



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI TECNICA E GESTIONE DEI SISTEMI
INDUSTRIALI

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA DELL'INNOVAZIONE
DEL PRODOTTO

Tesi di laurea

**Modellizzazione, simulazione e
controllo di un robot a cavi
sottoattuato piano**

Relatore
Ing. Giovanni BOSCHETTI

Laureando
Gianluca FANDELLA
n° matr. 1035872

Anno Accademico 2012/2013

Indice

Premessa	vii
1 Stato dell'arte	1
1.1 Robot a cavi	1
1.1.1 Numero di cavi e classi di robot	2
1.1.2 Procedimento generale di analisi di un robot a cavi	3
1.2 Pianificazione del moto e controllo	13
1.3 Applicazioni	16
2 Finalità del lavoro	20
2.1 Obiettivo	20
2.2 Modello analizzato	21
3 Analisi geometrico-statica e dinamica	24
3.1 Analisi geometrico-statica	24
3.1.1 Analisi geometrico-statica inversa	27
3.1.2 Analisi geometrico-statica diretta	31
3.2 Analisi dinamica	33
3.2.1 Dinamica diretta	33
3.2.2 Analisi di velocità e di accelerazione	34
3.2.3 Equazione del moto	36
3.2.4 Dinamica inversa	39
3.3 Conclusioni	39
4 Controllo	41
4.1 Logica di controllo	41
4.2 Retroazione	44
4.3 Simulatore del modello dinamico	48
4.3.1 Sistema attuato	48
4.3.2 Evoluzione libera	49

4.4	Conclusioni	51
5	Pianificazione della traiettoria	53
5.1	Calcolo delle tensioni dei cavi	54
5.2	Legge di moto	56
5.3	Parametri di traiettoria	58
5.4	Tensioni positive e limitate	59
5.4.1	Condizioni quasistatiche	60
5.4.2	Tempo di minima percorrenza	60
5.5	Condizioni di arresto	61
5.6	Conclusioni	63
6	Simulazioni	64
6.1	Traiettoria rettilinea	66
6.1.1	Movimento verticale	66
6.1.2	Movimento orizzontale	74
6.2	Traiettoria circolare	79
6.2.1	Arco di cerchio	79
6.2.2	Tre giri completi	85
6.3	Conclusioni	90
7	Considerazioni finali	91
7.1	Conclusioni	91
7.2	Sviluppi futuri	92

Elenco delle figure

1.1	Robot pienamente attuati (in alto) e sottoattuati (in basso). (Fonte: Woernle, 2013)	3
1.2	Schema di un robot a cavi generico	4
1.3	Sistema di riferimento dell'organo terminale in configurazione non ruotata (a) e in una configurazione generica (b)	5
1.4	Cinematica diretta con organo terminale puntiforme: inter- sezione delle circonferenze formate dai cavi	6
1.5	Rappresentazione dell'avvolgimento del cavo sul rocchetto	7
1.6	Forze e momenti agenti sull'organo terminale	10
1.7	Coppie e momenti agenti sui rocchetti	12
1.10	NeReBot (Università di Padova, 2007)	18
1.11	Prototipo di robot per ricerca e soccorso (INRIA, 2010)	18
2.1	Esempio di robot con cavi convergenti in un unico punto (sinistra) e in punti distinti (destra)	22
2.2	Schema del modello di robot verticale analizzato	23
3.1	Relazioni geometriche espresse tramite vettori	25
3.2	Passaggio da \mathbf{b}_i a \mathbf{r}_i	26
3.3	Forze che agiscono sull'organo terminale	27
4.1	Descrizione delle variabili del modello	42
4.2	Schema di controllo	43
4.3	Retroazione con θ simulata	45
4.4	Schematizzazione dei vettori; \mathbf{r}_{21} , \mathbf{s}_2 e \mathbf{s}_d formano la diade analizzata.	46
4.5	Retroazione con θ calcolata da misurazioni	48
4.6	Schema del simulatore del modello dinamico	49
4.7	Schematizzazione del modello di evoluzione libera del sistema	51

5.1	Rappresentazione di un percorso generico e della coordinata curvilinea $l(t)$	56
5.2	Legge con profilo di velocità trapezoidale	57
5.3	Legge polinomiale	57
5.4	Andamento della coordinata θ nel tempo di percorrenza t_{fa} rispetto alle corrispondenti posizioni statiche, e successive oscillazioni	61
5.5	Andamento della coordinata θ nel tempo di percorrenza t_{fs} rispetto alle corrispondenti posizioni statiche, e successive oscillazioni	63
6.1	Parametri geometrici del modello	65
6.2	Rappresentazione delle due traiettorie rettilinee simulate	65
6.3	Rappresentazione dei tre casi analizzati	66
6.4	Andamento delle tensioni nel caso quasistatico, traiettoria verticale	70
6.5	Andamento delle coordinate z , z e θ per il tempo di percorrenza t_{fa} , traiettoria verticale	71
6.6	Andamento delle tensioni per il tempo di percorrenza t_{fa} , traiettoria verticale	72
6.7	Andamento delle coordinate x , z e θ per moto pianificato con tempo di percorrenza t_{fs} . Traiettoria verticale	73
6.8	Andamento delle tensioni nel caso quasistatico, traiettoria orizzontale	75
6.9	Andamento delle coordinate z , z e θ per il tempo di percorrenza t_{fa} , traiettoria orizzontale	76
6.10	Andamento delle tensioni per il tempo di percorrenza t_{fa} , traiettoria orizzontale	77
6.11	Andamento delle coordinate x , z e θ per moto pianificato con tempo di percorrenza t_{fs} . Traiettoria orizzontale	78
6.12	Traiettorie circolari simulate	79
6.13	Andamento delle tensioni nel caso quasistatico, arco di cerchio	81
6.14	Andamento delle coordinate z , z e θ per il tempo di percorrenza t_{fa} , arco di cerchio	82
6.15	Andamento delle tensioni per il tempo di percorrenza t_{fa} , arco di cerchio	83
6.16	Andamento delle coordinate x , z e θ per moto pianificato con tempo di percorrenza t_{fs} . Arco di cerchio	84

6.17	Andamento delle tensioni nel caso quasistatico. Traiettoria circolare: tre giri completi	86
6.18	Andamento delle coordinate z , \dot{z} e θ per il tempo di percorrenza t_{fa} . Traiettoria circolare: tre giri completi	87
6.19	Andamento delle tensioni per il tempo di percorrenza t_{fa} . Traiettoria circolare: tre giri completi	88
6.20	Andamento delle coordinate x , z e θ per moto pianificato con tempo di percorrenza t_{fs} . Traiettoria circolare: tre giri completi	89

Elenco delle tabelle

6.1	Parametri di simulazione	64
6.2	Riepilogo dei valori t_f di percorrenza della traiettoria rettilinea verticale e dei corrispondenti punti di equilibrio all'arresto	69
6.3	Riepilogo dei valori t_f di percorrenza della traiettoria rettilinea orizzontale e dei corrispondenti punti di equilibrio all'arresto	74
6.4	Riepilogo dei valori t_f di percorrenza della traiettoria ad arco di cerchio e dei corrispondenti punti di equilibrio all'arresto .	80
6.5	Riepilogo dei valori t_f di percorrenza della traiettoria ad arco di cerchio e dei corrispondenti punti di equilibrio all'arresto .	85

Premessa

In questo lavoro sarà analizzato un modello di robot a cavi sottoattuato, cioè un robot azionato da cavi del quale non possono essere controllati tutti i gradi di libertà.

Grazie alla capacità dei cavi di sollevare carichi pesanti e alla facilità di installazione, questo tipo di robot trova una applicazione nell'ambito carico/scarico delle merci, o nel trasporto di carichi. Inoltre la scarsa invasività dei cavi e il peso contenuto della struttura lo rendono idoneo all'interazione con l'uomo, ad esempio in attrezzature per la preparazione atletica o per la riabilitazione.

La natura sottoattuata di questo tipo di robot complica tuttavia la trattazione analitica, insieme al fatto che non è possibile avere un controllo completo di tutti i gradi di libertà. L'obiettivo di questa tesi è indagare le problematiche specifiche per questa categoria di robot studiando un modello verticale a tre gradi di libertà. Verrà mostrato come sia possibile sviluppare una tecnica di pianificazione e controllo che permetta di seguire delle traiettorie prestabilite, mantenendo sempre positive le tensioni nei cavi. I risultati saranno infine confermati mediante simulazioni.

Capitolo 1

Stato dell'arte

1.1 Robot a cavi

I robot a cavi sono una tipologia di robot paralleli che si è diffusa a partire dagli anni '90, la cui peculiarità sta nel fatto che i link rigidi sono sostituiti da dei cavi che vengono avvolti o svolti da dei motori, regolandone la lunghezza. Questo tipo di struttura conferisce al robot diversi vantaggi:

- Velocità elevate: le inerzie contenute della struttura permettono movimenti molto rapidi.
- Spazio di lavoro esteso: potendo utilizzare cavi anche molto lunghi, è possibile coprire uno spazio di lavoro molto grande.
- Trasportabilità: il peso contenuto del robot e la semplicità costruttiva lo rendono di facile trasporto e rapida installazione.

A fronte di questi vantaggi tuttavia nascono delle complicazioni dovute al fatto che i cavi devono sempre essere tenuti in tensione, e pertanto bisogna verificare che questa condizione sia sempre rispettata per l'insieme di forze e coppie che agiscono sul robot [1]. Da questa limitazione ne deriva che per essere completamente vincolato, cioè per mantenere l'equilibrio rispetto ad ogni coppia o forza esterna applicata (entro dei limiti ammissibili), il robot deve possedere un numero di cavi superiori ai suoi gradi di libertà. Per questo si tende spesso a preferire delle soluzioni ridondanti, soprattutto nel caso di spostamento di carichi pesanti [2], in cui bisogna però prestare attenzione all'interferenza tra i cavi [3] e sapere calcolare la ripartizione del carico [4].

1.1.1 Numero di cavi e classi di robot

L'organo terminale possiede n gradi di libertà; se è un oggetto puntiforme n corrisponde a 2 gradi di libertà nel piano e a 3 gradi di libertà nello spazio; se invece è un corpo rigido, $n = 3$ nel piano e $n = 6$ nello spazio.

Poiché le tensioni dei cavi devono sempre essere mantenute positive, non è possibile applicare qualsiasi carico (forze e momenti) all'organo terminale. Si può dimostrare [5]-[6] che è possibile una manipolazione completa di tutti gli n gradi di libertà in presenza di $N = n + 1$ cavi se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. I vettori composti dalle componenti cartesiane e dal braccio dei versori delle tensioni dei cavi rispetto al centro di massa dell'organo terminale sono linearmente indipendenti.
2. Chiamata \mathbf{S} la matrice le cui colonne sono i vettori del punto 1, si verifica che $\text{rank}(\mathbf{S}) = n$.

Possono essere fatte le seguenti considerazioni:

- Se un robot ha $N = n + 1$ cavi, è sempre possibile la manipolazione di tutti gli n gradi di libertà entro un certo range di forze e momenti applicati. In questo caso si dice che il robot è *pienamente attuato*. Si noti che quanto enunciato vale per i robot con $N = n + 1$ cavi, tuttavia è possibile che anche per robot con n gradi di libertà esista un range di carichi esterni entro il quale vi è un pieno controllo del sistema.
- E' possibile estendere il range di forze e momenti esterni che permettono una completa manipolazione del sistema aggiungendo ulteriori cavi. Questi robot sono chiamati *ridondanti*.
- Se un robot possiede un numero di cavi inferiore a n non è possibile la manipolazione di tutti i gradi di libertà. In questo caso si dice che il robot è *sottoattuato*.

Si faccia riferimento alla figura 1.1: nei primi due casi è possibile controllare tutti i gradi di libertà del sistema, mentre negli ultimi due questo non è possibile.

Se invece la richiesta è più stringente, cioè che il robot sia in grado di mantenere la posizione di equilibrio a fronte di un qualsiasi sistema di forze

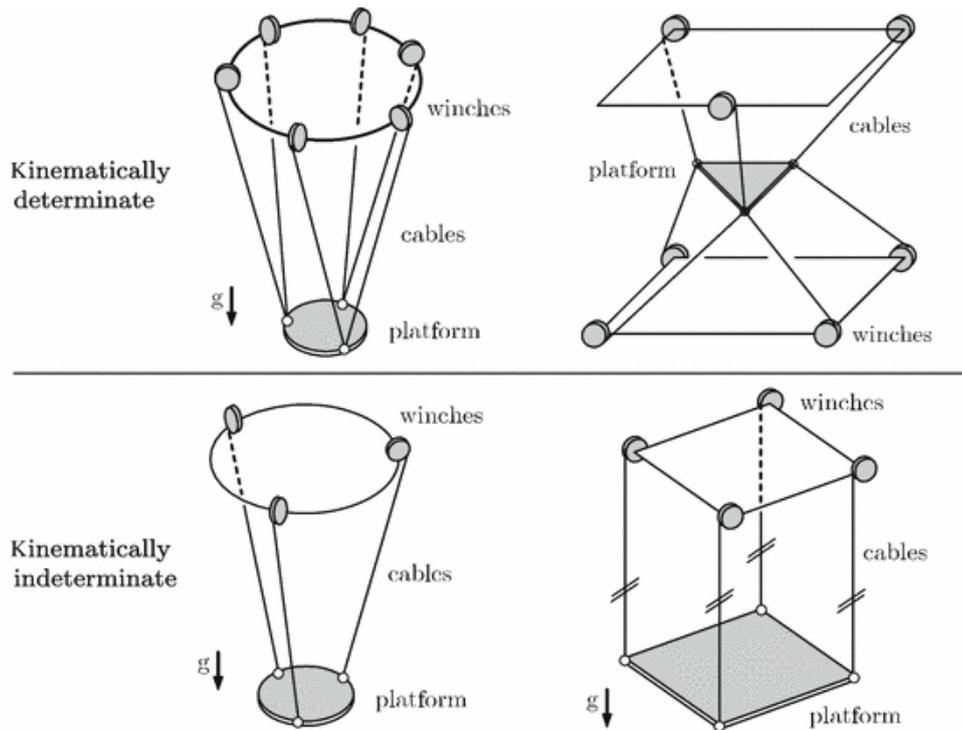


Figura 1.1: Robot pienamente attuati (in alto) e sottoattuati (in basso). (Fonte: Woernle, 2013)

e momenti esterni, si dice che esso è *pienamente vincolato*. In questo caso si ipotizza che le tensioni sui cavi non abbiano limiti massimi. Se questa condizione non è verificata, il robot è *sottovincolato*.

Queste tipologie di robot possono essere anche molto diverse le une dalle altre e presentare ciascuna la sua criticità di analisi o di controllo. Tuttavia è possibile individuare un canovaccio comune da seguire per l'analisi cinematica, statica e dinamica, che verrà presentato di seguito; durante l'esposizione verranno considerati i diversi modi di procedere a seconda della tipologia di robot considerato, o, dove fosse troppo specifico introdurre una regola generale, verranno messe in luce le difficoltà dell'analisi.

1.1.2 Procedimento generale di analisi di un robot a cavi

Si consideri un robot a N cavi con n gradi di libertà (fig. 1.2).

Ciascun cavo ha una estremità che passa per un punto fisso a telaio A_i (ad esempio un passacavo) e una estremità B_i collegata all'organo terminale. Quest'ultimo può essere puntiforme, o in generale può essere un corpo

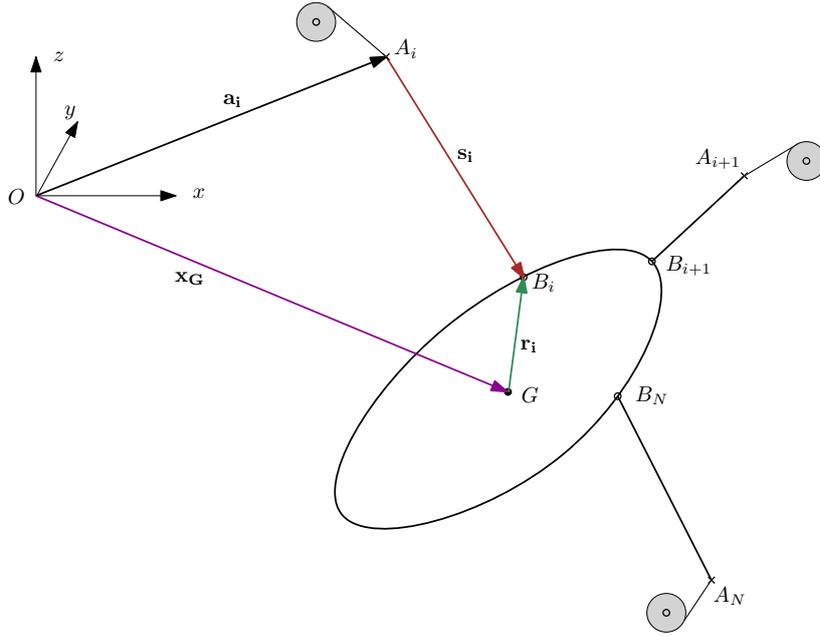


Figura 1.2: Schema di un robot a cavi generico

rigido con centro di massa G .

L'origine del sistema di riferimento assoluto può essere posta in un punto fisso scelto a piacere, ad esempio su uno dei due punti a telaio A_i .

La distanza tra il centro di massa dell'organo terminale dall'origine è espressa dal vettore \mathbf{x}_G . Le distanze $\overline{A_i - O}$ sono espresse dai vettori \mathbf{a}_i . Anche i cavi possono essere rappresentati da dei vettori $\mathbf{s}_i = \overline{B_i - A_i}$.

Si consideri poi un sistema di riferimento mobile solidale con l'organo terminale e con origine sul centro di massa $\sum_G x'y'z'$ e un altro sistema di riferimento mobile con origine in G ma con gli assi orientati come nel sistema di riferimento assoluto: $\sum_G xyz$ (fig. 1.3).

Si possono esprimere rispetto a $\sum_G x'y'z'$ le posizioni relative tra i punti di aggancio dei cavi sull'organo terminale e il centro di massa: $\mathbf{b}_i = \overline{B_i - G}$. I vettori \mathbf{b}_i possono essere riportati quindi al sistema di riferimento $\sum_G xyz$ e ribattezzati \mathbf{r}_i tramite la trasformazione:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{b}_i \quad i = 1, \dots, N \quad (1.1)$$

Dove $\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ è una opportuna composizione di rotazioni elementari secondo la notazione di Eulero o di Cardano.

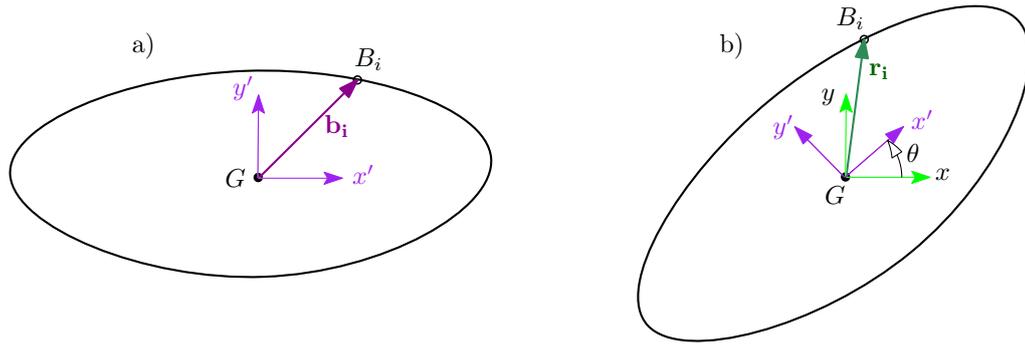


Figura 1.3: Sistema di riferimento dell'organo terminale in configurazione non ruotata (a) e in una configurazione generica (b)

Cinematica inversa di posizione

L'analisi cinematica inversa di posizione è il calcolo più semplice ed è possibile per ogni tipologia di robot a cavi sopra citata.

Nota la configurazione dell'organo terminale è possibile risalire alla lunghezza dei cavi grazie alle relazioni vettoriali

$$\|\mathbf{x}_G - \mathbf{r}_i - \mathbf{a}_i\|^2 = \|\mathbf{s}_i\|^2 = L_i^2 \quad i = 1, \dots, N \quad (1.2)$$

Si noti che nel caso di organo terminale non puntiforme, \mathbf{x}_G esprime la traslazione del centro di massa rispetto al sistema di riferimento assoluto, mentre \mathbf{r}_i è funzione della rotazione dell'organo terminale.

Cinematica diretta di posizione

- Se il numero di cavi è maggiore o uguale ai gradi di libertà del sistema, ($N \geq n$), note le lunghezze dei cavi è possibile trovare la configurazione dell'organo terminale mettendo a sistema n equazioni del tipo 1.2 esplicitate per n cavi a piacere. Nel caso di organo terminale puntiforme questo coincide con il punto di intersezione di più circonferenze nel caso piano o di più sfere nel caso spaziale i cui raggi sono i cavi. Se le soluzioni trovate sono più di una, bisogna scegliere quella che rientra nello spazio di lavoro.

Si prenda ad esempio un robot piano con organo terminale puntiforme; il sistema di riferimento assoluto sia posto in A_1 , e il vettore \mathbf{a}_2 sia $\mathbf{a}_2 = \{a_{2x} \ 0\}^T$. La soluzione della cinematica diretta di posizione,

scelti i cavi 1 e 2, è data dalle equazioni:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a2x^2 + L_1^2 - L_2^2}{2a2_x} \\ y &= \pm\sqrt{L_1^2 - x^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

dove y verrà scelto negativo se la struttura del robot si sviluppa per valori di y negativi (fig. 1.4).

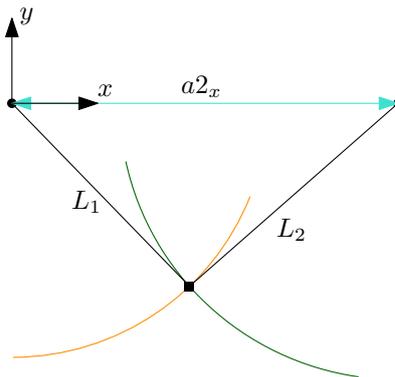


Figura 1.4: Cinematica diretta con organo terminale puntiforme: intersezione delle circonferenze formate dai cavi

- Se invece $N < n$, il metodo illustrato sopra non si può più applicare, e bisogna pertanto ricorrere a delle considerazioni geometrico-statiche ([7], [8], [9]) per determinare quale sia la configurazione statica corrispondente alle lunghezze dei cavi assegnate e alle forze esterne applicate. In questo caso infatti, a delle lunghezze dei cavi assegnate corrispondono infinite configurazioni dell'organo terminale; tuttavia è possibile determinare quali di queste sono configurazioni di equilibrio statico, e quali sono stabili (per una trattazione completa sulle definizioni di punti di equilibrio si rimanda il lettore a [10]).

Un approccio alternativo per risolvere il problema cinematico diretto in un robot sottovincolato è lo studio dei punti di equilibrio come punti di minimo dell'energia potenziale del sistema [11]. E' noto infatti che la variazione dell'energia potenziale è l'opposto del lavoro virtuale prodotto da tutte le forze che agiscono sull'organo terminale; attraverso una formulazione energetica del problema (che richiede tuttavia degli algoritmi avanzati di risoluzione) è possibile quindi studiare la stabilità all'equilibrio.

Cinematica inversa di velocità

Quando si introduce la cinematica di velocità, non è tanto alla velocità di allungamento/accorciamento dei cavi a cui si è interessati, quanto alla velocità con cui ruotano dei rocchetti fissati ai motori che hanno il compito di avvolgere/svolgere i cavi (1.5).

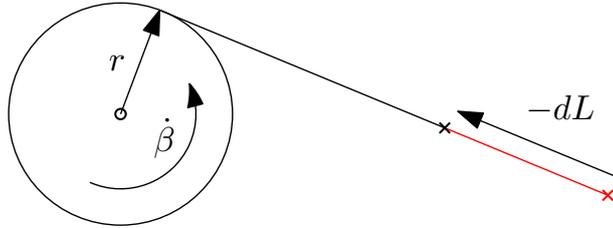


Figura 1.5: Rappresentazione dell'avvolgimento del cavo sul rocchetto

Le coordinate di velocità sono positive nel caso in cui i cavi vengano avvolti. Pertanto si può scrivere

$$\dot{\beta}_i = -\frac{\dot{L}_i}{r} \quad i = 1, \dots, N \quad (1.4)$$

Integrando l'equazione 1.4 è possibile definire anche una coordinata di posizione dei rocchetti:

$$\beta_i = \frac{L_{i0}}{r} - \frac{L_i}{r} \quad i = 1, \dots, N \quad (1.5)$$

dove L_{i0} è la lunghezza iniziale del cavo i -esimo e r è il raggio del rocchetto sul quale si avvolge il cavo.

E' possibile esprimere le velocità $\dot{\beta}_i$ in funzione delle velocità dell'organo terminale e risolvere così il problema della cinematica inversa di velocità.

Si definiscono a tal fine i seguenti vettori:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_{10}}{r} - \frac{L_1}{r} \\ \vdots \\ \frac{L_{N0}}{r} - \frac{L_N}{r} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

ed un vettore composto dalle coordinate generalizzate dell'organo ter-

minale:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

E' quindi possibile scrivere la relazione:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \quad (1.8)$$

dove $\dot{\mathbf{x}}$ è composto dalle accelerazioni di ciascuna coordinata generalizzata, e la jacobiana $\mathbf{J} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{x}}$ è una matrice $N \times n$ così definita:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \beta_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \beta_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \beta_N}{\partial x_1} & \frac{\partial \beta_N}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \beta_N}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Cinematica diretta di velocità

A partire dalla relazione 1.8 si vuole passare ad una relazione inversa che esprime le velocità $\dot{\mathbf{x}}$ in funzione di $\dot{\boldsymbol{\beta}}$. Tuttavia la jacobiana \mathbf{J} (eq. 1.9) in generale non è una matrice invertibile (in generale non è neppure quadrata), pertanto bisogna ricorrere all'uso della matrice pseudoinversa $\mathbf{J}^\#$. Qui di seguito la definizione di pseudoinversa [12]:

Definizione 1.1 (Pseudoinversa). *Una pseudoinversa di una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è una matrice $\mathbf{X} = \mathbf{A}^\# \in \mathbb{R}^{n \times m}$ che soddisfa le seguenti equazioni:*

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{A} &= \mathbf{A} \\ \mathbf{X} \mathbf{A} \mathbf{X} &= \mathbf{X} \\ (\mathbf{A} \mathbf{X})^T &= \mathbf{A} \mathbf{X} \\ (\mathbf{X} \mathbf{A})^T &= \mathbf{X} \mathbf{A} \end{aligned}$$

Per determinare la pseudoinversa a partire dalla matrice \mathbf{A} di partenza, si consideri la seguente proposizione:

Proposizione 1.1. *Data $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, se $m < n$ e $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$, allora $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ è non singolare e vale:*

$$\mathbf{A}^\# = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \quad (1.10)$$

Se invece $m > n$ e $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$, allora $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ è non singolare e vale:

$$\mathbf{A}^\# = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (1.11)$$

Al fine di risolvere il problema cinematico diretto di velocità, si riporta qui un teorema importante sull'uso della pseudoinversa per la risoluzione di problemi lineari:

Teorema 1.1 (Soluzioni del problema dei minimi quadrati). *Per una equazione lineare di $x \in R^n$*

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (1.12)$$

dove $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$ e $\mathbf{y} \in R^m$, la forma generale delle soluzioni del problema dei minimi quadrati è data da:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^\# \mathbf{y} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^\# \mathbf{A}) \mathbf{z} \quad (1.13)$$

dove \mathbf{z} è un vettore arbitrario e \mathbf{I} è una matrice identità. La soluzione che ha norma minima tra tutte le soluzioni possibili 1.13 è

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^\# \mathbf{y} \quad (1.14)$$

Tornando all'inversione della matrice jacobiana \mathbf{J} , si può affermare allora che la soluzione più prossima alla soluzione del problema cinematico diretto di velocità è data da:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}^\# \dot{\boldsymbol{\beta}} \quad (1.15)$$

Dove $\mathbf{J}^\#$ è così definito:

- Se $N > n$, allora $\mathbf{J}^\# = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T$
- Se $N < n$, allora $\mathbf{J}^\# = \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1}$
- Se $N = n$ e $\text{rank}(\mathbf{J}) = N$, allora $\mathbf{J}^\# = \mathbf{J}^{-1}$

Procedimento per ricavare la legge di moto

E' possibile delineare un procedimento standard per ricavare la legge di moto di un robot a cavi, utilizzando un approccio newtoniano (come in [13], [14]). Si scompone il robot in due parti: l'organo terminale, la cui posizione è espressa dalle coordinate \mathbf{x} , e i rocchetti collegati ai motori su cui si avvolgono i cavi, la cui rotazione è espressa dalle componenti $\boldsymbol{\beta}$. Si

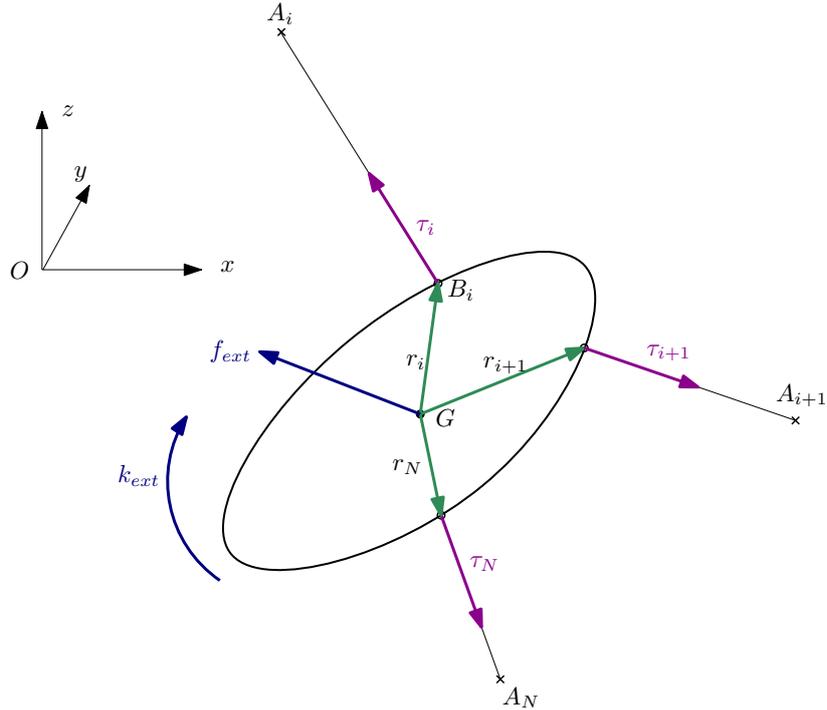


Figura 1.6: Forze e momenti agenti sull'organo terminale

scrivono quindi le equazioni di equilibrio per l'organo terminale e i rocchetti, e infine si compongono per scrivere le equazioni del moto.

