedge (y_2 \to y_1) \leq y_2 \to y_1$, segue che $y_1 \to y_2 \in F$ e che $y_2 \to y_1 \in F$.
Si ha dunque che $(x_1 \to x_2) \wedge (y_1 \to y_2) \in F$ e che $(x_2 \to x_1) \wedge (y_2 \to y_1) \in F$.
Si ha che $(x_1 \to x_2) \wedge x_1 \leq x_2$ e che $(y_1 \to y_2) \wedge y_1 \leq y_2$, allora
$((x_1 \to x_2) \wedge x_1) \wedge ((y_1 \to y_2) \wedge y_1) \leq (x_1 \to x_2) \wedge x_1 \leq x_2$ e
$((x_1 \to x_2) \wedge x_1) \wedge ((y_1 \to y_2) \wedge y_1) \leq (y_1 \to y_2) \wedge y_1 \leq y_2$, quindi

$((x_1 \to x_2) \wedge x_1) \wedge ((y_1 \to y_2) \wedge y_1) \leq x_2 \wedge y_2$, dunque

$$\begin{aligned}((x_1 \to x_2) \wedge (y_1 \to y_2)) \wedge (x_1 \wedge y_1) &= (((x_1 \to x_2) \wedge (y_1 \to y_2)) \wedge x_1) \wedge y_1 = \\ &= ((x_1 \to x_2) \wedge ((y_1 \to y_2) \wedge x_1)) \wedge y_1 = \\ &= ((x_1 \to x_2) \wedge (x_1 \wedge (y_1 \to y_2))) \wedge y_1 = \\ &= (((x_1 \to x_2) \wedge x_1) \wedge (y_1 \to y_2)) \wedge y_1 = \\ &= ((x_1 \to x_2) \wedge x_1) \wedge ((y_1 \to y_2) \wedge y_1) \leq x_2 \wedge y_2,\end{aligned}$$

da cui $(x_1 \to x_2) \wedge (y_1 \to y_2) \leq (x_1 \wedge y_1) \to (x_2 \wedge y_2)$.
Siccome $(x_1 \to x_2) \wedge (y_1 \to y_2) \in F$ e $(x_1 \to x_2) \wedge (y_1 \to y_2) \leq (x_1 \wedge y_1) \to (x_2 \wedge y_2)$ si ha che $(x_1 \wedge y_1) \to (x_2 \wedge y_2) \in F$.
Si ha che $(x_2 \to x_1) \wedge x_2 \leq x_1$ e che $(y_2 \to y_1) \wedge y_2 \leq y_1$, allora
$((x_2 \to x_1) \wedge x_2) \wedge ((y_2 \to y_1) \wedge y_2) \leq (x_2 \to x_1) \wedge x_2 \leq x_1$ e
$((x_2 \to x_1) \wedge x_2) \wedge ((y_2 \to y_1) \wedge y_2) \leq (y_2 \to y_1) \wedge y_2 \leq y_1$, quindi
$((x_2 \to x_1) \wedge x_2) \wedge ((y_2 \to y_1) \wedge y_2) \leq x_1 \wedge y_1$, dunque

$$\begin{aligned}((x_2 \to x_1) \wedge (y_2 \to y_1)) \wedge (x_2 \wedge y_2) &= (((x_2 \to x_1) \wedge (y_2 \to y_1)) \wedge x_2) \wedge y_2 = \\ &= ((x_2 \to x_1) \wedge ((y_2 \to y_1) \wedge x_2)) \wedge y_2 = \\ &= ((x_2 \to x_1) \wedge (x_2 \wedge (y_2 \to y_1))) \wedge y_2 = \\ &= (((x_2 \to x_1) \wedge x_2) \wedge (y_2 \to y_1)) \wedge y_2 = \\ &= ((x_2 \to x_1) \wedge x_2) \wedge ((y_2 \to y_1) \wedge y_2) \leq x_1 \wedge y_1,\end{aligned}$$

da cui $(x_2 \to x_1) \wedge (y_2 \to y_1) \leq (x_2 \wedge y_2) \to (x_1 \wedge y_1)$.
Siccome $(x_2 \to x_1) \wedge (y_2 \to y_1) \in F$ e $(x_2 \to x_1) \wedge (y_2 \to y_1) \leq (x_2 \wedge y_2) \to (x_1 \wedge y_1)$ si ha che $(x_2 \wedge y_2) \to (x_1 \wedge y_1) \in F$.
Dal fatto che $(x_1 \wedge y_1) \to (x_2 \wedge y_2) \in F$ e che $(x_2 \wedge y_2) \to (x_1 \wedge y_1) \in F$ segue che $((x_1 \wedge y_1) \to (x_2 \wedge y_2)) \wedge ((x_2 \wedge y_2) \to (x_1 \wedge y_1)) \in F$, allora $x_1 \wedge y_1 \sim_F x_2 \wedge y_2$, dunque $[x_1]_F \wedge_F [y_1]_F = [x_1 \wedge y_1]_F = [x_2 \wedge y_2]_F = [x_2]_F \wedge_F [y_2]_F$.
Si ha quindi che l'operazione binaria $\wedge_F$ è ben definita.
Si vuole dimostrare che l'operazione binaria $\vee_F$ è ben definita.
Si supponga che $[x_1]_F = [x_2]_F$ e $[y_1]_F = [y_2]_F$, allora $x_1 \sim_F x_2$ e $y_1 \sim_F y_2$, cioè $(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1) \in F$ e $(y_1 \to y_2) \wedge (y_2 \to y_1) \in F$.
Da $(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1) \in F$, essendo $(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1) \leq x_1 \to x_2$ e $(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1) \leq x_2 \to x_1$, segue che $x_1 \to x_2 \in F$ e che $x_2 \to x_1 \in F$.
Da $(y_1 \to y_2) \wedge (y_2 \to y_1) \in F$, essendo $(y_1 \to y_2) \wedge (y_2 \to y_1) \leq y_1 \to y_2$ e $(y_1 \to y_2) \wedge (y_2 \to y_1) \leq y_2 \to y_1$, segue che $y_1 \to y_2 \in F$ e che $y_2 \to y_1 \in F$.
Si ha dunque che $(x_1 \to x_2) \wedge (y_1 \to y_2) \in F$ e che $(x_2 \to x_1) \wedge (y_2 \to y_1) \in F$.
Si ha che $(x_1 \to x_2) \wedge x_1 \leq x_2$ e che $(y_1 \to y_2) \wedge y_1 \leq y_2$, allora
$((x_1 \to x_2) \wedge x_1) \wedge (y_1 \to y_2) \leq x_2 \leq x_2 \vee y_2$ e $(x_1 \to x_2) \wedge ((y_1 \to y_2) \wedge y_1) \leq y_2 \leq x_2 \vee y_2$, quindi

$$\begin{aligned}((x_1 \to x_2) \wedge (y_1 \to y_2)) \wedge x_1 = (x_1 \to x_2) \wedge ((y_1 \to y_2) \wedge x_1) &= (x_1 \to x_2) \wedge (x_1 \wedge (y_1 \to y_2)) = \\ &= ((x_1 \to x_2) \wedge x_1) \wedge (y_1 \to y_2) \leq x_2 \vee y_2\end{aligned}$$

e $((x_1 \to x_2) \wedge (y_1 \to y_2)) \wedge y_1 = (x_1 \to x_2) \wedge ((y_1 \to y_2) \wedge y_1) \leq x_2 \vee y_2$, dunque
$(((x_1 \to x_2) \wedge (y_1 \to y_2)) \wedge x_1) \vee (((x_1 \to x_2) \wedge (y_1 \to y_2)) \wedge y_1) \leq x_2 \vee y_2$, da cui
$((x_1 \to x_2) \wedge (y_1 \to y_2)) \wedge (x_1 \vee y_1) \leq x_2 \vee y_2$, cioè $(x_1 \to x_2) \wedge (y_1 \to y_2) \leq (x_1 \vee y_1) \to (x_2 \vee y_2)$.
Siccome $(x_1 \to x_2) \wedge (y_1 \to y_2) \in F$ e $(x_1 \to x_2) \wedge (y_1 \to y_2) \leq (x_1 \vee y_1) \to (x_2 \vee y_2)$ si ha che $(x_1 \vee y_1) \to (x_2 \vee y_2) \in F$.
Si ha che $(x_2 \to x_1) \wedge x_2 \leq x_1$ e che $(y_2 \to y_1) \wedge y_2 \leq y_1$, allora
$((x_2 \to x_1) \wedge x_2) \wedge (y_2 \to y_1) \leq x_1 \leq x_1 \vee y_1$ e $(x_2 \to x_1) \wedge ((y_2 \to y_1) \wedge y_2) \leq y_1 \leq x_1 \vee y_1$,

quindi
$((x_2 \to x_1) \wedge (y_2 \to y_1)) \wedge x_2 = (x_2 \to x_1) \wedge ((y_2 \to y_1) \wedge x_2) = (x_2 \to x_1) \wedge (x_2 \wedge (y_2 \to y_1)) =$
$= ((x_2 \to x_1) \wedge x_2) \wedge (y_2 \to y_1) \leq x_1 \vee y_1$
e $((x_2 \to x_1) \wedge (y_2 \to y_1)) \wedge y_2 = (x_2 \to x_1) \wedge ((y_2 \to y_1) \wedge y_2) \leq x_1 \vee y_1$, dunque
$(((x_2 \to x_1) \wedge (y_2 \to y_1)) \wedge x_2) \vee (((x_2 \to x_1) \wedge (y_2 \to y_1)) \wedge y_2) \leq x_1 \vee y_1$, da cui
$((x_2 \to x_1) \wedge (y_2 \to y_1)) \wedge (x_2 \vee y_2) \leq x_1 \vee y_1$, cioè $(x_2 \to x_1) \wedge (y_2 \to y_1) \leq (x_2 \vee y_2) \to (x_1 \vee y_1)$.
Siccome $(x_2 \to x_1) \wedge (y_2 \to y_1) \in F$ e $(x_2 \to x_1) \wedge (y_2 \to y_1) \leq (x_2 \vee y_2) \to (x_1 \vee y_1)$ si ha che $(x_2 \vee y_2) \to (x_1 \vee y_1) \in F$.
Dal fatto che $(x_1 \vee y_1) \to (x_2 \vee y_2) \in F$ e che $(x_2 \vee y_2) \to (x_1 \vee y_1) \in F$ segue che $((x_1 \vee y_1) \to (x_2 \vee y_2)) \wedge ((x_2 \vee y_2) \to (x_1 \vee y_1)) \in F$, allora $x_1 \vee y_1 \sim_F x_2 \vee y_2$, dunque $[x_1]_F \vee_F [y_1]_F = [x_1 \vee y_1]_F = [x_2 \vee y_2]_F = [x_2]_F \vee_F [y_2]_F$.
Si ha quindi che l'operazione binaria $\vee_F$ è ben definita.
Si vuole dimostrare che l'operazione binaria $\to_F$ è ben definita.
Si supponga che $[x_1]_F = [x_2]_F$ e $[y_1]_F = [y_2]_F$, allora $x_1 \sim_F x_2$ e $y_1 \sim_F y_2$, cioè
$(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1) \in F$ e $(y_1 \to y_2) \wedge (y_2 \to y_1) \in F$.
Da $(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1) \in F$, essendo $(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1) \leq x_1 \to x_2$ e
$(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1) \leq x_2 \to x_1$, segue che $x_1 \to x_2 \in F$ e che $x_2 \to x_1 \in F$.
Da $(y_1 \to y_2) \wedge (y_2 \to y_1) \in F$, essendo $(y_1 \to y_2) \wedge (y_2 \to y_1) \leq y_1 \to y_2$ e
$(y_1 \to y_2) \wedge (y_2 \to y_1) \leq y_2 \to y_1$, segue che $y_1 \to y_2 \in F$ e che $y_2 \to y_1 \in F$.
Si ha dunque che $(x_2 \to x_1) \wedge (y_1 \to y_2) \in F$ e che $(x_1 \to x_2) \wedge (y_2 \to y_1) \in F$.
Si ha che $(x_2 \to x_1) \wedge x_2 \leq x_1$, che $(x_1 \to y_1) \wedge x_1 \leq y_1$ e che $(y_1 \to y_2) \wedge y_1 \leq y_2$, allora $(y_1 \to y_2) \wedge ((x_1 \to y_1) \wedge ((x_2 \to x_1) \wedge x_2)) \leq (y_1 \to y_2) \wedge ((x_1 \to y_1) \wedge x_1) \leq (y_1 \to y_2) \wedge y_1 \leq y_2$,
quindi
$(((y_1 \to y_2) \wedge (x_1 \to y_1)) \wedge (x_2 \to x_1)) \wedge x_2 = ((y_1 \to y_2) \wedge (x_1 \to y_1)) \wedge ((x_2 \to x_1) \wedge x_2) =$
$= (y_1 \to y_2) \wedge ((x_1 \to y_1) \wedge ((x_2 \to x_1) \wedge x_2)) \leq y_2,$
dunque $((y_1 \to y_2) \wedge (x_1 \to y_1)) \wedge (x_2 \to x_1) \leq x_2 \to y_2$, da cui
$((x_2 \to x_1) \wedge (y_1 \to y_2)) \wedge (x_1 \to y_1) = (x_2 \to x_1) \wedge ((y_1 \to y_2) \wedge (x_1 \to y_1)) =$
$= ((y_1 \to y_2) \wedge (x_1 \to y_1)) \wedge (x_2 \to x_1) \leq x_2 \to y_2,$
cioè $(x_2 \to x_1) \wedge (y_1 \to y_2) \leq (x_1 \to y_1) \to (x_2 \to y_2)$.
Siccome $(x_2 \to x_1) \wedge (y_1 \to y_2) \in F$ e $(x_2 \to x_1) \wedge (y_1 \to y_2) \leq (x_1 \to y_1) \to (x_2 \to y_2)$ si ha che $(x_1 \to y_1) \to (x_2 \to y_2) \in F$.
Si ha che $(x_1 \to x_2) \wedge x_1 \leq x_2$, che $(x_2 \to y_2) \wedge x_2 \leq y_2$ e che $(y_2 \to y_1) \wedge y_2 \leq y_1$, allora $(y_2 \to y_1) \wedge ((x_2 \to y_2) \wedge ((x_1 \to x_2) \wedge x_1)) \leq (y_2 \to y_1) \wedge ((x_2 \to y_2) \wedge x_2) \leq (y_2 \to y_1) \wedge y_2 \leq y_1$,
quindi
$(((y_2 \to y_1) \wedge (x_2 \to y_2)) \wedge (x_1 \to x_2)) \wedge x_1 = ((y_2 \to y_1) \wedge (x_2 \to y_2)) \wedge ((x_1 \to x_2) \wedge x_1) =$
$= (y_2 \to y_1) \wedge ((x_2 \to y_2) \wedge ((x_1 \to x_2) \wedge x_1)) \leq y_1,$
dunque $((y_2 \to y_1) \wedge (x_2 \to y_2)) \wedge (x_1 \to x_2) \leq x_1 \to y_1$, da cui
$((x_1 \to x_2) \wedge (y_2 \to y_1)) \wedge (x_2 \to y_2) = (x_1 \to x_2) \wedge ((y_2 \to y_1) \wedge (x_2 \to y_2)) =$
$= ((y_2 \to y_1) \wedge (x_2 \to y_2)) \wedge (x_1 \to x_2) \leq x_1 \to y_1,$
cioè $(x_1 \to x_2) \wedge (y_2 \to y_1) \leq (x_2 \to y_2) \to (x_1 \to y_1)$.
Siccome $(x_1 \to x_2) \wedge (y_2 \to y_1) \in F$ e $(x_1 \to x_2) \wedge (y_2 \to y_1) \leq (x_2 \to y_2) \to (x_1 \to y_1)$ si ha che $(x_2 \to y_2) \to (x_1 \to y_1) \in F$.
Dal fatto che $(x_1 \to y_1) \to (x_2 \to y_2) \in F$ e che $(x_2 \to y_2) \to (x_1 \to y_1) \in F$ segue che $((x_1 \to y_1) \to (x_2 \to y_2)) \wedge ((x_2 \to y_2) \to (x_1 \to y_1)) \in F$, allora $x_1 \to y_1 \sim_F x_2 \to y_2$, dunque $[x_1]_F \to_F [y_1]_F = [x_1 \to y_1]_F = [x_2 \to y_2]_F = [x_2]_F \to_F [y_2]_F$.
Si ha quindi che l'operazione binaria $\to_F$ è ben definita.

$\square$

Le operazioni definite sull'insieme quoziente di un'algebra di Heyting rispetto alla relazione di equivalenza indotta da un filtro sull'algebra di Heyting consentono di atteggiare l'insieme quoziente dell'algebra di Heyting rispetto alla relazione di equivalenza ad algebra di Heyting.

**Proposizione 4.2.13.** *Sia $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ un'algebra di Heyting e sia $F$ un filtro su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$. Sia $\sim_F$ la relazione di equivalenza definita su $H$ ponendo $x \sim_F y$ se e solo se $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \in F$. Sia $H/F = \{[x]_F \mid x \in H\}$ l'insieme quoziente di $H$ rispetto a $\sim_F$. Siano $\wedge_F$, $\vee_F$ e $\rightarrow_F$ le operazioni binarie su $H/F$ definite ponendo $[x]_F \wedge_F [y]_F = [x \wedge y]_F$, $[x]_F \vee_F [y]_F = [x \vee y]_F$ e $[x]_F \rightarrow_F [y]_F = [x \rightarrow y]_F$. Si definiscono $1_{H/F} = [1]_F$ e $0_{H/F} = [0]_F$. Si ha che $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ è un'algebra di Heyting. Inoltre si ha che $[x]_F \leq_F [y]_F$ se e solo se $x \rightarrow y \in F$. In particolare, se $F$ è un filtro proprio su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ allora $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ è un'algebra di Heyting non banale.*

*Dimostrazione.* Si ha che la relazione $\sim_F$ è una relazione di equivalenza su $H$ per la proposizione 4.2.11.
Si ha che le operazioni $\wedge_F$, $\vee_F$ e $\rightarrow_F$ sono ben definite per la proposizione 4.2.12.
Si vuole dimostrare che $(H/F, \wedge_F, \vee_F)$ è un reticolo.
Si vuole dimostrare che le operazioni binarie $\wedge_F$ e $\vee_F$ soddisfano le proprietà associative.
Si ha che

$$[x]_F \wedge_F ([y]_F \wedge_F [z]_F) = [x]_F \wedge [y \wedge z]_F = [x \wedge (y \wedge z)]_F = [(x \wedge y) \wedge z]_F = [x \wedge y]_F \wedge_F [z]_F = \\ = ([x]_F \wedge_F [y]_F) \wedge_F [z]_F.$$

Si ha che

$$[x]_F \vee_F ([y]_F \vee_F [z]_F) = [x]_F \vee [y \vee z]_F = [x \vee (y \vee z)]_F = [(x \vee y) \vee z]_F = [x \vee y]_F \vee_F [z]_F = \\ = ([x]_F \vee_F [y]_F) \vee_F [z]_F.$$

Si ha quindi che le operazioni binarie $\wedge_F$ e $\vee_F$ soddisfano le proprietà associative.
Si vuole dimostrare che le operazioni binarie $\wedge_F$ e $\vee_F$ soddisfano le proprietà commutative.
Si ha che $[x]_F \wedge_F [y]_F = [x \wedge y]_F = [y \wedge x]_F = [y]_F \wedge_F [x]_F$.
Si ha che $[x]_F \vee_F [y]_F = [x \vee y]_F = [y \vee x]_F = [y]_F \vee_F [x]_F$.
Si ha quindi che le operazioni binarie $\wedge_F$ e $\vee_F$ soddisfano le proprietà commutative.
Si vuole dimostrare che le operazioni binarie $\wedge_F$ e $\vee_F$ soddisfano le proprietà di assorbimento.
Si ha che $[x]_F \wedge_F ([x]_F \vee_F [y]_F) = [x]_F \wedge_F [x \vee y]_F = [x \wedge (x \vee y)]_F = [x]_F$.
Si ha che $[x]_F \vee_F ([x]_F \wedge_F [y]_F) = [x]_F \vee_F [x \wedge y]_F = [x \vee (x \wedge y)]_F = [x]_F$.
Si ha quindi che le operazioni binarie $\wedge_F$ e $\vee_F$ soddisfano le proprietà di assorbimento.
Si ha quindi che $(H/F, \wedge_F, \vee_F)$ è un reticolo.
Si vuole dimostrare che $[x]_F \leq_F [y]_F$ se e solo se $x \rightarrow y \in F$.
Si ha che $[x]_F \leq_F [y]_F$ se e solo se $[x]_F = [x]_F \wedge_F [y]_F$ se e solo se $[x]_F = [x \wedge y]_F$ se e solo se $x \sim_F x \wedge y$ se e solo se $(x \rightarrow (x \wedge y)) \wedge ((x \wedge y) \rightarrow x) \in F$.
Si ha che $x \wedge y \leq x$, allora $1 \wedge (x \wedge y) \leq x$, quindi $1 \leq (x \wedge y) \rightarrow x$, da cui $(x \wedge y) \rightarrow x = 1$.
Si ha che $(x \rightarrow (x \wedge y)) \wedge x \leq x \wedge y \leq y$, allora $x \rightarrow (x \wedge y) \leq x \rightarrow y$.
Si ha che $(x \rightarrow y) \wedge x \leq x$ e che $(x \rightarrow y) \wedge x \leq y$, allora $(x \rightarrow y) \wedge x \leq x \wedge y$, quindi $x \rightarrow y \leq x \rightarrow (x \wedge y)$.
Dal fatto che $x \rightarrow (x \wedge y) \leq x \rightarrow y$ e che $x \rightarrow y \leq x \rightarrow (x \wedge y)$ segue che $x \rightarrow (x \wedge y) = x \rightarrow y$.
Si ha dunque che $[x]_F \leq_F [y]_F$ se e solo se $(x \rightarrow (x \wedge y)) \wedge ((x \wedge y) \rightarrow x) \in F$ se e solo se $(x \rightarrow y) \wedge 1 \in F$ se e solo se $x \rightarrow y \in F$.
Si ha quindi che $[x]_F \leq_F [y]_F$ se e solo se $x \rightarrow y \in F$.
Si vuole dimostrare che $1_{H/F}$ è il massimo elemento di $H/F$ e che $0_{H/F}$ è il minimo elemento di $H/F$.
Per ogni $[x]_F \in H/F$ si ha che $1 \wedge x = x \leq 1$, allora $1 \leq x \rightarrow 1$, quindi $x \rightarrow 1 \in F$ in quanto $1 \in F$, dunque $[x]_F \leq_F [1]_F$, cioè $[x]_F \leq_F 1_{H/F}$.

Per ogni $[x]_F \in H/F$ si ha che $1 \wedge 0 = 0 \leq x$, allora $1 \leq 0 \to x$, quindi $0 \to x \in F$ in quanto $1 \in F$, dunque $[0]_F \leq_F [x]_F$, cioè $0_{H/F} \leq_F [x]_F$.
Si ha quindi che $1_{H/F}$ è il massimo elemento di $H/F$ e che $0_{H/F}$ è il minimo elemento di $H/F$.
Si ha quindi che $(H/F, \wedge_F, \vee_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ è un reticolo limitato.
Si vuole dimostrare che $\to_F$ è l'implicazione su $(H/F, \wedge_F, \vee_F)$.
Dimostrare che $\to_F$ è l'implicazione su $(H/F, \wedge_F, \vee_F)$ significa dimostrare che per ogni $[x]_F, [y]_F \in H/F$ si ha che $[x]_F \to_F [y]_F$ è l'implicazione tra $[x]_F$ e $[y]_F$, ovvero dimostrare che per ogni $[x]_F, [y]_F, [z]_F \in H/F$ si ha che $[z]_F \wedge_F [x]_F \leq_F [y]_F$ se e solo se $[z]_F \leq_F [x]_F \to_F [y]_F$.
Si ha che $((z \wedge x) \to y) \wedge (z \wedge x) \leq y$, allora $(((z \wedge x) \to y) \wedge z) \wedge x = ((z \wedge x) \to y) \wedge (z \wedge x) \leq y$, quindi $((z \wedge x) \to y) \wedge z \leq x \to y$, dunque $(z \wedge x) \to y \leq z \to (x \to y)$.
Si ha che $(z \to (x \to y)) \wedge z \leq x \to y$ e che $(x \to y) \wedge x \leq y$, allora
$(z \to (x \to y)) \wedge (z \wedge x) = ((z \to (x \to y)) \wedge z) \wedge x \leq (x \to y) \wedge x \leq y$, quindi
$z \to (x \to y) \leq (z \wedge x) \to y$.
Dal fatto che $(z \wedge x) \to y \leq z \to (x \to y)$ e che $z \to (x \to y) \leq (z \wedge x) \to y$ segue che $(z \wedge x) \to y = z \to (x \to y)$.
Per ogni $[x]_F, [y]_F, [z]_F \in H/F$ si ha che $[z]_F \wedge_F [x]_F \leq_F [y]_F$ se e solo se $[z \wedge x]_F \leq_F [y]_F$ se e solo se $(z \wedge x) \to y \in F$ se e solo se $z \to (x \to y) \in F$ se e solo se $[z]_F \leq_F [x \to y]_F$ se e solo se $[z]_F \leq_F [x]_F \to_F [y]_F$.
Si ha quindi che $\to_F$ è l'implicazione su $(H/F, \wedge_F, \vee_F)$.
Si ha quindi che $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \to_F, 0_{H/F}, 1_{H/F})$ è un'algebra di Heyting.
Se $F$ è un filtro proprio su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ allora $0 \notin F$, quindi $(1 \to 0) \wedge (0 \to 1) = 0 \wedge 1 = 0 \notin F$, dunque $1 \not\sim_F 0$, da cui $[1]_F \neq [0]_F$, cioè $1_{H/F} \neq 0_{H/F}$, che comporta che
$(H/F, \wedge_F, \vee_F, \to_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ è un'algebra di Heyting non banale. □

La proposizione 4.2.13 consente di definire la nozione di algebra di Heyting quoziente di un'algebra di Heyting rispetto ad un filtro.

**Definizione 4.2.14** (Algebra di Heyting quoziente rispetto ad un filtro)**.** *Sia $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ un'algebra di Heyting e sia $F$ un filtro su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$. L'algebra di Heyting quoziente di $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ rispetto a $F$ è l'algebra di Heyting $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \to_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ in cui $\sim_F$ è la relazione di equivalenza definita su $H$ ponendo $x \sim_F y$ se e solo se $(x \to y) \wedge (y \to x) \in F$, $H/F = \{[x]_F \mid x \in H\}$ è l'insieme quoziente di $H$ rispetto a $\sim_F$, $\wedge_F$, $\vee_F$ e $\to_F$ sono le operazioni binarie su $H/F$ definite ponendo $[x]_F \wedge_F [y]_F = [x \wedge y]_F$, $[x]_F \vee_F [y]_F = [x \vee y]_F$ e $[x]_F \to_F [y]_F = [x \to y]_F$, $1_{H/F} = [1]_F$ e $0_{H/F} = [0]_F$.*

Il massimo elemento dell'algebra di Heyting quoziente di un'algebra di Heyting rispetto ad un filtro coincide con il filtro stesso.