- *Equilibrio organo terminale (fig. 1.6).*

Si scrivono le equazioni cardinali della dinamica per l'organo terminale. Nel caso l'organo terminale sia puntiforme, basterà scrivere

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} \quad (1.16)$$

dove \mathbf{M} è la matrice di massa, $\ddot{\mathbf{x}}$ è il vettore accelerazione del centro di massa e \mathbf{f} è un vettore che riassume la risultante delle tensioni dei cavi le forze esterne che agiscono.

Se invece l'organo terminale è un corpo rigido, è necessario scrivere anche le equazioni relative all'equilibrio dei momenti rispetto al centro di massa:

$$\mathbf{I}_e \ddot{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{k} \quad (1.17)$$

dove \mathbf{I}_e è la matrice dei momenti di inerzia, $\ddot{\boldsymbol{\phi}}$ è un vettore che esprime le accelerazioni angolari del corpo e \mathbf{k} è un vettore che riassume i momenti esterni applicati.

Le equazioni 1.16 e 1.17 si possono unire in una notazione compatta,

dove \mathbf{M} combina la matrice di massa e dei momenti di inerzia, $\ddot{\mathbf{x}}$ è un vettore che contiene sia le componenti di accelerazione lineari che angolari, e \mathbf{f} è un vettore che contiene sia le componenti delle forze che dei momenti esterni. In particolare \mathbf{f} è composto da:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{tens} + \mathbf{f}_{ext} + \mathbf{k}_{ext} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} \quad (1.18)$$

dove \mathbf{f}_{tens} sono le componenti cartesiane delle tensioni dei cavi, \mathbf{f}_{ext} sono le forze esterne applicate, tra cui ad esempio la forza peso, e \mathbf{k}_{ext} sono i momenti esterni applicati.

Le forze e le coppie esterne possono essere espresse con un unico vettore, detto *wrench*:

$$\mathbf{w}_{ext} = \mathbf{f}_{ext} + \mathbf{k}_{ext} \quad (1.19)$$

E' quindi possibile andare a scomporre l'effetto delle tensioni in termini di forze e momenti sull'organo terminale con la relazione:

$$\mathbf{f}_{tens} = \mathbf{S} \boldsymbol{\tau} \quad (1.20)$$

dove $\boldsymbol{\tau}$ sono le tensioni dei cavi e \mathbf{S} è la matrice di equilibrio statico che separa le componenti cartesiane delle tensioni. Le tensioni dei cavi $\boldsymbol{\tau}$ agiscono lungo la direzione dei cavi e sono sempre di trazione.

La matrice di equilibrio statico \mathbf{S} è così formata:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\mathbf{s}_1 & -\mathbf{s}_2 & \cdots & -\mathbf{s}_N \\ \mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}_1 & \mathbf{s}_2 \times \mathbf{r}_2 & \cdots & \mathbf{s}_N \times \mathbf{r}_N \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

dove \mathbf{s}_i sono i vettori che collegano i punti $\overline{B_i - A_i}$ e \mathbf{r}_i sono i vettori che collegano $\overline{B_i - G}$.

- *Equilibrio rocchetti (fig. 1.7).*

Le coppie che agiscono sui rocchetti possono essere espresse tramite un vettore $\boldsymbol{\kappa}$ così definito:

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_N \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

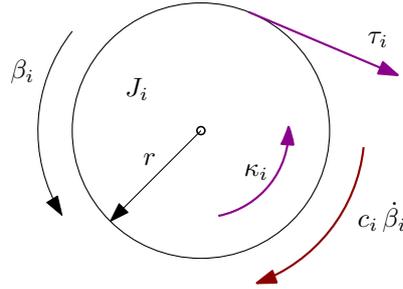


Figura 1.7: Coppie e momenti agenti sui rocchetti

Per ciascun rocchetto, la coppia deve vincere l'inerzia, la componente di attrito viscoso di rotazione, e il momento esercitato dal cavo. Si può quindi esprimere l'equilibrio alle rotazioni mediante la relazione:

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{I}_m \ddot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{C}_m \dot{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\tau} r \quad (1.23)$$

dove \mathbf{I}_m è una matrice diagonale che contiene i momenti di inerzia dei motori, \mathbf{C}_m è una matrice diagonale con i coefficienti di smorzamento, $\boldsymbol{\tau}$ sono le tensioni dei cavi e r è il raggio del rocchetto.

- *Composizione delle equazioni.* Le equazioni 1.18 e 1.23 hanno in comune il termine $\boldsymbol{\tau}$ relativo alle tensioni, pertanto potranno essere unite in un'unica espressione che sarà la legge di moto. Prima di unirle però è necessario esprimere anche 1.23 in funzione di \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$ e $\ddot{\mathbf{x}}$.

A tal fine si richiama l'equazione 1.8:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}$$

che può essere a sua volta derivata rispetto al tempo, ottenendo:

$$\ddot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{x}} \ddot{\mathbf{x}} \quad (1.24)$$

Si riscrive quindi l'equazione 1.23 nella forma:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{r} \left(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{I}_m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{x}} \ddot{\mathbf{x}} \right) - \mathbf{C}_m \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \right) \quad (1.25)$$

e andando a sostituire 1.25 in 1.18 si ottiene:

$$r\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{S}\mathbf{I}_m \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{S} \left(\mathbf{I}_m \frac{d}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_m \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \right) = \mathbf{S}\boldsymbol{\kappa} + r(\mathbf{w}_{ext})$$

Semplificando la notazione si giunge alla formulazione dell'equazione del moto:

$$\mathbf{M}_{eq}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{S}\boldsymbol{\kappa} + r(\mathbf{w}_{ext}) \quad (1.26)$$

Il termine $\mathbf{M}_{eq}(\mathbf{x})$ è la matrice di massa equivalente, e vale:

$$\mathbf{M}_{eq}(\mathbf{x}) = r\mathbf{M} + \mathbf{S}\mathbf{I}_m \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \quad (1.27)$$

mentre il termine $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ contiene tutti i termini dinamici non lineari (attrito, Coriolis...):

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{S} \left(\mathbf{I}_m \frac{d}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{C}_m \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \right) \dot{\mathbf{x}} \quad (1.28)$$

1.2 Pianificazione del moto e controllo

Pianificare la traiettoria significa stabilire la modalità con cui il movimento dal punto iniziale al punto finale deve avvenire, ovvero con quali profili di posizione, velocità ed accelerazione. Una corretta pianificazione consente al sistema di controllo del moto in anello chiuso di inseguire correttamente la traiettoria, evitando il raggiungimento di condizioni limiti nelle tensioni dei cavi.

L'obiettivo dell'azione di controllo è fare in modo che l'uscita del sistema segua l'ingresso a prescindere dai disturbi che influenzano il sistema dall'esterno e dalle variazioni parametriche interne al sistema stesso.

Pianificazione del moto

Quando si possiede il modello dinamico di un robot a cavi, è possibile esprimere l'andamento nel tempo delle tensioni nei cavi, come espresso nella eq 1.25. Questo permette di scrivere delle disuguaglianze del tipo:

$$\boldsymbol{\tau}_{min} \prec \boldsymbol{\tau} \prec \boldsymbol{\tau}_{max} \quad (1.29)$$

dove il simbolo \prec indica che la disuguaglianza vale per ogni singola componente, τ_{min} è il valore minimo di tensione accettabile nei cavi e τ_{max} è il limite massimo.

Lo studio della pianificazione del moto indaga la possibilità muovere il robot lungo traiettorie che rendano verificata la relazione 1.29.

La ricerca scientifica analizza questo problema da due aspetti diversi e complementari:

- Definizione spazio di lavoro. Si definisce innanzitutto per quali condizioni, considerato il robot in esame, è ammesso uno spazio di lavoro staticamente ammissibile (*Static Equilibrium Workspace* - SEW), cioè esistono delle configurazioni in cui il robot, sottoposto alla sola forza peso, è in grado di mantenere inalterata la propria configurazione, sostenuto dalle appropriate tensioni nei cavi [15]-[16]. E' possibile restringere la definizione del SEW, definendo un nuovo spazio di lavoro che comprenda le configurazioni dell'organo terminale per le quali è possibile ottenere l'equilibrio statico del robot sottoposto alla sola forza di gravità usando un range limitato di tensioni nei cavi; questo set di configurazioni prende il nome di *Statically-Feasible Workspace* (SFW) [17].

Più in generale è possibile trovare uno spazio di lavoro che comprende le posizioni di equilibrio statico di un robot sottoposto a uno specifico range di wrench esterni, mantenendo le tensioni dei cavi limitate, definito *Wrench-Feasible Workspace* (WFW) [1].

Non trova un equivalente nei robot seriali tradizionali invece la definizione di spazio di lavoro *dinamicamente ammissibile* [18], cioè una serie di configurazioni per le quali è possibile uno specifico equilibrio dinamico; in altre parole questo spazio di lavoro descrive le configurazioni che l'organo terminale può raggiungere durante il movimento, senza necessariamente che tali configurazioni vengano mantenute all'equilibrio. La ricerca in questo ambito mira a sviluppare delle tecniche di pianificazione del moto usando traiettorie non limitate allo spazio di lavoro statico [19].

- Studio della traiettoria. Si cerca un tipo di traiettoria che consenta di rendere verificata la condizione 1.29 sulle tensioni, ottimizzando dei parametri come il tempo di percorrenza [20] o l'energia meccanica assorbita dagli attuatori [21]. E' possibile minimizzare il tempo di percorrenza analizzando in ogni punto del percorso previsto la velo-

cità e l'accelerazione massima consentite affinché le tensioni dei cavi rimangano limitate; il limite di questo approccio è la possibilità di definire un profilo di velocità non uniforme che può indurre vibrazioni non previste sui cavi.

Se insieme al tempo di percorrenza si considera anche l'energia assorbita dai motori, è possibile minimizzare una funzione di costo definita come somma dei pesi attribuiti al tempo di percorrenza e all'energia meccanica.

Nel caso di robot sottovincolati, la pianificazione della traiettoria si arricchisce di difficoltà, perché tali robot utilizzano la gravità per mantenere i cavi in tensione e appaiono dei limiti ancora più stringenti su velocità e accelerazioni massime che possono essere raggiunte lungo il percorso [22]. Un approccio utilizzato per la pianificazione del moto in questi casi è limitare la velocità e l'accelerazione massima ai valori più stringenti lungo la traiettoria da effettuare.

Diversi approcci sono stati sviluppati per trovare una strategia di controllo efficiente e per caratterizzare lo spazio di lavoro in cui i cavi mantengono le tensioni positive. In [15] vengono definite le condizioni per le quali un robot a cavi possa mantenere l'equilibrio statico, mentre in [23] vengono studiate delle geometrie in cui l'intero spazio di lavoro consenta di avere staticamente tensioni positive. Inoltre è stato analizzato uno spazio di lavoro per specifiche direzioni di moto e accelerazioni [18] e un metodo di distribuzione delle forze per evitare tensioni nulle o tensioni eccessive nei cavi [24]. In [25] si trova una trattazione sul controllo di robot a cavi ipervincolati.

Controllo

Si è visto come la condizione sulla positività e limitatezza delle tensioni nei cavi abbia portato a sviluppare delle nuove tecniche di pianificazione della traiettoria rispetto ai robot paralleli tradizionali. Allo stesso modo bisogna considerare che delle incertezze sulle proprietà del robot modellizzato potrebbero portare ad una evoluzione del sistema diversa da quella stimata, e quindi ad avere tensioni dei cavi che escono dal range fissato dalla relazione 1.29.

E' compito del controllo quindi assicurare che le tensioni dei cavi si mantengano positive e limitate, correggendo eventuali errori nel modello dinamico.

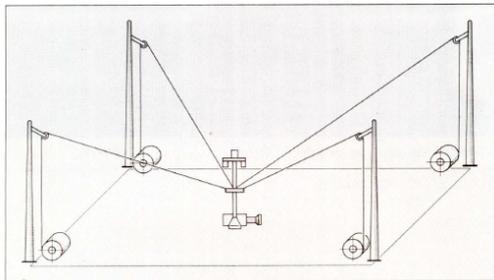
E' possibile quindi utilizzare un sistema di controllo di tipo PID, inserendo nell'algoritmo dei termini correttivi che 'quantificano' il grado di incertezza nelle matrici $M_{eq}(\mathbf{X})$, $\mathbf{N}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$ e $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ viste nel capitolo 1.1.2 [26].

Un ramo nello sviluppo della ricerca sul controllo riguarda i robot sottoattuati, come caso particolare dello studio dei sistemi sottoattuati ai quali è imposta una particolare traiettoria [27].

Poiché la posizione dell'organo terminale non è completamente determinata dalla lunghezza dei cavi, è possibile che si verifichino delle oscillazioni dell'organo terminale rispetto alla traiettoria prevista. E' possibile quindi sviluppare uno schema di controllo che permetta alla piattaforma mobile di seguire una data traiettoria, grazie a un feedback che agisce smorzando le oscillazioni [28].

In [29] viene proposta una metodologia di controllo basata sull'idea di fare dondolare l'organo terminale lungo traiettorie punto-a-punto, di fatto sfruttando le oscillazioni del grado sottoattuato del sistema.

1.3 Applicazioni



(a) Supporto fisico e movimentazione di Skycam (Cone, Ottobre 1985)

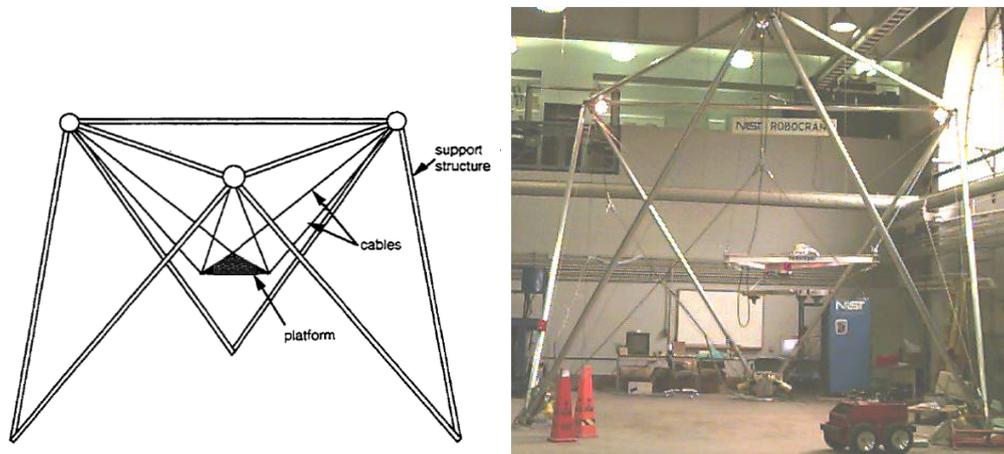


(b) Cablecam, versione commerciale di Skycam (www.cablecam.com)

Le prime applicazioni di robot a cavi risalgono alla fine degli anni '80; è proprio di questi anni Skycam [30], un sistema di video-ripresa aerea largamente utilizzato negli stadi (fig. 1.8b). In questa applicazione i cavi permettono una movimentazione rapida della telecamera e di coprire una superficie molto grande.

I cavi offrono un'ottima resistenza a trazione, e sono adatti per applicazioni di sollevamento carichi. E' per questo che fin dai primi anni '90 sono

stati sviluppati dei robot per la movimentazione di carichi pesanti [31] e nel settore delle costruzioni [2].



(a) Schematizzazione della struttura di (b) Foto del prototipo di RoboCrane al
RoboCrane (Albus, Maggio 1992) NIST

Il RoboCrane, sviluppato dall'American National Institute of Standards and Technology (NIST), è costituito da sei cavi che supportano una piattaforma mobile. La struttura è costituita da un triangolo superiore, di cui ciascun vertice supporta due cavi, e da tre triangoli che fungono da supporto (fig. 1.9a). Oltre al sollevamento di carichi, il RoboCrane è stato utilizzato in altri settori, quali l'ispezione di aereoporti e la raccolta di rifiuti.

L'assenza di link rigidi rende i robot a cavi meno 'invasivi' dei robot seriali e paralleli tradizionali, e risultano quindi adatti all'interazione con l'uomo. Sono state sviluppate infatti delle applicazioni medicali nel campo della riabilitazione [32]-[33].

L'università di Padova ha sviluppato nel 2007 NeReBot (NEuroREhabilitation roBOT), uno strumento di riabilitazione che permette la stimolazione dell'arto superiore semplicemente fissando l'avabraccio del paziente ad un supporto e affidando la movimentazione a tre cavi di nylon (fig. 1.10).

Un campo di applicazione in cui viene sfruttata la leggerezza, la trasportabilità e la facilità di installazione dei robot a cavi è quello della ricerca e soccorso [34], [35], [36].

Uno studio condotto in Francia al INRIA (Institut national de recherche en informatique et en automatique) presenta un prototipo di robot a cavi da utilizzare nelle operazioni di soccorso, che dispone di numerosi accorgimenti



Figura 1.10: NeReBot (Università di Padova, 2007)

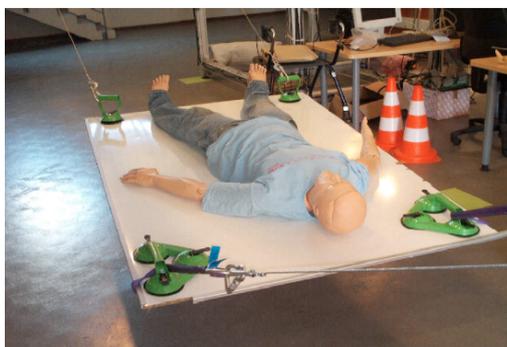
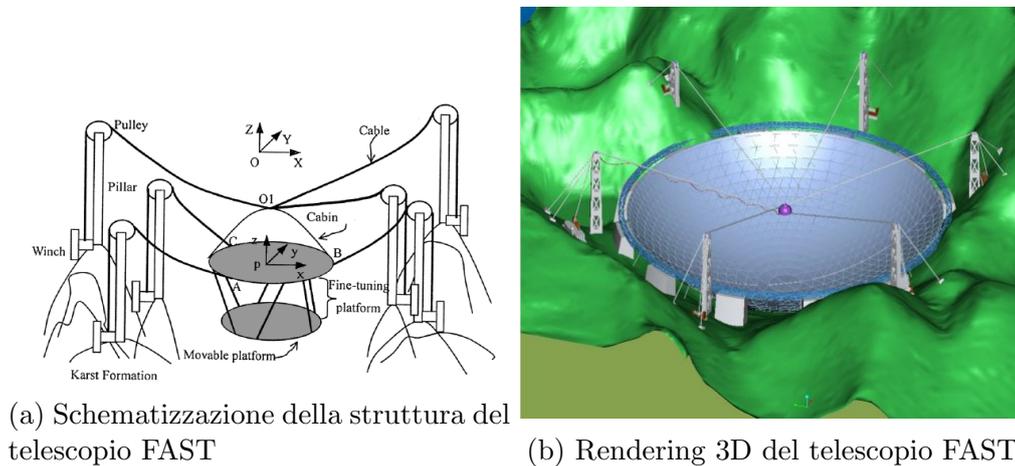


Figura 1.11: Prototipo di robot per ricerca e soccorso (INRIA, 2010)

in termini di portabilità e flessibilità dei punti di ancoraggio dei cavi al suolo e sulla piattaforma, nonché di un sistema di controllo nel caso si utilizzi un numero di cavi inferiore ai gradi di libertà (fig. 1.11). Il sistema è equipaggiato anche di una telecamera termica per la localizzazione della vittima.



Una applicazione molto avanzata dei robot a cavi è la movimentazione del telescopio cinese Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope (FAST) [37]-[38]. Il FAST sarà operativo entro il 2016, e diventerà il più grande radio telescopio a disco singolo mai costruito.

Lo sviluppo di questo progetto richiede una modellazione molto avanzata, dal momento che le dimensioni del telescopio richiedono di considerare anche l'elasticità dei cavi e la loro massa (fig. 1.12a). Di conseguenza anche la pianificazione del moto e il controllo risultano molto più complicati.

Capitolo 2

Finalità del lavoro

In questo capitolo verrà esposto l'obiettivo di questa tesi, insieme al modello che sarà analizzato e simulato.

2.1 Obiettivo

Nel capitolo precedente sono state delineate le caratteristiche generali dei robot a cavi, e sono state confrontate diverse tipologie. Nell'espone un procedimento generale di analisi sono state evidenziate le differenze tra lo studio di un robot pienamente vincolato e di un robot sottoattuato; in particolare è per quest'ultima tipologia che sono state evidenziate le maggiori difficoltà, sia per l'analisi cinematica che per il controllo.

Questo lavoro intende approfondire questi aspetti peculiari dei *robot sottoattuari*; in particolare si vogliono evidenziare i seguenti:

- *Problema dell'equilibrio statico.* In un robot in cui il numero di cavi è inferiore ai gradi di libertà, il problema cinematico diretto ammette infinite soluzioni. Tuttavia se le forze che agiscono sull'organo terminale sono in equilibrio statico, il robot assume una configurazione ben precisa. In questo lavoro si indagherà se esiste, nel caso di un robot sottoattuato piano, una relazione tra la lunghezza dei cavi e la posizione di equilibrio che l'organo terminale assume sottoposto alla sua forza peso.
- *Problema del controllo.* Il fatto che i cavi attuati siano in numero inferiore rispetto ai gradi di libertà del robot pone un limite sulla capacità di controllo del sistema. Questo significa che in un robot con $N = 2$ cavi e $n = 3$ gradi di libertà, potranno essere controllati

pienamente solo due movimenti, senza poter controllare il terzo. Si vuole approfondire se questo possa costituire un limite nell'impiego di questa tipologia di robot percorrendo traiettorie di tipo rettilineo o circolare, o se si possono comunque trovare delle tecniche di controllo per ottenere un movimento accettabile.

- *Problema della pianificazione.* Nel caso di robot non pienamente vincolati è necessario pianificare accuratamente la traiettoria per assicurarsi che durante il movimento i cavi mantengano sempre tensioni positive e limitate entro un valore minimo e un valore massimo. Questa analisi è ancora più importante quando bisogna pianificare il moto di un robot sottoattuato: se un cavo diventa lasco infatti si perde il controllo su un ulteriore grado di libertà, e il robot potrebbe assumere posizioni imprevedibili.

Obiettivo di questo lavoro è quindi fornire una trattazione adeguata degli aspetti evidenziati sopra, analizzandoli in dettaglio su un modello di robot a cavi sottoattuato piano.

2.2 Modello analizzato

Con il termine *sottoattuato* si indica che il numero di gradi di libertà controllabili è inferiore ai gradi di libertà del sistema; questa condizione si verifica sempre quando il numero di cavi è inferiore al numero di gradi di libertà. Pur restringendo il campo, le tipologie di robot che sono comprese in questo insieme sono numerose; si possono quindi individuare:

- Robot che operano nello spazio oppure nel piano; in questo secondo caso il piano su cui operano è quello verticale, in modo che la forza peso mantenga i cavi in tensione.
- Organi terminali costituiti da un unico corpo (*single-body*) o da più corpi (*multi-body*).
- Cavi che convergono in unico punto o in punti distinti (fig. 2.1). Nel primo caso l'organo terminale o il carico agganciato ad esso risulta essere un corpo sospeso vincolato in un solo punto. Nel secondo caso invece ciascun cavo funge da vincolo distinto per l'organo terminale.

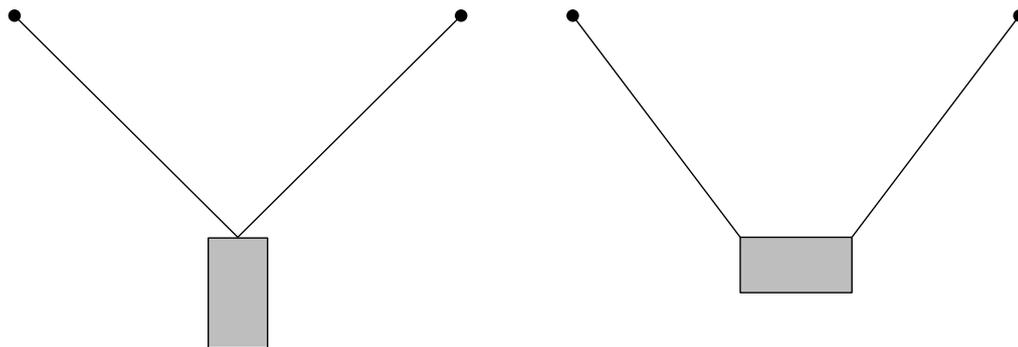


Figura 2.1: Esempio di robot con cavi convergenti in un unico punto (sinistra) e in punti distinti (destra)

In questo lavoro verrà analizzato un modello piano, con un organo terminale costituito da un unico corpo rigido assimilabile ad una piastra, sostenuto da due cavi agganciati in due punti distinti (fig. 2.2). Qui di seguito ne è riportata una descrizione dettagliata, con le motivazioni delle scelte della geometria.

- *Organo terminale* ①. L'organo terminale è modellizzabile come una piastra il cui centro di massa non coincide necessariamente con il baricentro geometrico. Esso è dotato di massa m e momento di inerzia I_e .
Questo organo terminale può traslare nel piano di lavoro (in x e z) e può ruotare attorno al suo baricentro (con un angolo di rotazione θ).
- *Cavi* ②. L'elasticità dei cavi è considerata trascurabile, la loro massa è trascurabile. Ciascun cavo è agganciato per una estremità ad un punto dell'organo terminale B_i ($i = 1, 2$) e per l'altra estremità viene avvolto su un rocchetto, passando attraverso un passacavo fisso A_i ($i = 1, 2$) che ne assicura la posizione.
La lunghezza varia a seconda della quantità di cavo che viene avvolta o svolta dai rocchetti. I cavi solo esercitare una forza di trazione entro un valore massimo t_{max} .
- *Motori e rocchetti* ③. Ciascun rocchetto può ruotare per avvolgere e svolgere il cavo. Il moto di ciascun rocchetto è possibile grazie a un motore che può ruotare sia in verso orario che antiorario. Il movimento dei motori è controllato in coppia.

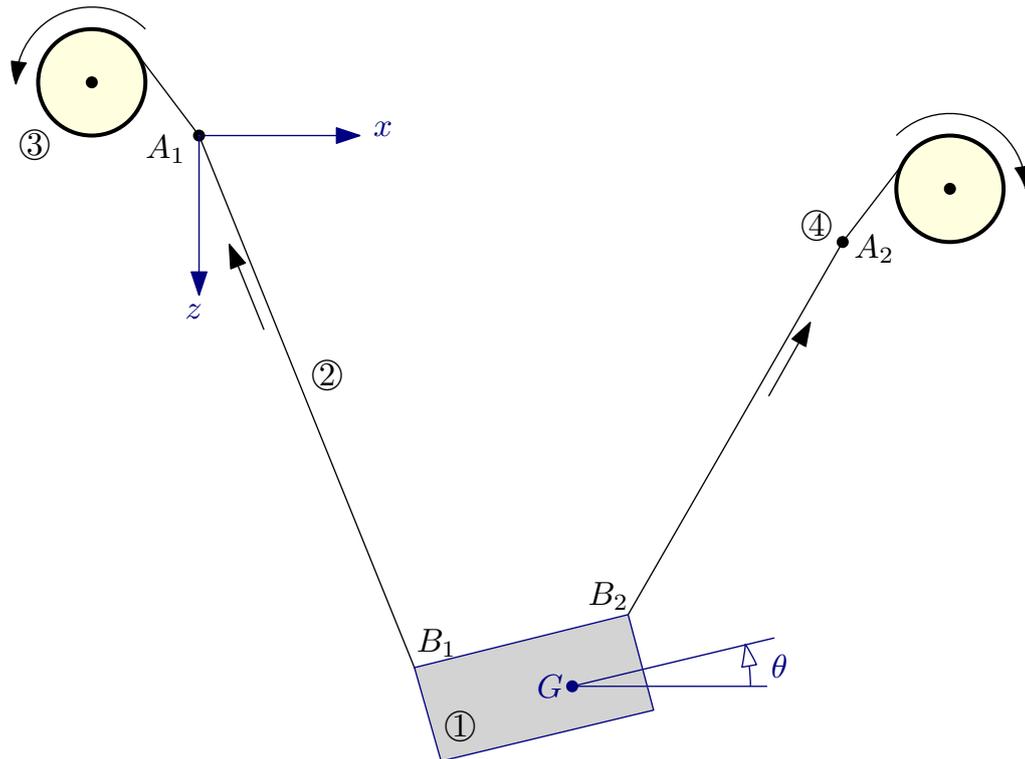


Figura 2.2: Schema del modello di robot verticale analizzato

- *Passacavi* ④. I passacavi sono dei punti fissati a telaio per i quali si forza il passaggio dei cavi. L'origine del sistema di riferimento assoluto è posizionata su uno dei due passacavi, e la loro posizione reciproca è un parametro che può essere fissato a seconda della dimensione dello spazio di lavoro che si vuole ottenere.