**Proposizione 4.2.15.** *Sia $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ un'algebra di Heyting, sia $F$ un filtro su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ e sia $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \to_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ l'algebra di Heyting quoziente di $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ rispetto a $F$. Si ha che $1_{H/F} = F$.*

*Dimostrazione.* Sia $x \in H$.
Si ha che $x \in 1_{H/F}$ se e solo se $[x]_F = [1]_F$ se e solo se $[1]_F \leq_F [x]_F$ se e solo se $1 \to x \in F$.
Si vuole dimostrare che $1 \to x = x$.
Si ha che $1 \to x = (1 \to x) \wedge 1 \leq x$.
Si ha che $x \wedge 1 \leq x$, allora $x \leq 1 \to x$.
Dal fatto che $1 \to x \leq x$ e che $x \leq 1 \to x$ segue che $1 \to x = x$.
Si ha quindi che $x \in 1_{H/F}$ se e solo se $1 \to x \in F$ se e solo se $x \in F$, dunque $1_{H/F} = F$. □

La proiezione da un'algebra di Heyting all'algebra di Heyting quoziente dell'algebra di Heyting rispetto ad un filtro è un omomorfismo di algebre di Heyting.

**Proposizione 4.2.16.** *Sia* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *un'algebra di Heyting, sia* $F$ *un filtro su* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *e sia* $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ *l'algebra di Heyting quoziente di* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *rispetto a* $F$*. Si definisce una funzione* $\pi_F : H \rightarrow H/F$ *ponendo* $\pi_F(x) = [x]_F$ *per ogni* $x \in H$*. Si ha che la funzione* $\pi_F$ *è un omomorfismo dall'algebra di Heyting* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *all'algebra di Heyting* $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$*.*

*Dimostrazione.* Si ha che $\pi_F(1) = [1]_F = 1_{H/F}$.
Si ha che $\pi_F(0) = [0]_F = 0_{H/F}$.
Si ha che $\pi_F(x \wedge y) = [x \wedge y]_F = [x]_F \wedge_F [y]_F = \pi_F(x) \wedge_F \pi_F(y)$.
Si ha che $\pi_F(x \vee y) = [x \vee y]_F = [x]_F \vee_F [y]_F = \pi_F(x) \vee_F \pi_F(y)$.
Si ha che $\pi_F(x \rightarrow y) = [x \rightarrow y]_F = [x]_F \rightarrow_F [y]_F = \pi_F(x) \rightarrow_F \pi_F(y)$. □

Utilizzando una metateoria classica si può dimostrare che l'algebra di Heyting quoziente di un'algebra di Heyting non banale rispetto ad un filtro massimale è l'algebra di Heyting di due elementi.

**Proposizione (LEM) 4.2.17.** *Sia* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *un'algebra di Heyting non banale, sia* $F$ *un filtro massimale su* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *e sia* $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ *l'algebra di Heyting quoziente di* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *rispetto a* $F$*. Si ha che* $H/F = \{0_{H/F}, 1_{H/F}\}$*, ovvero che* $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F}) = (\{0_{H/F}, 1_{H/F}\}, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ *è l'algebra di Heyting di due elementi.*

*Dimostrazione.* Sia $x \in H$. Per il principio del terzo escluso si ha che $x \in F$ o $x \notin F$.
Se $x \in F$ allora si ha che $x \in 1_{H/F}$ perchè $F = 1_{H/F}$ per la proposizione 4.2.15.
Si vuole dimostrare che se $x \notin F$ allora $x \in 0_{H/F}$.
Se $x \notin F$ allora $\uparrow(F \cup \{x\}) = H$ perchè il filtro $F$ è massimale, quindi esiste $Y \subseteq_\omega F \cup \{x\}$ tale che $\bigwedge Y \leq 0$, dunque, posto $Z = Y \setminus \{x\}$, si ha che $\bigwedge Z \wedge x \leq \bigwedge Y \leq 0$, cioè che $\bigwedge Z \leq x \rightarrow 0$, da cui $x \rightarrow 0 \in F$ perchè $\bigwedge Z \in F$ e $F$ è un filtro su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$.
Si ha che $1 \wedge 0 = 0 \leq x$, allora $1 \leq 0 \rightarrow x$, da cui $0 \rightarrow x \in F$ perchè $1 \in F$ e $F$ è un filtro su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$.
Dal fatto che $x \rightarrow 0 \in F$ e che $0 \rightarrow x \in F$ segue che $(x \rightarrow 0) \wedge (0 \rightarrow x) \in F$ perchè $F$ è un filtro su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$, allora $x \sim_F 0$, cioè $[x]_F = [0]_F = 0_{H/F}$, ovvero $x \in 0_{H/F}$.
Si ha quindi che se $x \notin F$ allora $x \in 0_{H/F}$.
In conclusione, si ha che $H/F = \{0_{H/F}, 1_{H/F}\}$, ovvero che $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F}) = (\{0_{H/F}, 1_{H/F}\}, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ è l'algebra di Heyting di due elementi. □

Utilizzando una metateoria classica si può quindi dimostrare che se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.

**Teorema (LEM) 4.2.18.** *Se un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *è N-soddisfacibile intuizionisticamente allora* $\Gamma$ *è 2-soddisfacibile.*

*Dimostrazione.* Si supponga che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile intuizionisticamente, allora esiste un N-modello intuizionista $((H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0), V)$ per $\Gamma$, ovvero esistono un'algebra di Heyting non banale numerabile $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ ed una valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ tale che $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma$.

Si ha che $X = \{1\}$ è un sottoinsieme di $H$ che gode della proprietà dell'intersezione finita, allora per la proposizione 4.2.10 esiste un filtro massimale $F$ su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ tale che $X \subseteq F$.
Sia $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ l'algebra di Heyting quoziente di $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ rispetto a $F$, siccome $F$ è massimale si ha che
$(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F}) = (\{0_{H/F}, 1_{H/F}\}, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ è l'algebra di Heyting di due elementi per la proposizione 4.2.17.
Si definisce una funzione $\pi_F : H \rightarrow H/F$ ponendo $\pi_F(x) = [x]_F$ per ogni $x \in H$.
Si ha che $\pi_F$ è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ all'algebra di Heyting $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ per la proposizione 4.2.16.
Siccome $V$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e $\pi_F$ è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ all'algebra di Heyting $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ si ha che $V' = \pi_F \circ V$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ per la proposizione 3.3.9.
Per ogni $\phi \in \Gamma$ si ha che $V'(\phi) = (\pi_F \circ V)(\phi) = \pi_F(V(\phi)) = \pi_F(1) = 1_{H/F}$.
Si ha quindi che $((H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F}), V')$ è un 2-modello per $\Gamma$, dunque $\Gamma$ è 2-soddisfacibile. □

Utilizzando una metateoria classica, i teoremi 4.1.1, 4.1.2 e 4.2.18 garantiscono quindi che per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ valgono le seguenti implicazioni:
($\Gamma$ è 2-soddisfacibile) $\Leftrightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente) $\Rightarrow$ ($\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente)
Si dimostrerà nel seguito (sezione 11.2) che in una metateoria classica si ha che:
($\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente) $\not\Rightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente)

Utilizzando una metateoria classica si può dimostrare che se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.

**Teorema (LEM) 4.2.19.** *Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.*

*Dimostrazione.* Si supponga che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile classicamente, allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 3.4.1, quindi $\Gamma$ è 2-soddisfacibile per il teorema 4.2.18. □

Utilizzando una metateoria classica, i teoremi 4.1.3, 4.1.4 e 4.2.19 garantiscono quindi che per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ valgono le seguenti implicazioni:
($\Gamma$ è 2-soddisfacibile) $\Leftrightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente) $\Rightarrow$ ($\Gamma$ è soddisfacibile classicamente)
Si dimostrerà nel seguito (sezione 11.2) che in una metateoria classica si ha che:
($\Gamma$ è soddisfacibile classicamente) $\not\Rightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente)

## 4.3 Relazioni in una metateoria classica con assioma della scelta

Utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta si può dimostrare che se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.

Utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta si può dimostrare che un sottoinsieme di un'algebra di Heyting che gode della proprietà dell'intersezione finita può essere esteso ad un filtro massimale.

**Proposizione (LEM+AC) 4.3.1.** *Sia $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ un'algebra di Heyting e sia $X \subseteq H$ un sottoinsieme di $H$ che gode della proprietà dell'intersezione finita. Allora esiste un filtro massimale $F$ su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ tale che $X \subseteq F$.*

*Dimostrazione.* Utilizzando il teorema del buon ordinamento, equivalente all'assioma della scelta, si può ben ordinare l'insieme $H$, ottenendo una lista $x_0, \ldots, x_n, \ldots, x_\lambda, \ldots$ di tutti gli elementi di $H$ in corrispondenza di qualche ordinale $\alpha$.
Per la proposizione 4.2.3 si ha che $\uparrow X$ è un filtro su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$, inoltre siccome $X$ gode della proprietà dell'intersezione finita si ha che $\uparrow X$ è un filtro proprio per la proposizione 4.2.7.
La proposizione 4.2.9 consente di definire induttivamente la seguente catena ascendente di filtri propri su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$:

$$\begin{cases} F_0 = \uparrow X \\ F_{\lambda+1} = \begin{cases} \uparrow(F_\lambda \cup \{x_\lambda\}) & \text{se } 0 \notin \uparrow(F_\lambda \cup \{x_\lambda\}) \\ F_\lambda & \text{altrimenti} \end{cases} \\ F_\beta = \bigcup_{\lambda<\beta} F_\lambda \text{ con } \beta \text{ ordinale limite.} \end{cases}$$

Si definisce $F = \bigcup_{\lambda<\alpha} F_\lambda$, si ha che $F$ è un filtro proprio su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ per la proposizione 4.2.9.
Si vuole dimostrare che $F$ è un filtro massimale su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$.
Se $x_{\bar{\lambda}} \in H$ e $x_{\bar{\lambda}} \notin F$ allora $x_{\bar{\lambda}} \notin F_\lambda$ per ogni $\lambda < \alpha$ e in particolare si ha che $x_{\bar{\lambda}} \notin F_{\bar{\lambda}+1}$, quindi $0 \in \uparrow(F_{\bar{\lambda}} \cup \{x_{\bar{\lambda}}\})$, dunque $\uparrow(F_{\bar{\lambda}} \cup \{x_{\bar{\lambda}}\}) = H$, da cui $\uparrow(F \cup \{x_{\bar{\lambda}}\}) = H$ in quanto $F_{\bar{\lambda}} \subseteq F$.
Si ha quindi che $F$ è un filtro massimale su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$.
Per la proposizione 4.2.3 si ha che $X \subseteq \uparrow X = F_0 \subseteq F$. □

Si osservi che il filtro massimale che si ottiene dalla costruzione descritta nella dimostrazione della proposizione 4.3.1 dipende dal buon ordinamento utilizzato per listare gli elementi dell'algebra di Heyting, quindi scelte diverse del buon ordinamento utilizzato per listare gli elementi dell'algebra di Heyting possono portare alla costruzione di filtri massimali diversi.

La catena di filtri propri $(F_\lambda)_{\lambda<\alpha}$ costruita nella dimostrazione della proposizione 4.3.1 è definita per casi, richiedendo quindi il principio del terzo escluso.
Si potrebbe tuttavia ridefinire la catena di filtri propri utilizzando una metateoria intuizionista nel modo seguente (l'idea è tratta da [6, teorema 2.2]):

$$\begin{cases} F_0 = \uparrow X \\ F_{\lambda+1} = \uparrow(F_\lambda \cup \{y \in H \mid y = x_\lambda \text{ e } 0 \notin \uparrow(F_\lambda \cup \{y\})\}) \\ F_\beta = \bigcup_{\lambda<\beta} F_\lambda \text{ con } \beta \text{ ordinale limite.} \end{cases}$$

La dimostrazione della proposizione 4.3.1 necessiterebbe comunque di una metateoria classica con assioma della scelta perchè per ben ordinare l'insieme $H$ utilizza il teorema del buon ordinamento.

Utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta si può quindi dimostrare che se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.

**Teorema (LEM+AC) 4.3.2.** *Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.*

*Dimostrazione.* Si supponga che $\Gamma$ sia soddisfacibile intuizionisticamente, allora esiste un modello intuizionista $((H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0), V)$ per $\Gamma$, ovvero esistono un'algebra di Heyting non banale $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ ed una valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ tale che $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma$.

Si ha che $X = \{1\}$ è un sottoinsieme di $H$ che gode della proprietà dell'intersezione finita, allora per la proposizione 4.3.1 esiste un filtro massimale $F$ su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ tale che $X \subseteq F$.
Sia $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ l'algebra di Heyting quoziente di $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ rispetto a $F$, siccome $F$ è massimale si ha che
$(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F}) = (\{0_{H/F}, 1_{H/F}\}, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ è l'algebra di Heyting di due elementi per la proposizione 4.2.17.
Si definisce una funzione $\pi_F : H \rightarrow H/F$ ponendo $\pi_F(x) = [x]_F$ per ogni $x \in H$.
Si ha che $\pi_F$ è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ all'algebra di Heyting $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ per la proposizione 4.2.16.
Siccome $V$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e $\pi_F$ è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ all'algebra di Heyting $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ si ha che $V' = \pi_F \circ V$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ per la proposizione 3.3.9.
Per ogni $\phi \in \Gamma$ si ha che $V'(\phi) = (\pi_F \circ V)(\phi) = \pi_F(V(\phi)) = \pi_F(1) = 1_{H/F}$.
Si ha quindi che $((H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F}), V')$ è un 2-modello per $\Gamma$, dunque $\Gamma$ è 2-soddisfacibile. □

Utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta, i teoremi 4.1.1, 4.1.2 e 4.3.2 garantiscono quindi che per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ valgono le seguenti implicazioni:
($\Gamma$ è 2-soddisfacibile) $\Leftrightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente) $\Leftrightarrow$ ($\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente)

Utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta si può dimostrare che se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.

**Teorema (LEM+AC) 4.3.3.** *Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.*

*Dimostrazione.* Si supponga che $\Gamma$ sia soddisfacibile classicamente, allora $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 3.3.1, quindi $\Gamma$ è 2-soddisfacibile per il teorema 4.3.2. □

Utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta, i teoremi 4.1.3, 4.1.4 e 4.3.3 garantiscono quindi che per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ valgono le seguenti implicazioni:
($\Gamma$ è 2-soddisfacibile) $\Leftrightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente) $\Leftrightarrow$ ($\Gamma$ è soddisfacibile classicamente)

# Capitolo 5

# Teorema di compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari

In questo capitolo si studia la dimostrabilità del teorema di compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente (rispettivamente classicamente) se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente (rispettivamente classicamente).

Si presenta inoltre la costruzione esplicita di un modello intuizionista (rispettivamente classico) per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ basato sui modelli intuizionisti (rispettivamente classici) per i sottoinsiemi finiti di $\Gamma$.

## 5.1 Dimostrazione in una metateoria intuizionista

Si vuole dimostrare il teorema di compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi arbitrari, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente.

Chiaramente ogni modello intuizionista per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è un modello intuizionista per qualsiasi sottoinsieme finito di $\Gamma$, quindi se $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente.

**Teorema 5.1.1.** *Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente.*

*Dimostrazione.* Sia $\Gamma$ soddisfacibile intuizionisticamente, allora esiste un modello intuizionista $((H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0), V)$ per $\Gamma$, ovvero esistono un'algebra di Heyting non banale $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ ed una valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ tale che $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma$.
Sia $\Gamma_0 \subseteq_\omega \Gamma$, si ha che $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma_0$, quindi $((H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0), V)$ è un modello intuizionista per $\Gamma_0$, dunque $\Gamma_0$ è soddisfacibile intuizionisticamente. $\square$

Viceversa, si può dimostrare che se ogni sottoinsieme finito di un insieme $\Gamma$ di proposizioni di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente.

Si vogliono identificare le proposizioni di un linguaggio proposizionale che vengono valutate nello stesso elemento da qualsiasi valutazione delle proposizioni del linguaggio proposizionale in qualsiasi algebra di Heyting. A questo scopo si definisce un'opportuna relazione di equivalenza semantica sull'insieme delle proposizioni del linguaggio proposizionale.

**Proposizione 5.1.2.** *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio proposizionale. Si definisce una relazione binaria $\sim_\models$ sull'insieme Prop($\mathcal{L}$) ponendo $\phi \sim_\models \psi$ se e solo se per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ si ha che $V(\phi) = V(\psi)$. La relazione $\sim_\models$ è una relazione di equivalenza sull'insieme Prop($\mathcal{L}$).*

*Dimostrazione.* La relazione $\sim_\models$ è riflessiva in quanto per ogni proposizione $\phi \in \text{Prop}(\mathcal{L})$ si ha che per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ si ha che $V(\phi) = V(\phi)$, quindi si ha che $\phi \sim_\models \phi$.
La relazione $\sim_\models$ è simmetrica in quanto per ogni coppia di proposizioni $\phi, \psi \in \text{Prop}(\mathcal{L})$ si ha che se $\phi \sim_\models \psi$ allora per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ si ha che $V(\phi) = V(\psi)$, quindi per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ si ha che $V(\psi) = V(\phi)$, dunque si ha che $\psi \sim_\models \phi$.
La relazione $\sim_\models$ è transitiva in quanto per ogni terna di proposizioni $\phi, \psi, \gamma \in \text{Prop}(\mathcal{L})$ si ha che se $\phi \sim_\models \psi$ e $\psi \sim_\models \gamma$ allora per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ si ha che $V(\phi) = V(\psi)$ e per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ si ha che $V(\psi) = V(\gamma)$, dunque per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ si ha che $V(\phi) = V(\psi) = V(\gamma)$, quindi si ha che $\phi \sim_\models \gamma$.
Si ha quindi che la relazione $\sim_\models$ è una relazione di equivalenza sull'insieme Prop($\mathcal{L}$). □

La relazione di equivalenza semantica definita sull'insieme delle proposizioni di un linguaggio proposizionale consente di definire delle operazioni sull'insieme quoziente dell'insieme delle proposizioni del linguaggio proposizionale rispetto alla relazione di equivalenza semantica.

**Proposizione 5.1.3.** *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio proposizionale e sia $\sim_\models$ la relazione di equivalenza definita sull'insieme Prop($\mathcal{L}$) ponendo $\phi \sim_\models \psi$ se e solo se per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ si ha che $V(\phi) = V(\psi)$. Sia Prop($\mathcal{L}$)$/\models$ $= \{[\phi]_\models \mid \phi \in \text{Prop}(\mathcal{L})\}$ l'insieme quoziente delle classi di equivalenza della relazione $\sim_\models$. Si definiscono tre operazioni binarie $\wedge_\models$, $\vee_\models$ e $\to_\models$ su Prop($\mathcal{L}$)$/\models$ ponendo $[\phi]_\models \wedge_\models [\psi]_\models = [\phi \wedge \psi]_\models$, $[\phi]_\models \vee_\models [\psi]_\models = [\phi \vee \psi]_\models$ e $[\phi]_\models \to_\models [\psi]_\models = [\phi \to \psi]_\models$. Si ha che le operazioni $\wedge_\models$, $\vee_\models$ e $\to_\models$ sono ben definite, cioè non dipendono dai rappresentanti delle classi di equivalenza.*

*Dimostrazione.* Si ha che la relazione $\sim_\models$ è una relazione di equivalenza sull'insieme Prop($\mathcal{L}$) per la proposizione 5.1.2.
Si ha che l'operazione $\wedge_\models$ è ben definita in quanto se $[\phi_1]_\models = [\phi_2]_\models$ e $[\psi_1]_\models = [\psi_2]_\models$ allora $\phi_1 \sim_\models \phi_2$ e $\psi_1 \sim_\models \psi_2$, quindi per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ si ha che $V(\phi_1) = V(\phi_2)$ e per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ si ha che

$V(\psi_1) = V(\psi_2)$, dunque per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\phi_1 \wedge \psi_1) = V(\phi_1) \wedge V(\psi_1) = V(\phi_2) \wedge V(\psi_2) = V(\phi_2 \wedge \psi_2)$, da cui $\phi_1 \wedge \psi_1 \sim_{\models} \phi_2 \wedge \psi_2$, cioè $[\phi_1 \wedge \psi_1]_{\models} = [\phi_2 \wedge \psi_2]_{\models}$, da cui segue che $[\phi_1]_{\models} \wedge_{\models} [\psi_1]_{\models} = [\phi_1 \wedge \psi_1]_{\models} = [\phi_2 \wedge \psi_2]_{\models} = [\phi_2]_{\models} \wedge_{\models} [\psi_2]_{\models}$.
Si ha che l'operazione $\vee_{\models}$ è ben definita in quanto se $[\phi_1]_{\models} = [\phi_2]_{\models}$ e $[\psi_1]_{\models} = [\psi_2]_{\models}$ allora $\phi_1 \sim_{\models} \phi_2$ e $\psi_1 \sim_{\models} \psi_2$, quindi per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\phi_1) = V(\phi_2)$ e per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\psi_1) = V(\psi_2)$, dunque per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\phi_1 \vee \psi_1) = V(\phi_1) \vee V(\psi_1) = V(\phi_2) \vee V(\psi_2) = V(\phi_2 \vee \psi_2)$, da cui $\phi_1 \vee \psi_1 \sim_{\models} \phi_2 \vee \psi_2$, cioè $[\phi_1 \vee \psi_1]_{\models} = [\phi_2 \vee \psi_2]_{\models}$, da cui segue che $[\phi_1]_{\models} \vee_{\models} [\psi_1]_{\models} = [\phi_1 \vee \psi_1]_{\models} = [\phi_2 \vee \psi_2]_{\models} = [\phi_2]_{\models} \vee_{\models} [\psi_2]_{\models}$.
Si ha che l'operazione $\rightarrow_{\models}$ è ben definita in quanto se $[\phi_1]_{\models} = [\phi_2]_{\models}$ e $[\psi_1]_{\models} = [\psi_2]_{\models}$ allora $\phi_1 \sim_{\models} \phi_2$ e $\psi_1 \sim_{\models} \psi_2$, quindi per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\phi_1) = V(\phi_2)$ e per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\psi_1) = V(\psi_2)$, dunque per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\phi_1 \rightarrow \psi_1) = V(\phi_1) \rightarrow V(\psi_1) = V(\phi_2) \rightarrow V(\psi_2) = V(\phi_2 \rightarrow \psi_2)$, da cui $\phi_1 \rightarrow \psi_1 \sim_{\models} \phi_2 \rightarrow \psi_2$, cioè $[\phi_1 \rightarrow \psi_1]_{\models} = [\phi_2 \rightarrow \psi_2]_{\models}$, da cui segue che
$[\phi_1]_{\models} \rightarrow_{\models} [\psi_1]_{\models} = [\phi_1 \rightarrow \psi_1]_{\models} = [\phi_2 \rightarrow \psi_2]_{\models} = [\phi_2]_{\models} \rightarrow_{\models} [\psi_2]_{\models}$.

$\square$

Le operazioni definite sull'insieme quoziente dell'insieme delle proposizioni di un linguaggio proposizionale rispetto alla relazione di equivalenza semantica consentono di atteggiare l'insieme quoziente dell'insieme delle proposizioni di un linguaggio proposizionale rispetto alla relazione di equivalenza semantica ad algebra di Heyting.