Nei capitoli che seguono verrà analizzato cinematicamente e dinamicamente (cap. 3) il modello sopra descritto, dopodiché verranno trattate le tematiche del controllo (cap. 4) e della pianificazione della traiettoria (cap. 5).

Infine un capitolo dedicato alle simulazioni (cap. 6) mostrerà i risultati ottenuti e fornirà una validazione del modello.

Capitolo 3

Analisi geometrico-statica e dinamica

In questo capitolo verranno analizzate le relazioni che governano la cinematica e la dinamica di un robot con due cavi verticale a tre gradi di libertà. Il modello considerato è costituito da un corpo rigido sostenuto da due cavi che vengono a loro volta avvolti da due motori (fig. 2.2), come visto precedentemente nella sezione 2.2.

3.1 Analisi geometrico-statica

L'organo terminale, costituito da un corpo rigido di massa m e momento di inerzia I_e , possiede tre gradi di libertà esprimibili tramite le coordinate x , z e θ . L'origine del sistema di riferimento è posta su uno dei due passacavi $O \equiv A_1$, l'asse x è orientato verso destra e l'asse z è orientato verso il basso. L'organo terminale può cambiare posizione grazie all'allungamento o all'accorciamento dei due cavi, che hanno lunghezza L_1 e L_2 . La lunghezza dei cavi è controllata dal movimento di due rocchetti attuati, la cui rotazione è misurata dagli angoli β_1 e β_2 . Le lunghezze dei cavi e gli angoli di rotazione dei rocchetti sono legati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{L_{10}}{r} - \frac{L_1}{r} \\ \beta_2 &= \frac{L_{20}}{r} - \frac{L_2}{r}\end{aligned}\tag{3.1}$$

dove L_{10} e L_{20} sono le lunghezze iniziali dei cavi e r è il raggio dei rocchetti.

Si possono esprimere le relazioni tra i diversi punti della geometria del modello mediante i seguenti vettori (fig. 3.1):

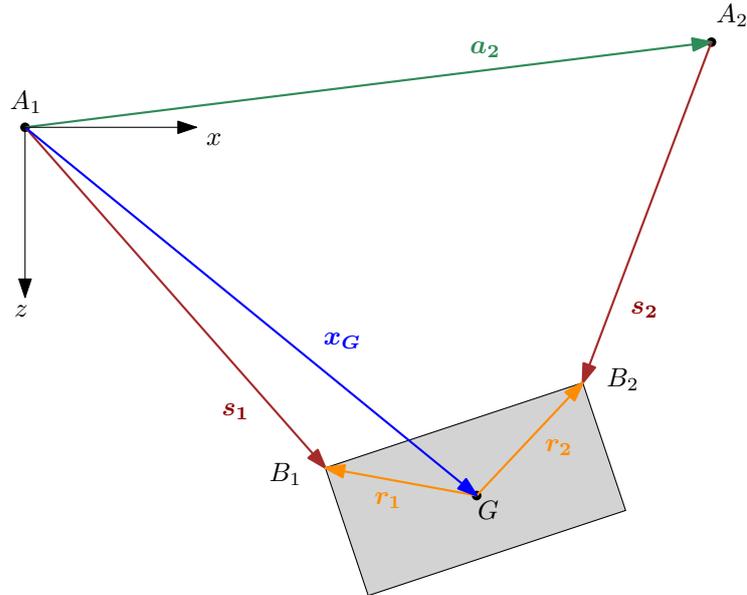


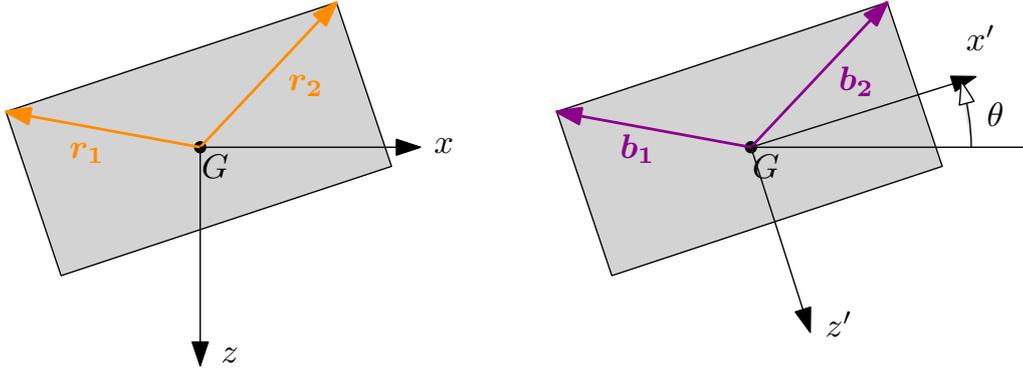
Figura 3.1: Relazioni geometriche espresse tramite vettori

- Il vettore \mathbf{x}_G collega l'origine del sistema di riferimento O con il centro di massa G .
- Il vettore \mathbf{a}_2 collega i due punti a telaio A_1 e A_2 corrispondenti ai due passacavi dei cavi collegati ai motori.
- Il vettore \mathbf{s}_1 collega A_1 a B_1 , che è il punto in cui il cavo si collega al corpo sospeso. Analogamente \mathbf{s}_2 collega A_2 con B_2 , il punto di aggancio del secondo cavo.
- Il vettore \mathbf{r}_1 collega il centro di massa G con B_1 . \mathbf{r}_2 collega G con B_2 .

Tutti i vettori citati sono espressi tramite le loro componenti cartesiane rispetto al sistema di riferimento O_{xyz} . E' possibile però riportare il sistema di riferimento sul punto G e ruotarlo dell'angolo θ per potere esprimere le relazioni tra G e i punti B_1 e B_2 tramite i vettori \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 (fig. 3.2):

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} b_i \cos \phi_i \\ -b_i \sin \phi_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (3.2)$$

dove \mathbf{b}_i è la lunghezza del segmento $\overline{GB_i}$ e ϕ_i è l'angolo che si ottiene tramite una rotazione in verso antiorario dell'asse x fino a sovrapporsi al segmento $\overline{GB_i}$.


 Figura 3.2: Passaggio da \mathbf{b}_i a \mathbf{r}_i

I vettori \mathbf{r}_i e \mathbf{b}_i sono quindi legati da una rotazione attorno all'asse y dell'angolo θ . La matrice di rotazione che li lega è:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Si possono esprimere i vettori \mathbf{r}_i in funzione di \mathbf{b}_i e dell'angolo di rotazione θ tramite la relazione:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} \mathbf{b}_i \quad (3.4)$$

E' evidente che il problema diretto dell'individuazione della posizione x z e θ a partire da L_1 e L_2 è cinematicamente indeterminato: fissate le lunghezze dei cavi, ci sono infinite posizioni ammissibili di x z e θ . Tuttavia, riducendo l'indagine alle configurazioni di equilibrio che si possono ottenere staticamente, è possibile ridurre le soluzioni ad un numero finito. Questo sarà definito *problema geometrico-statico diretto*.

Il problema cinematico inverso invece è determinato conoscendo le tre coordinate spaziali; basta infatti risolvere le due equazioni 3.5 per ottenere le lunghezze dei due cavi.

$$\begin{aligned} L_1 &= \sqrt{\|\mathbf{x}_G + \mathbf{r}_1\|^2} \\ L_2 &= \sqrt{\|\mathbf{x}_G + \mathbf{r}_2 - \mathbf{a}_2\|^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

E' possibile trovarsi però nella condizione di conoscere solo x e z ma di non sapere il valore di θ . Anche in questo caso quindi si può indagare se esiste una configurazione di equilibrio statico analizzando le forze agenti sull'organo terminale; si tratta del *problema geometrico-statico inverso*.

Proprio per la sua importanza negli sviluppi di questo lavoro, cominceremo dalla trattazione di questo secondo caso.

3.1.1 Analisi geometrico-statica inversa

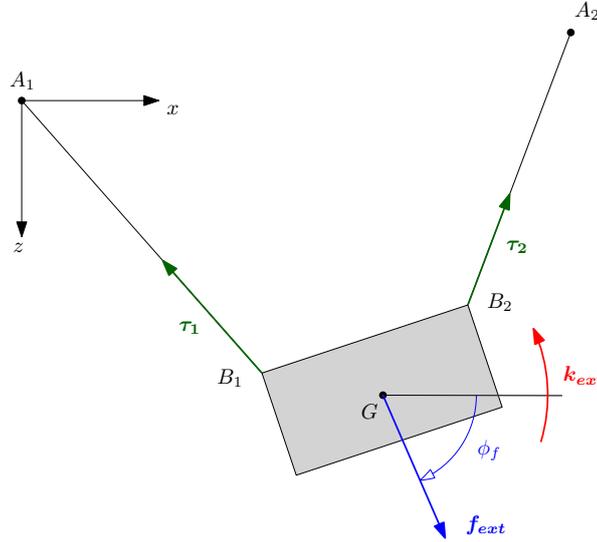


Figura 3.3: Forze che agiscono sull'organo terminale

Si considerino le forze agenti sull'organo terminale (fig. 3.3): i cavi alle estremità esercitano delle forze di trazione τ_1 e τ_2 , nel centro di massa agisce una forza generica \mathbf{f}_{ext} , e viene applicata anche una coppia generica \mathbf{k}_{ext} . In generale \mathbf{f}_{ext} è orientata di un angolo ϕ_f calcolato in senso orario dall'asse x , ed è la risultante delle forze esterne agenti sull'organo terminale, tra cui bisogna contare anche la forza peso.

Si possono scrivere quindi le equazioni cardinali della statica (con i momenti riferiti al polo O):

$$\begin{aligned}
 -\frac{s_{1x}}{L_1} \tau_1 - \frac{s_{2x}}{L_2} \tau_2 + f_{ext} \cos \phi_f &= 0 \\
 -\frac{s_{1z}}{L_1} \tau_1 - \frac{s_{2z}}{L_2} \tau_2 + f_{ext} \sin \phi_f &= 0 \\
 -\mathbf{a}_2 \times (\mathbf{x} + \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{j} \frac{s_{2x}}{L_2} \tau_2 - x f_{ext} \sin \phi_f + k_{ext} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Si possono riscrivere le equazioni 3.6 in forma matriciale:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x + r_{1x} & (x + r_{2x}) - a_{2x} & -\cos \phi_f \\ z + r_{1z} & (z + r_{2z}) - a_{2z} & -\sin \phi_f \\ 0 & \mathbf{a}_2 \times (\mathbf{x} + \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{j} & x \sin \phi_f - \frac{k_{ext}}{f_{ext}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \frac{\tau_1}{L_1} \\ \frac{\tau_2}{L_2} \\ f_{ext} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

Si chiama \mathbf{M} la matrice dell'equazione 3.7. Si noti che nella matrice appare il termine $\frac{k_{ext}}{f_{ext}}$, in apparente contrasto con gli altri elementi presenti nella matrice, legati alla configurazione geometrica del sistema. Tuttavia si può immaginare il sistema forza-coppia come un modo equivalente di rappresentare una forza esterna agente sull'organo terminale, la cui retta di azione dista $b = \frac{k_{ext}}{f_{ext}}$ dal centro di massa. Il termine b così definito, che corrisponde al termine presente nella matrice \mathbf{M} è quindi anch'esso un parametro geometrico.

Si dimostra che è possibile raggiungere una posizione di equilibrio se e solo se

$$rank(\mathbf{M}) \leq 2 \quad (3.8)$$

dove 2 è il numero di cavi attuati [8]. Per rendere verificata l'eq. 3.8, bisogna imporre:

$$det(\mathbf{M}) = 0 \quad (3.9)$$

Risolvendo di determinante, si perviene alla seguente proposizione [8]:

$$\begin{aligned} p1 = & x \left(\frac{k_{ext}}{f_{ext}} A - B + \sin \phi_f C - a_{2z} D \right) \\ & + x^2 (A + a_{2z} \sin \phi_f) + xz (E + F) \\ & + z \left(-\frac{k_{ext}}{f_{ext}} E - \cos \phi_f C - a_{2x} D \right) \\ & + z^2 a_{2x} \cos \phi_f + \frac{k_{ext}}{f_{ext}} B - C D = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dove

$$\begin{aligned}
 A &= r_2 1_z - a_{2z} \\
 B &= r_{1x}(r_2 1_z - a_{2z}) - r_{1z}(r_2 1_x - a_{2x}) \\
 C &= a_{2z} r_{2x} + a_{2x} r_{2z} \\
 D &= r_{1z} \cos \phi_f - r_{1x} \sin \phi_f \\
 E &= r_2 1_x - a_{2x} \\
 F &= a_{2x} \sin \phi_f - a_{2z} \cos \phi_f \\
 r_{21_i} &= r_{2_i} - r_{1_i} \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Riformuliamo quindi il problema geometrico-statico inverso: noti i valori di x e z ma non di θ , bisogna determinare le lunghezze dei cavi L_1 e L_2 che corrispondono ad una configurazione di equilibrio statico.

Sostituendo x e z nella proposizione 3.10, si ottiene una equazione non lineare in $\sin \theta$ e $\cos \theta$. Si possono quindi cercare delle soluzioni con un metodo iterativo nell'intervallo $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$, oltre al quale si avrebbe un incrocio dei cavi. Il valore ottenuto in tale intervallo è unico all'interno del piano di lavoro, e rappresenta il θ_{eq} cercato.

I valori di L_1 ed L_2 si trovano quindi tramite le equazioni 3.5.

Cenni di geometria proiettiva

E' possibile dare una spiegazione della interpretazione geometrica dell'equazione 3.9 facendo cenno a qualche concetto di geometria proiettiva [39].

Un punto generico \mathbf{p} del piano può essere espresso attraverso un vettore con 3 coordinate invece che due, ad esempio $\mathbf{p} = (x, y, 1) = (X, Y, W)$, e qualsiasi vettore ottenuto scalando \mathbf{p} di un parametro $\alpha \neq 0$ rappresenta il medesimo punto. La corrispondenza tra un punto così espresso e il punto della geometria euclidea è semplicemente $x = X/W$ e $y = Y/W$. Il vantaggio sta nel fatto che, se $W = 0$, è possibile esprimere un punto all'infinito. Allo stesso modo anche una retta di equazione $ax + by + c = 0$ può essere espressa attraverso le sue componenti, cioè $\mathbf{r} = (a, b, c)$. Si nota quindi che, se il punto \mathbf{p} appartiene alla retta \mathbf{r} si può scrivere:

$$aX + bY + cW = 0 \tag{3.11}$$

e può essere espresso allo stesso modo come

$$\mathbf{r}^T \mathbf{p} = \mathbf{r}^T \mathbf{u} = 0 \quad (3.12)$$

cioè si può considerare equivalentemente \mathbf{r} una retta o un punto, e allo stesso modo \mathbf{p} un punto o una retta.

Il punto \mathbf{p} di intersezione tra due rette $\mathbf{r}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\mathbf{r}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ è equivalente al prodotto vettoriale

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \quad (3.13)$$

ma l'equivalenza punto-retta evidenziata sopra permette di interpretare le due rette come punti e il punto come retta: se $\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1$ e $\mathbf{p}_2 = \mathbf{r}_2$, allora

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 \quad (3.14)$$

rappresenta la retta passante tra i due punti \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 , e ha le stesse componenti di \mathbf{p} precedentemente calcolato.

Infine, ci chiediamo quando tre punti \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 giacciono sulla stessa retta. Sappiamo da sopra che la retta che collega \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 è $\mathbf{r} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2$, e che \mathbf{p}_3 appartiene a \mathbf{r} se

$$\mathbf{p}_3^T \mathbf{r} = \mathbf{p}_3^T (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2) = 0 \quad (3.15)$$

o, più brevemente, se il determinante della matrice che contiene i tre punti è 0

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.16)$$

Allo stesso modo, per l'equivalenza punto-retta, tre rette si intersecano nel medesimo punto se

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.17)$$

Per dare una interpretazione geometrica alla condizione 3.9 si semplifichi il problema pensando che \mathbf{f}_{ext} sia la sola forza peso dell'organo terminale (agente verso il basso) e che $\mathbf{k}_{ext} = \mathbf{0}$. In questo caso si possono interpretare le colonne della matrice \mathbf{M} come dei vettori che esprimono in coordinate omogenee le rette su cui agiscono rispettivamente la tensione $\boldsymbol{\tau}_1$, la tensione $\boldsymbol{\tau}_2$ e la forza peso. Da quanto illustrato sopra, annullare il determinante di

\mathbf{M} equivale quindi a imporre che le tre rette siano coincidenti in un punto: si avrà quindi una configurazione di equilibrio statico quando le due rette su cui agiscono le tensioni si incontrano sulla retta su cui agisce la forza peso.

Considerando invece un carico generico e una coppia esterna agenti sull'organo terminale, la terza colonna della matrice \mathbf{M} è ancora una retta del piano proiettivo, e la condizione 3.9 si può comunque interpretare come l'intersezione di tre rette in un unico punto.

3.1.2 Analisi geometrico-statica diretta

Nel caso dell'analisi diretta si conoscono le lunghezze dei cavi L_1 e L_2 , le forze esterne agenti sull'organo terminale, e si vogliono ricavare le coordinate x , z e θ di equilibrio. Nel caso agisca la sola forza peso (o una forza verticale applicata al centro di massa) si potrebbero determinare diversi punti di equilibrio [8], ma solo uno è stabile e corrisponde al punto in cui il sistema possiede la minima energia potenziale. Si può intuire che questo punto coincide con la configurazione in cui z è minimo.

Le equazioni 3.5 possono essere riscritte:

$$\begin{aligned} (x + r_{1x})^2 + (z + r_{1z})^2 &= L_1^2 \\ (x + r_{2x} - a_{2x})^2 + (z + r_{2z} - a_{2z})^2 &= L_2^2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Sviluppando i conti e sostituendo i valori di \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 si ottiene:

$$x^2 + z^2 + 2x r_{1x} + 2z r_{1z} + r_{1x}^2 + r_{1z}^2 = L_1^2 \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 + 2x(r_{2x} - a_{2x}) + 2z(r_{2z} - a_{2z}) \\ + r_{2x}^2 + r_{2z}^2 + a_{2x}^2 + a_{2z}^2 = L_2^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sottraendo l'equazione 3.19 a 3.20 si ottiene la seguente:

$$\begin{aligned} 2(a_{2x} - r_{2x})x + 2(a_{2z} - r_{2z})z + r_{1x}^2 + r_{1z}^2 \\ - ((a_{2x} - r_{2x})^2 + (a_{2z} - r_{2z})^2) + L_2^2 - L_1^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

da cui si può esplicitare x in funzione di z e θ . Condensando la scrittura:

$$x = cz + d \quad (3.22)$$

dove c e d sono funzioni di θ . Sostituendo l'eq. 3.22 in 3.20 si trova una

equazione di secondo grado in z parametrica in θ , che può essere scritta in forma compatta come:

$$e z^2 + 2f z + g = 0 \quad (3.23)$$

che ammette due soluzioni che corrispondono a valori di z sopra e sotto il vettore \mathbf{a}_2 . La soluzione che ci interessa è

$$z = \frac{-f + \sqrt{f^2 - eg}}{e} \quad (3.24)$$

dove e , f e g cambiano al variare di θ .

Per quanto detto sopra, la posizione di equilibrio è da cercare dove z è minimo. Pertanto θ_{eq} di equilibrio sarà l'angolo che soddisfa la relazione

$$\frac{dz}{d\theta} = 0 \quad (3.25)$$

Si può quindi risolvere l'equazione 3.25 tramite un metodo iterativo per trovare il valore θ cercato. Infine si determina z corrispondente e, sostituendo nell'equazione 3.22 si trova il valore x .

Ricapitolando il procedimento:

- Si esprimono le lunghezze note dei cavi L_1 e L_2 rispetto a x , z e θ attraverso due equazioni.
- Dalle due equazioni si isolano x e z in funzione di θ
- Si trova il valore di θ che rende minima z e si calcola tale minimo.
- Si calcola il valore di x .

L'approccio presentato tuttavia non si può applicare nel caso in cui la forza esterna non sia verticale ($\phi_f \neq \pi/2$) o in cui sia presente una coppia esterna. In tal caso bisogna ricorrere ad un approccio più generale in cui la variazione di energia potenziale, che si vuole imporre nulla per ricercare i punti di equilibrio, viene espressa come l'opposto del lavoro virtuale generato dalle forze e le coppie esterne che agiscono sull'organo terminale. In altre parole:

$$\delta L = \mathbf{f}_{ext} \cdot \delta G + \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \delta B_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \cdot \delta B_2 + \mathbf{k}_{ext} \cdot \delta \boldsymbol{\theta} = 0 \quad (3.26)$$

Se $\delta \mathbf{x}$ e $\delta \boldsymbol{\theta}$ sono rispettivamente gli spostamenti virtuali del centro di massa dell'organo terminale e la rotazione virtuale, allora

$$\delta G = \delta \mathbf{x} \cdot \delta B_1 = \delta \mathbf{x} + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_1 \cdot \delta B_2 = \delta \mathbf{x} + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_2$$

E' possibile quindi cercare le configurazioni di equilibrio analizzando dove l'espressione 3.26 si annulla e valutando quali tra le soluzioni trovate sono di equilibrio stabile. La trattazione di questo caso tuttavia esula dai limiti di questo lavoro, e potrà essere oggetto di analisi future.

3.2 Analisi dinamica

L'analisi dinamica ci porta nel cuore del robot ed è alla base del controllo e della simulazione. La trattazione verrà sviluppata seguendo per lo più un approccio tradizionale, facendo riferimento a lavori come [13], [14] e [22]; tuttavia verranno rimarcate le peculiarità di questo modello sottoattuato, che richiede una particolare attenzione nel considerare l'effetto dell'angolo θ sull'andamento delle tensioni.

3.2.1 Dinamica diretta

Obiettivo della dinamica diretta è, conoscendo le coppie κ_1 e κ_2 applicate ai motori, determinare il moto dell'organo terminale nelle sue coordinate x , z e θ .

Per rendere la trattazione più compatta e immediata, le coppie saranno espresse mediante il vettore $\boldsymbol{\kappa}$

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix}$$

e le coordinate tramite il vettore \mathbf{x}

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ z \\ \theta \end{bmatrix}$$

Gli angoli di rotazione dei rocchetti sono legati alle lunghezze dei cavi

tramite le relazioni 3.1, e possono essere espressi tramite il vettore $\boldsymbol{\beta}$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_{10}}{r} - \frac{L_1}{r} \\ \frac{L_{20}}{r} - \frac{L_2}{r} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

3.2.2 Analisi di velocità e di accelerazione

Per lo sviluppo della trattazione è necessario potere esprimere le derivate $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ e $\ddot{\boldsymbol{\beta}}$ rispetto ai valori \boldsymbol{x} (rispettivamente analisi di velocità inversa e analisi di accelerazione inversa). Si scrivono le componenti dei vettori \boldsymbol{s}_1 e \boldsymbol{s}_2 che uniscono i punti A_1 con B_1 e A_2 con B_2 :

$$\begin{aligned} s_{1x} &= x + r_{1x} \\ s_{1z} &= z + r_{1z} \\ s_{2x} &= x + r_{2x} - a_{2x} \\ s_{2z} &= z + r_{2z} - a_{2z} \end{aligned}$$

dove si riportano per esteso:

$$\begin{aligned} r_{1x} &= b_1 \cos \theta \cos \phi_1 - b_1 \sin \theta \sin \phi_1 \\ r_{1z} &= -b_1 \sin \theta \cos \phi_1 - b_1 \cos \theta \sin \phi_1 \\ r_{2x} &= b_2 \cos \theta \cos \phi_2 - b_2 \sin \theta \sin \phi_2 \\ r_{2z} &= -b_2 \sin \theta \cos \phi_2 - b_2 \cos \theta \sin \phi_2 \end{aligned}$$

è possibile riscrivere l'eq. 3.5 come

$$\begin{aligned} L_1 &= \sqrt{s_{1x}^2 + s_{1z}^2} \\ L_2 &= \sqrt{s_{2x}^2 + s_{2z}^2} \end{aligned}$$

La derivata di eq. 3.27 rispetto al tempo è data da:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{x}} \dot{\boldsymbol{x}} \quad (3.28)$$

L'equazione 3.28 lega quindi la velocità dell'organo terminale $\dot{\boldsymbol{x}}$ con la velocità dei rocchetti $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ (analisi di velocità inversa). Il termine $\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{x}}$ è la matrice jacobiana, le cui componenti sono le derivate parziali di β_1 e β_2 rispetto a x , z e θ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \beta_1}{\partial x} &= -\frac{s_{1x}}{rL_1} \\
 \frac{\partial \beta_1}{\partial z} &= -\frac{s_{1z}}{rL_1} \\
 \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta} &= \frac{r_{1x} s_{1z} - r_{1z} s_{1x}}{rL_1} \\
 \frac{\partial \beta_2}{\partial x} &= -\frac{x_B}{rL_2} \\
 \frac{\partial \beta_2}{\partial z} &= -\frac{z_B}{rL_2} \\
 \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta} &= \frac{r_{2x} s_{2z} - r_{2z} s_{2x}}{rL_2}
 \end{aligned}$$

La derivata seconda rispetto al tempo di β si può scrivere come:

$$\ddot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \ddot{\mathbf{x}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \quad (3.29)$$

ed esprime l'accelerazione dei rocchetti $\ddot{\beta}$ in funzione della velocità $\dot{\mathbf{x}}$ e dell'accelerazione $\ddot{\mathbf{x}}$ dell'organo terminale (analisi di accelerazione inversa). Il termine $\frac{d}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}}$ è ottenuto derivando per il tempo ciascuna delle componenti dello jacobiano visto sopra.

Per snellire la notazione si possono battezzare i seguenti parametri:

$$\begin{aligned}
 r_{1x} \dot{} &= -b_1 \sin \theta \cos \phi_1 \dot{\theta} - b_1 \cos \theta \sin \phi_1 \dot{\theta} \\
 r_{1z} \dot{} &= -b_1 \cos \theta \cos \phi_1 \dot{\theta} + b_1 \sin \theta \sin \phi_1 \dot{\theta} \\
 r_{2x} \dot{} &= -b_2 \sin \theta \cos \phi_2 \dot{\theta} - b_2 \cos \theta \sin \phi_2 \dot{\theta} \\
 r_{2z} \dot{} &= -b_2 \cos \theta \cos \phi_2 \dot{\theta} + b_2 \sin \theta \sin \phi_2 \dot{\theta} \\
 s_{1x} \dot{} &= \dot{x} + r_{1x} \dot{} \\
 s_{1z} \dot{} &= \dot{z} + r_{1z} \dot{} \\
 s_{2x} \dot{} &= \dot{x} + r_{2x} \dot{} \\
 s_{2z} \dot{} &= \dot{z} + r_{2z} \dot{}
 \end{aligned}$$

e pertanto si possono esprimere le componenti di $\frac{d}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}}$ attraverso le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial \beta_1}{\partial x} &= -\frac{\dot{s}_{1x}}{rL_1} + \frac{s_{1x}(s_{1x}\dot{s}_{1x} + s_{1z}\dot{s}_{1z})}{rL_1^{3/2}} \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial \beta_1}{\partial z} &= -\frac{\dot{s}_{1z}}{rL_1} + \frac{s_{1z}(s_{1x}\dot{s}_{1x} + s_{1z}\dot{s}_{1z})}{rL_1^{3/2}} \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta} &= -\frac{(s_{1x}r_{1z} - s_{1z}r_{1x} + s_{1x}r_{1z} - s_{1z}r_{1x})}{rL_1} \\
 &\quad + \frac{(s_{1x}r_{1z} - s_{1z}r_{1x})(s_{1x}\dot{s}_{1x} + s_{1z}\dot{s}_{1z})}{rL_1^{3/2}} \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial \beta_2}{\partial x} &= -\frac{\dot{s}_{2x}}{rL_2} + \frac{s_{2x}(s_{2x}\dot{s}_{2x} + s_{2z}\dot{s}_{2z})}{rL_2^{3/2}} \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial \beta_2}{\partial z} &= -\frac{\dot{s}_{2z}}{rL_2} + \frac{s_{2z}(s_{2x}\dot{s}_{2x} + s_{2z}\dot{s}_{2z})}{rL_2^{3/2}} \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta} &= -\frac{(s_{2x}r_{2z} - s_{2z}r_{2x} + s_{2x}r_{2z} - s_{2z}r_{2x})}{rL_2} \\
 &\quad + \frac{(s_{2x}r_{2z} - s_{2z}r_{2x})(s_{2x}\dot{s}_{2x} + s_{2z}\dot{s}_{2z})}{rL_2^{3/2}}
 \end{aligned}$$

3.2.3 Equazione del moto

E' quindi possibile ricavare l'equazione del moto con il seguente procedimento:

1. Si scrivono le equazioni di equilibrio per l'asta; in forma matriciale si possono condensare le due equazioni di equilibrio alle traslazioni e l'equazione di equilibrio dei momenti:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_t + \mathbf{w}_{ext} \quad (3.30)$$

dove \mathbf{M} è la matrice di massa, che contiene la massa m e il momento di inerzia I_e dell'organo terminale

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_e \end{bmatrix}$$

\mathbf{f}_t è un vettore contenente la proiezione delle tensioni sugli assi cartesiani e il momento che esse generano sull'asta; \mathbf{w}_{ext} è un vettore detto

wrench esterno, che sintetizza le forze e le coppie esterne applicate:

$$\mathbf{w}_{ext} = \begin{bmatrix} f_{ext} \cos \phi_f \\ f_{ext} \sin \phi_f \\ k_{ext} \end{bmatrix}$$

2. Si esprime \mathbf{f}_t in funzione delle tensioni agenti sui fili:

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{S}\boldsymbol{\tau} \quad (3.31)$$

dove $\boldsymbol{\tau}$ è il vettore tensioni

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

e \mathbf{S} è una matrice così definita:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_1 & -\cos \theta_2 \\ -\sin \theta_1 & -\sin \theta_2 \\ br_1 & br_2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Nella matrice \mathbf{S} appaiono gli angoli θ_1 e θ_2 che possono essere ricavati attraverso le relazioni:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \text{atan2}(s_{1z}, s_{1x}) \\ \theta_2 &= \text{atan2}(s_{2z}, s_{2x}) \end{aligned}$$

I valori b_1 e b_2 sono i bracci delle rette su cui agiscono le tensioni (il prolungamento dei cavi) rispetto al centro di massa dell'asta:

$$\begin{aligned} br_1 &= b_1 \sin(\phi_1 + \theta_1 + \theta) \\ br_2 &= b_2 \sin(\phi_2 + \theta_2 + \theta) \end{aligned}$$

3. Si scrivono quindi le equazioni che descrivono la dinamica dei due motori. Le coppie che vengono erogate, espresse dal vettore $\boldsymbol{\kappa}$, devono vincere l'inerzia, la componente smorzante e i momenti generati dalle tensioni:

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{I}_m \ddot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{C}_m \dot{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\tau} r \quad (3.33)$$

dove \mathbf{I}_m è la matrice di inerzia dei motori e \mathbf{C}_m è la matrice dei coefficienti di smorzamento.

Si possono quindi isolare le tensioni:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{r} (\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{I}_m \ddot{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{C}_m \dot{\boldsymbol{\beta}}) \quad (3.34)$$

4. Si uniscono quindi le equazioni 3.30, 3.31 e 3.34:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{S} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{w}_{ext} \\ &= \mathbf{S} \left[\frac{1}{r} (\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{I}_m \ddot{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{C}_m \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right] + \mathbf{w}_{ext} \\ &= \mathbf{S} \left[\frac{1}{r} (\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{I}_m (\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{x}} \ddot{\mathbf{x}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{C}_m \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}) \right] + \mathbf{w}_{ext} \end{aligned}$$

Riordinando i termini si ottiene l'equazione del moto:

$$\mathbf{M}_{eq}(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{S} \boldsymbol{\kappa} + r \mathbf{w}_{ext} \quad (3.35)$$

Dove

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{eq}(\mathbf{x}) &= r \mathbf{m} + \mathbf{S} \mathbf{I}_m \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{N}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \mathbf{S} (\mathbf{I}_m \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{C}_m \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione del moto è quindi possibile conoscere la posizione dell'organo terminale \mathbf{x} insieme alla sua velocità $\dot{\mathbf{x}}$ e accelerazione $\ddot{\mathbf{x}}$, avendo come dato in ingresso il vettore delle coppie $\boldsymbol{\kappa}$.

Le equazioni di dinamica diretta appena trovate costituiscono il modello del robot in analisi: implementando un codice che abbia in ingresso le coppie $\boldsymbol{\kappa}$ e i parametri relativi alla geometria e alle masse, è possibile simulare il comportamento del sistema. Tuttavia la dinamica diretta non è importante solo per le simulazioni: come vedremo potrà essere impiegata per stimare

l'andamento di θ da fornire al controllo come dato in retroazione (sezione 4.2) o durante la fase di pianificazione della traiettoria (sez. 5.1).

3.2.4 Dinamica inversa

La dinamica inversa consiste nel calcolare il valore delle coppie ai motori κ note posizione, velocità e accelerazione dell'organo terminale.

La soluzione non avviene per integrazione come nella dinamica inversa, ma direttamente si può riscrivere l'equazione del moto 3.35 nella forma:

$$\kappa = \mathbf{S}^\# (M_{eq} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{N} - r \mathbf{w}_{ext}) \quad (3.36)$$

Si noti che poiché \mathbf{S} non è invertibile (è una matrice 3x2), bisogna ricorrere alla pseudoinversa $\mathbf{S}^\#$

$$\mathbf{S}^\# = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T$$

che pur fornendo una soluzione approssimata, garantisce che la κ trovata abbia norma minima tra tutte le soluzioni possibili.

Per un approfondimento sulla definizione di pseudoinversa e sulle sue proprietà, si veda la sezione 1.1.2 .

La dinamica inversa è fondamentale durante la fase di controllo: come vedremo infatti nella sezione 4.1, la legge di controllo è generata a partire dall'equazione 3.36, ed è pertanto fondamentale avere un'ottima conoscenza dei parametri geometrici e inerziali per fornire al sistema un valore di coppia κ che generi un moto il più vicino possibile a quello pianificato.

3.3 Conclusioni

In questo capitolo è stata trattata l'analisi cinematica e dinamica del modello di robot a cavi studiato. E' stato evidenziato il fatto che, se il problema cinematico inverso è sempre definito (nota la posizione dell'organo terminale sono definite le lunghezze dei cavi), il problema cinematico diretto ammette infinite soluzioni; è tuttavia possibile determinare quali posizioni assume il robot in condizioni di equilibrio geometrico-statico, note le lunghezze dei cavi. Similmente è stato definito il problema geometrico-statico inverso, che

prevede di determinare l'inclinazione dell'organo terminale e le lunghezze dei cavi note le sole coordinate del centro di massa.

Le equazioni del moto sono state ricavate mediante un approccio di tipo newtoniano, evidenziando le forze e le coppie agenti sull'organo terminale e sui motori che avvolgono i cavi. E' stato definito quindi il problema dinamico diretto (note le coppie applicate ai motori, conoscere l'andamento delle coordinate libere), e sono state fatte delle considerazioni su una soluzione approssimata del problema dinamico inverso.

Capitolo 4

Controllo

Il problema del controllo di un robot sottoattuato - seppure per un caso semplice come quello analizzato finora - si presenta come un tema complesso, con molti aspetti a cui prestare attenzione. Innanzitutto bisogna tenere in mente che il robot ha solo due attuatori mentre possiede tre gradi di libertà: si potranno quindi controllare solo due delle tre coordinate libere. Una seconda complicazione è dovuta al fatto che gli attuatori agiscono sulle lunghezze dei cavi, che a loro volta influenzano tutte e tre le coordinate libere x , z e θ (fig. 4.1). Dalla semplice lettura degli encoder legati alle coordinate β_1 e β_2 dei rocchetti non sarà possibile quindi passare alla effettiva posizione x , z , se non aggiungendo un sensore che legga l'inclinazione θ o stimando quest'ultima attraverso una simulazione.

4.1 Logica di controllo

Si supponga che attraverso un pianificatore (come verrà illustrato in seguito nella sezione 5) sia stata determinata la traiettoria di riferimento, espressa tramite il vettore $\mathbf{x}_{ref}(t)$ e le sue derivate $\dot{\mathbf{x}}_{ref}(t)$ e $\ddot{\mathbf{x}}_{ref}(t)$.

Si supponga inoltre di avere in retroazione una informazione completa sulla posizione attuale del robot, espressa tramite il vettore \mathbf{x} ; come vedremo in seguito questo vettore può essere calcolato a partire da rilevazioni di tre sensori (2 encoder + sensore per la inclinazione) oppure stimato unendo i valori degli encoder a un valore stimato dell'angolo di inclinazione θ .

Sottraendo \mathbf{x} a \mathbf{x}_{ref} si ottiene il vettore errore \mathbf{e} , a cui si possono associare i guadagni proporzionale \mathbf{K}_p e derivativo \mathbf{K}_d che saranno inseriti nella legge di controllo per ridurre l'errore stesso. \mathbf{K}_p e \mathbf{K}_d sono due matrici diagonali i cui parametri sono scelti opportunamente per garantire la risposta

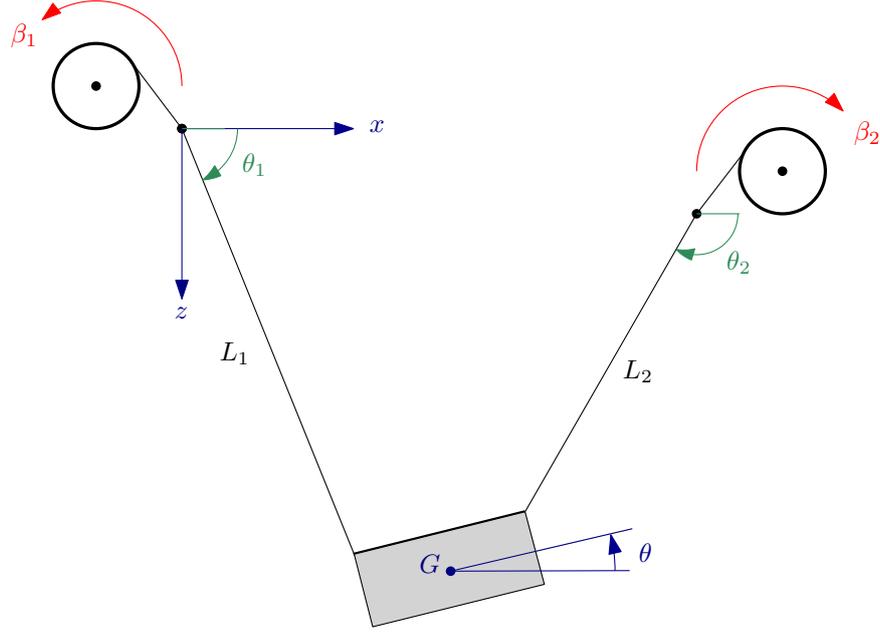


Figura 4.1: Descrizione delle variabili del modello

desiderata dal sistema di controllo e imponendo una risposta criticamente smorzata ($\mathbf{K}_d = 2\sqrt{\mathbf{K}_d}$).

La legge di moto che è stata ricavata nel capitolo precedente (sez. 3.2.1) è qui riportata:

$$\mathbf{M}_{eq}(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa} + r \mathbf{w}_{ext} \quad (4.1)$$

dove $\mathbf{M}_{eq}(\mathbf{x})$ è la matrice di massa equivalente, $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ racchiude i termini dinamici non lineari (smorzamento, forze di Coriolis), $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ permette di esprimere le componenti cartesiane delle tensioni e gli effetti sulle rotazioni, r è il raggio dei rocchetti e \mathbf{w}_{ext} è il vettore wrench esterno applicato.

L'equazione 4.1 può essere riscritta nella forma:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{M}_{eq}(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - r \mathbf{w}_{ext} \quad (4.2)$$

Si può pensare quindi di utilizzare una legge di controllo apposita per andare a linearizzare il modello dinamico (come in [14]):

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{M}_{eq}(\mathbf{x}) (\ddot{\mathbf{x}}_{ref} + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e}) + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - r \mathbf{w}_{ext} \quad (4.3)$$

In questo modo, ricevendo in ingresso una coppia ricavata dall'equazione 4.3, il sistema risponde come se fosse costituito da tre oscillatori semplici,

ottenuti combinando le equazioni 4.2 e 4.3:

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (4.4)$$

Il controllo riceve quindi in ingresso:

- L'errore \mathbf{e} di posizione
- La posizione \mathbf{x} effettiva
- La velocità $\dot{\mathbf{x}}$ effettiva
- L'accelerazione $\ddot{\mathbf{x}}_{ref}$ stimata

e restituisce la coppia $\boldsymbol{\kappa}$ che deve essere erogata dagli attuatori (fig. 4.2).

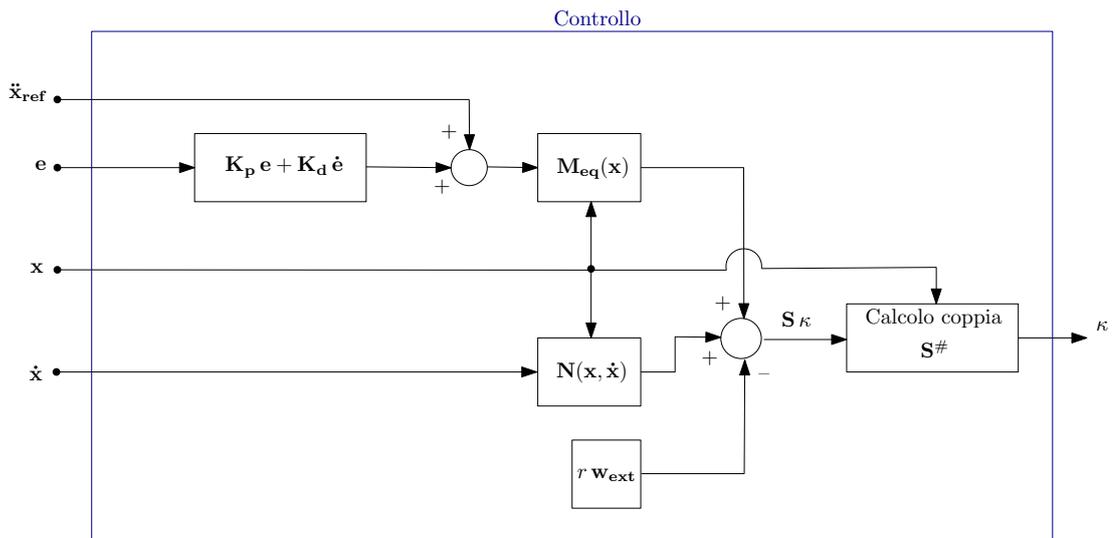


Figura 4.2: Schema di controllo

Si noti che la legge di controllo 4.3 calcola il valore $\mathbf{S}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}$; per isolare $\boldsymbol{\kappa}$ bisognerebbe invertire la matrice $\mathbf{S}(\mathbf{x})$, ma non è possibile essendo questa una matrice 3×2 . Bisogna pertanto ricorrere alla pseudoinversa $\mathbf{S}^\#$:

$$\mathbf{S}^\# = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T$$

per isolare un valore della coppia $\boldsymbol{\kappa}$ che è il più prossimo al valore effettivo che consente il moto desiderato.

4.2 Retroazione

Questa particolare legge di controllo richiede di sapere il valore della posizione e della velocità delle tre coordinate libere del robot, x , z e θ . La conoscenza di queste informazioni però è tutt'altro che scontata: se si vanno a leggere infatti solo i valori degli encoder sui motori, che restituiscono β_1 e β_2 , la cinematica diretta per ottenere il vettore \mathbf{x} fornisce infinite soluzioni; chiaramente la soluzione individuata nel capitolo 3.1.1 vale solo per l'equilibrio statico, e non è di aiuto in questo caso.

Ci sono due possibilità per risolvere questo problema:

1. Stimare il valore di θ attraverso una simulazione (fig. 4.3). Si utilizza la coppia in ingresso fornita dal controllore per eseguire una simulazione che fornisca il valore dell'inclinazione dell'asta θ ; quindi si unisce questa informazione ai valori β letti dagli encoder.

Si ripercorre qui parte della trattazione vista nella sezione 3.1.2; si può legare β_1 alla lunghezza del cavo L_1 e β_2 alla lunghezza L_2 . Ricordando le relazioni:

$$\begin{aligned} s_{1x} &= x + r_{1x} \\ s_{1z} &= z + r_{1z} \\ s_{2x} &= x + r_{2x} - a_{2x} \\ s_{2z} &= z + r_{2z} - a_{2z} \end{aligned}$$

dove si riportano per esteso:

$$\begin{aligned} r_{1x} &= b_1 \cos \theta \cos \phi_1 - b_1 \sin \theta \sin \phi_1 \\ r_{1z} &= -b_1 \sin \theta \cos \phi_1 - b_1 \cos \theta \sin \phi_1 \\ r_{2x} &= b_2 \cos \theta \cos \phi_2 - b_2 \sin \theta \sin \phi_2 \\ r_{2z} &= -b_2 \sin \theta \cos \phi_2 - b_2 \cos \theta \sin \phi_2 \end{aligned}$$

è possibile riscrivere le equazioni:

$$L_1 = \sqrt{s_{1x}^2 + s_{1z}^2} \quad (4.5)$$

$$L_2 = \sqrt{s_{2x}^2 + s_{2z}^2} \quad (4.6)$$

che rappresentano le circonferenze descritte dai cavi tesi attorno ai punti fissi a telaio.

Sottraendo 4.5 a 4.6 si ottiene una equazione dalla quale può essere isolata x in funzione di z e θ :

$$x = x(z, \theta) \quad (4.7)$$

Sostituendo quindi l'eq. 4.7 nella 4.5, si ottiene una espressione di z in funzione di θ :

$$z = z(\theta) = z(\theta, L_1, L_2) \quad (4.8)$$

Infine si sostituisce 4.8 in 4.7 per ottenere

$$x = x(\theta) = x(\theta, L_1, L_2) \quad (4.9)$$

Quindi, ottenuto il valore di θ attraverso una simulazione del sistema (sez. 4.3.1) e note le lunghezze dei cavi L_1 e L_2 dagli angoli β_1 e β_2 , è possibile determinare x e z attraverso le relazioni 4.8 e 4.9.

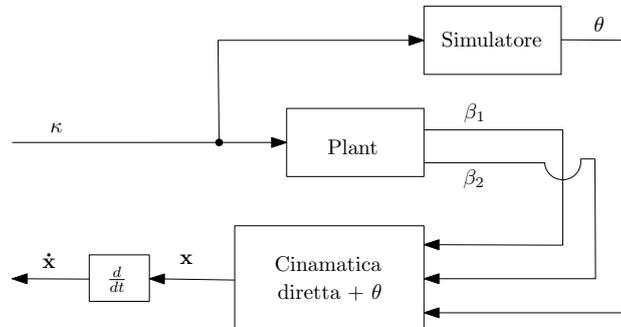


Figura 4.3: Retroazione con θ simulata

- Il secondo modo di procedere consiste nell'inserire un sensore che permetta di calcolare l'inclinazione θ (fig. 4.5). Sebbene sia possibile leggere direttamente l'inclinazione dell'asta, risulta tuttavia più comodo andare a leggere l'angolo di inclinazione dei cavi, che sono stati precedentemente chiamati θ_1 e θ_2 .

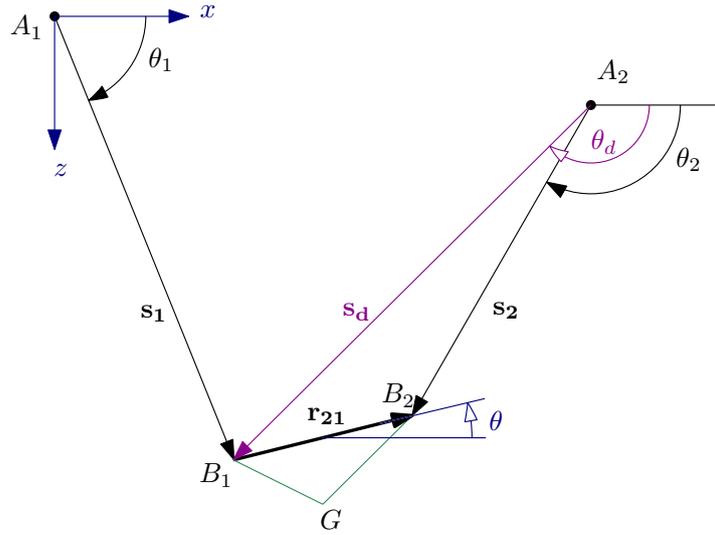


Figura 4.4: Schematizzazione dei vettori; \mathbf{r}_{21} , \mathbf{s}_2 e \mathbf{s}_d formano la diade analizzata.

Si supponga di conoscere l'angolo θ_1 . Si vuole trovare quindi l'angolo θ attraverso la diade formata dai vettori $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, \mathbf{s}_2 e \mathbf{s}_d che collega il punto A_2 con B_1 (fig. 4.4).

Il modulo del vettore \mathbf{s}_d può essere determinato come segue:

$$\|\mathbf{s}_d\| = \sqrt{(a_{2x} - L_1 \cos \theta_1)^2 + (a_{2z} - L_1 \sin \theta_1)^2} \quad (4.10)$$

mentre l'angolo θ_D che \mathbf{s}_d forma rispetto all'asse x può essere espresso come

$$\theta_D = \text{atan2}(a_{2z} - L_1 \sin \theta_1, a_{2x} - L_1 \cos \theta_1) \quad (4.11)$$

Per quanto riguarda il modulo di \mathbf{r}_{21} può essere calcolato come segue. Si esplicitano prima le componenti r_{21x} e r_{21z} :

$$\begin{aligned} r_{21x} &= b_2 \cos \theta \cos \phi_2 - b_2 \sin \theta \sin \phi_2 - b_1 \cos \theta \cos \phi_1 + b_1 \sin \theta \sin \phi_1 \\ &= \cos \theta (b_2 \cos \phi_2 - b_1 \cos \phi_1) - \sin \theta (b_2 \sin \phi_2 - b_1 \sin \phi_1) \\ &= \cos \theta a - \sin \theta b \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
r_{21z} &= -b_2 \sin \theta \cos \phi_2 - b_2 \cos \theta \sin \phi_2 + b_1 \sin \theta \cos \phi_1 + b_1 \cos \theta \sin \phi_1 \\
&= -\cos \theta (b_2 \sin \phi_2 - b_1 \sin \phi_1) - \sin \theta (b_2 \cos \phi_2 - b_1 \cos \phi_1) \\
&= -\cos \theta b - \sin \theta a
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Si può quindi calcolare il modulo di \mathbf{r}_{21} :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}_{21}\| &= \sqrt{r_{21x}^2 + r_{21z}^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \theta \cos \theta + 2ab \sin \theta \cos \theta} \\
&= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 - 2b_1 b_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Da ora in poi si userà la notazione $s_d = \|\mathbf{s}_d\|$ e $r_{21} = \|\mathbf{r}_{21}\|$.

Si può quindi scrivere l'equazione di chiusura della diade:

$$\begin{Bmatrix} L_2 \cos \theta_2 \\ L_2 \sin \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_d \cos \theta_D \\ s_d \sin \theta_D \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_{21} \cos \theta \\ -r_{21} \sin \theta \end{Bmatrix} \tag{4.15}$$

Elevando al quadrato si ottiene:

$$\begin{aligned}
L_2^2 &= s_d^2 + r_{21}^2 + 2s_d r_{21} \cos \theta_D \cos \theta - 2s_d r_{21} \sin \theta_D \sin \theta \\
&= s_d^2 + r_{21}^2 + 2s_d r_{21} \cos(\theta_D + \theta)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

da cui si ottiene

$$\cos(\theta_d + \theta) = \frac{L_2^2 - s_d^2 - r_{21}^2}{2r_d r_{21}} \tag{4.17}$$

e si sceglie la soluzione positiva per il seno:

$$\sin(\theta_d + \theta) = \sqrt{1 - \left(\frac{L_2^2 - s_d^2 - r_{21}^2}{2r_d r_{21}} \right)^2} \tag{4.18}$$

Si trova infine l'angolo θ :

$$\theta = \text{atan2}(\sin(\theta_d + \theta), \cos(\theta_d + \theta)) - \theta_d \quad (4.19)$$

I valori di x e z derivano di conseguenza dalle relazioni:

$$x = L_1 \cos \theta_1 - r_{1x}$$

$$z = L_2 \sin \theta_1 - r_{1z}$$

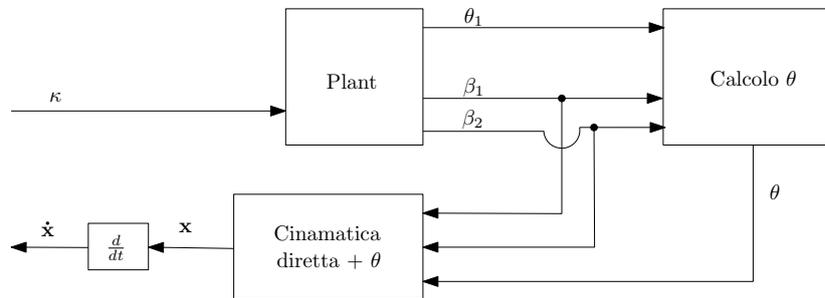


Figura 4.5: Retroazione con θ calcolata da misurazioni

4.3 Simulatore del modello dinamico

4.3.1 Sistema attuato

Il simulatore del modello dinamico accetta in ingresso le coppie κ e restituisce gli angoli β dei motori, il valore dell'angolo θ e la sua derivata rispetto al tempo. La lettura diretta del valore di θ è un vantaggio rispetto alla realtà sperimentale, dove l'inclinazione dell'asta è calcolata indirettamente a partire dagli angoli θ_1 o θ_2 (si veda il paragrafo precedente 4.2).

In particolare il simulatore calcola tramite dinamica diretta a partire da κ il vettore accelerazione $\ddot{\mathbf{x}}$. Per successive integrazioni si ottengono $\dot{\mathbf{x}}$ e \mathbf{x} (che rientrano in retroazione nell'equazione della dinamica diretta); infine attraverso la cinematica inversa a partire da \mathbf{x} si calcolano i valori di β , che corrispondono ai valori che sperimentalmente vengono letti dagli encoder. E' quindi possibile estrarre dai vettori \mathbf{x} e $\dot{\mathbf{x}}$ la componente θ e $\dot{\theta}$ dell'inclinazione (si confronti lo schema in figura 4.6).

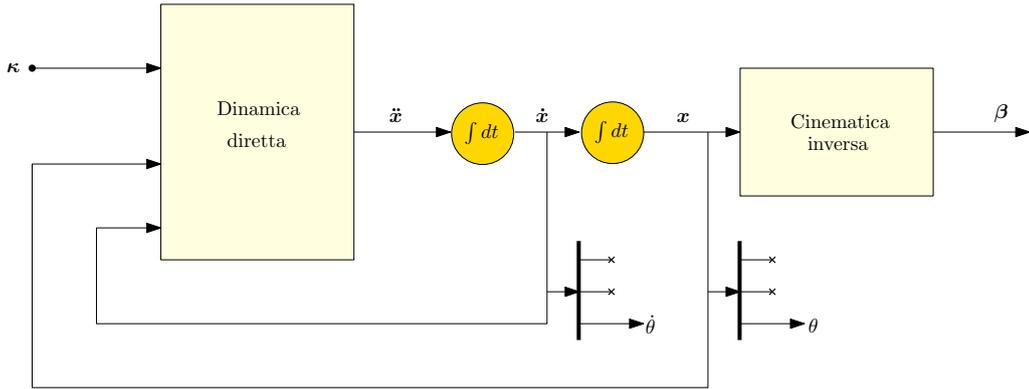


Figura 4.6: Schema del simulatore del modello dinamico

4.3.2 Evoluzione libera

E' utile simulare anche l'evoluzione libera del sistema dinamico; si tratta di avere un modello che fornisca l'andamento delle coordinate x , z e θ e delle tensioni τ_1 e τ_2 qualora i motori siano fermi e di conseguenza le lunghezze dei cavi rimangono costanti.

Questo modello è utile per simulare la risposta del sistema quando è soggetto a una perturbazione dallo stato di equilibrio ad un istante iniziale: può trattarsi di una posizione di partenza diversa dal punto di equilibrio statico, oppure una condizione di velocità/accelerazione iniziali non nulle. Queste condizioni si presentano anche quando si arresta il sistema dopo aver percorso una traiettoria pianificata: i motori si fermano, le lunghezze dei cavi rimangono costanti, tuttavia poiché non è possibile controllare tutte e tre le coordinate, il sistema potrebbe non trovarsi in una condizione di equilibrio; il modello dell'evoluzione libera simula quindi le oscillazioni del sistema intorno alla posizione di equilibrio a cui esso tende.

Siano note le condizioni iniziali del sistema; in particolare si suppone di conoscere il vettore di posizione \mathbf{x} e le sue derivate $\dot{\mathbf{x}}$ e $\ddot{\mathbf{x}}$.

L'equilibrio dinamico dell'organo terminale è espresso come:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{S}(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{w}_{ext} \quad (4.20)$$

Note le condizioni iniziali è possibile calcolare il valore iniziale della matrice $\mathbf{S}(\mathbf{x})$, definita in 3.32.

Si scomponga ora l'equazione 4.20 in una parte riferita all'equilibrio alla

traslazione e in una parte riferita all'equilibrio alle rotazioni:

$$\mathbf{M}_{xz}\ddot{\mathbf{x}}_G = \mathbf{S}_{xz}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}_{ext} \quad (4.21)$$

$$I_e\ddot{\theta} = \mathbf{S}_\theta^T\boldsymbol{\tau} + k_{ext} \quad (4.22)$$

$\ddot{\mathbf{x}}_G$ è un vettore che contiene le accelerazioni delle coordinate x e z del centro di massa. M_{xz} è una sottomatrice 2×2 di M , sulla cui diagonale appare la massa m dell'organo terminale. La matrice \mathbf{S} è stata divisa in una matrice \mathbf{S}_{xz} composta dalle prime due righe di \mathbf{S} , e in un vettore \mathbf{S}_θ costituito dalla terza riga di \mathbf{S} ; \mathbf{S}_{xz} contiene i termini che permettono di scomporre le tensioni $\boldsymbol{\tau}$ nelle componenti cartesiane, mentre \mathbf{S}_θ contiene i termini che permettono di esprimere gli effetti che le tensioni $\boldsymbol{\tau}$ hanno sulla rotazione dell'organo terminale.

Si possono quindi ottenere i valori delle tensioni dalla 4.21:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{S}_{xz}^{-1} (\mathbf{M}_{xz}\ddot{\mathbf{x}}_G - \mathbf{f}_{ext}) \quad (4.23)$$

mentre dalla 4.22 si può ricavare il valore dell'accelerazione $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{(\mathbf{S}_\theta^T\boldsymbol{\tau} + k_{ext})}{I_e} \quad (4.24)$$

Integrando numericamente $\ddot{\theta}(t)$, si ottengono i valori della velocità $\dot{\theta}(t)$ e della posizione $\theta(t)$ che il sistema assume all'istante temporale successivo. Questo valore di $\theta(t)$ dipende quindi dal sistema di forze che agisce sull'organo terminale e dalle condizioni iniziali. Poiché i motori sono fermi e i cavi mantengono una lunghezza fissa, se cambia il valore di $\theta(t)$, cambiano di conseguenza i valori di $x(t)$ e di $z(t)$: questi è possibile calcolarli grazie alle espressioni note dalle equazioni 4.8 e 4.9.