**Proposizione 5.1.4.** *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio proposizionale e sia $\sim_{\models}$ la relazione di equivalenza definita sull'insieme $Prop(\mathcal{L})$ ponendo $\phi \sim_{\models} \psi$ se e solo se per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\phi) = V(\psi)$. Sia $Prop(\mathcal{L})/\models = \{[\phi]_{\models} \mid \phi \in Prop(\mathcal{L})\}$ l'insieme quoziente delle classi di equivalenza della relazione $\sim_{\models}$. Si definiscono tre operazioni binarie $\wedge_{\models}$, $\vee_{\models}$ e $\rightarrow_{\models}$ su $Prop(\mathcal{L})/\models$ ponendo $[\phi]_{\models} \wedge_{\models} [\psi]_{\models} = [\phi \wedge \psi]_{\models}$, $[\phi]_{\models} \vee_{\models} [\psi]_{\models} = [\phi \vee \psi]_{\models}$ e $[\phi]_{\models} \rightarrow_{\models} [\psi]_{\models} = [\phi \rightarrow \psi]_{\models}$. Si definiscono $1_{Prop(\mathcal{L})/\models} = [\top]_{\models}$ e $0_{Prop(\mathcal{L})/\models} = [\bot]_{\models}$. Si ha che $(Prop(\mathcal{L})/\models, \wedge_{\models}, \vee_{\models}, \rightarrow_{\models}, 1_{Prop(\mathcal{L})/\models}, 0_{Prop(\mathcal{L})/\models})$ è un'algebra di Heyting non banale. Inoltre si ha che $[\phi]_{\models} \leq_{\models} [\psi]_{\models}$ se e solo se per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\phi) \leq V(\psi)$.*

*Dimostrazione.* Si ha che la relazione $\sim_{\models}$ è una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathrm{Prop}(\mathcal{L})$ per la proposizione 5.1.2.
Si ha che le operazioni $\wedge_{\models}$, $\vee_{\models}$ e $\rightarrow_{\models}$ sono ben definite per la proposizione 5.1.3.
Si vuole dimostrare che $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_{\models}, \vee_{\models})$ è un reticolo.
Si vuole dimostrare che le operazioni binarie $\wedge_{\models}$ e $\vee_{\models}$ soddisfano le proprietà associative.
Per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del

linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che
$V(\phi \wedge (\psi \wedge \gamma)) = V(\phi) \wedge V(\psi \wedge \gamma) = V(\phi) \wedge (V(\psi) \wedge V(\gamma)) = (V(\phi) \wedge V(\psi)) \wedge V(\gamma) =$
$= V(\phi \wedge \psi) \wedge V(\gamma) = V((\phi \wedge \psi) \wedge \gamma)$,
quindi $\phi \wedge (\psi \wedge \gamma) \sim_{\models} (\phi \wedge \psi) \wedge \gamma$, allora $[\phi \wedge (\psi \wedge \gamma)]_{\models} = [(\phi \wedge \psi) \wedge \gamma]_{\models}$, dunque
$[\phi]_{\models} \wedge_{\models} ([\psi]_{\models} \wedge_{\models} [\gamma]_{\models}) = [\phi]_{\models} \wedge_{\models} [\psi \wedge \gamma]_{\models} = [\phi \wedge (\psi \wedge \gamma)]_{\models} = [(\phi \wedge \psi) \wedge \gamma]_{\models} = [\phi \wedge \psi]_{\models} \wedge_{\models} [\gamma]_{\models} =$
$= ([\phi]_{\models} \wedge_{\models} [\psi]_{\models}) \wedge_{\models} [\gamma]_{\models}$.
Per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che
$V(\phi \vee (\psi \vee \gamma)) = V(\phi) \vee V(\psi \vee \gamma) = V(\phi) \vee (V(\psi) \vee V(\gamma)) = (V(\phi) \vee V(\psi)) \vee V(\gamma) =$
$= V(\phi \vee \psi) \vee V(\gamma) = V((\phi \vee \psi) \vee \gamma)$,
quindi $\phi \vee (\psi \vee \gamma) \sim_{\models} (\phi \vee \psi) \vee \gamma$, allora $[\phi \vee (\psi \vee \gamma)]_{\models} = [(\phi \vee \psi) \vee \gamma]_{\models}$, dunque
$[\phi]_{\models} \vee_{\models} ([\psi]_{\models} \vee_{\models} [\gamma]_{\models}) = [\phi]_{\models} \vee_{\models} [\psi \vee \gamma]_{\models} = [\phi \vee (\psi \vee \gamma)]_{\models} = [(\phi \vee \psi) \vee \gamma]_{\models} = [\phi \vee \psi]_{\models} \vee_{\models} [\gamma]_{\models} =$
$= ([\phi]_{\models} \vee_{\models} [\psi]_{\models}) \vee_{\models} [\gamma]_{\models}$.
Si ha quindi che le operazioni binarie $\wedge_{\models}$ e $\vee_{\models}$ soddisfano le proprietà associative.
Si vuole dimostrare che le operazioni binarie $\wedge_{\models}$ e $\vee_{\models}$ soddisfano le proprietà commutative.
Per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che
$V(\phi \wedge \psi) = V(\phi) \wedge V(\psi) = V(\psi) \wedge V(\phi) = V(\psi \wedge \phi)$, quindi $\phi \wedge \psi \sim_{\models} \psi \wedge \phi$, allora $[\phi \wedge \psi]_{\models} = [\psi \wedge \phi]_{\models}$, dunque $[\phi]_{\models} \wedge_{\models} [\psi]_{\models} = [\phi \wedge \psi]_{\models} = [\psi \wedge \phi]_{\models} = [\psi]_{\models} \wedge_{\models} [\phi]_{\models}$.
Per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che
$V(\phi \vee \psi) = V(\phi) \vee V(\psi) = V(\psi) \vee V(\phi) = V(\psi \vee \phi)$, quindi $\phi \vee \psi \sim_{\models} \psi \vee \phi$, allora $[\phi \vee \psi]_{\models} = [\psi \vee \phi]_{\models}$, dunque $[\phi]_{\models} \vee_{\models} [\psi]_{\models} = [\phi \vee \psi]_{\models} = [\psi \vee \phi]_{\models} = [\psi]_{\models} \vee_{\models} [\phi]_{\models}$.
Si ha quindi che le operazioni binarie $\wedge_{\models}$ e $\vee_{\models}$ soddisfano le proprietà commutative.
Si vuole dimostrare che le operazioni binarie $\wedge_{\models}$ e $\vee_{\models}$ soddisfano le proprietà di assorbimento.
Per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che
$V(\phi \wedge (\phi \vee \psi)) = V(\phi) \wedge V(\phi \vee \psi) = V(\phi) \wedge (V(\phi) \vee V(\psi)) = V(\phi)$, quindi $\phi \wedge (\phi \vee \psi) \sim_{\models} \phi$, allora $[\phi \wedge (\phi \vee \psi)]_{\models} = [\phi]_{\models}$, dunque $[\phi]_{\models} \wedge_{\models} ([\phi]_{\models} \vee_{\models} [\psi]_{\models}) = [\phi]_{\models} \wedge_{\models} [\phi \vee \psi]_{\models} = [\phi \wedge (\phi \vee \psi)]_{\models} = [\phi]_{\models}$.
Per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che
$V(\phi \vee (\phi \wedge \psi)) = V(\phi) \vee V(\phi \wedge \psi) = V(\phi) \vee (V(\phi) \wedge V(\psi)) = V(\phi)$, quindi $\phi \vee (\phi \wedge \psi) \sim_{\models} \phi$, allora $[\phi \vee (\phi \wedge \psi)]_{\models} = [\phi]_{\models}$, dunque $[\phi]_{\models} \vee_{\models} ([\phi]_{\models} \wedge_{\models} [\psi]_{\models}) = [\phi]_{\models} \vee_{\models} [\phi \wedge \psi]_{\models} = [\phi \vee (\phi \wedge \psi)]_{\models} = [\phi]_{\models}$.
Si ha quindi che le operazioni binarie $\wedge_{\models}$ e $\vee_{\models}$ soddisfano le proprietà di assorbimento.
Si ha quindi che $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_{\models}, \vee_{\models})$ è un reticolo.
Si vuole dimostrare che $[\phi]_{\models} \leq_{\models} [\psi]_{\models}$ se e solo se per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\phi) \leq V(\psi)$.
Si ha che $[\phi]_{\models} \leq_{\models} [\psi]_{\models}$ se e solo se $[\phi]_{\models} = [\phi]_{\models} \wedge_{\models} [\psi]_{\models}$ se e solo se $[\phi]_{\models} = [\phi \wedge \psi]_{\models}$ se e solo se $\phi \sim_{\models} \phi \wedge \psi$ se e solo se per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\phi) = V(\phi \wedge \psi)$ se e solo se per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\phi) = V(\phi) \wedge V(\psi)$ se e solo se per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\phi) \leq V(\psi)$.
Si ha quindi che $[\phi]_{\models} \leq_{\models} [\psi]_{\models}$ se e solo se per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$

si ha che $V(\phi) \leq V(\psi)$.
Si vuole dimostrare che $1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}$ è il massimo elemento di $\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models$ e che $0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}$ è il minimo elemento di $\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models$.
Per ogni $\phi \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})$, per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\bot) = 0 \leq V(\phi)$, allora $[\bot]_\models \leq_\models [\phi]_\models$ per ogni $[\phi]_\models \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models$, cioè $0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models} \leq_\models [\phi]_\models$ per ogni $[\phi]_\models \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models$.
Per ogni $\phi \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})$, per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\phi) \leq 1 = V(\top)$, allora $[\phi]_\models \leq_\models [\top]_\models$ per ogni $[\phi]_\models \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models$, cioè $[\phi]_\models \leq_\models 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}$ per ogni $[\phi]_\models \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models$.
Si ha quindi che $1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}$ è il massimo elemento di $\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models$ e che $0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}$ è il minimo elemento di $\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models$.
Si ha quindi che $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ è un reticolo limitato.
Si vuole dimostrare che $\rightarrow_\models$ è l'implicazione su $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models)$.
Dimostrare che $\rightarrow_\models$ è l'implicazione su $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models)$ significa dimostrare che per ogni $[\phi]_\models, [\psi]_\models \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models$ si ha che $[\phi]_\models \rightarrow_\models [\psi]_\models$ è l'implicazione tra $[\phi]_\models$ e $[\psi]_\models$, ovvero dimostrare che per ogni $[\phi]_\models, [\psi]_\models, [\gamma]_\models$ si ha che $[\gamma]_\models \wedge_\models [\phi]_\models \leq_\models [\psi]_\models$ se e solo se $[\gamma]_\models \leq_\models [\phi]_\models \rightarrow_\models [\psi]_\models$.
Si ha che $[\gamma]_\models \wedge_\models [\phi]_\models \leq_\models [\psi]_\models$ se e solo se $[\gamma \wedge \phi]_\models \leq_\models [\psi]_\models$ se e solo se per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\gamma \wedge \phi) \leq V(\psi)$ se e solo se per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\gamma) \wedge V(\phi) \leq V(\psi)$ se e solo se per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\gamma) \leq V(\phi) \rightarrow V(\psi)$ se e solo se per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\gamma) \leq V(\phi \rightarrow \psi)$ se e solo se $[\gamma]_\models \leq_\models [\phi \rightarrow \psi]_\models$ se e solo se $[\gamma]_\models \leq_\models [\phi]_\models \rightarrow_\models [\psi]_\models$.
Si ha quindi che $\rightarrow_\models$ è l'implicazione su $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models)$.
Si ha quindi che $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ è un'algebra di Heyting.
Si vuole dimostrare che l'algebra di Heyting $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ è non banale.
Per ogni algebra di Heyting non banale $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\bot) = 0 \neq 1 = V(\top)$, allora $\bot \not\sim_\models \top$, quindi $[\bot]_\models \neq [\top]_\models$, cioè $0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models} \neq 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}$.
Si ha quindi che l'algebra di Heyting $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ è non banale. $\square$

La proposizione 5.1.4 consente di definire la nozione di algebra di Heyting delle proposizioni della logica proposizionale intuizionista.

**Definizione 5.1.5** (Algebra di Heyting delle proposizioni della logica proposizionale intuizionista). *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio proposizionale. L'algebra di Heyting delle proposizioni della logica proposizionale intuizionista è l'algebra di Heyting non banale $(Prop(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{Prop(\mathcal{L})/\models}, 0_{Prop(\mathcal{L})/\models})$ in cui $\sim_\models$ la relazione di equivalenza definita sull'insieme Prop($\mathcal{L}$) ponendo $\phi \sim_\models \psi$ se e solo se per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\phi) = V(\psi)$, $Prop(\mathcal{L})/\models = \{[\phi]_\models \mid \phi \in Prop(\mathcal{L})\}$ è l'insieme quoziente di Prop($\mathcal{L}$) rispetto a $\sim_\models$, $\wedge_\models$, $\vee_\models$ e $\rightarrow_\models$ sono le operazioni binarie su $Prop(\mathcal{L})/\models$ definite ponendo*

$[\phi]_\vDash \wedge_\vDash [\psi]_\vDash = [\phi \wedge \psi]_\vDash$, $[\phi]_\vDash \vee_\vDash [\psi]_\vDash = [\phi \vee \psi]_\vDash$ *e* $[\phi]_\vDash \rightarrow_\vDash [\psi]_\vDash = [\phi \rightarrow \psi]_\vDash$, $1_{Prop(\mathcal{L})/\vDash} = [\top]_\vDash$ *e* $0_{Prop(\mathcal{L})/\vDash} = [\bot]_\vDash$.

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio proposizionale e siano $\phi, \psi \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})$.
Il teorema di validità per la logica proposizionale intuizionista stabilisce che se $\phi \vdash \psi$ allora per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\phi) \leq V(\psi)$.
Il teorema di completezza per la logica proposizionale intuizionista stabilisce che se per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\phi) \leq V(\psi)$ allora $\phi \vdash \psi$.
Si ha quindi che $\phi \sim_\vdash \psi$ se e solo se $\phi \vdash \psi$ e $\psi \vdash \phi$ se e solo se per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\phi) \leq V(\psi)$ e per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\psi) \leq V(\phi)$ se e solo se per ogni algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e per ogni valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ si ha che $V(\phi) = V(\psi)$ se e solo se $\phi \sim_\vDash \psi$.
Si può quindi dimostrare che l'algebra di Heyting delle proposizioni della logica proposizionale intuizionista $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vDash, \wedge_\vDash, \vee_\vDash, \rightarrow_\vDash, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vDash}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vDash})$ è isomorfa all'algebra di Lindenbaum della logica proposizionale intuizionista $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash, \wedge_\vdash, \vee_\vdash, \rightarrow_\vdash, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vdash})$.
Per una dimostrazione costruttiva dei teoremi di validità e completezza per la logica predicativa classica e intuizionista si veda [7].

La proiezione dall'insieme delle proposizioni di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ all'algebra di Heyting delle proposizioni della logica proposizionale intuizionista è una valutazione delle proposizioni del linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting delle proposizioni della logica proposizionale intuizionista.

**Proposizione 5.1.6.** *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio proposizionale e sia $(Prop(\mathcal{L})/\vDash, \wedge_\vDash, \vee_\vDash, \rightarrow_\vDash, 1_{Prop(\mathcal{L})/\vDash}, 0_{Prop(\mathcal{L})/\vDash})$ l'algebra di Heyting delle proposizioni della logica proposizionale intuizionista.*
*Si definisce una funzione $V_\vDash : Prop(\mathcal{L}) \rightarrow Prop(\mathcal{L})/\vDash$ ponendo $V_\vDash(\phi) = [\phi]_\vDash$.*
*Si ha che $V_\vDash$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(Prop(\mathcal{L})/\vDash, \wedge_\vDash, \vee_\vDash, \rightarrow_\vDash, 1_{Prop(\mathcal{L})/\vDash}, 0_{Prop(\mathcal{L})/\vDash})$.*

*Dimostrazione.* Si ha che $V_\vDash(\top) = [\top]_\vDash = 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vDash}$.
Si ha che $V_\vDash(\bot) = [\bot]_\vDash = 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\vDash}$.
Si ha che $V_\vDash(\phi \wedge \psi) = [\phi \wedge \psi]_\vDash = [\phi]_\vDash \wedge_\vDash [\psi]_\vDash = V_\vDash(\phi) \wedge_\vDash V_\vDash(\psi)$.
Si ha che $V_\vDash(\phi \vee \psi) = [\phi \vee \psi]_\vDash = [\phi]_\vDash \vee_\vDash [\psi]_\vDash = V_\vDash(\phi) \vee_\vDash V_\vDash(\psi)$.
Si ha che $V_\vDash(\phi \rightarrow \psi) = [\phi \rightarrow \psi]_\vDash = [\phi]_\vDash \rightarrow_\vDash [\psi]_\vDash = V_\vDash(\phi) \rightarrow_\vDash V_\vDash(\psi)$. □

Si ha che il filtro generato da un sottoinsieme di un'algebra di Heyting coincide con l'unione di tutti i filtri generati da un sottoinsieme finito del sottoinsieme dell'algebra di Heyting.

**Proposizione 5.1.7.** *Sia $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ un'algebra di Heyting e sia $X \subseteq H$. Si ha che $\uparrow X = \bigcup_{Y \subseteq_\omega X} \uparrow Y$.*

*Dimostrazione.* Si vuole dimostrare che $\uparrow X \subseteq \bigcup_{Y \subseteq_\omega X} \uparrow Y$.
Se $x \in \uparrow X$ allora esiste $Z \subseteq_\omega X$ tale che $\bigwedge Z \leq x$, quindi $x \in \uparrow Z \subseteq \bigcup_{Y \subseteq_\omega X} \uparrow Y$.
Si ha quindi che $\uparrow X \subseteq \bigcup_{Y \subseteq_\omega X} \uparrow Y$.
Si vuole dimostrare che $\bigcup_{Y \subseteq_\omega X} \uparrow Y \subseteq \uparrow X$.

Se $x \in \bigcup_{Y \subseteq_\omega X} \uparrow Y$ allora $x \in \uparrow Z$ per qualche $Z \subseteq_\omega X$, quindi $x \in \uparrow Z \subseteq \uparrow X$ in quanto $\uparrow Z$ è il più piccolo filtro su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ contenente $Z$ per la proposizione 4.2.5 e $\uparrow X$ è un filtro su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ tale che $Z \subseteq_\omega X \subseteq \uparrow X$ per la proposizione 4.2.3.
Si ha quindi che $\bigcup_{Y \subseteq_\omega X} \uparrow Y \subseteq \uparrow X$.
Dal fatto che $\uparrow X \subseteq \bigcup_{Y \subseteq_\omega X} \uparrow Y$ e che $\bigcup_{Y \subseteq_\omega X} \uparrow Y \subseteq \uparrow X$ segue che $\uparrow X = \bigcup_{Y \subseteq_\omega X} \uparrow Y$. $\square$

Data una valutazione delle proposizioni di un linguaggio proposizionale in un'algebra di Heyting, la funzione che associa ad ogni classe di equivalenza modulo la relazione di equivalenza semantica di una proposizione del linguaggio la valutazione di tale proposizione è ben definita.

**Proposizione 5.1.8.** *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio proposizionale, sia $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ un'algebra di Heyting, sia $V$ una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e sia $(Prop(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{Prop(\mathcal{L})/\models}, 0_{Prop(\mathcal{L})/\models})$ l'algebra di Heyting delle proposizioni della logica proposizionale intuizionista. Si definisce una funzione $f : Prop(\mathcal{L})/\models \rightarrow H$ ponendo $f([\phi]_\models) = V(\phi)$. Si ha che la funzione $f$ è ben definita.*

*Dimostrazione.* Se $[\phi]_\models = [\psi]_\models$ allora $\phi \sim_\models \psi$, quindi per ogni algebra di Heyting $(H', \wedge', \vee', \rightarrow', 1', 0')$ e per ogni valutazione $V'$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H', \wedge', \vee', \rightarrow', 1', 0')$ si ha che $V'(\phi) = V'(\psi)$, in particolare date l'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ e la valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ si ha che $V(\phi) = V(\psi)$, dunque $f([\phi]_\models) = V(\phi) = V(\psi) = f([\psi]_\models)$. $\square$

Data una valutazione delle proposizioni di un linguaggio proposizionale in un'algebra di Heyting, la funzione che associa ad ogni classe di equivalenza modulo la relazione di equivalenza semantica di una proposizione del linguaggio la valutazione di tale proposizione è un omomorfismo dall'algebra di Heyting delle proposizioni della logica proposizionale intuizionista all'algebra di Heyting.

**Proposizione 5.1.9.** *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio proposizionale, sia $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ un'algebra di Heyting, sia $V$ una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ e sia $(Prop(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{Prop(\mathcal{L})/\models}, 0_{Prop(\mathcal{L})/\models})$ l'algebra di Heyting delle proposizioni della logica proposizionale intuizionista. Si definisce una funzione $f : Prop(\mathcal{L})/\models \rightarrow H$ ponendo $f([\phi]_\models) = V(\phi)$. Si ha che $f$ è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(Prop(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{Prop(\mathcal{L})/\models}, 0_{Prop(\mathcal{L})/\models})$ all'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$.*

*Dimostrazione.* Si ha che $f$ è ben definita per la proposizione 5.1.8.
Si ha che $f(1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}) = f([\top]_\models) = V(\top) = 1$.
Si ha che $f(0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}) = f([\top]_\models) = V(\bot) = 0$.
Si ha che $f([\phi]_\models \wedge_\models [\psi]_\models) = f([\phi \wedge \psi]_\models) = V(\phi \wedge \psi) = V(\phi) \wedge V(\psi) = f([\phi]_\models) \wedge f([\psi]_\models)$.
Si ha che $f([\phi]_\models \vee_\models [\psi]_\models) = f([\phi \vee \psi]_\models) = V(\phi \vee \psi) = V(\phi) \vee V(\psi) = f([\phi]_\models) \vee f([\psi]_\models)$.
Si ha che $f([\phi]_\models \rightarrow_\models [\psi]_\models) = f([\phi \rightarrow \psi]_\models) = V(\phi \rightarrow \psi) = V(\phi) \rightarrow V(\psi) = f([\phi]_\models) \rightarrow f([\psi]_\models)$.
Si ha quindi che $f$ è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ all'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$. $\square$

Dato un omomorfismo da un'algebra di Heyting dominio ad un'algebra di Heyting codominio, si ha che l'antimmagine dell'insieme costituito dal massimo elemento dell'algebra di Heyting codominio è un filtro sull'algebra di Heyting dominio, inoltre se l'algebra di Heyting codominio è non banale si ha che l'antimmagine dell'insieme costituito dal massimo elemento dell'algebra di Heyting codominio è un filtro proprio sull'algebra di Heyting dominio.

**Proposizione 5.1.10.** *Siano* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *e* $(H', \wedge', \vee', \rightarrow', 1', 0')$ *due algebre di Heyting e sia* $f$ *un omomorfismo dall'algebra di Heyting* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ *all'algebra di Heyting* $(H', \wedge', \vee', \rightarrow', 1', 0')$*. Si ha che l'insieme* $f^{-1}(\{1'\})$ *è un filtro su* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$*. Inoltre se l'algebra di Heyting* $(H', \wedge', \vee', \rightarrow', 1', 0')$ *è non banale allora l'insieme* $f^{-1}(\{1'\})$ *è un filtro proprio su* $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$*.*

*Dimostrazione.* Si vuole dimostrare che l'insieme $f^{-1}(\{1'\})$ è un filtro su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$.
Siccome $f$ è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ all'algebra di Heyting $(H', \wedge', \vee', \rightarrow', 1', 0')$ si ha che $f(1) = 1'$, allora $1 \in f^{-1}(\{1'\})$.
Se $x \in f^{-1}(\{1'\})$, $y \in H$ e $x \leq y$ allora $f(x) = 1'$ e $f(x) \leq' f(y)$, quindi $1' = f(x) \leq' f(y)$, dunque $f(y) = 1'$, da cui $y \in f^{-1}(\{1'\})$.
Se $x, y \in f^{-1}(\{1'\})$ allora $f(x) = 1'$ e $f(y) = 1'$, quindi $f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y) = 1' \wedge' 1' = 1'$, dunque $x \wedge y \in f^{-1}(\{\bar{1}\})$.
Si ha quindi che l'insieme $f^{-1}(\{1'\})$ è un filtro su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$.
Se l'algebra di Heyting $(H', \wedge', \vee', \rightarrow', 1', 0')$ è non banale allora $f(0) = 0' \neq 1'$, dunque $0 \notin f^{-1}(\{1'\})$, quindi l'insieme $f^{-1}(\{1'\})$ è un filtro proprio su $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$. □

Si può quindi dimostrare che se ogni sottoinsieme finito di un insieme $\Gamma$ di proposizioni di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente.

**Teorema 5.1.11.** *Se ogni sottoinsieme finito di un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *è soddisfacibile intuizionisticamente allora* $\Gamma$ *è soddisfacibile intuizionisticamente.*

*Dimostrazione.* Sia $I$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\Gamma$ e si supponga che ogni $i \in I$ sia soddisfacibile intuizionisticamente.
Sia $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ l'algebra di Heyting delle proposizioni della logica proposizionale intuizionista.
Si definisce una funzione $V_\models : \mathrm{Prop}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models$ ponendo $V_\models(\phi) = [\phi]_\models$.
Si ha che $V_\models$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ per la proposizione 5.1.6.
Si definisce $X = V_\models(\Gamma) \subseteq \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models$.
Per ogni $i \in I$ si definisce $X_i = V_\models(i) \subseteq \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models$.
Si vuole dimostrare che i sottoinsiemi finiti di $X$ sono tutti e soli gli insiemi $X_i$ al variare di $i \in I$.
Siccome per ogni $i \in I$ si ha che $i \subseteq \Gamma$, si ha che $X_i = V_\models(i) \subseteq V_\models(\Gamma) = X$, inoltre siccome ogni $i \in I$ è finito si ha che l'insieme $X_i = V_\models(i)$ è finito per ogni $i \in I$.
Si ha quindi che l'insieme $X_i$ è un sottoinsieme finito di $X$ per ogni $i \in I$.
Sia $Y$ un sottoinsieme finito di $X$.
Per ogni elemento $y \in Y$ si può scegliere una proposizione $\phi_y \in \Gamma$ tale che $V_\models(\phi_y) = y$, allora si ha che $\{\phi_y \in \Gamma \mid y \in Y\}$ è un sottoinsieme finito di $\Gamma$, quindi $\{\phi_y \in \Gamma \mid y \in Y\} \in I$, dunque $\{\phi_y \in \Gamma \mid y \in Y\} = i$ per qualche $i \in I$, da cui
$X_i = V_\models(i) = V_\models(\{\phi_y \in \Gamma \mid y \in Y\}) = \{V_\models(\phi_y) \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models \mid y \in Y\} =$
$= \{y \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models \mid y \in Y\} = Y$.
Si ha quindi che ogni sottoinsieme finito di $X$ è un insieme $X_i$ per qualche $i \in I$.
Si ha quindi che i sottoinsiemi finiti di $X$ sono tutti e soli gli insiemi $X_i$ al variare di $i \in I$.
Si consideri il filtro generato da $X$ su $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$, ovvero l'insieme $\uparrow X = \{x \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models \mid \text{esiste } Y \subseteq_\omega X \text{ tale che } \bigwedge_\models Y \leq_\models x\}$.
Per la proposizione 5.1.7 si ha che $\uparrow X = \bigcup_{Y \subseteq_\omega X} \uparrow Y$, inoltre si è dimostrato che i sottoinsiemi

finiti di $X$ sono tutti e soli gli insiemi $X_i$ al variare di $i \in I$ e dunque si ha che $\uparrow X = \bigcup_{i \in I} \uparrow X_i$.
Si vuole dimostrare che il filtro $\uparrow X$ su $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ è proprio.
Se fosse $0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models} \in \uparrow X$ allora si avrebbe che $0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models} \in \bigcup_{i \in I} \uparrow X_i$, quindi si avrebbe che $0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models} \in \uparrow X_j$ per qualche $j \in I$.
Siccome $j \subseteq_\omega \Gamma$ si avrebbe che l'insieme $j$ è soddisfacibile per ipotesi, allora esisterebbero un'algebra di Heyting non banale $(H_j, \wedge_j, \vee_j, \rightarrow_j, 1_{H_j}, 0_{H_j})$ ed una valutazione $V_j$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H_j, \wedge_j, \vee_j, \rightarrow_j, 1_{H_j}, 0_{H_j})$ tale che $V_j(\phi) = 1_{H_j}$ per ogni $\phi \in j$.
Si potrebbe definire la funzione $f_j : \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models \rightarrow H_j$ ponendo $f_j([\phi]_\models) = V_j(\phi)$.
Si avrebbe che la funzione $f_j$ è ben definita per la proposizione 5.1.8, inoltre la funzione $f_j$ sarebbe un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ all'algebra di Heyting $(H_j, \wedge_j, \vee_j, \rightarrow_j, 1_{H_j}, 0_{H_j})$ per la proposizione 5.1.9.
Si avrebbe che

$$\begin{aligned} f_j(X_j) &= f_j(V_\models(j)) = f_j(V_\models(\{\phi \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L}) \mid \phi \in j\})) = f_j(\{V_\models(\phi) \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models \mid \phi \in j\}) = \\ &= f_j(\{[\phi]_\models \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models \mid \phi \in j\}) = \{f_j([\phi]_\models) \in H_j \mid \phi \in j\} = \{V_j(\phi) \in H_j \mid \phi \in j\} = \\ &= \{1_{H_j}\}, \end{aligned}$$

allora si avrebbe che $X_j \subseteq f_j^{-1}(\{1_{H_j}\})$.
Per la proposizione 5.1.10 si avrebbe che l'insieme $f_j^{-1}(\{1_{H_j}\})$ è un filtro su $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$, inoltre, siccome l'algebra di Heyting $(H_j, \wedge_j, \vee_j, \rightarrow_j, 1_{H_j}, 0_{H_j})$ sarebbe non banale, si avrebbe che il filtro $f_j^{-1}(\{1_{H_j}\})$ su $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ è proprio.
Si avrebbe che $\uparrow X_j$ è il più piccolo filtro su $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ contenente $X_j$ per la proposizione 4.2.5.
Siccome $f_j^{-1}(\{1_{H_j}\})$ sarebbe un filtro su $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ contenente $X_j$ e $\uparrow X_j$ sarebbe il più piccolo filtro su $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ contenente $X_j$ si avrebbe che $\uparrow X_j \subseteq f_j^{-1}(\{1_{H_j}\})$.
Siccome $\uparrow X_j \subseteq f_j^{-1}(\{1_{H_j}\})$ e il filtro $f_j^{-1}(\{1_{H_j}\})$ su $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ sarebbe proprio si avrebbe che il filtro $\uparrow X_j$ su $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ è proprio, cioè che $0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models} \notin \uparrow X_j$, che contraddice il fatto che $0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models} \in \uparrow X_j$.
Si ha quindi che il filtro $\uparrow X$ su $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ è proprio.
Sia $F = \uparrow X$.
Sia $((\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F}, 0_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F})$ l'algebra di Heyting quoziente di $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ rispetto a $F$.
Si definisce una funzione $\pi_F : \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models \rightarrow (\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F$ ponendo $\pi_F([\phi]_\models) = [[\phi]_\models]_F$.
Si ha che $\pi_F$ è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ all'algebra di Heyting $((\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F}, 0_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F})$ per la proposizione 4.2.16.
Siccome $V_\models$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ e $\pi_F$ è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \rightarrow_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ all'algebra di Heyting $((\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F}, 0_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F})$ si ha che $V = \pi_F \circ V_\models$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $((\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F}, 0_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F})$.
Si ha che $V(\Gamma) = (\pi_F \circ V_\models)(\Gamma) = \pi_F(V_\models(\Gamma)) = \pi_F(X)$.
Siccome $X \subseteq \uparrow X$ per la proposizione 4.2.3, si ha che $\pi_F(X) \subseteq \pi_F(\uparrow X)$.
Si ha quindi che $V(\Gamma) = \pi_F(X) \subseteq \pi_F(\uparrow X) = \pi_F(F)$.
Si ha che $1_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F} = F$ per la proposizione 4.2.15, allora $\pi_F(F) = \{1_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F}\}$.
Si ha quindi che $V(\Gamma) = \pi_F(F) = \{1_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F}\}$, allora per ogni $\phi \in \Gamma$ si ha che

$V(\phi) = 1_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F}$, quindi $(((\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F}, 0_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F}), V)$ è un modello intuizionista per $\Gamma$, dunque $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente. $\square$

I teoremi 5.1.1 e 5.1.11 rappresentano le due implicazioni del teorema di compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi arbitrari, che afferma che un insieme di proposizioni di un linguaggio proposizionale è soddisfacibile intuizionisticamente se e solo se ogni suo sottoinsieme finito è soddisfacibile intuizionisticamente.