Uguualmente è possibile legare all'andamento di $\theta(t)$ le derivate $\dot{x}(t)$, $\dot{z}(t)$ e $\ddot{x}(t)$, $\ddot{z}(t)$, andando a derivare le equazioni 4.8 e 4.9:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{d(x(\theta(t), L_1, L_2))}{dt} \\ \dot{z}(t) &= \frac{d(z(\theta(t), L_1, L_2))}{dt} \end{aligned} \quad (4.25)$$

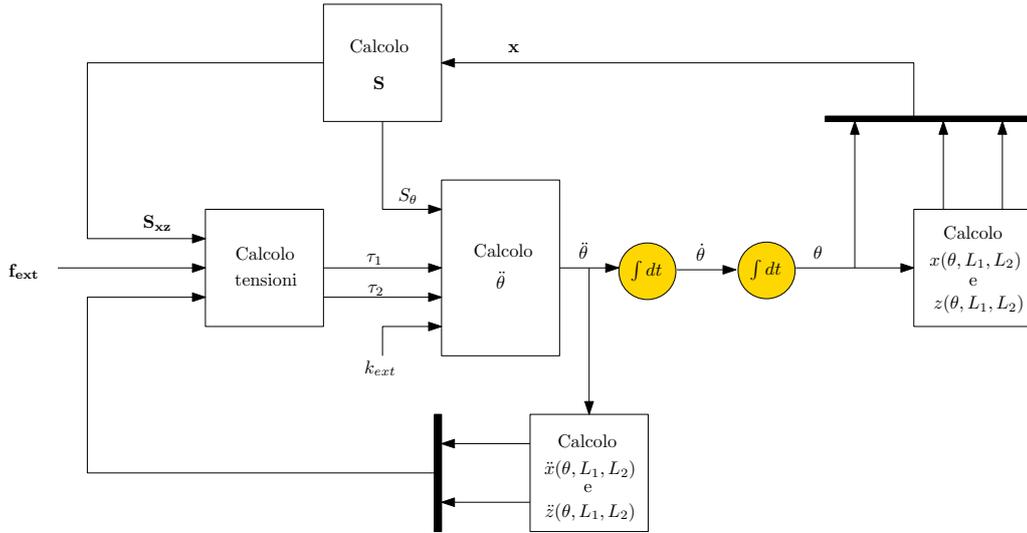


Figura 4.7: Schematizzazione del modello di evoluzione libera del sistema

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= \frac{d(\dot{x}(\theta(t), L_1, L_2))}{dt} \\ \ddot{z}(t) &= \frac{d(\dot{z}(\theta(t), L_1, L_2))}{dt}\end{aligned}\quad (4.26)$$

Con i nuovi valori di posizione x , z e θ è possibile calcolare nuovamente la matrice \mathbf{S} . I nuovi valori di accelerazione \ddot{x} e \ddot{z} vengono utilizzati quindi per calcolare le nuove tensioni $\boldsymbol{\tau}$.

Ciclando come descritto è quindi possibile simulare l'andamento del sistema per un orizzonte temporale a scelta. L'algoritmo è schematizzato in figura 4.7.

Si noti che il sistema simulato non è smorzato: volutamente non sono stati introdotti termini di smorzamento per non inserire ulteriori ipotesi nel modello.

4.4 Conclusioni

In questo capitolo è stata studiata una logica di controllo che permetta di ridurre l'errore tra la posizione pianificata e quella effettiva, risultato dell'evoluzione dinamica del robot. Il valore in retroazione, espresso mediante le coordinate libere x , z e θ , non può essere ottenuto dalla sola lettura della posizione dei motori, ma deve essere integrato con la lettura dell'inclinazio-

ne dei cavi o con un dato fornito da un simulatore dinamico; nel primo caso l'accuratezza del valore di posizione effettivo dell'organo terminale dipende dall'accuratezza della strumentazione atta alla lettura dell'inclinazione dei cavi; nel secondo caso dipende dall'accuratezza del modello implementato dal simulatore.

Infine sono stati presentati i due modelli con i quali viene simulata la risposta dinamica del robot; il primo simula il comportamento del robot durante il moto, con i motori azionati; il secondo simula il caso in cui i motori siano fermi e le lunghezze dei cavi mantenute costanti.

Capitolo 5

Pianificazione della traiettoria

Si ponga come obiettivo del pianificatore la determinazione del tempo minimo di percorrenza di una data traiettoria, e delle caratteristiche del moto, che consentano di mantenere le tensioni nei cavi positive e limitate entro un valore minimo τ_{min} e un valore massimo τ_{max} .

Nel caso del robot sottattuato considerato è possibile pianificare il moto solo per due coordinate, ad esempio x e z , mentre la terza, θ , ha una evoluzione che è conseguenza delle forze agenti sull'organo terminale (in parte dovute all'andamento di x e di z). Si vuole analizzare quindi l'evoluzione della terza coordinata per capire come condizionarne l'andamento intervenendo indirettamente sulle altre due.

Lo studio della pianificazione della traiettoria si articola quindi in tre fasi:

1. Ricavare dalle equazioni della dinamica le espressioni che descrivono l'andamento delle tensioni rispetto alle coordinate di traiettoria.
2. Scegliere una legge di moto e descrivere il moto lungo il percorso attraverso una coordinata curvilinea.
3. Sviluppare un algoritmo che permetta di ottimizzare il tempo di percorrenza in base ai vincoli sulle tensioni o sulla terza coordinata non controllata.

5.1 Calcolo delle tensioni dei cavi

Facendo riferimento al modello descritto nel capitolo 3, le equazioni di equilibrio per l'organo terminale possono essere espresse come

$$\mathbf{S} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{w}_{ext} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} \quad (5.1)$$

dove \mathbf{S} è una matrice che in colonna presenta le componenti cartesiane e il braccio dei versori delle tensioni dei cavi rispetto al centro di massa, ed è funzione della posizione \mathbf{x} :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_1 & -\cos \theta_2 \\ -\sin \theta_1 & -\sin \theta_2 \\ br_1 & br_2 \end{bmatrix}$$

\mathbf{M} è la matrice di massa:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_e \end{bmatrix}$$

e \mathbf{w}_{ext} è il vettore *wrench* che riassume le forze e le coppie esterne agenti:

$$\mathbf{w}_{ext} = \begin{bmatrix} f_{ext} \cos \phi_f \\ f_{ext} \sin \phi_f \\ k_{ext} \end{bmatrix}$$

La dinamica diretta è definita: dati i valori delle tensioni $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 \end{bmatrix}$ è possibile determinare univocamente le accelerazioni $\ddot{\mathbf{x}}$. Non è vero invece il contrario: in generale, dati dei valori di accelerazione $\ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{x} & \ddot{z} & \ddot{\theta} \end{bmatrix}^T$, è possibile che non esistano delle tensioni $\boldsymbol{\tau}$ in grado di generare esattamente quelle accelerazioni. Questo si giustifica ricordando che la soluzione della dinamica inversa non è esatta (sez. 3.2.4); in generale infatti la soluzione del problema dinamico inverso passa per il calcolo della pseudoinversa della matrice \mathbf{S} , ed è pertanto approssimata.

Nella pianificazione del movimento di questo robot sottoattuato non è possibile pianificare l'andamento di uno dei tre gradi di libertà, ma è possibile studiarne l'evoluzione noto l'andamento delle altre due coordinate e le forze che agiscono. Ad esempio si può scegliere di pianificare il moto di $x(t)$

e $z(t)$ e ottenere $\theta(t)$ come conseguenza delle forze esterne che agiscono e delle tensioni dei cavi; si tenga conto che a loro volta le tensioni dipendono sia dall'andamento di $x(t)$ e $z(t)$ che di $\theta(t)$.

Si divida l'equazione 5.1 nelle due equazioni che descrivono l'equilibrio dinamico alle traslazioni e nell'equazione che descrive l'equilibrio dinamico alle rotazioni:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\cos \theta_1 & -\cos \theta_2 \\ -\sin \theta_1 & -\sin \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{ext} \cos \phi_f \\ f_{ext} \sin \phi_f \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} \quad (5.2) \\ \begin{bmatrix} br_1 & br_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + k_{ext} &= I_e \ddot{\theta} \quad (5.3) \end{aligned}$$

Si supponga ora di pianificare $\ddot{x}(t)$ e $\ddot{z}(t)$; dalle equazioni 5.2 è possibile quindi ricavare l'andamento delle tensioni $\tau_1(t)$ e $\tau_2(t)$. Il valore dell'accelerazione $\ddot{\theta}$ si ottiene di conseguenza dalla eq. 5.3, note τ_1 e τ_2 . Si faccia attenzione però che i termini che vengono premoltiplicati alle tensioni, ottenuti dividendo la matrice \mathbf{S} iniziale, dipendono non solo dai valori di x e z , ma anche di θ , che non è noto a priori. E' possibile ottenere comunque l'andamento delle tensioni e di $\ddot{\theta}$ a partire dallo stato iniziale, con il seguente procedimento:

1. Pianificato l'andamento di \ddot{x} e \ddot{z} , al tempo $t = 0 = t_0$ si calcola la matrice \mathbf{S} con i valori noti $x(t_0), z(t_0), \theta(t_0)$.
2. Dalle equazioni 5.2 si trova $\tau_1(t_0)$ e $\tau_2(t_0)$.
3. Dall'equazione 5.3 si ricava $\ddot{\theta}(t_0)$.
4. Si calcola quindi la velocità $\dot{\theta}$ e il valore θ all'istante successivo $\tau_1 = t_0 + dt$.

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(\tau_1) &= \dot{\theta}(t_0) + \ddot{\theta}(t_0) dt \\ \theta(\tau_1) &= \theta(t_0) + \dot{\theta}(t_0) dt + \frac{1}{2} \ddot{\theta}(t_0) dt^2 \end{aligned}$$

5. Si ripete il procedimento fino a $t = t_f$, dove t_f è il tempo totale di percorrenza della traiettoria.

5.2 Legge di moto

Qualsiasi sia il tipo di percorso che si voglia pianificare (rettilineo, circolare, curvilineo), è importante scegliere con quale legge di moto lo si vuole percorrere. Per legge di moto si intende l'evoluzione nel tempo della coordinata curvilinea $l(t)$, che rappresenta la posizione lungo la traiettoria in funzione del tempo, e assume il valore 0 nel punto iniziale e L_f nel punto finale. $l(t)$ è quindi una lunghezza che esprime la porzione di traiettoria percorsa al tempo t (5.1).

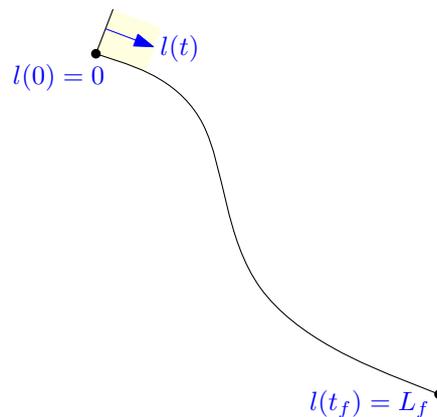


Figura 5.1: Rappresentazione di un percorso generico e della coordinata curvilinea $l(t)$

Una delle più frequentemente usate nella robotica industriale è la legge trapezoidale (fig. 5.2), cioè una legge di moto che prevede una accelerazione in un tratto iniziale, il mantenimento costante della velocità in un secondo tratto, e la completa decelerazione fino all'arresto. Tuttavia, pur forte della sua semplicità, questa legge di moto mal si adatta alla pianificazione del movimento nei robot a cavi, perché le discontinuità nel profilo di accelerazione può portare a dei bruschi cambiamenti di tensioni nei cavi e produrre vibrazioni indesiderate.

In letteratura [20] è stata avanzata anche la possibilità di studiare un profilo di velocità ottimizzato per lo specifico percorso che si desidera seguire; questo significa cercare in ciascun punto del percorso la massima accelerazione che consenta di mantenere le tensioni positive e limitate. Si ritiene però che per il robot che si sta analizzando sia da preferire un tipo di traiettoria più semplice e che garantisca una discreta uniformità del moto.

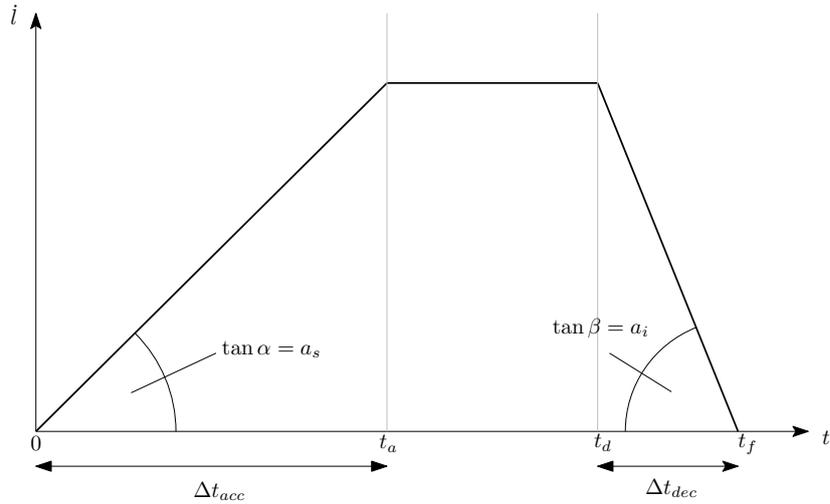


Figura 5.2: Legge con profilo di velocità trapezoidale

Si propone pertanto utilizzare una legge di tipo polinomiale di quinto grado [17]-[40] per evitare discontinuità nelle accelerazioni, e conseguentemente jerk limitato e continuo (esclusi gli estremi) (fig. 5.3).

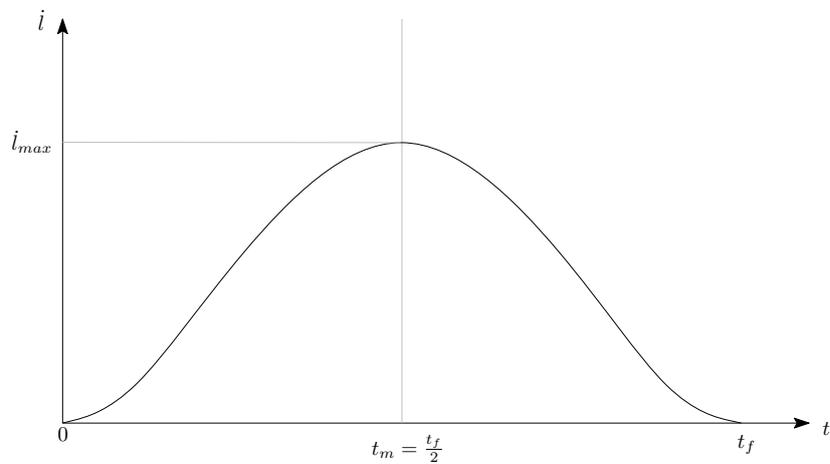


Figura 5.3: Legge polinomiale

La coordinata curvilinea può essere espressa come

$$l(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5 \quad (5.4)$$

Imponendo le condizioni di annullamento della velocità e dell'accelerazione agli estremi della traiettoria, $\dot{l}(0) = \dot{l}(t_f) = 0$ e $\ddot{l}(0) = \ddot{l}(t_f) = 0$, si

ottengono i valori dei coefficienti:

$$\begin{aligned}
 b_0 &= b_1 = b_2 = 0 \\
 b_3 &= 10 \left(\frac{L_f}{t_f^3} \right) \\
 b_4 &= -15 \left(\frac{L_f}{t_f^4} \right) \\
 b_5 &= 6 \left(\frac{L_f}{t_f^5} \right)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

L'andamento della traiettoria è simmetrico: nella prima metà della traiettoria l'accelerazione è sempre positiva, mentre nella seconda metà è sempre negativa.

In $t_m = \frac{t_f}{2}$ si ha la velocità massima:

$$i_{max} = \frac{15}{8} \frac{L_f}{t_f} \tag{5.6}$$

I massimi valori di accelerazione e decelerazione sono uguali in modulo e valgono:

$$\ddot{l}_{max} = \frac{10}{\sqrt{3}} \frac{L_f}{t_f^2} \tag{5.7}$$

Un vantaggio nell'utilizzo di questo tipo di traiettoria è che i valori della velocità massima e della accelerazione massima sono funzione del tempo di percorrenza t_f .

5.3 Parametri di traiettoria

Nel robot considerato, per ogni valore di $l(t)$ sono associati univocamente i valori di $x(t)$ e $z(t)$; l'andamento di $\theta(t)$ invece non dipende solo da l ma anche dalle forze che insorgono durante il movimento. Questo risulta evidente dalle considerazioni fatte nella precedente sezione: sono le accelerazioni imposte $\ddot{x}(t)$ e $\ddot{z}(t)$ che richiedono dei precisi valori delle tensioni $\tau_1(t)$ e $\tau_2(t)$, dai quali deriva l'accelerazione angolare $\ddot{\theta}(t)$ e quindi l'evoluzione di $\theta(t)$ lungo la traiettoria.

Vi è correlazione tra l'andamento di $\theta(t)$ e $l(t)$ solo nel caso in cui il robot faccia un movimento quasistatico, cioè se il tempo t_f di percorrenza della

traiettoria è sufficientemente grande per ipotizzare che in ogni punto siano rispettate le condizioni di equilibrio statico. In tal caso, il valore di θ non dipende dal tempo ma è funzione di x e z come visto nella sezione 3.1.1, e quindi è funzione di l .

Non potere legare l'angolo θ alla coordinata l non costituisce un impedimento alla pianificazione del moto per quanto visto nella sezione 5.1, infatti è sufficiente poter pianificare l'andamento di $\ddot{x}(t)$ e $\ddot{z}(t)$ per stabilire l'andamento delle tensioni nei cavi. A tal fine si vuole legare $\ddot{x}(t)$ e $\ddot{z}(t)$ direttamente a $\ddot{l}(t)$, cioè l'accelerazione della coordinata curvilinea.

Si osserva che si possono legare le accelerazioni del centro di massa alle accelerazioni \ddot{l} tramite la relazione:

$$\dot{\mathbf{x}}_G = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial l} \\ \frac{\partial z}{\partial l} \end{bmatrix} \dot{l} = \begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} \dot{l} = \mathbf{x}'_G \dot{l} \quad (5.8)$$

Si deriva poi l'espressione delle accelerazioni:

$$\ddot{\mathbf{x}}_G = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial l} \\ \frac{\partial z}{\partial l} \end{bmatrix} \ddot{l} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial l^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial l^2} \end{bmatrix} \dot{l}^2 = \mathbf{x}'_G \ddot{l} + \mathbf{x}''_G \dot{l}^2 \quad (5.9)$$

Pertanto, calcolate per ogni punto della traiettoria le derivate parziali \mathbf{x}'_G e \mathbf{x}''_G , basta definire l'andamento di $l(t)$ per ricavare $x(t)$, $z(t)$ e le loro derivate rispetto al tempo.

5.4 Tensioni positive e limitate

L'obiettivo che ci si pone è trovare il tempo minimo di esecuzione della legge di moto polinomiale tale da assicurare tensioni nei cavi sempre positive e limitate entro i valori τ_{min} e τ_{max} . Abbiamo visto come l'andamento $l(t)$ dipenda direttamente da t_f , perché i coefficienti della legge polinomiale di quinto grado sono funzioni del tempo di percorrenza. Il tempo t_f è un parametro chiave anche per l'andamento delle tensioni: τ_1 e τ_2 dipendono infatti dalle accelerazioni del centro di massa (funzioni di $l(t)$, e quindi di t_f), e dalla posizione x, z, θ assunta dall'organo terminale in ogni punto. Se $x(t)$ e $z(t)$ sono chiaramente funzioni di t_f , l'andamento di $\theta(t)$ ne è influenzato in quanto è diretta conseguenza delle accelerazioni scelte per il centro di

massa (sez. 5.1).

5.4.1 Condizioni quasistatiche

Se il percorso scelto è realizzabile staticamente, l'organo terminale potrebbe rimanere in ogni posizione a tempo infinito, ed è verificato per tutti i punti della traiettoria $\tau_{min} \prec \tau \prec \tau_{max}$. Nel caso t_f sia molto grande, il moto è quasistatico ($\theta(t) = \theta_s(t)$) e le tensioni τ_1 e τ_2 corrispondono in prima approssimazione alle tensioni che si ottengono in condizioni statiche lungo tutti i punti della traiettoria.

Si vuole trovare qual è il minimo tempo t_f di esecuzione della legge di moto polinomiale tale per cui l'evoluzione di $\theta(t)$ può essere considerata quasistatica; si cerca cioè il tempo t_f tale per cui le forze che agiscono sul sistema producano un andamento di $\theta(t)$ la cui differenza, punto per punto, dal valore statico θ_s non sia mai più grande di un valore $\delta\theta$, scelto piccolo a piacere; in formule:

$$t_f \mid \forall 0 \leq t \leq t_f \rightarrow |\theta(t) - \theta_s(t)| < \delta\theta \quad (5.10)$$

Ribattezziamo t_{fq} questo particolare tempo di esecuzione.

Per trovare t_{fq} si parte da un valore t_f piccolo a piacere e si cerca di aumentare il tempo di percorrenza al massimo, fermandosi quando risulta verificata la condizione 5.10.

5.4.2 Tempo di minima percorrenza

Individuato un percorso realizzabile staticamente, lungo il quale le tensioni risultano positive e limitate, si osserva che è possibile diminuire il tempo esecuzione t_f , modificando di conseguenza l'andamento delle tensioni $\tau_1(t)$ e $\tau_2(t)$ lungo la traiettoria; si cerca quindi di ridurre il tempo di percorrenza al massimo a partire dal valore t_{fq} , verificando che le tensioni rimangano sempre positive e limitate.

In formule, si cerca:

$$\begin{aligned} t_f \mid \forall 0 \leq t \leq t_f \rightarrow \max(\tau_1(t), \tau_2(t)) \Big|_0^{t_f} < \tau_{max} \\ \min(\tau_1(t), \tau_2(t)) \Big|_0^{t_f} > \tau_{min} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ogni volta che si riduce il tempo di percorrenza t_f , si ricalcolano gli andamenti di $l(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{z}(t)$, $\ddot{\theta}(t)$ e quindi le tensioni $\tau_1(t)$ e $\tau_2(t)$; fintantoché le tensioni rimangono lungo tutta la traiettoria entro i limiti imposti, è possibile diminuire ulteriormente t_f .

Procedendo in questo modo si trova il t_f minimo che consente di mantenere le tensioni entro il range ammissibile. Questo valore t_f viene ribattezzato t_{fa} .

Raggiunto il punto x_f e z_f è possibile pianificare nuovamente il movimento del robot lungo una traiettoria diversa, senza raggiungere un arresto completo.

5.5 Condizioni di arresto

Si supponga invece che al termine del percorso si voglia arrestare il robot. I motori vengono fermati e le lunghezze dei cavi non possono più variare. Al tempo $t = t_{fa}$ il sistema si trova nello stato descritto in seguito (fig. 5.4):

- $x(t_{fa})$ e $z(t_{fa})$ corrispondono alle posizioni pianificate x_f e z_f di fine percorso; $\theta(t_{fa})$ invece assume posizioni che in generale si discostano da quella di equilibrio statico θ_s .
- Le velocità \dot{x} e \dot{z} si annullano come conseguenza della legge polinomiale imposta, mentre in generale $\dot{\theta}(t_{fa})$ è diversa da zero.
- Le lunghezze dei cavi L_1 e L_2 si trovano, tramite cinematica indiretta, dai valori x_f , z_f e $\theta(t_{fa})$ (eq. 3.5).

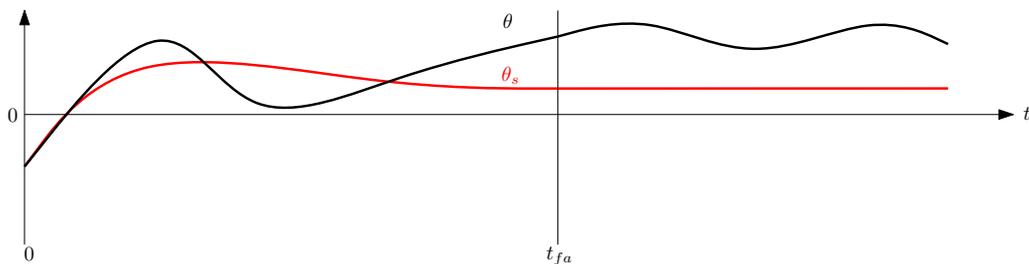


Figura 5.4: Andamento della coordinata θ nel tempo di percorrenza t_{fa} rispetto alle corrispondenti posizioni statiche, e successive oscillazioni

Se $\theta(t_{fa})$ è lontano da θ_s associato ai valori x_f e z_f , il sistema dopo una serie di oscillazioni tenderà ad assestarsi in un punto di equilibrio diverso da x_f e z_f : questo si spiega con il fatto che le lunghezze dei cavi al tempo t_{fa}

non coincidono a quelle al tempo t_{fq} del caso quasistatico; come visto nella sezione 3.1.2, a lunghezze di cavi diverse corrispondono punti di equilibrio geometrico-statico diversi, e il punto di equilibrio associato alle lunghezze dei cavi al tempo t_{fa} è diverso da quello della configurazione quasistatica al tempo t_{fq} .

Inoltre l'ampiezza delle oscillazioni attorno al punto di equilibrio aumenta se il valore di $\dot{\theta}(t_f)$ è diverso da zero.

E' in teoria possibile ridurre l'entità del fenomeno oscillatorio, o comunque riuscire a far coincidere il punto di equilibrio con il punto di arresto pianificato, agendo ancora una volta sul tempo t_f .

Si è visto come modificando il tempo di esecuzione t_f si intervenga sulle forze agenti sull'organo terminale e come questo influenzi l'andamento della coordinata $\theta(t)$. Se il modello dinamico con cui si calcola l'andamento delle tensioni dei cavi e di θ è aderente alla realtà, è possibile cercare qual è il tempo t_f che consenta di ottenere un angolo $\theta(t_f)$ prossimo al corrispondente valore statico θ_s per le medesime $x(t_f)$ e $z(t_f)$. In formule, si cerca

$$t_f \mid |\theta(t_f) - \theta_s(t_f)| < \delta\theta \quad (5.12)$$

Dove $\delta\theta$ è un valore piccolo a piacere. Questo valore di t_f sarà compreso tra il valore minimo di percorrenza t_{fa} e il valore di percorrenza con moto quasistatico t_{fq} : $t_{fa} < t_f < t_{fq}$.

Analogamente, nello stesso intervallo si cerca un tempo t_f che produca un sistema di forze che induca la velocità $\dot{\theta}(t_f)$ essere prossima a zero:

$$t_f \mid \left| \dot{\theta}(t_f) - \dot{\theta}_s(t_f) \right| < \delta\dot{\theta} \quad (5.13)$$

dove $\delta\dot{\theta}$ è un valore di velocità angolare piccolo a piacere.

Unendo le condizioni 5.12 e 5.13 è possibile ottenere il valore t_{fs} che consente non solo di rispettare la condizione sulla positività e limitatezza delle tensioni, ma che permette un arresto nel punto pianificato, limitando il fenomeno oscillatorio (fig. 5.5).

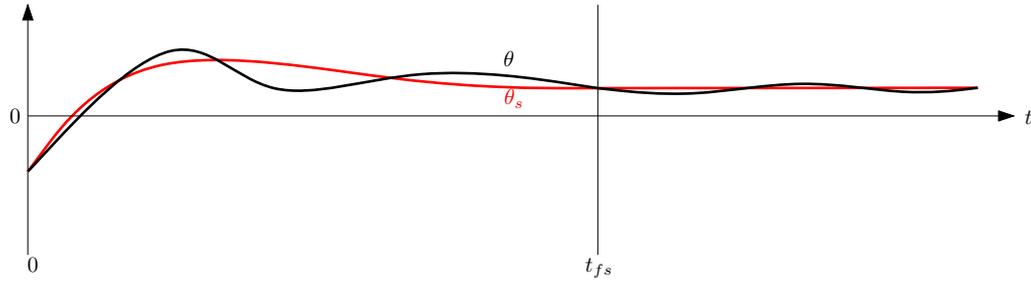


Figura 5.5: Andamento della coordinata θ nel tempo di percorrenza t_{fs} rispetto alle corrispondenti posizioni statiche, e successive oscillazioni

5.6 Conclusioni

In questo capitolo è stato affrontato il problema della pianificazione della traiettoria. Si è evidenziato ancora una volta come la natura sottoattuata del sistema ponga un limite sul numero di parametri che possono essere pianificati; è stata mostrata una soluzione in cui viene pianificato il moto delle sole coordinate x e z , mentre l'evoluzione di θ resta subordinata alla distribuzione delle forze sull'organo terminale durante il movimento.

E' stata quindi adottata una legge di moto di tipo polinomiale e si è studiato qual è il tempo minimo per percorrere un dato percorso garantendo che le tensioni nei cavi rimangano sempre positive e limitate. Sono state indagate infine le condizioni che permettono un arresto del robot a fine traiettoria, contenendo le oscillazioni dovute al grado di libertà non controllato.

Capitolo 6

Simulazioni

L'obiettivo delle simulazioni è studiare il comportamento del robot, sottoposto a carichi diversi e lungo percorsi diversi. Per ogni simulazione si tratterà l'andamento delle tensioni e si analizzeranno eventuali scostamenti dalla traiettoria prevista; verrà analizzata inoltre l'entità delle oscillazioni all'arresto del robot nel punto finale di una traiettoria.

In tutte le simulazioni verrà mantenuta costante la geometria, dati i parametri riassunti in tabella 6.1. Si andrà invece a modificare di caso in caso il valore della forza esterna applicata al centro di massa f_{ext} e della coppia esterna k_{ext} .

Parametro	Valore	Unità
a_{2x}	1.0	m
b_1	0.1	m
b_2	0.1	m
ϕ_1	$5/6 \pi$	rad
ϕ_2	$\pi/6$	rad
r	0.04	m
I_m	$0.7 \cdot 10^{-4}$	$kg \cdot m^2$
c_m	$0.4 \cdot 10^{-4}$	$N \cdot m \cdot s$
m	2	kg
I_e	$6.65 \cdot 10^{-3}$	$kg \cdot m^2$
t_{min}	2	N
t_{max}	200	N

Tabella 6.1: Parametri di simulazione

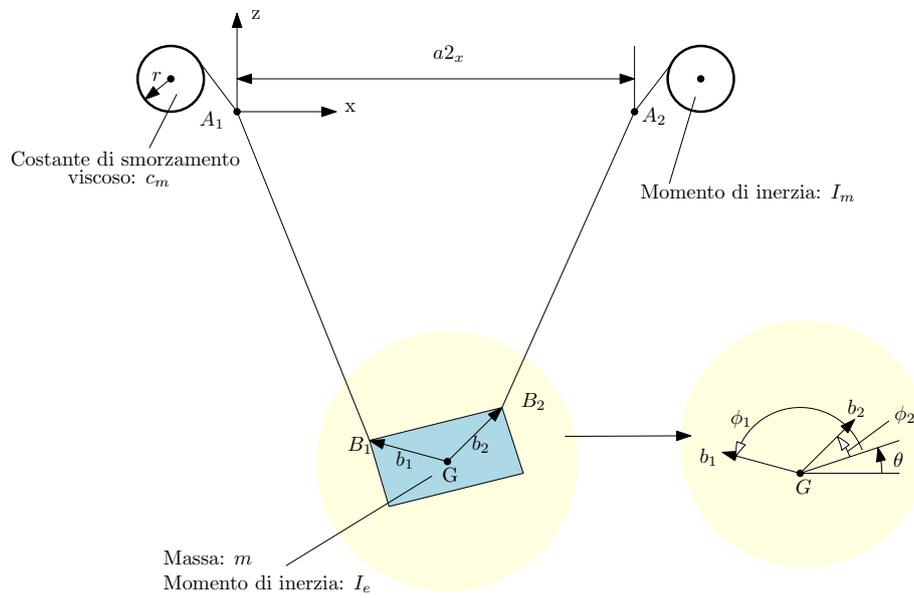


Figura 6.1: Parametri geometrici del modello

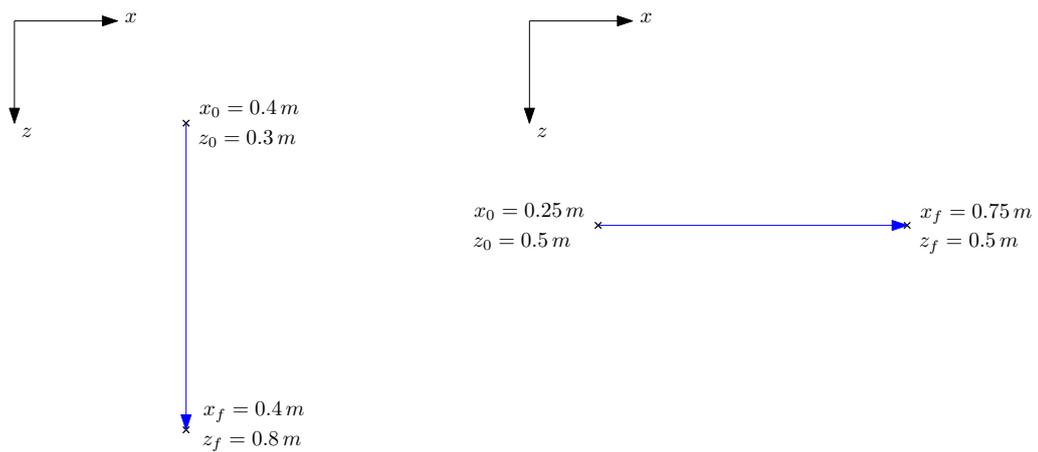


Figura 6.2: Rappresentazione delle due traiettorie rettilinee simulate

6.1 Traiettoria rettilinea

Si vuole simulare il movimento del robot lungo una traiettoria rettilinea. Si presentano in seguito due casi (6.2):

1. Movimento verticale, da $x_0 = 0.4\text{ m}$ $z_0 = 0.3\text{ m}$ a $x_f = 0.4\text{ m}$ $z_f = 0.8\text{ m}$.
2. Movimento orizzontale, da $x_0 = 0.25\text{ m}$ $z_0 = 0.5\text{ m}$ a $x_f = 0.75\text{ m}$ $z_f = 0.5\text{ m}$.

Tutti e due i casi hanno una lunghezza di percorso $L_f = 0.5\text{ m}$.

6.1.1 Movimento verticale

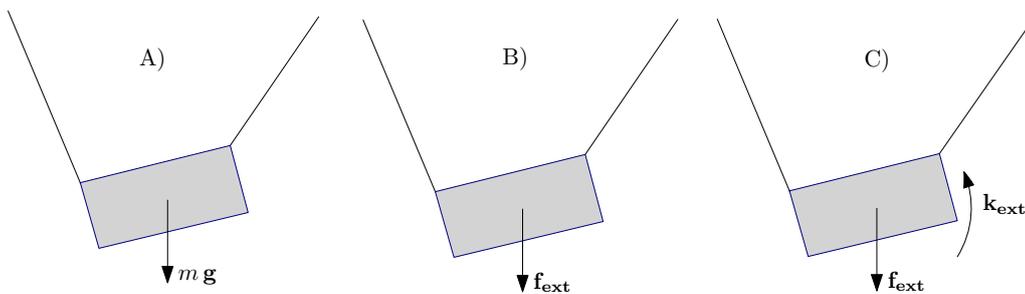


Figura 6.3: Rappresentazione dei tre casi analizzati

Si conducono in parallelo le simulazioni per tre casi (6.3):

- Caso A: L'organo terminale è sottoposto alla sola forza peso: $f_{ext} = 2 \cdot 9.81 = 19.62\text{ N}$.
- Caso B: All'organo terminale è agganciato un carico di 50 N in corrispondenza del baricentro. Di conseguenza $f_{ext} = 69.62\text{ N}$.
- Caso C: All'organo terminale è agganciato un carico di 50 N sbilanciato. Al baricentro è applicato quindi un carico equivalente $f_{ext} = 69.62\text{ N}$ e una coppia $k_{ext} = 1\text{ N} \cdot \text{m}$.

Si seguono i seguenti step:

- Si calcolano i tempi di percorrenza minimi t_{fq} per cui il movimento può essere considerato quasistatico (si veda sez. 5.4.1).

Il moto è quasistatico se, in ogni punto della traiettoria, il robot sarebbe in grado di mantenere la posizione raggiunta per un tempo indefinito. E' possibile pertanto calcolare per ogni valore di x e z della traiettoria il corrispondente valore di equilibrio θ_s che il robot assumerebbe se fosse staticamente fermo in quel punto; scelto un tempo di percorrenza della traiettoria t_f si verifica in ogni punto quanto il reale andamento dell'angolo θ si discosta dal valore statico. Si sceglie un valore $\delta\theta$ di scostamento e si cerca qual è il minimo tempo di percorrenza t_{fq} che garantisca che in ogni punto della traiettoria sia verificata la condizione:

$$t_{fq} | \forall 0 \leq t \leq t_{fq} \rightarrow |\theta(t) - \theta_s(t)| < \delta\theta \quad (6.1)$$

E' stato scelto per le simulazioni un valore $\delta\theta = 0.002 \text{ rad}$ (0.11°).

In figura 6.4 sono messe a confronto le tensioni dei cavi nei tre casi nel caso di moto quasistatico.

- Si usa l'algoritmo di pianificazione visto in sezione 5.4.2 per trovare il tempo minimo di esecuzione t_{fa} della legge di moto polinomiale tale da assicurare tensioni nei cavi sempre positive e limitate entro i valori t_{min} e t_{max} .

Si ipotizza che il punto di arrivo non sia un punto di arresto, ma che successivamente il robot si muova verso un secondo punto lungo una nuova traiettoria. Infatti al tempo t_{fa} la velocità $\dot{\theta}(t_{fa})$ sarà in generale diversa da zero, e la posizione $\theta(t_{fa})$ sarà diversa dal corrispondente valore di equilibrio statico; se si volesse arrestare l'organo terminale proprio al tempo t_{fa} seguirebbe un moto oscillatorio consistente, attorno a un punto di equilibrio diverso dal punto di arresto pianificato. In figura 6.5 si può confrontare l'andamento delle coordinate x z e θ nei tre casi; in figura 6.6 è riportato l'andamento delle tensioni.

- Al fine di ridurre il fenomeno oscillatorio che potrebbe intervenire all'arresto del sistema, si pongono le condizioni viste nella sezione 5.5 sul raggiungimento del punto di equilibrio e sul valore della velocità $\dot{\theta}(t_f)$.

In particolare si cerca il tempo di percorrenza t_{fs} che soddisfi la condizione:

$$|\theta(t_f) - \theta_s(t_f)| < \delta\theta \quad \& \quad \left| \dot{\theta}(t_f) - \dot{\theta}_s(t_f) \right| < \delta\dot{\theta} \quad (6.2)$$

Si impongono $\delta\theta = 0.002 \text{ rad}$ e $\delta\dot{\theta} = 0.2 \text{ rad/s}$. In figura 6.7 è riportato l'andamento delle coordinate x , z e θ pianificando la traiettoria con un tempo di percorrenza t_{fs} .

I risultati delle simulazioni sono riassunti in tabella 6.2. I dati riportati sono i seguenti:

- Tempi di percorrenza della traiettoria t_{fq} , t_{fa} e t_{fs} .
- Posizione finale $\theta(t_f)$: nel caso quasistatico, $\theta(t_{fq})$ è prossimo al valore all'equilibrio, come nel caso di pianificazione per l'arresto $\theta(t_{fs})$; nel caso di movimento rapido, $\theta(t_{fa})$ in generale è diverso dal valore di equilibrio.
- Velocità angolare finale $\dot{\theta}(t_f)$; nel caso quasistatico $\dot{\theta}(t_{fq})$ tende a zero; nel caso di pianificazione per l'arresto $\dot{\theta}(t_{fs})$ è molto piccolo. Nel caso di movimento rapido, $\dot{\theta}(t_{fa})$ assume valori non trascurabili.
- Posizione di equilibrio x_{eq} , z_{eq} e θ_{eq} corrispondenti alle lunghezze dei cavi al tempo t_f , ottenuto mediante analisi geometrico-statica diretta (sez. 3.1.2): è la posizione di equilibrio a cui tenderebbe il robot nel caso di arresto completo a fine traiettoria. Nel caso di moto quasistatico la posizione di equilibrio è prossima alla configurazione del sistema al tempo t_{fq} ; nel caso di pianificazione nel tempo di percorrenza t_{fs} , il punto di equilibrio statico viene stimato per verificare che il sistema assuma la posizione corretta all'arresto del robot. Nel caso di movimento rapido questo dato evidenzia come la pianificazione con il solo vincolo di tensioni ammissibili non sia adatta per prevedere l'arresto del sistema, ma solo per la pianificazione del passaggio per un punto di transito.

Dalla lettura dei dati emergono le seguenti osservazioni:

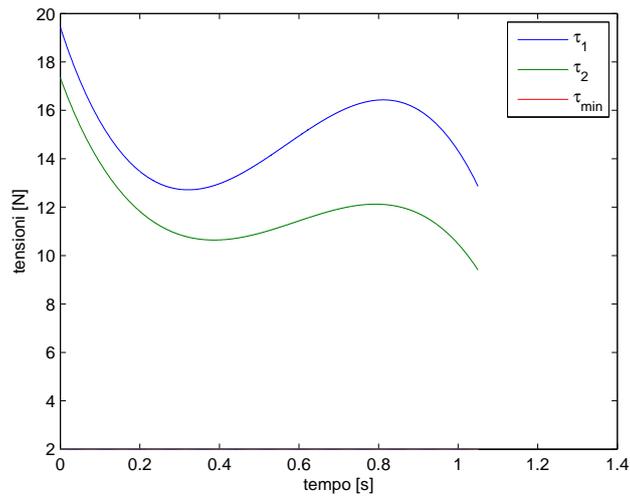
- Il caso B fa registrare dei tempi di percorrenza della traiettoria più bassi, poiché la forza esterna applicata gioca a stabilizzare il movimento. Si consideri infatti che il moto avviene in verticale e verso il basso: i cavi non sono in grado di spingere l'organo terminale verso il basso, pertanto l'accelerazione in discesa è limitata; la presenza di una

Moto quasistatico						
#	t_{fq} [s]	$\theta(t_f)$ [rad]	$\dot{\theta}(t_f)$ [rad/s]	x_{eq} [m]	z_{eq} [m]	θ_{eq} [rad]
A	1.05	-0.1791	0.0015	0.4000	0.8000	-0.1790
B	0.60	-0.1788	0.0003	0.4000	0.8000	-0.1790
C	3.35	-0.0569	0.0006	0.4000	0.8000	-0.0568
Tensioni ammissibili						
#	t_{fa} [s]	$\theta(t_f)$ [rad]	$\dot{\theta}(t_f)$ [rad/s]	x_{eq} [m]	z_{eq} [m]	θ_{eq} [rad]
A	0.60	-0.1892	-0.3261	0.3990	0.8000	-0.1808
B	0.30	-0.1793	-0.9070	0.4000	0.8000	-0.1790
C	0.30	0.1536	-12.7211	0.4235	0.7890	-0.0179
Oscillazioni limitate						
#	t_{fs} [s]	$\theta(t_f)$ [rad]	$\dot{\theta}(t_f)$ [rad/s]	x_{eq} [m]	z_{eq} [m]	θ_{eq} [rad]
A	0.75	-0.1796	0.1198	0.3999	0.8000	-0.1792
B	0.50	-0.1799	-0.0180	0.3999	0.8000	-0.1792
C	0.75	-0.0551	0.1850	0.4002	0.8000	-0.0566

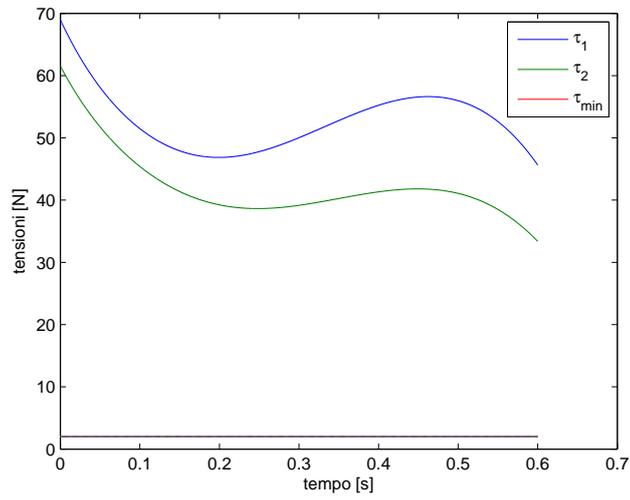
Tabella 6.2: Riepilogo dei valori t_f di percorrenza della traiettoria rettilinea verticale e dei corrispondenti punti di equilibrio all'arresto

forza verticale esterna permette invece che i cavi restino in tensione anche in presenza di accelerazioni elevate.

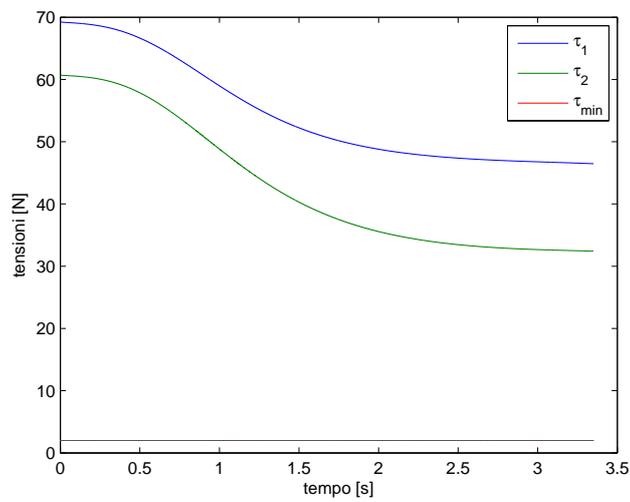
- Il caso C come prevedibile presenta il tempo di percorrenza quasistatico t_{fq} più elevato a causa dell'effetto destabilizzante della coppia esterna. Nel caso studiato tuttavia la presenza della coppia esterna non influenza in modo importante il raggiungimento delle tensioni limite, come si può vedere dal tempo t_{fa} , uguale al caso B ; vengono influenzate tuttavia le configurazioni finali $\theta(t_{fa})$ e $\dot{\theta}(t_{fa})$ che si discostano molto dalle condizioni quasistatiche; è necessario un tempo maggiore t_{fs} per stabilizzare la posizione dell'organo terminale in caso di totale arresto del moto.



(a) Caso A

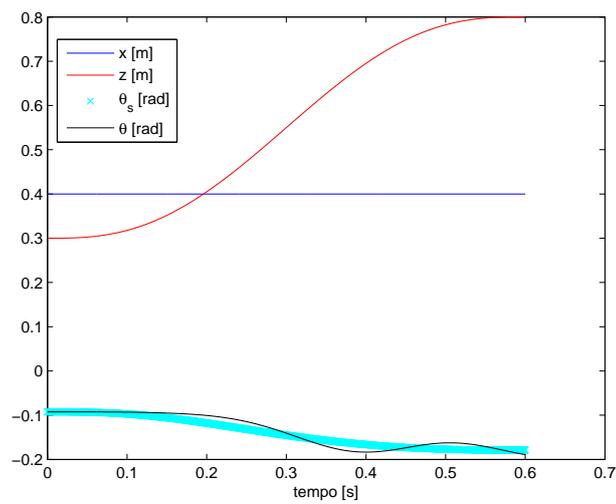


(b) Caso B

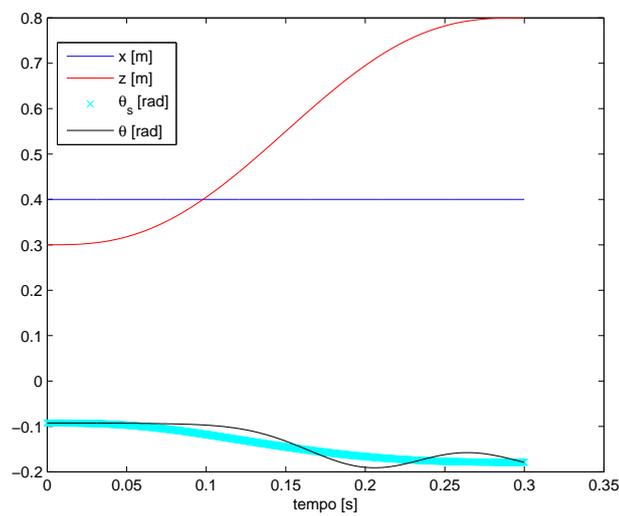


(c) Caso C

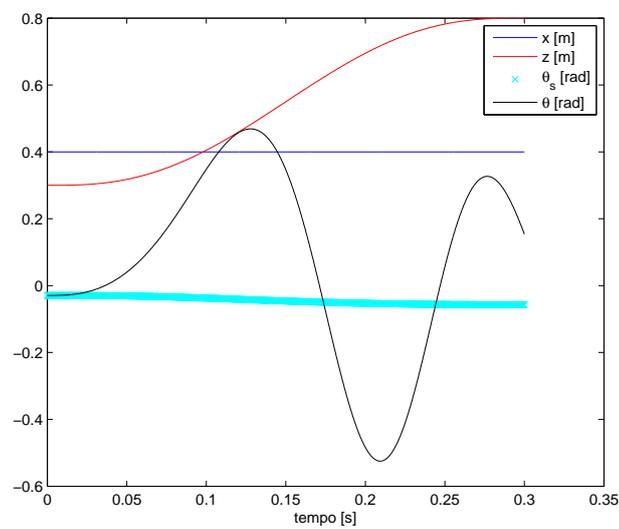
Figura 6.4: Andamento delle tensioni nel caso quasistatico, traiettoria verticale



(a) Caso A

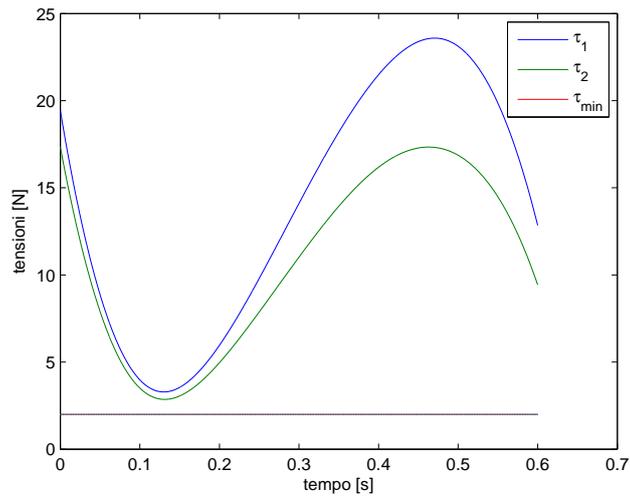


(b) Caso B

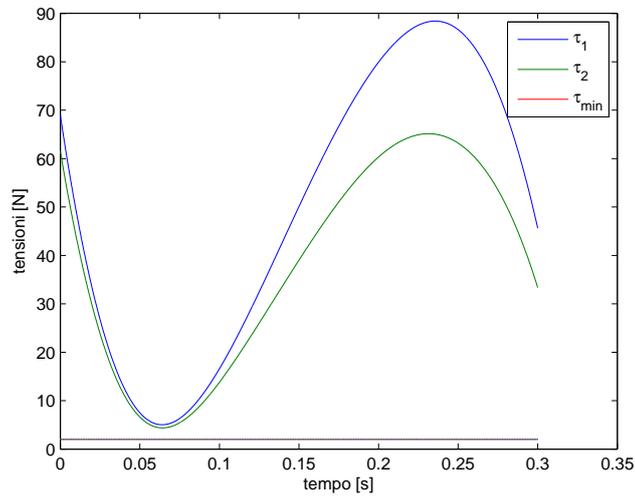


(c) Caso C

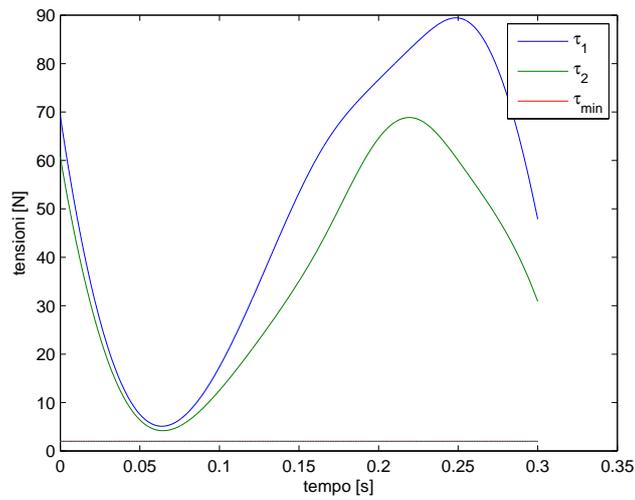
Figura 6.5: Andamento delle coordinate z , z e θ per il tempo di percorrenza t_{fa} , traiettoria verticale



(a) Caso A

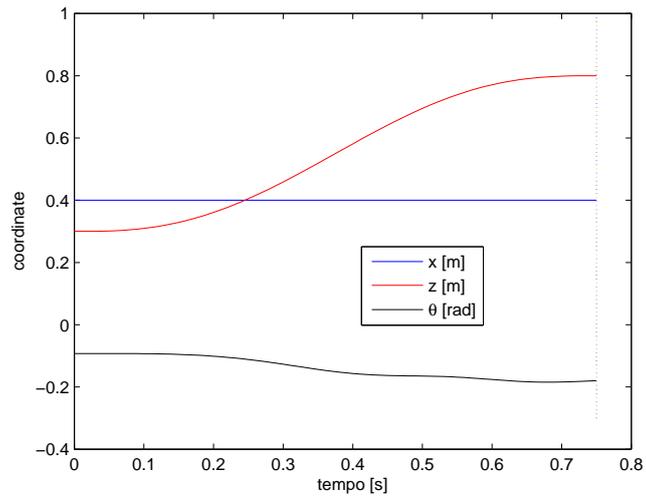


(b) Caso B

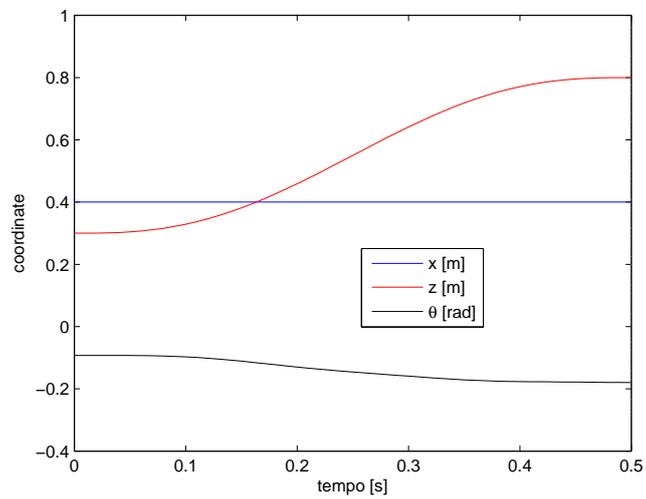


(c) Caso C

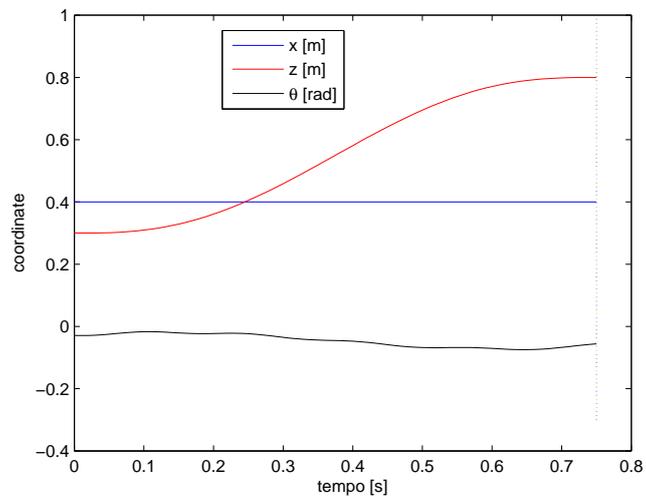
Figura 6.6: Andamento delle tensioni per il tempo di percorrenza t_{fa} , traiettoria verticale



(a) Caso A



(b) Caso B



(c) Caso C

Figura 6.7: Andamento delle coordinate x , z e θ per moto pianificato con tempo di percorrenza t_{fs} . Traiettoria verticale

6.1.2 Movimento orizzontale

Si procede come nel caso visto per il movimento verticale, distinguendo i tre casi: *A* in cui l'organo terminale è sottoposto alla sola forza peso, *B* in cui è applicata una forza verticale esterna $f_{ext} = 50 \text{ N}$ al centro di massa e *C* in cui è presente anche una coppia esterna $k_{ext} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$.

I risultati delle simulazioni sono riassunti in tabella 6.3.

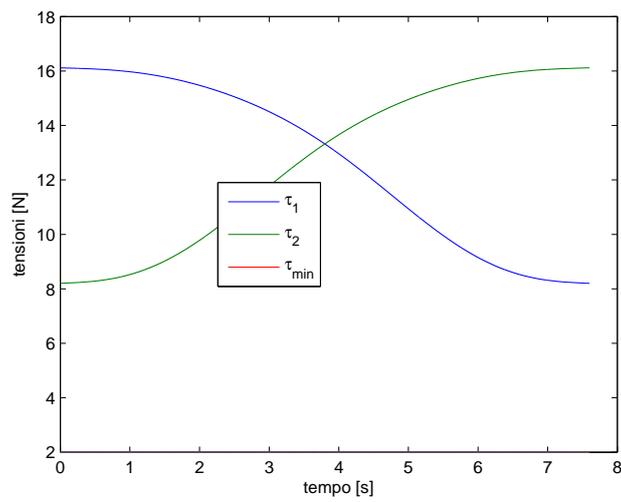
La figura 6.8 riassume l'andamento delle tensioni nei casi quasistatici. In figura 6.9 è diagrammato l'andamento delle coordinate x , z e θ quando il moto è pianificato in t_{fa} , e in figura 6.10 sono riportati gli andamenti delle tensioni. Infine in figura 6.11 è diagrammata l'evoluzione del sistema nel caso il robot venga arrestato dopo un tempo t_{fs} .