**Teorema 5.1.12** (Compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi arbitrari)**.** *Un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente.*

*Dimostrazione.* Se $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 5.1.1.
Se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 5.1.11. $\square$

Si vuole dimostrare il teorema di compattezza per modelli classici e linguaggi arbitrari, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile classicamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente.

Chiaramente ogni modello classico per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è un modello classico per qualsiasi sottoinsieme finito di $\Gamma$, quindi se $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente.

**Teorema 5.1.13.** *Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile classicamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente.*

*Dimostrazione.* Sia $\Gamma$ soddisfacibile classicamente, allora esiste un modello classico $((B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0), V)$ per $\Gamma$, ovvero esistono un'algebra di Boole non banale $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ ed una valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Boole $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ tale che $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma$.
Sia $\Gamma_0 \subseteq_\omega \Gamma$, si ha che $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma_0$, quindi $((B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0), V)$ è un modello classico per $\Gamma_0$, dunque $\Gamma_0$ è soddisfacibile classicamente. $\square$

Viceversa, si può dimostrare che se ogni sottoinsieme finito di un insieme $\Gamma$ di proposizioni di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente.

**Teorema 5.1.14.** *Se ogni sottoinsieme finito di un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente.*

*Dimostrazione.* Sia $I$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\Gamma$ e si supponga che ogni $i \in I$ sia soddisfacibile classicamente, allora ogni $i \in I$ è soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 3.3.1, quindi $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 5.1.11, dunque $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente per il teorema 3.3.11. $\square$

I teoremi 5.1.13 e 5.1.14 rappresentano le due implicazioni del teorema di compattezza per modelli classici e linguaggi arbitrari, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile classicamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente.

**Teorema 5.1.15** (Compattezza per modelli classici e linguaggi arbitrari)**.** *Un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile classicamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente.*

*Dimostrazione.* Se $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente per il teorema 5.1.13.
Se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente per il teorema 5.1.14. $\square$

## 5.2 Una costruzione esplicita

Si è dimostrato in una metateoria intuizionista il teorema di compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari. Per dimostrare che se ogni sottoinsieme finito di un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è soddisfacibile allora $\Gamma$ è soddisfacibile si è mostrato che se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile allora è possibile costruire un modello algebrico per $\Gamma$ basato sull'insieme delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$. Si presenta ora la costruzione esplicita di un modello algebrico per $\Gamma$ basato sui modelli algebrici per i sottoinsiemi finiti di $\Gamma$ in quanto questa costruzione risulta maggiormente informativa.

Dati un modello intuizionista per ciascun sottoinsieme finito di un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$, si può costruire un modello intuizionista per $\Gamma$ basato sui modelli intuizionisti per i suoi sottoinsiemi finiti.

Data una famiglia di algebre di Heyting, è possibile atteggiare il prodotto cartesiano degli insiemi di supporto delle algebre di Heyting ad algebra di Heyting definendo le operazioni per componenti.

**Proposizione 5.2.1.** *Sia $((H_i, \wedge_i, \vee_i, \to_i, 1_i, 0_i))_{i\in I}$ una famiglia di algebre di Heyting. Sia $H = \prod_{i\in I} H_i$ il prodotto cartesiano degli insiemi $(H_i)_{i\in I}$. Si definiscono tre operazioni binarie $\wedge$, $\vee$ e $\to$ su $H$ ponendo $(x_i)_{i\in I} \wedge (y_i)_{i\in I} = (x_i \wedge_i y_i)_{i\in I}$, $(x_i)_{i\in I} \vee (y_i)_{i\in I} = (x_i \vee_i y_i)_{i\in I}$ e $(x_i)_{i\in I} \to (y_i)_{i\in I} = (x_i \to_i y_i)_{i\in I}$. Si definiscono $1 = (1_i)_{i\in I}$ e $0 = (0_i)_{i\in I}$. Si ha che $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ è un'algebra di Heyting. Se almeno una delle algebre di Heyting della famiglia $((H_i, \wedge_i, \vee_i, \to_i, 1_i, 0_i))_{i\in I}$ è non banale allora l'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ è non banale. Inoltre si ha che $(x_i)_{i\in I} \leq (y_i)_{i\in I}$ se e solo se $x_i \leq_i y_i$ per ogni $i \in I$.*

*Dimostrazione.* Si vuole dimostrare che $(H, \wedge, \vee)$ è un reticolo.
Si vuole dimostrare che le operazioni binarie $\wedge$ e $\vee$ soddisfano le proprietà associative.
Si ha che

$$\begin{aligned}(x_i)_{i\in I} \wedge ((y_i)_{i\in I} \wedge (z_i)_{i\in I}) &= (x_i)_{i\in I} \wedge (y_i \wedge_i z_i)_{i\in I} = (x_i \wedge_i (y_i \wedge_i z_i))_{i\in I} = \\ &= ((x_i \wedge_i y_i) \wedge_i z_i)_{i\in I} = (x_i \wedge_i y_i)_{i\in I} \wedge (z_i)_{i\in I} = \\ &= ((x_i)_{i\in I} \wedge (y_i)_{i\in I}) \wedge (z_i)_{i\in I}.\end{aligned}$$

Si ha che

$$\begin{aligned}(x_i)_{i\in I} \vee ((y_i)_{i\in I} \vee (z_i)_{i\in I}) &= (x_i)_{i\in I} \vee (y_i \vee_i z_i)_{i\in I} = (x_i \vee_i (y_i \vee_i z_i))_{i\in I} = \\ &= ((x_i \vee_i y_i) \vee_i z_i)_{i\in I} = (x_i \vee_i y_i)_{i\in I} \vee (z_i)_{i\in I} = \\ &= ((x_i)_{i\in I} \vee (y_i)_{i\in I}) \vee (z_i)_{i\in I}.\end{aligned}$$

Si ha quindi che le operazioni binarie $\wedge$ e $\vee$ soddisfano le proprietà associative.
Si vuole dimostrare che le operazioni binarie $\wedge$ e $\vee$ soddisfano le proprietà commutative.
Si ha che $(x_i)_{i\in I} \wedge (y_i)_{i\in I} = (x_i \wedge_i y_i)_{i\in I} = (y_i \wedge_i x_i)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I} \wedge (x_i)_{i\in I}$.
Si ha che $(x_i)_{i\in I} \vee (y_i)_{i\in I} = (x_i \vee_i y_i)_{i\in I} = (y_i \vee_i x_i)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I} \vee (x_i)_{i\in I}$.
Si ha quindi che le operazioni binarie $\wedge$ e $\vee$ soddisfano le proprietà commutative.

Si vuole dimostrare che le operazioni binarie $\wedge$ e $\vee$ soddisfano le proprietà di assorbimento.
Si ha che $(x_i)_{i\in I} \wedge ((x_i)_{i\in I} \vee (y_i)_{i\in I}) = (x_i)_{i\in I} \wedge (x_i \vee_i y_i)_{i\in I} = (x_i \wedge_i (x_i \vee_i y_i))_{i\in I} = (x_i)_{i\in I}$.
Si ha che $(x_i)_{i\in I} \vee ((x_i)_{i\in I} \wedge (y_i)_{i\in I}) = (x_i)_{i\in I} \vee (x_i \wedge_i y_i)_{i\in I} = (x_i \vee_i (x_i \wedge_i y_i))_{i\in I} = (x_i)_{i\in I}$.
Si ha quindi che le operazioni binarie $\wedge$ e $\vee$ soddisfano le proprietà di assorbimento.
Si ha quindi che $(H, \wedge, \vee)$ è un reticolo.
Si vuole dimostrare che $(x_i)_{i\in I} \leq (y_i)_{i\in I}$ se e solo se $x_i \leq_i y_i$ per ogni $i \in I$.
Si ha che $(x_i)_{i\in I} \leq (y_i)_{i\in I}$ se e solo se $(x_i)_{i\in I} = (x_i)_{i\in I} \wedge (y_i)_{i\in I}$ se e solo se $(x_i)_{i\in I} = (x_i \wedge_i y_i)_{i\in I}$ se e solo se $x_i = x_i \wedge_i y_i$ per ogni $i \in I$ se e solo se $x_i \leq_i y_i$ per ogni $i \in I$.
Si ha quindi che $(x_i)_{i\in I} \leq (y_i)_{i\in I}$ se e solo se $x_i \leq_i y_i$ per ogni $i \in I$.
Si vuole dimostrare che 1 è il massimo elemento di $H$ e che 0 è il minimo elemento di $H$.
Per ogni $(x_i)_{i\in I} \in H$ si ha che $x_i \leq_i 1_i$ per ogni $i \in I$, allora $(x_i)_{i\in I} \leq (1_i)_{i\in I} = 1$.
Per ogni $(x_i)_{i\in I} \in H$ si ha che $0_i \leq_i x_i$ per ogni $i \in I$, allora $0 = (0_i)_{i\in I} \leq (x_i)_{i\in I}$.
Si ha quindi che 1 è il massimo elemento di $H$ e che 0 è il minimo elemento di $H$.
Si ha quindi che $(H, \wedge, \vee, 1, 0)$ è un reticolo limitato.
Si vuole dimostrare che $\rightarrow$ è l'implicazione su $(H, \wedge, \vee)$.
Dimostrare che $\rightarrow$ è l'implicazione su $(H, \wedge, \vee)$ significa dimostrare che per ogni $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in H$ si ha che $(x_i)_{i\in I} \rightarrow (y_i)_{i\in I}$ è l'implicazione tra $(x_i)_{i\in I}$ e $(y_i)_{i\in I}$, ovvero dimostrare che per ogni $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}, (z_i)_{i\in I} \in H$ si ha che $(z_i)_{i\in I} \wedge (x_i)_{i\in I} \leq (y_i)_{i\in I}$ se e solo se $(z_i)_{i\in I} \leq (x_i)_{i\in I} \rightarrow (y_i)_{i\in I}$.
Si ha che $(z_i)_{i\in I} \wedge (x_i)_{i\in I} \leq (y_i)_{i\in I}$ se e solo se $(z_i \wedge_i x_i)_{i\in I} \leq (y_i)_{i\in I}$ se e solo se $z_i \wedge_i x_i \leq_i y_i$ per ogni $i \in I$ se e solo se $z_i \leq_i x_i \rightarrow_i y_i$ per ogni $i \in I$ se e solo se $(z_i)_{i\in I} \leq (x_i \rightarrow_i y_i)_{i\in I}$ se e solo se $(z_i)_{i\in I} \leq (x_i)_{i\in I} \rightarrow (y_i)_{i\in I}$.
Si ha quindi che $\rightarrow$ è l'implicazione su $(H, \wedge, \vee)$.
Si ha quindi che $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ è un'algebra di Heyting.
Se almeno una delle algebre di Heyting della famiglia $((H_i, \wedge_i, \vee_i, \rightarrow_i, 1_i, 0_i))_{i\in I}$ è non banale allora per qualche $j \in I$ si ha che $0_j \neq 1_j$, quindi $0 = (0_i)_{i\in I} \neq (1_i)_{i\in I} = 1$, dunque l'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ è non banale. $\square$

La proposizione 5.2.1 consente di definire la nozione di algebra di Heyting prodotto di una famiglia di algebre di Heyting.

**Definizione 5.2.2** (Algebra di Heyting prodotto). *L'algebra di Heyting prodotto di una famiglia di algebre di Heyting $((H_i, \wedge_i, \vee_i, \rightarrow_i, 1_i, 0_i))_{i\in I}$ è l'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ in cui $H = \prod_{i\in I} H_i$ è il prodotto cartesiano degli insiemi $(H_i)_{i\in I}$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$ sono le operazioni binarie su $H$ definite ponendo $(x_i)_{i\in I} \wedge (y_i)_{i\in I} = (x_i \wedge_i y_i)_{i\in I}$, $(x_i)_{i\in I} \vee (y_i)_{i\in I} = (x_i \vee_i y_i)_{i\in I}$ e $(x_i)_{i\in I} \rightarrow (y_i)_{i\in I} = (x_i \rightarrow_i y_i)_{i\in I}$, $1 = (1_i)_{i\in I}$ e $0 = (0_i)_{i\in I}$.*

Date una famiglia di algebre di Heyting ed una famiglia di valutazioni di un linguaggio proposizionale nelle corrispondenti algebre di Heyting, è possibile definire per componenti una valutazione delle proposizioni del linguaggio nell'algebra di Heyting prodotto delle algebre di Heyting della famiglia di algebre di Heyting.

**Proposizione 5.2.3.** *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio proposizionale, sia $((H_i, \wedge_i, \vee_i, \rightarrow_i, 1_i, 0_i))_{i\in I}$ una famiglia di algebre di Heyting e sia $(V_i)_{i\in I}$ una famiglia di valutazioni tale che $V_i$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H_i, \wedge_i, \vee_i, \rightarrow_i, 1_i, 0_i)$. Sia $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ l'algebra di Heyting prodotto della famiglia di algebre di Heyting $((H_i, \wedge_i, \vee_i, \rightarrow_i, 1_i, 0_i))_{i\in I}$. Si definisce una funzione $V : Prop(\mathcal{L}) \rightarrow H$ ponendo $V(\phi) = (V_i(\phi))_{i\in I}$ per ogni $\phi \in Prop(\mathcal{L})$. Si ha che $V$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$.*

*Dimostrazione.* Si ha che $V(\top) = (V_i(\top))_{i\in I} = (1_i)_{i\in I} = 1$.
Si ha che $V(\bot) = (V_i(\bot))_{i\in I} = (0_i)_{i\in I} = 0$.

Si ha che $V(\phi \wedge \psi) = (V_i(\phi \wedge \psi))_{i\in I} = (V_i(\phi) \wedge_i V_i(\psi))_{i\in I} = (V_i(\phi))_{i\in I} \wedge (V_i(\psi))_{i\in I} = V(\phi) \wedge V(\psi)$.
Si ha che $V(\phi \vee \psi) = (V_i(\phi \vee \psi))_{i\in I} = (V_i(\phi) \vee_i V_i(\psi))_{i\in I} = (V_i(\phi))_{i\in I} \vee (V_i(\psi))_{i\in I} = V(\phi) \vee V(\psi)$.
Si ha che
$V(\phi \to \psi) = (V_i(\phi \to \psi))_{i\in I} = (V_i(\phi) \to_i V_i(\psi))_{i\in I} = (V_i(\phi))_{i\in I} \to (V_i(\psi))_{i\in I} = V(\phi) \to V(\psi)$.
□

Dati un modello intuizionista per ciascun sottoinsieme finito di un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$, si può quindi costruire un modello intuizionista per $\Gamma$ basato sui modelli intuizionisti per i suoi sottoinsiemi finiti.

**Teorema 5.2.4.** *Sia $\Gamma$ un insieme di proposizioni di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$, sia $I$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\Gamma$ e sia $(((H_i, \wedge_i, \vee_i, \to_i, 1_i, 0_i), V_i))_{i\in I}$ una famiglia di modelli intuizionisti tale che per ogni $i \in I$ si ha che $((H_i, \wedge_i, \vee_i, \to_i, 1_i, 0_i), V_i)$ è un modello intuizionista per $i$. Allora esiste un modello intuizionista per $\Gamma$ basato sui modelli intuizionisti della famiglia $(((H_i, \wedge_i, \vee_i, \to_i, 1_i, 0_i), V_i))_{i\in I}$.*

*Dimostrazione.* Sia $\Gamma$ un insieme di proposizioni di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$, sia $I$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\Gamma$ e sia $(((H_i, \wedge_i, \vee_i, \to_i, 1_i, 0_i), V_i))_{i\in I}$ una famiglia di modelli intuizionisti tale che per ogni $i \in I$ si ha che $((H_i, \wedge_i, \vee_i, \to_i, 1_i, 0_i), V_i)$ è un modello intuizionista per $i$, allora per ogni $i \in I$ si ha che $(H_i, \wedge_i, \vee_i, \to_i, 1_i, 0_i)$ è un'algebra di Heyting non banale e $V_i$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H_i, \wedge_i, \vee_i, \to_i, 1_i, 0_i)$ tale che $V_i(\phi) = 1_i$ per ogni $\phi \in I$.
Sia $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ l'algebra di Heyting prodotto della famiglia di algebre di Heyting $((H_i, \wedge_i, \vee_i, \to_i, 1_i, 0_i))_{i\in I}$.
Siccome le algebre di Heyting della famiglia $((H_i, \wedge_i, \vee_i, \to_i, 1_i, 0_i))_{i\in I}$ sono non banali si ha che l'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ è non banale per la proposizione 5.2.1.
Si definisce una funzione $V : \mathrm{Prop}(\mathcal{L}) \to H$ ponendo $V(\phi) = (V_i(\phi))_{i\in I}$ per ogni $\phi \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})$.
Si ha che $V$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ per la proposizione 5.2.3.
Si definisce l'insieme $X = V(\Gamma) \subseteq H$.
Si vuole dimostrare che l'insieme $X$ gode della proprietà dell'intersezione finita.
Sia $Y \subseteq_\omega X$, allora $Y = \{V(\phi_1), \dots, V(\phi_n)\}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ con $\phi_1, \dots, \phi_n \in \Gamma$, siccome $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subseteq_\omega \Gamma$ si ha che $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} = j$ per qualche $j \in I$, quindi si ha che $V_j(\phi) = 1_j$ per ogni $\phi \in j$, dunque $V_j(\phi_1) \wedge_j \dots \wedge_j V_j(\phi_n) = 1_j \neq 0_j$, da cui segue che
$$\bigwedge Y = V(\phi_1) \wedge \dots \wedge V(\phi_n) = (V_i(\phi_1))_{i\in I} \wedge \dots \wedge (V_i(\phi_n))_{i\in I} = (V_i(\phi_1) \wedge_i \dots \wedge_i V_i(\phi_n))_{i\in I} \neq$$
$$\neq (0_i)_{i\in I} = 0.$$
Si ha quindi che l'insieme $X$ gode della proprietà dell'intersezione finita.
Siccome l'insieme $X$ gode della proprietà dell'intersezione finita, per la proposizione 4.2.7 si ha che il filtro$\uparrow X$ su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ è un filtro proprio.
Sia $F = \uparrow X$.
Sia $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \to_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ l'algebra di Heyting quoziente di $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ rispetto a $F$.
Siccome il filtro $F$ su $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ è un filtro proprio si ha che l'algebra di Heyting $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \to_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ è non banale per la proposizione 4.2.13.
Si definisce una funzione $\pi_F : H \to H/F$ ponendo $\pi_F(x) = [x]_F$ per ogni $x \in H$.
Si ha che $\pi_F$ è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ all'algebra di Heyting $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \to_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ per la proposizione 4.2.16.
Siccome $V$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ e $\pi_F$ è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ all'algebra di

Heyting $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$, si ha che $V_F = \pi_F \circ V$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F})$ per la proposizione 3.3.9.
Si ha che $V_F(\Gamma) = (\pi_F \circ V)(\Gamma) = \pi_F(V(\Gamma)) = \pi_F(X)$.
Siccome $X \subseteq \uparrow X$ per la proposizione 4.2.3, si ha che $\pi_F(X) \subseteq \pi_F(\uparrow X)$.
Si ha quindi che $V_F(\Gamma) = \pi_F(X) \subseteq \pi_F(\uparrow X) = \pi_F(F)$.
Si ha che $1_{H/F} = F$ per la proposizione 4.2.15, allora $\pi_F(F) = \{1_{H/F}\}$.
Si ha quindi che $V_F(\Gamma) = \pi_F(F) = \{1_{H/F}\}$, allora per ogni $\phi \in \Gamma$ si ha che $V_F(\phi) = 1_{H/F}$, quindi $((H/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{H/F}, 0_{H/F}), V_F)$ è un modello intuizionista per $\Gamma$. □

Dati un modello classico per ciascun sottoinsieme finito di un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$, si può costruire un modello classico per $\Gamma$ basato sui modelli classici per i suoi sottoinsiemi finiti.

Data una famiglia di algebre di Boole, è possibile atteggiare il prodotto cartesiano degli insiemi di supporto delle algebre di Boole ad algebra di Boole definendo le operazioni per componenti.

**Proposizione 5.2.5.** *Sia $((B_i, \wedge_i, \vee_i, \neg_i, 1_i, 0_i))_{i\in I}$ una famiglia di algebre di Heyting. Sia $B = \prod_{i\in I} B_i$ il prodotto cartesiano degli insiemi $(B_i)_{i\in I}$. Si definiscono due operazioni binarie $\wedge$ e $\vee$ su $B$ ponendo $(x_i)_{i\in I} \wedge (y_i)_{i\in I} = (x_i \wedge_i y_i)_{i\in I}$ e $(x_i)_{i\in I} \vee (y_i)_{i\in I} = (x_i \vee_i y_i)_{i\in I}$. Si definisce un'operazione unaria $\neg$ su $B$ ponendo $\neg(x_i)_{i\in I} = (\neg_i x_i)_{i\in I}$. Si definiscono $1 = (1_i)_{i\in I}$ e $0 = (0_i)_{i\in I}$. Si ha che $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ è un'algebra di Boole. Se almeno una delle algebre di Boole della famiglia $((B_i, \wedge_i, \vee_i, \neg_i, 1_i, 0_i))_{i\in I}$ è non banale allora l'algebra di Boole $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ è non banale. Inoltre si ha che $(x_i)_{i\in I} \leq (y_i)_{i\in I}$ se e solo se $x_i \leq_i y_i$ per ogni $i \in I$.*

*Dimostrazione.* Per ogni $i \in I$ sia $\rightarrow_i$ l'implicazione su $(B_i, \wedge_i, \vee_i, \neg_i, 1_i, 0_i)$.
Siccome ogni algebra di Boole è un'algebra di Heyting per la proposizione 2.6.4, si ha che $(B_i, \wedge_i, \vee_i, \rightarrow_i, 1_i, 0_i)$ è un'algebra di Heyting per ogni $i \in I$.
Si definisce un'operazione binaria $\rightarrow$ su $B$ ponendo $(x_i)_{i\in I} \rightarrow (y_i)_{i\in I} = (x_i \rightarrow_i y_i)_{i\in I}$.
Per la proposizione 5.2.1 si ha che $(B, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ è un'algebra di Heyting e che $(x_i)_{i\in I} \leq (y_i)_{i\in I}$ se e solo se $x_i \leq_i y_i$ per ogni $i \in I$. In particolare si ha che $(B, \wedge, \vee)$ è un reticolo distributivo e che $(B, \wedge, \vee, 1, 0)$ è un reticolo limitato.
Si vuole dimostrare che $\neg$ è il complemento su $(B, \wedge, \vee, 1, 0)$.
Per ogni $(x_i)_{i\in I} \in B$ si ha che $(x_i)_{i\in I} \vee \neg(x_i)_{i\in I} = (x_i)_{i\in I} \vee (\neg x_i)_{i\in I} = (x_i \vee_i \neg_i x_i)_{i\in I} = (1_i)_{i\in I} = 1$ e che $(x_i)_{i\in I} \wedge \neg(x_i)_{i\in I} = (x_i)_{i\in I} \wedge (\neg x_i)_{i\in I} = (x_i \wedge_i \neg_i x_i)_{i\in I} = (0_i)_{i\in I} = 0$.
Si ha quindi che $\neg$ è il complemento su $(B, \wedge, \vee, 1, 0)$.
Si ha quindi che $(B, \wedge, \vee, \neg 1, 0)$ è un'algebra di Boole.
Se almeno una delle algebre di Boole della famiglia $((B_i, \wedge_i, \vee_i, \neg_i, 1_i, 0_i))_{i\in I}$ è non banale allora per qualche $j \in I$ si ha che $0_j \neq 1_j$, quindi $0 = (0_i)_{i\in I} \neq (1_i)_{i\in I} = 1$, dunque l'algebra di Boole $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ è non banale. □

La proposizione 5.2.5 consente di definire la nozione di algebra di Boole prodotto di una famiglia di algebre di Boole.

**Definizione 5.2.6** (Algebra di Boole prodotto)**.** *L'algebra di Boole prodotto di una famiglia di algebre di Boole $((B_i, \wedge_i, \vee_i, \neg_i, 1_i, 0_i))_{i\in I}$ è l'algebra di Boole $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ in cui $B = \prod_{i\in I} B_i$ è il prodotto cartesiano degli insiemi $(B_i)_{i\in I}$, $\wedge$ e $\vee$ sono le operazioni binarie su $B$ definite ponendo $(x_i)_{i\in I} \wedge (y_i)_{i\in I} = (x_i \wedge_i y_i)_{i\in I}$ e $(x_i)_{i\in I} \vee (y_i)_{i\in I} = (x_i \vee_i y_i)_{i\in I}$, $\neg$ è l'operazione unaria su $B$ definita ponendo $\neg(x_i)_{i\in I} = (\neg_i x_i)_{i\in I}$, $1 = (1_i)_{i\in I}$ e $0 = (0_i)_{i\in I}$.*

Date una famiglia di algebre di Boole ed una famiglia di valutazioni di un linguaggio proposizionale nelle corrispondenti algebre di Boole, è possibile definire per componenti una valutazione delle proposizioni del linguaggio nell'algebra di Boole prodotto delle algebre di Boole della famiglia di algebre di Boole.

**Proposizione 5.2.7.** *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio proposizionale, sia $((B_i, \wedge_i, \vee_i, \neg_i, 1_i, 0_i))_{i\in I}$ una famiglia di algebre di Boole e sia $(V_i)_{i\in I}$ una famiglia di valutazioni tale che $V_i$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Boole $(B_i, \wedge_i, \vee_i, \neg_i, 1_i, 0_i)$. Sia $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ l'algebra di Boole prodotto della famiglia di algebre di Boole $((B_i, \wedge_i, \vee_i, \neg_i, 1_i, 0_i))_{i\in I}$. Si definisce una funzione $V : Prop(\mathcal{L}) \to B$ ponendo $V(\phi) = (V_i(\phi))_{i\in I}$ per ogni $\phi \in Prop(\mathcal{L})$. Si ha che $V$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Boole $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$.*

*Dimostrazione.* Si ha che $V(\top) = (V_i(\top))_{i\in I} = (1_i)_{i\in I} = 1$.
Si ha che $V(\bot) = (V_i(\bot))_{i\in I} = (0_i)_{i\in I} = 0$.
Si ha che $V(\phi\wedge\psi) = (V_i(\phi\wedge\psi))_{i\in I} = (V_i(\phi)\wedge_i V_i(\psi))_{i\in I} = (V_i(\phi))_{i\in I}\wedge(V_i(\psi))_{i\in I} = V(\phi)\wedge V(\psi)$.
Si ha che $V(\phi\vee\psi) = (V_i(\phi\vee\psi))_{i\in I} = (V_i(\phi)\vee_i V_i(\psi))_{i\in I} = (V_i(\phi))_{i\in I}\vee(V_i(\psi))_{i\in I} = V(\phi)\vee V(\psi)$.
Per ogni $i \in I$ sia $\to_i$ l'implicazione su $(B_i, \wedge_i, \vee_i, \neg_i, 1_i, 0_i)$, si ha che $x_i \to_i y_i = \neg_i(x_i \wedge_i \neg_i y_i)$.
Sia $\to$ l'implicazione su $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$, si ha che $(x_i)_{i\in I} \to (y_i)_{i\in I} = \neg((x_i)_{i\in I} \wedge \neg(y_i)_{i\in I})$.
Si ha che

$$\begin{aligned}
V(\phi \to \psi) &= (V_i(\phi \to \psi))_{i\in I} = (V_i(\phi) \to_i V_i(\psi))_{i\in I} = (\neg_i(V_i(\phi) \wedge_i \neg_i V_i(\psi)))_{i\in I} = \\
&= \neg(V_i(\phi) \wedge_i \neg_i V_i(\psi))_{i\in I} = \neg((V_i(\phi))_{i\in I} \wedge (\neg_i V_i(\psi))_{i\in I}) = \\
&= \neg((V_i(\phi))_{i\in I} \wedge \neg(V_i(\psi))_{i\in I}) = (V_i(\phi))_{i\in I} \to (V_i(\psi))_{i\in I} = V(\phi) \to V(\psi).
\end{aligned}$$

□

Un filtro su un'algebra di Boole induce una relazione di equivalenza sull'algebra di Boole.

**Proposizione 5.2.8.** *Sia $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ un'algebra di Boole e sia $F$ un filtro su $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$. Sia $\to$ l'implicazione su $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$. Si definisce una relazione binaria $\sim_F$ su $B$ ponendo $x \sim_F y$ se e solo se $(x \to y) \wedge (y \to x) \in F$. La relazione $\sim_F$ è una relazione di equivalenza sull'insieme $B$.*

*Dimostrazione.* Siccome $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ un'algebra di Boole e $\to$ l'implicazione su $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ si ha che $(B, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ è un'algebra di Heyting.
Si ha quindi che la relazione $\sim_F$ è una relazione di equivalenza sull'insieme $B$ per la proposizione 4.2.11. □

La relazione di equivalenza indotta da un filtro su un'algebra di Boole consente di definire delle operazioni sull'insieme quoziente dell'algebra di Boole rispetto alla relazione di equivalenza.

**Proposizione 5.2.9.** *Sia $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ un'algebra di Boole e sia $F$ un filtro su $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$. Sia $\to$ l'implicazione su $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$. Sia $\sim_F$ la relazione di equivalenza definita su $B$ ponendo $x \sim_F y$ se e solo se $(x \to y) \wedge (y \to x) \in F$. Sia $B/F = \{[x]_F \mid x \in B\}$ l'insieme quoziente di $B$ rispetto a $\sim_F$. Si definiscono due operazioni binarie $\wedge_F$ e $\vee_F$ su $B/F$ ponendo $[x]_F \wedge_F [y]_F = [x \wedge y]_F$ e $[x]_F \vee_F [y]_F = [x \vee y]_F$. Si definisce un'operazione unaria $\neg_F$ su $B/F$ ponendo $\neg_F[x]_F = [\neg x]_F$. Si ha che le operazioni $\wedge_F$, $\vee_F$ e $\neg_F$ sono ben definite, cioè non dipendono dai rappresentanti delle classi di equivalenza.*

*Dimostrazione.* Si ha che la relazione $\sim_F$ è una relazione di equivalenza su $B$ per la proposizione 5.2.8.
Siccome $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ un'algebra di Boole e $\to$ l'implicazione su $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ si ha che

$(B, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ è un'algebra di Heyting.
Si ha quindi che le operazioni binarie $\wedge_F$ e $\vee_F$ sono ben definite per la proposizione 4.2.12.
Si vuole dimostrare che l'operazione unaria $\neg_F$ è ben definita.
Si supponga che $[x_1]_F = [x_2]_F$, allora $x_1 \sim_F x_2$, cioè $(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1) \in F$.
Si ha che

$$\begin{aligned}(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1) &= (\neg(x_1 \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg(x_2 \wedge \neg x_1)) = (\neg(\neg x_2 \wedge x_1)) \wedge (\neg(\neg x_1 \wedge x_2)) = \\ &= (\neg(\neg x_2 \wedge \neg\neg x_1)) \wedge (\neg(\neg x_1 \wedge \neg\neg x_2)) = \\ &= (\neg x_2 \rightarrow \neg x_1) \wedge (\neg x_1 \rightarrow \neg x_2) = (\neg x_1 \rightarrow \neg x_2) \wedge (\neg x_2 \rightarrow \neg x_1).\end{aligned}$$

Dal fatto che $[x_1]_F = [x_2]_F$ segue quindi che
$(\neg x_1 \rightarrow \neg x_2) \wedge (\neg x_2 \rightarrow \neg x_1) = (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1) \in F$, quindi che $\neg x_1 \sim_F \neg x_2$, cioè che $[\neg x_1]_F = [\neg x_2]_F$, ovvero che $\neg_F[x_1]_F = \neg_F[x_2]_F$.
Si ha quindi che l'operazione unaria $\neg_F$ è ben definita. □

Le operazioni definite sull'insieme quoziente di un'algebra di Boole rispetto alla relazione di equivalenza indotta da un filtro sull'algebra di Boole consentono di atteggiare l'insieme quoziente dell'algebra di Boole rispetto alla relazione di equivalenza ad algebra di Boole.

**Proposizione 5.2.10.** *Sia $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ un'algebra di Boole e sia $F$ un filtro su $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$. Sia $\rightarrow$ l'implicazione su $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$. Sia $\sim_F$ la relazione di equivalenza definita su $B$ ponendo $x \sim_F y$ se e solo se $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \in F$. Sia $B/F = \{[x]_F \mid x \in B\}$ l'insieme quoziente di $B$ rispetto a $\sim_F$. Siano $\wedge_F$ e $\vee_F$ le operazioni binarie su $B/F$ definite ponendo $[x]_F \wedge_F [y]_F = [x \wedge y]_F$ e $[x]_F \vee_F [y]_F = [x \vee y]_F$. Sia $\neg_F$ l'operazione unaria definita su $B/F$ ponendo $\neg_F[x]_F = [\neg x]_F$. Si definiscono $1_{B/F} = [1]_F$ e $0_{B/F} = [0]_F$. Si ha che $(B/F, \wedge_F, \vee_F, \neg_F, 1_{B/F}, 0_{B/F})$ è un'algebra di Boole. Inoltre si ha che $[x]_F \leq_F [y]_F$ se e solo se $x \rightarrow y \in F$. In particolare, se $F$ è un filtro proprio su $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ allora $(B/F, \wedge_F, \vee_F, \neg_F, 1_{B/F}, 0_{B/F})$ è un'algebra di Boole non banale.*

*Dimostrazione.* Si ha che la relazione $\sim_F$ è una relazione di equivalenza su $B$ per la proposizione 5.2.8.
Si ha che le operazioni $\wedge_F$, $\vee_F$ e $\neg_F$ sono ben definite per la proposizione 5.2.9.
Siccome $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ un'algebra di Boole e $\rightarrow$ l'implicazione su $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ si ha che $(B, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ è un'algebra di Heyting.
Sia $(B/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{B/F}, 0_{B/F})$ l'algebra di Heyting quoziente di $(B, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ rispetto a $F$.
Si ha che $[x]_F \leq_F [y]_F$ se e solo se $x \rightarrow y \in F$ per la proposizione 4.2.13.
Si vuole dimostrare che $\neg_F$ è il complemento su $(B/F, \wedge_F, \vee_F, 1_{B/F}, 0_{B/F})$.
Per ogni $[x]_F \in B/F$ si ha che $[x]_F \vee_F \neg_F[x]_F = [x]_F \vee_F [\neg x]_F = [x \vee \neg x]_F = [1]_F = 1_{B/F}$ e che $[x]_F \wedge_F \neg_F[x]_F = [x]_F \wedge_F [\neg x]_F = [x \wedge \neg x]_F = [0]_F = 0_{B/F}$.
Si ha quindi che $\neg_F$ è il complemento su $(B/F, \wedge_F, \vee_F, 1_{B/F}, 0_{B/F})$.
Si ha quindi che $(B/F, \wedge_F, \vee_F, \neg_F, 1_{B/F}, 0_{B/F})$ è un'algebra di Boole.
Se $F$ è un filtro proprio su $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ allora $F$ è un filtro proprio su $(B, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$, quindi $(B/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{B/F}, 0_{B/F})$ è un'algebra di Heyting non banale per la proposizione 4.2.13, dunque $1_{B/F} \neq 0_{B/F}$, da cui $(B/F, \wedge_F, \vee_F, \neg_F, 1_{B/F}, 0_{B/F})$ è un'algebra di Boole non banale. □

La proposizione 5.2.10 consente di definire la nozione di algebra di Boole quoziente di un'algebra di Boole rispetto ad un filtro.

**Definizione 5.2.11** (Algebra di Boole quoziente rispetto ad un filtro)**.** *Sia $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ un'algebra di Boole e sia $F$ un filtro su $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$. L'algebra di Boole quoziente di*

*$(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ rispetto a $F$ è l'algebra di Boole $(B/F, \wedge_F, \vee_F, \neg_F, 1_{B/F}, 0_{B/F})$ in cui $\rightarrow$ è l'implicazione su $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$, $\sim_F$ è la relazione di equivalenza definita su $B$ ponendo $x \sim_F y$ se e solo se $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \in F$, $B/F = \{[x]_F \mid x \in B\}$ è l'insieme quoziente di $B$ rispetto a $\sim_F$, $\wedge_F$ e $\vee_F$ sono le operazioni binarie su $B/F$ definite ponendo $[x]_F \wedge_F [y]_F = [x \wedge y]_F$ e $[x]_F \vee_F [y]_F = [x \vee y]_F$, $\neg_F$ è l'operazione unaria definita su $B/F$ ponendo $\neg_F [x]_F = [\neg x]_F$, $1_{B/F} = [1]_F$ e $0_{B/F} = [0]_F$.*

Dati un modello classico per ciascun sottoinsieme finito di un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$, si può quindi costruire un modello classico per $\Gamma$ basato sui modelli classici per i suoi sottoinsiemi finiti.

**Teorema 5.2.12.** *Sia $\Gamma$ un insieme di proposizioni di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$, sia $I$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\Gamma$ e sia $(((B_i, \wedge_i, \vee_i, \neg_i, 1_i, 0_i), V_i))_{i \in I}$ una famiglia di modelli classici tale che per ogni $i \in I$ si ha che $((B_i, \wedge_i, \vee_i, \neg_i, 1_i, 0_i), V_i)$ è un modello classico per $i$. Allora esiste un modello classico per $\Gamma$ basato sui modelli classici della famiglia $(((B_i, \wedge_i, \vee_i, \neg_i, 1_i, 0_i), V_i))_{i \in I}$.*

*Dimostrazione.* Sia $\Gamma$ un insieme di proposizioni di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$, sia $I$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\Gamma$ e sia $(((B_i, \wedge_i, \vee_i, \neg_i, 1_i, 0_i), V_i))_{i \in I}$ una famiglia di modelli classici tale che per ogni $i \in I$ si ha che $((B_i, \wedge_i, \vee_i, \neg_i, 1_i, 0_i), V_i)$ è un modello classico per $i$, allora per ogni $i \in I$ si ha che $(B_i, \wedge_i, \vee_i, \neg_i, 1_i, 0_i)$ è un'algebra di Boole non banale e $V_i$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Boole $(B_i, \wedge_i, \vee_i, \neg_i, 1_i, 0_i)$ tale che $V_i(\phi) = 1_i$ per ogni $\phi \in I$.
Sia $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ l'algebra di Boole prodotto della famiglia di algebre di Boole $((B_i, \wedge_i, \vee_i, \neg_i, 1_i, 0_i))_{i \in I}$.
Siccome le algebre di Boole della famiglia $((B_i, \wedge_i, \vee_i, \neg_i, 1_i, 0_i))_{i \in I}$ sono non banali si ha che l'algebra di Boole $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ è non banale per la proposizione 5.2.5.
Si definisce una funzione $V : \mathrm{Prop}(\mathcal{L}) \rightarrow B$ ponendo $V(\phi) = (V_i(\phi))_{i \in I}$ per ogni $\phi \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})$.
Si ha che $V$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Boole $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ per la proposizione 5.2.7.
Si definisce l'insieme $X = V(\Gamma) \subseteq B$.
Si vuole dimostrare che l'insieme $X$ gode della proprietà dell'intersezione finita.
Sia $Y \subseteq_\omega X$, allora $Y = \{V(\phi_1), \ldots, V(\phi_n)\}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ con $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \Gamma$, siccome $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq_\omega \Gamma$ si ha che $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} = j$ per qualche $j \in I$, quindi si ha che $V_j(\phi) = 1_j$ per ogni $\phi \in j$, dunque $V_j(\phi_1) \wedge_j \ldots \wedge_j V_j(\phi_n) = 1_j \neq 0_j$, da cui segue che

$$\bigwedge Y = V(\phi_1) \wedge \ldots \wedge V(\phi_n) = (V_i(\phi_1))_{i \in I} \wedge \ldots \wedge (V_i(\phi_n))_{i \in I} = (V_i(\phi_1) \wedge_i \ldots \wedge_i V_i(\phi_n))_{i \in I} \neq$$
$$\neq (0_i)_{i \in I} = 0.$$

Si ha quindi che l'insieme $X$ gode della proprietà dell'intersezione finita.
Siccome l'insieme $X$ gode della proprietà dell'intersezione finita, per la proposizione 4.2.7 si ha che il filtro$\uparrow X$ su $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ è un filtro proprio.
Sia $F = \uparrow X$.
Sia $(B/F, \wedge_F, \vee_F, \neg_F, 1_{B/F}, 0_{B/F})$ l'algebra di Boole quoziente di $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ rispetto a $F$.
Siccome il filtro $F$ su $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ è un filtro proprio si ha che l'algebra di Boole $(B/F, \wedge_F, \vee_F, \neg_F, 1_{B/F}, 0_{B/F})$ è non banale per la proposizione 5.2.10.
Si definisce una funzione $\pi_F : B \rightarrow B/F$ ponendo $\pi_F(x) = [x]_F$ per ogni $x \in B$.
Si ha che $\pi_F$ è un omomorfismo dall'algebra di Boole $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ all'algebra di Boole $(B/F, \wedge_F, \vee_F, \neg_F, 1_{B/F}, 0_{B/F})$ per la proposizione 4.2.16.
Siccome $V$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Boole $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ e $\pi_F$ è un omomorfismo dall'algebra di Boole $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ all'algebra di Boole $(B/F, \wedge_F, \vee_F, \neg_F, 1_{B/F}, 0_{B/F})$, si ha che $V_F = \pi_F \circ V$ è una valutazione delle proposizioni

del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Boole $(B/F, \wedge_F, \vee_F, \neg_F, 1_{B/F}, 0_{B/F})$ per la proposizione 3.3.9.
Si ha che $V_F(\Gamma) = (\pi_F \circ V)(\Gamma) = \pi_F(V(\Gamma)) = \pi_F(X)$.
Siccome $X \subseteq \uparrow X$ per la proposizione 4.2.3, si ha che $\pi_F(X) \subseteq \pi_F(\uparrow X)$.
Si ha quindi che $V_F(\Gamma) = \pi_F(X) \subseteq \pi_F(\uparrow X) = \pi_F(F)$.
Si ha che $1_{B/F} = F$ per la proposizione 4.2.15, allora $\pi_F(F) = \{1_{B/F}\}$.
Si ha quindi che $V_F(\Gamma) = \pi_F(F) = \{1_{B/F}\}$, allora per ogni $\phi \in \Gamma$ si ha che $V_F(\phi) = 1_{B/F}$, quindi $((B/F, \wedge_F, \vee_F, \neg_F, 1_{B/F}, 0_{B/F}), V_F)$ è un modello intuizionista per $\Gamma$. $\square$

# Capitolo 6

# Teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari

In questo capitolo si studia la dimostrabilità del teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è 2-soddisfacibile se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.

## 6.1 Non dimostrabilità in una metateoria classica

Si vuole mostrare che il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari non è dimostrabile utilizzando una generica metateoria classica. In particolare, si vuole mostrare che il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari non è dimostrabile utilizzando la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel.

Una relazione di ordine totale su un insieme è una relazione di ordine parziale sull'insieme tale che ogni coppia di elementi dell'insieme è confrontabile mediante la relazione.

**Definizione 6.1.1** (Relazione di ordine totale)**.** *Una relazione di ordine totale $\leq$ su un insieme $S$ è una relazione di ordine parziale su $S$ che soddisfa la seguente proprietà:*
*(totale)* $\quad x \leq y$ *o* $y \leq x \quad$ *per ogni* $x, y \in S$

**Definizione 6.1.2** (Insieme totalmente ordinato)**.** *Un insieme totalmente ordinato è una struttura algebrica $(S, \leq)$ tale che $S$ è un insieme e $\leq$ è una relazione di ordine totale su $S$.*

Una relazione binaria estende un'altra relazione binaria se tutte le coppie che sono in relazione rispetto alla seconda sono in relazione anche rispetto alla prima.

**Definizione 6.1.3** (Estensione di una relazione binaria)**.** *Siano $R$ e $T$ due relazioni binarie su un insieme $S$. La relazione binaria $T$ estende la relazione binaria $R$ se per ogni $x, y \in S$ si ha che $xRy$ implica $xTy$.*

Data una relazione di ordine parziale su un insieme e dati due elementi dell'insieme non confrontabili mediante la relazione, è possibile estendere la relazione di ordine parziale ad un'altra relazione di ordine parziale mediante la quale i due elementi dell'insieme sono confrontabili.

**Proposizione 6.1.4.** *Sia $P$ un insieme, sia $\leq$ una relazione di ordine parziale su $P$ e siano $a, b \in P$ due elementi tali che $a \not\leq b$ e $b \not\leq a$. Allora esiste una relazione di ordine parziale $\leq'$ su $P$ che estende la relazione di ordine parziale $\leq$ e tale che $a \leq' b$.*

*Dimostrazione.* Si definisce una relazione binaria $T$ su $P$ ponendo $xTy$ se e solo se $x \leq a$ e $b \leq y$.
Si definisce una relazione binaria $\leq'$ su $P$ ponendo $x \leq' y$ se e solo se $x \leq y$ o $xTy$.
Chiaramente la relazione binaria $\leq'$ estende la relazione binaria $\leq$.
Si ha che la relazione d'ordine parziale $\leq$ è in particolare una relazione riflessiva, dunque si ha che $a \leq a$ e che $b \leq b$, quindi si ha che $aTb$, da cui si ha che $a \leq' b$.
Si vuole dimostrare che la relazione binaria $\leq'$ è una relazione di ordine parziale su $P$.
Si vuole dimostrare che la relazione binaria $\leq'$ è riflessiva.
La relaziona binaria $\leq$ è una relazione d'ordine parziale su $P$ e quindi in particolare è riflessiva, siccome la relazione binaria $\leq'$ estende la relazione binaria $\leq$ si ha quindi che la relazione binaria $\leq'$ è riflessiva.
Questo dimostra che la relazione binaria $\leq'$ è riflessiva.
Si vuole dimostrare che la relazione binaria $\leq'$ è antisimmetrica.
Siano $x, y \in P$ due elementi tali che $x \leq' y$ e $y \leq' x$, si vuole dimostrare che $x = y$.
Ci sono quattro casi possibili: ($x \leq y$ e $y \leq x$), ($x \leq y$ e $yTx$), ($xTy$ e $y \leq x$) o ($xTy$ e $yTx$).
Caso ($x \leq y$ e $y \leq x$): siccome $\leq$ è una relazione d'ordine parziale definita su $P$ e quindi in particolare è una relazione riflessiva, si ha che $x = y$.
Caso ($x \leq y$ e $yTx$): si avrebbe che $x \leq y$, che $y \leq a$ e che $b \leq x$; siccome $\leq$ è una relazione di ordine parziale su $P$ e quindi in particolare è una relazione transitiva, si otterrebbe dunque che $b \leq a$, contraddicendo l'ipotesi che $b \not\leq a$. Quindi il caso ($x \leq y$ e $y \leq x$) non si può verificare.
Caso ($xTy$ e $y \leq x$): si avrebbe che $x \leq a$, che $b \leq y$ e che $y \leq x$; siccome $\leq$ è una relazione di ordine parziale su $P$ e quindi in particolare è una relazione transitiva, si otterrebbe dunque che $b \leq a$, contraddicendo l'ipotesi che $b \not\leq a$. Quindi il caso ($xTy$ e $y \leq x$) non si può verificare.
Caso ($xTy$ e $yTx$): si avrebbe che $x \leq a$, che $b \leq y$, che $y \leq a$ e che $b \leq x$; siccome $\leq$ è una relazione di ordine parziale su $P$ e quindi in particolare è una relazione transitiva, si otterrebbe dunque che $b \leq a$, contraddicendo l'ipotesi che $b \not\leq a$. Quindi il caso ($xTy$ e $yTx$) non si può verificare.
Questo dimostra che la relazione binaria $\leq'$ è antisimmetrica.
Si vuole dimostrare che la relazione binaria $\leq'$ è transitiva.
Siano $x, y, z \in P$ tre elementi tali che $x \leq' y$ e $y \leq' z$, si vuole dimostrare che $x \leq' z$.
Ci sono quattro casi possibili: ($x \leq y$ e $y \leq z$), ($x \leq y$ e $yTz$), ($xTy$ e $y \leq z$) o ($xTy$ e $yTz$).
Caso ($x \leq y$ e $y \leq z$): siccome $\leq$ è una relazione di ordine parziale su $P$ e quindi in particolare è transitiva, si ha che $x \leq z$, dunque $x \leq' z$ in quanto la relazione binaria $\leq'$ estende la relazione binaria $\leq$.
Caso ($x \leq y$ e $yTz$): si ha che $x \leq y$, che $y \leq a$ e che $b \leq z$; siccome $\leq$ è una relazione di ordine parziale definita su $P$ e quindi in particolare è una relazione transitiva, si ottiene dunque che $x \leq a$ e che $b \leq z$, quindi si ha che $xTz$, da cui $x \leq' z$.
Caso ($xTy$ e $y \leq z$): si ha che $x \leq a$, che $b \leq y$ e che $y \leq z$; siccome $\leq$ è una relazione di ordine parziale su $P$ e quindi in particolare è una relazione transitiva, si ottiene dunque che $x \leq a$ e che $b \leq z$, quindi si ha che $xTz$, da cui $x \leq' z$.
Caso ($xTy$ e $yTz$): si ha che $x \leq a$, che $b \leq y$, che $y \leq a$ e che $b \leq z$; allora si ha che $xTz$, da cui $x \leq' z$.
Questo dimostra che la relazione binaria $\leq'$ è transitiva.
Questo dimostra che la relazione binaria $\leq'$ è una relazione di ordine parziale su $P$. □

Utilizzando una metateoria classica è possibile estendere una relazione di ordine parziale su un insieme finito ad una relazione di ordine totale sullo stesso insieme.

**Proposizione (LEM) 6.1.5.** *Sia $P$ un insieme finito e sia $\leq$ una relazione di ordine parziale su $P$. Allora esiste una relazione di ordine totale $\leq^*$ su $P$ che estende la relazione di ordine* *parziale* $\leq$.

*Dimostrazione.* Se la relazione di ordine parziale $\leq$ non è una relazione d'ordine totale allora esistono due elementi $a, b \in P$ tali che $a \not\leq b$ e $b \not\leq a$, quindi per la proposizione 6.1.4 è possibile estendere la relazione di ordine parziale $\leq$ ad una relazione di ordine parziale $\leq'$ su $P$ tale che $a \leq' b$.
Siccome l'insieme $P$ è finito, è possibile ripetere l'argomento precedente fino ad estendere la relazione di ordine parziale $\leq$ ad una relazione di ordine totale $\leq^*$ su $P$. $\square$

Utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta si può dimostrare che ogni relazione di ordine parziale su un insieme qualsiasi può essere estesa ad una relazione di ordine totale sull'insieme, questo risultato è noto come teorema di estensione dell'ordine di Szpilrajn. La dimostrazione originale del teorema si trova in [8] ed utilizza il lemma di Zorn, equivalente all'assioma della scelta.

Il teorema di estensione dell'ordine di Szpilrajn si può dimostrare anche in una metateoria classica senza assumere l'assioma di scelta se si assume il teorema di compattezza per la logica predicativa del primo ordine (si veda, ad esempio, [9, pagina 10]).

Utilizzando una metateoria classica ed assumendo anche solo il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari per la logica proposizionale si può dimostrare il teorema di estensione dell'ordine di Szpilrajn.