Moto quasistatico						
#	t_{fq} [s]	$\theta(t_f)$ [rad]	$\dot{\theta}(t_f)$ [rad/s]	x_{eq} [m]	z_{eq} [m]	θ_{eq} [rad]
A	7.60	0.3814	0.0008	0.7500	0.5000	0.3812
B	4.05	0.3815	0.0009	0.7500	0.5000	0.3812
C	4.05	0.4778	0.0015	0.7500	0.5000	0.4777
Tensioni ammissibili						
#	t_{fa} [s]	$\theta(t_f)$ [rad]	$\dot{\theta}(t_f)$ [rad/s]	x_{eq} [m]	z_{eq} [m]	θ_{eq} [rad]
A	0.50	0.3530	-0.5658	0.7485	0.5000	0.3784
B	0.25	0.4794	4.4208	0.7553	0.5007	0.3918
C	0.25	0.5123	6.4285	0.7519	0.4989	0.4746
Oscillazioni limitate						
#	t_{fs} [s]	$\theta(t_f)$ [rad]	$\dot{\theta}(t_f)$ [rad/s]	x_{eq} [m]	z_{eq} [m]	θ_{eq} [rad]
A	2.95	0.3829	-0.0630	0.7501	0.5000	0.3814
B	1.10	0.3803	-0.1462	0.7500	0.5000	0.3812
C	1.10	0.4783	-0.1359	0.7500	0.5000	0.4776

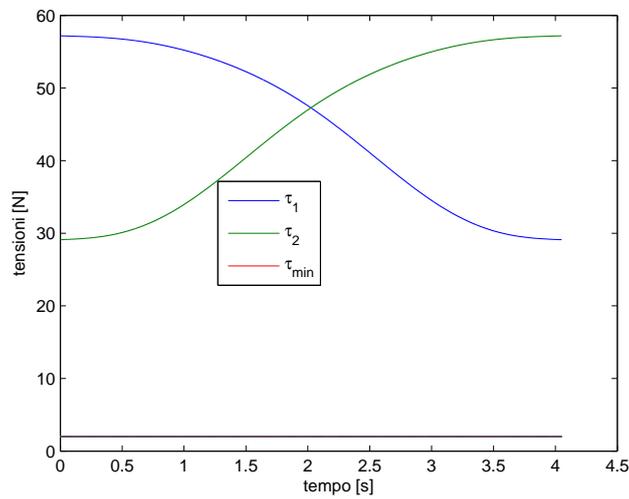
Tabella 6.3: Riepilogo dei valori t_f di percorrenza della traiettoria rettilinea orizzontale e dei corrispondenti punti di equilibrio all'arresto

Analizzando i risultati si osserva:

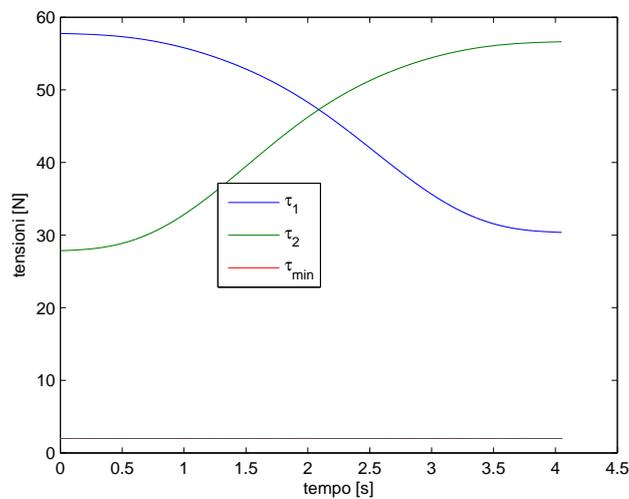
- Non c'è sostanziale differenza tra il caso *B* in cui il carico è applicato al centro di massa e il caso *C* in cui il carico è sbilanciato, se non per l'orientazione θ_{eq} di equilibrio finale.
- Il carico esterno applicato ha un effetto stabilizzante sul robot e permette di sfruttare accelerazioni maggiori prima di scendere sotto al limite minimo delle tensioni t_{min} .



(a) Caso A

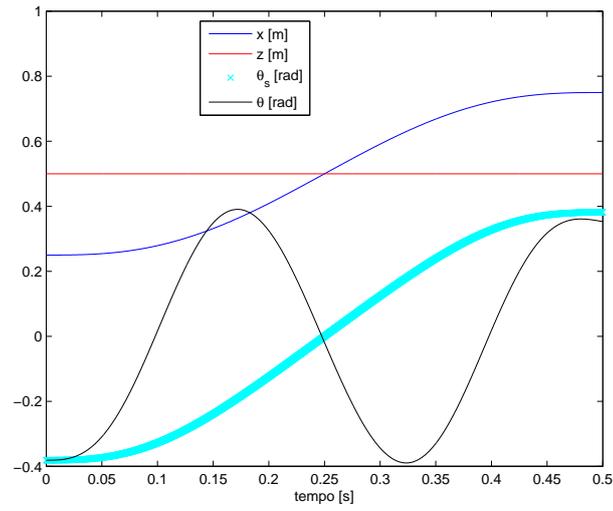


(b) Caso B

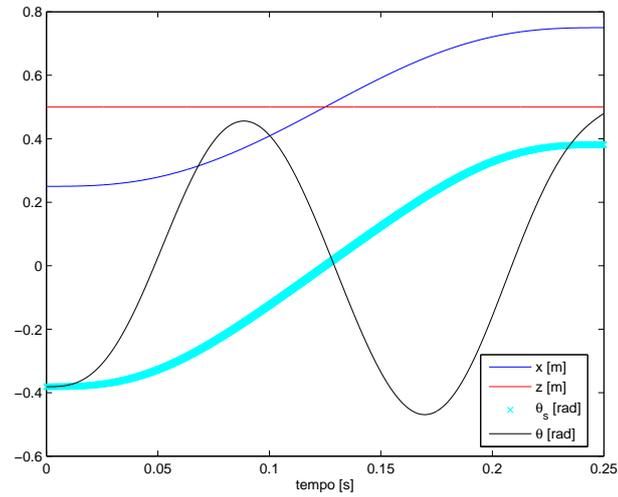


(c) Caso C

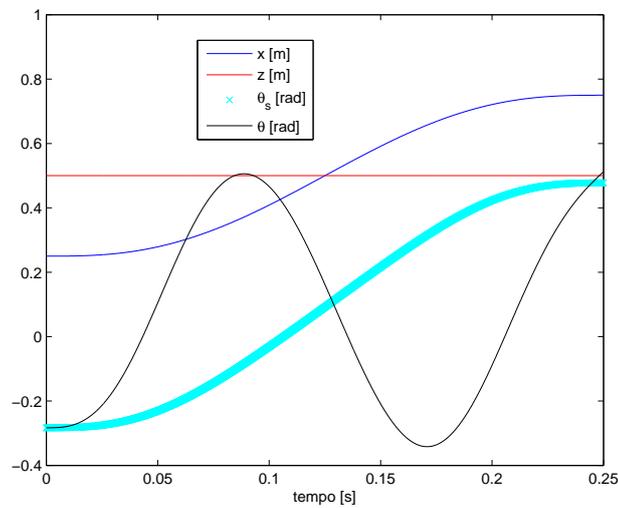
Figura 6.8: Andamento delle tensioni nel caso quasistatico, traiettoria orizzontale



(a) Caso A

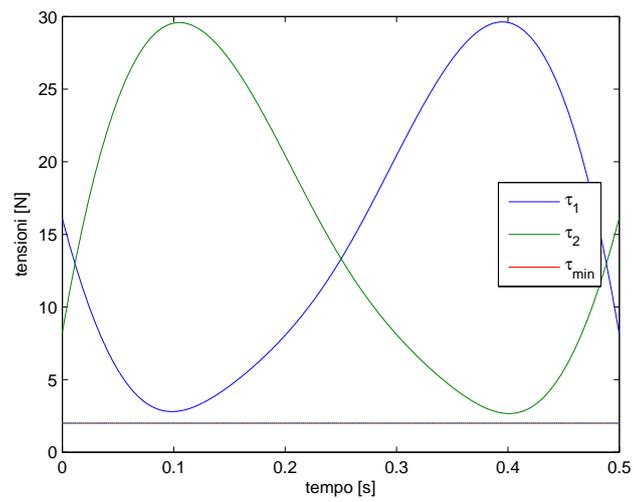


(b) Caso B

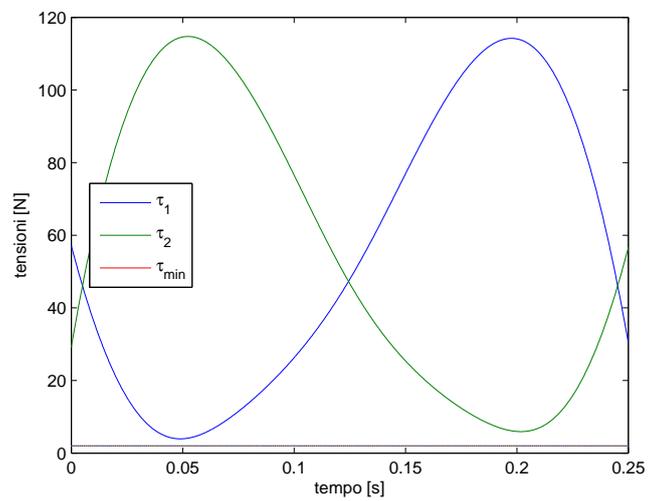


(c) Caso C

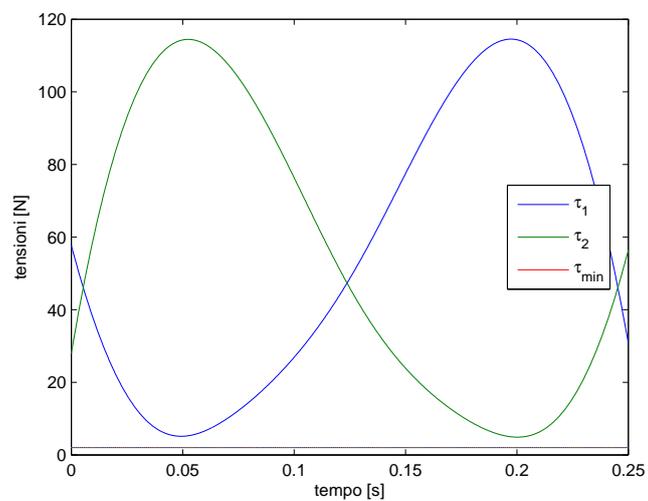
Figura 6.9: Andamento delle coordinate z , z e θ per il tempo di percorrenza t_{fa} , traiettoria orizzontale



(a) Caso A

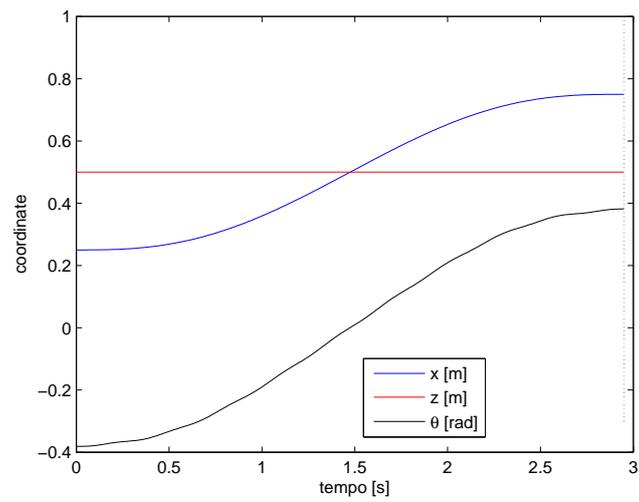


(b) Caso B

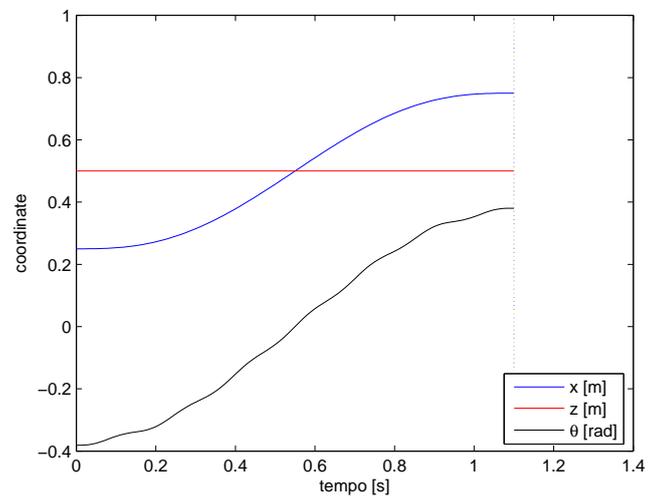


(c) Caso C

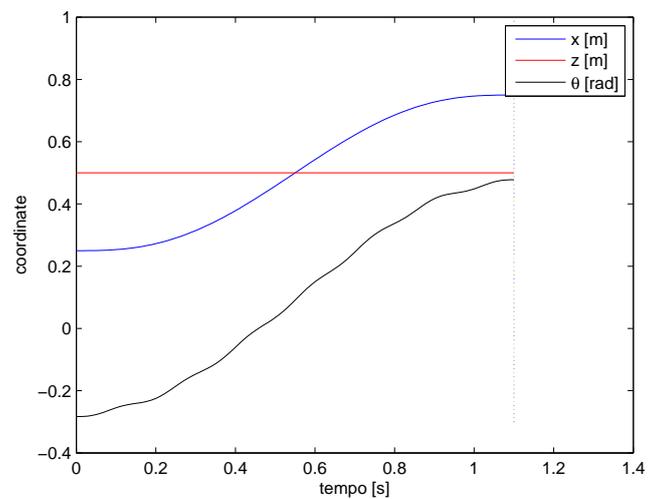
Figura 6.10: Andamento delle tensioni per il tempo di percorrenza t_{fa} , traiettoria orizzontale



(a) Caso A



(b) Caso B



(c) Caso C

Figura 6.11: Andamento delle coordinate x , z e θ per moto pianificato con tempo di percorrenza t_{fs} . Traiettoria orizzontale

6.2 Traiettoria circolare

Si vuole simulare il movimento del robot lungo una traiettoria circolare. Si è scelto come centro della traiettoria il punto $x = 0.4 m$ e $z = 0.5 m$; il raggio è $R = 0.1 m$.

Si studiano quindi due casi (fig. 6.12):

1. Arco di cerchio: il robot effettua una mezza circonferenza, partendo dal punto $x_0 = 0.5 m$ $z_0 = 0.5 m$ e procedendo in verso antiorario fino al punto $x_f = 0.3 m$ $z_f = 0.5 m$.
2. Tre giri completi: il robot effettua 3 giri completi in verso antiorario, partendo e arrivando nel punto $x = 0.5 m$ e $z = 0.5 m$.

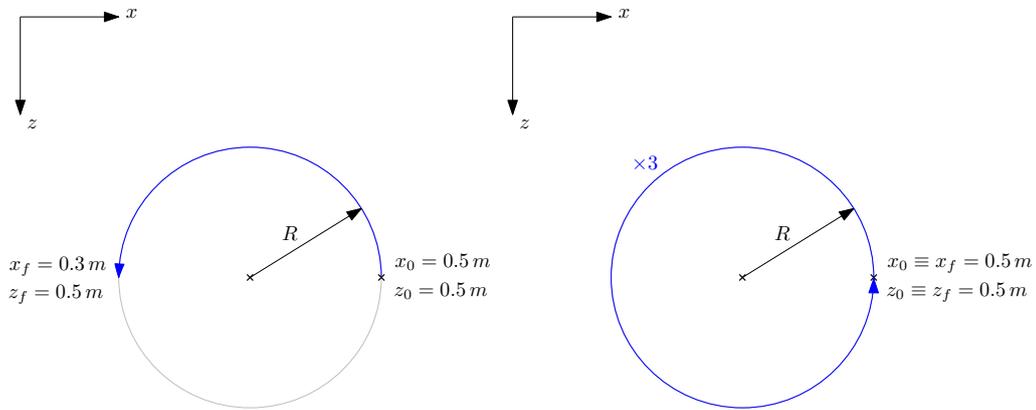


Figura 6.12: Traiettorie circolari simulate

6.2.1 Arco di cerchio

Come nel caso della traiettoria rettilinea, si studia la risposta del sistema nei tre casi:

- Caso *A*: piattaforma mobile soggetta alla sola forza peso.
- Caso *B*: $f_{ext} = 50 N$, verticale verso il basso.
- Caso *C*: Oltre a f_{ext} agisce una coppia $k_{ext} = 1 N$: è assimilabile ad un carico sbilanciato rispetto al centro di massa.

Si procede quindi con il calcolare il tempo di percorrenza della traiettoria t_{fq} che assicura un movimento quasistatico. Dopodiché si prova a ridurre il tempo di percorrenza al minimo, fino a trovare il valore t_{fa} , purché siano

rispettati i limiti sulle tensioni dei cavi. Infine si calcola qual è il tempo di percorrenza ottimale t_{fq} per ottenere un arresto del robot nel giusto punto di equilibrio ed evitando oscillazioni eccessive.

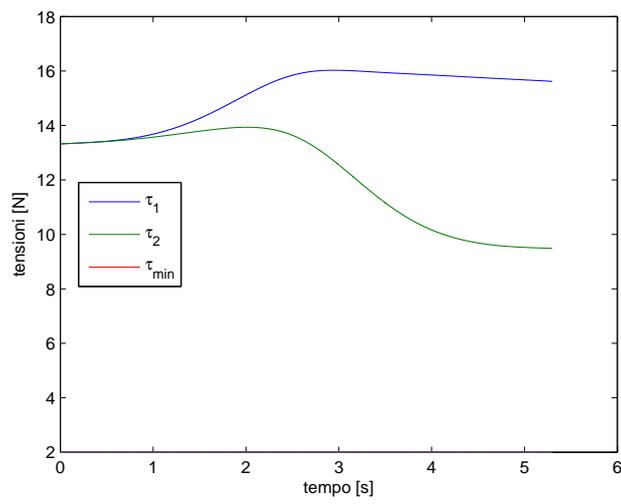
I risultati delle simulazioni sono riportati in tabella 6.4.

In figura 6.13 sono riportate le tensioni nel caso quasistatico. Vengono riportati poi i diagrammi degli andamenti delle coordinate x , z e θ nel tempo di percorrenza t_{fa} (fig. 6.14); il corrispondente grafico delle tensioni (fig. 6.15) mostra un andamento sempre positivo e limitato entro i valori di tensione limite. Infine è diagrammata l'evoluzione delle coordinate nel tempo di percorrenza t_{fq} insieme al movimento oscillatorio che ne segue (fig. 6.20).

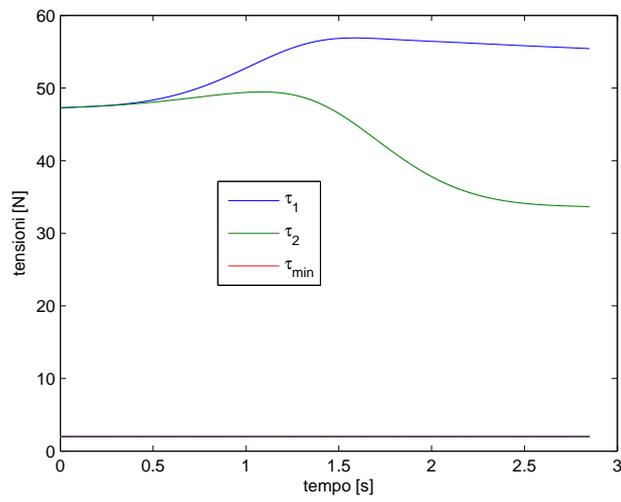
Anche in questo caso viene evidenziato come la presenza di un carico abbia un effetto stabilizzante sul movimento del robot, mentre non si evidenziano peggioramenti delle prestazioni nel caso di carico sbilanciato.

Moto quasistatico						
#	t_{fq} [s]	$\theta(t_f)$ [rad]	$\dot{\theta}(t_f)$ [rad/s]	x_{eq} [m]	z_{eq} [m]	θ_{eq} [rad]
A	5.30	-0.2910	0.0001	0.3000	0.5000	-0.2910
B	2.85	-0.2910	0.0001	0.3000	0.5000	0.2910
C	2.95	-0.1947	-0.0009	0.3000	0.5000	-0.1947
Tensioni ammissibili						
#	t_{fa} [s]	$\theta(t_f)$ [rad]	$\dot{\theta}(t_f)$ [rad/s]	x_{eq} [m]	z_{eq} [m]	θ_{eq} [rad]
A	0.85	-0.1998	0.5060	0.3044	0.5006	-0.2838
B	0.45	-0.1984	1.0673	0.3045	0.5006	-0.2835
C	0.45	-0.0946	-1.6857	0.3044	0.5010	-0.1844
Oscillazioni limitate						
#	t_{fs} [s]	$\theta(t_f)$ [rad]	$\dot{\theta}(t_f)$ [rad/s]	x_{eq} [m]	z_{eq} [m]	θ_{eq} [rad]
A	1.30	-0.2913	0.0645	0.3000	0.5000	-0.2910
B	0.70	-0.2907	0.1079	0.3000	0.5000	-0.2910
C	0.70	-0.1954	0.1078	0.3000	0.5000	-0.1947

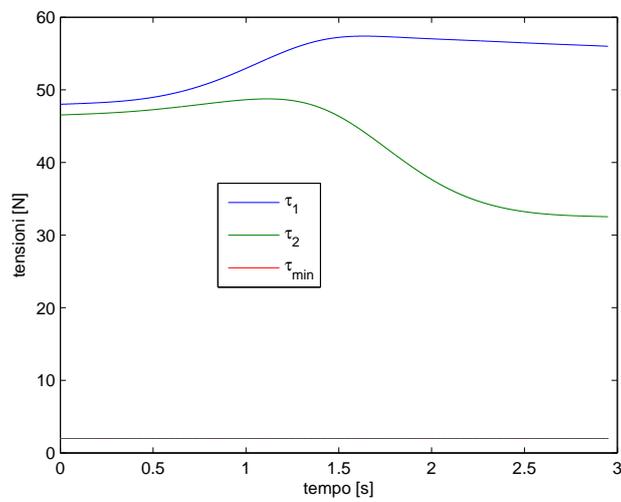
Tabella 6.4: Riepilogo dei valori t_f di percorrenza della traiettoria ad arco di cerchio e dei corrispondenti punti di equilibrio all'arresto



(a) Caso A

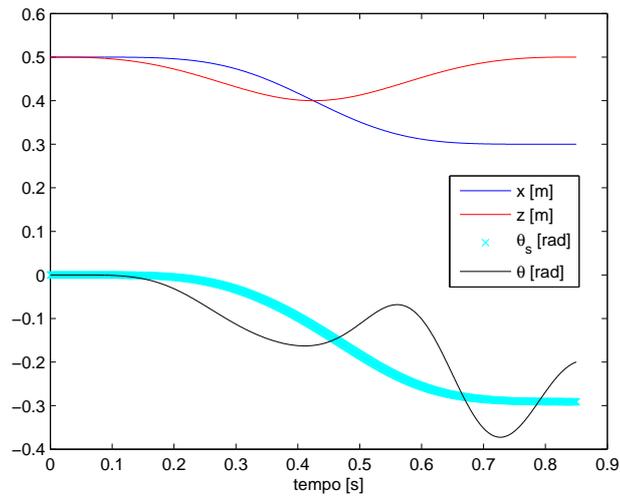


(b) Caso B

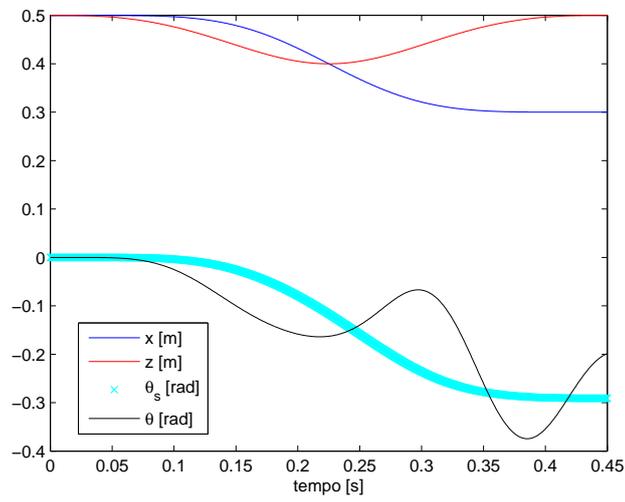


(c) Caso C

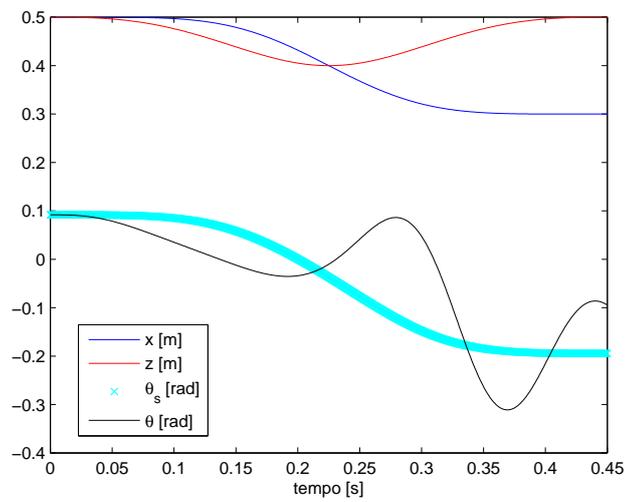
Figura 6.13: Andamento delle tensioni nel caso quasistatico, arco di cerchio



(a) Caso A

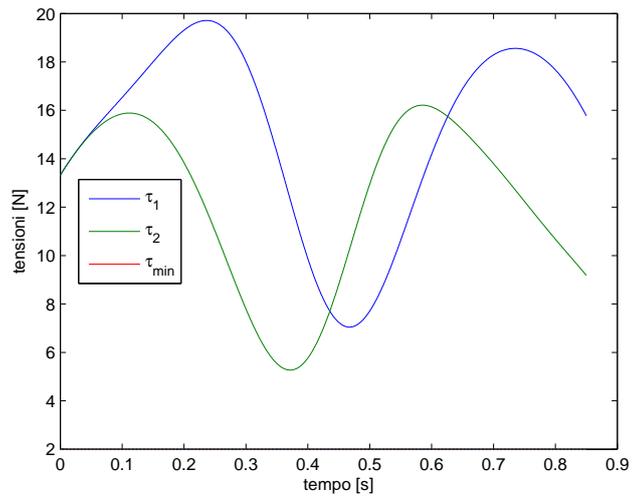


(b) Caso B

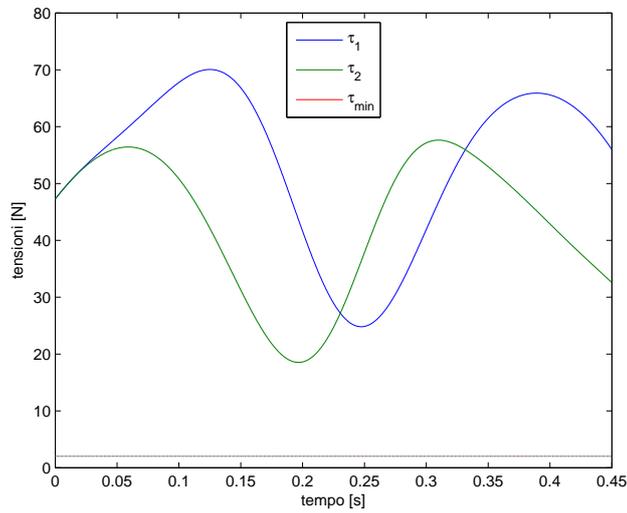


(c) Caso C

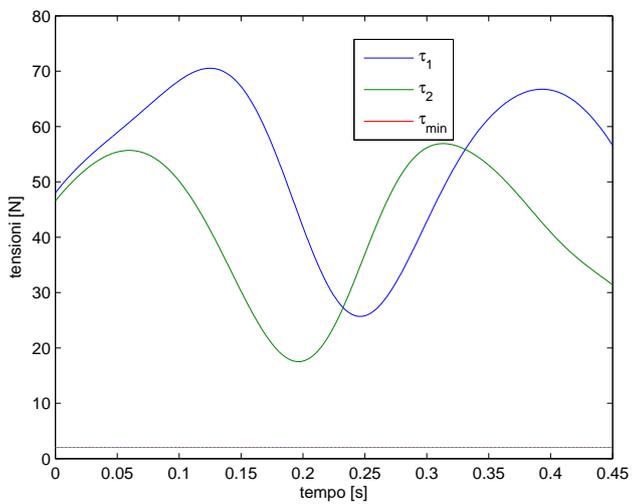
Figura 6.14: Andamento delle coordinate z , z e θ per il tempo di percorrenza t_{fa} , arco di cerchio



(a) Caso A

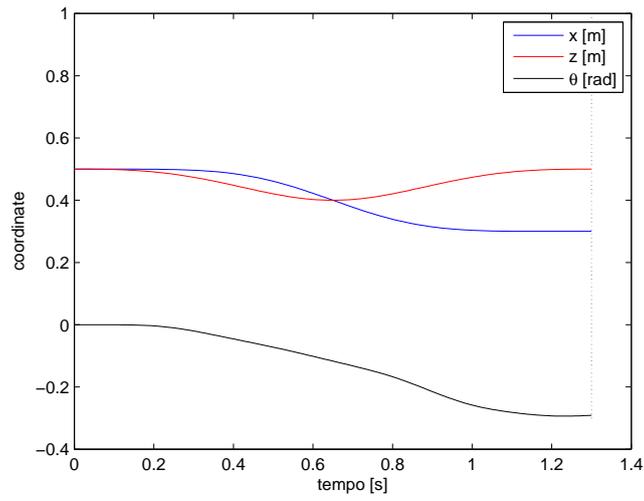


(b) Caso B

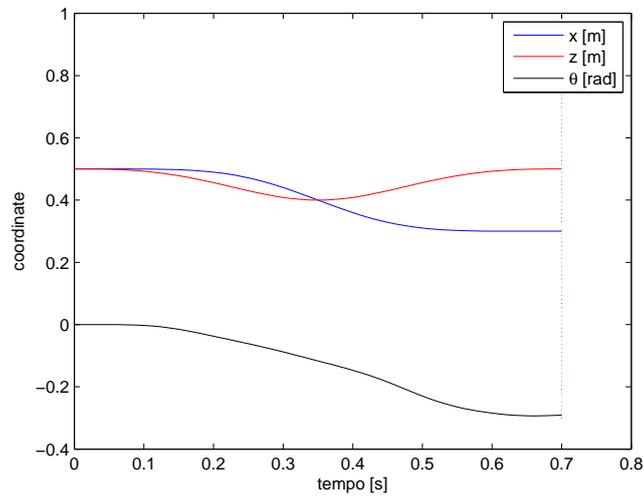


(c) Caso C

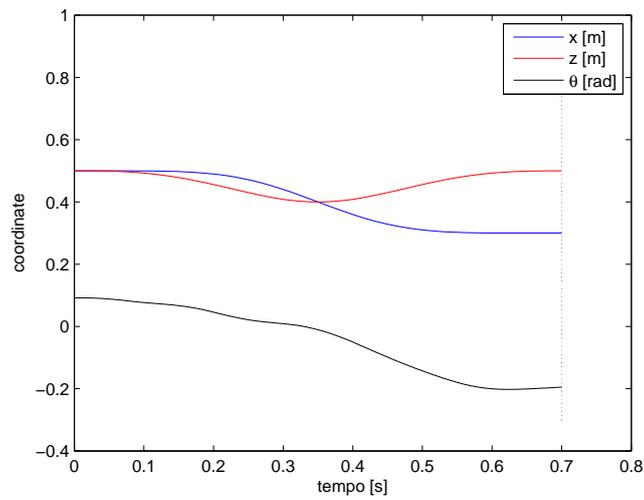
Figura 6.15: Andamento delle tensioni per il tempo di percorrenza t_{fa} , arco di cerchio



(a) Caso A



(b) Caso B



(c) Caso C

Figura 6.16: Andamento delle coordinate x , z e θ per moto pianificato con tempo di percorrenza t_{fs} . Arco di cerchio

6.2.2 Tre giri completi

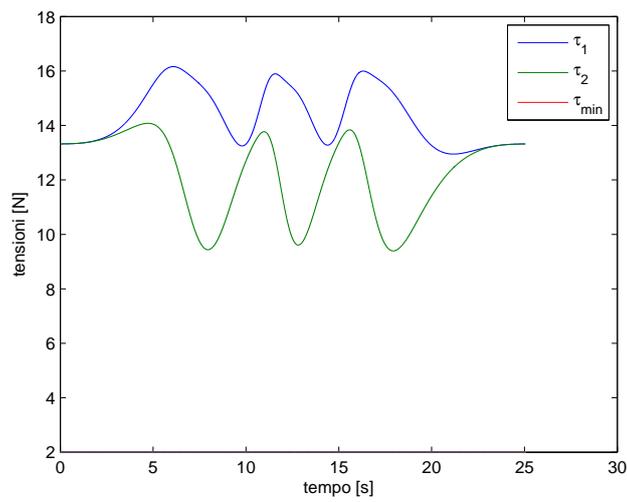
Vengono simulati i casi (A) organo terminale sottoposto alla forza peso, (B) carico esterno applicato, (C) carico esterno sbilanciato applicato.