**Teorema (LEM) 6.1.6** (Estensione dell'ordine)**.** *Sia $P$ un insieme e sia $\leq$ una relazione di ordine parziale su $P$. Se vale il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari allora esiste una relazione di ordine totale $\leq^*$ su $P$ che estende la relazione $\leq$.*

*Dimostrazione.* Si supponga che valga il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari.
Si consideri un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ avente per ogni coppia ordinata $(x, y) \in P^2$ una variabile proposizionale $p_{x,y}$.
Sia $T_{\leq} = \{p_{x,y} \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L}) \mid x, y \in P \text{ e } x \leq y\}$.
Sia $T_{\text{riflessiva}} = \{p_{x,x} \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L}) \mid x \in P\}$.
Sia $T_{\text{antisimmetrica}} = \{\neg(p_{x,y} \wedge p_{y,x}) \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L}) \mid x, y \in P \text{ e } x \neq y\}$.
Sia $T_{\text{transitiva}} = \{(p_{x,y} \wedge p_{y,z}) \to p_{x,z} \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L}) \mid x, y, z \in P\}$.
Sia $T_{\text{totale}} = \{p_{x,y} \vee p_{y,x} \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L}) \mid x, y \in P\}$.
Sia $T = T_{\leq} \cup T_{\text{riflessiva}} \cup T_{\text{antisimmetrica}} \cup T_{\text{transitiva}} \cup T_{\text{totale}}$.
Si ha che $T$ è la teoria delle relazioni di ordine totale su $P$ che estendono la relazione $\leq$.
Sia $T_0 \subseteq_\omega T$.
La teoria $T_0$ coinvolge soltanto un numero finito di proposizioni, ciascuna delle quali coinvolge soltanto un numero finito di elementi di $P$. Sia $P_0$ l'insieme degli elementi di $P$ coinvolti nelle proposizioni di $T_0$, si ha quindi che $P_0$ è finito.
Sia $\leq_0$ la restrizione della relazione di ordine parziale $\leq$ sull'insieme finito $P_0$. Chiaramente si ha che $\leq_0$ è una relazione di ordine parziale su $P_0$.
Siccome $P_0$ è un insieme finito, la relazione di ordine parziale $\leq_0$ su $P_0$ può essere estesa ad una relazione di ordine totale $\leq_0^*$ su $P_0$ per la proposizione 6.1.5.
Si consideri l'algebra di Heyting di due elementi $(\{0,1\}, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$.
Si definisce una valutazione $V_{T_0}$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(\{0,1\}, \wedge, \vee, \to, 1, 0)$ ponendo $V_{T_0}(p_{x,y}) = 1$ se $x \leq_0^* y$ e $V_{T_0}(p_{x,y}) = 0$ altrimenti.
Siccome la relazione $\leq_0^*$ è una relazione di ordine totale su $P_0$, si ha che $V_{T_0}(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in T_0$, allora $((\{0,1\}, \wedge, \vee, \to, 1, 0), V_{T_0})$ è un 2-modello per $T_0$, quindi $T_0$ è 2-soddisfacibile.

Si è dimostrato che se $T_0 \subseteq_\omega T$ allora $T_0$ è 2-soddisfacibile, quindi per il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari si ha che l'insieme $T$ è 2-soddisfacibile, cioè esiste una valutazione $V^*$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(\{0,1\},\wedge,\vee,\rightarrow,1,0)$ tale che $V^*(\phi)=1$ per ogni $\phi \in T$.
Si definisce una relazione binaria $\leq^*$ su $P$ ponendo $x \leq^* y$ se e solo se $V^*(p_{x,y})=1$.
Si vuole dimostrare che la relazione binaria $\leq^*$ è una relazione di ordine totale su $P$ che estende la relazione $\leq$. Si vuole dimostrare che la relazione binaria $\leq^*$ è una relazione di ordine parziale su $P$.
Si vuole dimostrare che la relazione binaria $\leq^*$ è riflessiva.
Per ogni $x \in P$ si ha che $p_{x,x} \in T_{\text{riflessiva}} \subseteq T$, allora $V^*(p_{x,x})=1$, quindi $x \leq^* x$.
Si ha quindi che la relazione binaria $\leq^*$ è riflessiva.
Si vuole dimostrare che la relazione binaria $\leq^*$ è antisimmetrica.
Sia $-$ il complemento su $(\{0,1\},\wedge,\vee,\rightarrow,1,0)$.
Se $x \leq^* y$ e $y \leq^* x$ allora $V^*(p_{x,y})=1$ e $V^*(p_{y,x})=1$, quindi
$V^*(\neg(p_{x,y}\wedge p_{y,x})) = -V^*(p_{x,y}\wedge p_{y,x}) = -(V^*(p_{x,y})\wedge V^*(p_{y,x})) = -(1\wedge 1) = -1 = 0$, dunque $\neg(p_{x,y}\wedge p_{y,x})) \notin T$, da cui $\neg(p_{x,y}\wedge p_{y,x})) \notin T_{\text{antisimmetrica}}$, perciò $x=y$.
Si ha quindi che la relazione binaria $\leq^*$ è antisimmetrica.
Si vuole dimostrare che la relazione binaria $\leq^*$ è transitiva.
Se $x \leq^* y$ e $y \leq^* z$ allora $V^*(p_{x,y})=1$ e $V^*(p_{y,z})=1$, quindi

$$V^((p_{x,y}\wedge p_{y,z}) \rightarrow p_{x,z}) = V^*((p_{x,y}\wedge p_{y,z})) \rightarrow V^*(p_{x,z}) = (V^*(p_{x,y})\wedge V^*(p_{y,z})) \rightarrow V^*(p_{x,z}) = \\ = (1\wedge 1) \rightarrow V^*(p_{x,z}) = 1 \rightarrow V^*(p_{x,z}).$$

Si ha che $(p_{x,y}\wedge p_{y,z}) \rightarrow p_{x,z} \in T_{\text{transitiva}} \subseteq T$, allora $V^*((p_{x,y}\wedge p_{y,z}) \rightarrow p_{x,z})=1$.
Dal fatto che $V^((p_{x,y}\wedge p_{y,z}) \rightarrow p_{x,z}) = 1 \rightarrow V^*(p_{x,z})$ e che $V^*((p_{x,y}\wedge p_{y,z}) \rightarrow p_{x,z})=1$ segue che $1 = 1 \rightarrow V^*(p_{x,z})$, allora $1 \leq 1 \rightarrow V^*(p_{x,z})$, cioè $1\wedge 1 \leq V^*(p_{x,z})$, ovvero $1 \leq V^*(p_{x,z})$, da cui $V^*(p_{x,z})=1$, perciò $x \leq^* z$.
Si ha quindi che la relazione binaria $\leq^*$ è transitiva.
Si ha quindi che la relazione binaria $\leq^*$ è una relazione di ordine parziale su $P$.
Si vuole dimostrare che la relazione di ordine parziale $\leq^*$ è una relazione di ordine totale su $P$.
Per ogni $x,y \in P$ si ha che $p_{x,y}\vee p_{y,x} \in T_{\text{totale}} \subseteq T$, allora $V^*(p_{x,y}\vee p_{y,x})=1$, cioè $V^(p_{x,y}) \vee V^*(p_{y,x})=1$, da cui $V^(p_{x,y})=1$ o $V^*(p_{y,x})=1$ perchè $V^*$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting di due elementi $(\{0,1\},\wedge,\vee,\rightarrow,1,0)$, quindi $x \leq^* y$ o $y \leq^* x$.
Si ha quindi che la relazione di ordine parziale $\leq^*$ è una relazione di ordine totale su $P$.
Si vuole dimostrare che la relazione di ordine totale $\leq^*$ estende la relazione $\leq$.
Se $x \leq y$ allora $p_{x,y} \in T_{\leq} \subseteq T$, quindi $V^*(p_{x,y})=1$, dunque $x \leq^* y$.
Si ha quindi che la relazione di ordine totale $\leq^*$ estende la relazione $\leq$.

□

Utilizzando una metateoria classica ed assumento il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari si può dimostrare che su qualsiasi insieme esiste una relazione di ordine totale.

**Teorema (LEM) 6.1.7.** *Sia $S$ un insieme. Se vale il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari allora esiste una relazione di ordine totale $\leq^*$ su $S$.*

*Dimostrazione.* Si supponga che valga il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari.
Si definisce una relazione binaria $I$ su $S$ ponendo $xIy$ se e solo se $x=y$.
Chiaramente la relazione binaria $I$ è riflessiva, antisimmetrica e transitiva, quindi $I$ è una rela-

zione di ordine parziale su $S$.
Per il teorema 6.1.6 esiste una relazione di ordine totale $\leq^*$ su $S$ che estende la relazione $I$. $\square$

Uno strumento fondamentale per mostrare che il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari non è dimostrabile utilizzando una generica metateoria classica è costituito dagli insiemi amorfi.

**Definizione 6.1.8** (Insieme amorfo)**.** *Un insieme amorfo è un insieme infinito che non è l'unione disgiunta di due suoi sottoinsiemi infiniti.*

Il modello base di Fraenkel (si veda [9, capitolo 4]) è un modello della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel con atomi, una variante della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel che ammette oggetti che non sono insiemi, detti appunto atomi, i quali non contengono alcun elemento. Si tratta di un modello di permutazione che non soddisfa l'assioma della scelta. L'insieme degli atomi del modello base di Fraenkel è un insieme amorfo.
Utilizzando il teorema di immersione di Jech-Sochor (si veda [9, capitolo 6]) si può immergere l'insieme amorfo del modello di permutazione base di Fraenkel in un modello simmetrico della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel.
Si ha quindi che l'esistenza di un insieme amorfo è relativamente consistente con la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel.

Si utilizza la notazione $A \sqcup B$ per indicare l'unione disgiunta degli insiemi $A$ e $B$.

La differenza insiemistica tra un insieme amorfo ed un suo sottoinsieme finito è un insieme amorfo.

**Proposizione 6.1.9.** *Sia $A$ un insieme amorfo e sia $B \subseteq_\omega A$. Allora $A \smallsetminus B$ è un insieme amorfo.*

*Dimostrazione.* Siccome $A$ è un insieme infinito e $B$ è un insieme finito si ha che $A \smallsetminus B$ è un insieme infinito.
Se $A \smallsetminus B$ fosse l'unione disgiunta di due suoi sottoinsiemi infiniti $C_1$ e $C_2$ allora si avrebbe che $A = (A \smallsetminus B) \sqcup B = (C_1 \sqcup C_2) \sqcup B = C_1 \sqcup (C_2 \sqcup B)$, dunque $A$ sarebbe l'unione disgiunta dei due suoi sottoinsiemi infiniti $C_1$ e $C_2 \sqcup B$, in contraddizione con il fatto che $A$ è un insieme amorfo.
Si ha quindi che $A \smallsetminus B$ non è l'unione disgiunta di due suoi sottoinsiemi infiniti.
Si ha quindi che $A \smallsetminus B$ è un insieme amorfo. $\square$

Utilizzando una metateoria classica si può dimostrare che non può esistere una relazione di ordine totale su un insieme amorfo.

**Teorema (LEM) 6.1.10.** *Non esiste una relazione di ordine totale su un insieme amorfo.*

*Dimostrazione.* Si supponga che esista una relazione di ordine totale $\leq$ su un insieme amorfo $A$.
Per ogni $x \in A$ si potrebbe definire gli insiemi $A_{\leq x} = \{y \in A \mid y \leq x\}$ e $A_{>x} = A \smallsetminus A_{\leq x}$.
Si avrebbe che $A = A_{\leq x} \sqcup A_{>x}$ ed essendo $A$ un insieme amorfo si avrebbe quindi che almeno uno tra gli insiemi $A_{\leq x}$ e $A_{>x}$ dovrebbe essere finito.
Se gli insiemi $A_{\leq x}$ e $A_{>x}$ fossero entrambi finiti si avrebbe che $A = A_{\leq x} \sqcup A_{>x}$ sarebbe un insieme finito, in contraddizione con il fatto che $A$ è un insieme amorfo e quindi infinito.
Si avrebbe quindi che esattamente uno tra gli insiemi $A_{\leq x}$ e $A_{>x}$ dovrebbe essere finito.
Si potrebbe definire gli insiemi $A_{\leq} = \{x \in A \mid A_{\leq x} \text{ è finito}\}$ e $A_{>} = \{x \in A \mid A_{>x} \text{ è finito}\}$.
Siccome esattamente uno tra gli insiemi $A_{\leq x}$ e $A_{>x}$ dovrebbe essere finito, si avrebbe che

$A = A_{\leq} \sqcup A_{>}$ ed essendo $A$ un insieme amorfo si avrebbe quindi che almeno uno tra gli insiemi $A_{\leq}$ e $A_{>}$ dovrebbe essere finito.
Se gli insiemi $A_{\leq}$ e $A_{>}$ fossero entrambi finiti si avrebbe che $A = A_{\leq} \sqcup A_{>}$ sarebbe un insieme finito, in contraddizione con il fatto che $A$ è un insieme amorfo e quindi infinito.
Si avrebbe quindi che esattamente uno tra gli insiemi $A_{\leq}$ e $A_{>}$ dovrebbe essere finito.
Non sarebbe restrittivo supporre che ad essere finito fosse l'insieme $A_{>}$ (il caso in cui ad essere finito fosse l'insieme $A_{\leq}$ sarebbe analogo).
Per ogni $x \in A_{\leq}$ l'insieme $A_{\leq x}$ sarebbe finito, si potrebbe quindi definire l'insieme $S = \{|A_{\leq x}| \in \mathbb{N} \mid x \in A_{\leq}\} \subseteq \mathbb{N}$.
Si potrebbe definire una funzione $f : A_{\leq} \to S$ ponendo $f(x) = |A_{\leq x}|$.
Dati $x, y \in A_{\leq}$ con $x \neq y$ si avrebbe che $x \leq y$ o $y \leq x$ in quanto la relazione $\leq$ sarebbe una relazione di ordine totale su $A$.
Non sarebbe restrittivo supporre che $x \leq y$ (il caso in cui $y \leq x$ sarebbe analogo).
Si avrebbe che $A_{\leq x} \subseteq A_{\leq y}$: infatti se fosse che $z \in A_{\leq x}$ allora si avrebbe che $z \leq x$, essendo $x \leq y$ si avrebbe che $z \leq y$ in quanto la relazione di ordine totale $\leq$ sarebbe in particolare una relazione transitiva, quindi si avrebbe che $z \in A_{\leq y}$.
Si avrebbe che $A_{\leq x} \neq A_{\leq y}$: infatti si avrebbe che $y \leq y$ in quanto la relazione di ordine totale $\leq$ è in particolare una relazione riflessiva, da cui seguirebbe che $y \in A_{\leq y}$; inoltre si avrebbe che $y \notin A_{\leq x}$ in quanto non potrebbe essere che $y \leq x$, difatti se fosse che $y \leq x$ si avrebbe che $x = y$ in quanto la relazione di ordine totale $\leq$ sarebbe in particolare una relazione antisimmetrica, contraddicendo il fatto che $x \neq y$.
Si avrebbe quindi che $A_{\leq x} \subsetneq A_{\leq y}$, da cui seguirebbe che $|A_{\leq x}| \neq |A_{\leq y}|$.
La funzione $f$ sarebbe quindi iniettiva, in quanto se fosse $f(x) = f(y)$, ovvero $|A_{\leq x}| = |A_{\leq y}|$, allora dovrebbe essere che $x = y$.
La funzione $f$ sarebbe inoltre suriettiva, in quanto per ogni $n \in S$ esisterebbe $x \in A_{\leq}$ tale che $|A_{\leq x}| = n$, dunque per ogni $n \in S$ esisterebbe $x \in A_{\leq}$ tale che $f(x) = n$.
La funzione $f$ sarebbe quindi biiettiva, in quanto iniettiva e suriettiva.
Essendo $A$ un insieme amorfo e $A_{>} \subseteq_{\omega} A$, l'insieme $A_{\leq} = A \smallsetminus A_{>}$ sarebbe amorfo per la proposizione 6.1.9.
Essendo $A_{\leq}$ un insieme amorfo ed essendo $f$ una funzione biiettiva da $A_{\leq}$ a $S$, l'insieme $S$ sarebbe amorfo.
Si potrebbe definire una funzione $g : S \to \mathbb{N}$ ponendo $g(n) = |\{m \in S \mid m < n\}|$.
Chiaramente si avrebbe che $g$ è una funzione iniettiva.
Essendo l'insieme $S \subseteq \mathbb{N}$ amorfo e quindi in particolare infinito, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esisterebbe $n \in S$ tale che $g(n) = k$, quindi si avrebbe che $g$ è una funzione suriettiva.
La funzione $g$ sarebbe quindi biiettiva, in quanto iniettiva e suriettiva.
Essendo $S$ un insieme amorfo ed essendo $g$ una funzione biiettiva da $S$ a $\mathbb{N}$, l'insieme $\mathbb{N}$ sarebbe amorfo, contraddicendo il fatto che $\mathbb{N}$ è l'unione disgiunta di due suoi sottoinsiemi infiniti (ad esempio, i numeri naturali pari ed i numeri naturali dispari).
Si ha quindi che non esiste una relazione di ordine totale su un insieme amorfo. $\square$

Se si suppone che la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel sia consistente si ha che la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel con l'esistenza di un insieme amorfo è consistente. Utilizzando la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel ed assumendo il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari si potrebbe dimostrare che esiste una relazione di ordine totale su un insieme amorfo per il teorema 6.1.7, contraddicendo il fatto che non esiste una relazione di ordine totale su un insieme amorfo per il teorema 6.1.10.
Questo mostra che utilizzando la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel non è possibile dimostrare il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari.

L'assioma della scelta numerabile afferma che data una famiglia in biiezione con $\mathbb{N}$ di insiemi non vuoti $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ esiste una funzione $f : \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ tale che $f(n) \in S_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Si vuole dimostrare che la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel con assioma della scelta numerabile ed esistenza di un insieme amorfo non è consistente.
Sia $S$ un insieme infinito.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che l'insieme
$S_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in S^n \mid (x_i = x_j \text{ implica } i = j) \text{ per ogni } i, j \in \{1, \ldots, n\})\}$ è non vuoto perchè l'insieme $S$ è infinito.
L'assioma della scelta numerabile garantisce l'esistenza di una funzione $f : \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $f(n) \in S_n$.
Si definisce induttivamente una funzione $g : \mathbb{N} \to S$ ponendo
$g(0) = (f(1))(1)$ e $g(n) = (f(n + 1))(m_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dove
$m_n = \min\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid (f(n + 1))(i) \neq g(j) \text{ per ogni } j \in \{0, \ldots, n - 1\}\}$.
La funzione $g$ è ben definita in quanto $f(1)$ è una lista contenente esattamente un elemento di $S$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che l'insieme $\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid (f(n+1))(i) \neq g(j) \text{ per ogni } j \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ è non vuoto in quanto $f(n + 1)$ è una lista contenente esattamente $n + 1$ elementi distinti di $S$.
La funzione $g$ è iniettiva in quanto se $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ con $n_1 < n_2$ allora
$g(n_2) = (f(n_2 + 1))(m_{n_2}) \neq g(n_1)$.
Si definisce l'insieme $A = \{g(2n) \in S \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq S$, siccome la funzione $g$ è iniettiva si ha che l'insieme $A$ è infinito.
Si definisce l'insieme $B = \{g(2n + 1) \in S \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq S$, siccome la funzione $g$ è iniettiva si ha che l'insieme $B$ è infinito.
Siccome la funzione $g$ è iniettiva si ha che $A \cap B = \varnothing$, allora $B \subseteq S \smallsetminus A$, quindi l'insieme $S \smallsetminus A$ è infinito.
Si ha che $S = (S \smallsetminus A) \sqcup A$, quindi l'insieme $S$ è l'unione disgiunta di due suoi sottoinsiemi infiniti.
Si è quindi dimostrato, utilizzando la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel con assioma della scelta numerabile, che non esistono insiemi amorfi, dunque la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel con assioma della scelta numerabile ed esistenza di un insieme amorfo non è consistente.
Si ha quindi che la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel con assioma della scelta ed esistenza di un insieme amorfo non è consistente, l'argomento utilizzato per provare la non dimostrabilità del teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari utilizzando la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel (ovvero il fatto che tale teorema consentirebbe di definire una relazione di ordine totale su un insieme amorfo, sul quale non può essere definita una relazione di ordine totale) non può quindi essere ripetuto per provare la non dimostrabilità del teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta.
Come si vedrà nella sezione 6.2, il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari può essere dimostrato utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta.

## 6.2 Dimostrazione in una metateoria classica con assioma della scelta

Utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta si può dimostrare il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è 2-soddisfacibile se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.

Una dimostrazione standard del teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari si basa sull'utilizzo del lemma di Zorn, equivalente all'assioma della scelta, per provare l'esistenza di un opportuno ultrafiltro sull'algebra di Boole dei sottoinsiemi finiti di $\Gamma$, il quale viene utilizzato per costruire l'ultraprodotto dei modelli dei sottoinsiemi finiti di $\Gamma$, che è a sua volta un modello per $\Gamma$ (si veda [10, capitolo 5, sezione 4]).

Tuttavia, dopo aver dimostrato il teorema di compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari e dopo aver studiato le relazioni tra soddisfacibilità e 2-soddisfacibilità, è immediato dimostrare il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari utilizzando tali strumenti.

Chiaramente ogni 2-modello per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è un 2-modello per qualsiasi sottoinsieme finito di $\Gamma$, quindi se $\Gamma$ è 2-soddisfacibile allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.

**Teorema 6.2.1.** *Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è 2-soddisfacibile allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.*

*Dimostrazione.* Sia $\Gamma$ 2-soddisfacibile, allora esiste un 2-modello $((\{0,1\},\wedge,\vee,\rightarrow,1,0),V)$ per $\Gamma$, ovvero esiste una valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting di due elementi $(\{0,1\},\wedge,\vee,\rightarrow,1,0)$ tale che $V(\phi)=1$ per ogni $\phi\in\Gamma$.
Sia $\Gamma_0 \subseteq_\omega \Gamma$, si ha che $V(\phi)=1$ per ogni $\phi\in\Gamma_0$, quindi $((\{0,1\},\wedge,\vee,\rightarrow,1,0),V)$ è un 2-modello per $\Gamma_0$, dunque $\Gamma_0$ è 2-soddisfacibile. $\square$

Utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta si può dimostrare che se ogni sottoinsieme finito di un insieme $\Gamma$ di proposizioni di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è 2-soddisfacibile allora $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.

**Teorema (LEM+AC) 6.2.2.** *Se ogni sottoinsieme finito di un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è 2-soddisfacibile allora $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.*

*Dimostrazione.* Sia $I$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\Gamma$ e si supponga che ogni $i\in I$ sia 2-soddisfacibile, allora ogni $i\in I$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 4.1.1, quindi ogni $i\in I$ è soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 4.1.2, dunque $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 5.1.11, da cui $\Gamma$ è 2-soddisfacibile per il teorema 4.3.2. $\square$

Utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta, l'ipotesi del teorema 6.2.2, ovvero che ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sia 2-soddisfacibile, può essere rimpiazzata dall'ipotesi che ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sia soddisfacibile intuizionisticamente (rispettivamente classicamente). Infatti, se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ fosse soddisfacibile intuizionisticamente (rispettivamente classicamente) allora $\Gamma$ sarebbe soddisfacibile intuizionisticamente (rispettivamente classicamente) per il teorema 5.1.11 (rispettivamente 5.1.14), quindi $\Gamma$ sarebbe 2-soddisfacibile per il teorema 4.3.2 (rispettivamente 4.3.3).

I teoremi 6.2.1 e 6.2.2 rappresentano le due implicazioni del teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è 2-soddisfacibile se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.

**Teorema (LEM+AC) 6.2.3** (2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari)**.** *Un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è 2-soddisfacibile se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.*

*Dimostrazione.* Se $\Gamma$ è 2-soddisfacibile allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è 2-soddisfacibile per il teorema 6.2.1.
Se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è 2-soddisfacibile allora $\Gamma$ è 2-soddisfacibile per il teorema 6.2.2. $\square$

# Capitolo 7

# Teorema di N-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari

In questo capitolo si studia la dimostrabilità del teorema di N-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente (rispettivamente classicamente) se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente (rispettivamente classicamente).

## 7.1 Non dimostrabilità in una metateoria classica

Si vuole mostrare che il teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi arbitrari, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente, non è dimostrabile utilizzando una generica metateoria classica.

Si supponga che il teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi arbitrari sia dimostrabile utilizzando una generica metateoria classica.
Si potrebbe allora dimostrare il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari utilizzando una generica metateoria classica.
Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ fosse 2-soddisfacibile allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sarebbe 2-soddisfacibile per il teorema 6.2.1.
Viceversa, se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ fosse 2-soddisfacibile allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 4.1.1, quindi $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi arbitrari, dunque $\Gamma$ sarebbe 2-soddisfacibile per il teorema 4.2.18.
Si sarebbe così dimostrato il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari utilizzando una generica metateoria classica, tuttavia si è visto nella sezione 6.1 che questo teorema non può essere dimostrato utilizzando una generica metateoria classica.
Si ha quindi che il teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi arbitrari non è dimostrabile utilizzando una generica metateoria classica.

Si vuole mostrare che il teorema di N-compattezza per modelli classici e linguaggi arbitrari, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile classicamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente, non è dimostrabile utilizzando una generica metateoria classica.

Si supponga che il teorema di N-compattezza per modelli classici e linguaggi arbitrari sia dimostrabile utilizzando una generica metateoria classica.
Si potrebbe allora dimostrare il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari utilizzando una generica metateoria classica.
Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ fosse 2-soddisfacibile allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sarebbe 2-soddisfacibile per il teorema 6.2.1.
Viceversa, se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ fosse 2-soddisfacibile allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile classicamente per il teorema 4.1.3, quindi $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile classicamente per il teorema di N-compattezza per modelli classici e linguaggi arbitrari, dunque $\Gamma$ sarebbe 2-soddisfacibile per il teorema 4.2.19.
Si sarebbe così dimostrato il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari utilizzando una generica metateoria classica, tuttavia si è visto nella sezione 6.1 che questo teorema non può essere dimostrato utilizzando una generica metateoria classica.
Si ha quindi che il teorema di N-compattezza per modelli classici e linguaggi arbitrari non è dimostrabile utilizzando una generica metateoria classica.

## 7.2 Dimostrazione in una metateoria classica con assioma della scelta

Utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta si può dimostrare il teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi arbitrari, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.

Chiaramente ogni N-modello intuizionista per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è un N-modello intuizionista per qualsiasi sottoinsieme finito di $\Gamma$, quindi se $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.

**Teorema 7.2.1.** *Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.*

*Dimostrazione.* Sia $\Gamma$ N-soddisfacibile intuizionisticamente, allora esiste un N-modello intuizionista $((H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0), V)$ per $\Gamma$, ovvero esistono un'algebra di Heyting non banale numerabile $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ ed una valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ tale che $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma$.
Sia $\Gamma_0 \subseteq_\omega \Gamma$, si ha che $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma_0$, quindi $((H, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0), V)$ è un N-modello intuizionista per $\Gamma_0$, dunque $\Gamma_0$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente. □

Utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta si può dimostrare che se ogni sottoinsieme finito di un insieme $\Gamma$ di proposizioni di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.

**Teorema (LEM+AC) 7.2.2.** *Se ogni sottoinsieme finito di un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.*

*Dimostrazione.* Sia $I$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\Gamma$ e si supponga che ogni $i \in I$ sia N-soddisfacibile intuizionisticamente, allora ogni $i \in I$ è soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 4.1.2, quindi $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 5.1.11, dunque $\Gamma$ è 2-soddisfacibile per il teorema 4.3.2, da cui $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 4.1.1. □

Utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta, l'ipotesi del teorema 7.2.2, ovvero che ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sia N-soddisfacibile intuizionisticamente, può essere rimpiazzata dall'ipotesi che ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sia soddisfacibile intuizionisticamente.
Infatti, se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ fosse soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ sarebbe soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 5.1.11, quindi $\Gamma$ sarebbe 2-soddisfacibile per il teorema 4.3.2, dunque $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 4.1.1.

I teoremi 7.2.1 e 7.2.2 rappresentano le due implicazioni del teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi arbitrari, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.

**Teorema (LEM+AC) 7.2.3** (N-compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi arbitrari)**.** *Un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.*

*Dimostrazione.* Se $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è 2-soddisfacibile per il teorema 7.2.1.
Se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è 2-soddisfacibile allora $\Gamma$ è 2-soddisfacibile per il teorema 7.2.2. □

Utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta si può dimostrare il teorema di N-compattezza per modelli classici e linguaggi arbitrari, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile classicamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente.

Chiaramente ogni N-modello classico per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è un N-modello classico per qualsiasi sottoinsieme finito di $\Gamma$, quindi se $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente.

**Teorema 7.2.4.** *Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile classicamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente.*

*Dimostrazione.* Sia $\Gamma$ N-soddisfacibile classicamente, allora esiste un N-modello classico $((B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0), V)$ per $\Gamma$, ovvero esistono un'algebra di Boole non banale numerabile $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ ed una valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Boole $(B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0)$ tale che $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma$.
Sia $\Gamma_0 \subseteq_\omega \Gamma$, si ha che $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma_0$, quindi $((B, \wedge, \vee, \neg, 1, 0), V)$ è un N-modello classico per $\Gamma_0$, dunque $\Gamma_0$ è N-soddisfacibile classicamente. □

Utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta si può dimostrare che se ogni sottoinsieme finito di un insieme $\Gamma$ di proposizioni di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente.

**Teorema (LEM+AC) 7.2.5.** *Se ogni sottoinsieme finito di un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente.*

*Dimostrazione.* Sia $I$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\Gamma$ e si supponga che ogni $i \in I$ sia N-soddisfacibile classicamente, allora ogni $i \in I$ è soddisfacibile classicamente per il teorema 4.1.4, quindi $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente per il teorema 5.1.14, dunque $\Gamma$ è 2-soddisfacibile per il teorema 4.3.3, da cui $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente per il teorema 4.1.3. □

Utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta, l'ipotesi del teorema 7.2.5, ovvero che ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sia N-soddisfacibile classicamente, può essere rimpiazzata dall'ipotesi che ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sia soddisfacibile classicamente.
Infatti, se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ fosse soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ sarebbe soddisfacibile classicamente per il teorema 5.1.14, quindi $\Gamma$ sarebbe 2-soddisfacibile per il teorema 4.3.3, dunque $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile classicamente per il teorema 4.1.3.

I teoremi 7.2.4 e 7.2.5 rappresentano le due implicazioni del teorema di N-compattezza per modelli classici e linguaggi arbitrari, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile classicamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente.

**Teorema (LEM+AC) 7.2.6** (N-compattezza per modelli classici e linguaggi arbitrari)**.** *Un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *è N-soddisfacibile classicamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di* $\Gamma$ *è N-soddisfacibile classicamente.*

*Dimostrazione.* Se $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente per il teorema 7.2.4.
Se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente per il teorema 7.2.5. □

# Capitolo 8

# Teorema di compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili

In questo capitolo si studia la dimostrabilità del teorema di compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente (rispettivamente classicamente) se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente (rispettivamente classicamente).

Si presenta inoltre un ulteriore risultato, ovvero il fatto che se tutti i sottoinsiemi di un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ sono soddisfacibili intuizionisticamente (rispettivamente classicamente) allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente (rispettivamente classicamente).

## 8.1 Dimostrazione in una metateoria intuizionista

Si vuole dimostrare il teorema di compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi numerabili, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente.

Avendo dimostrato il teorema di compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi arbitrari, è chiaro che si può dimostrare il teorema di compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi numerabili.

**Teorema 8.1.1** (Compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi numerabili)**.** *Un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente.*

*Dimostrazione.* Si tratta del teorema 5.1.12 ristretto a linguaggi numerabili. □

Si vuole dimostrare il teorema di compattezza per modelli classici e linguaggi numerabili, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è soddisfacibile classicamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è soddisfacibile classicamente.

Avendo dimostrato il teorema di compattezza per modelli classici e linguaggi arbitrari, è chiaro che si può dimostrare il teorema di compattezza per modelli classici e linguaggi numerabili.

**Teorema 8.1.2** (Compattezza per modelli classici e linguaggi numerabili)**.** *Un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale numerabile* $\mathcal{L}$ *è soddisfacibile classicamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di* $\Gamma$ *è soddisfacibile classicamente.*

*Dimostrazione.* Si tratta del teorema 5.1.15 ristretto a linguaggi numerabili. $\square$

## 8.2 Un risultato più forte in una metateoria intuizionista

Si vuole dimostrare che se tutti i sottoinsiemi di un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ sono soddisfacibili intuizionisticamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.

Si osservi che dalla definizione 1.1.1 di linguaggio proposizionale segue che un linguaggio proposizionale è numerabile se e solo se l'insieme delle sue variabili proposizionali è numerabile.
Si vuole dimostrare che se un linguaggio proposizionale è numerabile allora l'insieme delle sue proposizioni è numerabile.

L'insieme $\mathbb{N}^2$ è numerabile.

**Proposizione 8.2.1.** *Si può definire una funzione iniettiva* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$*. In particolare, si ha che l'insieme* $\mathbb{N}^2$ *è numerabile.*

*Dimostrazione.* Siano $p, q \in \mathbb{N}$ due numeri primi distinti.
Si definisce una funzione $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ponendo $f(n, m) = p^n q^m$ .
Si vuole dimostrare che la funzione $f$ è iniettiva.
Se $f(n_1, n_2) = f(m_1, m_2)$ allora $p^{n_1} q^{n_2} = p^{m_1} q^{m_2}$, quindi $p^{n_1 - m_1} = q^{m_2 - n_2}$, dunque $n_1 - m_1 = 0$ e $m_2 - n_2 = 0$, cioè $n_1 = m_1$ e $n_2 = m_2$, da cui $(n_1, n_2) = (m_1, m_2)$.
Si ha quindi che la funzione $f$ è iniettiva.
In particolare, si ha che l'insieme $\mathbb{N}^2$ è numerabile. $\square$

Più in generale, per ogni $k \in \mathbb{N}$ l'insieme $\mathbb{N}^k$ è numerabile.

**Proposizione 8.2.2.** *Si può definire per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *una funzione iniettiva* $f_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$*. In particolare, si ha che per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *l'insieme* $\mathbb{N}^k$ *è numerabile.*

*Dimostrazione.* Si definisce una funzione $f_0 : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$.
Chiaramente si ha che la funzione $f_0$ è iniettiva perchè $\mathbb{N}^0 = \{\varnothing\}$.
Si definisce una funzione $f_1 : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}$ ponendo $f_1(n_1) = n_1$.
Chiaramente si ha che la funzione $f_1$ è iniettiva perchè è l'identità su $\mathbb{N}^1$.
Invocando la proposizione 8.2.1 si definisce una funzione iniettiva $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.
Si definisce induttivamente per ogni $k \geq 2$ una funzione $f_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ponendo
$f_k(n_1, \ldots, n_k) = f(f_{k-1}(n_1, \ldots, n_{k-1}), n_k)$.
Si vuole dimostrare per induzione su $k$ che per ogni $k \geq 2$ la funzione $f_k$ è iniettiva.
Base dell'induzione: se $f_2(n_1, n_2) = f_2(m_1, m_2)$ allora $f(f_1(n_1), n_2) = f(f_1(m_1), m_2)$, quindi $(f_1(n_1), n_2) = (f_1(m_1), m_2)$ perchè la funzione $f$ è iniettiva, cioè $f_1(n_1) = f_1(m_1)$ e $n_2 = m_2$, dunque $n_1 = m_1$ perchè la funzione $f_1$ è iniettiva, cioè $(n_1, n_2) = (m_1, m_2)$; si ha quindi che la funzione $f_2$ è iniettiva.
Passo induttivo: si supponga che la funzione $f_k$ sia iniettiva, si vuole dimostrare che la funzione $f_{k+1}$ è iniettiva; se $f_{k+1}(n_1, \ldots, n_{k+1}) = f_{k+1}(m_1, \ldots, m_{k+1})$ allora
$f(f_k(n_1, \ldots, n_k), n_{k+1}) = f(f_k(m_1, \ldots, m_k), m_{k+1})$, quindi
$(f_k(n_1, \ldots, n_k), n_{k+1}) = (f_k(m_1, \ldots, m_k), m_{k+1})$ perchè la funzione $f$ è iniettiva, cioè

$f_k(n_1, \dots, n_k) = f_k(m_1, \dots, m_k)$ e $n_{k+1} = m_{k+1}$, dunque $(n_1, \dots, n_k) = (m_1, \dots, m_k)$ e $n_{k+1} = m_{k+1}$ perchè la funzione $f_k$ è iniettiva, da cui $(n_1, \dots, n_{k+1}) = (m_1, \dots, m_{k+1})$; si ha quindi che la funzione $f_{k+1}$ è iniettiva.
Si ha quindi che per ogni $k \geq 2$ la funzione $f_k$ è iniettiva.
Si ha quindi che per ogni $k \in \mathbb{N}$ la funzione $f_k$ è iniettiva.
In particolare, si ha che per ogni $k \in \mathbb{N}$ l'insieme $\mathbb{N}^k$ è numerabile. □

L'insieme delle liste di numeri naturali è numerabile.

**Proposizione 8.2.3.** *Sia $\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$. Si può definire una funzione iniettiva $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$. In particolare, si ha che l'insieme $\mathbb{N}^*$ è numerabile.*

*Dimostrazione.* Invocando la proposizione 8.2.2 si definsice per ogni $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ una funzione iniettiva $f_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.
Si definisce una funzione $l : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ che associa ad ogni elemento $x \in \mathbb{N}^*$ l'unico numero naturale $l(x) \in \mathbb{N}$ tale che $x \in \mathbb{N}^{l(x)}$.
Si definisce una funzione $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ ponendo $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } l(x) = 0 \\ f_2(f_{l(x)}(x), l(x)) + 1 & \text{se } l(x) \geq 1. \end{cases}$
Si vuole dimostrare che la funzione $g$ è iniettiva.
Si supponga che $g(x) = g(y)$.
Se $g(x) = g(y) = 0$ allora $l(x) = 0$ e $l(y) = 0$, quindi $x = \varnothing$ e $y = \varnothing$, dunque $x = y$.
Se $g(x) = g(y) \geq 1$ allora $f_2(f_{l(x)}(x), l(x)) + 1 = f_2(f_{l(y)}(y), l(y)) + 1$, quindi $f_2(f_{l(x)}(x), l(x)) = f_2(f_{l(y)}(y), l(y))$, dunque $(f_{l(x)}(x), l(x)) = (f_{l(y)}(y), l(y))$ perchè la funzione $f_2$ è iniettiva, cioè $f_{l(x)}(x) = f_{l(y)}(y)$ e $l(x) = l(y)$, da cui $f_{l(x)}(x) = f_{l(x)}(y)$, perciò $x = y$ perchè la funzione $f_{l(x)}$ è iniettiva.
Si ha quindi che la funzione $g$ è iniettiva.
In particolare, si ha che l'insieme $\mathbb{N}^*$ è numerabile. □

L'insieme delle proposizioni di un linguaggio proposizionale numerabile è numerabile.

**Proposizione 8.2.4.** *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio proposizionale numerabile. Allora l'insieme Prop($\mathcal{L}$) è numerabile.*

*Dimostrazione.* Siccome il linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è numerabile, esiste una funzione iniettiva $h : \mathcal{L} \to \mathbb{N}$.
Siano $\mathcal{L}^* = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^k$ e $\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$.
Si definisce una funzione $l : \mathcal{L}^* \to \mathbb{N}$ che associa ad ogni elemento $x \in \mathcal{L}^*$ l'unico numero naturale $l(x) \in \mathbb{N}$ tale che $x \in \mathcal{L}^{l(x)}$.
Si definisce una funzione $h^* : \mathcal{L}^* \to \mathbb{N}^*$ ponendo $h^*(x_1, \dots, x_{l(x)}) = (h(x_1), \dots, h(x_{l(x)}))$.
Si vuole dimostrare che la funzione $h^*$ è iniettiva.
Se $h^*(x_1, \dots, x_{l(x)}) = h^*(y_1, \dots, y_{l(y)})$ allora $(h(x_1), \dots, h(x_{l(x)})) = (h(y_1), \dots, h(y_{l(y)}))$, quindi $(x_1, \dots, x_{l(x)}) = (y_1, \dots, y_{l(y)})$ perchè la funzione $h$ è iniettiva.
Si ha quindi che la funzione $h^*$ è iniettiva.
Invocando la proposizione 8.2.3 si definisce una funzione iniettiva $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$.
Si definisce una funzione $i : \mathcal{L}^* \to \mathbb{N}$ ponendo $i(x) = (g \circ h^*)(x)$, si ha che la funzione $i$ è iniettiva perchè è la composizione delle funzioni iniettive $g$ e $h^*$.
Chiaramente si ha che $\text{Prop}(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}^*$.
Si definisce una funzione $\bar{i} : \text{Prop}(\mathcal{L}) \to \mathbb{N}$ ponendo $\bar{i}(x) = i(x)$, si ha che la funzione $\bar{i}$ è iniettiva perchè è ottenuta dalla restrizione del dominio della funzione iniettiva $i$.
Si ha quindi che l'insieme $\text{Prop}(\mathcal{L})$ è numerabile. □

L'insieme quoziente di un insieme numerabile rispetto ad una relazione di equivalenza è numerabile.

**Proposizione 8.2.5.** *Sia $S$ un insieme numerabile e sia $\sim$ una relazione di equivalenza su $S$. Allora l'insieme quoziente $S/\sim$ è numerabile.*

*Dimostrazione.* Siccome l'insieme $S$ è numerabile esiste una funzione iniettiva $f : S \to \mathbb{N}$.
Si definisce una funzione $g : S/\sim \to \mathbb{N}$ ponendo $g([x]_\sim) = \min\{f(y) \in \mathbb{N} \mid y \in [x]_\sim\}$.
Si ha che la funzione $g$ è ben definita, infatti se $[x_1]_\sim = [x_2]_\sim$ allora
$g([x_1]_\sim) = \min\{f(y) \in \mathbb{N} \mid y \in [x_1]_\sim\} = \min\{f(y) \in \mathbb{N} \mid y \in [x_2]_\sim\} = g([x_2]_\sim)$.
Si vuole dimostrare che la funzione $g$ è iniettiva.
Se $g([x_1]_\sim) = g([x_2]_\sim)$ allora $\min\{f(y) \in \mathbb{N} \mid y \in [x_1]_\sim\} = \min\{f(y) \in \mathbb{N} \mid y \in [x_2]_\sim\}$, quindi esistono $y_1 \in [x_1]_\sim$ e $y_2 \in [x_2]_\sim$ tali che $f(y_1) = f(y_2)$, dunque esistono $y_1 \in [x_1]_\sim$ e $y_2 \in [x_2]_\sim$ tali che $y_1 = y_2$ perchè la funzione $f$ è iniettiva, cioè esiste $y_1 \in [x_1]_\sim$ tale che $y_1 \in [x_2]_\sim$, da cui $[x_1]_\sim = [y_1]_\sim = [x_2]_\sim$.
Si ha quindi che la funzione $g$ è iniettiva.
Si ha quindi che l'insieme quoziente $S/\sim$ è numerabile. $\square$

Si può quindi dimostrare che se tutti i sottoinsiemi di un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ sono soddisfacibili intuizionisticamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.

**Teorema 8.2.6.** *Se ogni sottoinsieme finito di un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.*

*Dimostrazione.* Sia $I$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\Gamma$ e si supponga che ogni $i \in I$ sia soddisfacibile intuizionisticamente.
Sia $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \to_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ l'algebra di Heyting delle proposizioni della logica proposizionale intuizionista.
Si definisce una funzione $V_\models : \mathrm{Prop}(\mathcal{L}) \to \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models$ ponendo $V_\models(\phi) = [\phi]_\models$.
Si ha che $V_\models$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \to_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ per la proposizione 5.1.6.
Si definisce $X = V_\models(\Gamma) \subseteq \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models$.
Per ogni $i \in I$ si definisce $X_i = V_\models(i) \subseteq \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models$.
Si vuole dimostrare che i sottoinsiemi finiti di $X$ sono tutti e soli gli insiemi $X_i$ al variare di $i \in I$.
Siccome per ogni $i \in I$ si ha che $i \subseteq \Gamma$, si ha che $X_i = V_\models(i) \subseteq V_\models(\Gamma) = X$, inoltre siccome ogni $i \in I$ è finito si ha che l'insieme $X_i = V_\models(i)$ è finito per ogni $i \in I$.
Si ha quindi che l'insieme $X_i$ è un sottoinsieme finito di $X$ per ogni $i \in I$.
Sia $Y$ un sottoinsieme finito di $X$.
Per ogni elemento $y \in Y$ si può scegliere una proposizione $\phi_y \in \Gamma$ tale che $V_\models(\phi_y) = y$, allora si ha che $\{\phi_y \in \Gamma \mid y \in Y\}$ è un sottoinsieme finito di $\Gamma$, quindi $\{\phi_y \in \Gamma \mid y \in Y\} \in I$, dunque $\{\phi_y \in \Gamma \mid y \in Y\} = i$ per qualche $i \in I$, da cui
$X_i = V_\models(i) = V_\models(\{\phi_y \in \Gamma \mid y \in Y\}) = \{V_\models(\phi_y) \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models \mid y \in Y\} =$
$\quad = \{y \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models \mid y \in Y\} = Y$.
Si ha quindi che ogni sottoinsieme finito di $X$ è un insieme $X_i$ per qualche $i \in I$.
Si ha quindi che i sottoinsiemi finiti di $X$ sono tutti e soli gli insiemi $X_i$ al variare di $i \in I$.
Si consideri il filtro generato da $X$ su $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \to_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$, ovvero l'insieme $\uparrow X = \{x \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models \mid \text{esiste } Y \subseteq_\omega X \text{ tale che } \bigwedge_\models Y \leq_\models x\}$.

Per la proposizione 5.1.7 si ha che $\uparrow X = \bigcup_{Y \subseteq_\omega X} \uparrow Y$, inoltre si è dimostrato che i sottoinsiemi finiti di $X$ sono tutti e soli gli insiemi $X_i$ al variare di $i \in I$ e dunque si ha che $\uparrow X = \bigcup_{i \in I} \uparrow X_i$.
Si vuole dimostrare che il filtro $\uparrow X$ su $(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash, \wedge_\vDash, \vee_\vDash, \rightarrow_\vDash, 1_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash}, 0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash})$ è proprio.
Se fosse $0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash} \in \uparrow X$ allora si avrebbe che $0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash} \in \bigcup_{i \in I} \uparrow X_i$, quindi si avrebbe che $0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash} \in \uparrow X_j$ per qualche $j \in I$.
Siccome $j \subseteq_\omega \Gamma$ si avrebbe che l'insieme $j$ è soddisfacibile per ipotesi, allora esisterebbero un'algebra di Heyting non banale $(H_j, \wedge_j, \vee_j, \rightarrow_j, 1_{H_j}, 0_{H_j})$ ed una valutazione $V_j$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(H_j, \wedge_j, \vee_j, \rightarrow_j, 1_{H_j}, 0_{H_j})$ tale che $V_j(\phi) = 1_{H_j}$ per ogni $\phi \in j$.
Si potrebbe definire la funzione $f_j : \text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash \rightarrow H_j$ ponendo $f_j([\phi]_\vDash) = V_j(\phi)$.
Si avrebbe che la funzione $f_j$ è ben definita per la proposizione 5.1.8, inoltre la funzione $f_j$ sarebbe un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash, \wedge_\vDash, \vee_\vDash, \rightarrow_\vDash, 1_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash}, 0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash})$ all'algebra di Heyting $(H_j, \wedge_j, \vee_j, \rightarrow_j, 1_{H_j}, 0_{H_j})$ per la proposizione 5.1.9.
Si avrebbe che

$$\begin{aligned} f_j(X_j) &= f_j(V_\vDash(j)) = f_j(V_\vDash(\{\phi \in \text{Prop}(\mathcal{L}) \mid \phi \in j\})) = f_j(\{V_\vDash(\phi) \in \text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash \mid \phi \in j\}) = \\ &= f_j(\{[\phi]_\vDash \in \text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash \mid \phi \in j\}) = \{f_j([\phi]_\vDash) \in H_j \mid \phi \in j\} = \{V_j(\phi) \in H_j \mid \phi \in j\} = \\ &= \{1_{H_j}\}, \end{aligned}$$

allora si avrebbe che $X_j \subseteq f_j^{-1}(\{1_{H_j}\})$.
Per la proposizione 5.1.10 si avrebbe che l'insieme $f_j^{-1}(\{1_{H_j}\})$ è un filtro su $(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash, \wedge_\vDash, \vee_\vDash, \rightarrow_\vDash, 1_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash}, 0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash})$, inoltre, siccome l'algebra di Heyting $(H_j, \wedge_j, \vee_j, \rightarrow_j, 1_{H_j}, 0_{H_j})$ sarebbe non banale, si avrebbe che il filtro $f_j^{-1}(\{1_{H_j}\})$ su $(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash, \wedge_\vDash, \vee_\vDash, \rightarrow_\vDash, 1_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash}, 0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash})$ è proprio.
Si avrebbe che $\uparrow X_j$ è il più piccolo filtro su $(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash, \wedge_\vDash, \vee_\vDash, \rightarrow_\vDash, 1_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash}, 0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash})$ contenente $X_j$ per la proposizione 4.2.5.
Siccome $f_j^{-1}(\{1_{H_j}\})$ sarebbe un filtro su $(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash, \wedge_\vDash, \vee_\vDash, \rightarrow_\vDash, 1_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash}, 0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash})$ contenente $X_j$ e $\uparrow X_j$ sarebbe il più piccolo filtro su $(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash, \wedge_\vDash, \vee_\vDash, \rightarrow_\vDash, 1_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash}, 0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash})$ contenente $X_j$ si avrebbe che $\uparrow X_j \subseteq f_j^{-1}(\{1_{H_j}\})$.
Siccome $\uparrow X_j \subseteq f_j^{-1}(\{1_{H_j}\})$ e il filtro $f_j^{-1}(\{1_{H_j}\})$ su $(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash, \wedge_\vDash, \vee_\vDash, \rightarrow_\vDash, 1_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash}, 0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash})$ sarebbe proprio si avrebbe che il filtro $\uparrow X_j$ su $(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash, \wedge_\vDash, \vee_\vDash, \rightarrow_\vDash, 1_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash}, 0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash})$ è proprio, cioè che $0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash} \notin \uparrow X_j$, che contraddice il fatto che $0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash} \in \uparrow X_j$.
Si ha quindi che il filtro $\uparrow X$ su $(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash, \wedge_\vDash, \vee_\vDash, \rightarrow_\vDash, 1_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash}, 0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash})$ è proprio.
Sia $F = \uparrow X$.
Sia $((\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash)/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash)/F}, 0_{(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash)/F})$ l'algebra di Heyting quoziente di $(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash, \wedge_\vDash, \vee_\vDash, \rightarrow_\vDash, 1_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash}, 0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash})$ rispetto a $F$.
Si definisce una funzione $\pi_F : \text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash \rightarrow (\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash)/F$ ponendo $\pi_F([\phi]_\vDash) = [[\phi]_\vDash]_F$.
Si ha che $\pi_F$ è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash, \wedge_\vDash, \vee_\vDash, \rightarrow_\vDash, 1_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash}, 0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash})$ all'algebra di Heyting $((\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash)/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash)/F}, 0_{(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash)/F})$ per la proposizione 4.2.16.
Siccome $V_\vDash$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash, \wedge_\vDash, \vee_\vDash, \rightarrow_\vDash, 1_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash}, 0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash})$ e $\pi_F$ è un omomorfismo dall'algebra di Heyting $(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash, \wedge_\vDash, \vee_\vDash, \rightarrow_\vDash, 1_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash}, 0_{\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash})$ all'algebra di Heyting $((\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash)/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash)/F}, 0_{(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash)/F})$ si ha che $V = \pi_F \circ V_\vDash$ è una valutazione delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting $((\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash)/F, \wedge_F, \vee_F, \rightarrow_F, 1_{(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash)/F}, 0_{(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash)/F})$.
Si ha che $V(\Gamma) = (\pi_F \circ V_\vDash)(\Gamma) = \pi_F(V_\vDash(\Gamma)) = \pi_F(X)$.
Siccome $X \subseteq \uparrow X$ per la proposizione 4.2.3, si ha che $\pi_F(X) \subseteq \pi_F(\uparrow X)$.
Si ha quindi che $V(\Gamma) = \pi_F(X) \subseteq \pi_F(\uparrow X) = \pi_F(F)$.
Si ha che $1_{(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash)/F} = F$ per la proposizione 4.2.15, allora $\pi_F(F) = \{1_{(\text{Prop}(\mathcal{L})/\vDash)/F}\}$.