Anche in questo caso si procede a calcolare i tempi di percorrenza t_{fq} , t_{fa} e t_{fs} e a simulare l'evoluzione delle coordinate e delle tensioni. I risultati sono riassunti in tabella 6.5.

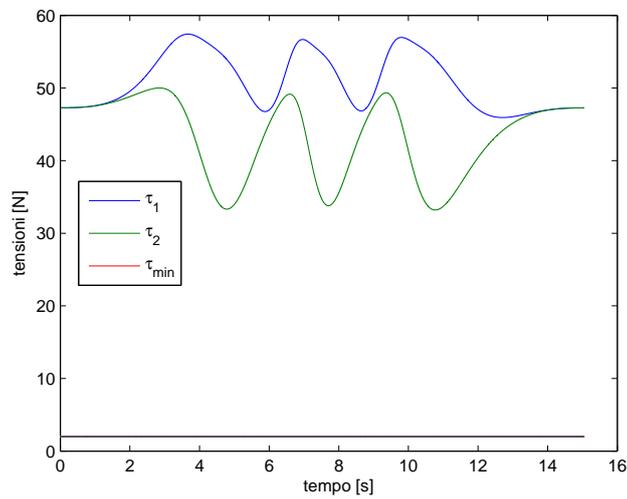
Si osserva che nel caso si pianifichi il moto nel tempo di percorrenza t_{fa} , l'evoluzione di $\theta(t)$ presenta delle oscillazioni molto ampie e di fatto può rendere l'impiego del robot pericoloso o compromettere l'esecuzione di specifici task. Risulta preferibile pertanto pianificare il moto scegliendo sempre un tempo di percorrenza più basso, come nella soluzione evidenziata nel caso t_{fq} .

Moto quasistatico						
#	t_{fq} [s]	$\theta(t_f)$ [rad]	$\dot{\theta}(t_f)$ [rad/s]	x_{eq} [m]	z_{eq} [m]	θ_{eq} [rad]
A	25.00	0.0000	0.0000	0.5000	0.5000	0.0000
B	15.00	0.0000	0.0000	0.5000	0.5000	0.0000
C	18.00	0.0924	0.0000	0.5000	0.5000	0.0924
Tensioni ammissibili						
#	t_{fa} [s]	$\theta(t_f)$ [rad]	$\dot{\theta}(t_f)$ [rad/s]	x_{eq} [m]	z_{eq} [m]	θ_{eq} [rad]
A	4.85	-0.0662	-1.9874	0.4972	0.5003	-0.0037
B	2.40	0.0146	7.3900	0.5006	0.5000	0.0008
C	2.40	0.4053	0.6697	0.5126	0.5051	0.1170
Oscillazioni limitate						
#	t_{fs} [s]	$\theta(t_f)$ [rad]	$\dot{\theta}(t_f)$ [rad/s]	x_{eq} [m]	z_{eq} [m]	θ_{eq} [rad]
A	5.70	-0.0005	0.1681	0.5000	0.5000	0.0000
B	3.65	-0.0003	0.1939	0.5000	0.5000	0.0000
C	3.85	0.0915	-0.0739	0.5000	0.5000	0.0918

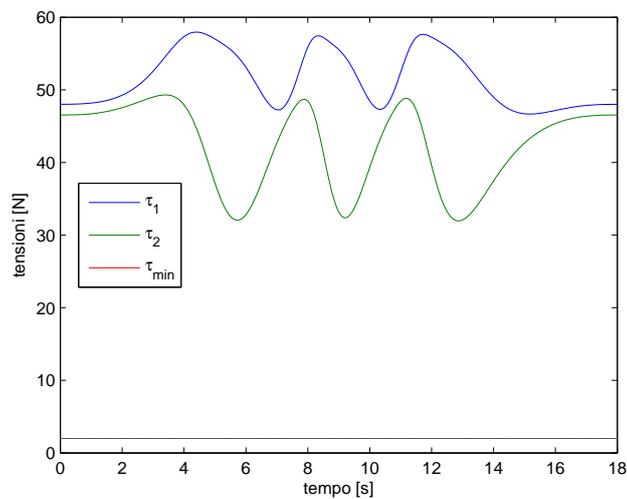
Tabella 6.5: Riepilogo dei valori t_f di percorrenza della traiettoria ad arco di cerchio e dei corrispondenti punti di equilibrio all'arresto



(a) Caso A

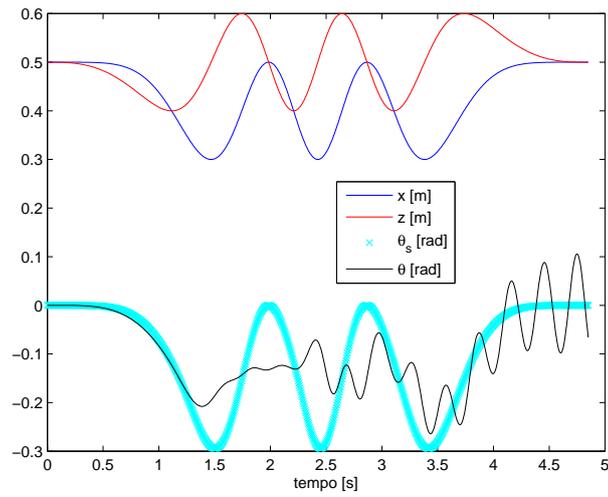


(b) Caso B

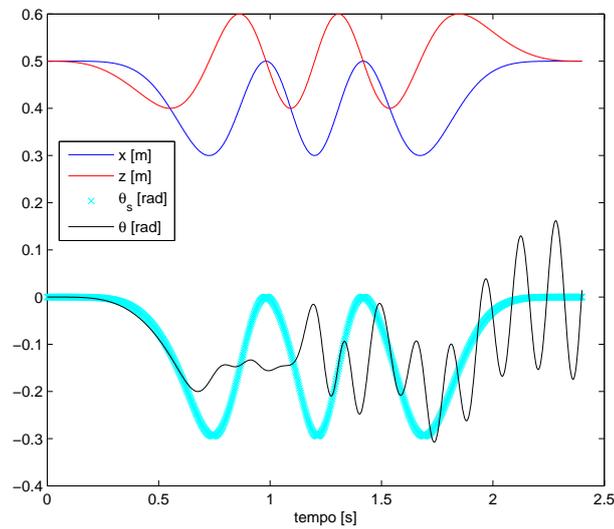


(c) Caso C

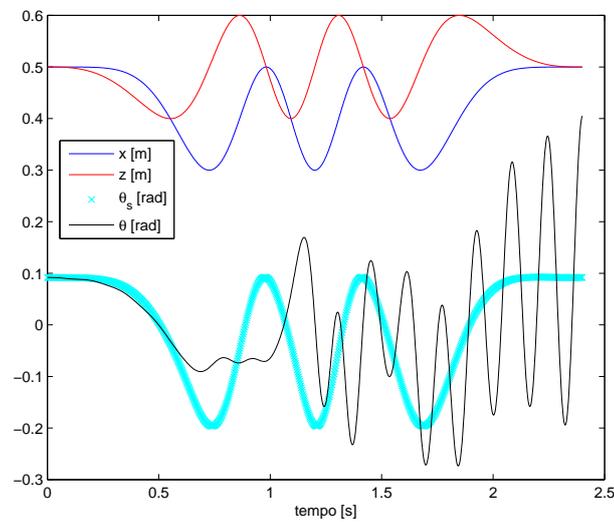
Figura 6.17: Andamento delle tensioni nel caso quasistatico. Traiettoria circolare: tre giri completi



(a) Caso A

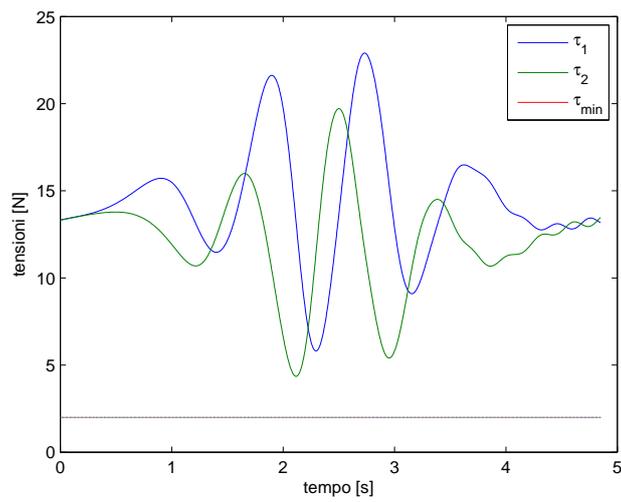


(b) Caso B

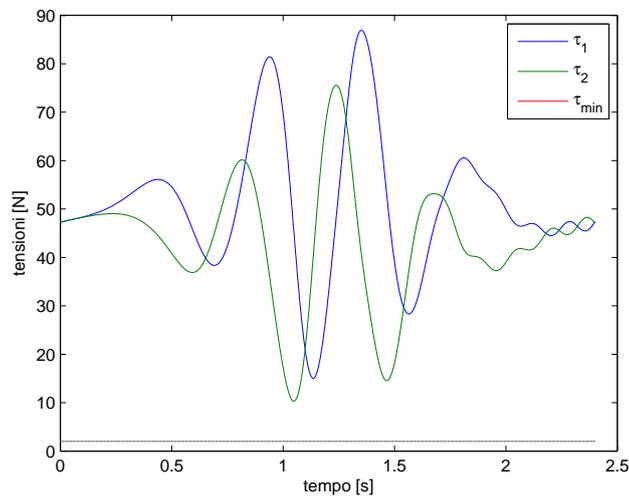


(c) Caso C

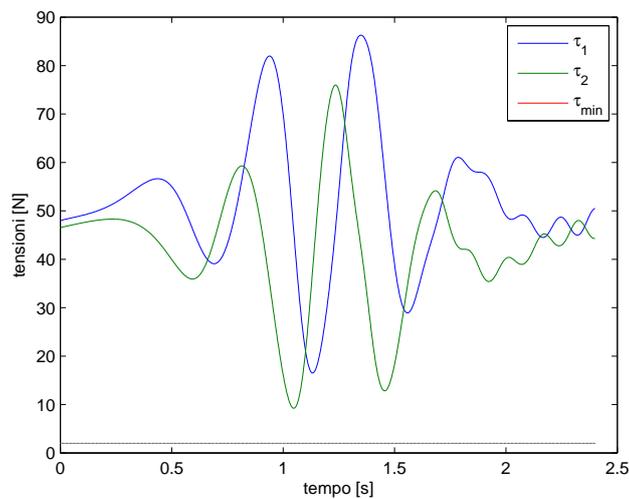
Figura 6.18: Andamento delle coordinate x , y e θ per il tempo di percorrenza t_{fa} . Traiettoria circolare: tre giri completi



(a) Caso A

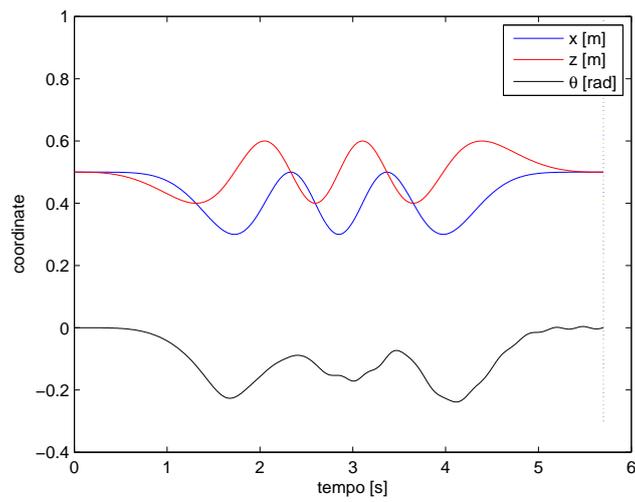


(b) Caso B

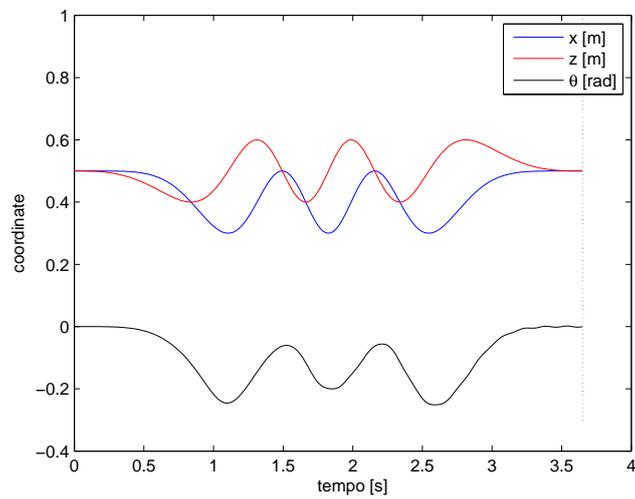


(c) Caso C

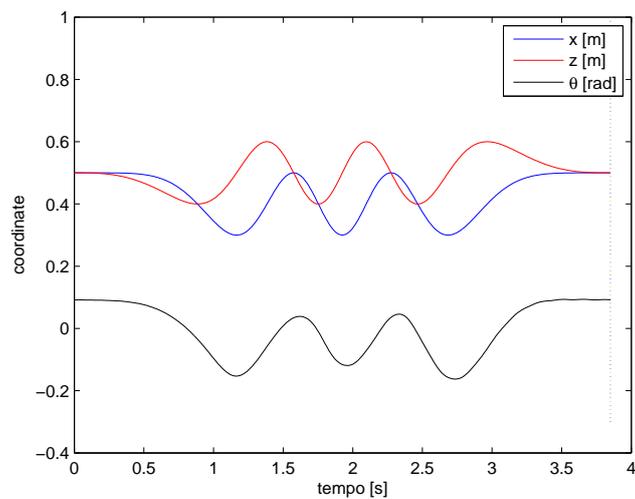
Figura 6.19: Andamento delle tensioni per il tempo di percorrenza t_{fa} . Traiettoria circolare: tre giri completi



(a) Caso A



(b) Caso B



(c) Caso C

Figura 6.20: Andamento delle coordinate x , z e θ per moto pianificato con tempo di percorrenza t_{fs} . Traiettoria circolare: tre giri completi

6.3 Conclusioni

Sono state condotte delle simulazioni del modello dinamico presentato nei capitoli precedenti per studiarne il comportamento lungo diverse traiettorie e la risposta a carichi diversi.

Si è prima verificato, pianificando dei movimenti quasistatici, che le traiettorie fossero realizzabili staticamente, cioè che in ogni punto percorso il robot fosse in grado di mantenere una posizione di equilibrio per un tempo indefinito.

Si è poi cercato il minor tempo di percorrenza di ciascuna traiettoria affinché le tensioni dei cavi rimanessero positive e limitate, mostrando gli effetti che si ottengono variando il carico applicato.

In generale la pianificazione con il solo vincolo sulle tensioni produce una evoluzione della coordinata non controllata che mal si adatta all'arresto completo del robot. Si è quindi analizzata la risposta del sistema aumentando il tempo di percorrenza, per ottenere nel punto finale della traiettoria delle condizioni quanto più prossime all'equilibrio geometrico-statico.

In generale si è evidenziato l'effetto stabilizzante di un carico esterno applicato, in quanto permette di aumentare le tensioni nei cavi e di conseguenza permette movimenti più rapidi senza scendere sotto il limite di tensione minimo.

Capitolo 7

Considerazioni finali

7.1 Conclusioni

E' stato analizzato un modello di robot a cavi verticale, dotato di 3 gradi di libertà ma attuato da soli due cavi. Si è visto come è possibile studiarne la cinematica e l'importanza di conoscere le configurazioni geometrico-statiche di equilibrio ai fini della pianificazione del moto. Per lo studio della dinamica si è seguito un approccio newtoniano, come comune in letteratura, evidenziando degli aspetti peculiari dei robot sottoattuati; ad esempio è stato evidenziato come in generale non esista una soluzione esatta del problema dinamico inverso.

Il problema del controllo è stato affrontato mettendo in luce le difficoltà di intervenire sul moto delle 3 coordinate libere agendo sulle tensioni e le lunghezze dei cavi. In particolare si è discusso di come sia possibile calcolare la posizione effettiva del robot integrando i dati provenienti dagli encoder con la lettura dell'inclinazione di un cavo, o con un feedback proveniente da un simulatore dinamico.

E' stata oggetto di studio anche la pianificazione del moto, possibile solo per due gradi di libertà, che deve assicurare che i cavi mantengano sempre tensioni positive e limitate; sono state analizzate le condizioni per permettere un arresto del movimento del robot attorno ad un punto di equilibrio desiderato.

Infine sono state presentate delle simulazioni del sistema lungo traiettorie rettilinee e circolari, applicando gli algoritmi di pianificazione del moto per diversi tipi di carico applicati; i risultati vengono letti da un simulatore dinamico.

7.2 Sviluppi futuri

Lo studio sui robot sottoattuati presenta numerosi percorsi di sviluppo futuri.

L'analisi cinematica e dinamica di un robot verticale studiata in questo lavoro può essere estesa al caso di robot sottoattuati che si muovono nello spazio. In particolare è interessante approfondire lo studio dell'equilibrio geometrico-statico di un robot sottoposto a un wrench esterno anche nel caso spaziale; questo permetterebbe di definire se un generico percorso è staticamente realizzabile, cioè se in ogni punto di passaggio il robot sarebbe in grado di mantenere la posizione indefinitamente. La definizione di un percorso staticamente realizzabile permetterebbe quindi l'estensione dell'algoritmo di pianificazione.

Un altro campo di studio riguarda la sicurezza dei robot a cavi. Potrebbero essere studiati i vantaggi o gli svantaggi dell'impiego di un robot sottoattuato in termini di affidabilità e possibilità di danni accidentali a cose o persone. Può essere studiato anche il caso in cui la rottura accidentale di uno o più cavi di un robot completamente attuato possa portare a una configurazione sottoattuata, e come sia possibile, sfruttando lo studio qui condotto, prevedere una traiettoria di arresto in sicurezza o permettere un utilizzo seppur limitato del robot.

Può essere studiato inoltre come sia possibile sfruttare la natura sottoattuata del robot studiato, e di conseguenza il minor numero di cavi richiesto, per applicazioni in cui sono fondamentali la trasportabilità e la facilità di installazione, come nelle operazioni di ricerca e soccorso.

Bibliografia

- [1] P. Bosscher, A.T. Riechel, and I. Ebert-Uphoff. Wrench-feasible workspace generation for cable-driven robots. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(5):890–902, 2006.
- [2] T. Higuchi, A. Ming, and J. Jiang-yu. Application of multi-dimensional wire cranes in construction. In *Proceedings of the 5th International Symposium on Robotics in Construction (ISRC'88)*, 1988.
- [3] J-P. Merlet. Analysis of the influence of wires interference on the workspace of wire robots. In J. Lenarčič and C. Galletti, editors, *On Advances in Robot Kinematics*, pages 211–218. Springer Netherlands, 2004.
- [4] C. Gosselin and M. Grenier. On the determination of the force distribution in overconstrained cable-driven parallel mechanisms. *Meccanica*, 46(1):3–15, 2011.
- [5] V.-D. Nguyen. Constructing force-closure grasps in 3d. In *Robotics and Automation. Proceedings. 1987 IEEE International Conference on*, volume 4, pages 240–245, 1987.
- [6] Y. Shen, H. Osumi, and T. Arai. Manipulability measures for multi-wire driven parallel mechanisms. In *Industrial Technology, 1994., Proceedings of the IEEE International Conference on*, pages 550–554, 1994.
- [7] Q. Jiang and V. Kumar. The direct kinematics of objects suspended from cables. In *Proceedings of the ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2010.

- [8] M. Carricato and J.P. Merlet. Stability analysis of underconstrained cable-driven parallel robots. *IEEE Transactions on Robotics*, 29(1):288–296, 2013.
- [9] Alessandro Berti, Jean-Pierre Merlet, and Marco Carricato. Solving the direct geometrico-static problem of 3-3 cable-driven parallel robots by interval analysis: Preliminary results. In Tobias Bruckmann and Andreas Pott, editors, *Cable-Driven Parallel Robots*, volume 12 of *Mechanisms and Machine Science*, pages 251–268. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [10] R. Kelly, V.S. Davila, V. Santibáñez, and A. Loria. *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer, 2006.
- [11] Jean-François Collard and Philippe Cardou. Computing the lowest equilibrium pose of a cable-suspended rigid body. *Optimization and Engineering*, 14(3):457–476, 2013.
- [12] Y. Nakamura. *Advanced robotics: redundancy and optimization*. Addison-Wesley series in electrical and computer engineering: Control engineering. Addison-Wesley Longman, Incorporated, 1991.
- [13] P. Gallina, A. Rossi, and R.L. Williams II. Planar cable-direct-driven robots, part ii: Dynamics and control. In *ASME. DECT2001 ASME Design Engineering Technical Conference*. Pittsburgh: ASME Publisher, volume 2, pages 1241–1247, 2001.
- [14] Alberto Trevisani, Paolo Gallina, and II Williams, RobertL. Cable-direct-driven robot (cddr) with passive scara support: Theory and simulation. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 46(1):73–94, 2006.
- [15] Rodney G. Roberts, Todd Graham, and Thomas Lippitt. On the inverse kinematics, statics, and fault tolerance of cable-suspended robots. *Journal of Robotic Systems*, 15(10):581–597, 1998.
- [16] A.T. Riechel and I. Ebert-Uphoff. Force-feasible workspace analysis for underconstrained, point-mass cable robots. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 5, pages 4956–4962, 2004.

- [17] A. Trevisani. Planning of dynamically feasible trajectories for translational, planar, and underconstrained cable-driven robots. *Journal of Systems Science and Complexity*, 26:695–717, 2013.
- [18] G. Barrette and C. Gosselin. Determination of the dynamic workspace of cable-driven planar parallel mechanisms. *Journal of Mechanical Design*, 2(127):242–248, 2005.
- [19] Clément Gosselin. Global planning of dynamically feasible trajectories for three-dof spatial cable-suspended parallel robots. In Tobias Bruckmann and Andreas Pott, editors, *Cable-Driven Parallel Robots*, volume 12 of *Mechanisms and Machine Science*, pages 3–22. Springer Berlin Heidelberg.
- [20] S. Behzadipour and A. Khajepour. Time-optimal trajectory planning in cable-based manipulators. *Robotics, IEEE Transactions on*, 22(3):559–563, 2006.
- [21] Mahdi Bamdad. Time-energy optimal trajectory planning of cable-suspended manipulators. In Tobias Bruckmann and Andreas Pott, editors, *Cable-Driven Parallel Robots*, volume 12 of *Mechanisms and Machine Science*, pages 41–51. Springer Berlin Heidelberg.
- [22] A. Trevisani. Underconstrained planar cable-direct-driven robots: A trajectory planning method ensuring positive and bounded cable tensions. *Mechatronics*, 20(1):113–127, 2010.
- [23] R. L. Williams II and P. Gallina. Planar cable-direct-driven robots, part i: Kinematics and statics. In *2001 ASME Design Technical Conference*, 2001.
- [24] Wei-Jung Shiang, D. Cannon, and J. Gorman. Optimal force distribution applied to a robotic crane with flexible cables. In *Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA '00. IEEE International Conference on*, volume 2, pages 1948–1954, 2000.
- [25] So-Ryeok Oh and S.K. Agrawal. Cable suspended planar robots with redundant cables: controllers with positive tensions. *Robotics, IEEE Transactions on*, 21(3):457–465, 2005.
- [26] Mohammad A. Khosravi and Hamid D. Taghirad. Experimental performance of robust pid controller on a planar cable robot. In Tobias

- Bruckmann and Andreas Pott, editors, *Cable-Driven Parallel Robots*, volume 12 of *Mechanisms and Machine Science*, pages 337–352. Springer Berlin Heidelberg.
- [27] Wojciech Blajer and Krzysztof Kołodziejczyk. Control of underactuated mechanical systems with servo-constraints. *Nonlinear Dynamics*, 50(4):781–791, 2007.
- [28] Christoph Woernle. Trajectory tracking for a three-cable suspension manipulator by nonlinear feedforward and linear feedback control. In Tobias Bruckmann and Andreas Pott, editors, *Cable-Driven Parallel Robots*, volume 12 of *Mechanisms and Machine Science*, pages 371–386. Springer Berlin Heidelberg.
- [29] C. Gosselin, S. Lefrançois, and N. Zoso. Underactuated cable-driven robots: Machine, control and suspended bodies. In J.J. Clark J. Kövecses J. Angeles, B. Boulet and K. Siddiqi, editors, *Brain, Body and Machine*, volume 83 of *Advances in Intelligent and Soft Computing*, pages 311–323. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [30] L. L. Cone. Skycam: An aerial robotic camera system. *Byte*, 10(10):122–132, 1985.
- [31] J.S. Albus, R. Bostelman, and N.G. Dagalakis. The nist robocrane. *J. Field Robotics*, 10(5):709–724, 1993.
- [32] G. Rosati, P. Gallina, and S. Masiero. Design, implementation and clinical tests of a wire-based robot for neurorehabilitation. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 15(4):560–569, 2007.
- [33] D. Surdilovic, Jinyu Zhang, and R. Bernhardt. String-man: Wire-robot technology for safe, flexible and human-friendly gait rehabilitation. In *Rehabilitation Robotics, 2007. ICORR 2007. IEEE 10th International Conference on*, pages 446–453, 2007.
- [34] S. Tadokor, R. Verhoeven, M. Hiller, and T. Takamori. A portable parallel manipulator for search and rescue at large-scale urban earthquakes and an identification algorithm for the installation in unstructured environments. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, volume 2, pages 1222–1227, 1999.

- [35] P. Bosscher, R.L. Williams, and Melissa Tummino. A concept for rapidly deployable cable robot search and rescue systems. In *Proceedings of ASME IDETC/CIE*, 2005.
- [36] J-P Merlet and D. Daney. A portable, modular parallel wire crane for rescue operations. In *Robotics and Automation (ICRA), 2010 IEEE International Conference on*, pages 2834–2839, 2010.
- [37] B. Peng, R. Nan, Y. Su, Y. Qiu, L. Zhu, and W. Zhu. Five-hundred-meter aperture spherical telescope project. *Astrophysics and Space Science*, 278(1-2):219–224, 2001.
- [38] Y.X. Su, B.Y. Duan, R.D. Nan, and B. Peng. Development of a large parallel-cable manipulator for the feed-supporting system of a next-generation large radio telescope. *Journal of Robotic Systems*, 18(11):633–643, 2001.
- [39] Stan Birchfield. An introduction to projective geometry (for computer vision). *Unpublished note, Stanford university*, 1998.
- [40] A. Trevisani. Experimental validation of a trajectory planning approach avoiding cable slackness and excessive tension in underconstrained translational planar cable-driven robots. In T. Bruckmann and A. Pott, editors, *Cable-Driven Parallel Robots*, volume 12 of *Mechanisms and Machine Science*, pages 23–39. Springer Berlin Heidelberg, 2013.