Si ha quindi che $V(\Gamma) = \pi_F(F) = \{1_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F}\}$, allora per ogni $\phi \in \Gamma$ si ha che $V(\phi) = 1_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F}$, quindi $(((\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F, \wedge_F, \vee_F, \to_F, 1_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F}, 0_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F}), V)$ è un modello intuizionista per $\Gamma$, dunque $\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente.
Siccome il linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è numerabile, si ha che l'insieme $\mathrm{Prop}(\mathcal{L})$ è numerabile per la proposizione 8.2.4, allora l'insieme $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F$ è numerabile per la proposizione 8.2.4, quindi l'algebra di Heyting $(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models, \wedge_\models, \vee_\models, \to_\models, 1_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models}, 0_{\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models})$ è numerabile.
Si ha quindi che $(((\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F, \wedge_F, \vee_F, \to_F, 1_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F}, 0_{(\mathrm{Prop}(\mathcal{L})/\models)/F}), V)$ è un N-modello intuizionista per $\Gamma$, dunque $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente. □

Si può dimostrare che se tutti i sottoinsiemi di un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ sono soddisfacibili classicamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente.

**Teorema 8.2.7.** *Se ogni sottoinsieme finito di un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente.*

*Dimostrazione.* Sia $I$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\Gamma$ e si supponga che ogni $i \in I$ sia soddisfacibile classicamente, allora ogni $i \in I$ è soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 3.3.1, quindi $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 8.2.6, dunque $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente per il teorema 3.3.11. □

# Capitolo 9

# Teorema di N-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili

In questo capitolo si studia la dimostrabilità del teorema di N-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente (rispettivamente classicamente) se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente (rispettivamente classicamente).

## 9.1 Dimostrazione in una metateoria intuizionista

Si vuole dimostrare il teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi numerabili, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.

Chiaramente ogni N-modello intuizionista per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è un N-modello intuizionista per qualsiasi sottoinsieme finito di $\Gamma$, quindi se $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.

Si può dimostrare che se ogni sottoinsieme finito di un insieme $\Gamma$ di proposizioni di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.

**Teorema 9.1.1.** *Se ogni sottoinsieme finito di un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.*

*Dimostrazione.* Sia $I$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\Gamma$ e si supponga che ogni $i \in I$ sia N-soddisfacibile intuizionisticamente, allora ogni $i \in I$ è soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 4.1.2, quindi $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 8.2.6. □

I teoremi 7.2.1 e 9.1.1 rappresentano le due implicazioni del teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi numerabili, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente.

**Teorema 9.1.2** (N-compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi numerabili)**.** *Un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale numerabile* $\mathcal{L}$ *è N-soddisfacibile intuizionisticamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di* $\Gamma$ *è N-soddisfacibile intuizionisticamente.*

*Dimostrazione.* Se $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 7.2.1.
Se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 9.1.1. □

Si vuole dimostrare il teorema di N-compattezza per modelli classici e linguaggi numerabili, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile classicamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente.

Chiaramente ogni N-modello classico per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è un N-modello classico per qualsiasi sottoinsieme finito di $\Gamma$, quindi se $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente.

Si può dimostrare che se ogni sottoinsieme finito di un insieme $\Gamma$ di proposizioni di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente.

**Teorema 9.1.3.** *Se ogni sottoinsieme finito di un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale numerabile* $\mathcal{L}$ *è N-soddisfacibile classicamente allora* $\Gamma$ *è N-soddisfacibile classicamente.*

*Dimostrazione.* Sia $I$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\Gamma$ e si supponga che ogni $i \in I$ sia N-soddisfacibile classicamente, allora ogni $i \in I$ è soddisfacibile classicamente per il teorema 4.1.4, quindi $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente per il teorema 8.2.7. □

I teoremi 7.2.4 e 9.1.3 rappresentano le due implicazioni del teorema di N-compattezza per modelli classici e linguaggi numerabili, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è N-soddisfacibile classicamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente.

**Teorema 9.1.4** (N-compattezza per modelli classici e linguaggi numerabili)**.** *Un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale numerabile* $\mathcal{L}$ *è N-soddisfacibile classicamente se e solo se ogni sottoinsieme finito di* $\Gamma$ *è N-soddisfacibile classicamente.*

*Dimostrazione.* Se $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente per il teorema 7.2.4.
Se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente allora $\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente per il teorema 9.1.3. □

# Capitolo 10

# Teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili

In questo capitolo si studia la dimostrabilità del teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è 2-soddisfacibile se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.

## 10.1 Non dimostrabilità in una metateoria intuizionista

Si vuole mostrare che il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili non è dimostrabile utilizzando una metateoria intuizionista.

Si supponga che il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili sia dimostrabile utilizzando una metateoria intuizionista.
Si potrebbero fissare un linguaggio numerabile $\mathcal{L}$ avente una sola variabile proposizionale $p \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L})$ ed una proposizione $\mathcal{Q}$ del metalinguaggio.
Si potrebbe definire $\Gamma = \{\phi \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L}) \mid \phi = p \text{ e } \mathcal{Q}\} \cup \{\phi \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L}) \mid \phi = \neg p \text{ e } \neg\mathcal{Q}\}$.
Chiaramente si avrebbe che
$\Gamma = \{\phi \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L}) \mid \phi = p \text{ e } \mathcal{Q}\} \cup \{\phi \in \mathrm{Prop}(\mathcal{L}) \mid \phi = \neg p \text{ e } \neg\mathcal{Q}\} \subseteq \{p\} \cup \{\neg p\} = \{p, \neg p\}$.
Se fosse $\Gamma_0 \subseteq_\omega \Gamma$ allora si avrebbe che $\Gamma_0 = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ con $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \Gamma$.
Se fosse $n = 0$ allora si avrebbe che $\Gamma_0 = \varnothing$.
Se fosse $n = 1$ allora si avrebbe che $\Gamma_0 = \{p\}$ o che $\Gamma_0 = \{\neg p\}$.
Se fosse $n \geq 2$ allora si potrebbero scegliere $\phi_i, \phi_j \in \Gamma_0$. Si avrebbe che ($\phi_i = p$ e $\mathcal{Q}$) oppure che ($\phi_i = \neg p$ e $\neg\mathcal{Q}$). Analogamente, si avrebbe che ($\phi_j = p$ e $\mathcal{Q}$) oppure che ($\phi_j = \neg p$ e $\neg\mathcal{Q}$). Se fosse $\phi_i = p$ allora si avrebbe che $\mathcal{Q}$, quindi non potrebbe essere che $\neg\mathcal{Q}$, dunque non potrebbe essere $\phi_j = \neg p$, da cui dovrebbe essere $\phi_j = p$. Analogamente, se fosse $\phi_i = \neg p$ allora si avrebbe che $\neg\mathcal{Q}$, quindi non potrebbe essere che $\mathcal{Q}$, dunque non potrebbe essere $\phi_j = p$, da cui dovrebbe essere $\phi_j = \neg p$.
I sottoinsiemi finiti di $\Gamma$ sarebbero quindi solamente $\varnothing$, $\{p\}$ e $\{\neg p\}$.
Chiaramente tutti i sottoinsiemi finiti di $\Gamma$ sarebbero 2-soddisfacibili: l'insieme $\{p\}$ sarebbe soddisfacibile grazie alla valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting di due elementi $(\{0,1\}, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ definita ponendo $V(p) = 1$, l'insieme $\{\neg p\}$ sarebbe soddisfaci-

bile grazie alla valutazione $V'$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting di due elementi $(\{0,1\}, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ definita ponendo $V'(p) = 0$ (da cui $V'(\neg p) = \neg V'(p) = \neg 0 = 1$) e l'insieme $\varnothing$ sarebbe soddisfacibile grazie ad una qualsiasi delle valutazioni $V$ e $V'$.
Siccome tutti i sottoinsiemi finiti di $\Gamma$ sarebbero 2-soddisfacibili, per il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili si avrebbe che $\Gamma$ è 2-soddisfacibile, ovvero esisterebbe una valutazione $V$ delle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$ nell'algebra di Heyting di due elementi $(\{0,1\}, \wedge, \vee, \rightarrow, 1, 0)$ tale che $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma$.
Si avrebbe che $V(p) = 1$ o che $V(p) = 0$.
Se fosse $V(p) = 1$ allora si avrebbe che $V(\neg p) = \neg V(p) = \neg 1 = 0$, quindi si avrebbe che $\neg p \notin \Gamma$ in quanto $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma$, dunque non potrebbe essere che $\neg \mathcal{Q}$, da cui si avrebbe che $\neg\neg\mathcal{Q}$.
Se fosse $V(p) = 0$ allora si avrebbe che $p \notin \Gamma$ in quanto $V(\phi) = 1$ per ogni $\phi \in \Gamma$, quindi non potrebbe essere che $\mathcal{Q}$, dunque si avrebbe che $\neg\mathcal{Q}$.
Si avrebbe quindi che $\neg\neg\mathcal{Q}$ o che $\neg\mathcal{Q}$.
Considerata l'arbitrarietà della proposizione $\mathcal{Q}$ del metalinguaggio, si sarebbe così dimostrato il principio del terzo escluso debole, si tratta di un taboo intuizionista, ovvero di un principio che non può valere in una metateoria intuizionista.
Si ha quindi che il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili non è dimostrabile utilizzando una metateoria intuizionista.

## 10.2 Dimostrazione in una metateoria classica

Utilizzando una metateoria classica si può dimostrare il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è 2-soddisfacibile se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.

Chiaramente ogni 2-modello per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è un 2-modello per qualsiasi sottoinsieme finito di $\Gamma$, quindi se $\Gamma$ è 2-soddisfacibile allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.

**Teorema 10.2.1.** *Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è 2-soddisfacibile allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.*

*Dimostrazione.* Si tratta del teorema 6.2.1 ristretto a linguaggi numerabili. □

Utilizzando una metateoria classica si può dimostrare che se ogni sottoinsieme finito di un insieme $\Gamma$ di proposizioni di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è 2-soddisfacibile allora $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.

**Teorema (LEM) 10.2.2.** *Se ogni sottoinsieme finito di un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ è 2-soddisfacibile allora $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.*

*Dimostrazione.* Sia $I$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\Gamma$ e si supponga che ogni $i \in I$ sia 2-soddisfacibile, allora ogni $i \in I$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 4.1.1, quindi ogni $i \in I$ è soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 4.1.2, dunque $\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 8.2.6, da cui $\Gamma$ è 2-soddisfacibile per il teorema 4.2.18. □

Utilizzando una metateoria classica, l'ipotesi del teorema 10.2.3, ovvero che ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sia 2-soddisfacibile, può essere rimpiazzata dall'ipotesi che ogni sottoinsieme finito

di $\Gamma$ sia soddisfacibile intuizionisticamente (rispettivamente classicamente).
Infatti, se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ fosse soddisfacibile intuizionisticamente (rispettivamente classicamente) allora $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile intuizionisticamente (rispettivamente classicamente) per il teorema 8.2.6 (rispettivamente 8.2.7), quindi $\Gamma$ sarebbe 2-soddisfacibile per il teorema 4.2.18 (rispettivamente 4.2.19).

I teoremi 10.2.1 e 10.2.3 rappresentano le due implicazioni del teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili, che afferma che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ è 2-soddisfacibile se e solo se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è 2-soddisfacibile.

**Teorema (LEM) 10.2.3** (2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili)**.** *Un insieme di proposizioni* $\Gamma$ *di un linguaggio proposizionale numerabile* $\mathcal{L}$ *è 2-soddisfacibile se e solo se ogni sottoinsieme finito di* $\Gamma$ *è 2-soddisfacibile.*

*Dimostrazione.* Se $\Gamma$ è 2-soddisfacibile allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è 2-soddisfacibile per il teorema 10.2.1.
Se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ è 2-soddisfacibile allora $\Gamma$ è 2-soddisfacibile per il teorema 10.2.3. □

# Capitolo 11

# Soddisfacibilità vs 2-soddisfacibilità vs N-soddisfacibilità (seconda parte)

Nel capitolo 4 si sono dimostrate le implicazioni che intercorrono tra soddisfacibilità intuizionista (rispettivamente classica), 2-soddisfacibilità e N-soddisfacibilità intuizionista (rispettivamente classica) utilizzando una metateoria intuizionista, una metateoria classica ed una metateoria classica con assioma della scelta.

In questo capitolo si dimostra che tra queste tre nozioni di soddisfacibilità, utilizzando queste tre metateorie, non possono valere altre implilcazioni.

## 11.1 Relazioni in una metateoria intuizionista

In una metateoria intuizionista, il fatto che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ sia soddisfacibile intuizionisticamente non implica che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile intuizionisticamente.

Si supponga che, in una metateoria intuizionista, il fatto che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ sia soddisfacibile intuizionisticamente implichi che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile intuizionisticamente.
Si potrebbe allora dimostrare il teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi arbitrari utilizzando una metateoria intuizionista.
Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ fosse N-soddisfacibile intuizionisticamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 7.2.1.
Viceversa, se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ fosse N-soddisfacibile intuizionisticamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sarebbe soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 4.1.2, quindi $\Gamma$ sarebbe soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 5.1.11, dunque $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile intuizionisticamente perchè si è supposto che il fatto che $\Gamma$ sia soddisfacibile intuizionisticamente implichi che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile intuizionisticamente.
Si sarebbe così dimostrato il teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi arbitrari utilizzando una metateoria intuizionista, tuttavia si è visto nella sezione 7.1 che questo teorema non può essere dimostrato utilizzando una metateoria classica, quindi questo teorema non può essere dimostrato utilizzando una metateoria intuizionista.

In una metateoria intuizionista, si ha quindi che:
($\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente) $\not\Rightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente)

In una metateoria intuizionista, il fatto che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ sia soddisfacibile classicamente non implica che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile classicamente.

Si supponga che, in una metateoria intuizionista, il fatto che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ sia soddisfacibile classicamente implichi che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile classicamente.
Si potrebbe allora dimostrare il teorema di N-compattezza per modelli classici e linguaggi arbitrari utilizzando una metateoria intuizionista.
Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ fosse N-soddisfacibile classicamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile classicamente per il teorema 7.2.4.
Viceversa, se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ fosse N-soddisfacibile classicamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sarebbe soddisfacibile classicamente per il teorema 4.1.4, quindi $\Gamma$ sarebbe soddisfacibile classicamente per il teorema 5.1.14, dunque $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile classicamente perchè si è supposto che il fatto che $\Gamma$ sia soddisfacibile classicamente implichi che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile classicamente.
Si sarebbe così dimostrato il teorema di N-compattezza per modelli classici e linguaggi arbitrari utilizzando una metateoria intuizionista, tuttavia si è visto nella sezione 7.1 che questo teorema non può essere dimostrato utilizzando una metateoria classica, quindi questo teorema non può essere dimostrato utilizzando una metateoria intuizionista.

In una metateoria intuizionista, si ha quindi che:
($\Gamma$ è soddisfacibile classicamente) $\not\Rightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente)

In una metateoria intuizionista, il fatto che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ sia N-soddisfacibile intuizionisticamente non implica che $\Gamma$ sia 2-soddisfacibile.

Si supponga che, in una metateoria intuizionista, il fatto che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ sia N-soddisfacibile intuizionisticamente implichi che $\Gamma$ sia 2-soddisfacibile.
Si potrebbe allora dimostrare il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili utilizzando una metateoria intuizionista.
Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ fosse 2-soddisfacibile allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sarebbe 2-soddisfacibile per il teorema 10.2.1.
Viceversa, se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ fosse 2-soddisfacibile allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 4.1.1, quindi $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 9.1.2, dunque $\Gamma$ sarebbe 2-soddisfacibile perchè si è supposto che il fatto che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile intuizionisticamente implichi che $\Gamma$ sia 2-soddisfacibile.
Si sarebbe così dimostrato il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili utilizzando una metateoria intuizionista, tuttavia si è visto nella sezione 10.1 che questo teorema non può essere dimostrato utilizzando una metateoria intuizionista.

In una metateoria intuizionista, si ha quindi che:
($\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente) $\not\Rightarrow$ ($\Gamma$ è 2-soddisfacibile)

In una metateoria intuizionista, il fatto che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ sia N-soddisfacibile classicamente non implica che $\Gamma$ sia 2-soddisfacibile.

Si supponga che, in una metateoria intuizionista, il fatto che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ sia N-soddisfacibile classicamente implichi che $\Gamma$ sia 2-soddisfacibile.
Si potrebbe allora dimostrare il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili utilizzando una metateoria intuizionista.
Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale numerabile $\mathcal{L}$ fosse 2-soddisfacibile allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sarebbe 2-soddisfacibile per il teorema 10.2.1.
Viceversa, se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ fosse 2-soddisfacibile allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile classicamente per il teorema 4.1.3, quindi $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile classicamente per il teorema 9.1.4, dunque $\Gamma$ sarebbe 2-soddisfacibile perchè si è supposto che il fatto che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile classicamente implichi che $\Gamma$ sia 2-soddisfacibile.
Si sarebbe così dimostrato il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili utilizzando una metateoria intuizionista, tuttavia si è visto nella sezione 10.1 che questo teorema non può essere dimostrato utilizzando una metateoria intuizionista.

In una metateoria intuizionista, si ha quindi che:
($\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente) $\not\Rightarrow$ ($\Gamma$ è 2-soddisfacibile)

## 11.2 Relazioni in una metateoria classica

In una metateoria classica, il fatto che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ sia soddisfacibile intuizionisticamente non implica che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile intuizionisticamente.

Si supponga che, in una metateoria classica, il fatto che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ sia soddisfacibile intuizionisticamente implichi che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile intuizionisticamente.
Si potrebbe allora dimostrare il teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi arbitrari utilizzando una metateoria classica.
Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ fosse N-soddisfacibile intuizionisticamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 7.2.1.
Viceversa, se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ fosse N-soddisfacibile intuizionisticamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sarebbe soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 4.1.2, quindi $\Gamma$ sarebbe soddisfacibile intuizionisticamente per il teorema 5.1.11, dunque $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile intuizionisticamente perchè si è supposto che il fatto che $\Gamma$ sia soddisfacibile intuizionisticamente implichi che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile intuizionisticamente.
Si sarebbe così dimostrato il teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti e linguaggi arbitrari utilizzando una metateoria classica, tuttavia si è visto nella sezione 7.1 che questo teorema non può essere dimostrato utilizzando una metateoria classica.

In una metateoria classica, si ha quindi che:
($\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente) $\not\Rightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente)

In una metateoria classica, il fatto che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ sia soddisfacibile classicamente non implica che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile classicamente.

Si supponga che, in una metateoria classica, il fatto che un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ sia soddisfacibile classicamente implichi che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile classicamente.
Si potrebbe allora dimostrare il teorema di N-compattezza per modelli classici e linguaggi arbitrari utilizzando una metateoria classica.

Se un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ fosse N-soddisfacibile classicamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile classicamente per il teorema 7.2.4.

Viceversa, se ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ fosse N-soddisfacibile classicamente allora ogni sottoinsieme finito di $\Gamma$ sarebbe soddisfacibile classicamente per il teorema 4.1.4, quindi $\Gamma$ sarebbe soddisfacibile classicamente per il teorema 5.1.14, dunque $\Gamma$ sarebbe N-soddisfacibile classicamente perchè si è supposto che il fatto che $\Gamma$ sia soddisfacibile classicamente implichi che $\Gamma$ sia N-soddisfacibile classicamente.
Si sarebbe così dimostrato il teorema di N-compattezza per modelli classici e linguaggi arbitrari utilizzando una metateoria classica, tuttavia si è visto nella sezione 7.1 che questo teorema non può essere dimostrato utilizzando una metateoria classica.

In una metateoria classica, si ha quindi che:
($\Gamma$ è soddisfacibile classicamente) $\not\Rightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente)

# Conclusioni

Un primo risultato di questo lavoro di tesi consiste nell'aver dimostrato delle inaspettate equivalenze tra le nozioni di soddisfacibilità per un insieme $\Gamma$ di proposizioni di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ nel caso della logica proposizionale intuizionista e le corrispondenti nozioni di soddisfacibilità nel caso della logica proposizionale classica:
($\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente) $\Leftrightarrow$ ($\Gamma$ è soddisfacibile classicamente) (teorema 3.3.12)
($\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente) $\Leftrightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente) (teorema 3.4.4)
La nozione di 2-soddisfacibilità è in comune per la logica proposizionale intuizionista e classica.
L'equivalenza tra le nozioni di soddisfacibilità intuizionista e classica non vale in generale nel caso della logica predicativa (sezione 3.3).

Lo studio delle relazioni che intercorrono tra le varie nozioni di soddisfacibilità ha consentito di dimostrare tutte le implicazioni valide tra le nozioni stesse, sia nel caso della logica proposizionale intuizionista che nel caso della logica proposizionale classica, utilizzando ciascuna delle tipologie di metateoria considerate in questa tesi.

Utilizzando una metateoria intuizionista si è dimostrato che per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ valgono le seguenti implicazioni:
($\Gamma$ è 2-soddisfacibile) $\Rightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente) $\Rightarrow$ ($\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente) (teoremi 4.1.1 e 4.1.2)
($\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente) $\not\Rightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente) (sezione 11.1)
($\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente) $\not\Rightarrow$ ($\Gamma$ è 2-soddisfacibile) (sezione 11.1)
($\Gamma$ è 2-soddisfacibile) $\Rightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente) $\Rightarrow$ ($\Gamma$ è soddisfacibile classicamente) (teoremi 4.1.3 e 4.1.4)
($\Gamma$ è soddisfacibile classicamente) $\not\Rightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente) (sezione 11.1)
($\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente) $\not\Rightarrow$ ($\Gamma$ è 2-soddisfacibile) (sezione 11.1)

Utilizzando una metateoria classica si è dimostrato che per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ valgono le seguenti implicazioni:
($\Gamma$ è 2-soddisfacibile) $\Leftrightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente) $\Rightarrow$ ($\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente) (teoremi 4.1.1, 4.1.2 e 4.2.18)
($\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente) $\not\Rightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente) (sezione 11.2)
($\Gamma$ è 2-soddisfacibile) $\Leftrightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente) $\Rightarrow$ ($\Gamma$ è soddisfacibile classicamente) (4.1.3, 4.1.4 e 4.2.19)
($\Gamma$ è soddisfacibile classicamente) $\not\Rightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente) (sezione 11.2)

Utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta si è dimostrato che per un insieme di proposizioni $\Gamma$ di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ valgono le seguenti implicazioni:

($\Gamma$ è 2-soddisfacibile) $\Leftrightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile intuizionisticamente) $\Leftrightarrow$ ($\Gamma$ è soddisfacibile intuizionisticamente) (teoremi 4.1.1, 4.1.2 e 4.3.2)
($\Gamma$ è 2-soddisfacibile) $\Leftrightarrow$ ($\Gamma$ è N-soddisfacibile classicamente) $\Leftrightarrow$ ($\Gamma$ è soddisfacibile classicamente) (teoremi 4.1.3, 4.1.4 e 4.3.3)

L'indagine relativa alla dimostrabilità delle varie versioni del teorema di compattezza per modelli algebrici della logica proposizionale ottenute in corrispondenza delle varie definizioni di soddisfacibilità (soddisfacibilità intuizionista/classica, 2-soddisfacibilità, N-soddisfacibilità intuizionista/classica) e delle due famiglie di linguaggi considerati (linguaggi proposizionali arbitrari e numerabili) ha portato ad ottenere per ciascuna versione una risposta affermativa (una dimostrazione del teorema) o negativa (un controesempio che confuta il teorema).

I risultati riguardanti la dimostrabilità in una metateoria intuizionista sono:

- ✓ Teorema di compattezza per modelli intuizionisti/classici e linguaggi arbitrari (teorema 5.1.12/5.1.15);
- ✘ Teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti/classici e linguaggi arbitrari (sezione 7.1);
- ✘ Teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari (sezione 6.1);
- ✓ Teorema di compattezza per modelli intuizionisti/classici e linguaggi numerabili (teorema 8.1.1/8.1.2);
- ✓ Teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti/classici e linguaggi numerabili (teorema 9.1.2/9.1.4);
- ✘ Teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili (sezione 10.1).

I risultati riguardanti la dimostrabilità in una metateoria classica sono:

- ✓ Teorema di compattezza per modelli intuizionisti/classici e linguaggi arbitrari (teorema 5.1.12/5.1.15);
- ✘ Teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti/classici e linguaggi arbitrari (sezione 7.1);
- ✘ Teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari (sezione 6.1);
- ✓ Teorema di compattezza per modelli intuizionisti/classici e linguaggi numerabili (teorema 8.1.1/8.1.2);
- ✓ Teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti/classici e linguaggi numerabili (teorema 9.1.2/9.1.4);
- ✓ Teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili (teorema 10.2.3).

Si può osservare che, utilizzando una metateoria classica anzichè una metateoria intuizionista, si può dimostrare il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili.

I risultati riguardanti la dimostrabilità in una metateoria classica con assioma della scelta sono:

- ✓ Teorema di compattezza per modelli intuizionisti/classici e linguaggi arbitrari (teorema 5.1.12/5.1.15);
- ✓ Teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti/classici e linguaggi arbitrari (teorema 7.2.3/7.2.6);
- ✓ Teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari (teorema 6.2.3);
- ✓ Teorema di compattezza per modelli intuizionisti/classici e linguaggi numerabili (teorema 8.1.1/8.1.2);
- ✓ Teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti/classici e linguaggi numerabili (teorema 9.1.2/9.1.4);
- ✓ Teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi numerabili (teorema 10.2.3).

Si può osservare che, utilizzando una metateoria classica con assioma della scelta anziche una metateoria classica, si possono dimostrare il teorema di N-compattezza per modelli intuizionisti/classici e linguaggi arbitrari ed il teorema di 2-compattezza per modelli algebrici e linguaggi arbitrari.

Uno sviluppo futuro di questo lavoro di tesi potrebbe consistere nell'investigare la possibilità di estendere alla logica predicativa (del primo ordine) intuizionista e classica le versioni del teorema di compattezza per modelli algebrici della logica proposizionale dimostrate nella presente tesi.

# Bibliografia


[1] J. W. Dawson Jr., *The Compactness of First Order Logic: from Gödel to Lindström*, History and Philosophy of Logic 14, pp. 15-37, 1993.

[2] D. van Dalen, *Logic and Structure*, Springer, Berlin, 1994.

[3] S. Negri, J. von Plato, *Structural Proof Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[4] G. Birkhoff, *Lattice theory*, American Mathematical Society, Providence, 1967.

[5] P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[6] S. Berardi, S. Valentini, *Krivine's intuitionistic proof of classical completenes (for countable languages)*, Annals of Pure and Applied Logic 129, pp.93-106, 2004.

[7] G. Sambin, *Pretopologies and completeness proofs*, The Journal of Symbolic Logic 60, pp. 861-878, 1995.

[8] E. Szpilrajn, *Sur l'extension de l'ordre partiel*, Fundamenta Mathematicae 16, pp. 386-389, 1930.

[9] T. J. Jech, *The axiom of choice*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[10] J. L. Bell, A. B. Slomson, *Models and Ultraproducts: an introduction*, North-Holland, Amsterdam, 1974.

[11] M. Barbieri, *Una dimostrazione costruttiva del teorema di compattezza per modelli algebrici del calcolo proposizionale*, Tesi di laurea (relatore: Prof. S. Valentini), Università degli Studi di Padova, 2016.