UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Il ruolo del teorema di Kochen-Specker nelle formulazioni con variabili nascoste della meccanica quantistica

Relatore	Laureando
Prof. Marco Matone	Elia de Sabbata

Anno Accademico 2017/2018

Indice

Introduzione e cenni storici

L'interpretazione ortodossa della meccanica quantistica, anche detta interpretazione di Copenaghen (in seguito ai lavori svolti in questa città da Niels Bohr e da Werner Heisenberg), è stata la prima in ordine cronologico ed è ancora oggi la più condivisa dai fisici. Questa interpretazione sostiene che, in generale, una misurazione di un'osservabile in un determinato stato di un sistema fisico non riveli un valore o una proprietà preesistente in quest'ultimo, ma che il risultato della misurazione sia una manifestazione congiunta dello stato del sistema indagato e dello strumento utilizzato. Il processo attraverso cui il risultato si rivela nella sua univocità, chiamato da Heisenberg *"transizione dal potenziale all'attuale"*, non è conoscibile, ma solo la distribuzione statistica di molte di queste interazioni può essere materia appropriata di indagine scientifica. Secondo tale visione, le affermazioni probabilistiche della meccanica quantistica sono dunque irriducibili ed intrinseche, e non dovute ad un'ignoranza di carattere epistemico dello stato del sistema.
Sebbene tale interpretazione sia perfettamente consistente, non si può escludere a priori che sia possibile costruire una descrizione dei fenomeni fisici pià ampia, nella quale ogni stato individuale abbia dei valori ben definiti (e dunque oggettivi) per ogni grandezza fisica osservabile.
Una tale descrizione prende il nome di *teoria a variabili nascoste*. La meccanica quantistica potrebbe assumere un ruolo analogo a quello della meccanica statistica per la meccanica Newtoniana: ad ogni suo stato corrisponde un *ensemble* di stati nascosti, mentre l'impossibilità di costruire fisicamente stati che abbiano valori definiti per ogni grandezza verrebbe spiegata tramite il fatto che operativamente non sia possibile preparare determinati ensemble (non necessariamente intrinseca, ma anche legata all'ignoranza di come effettuare misurazioni di certe "osservabili nascoste").
Sono stati compiuti notevoli sforzi per dimostrare che, sotto certe assunzioni, non possano esistere teorie a variabili nascoste; tali risultati vengono generalmente chiamati *no-go theorems*.
Un primo no-go theorem fu formulato da John von Neumann nel 1932 nel suo famoso trattato sui fondamenti matematici della meccanica quantistica [12], tuttavia, come notarono prima Grete Hermann nel 1935 [6] e successivamente John Bell nel 1966 [2], le assunzioni di questo teorema sono troppo forti: in particolare si richiede che i valori definiti in ogni stato nascosto delle osservabili rappresentate dalla somma di due qualsiasi operatori hermitiani (anche non commutanti) siano uguali alla somma dei valori assegnati alle osservabili associate ai singoli operatori; mentre questa condizione è sufficiente a spiegare la linearità dei valori attesi negli stati quantistici, non è necessaria, dunque non c'è motivo di richiedere che valga per ogni singolo elemento dell'ensemble.

Nel 1952 David Bohm fornì un esempio costruttivo di una teoria deterministica (per certi versi abbastanza strana, infatti è contestuale e non locale) in grado di riprodurre correttamente i valori attesi della meccanica quantistica.
Un altro importante risultato è costituito da un teorema di Gleason [3] formulato nel 1957, il quale afferma che ogni distribuzione di probabilità definita sui vettori di uno spazio di Hilbert di dimensione maggiore di 2, che sia normalizzata per ogni base ortonormale, è rappresentata da una matrice densità. Dal momento che una teoria a variabili nascoste deve assegnare ad ogni proiettore i valori 0 e 1 consistentemente con la condizione di normalizzazione, essa fornisce una misura di probabilità che rispetta le assunzioni del teorema; d'altra parte è facile mostrare che una tale distribuzione non può essere descritta da una matrice densità.
Un problema di questo approccio è che si assume che la distribuzione di probabilità sia definita su ogni proiettore dello spazio di Hilbert, dunque, affinché il teorema valga, la teoria a variabili nascoste dovrebbe assegnare un valore 0 o 1 per ogni proiettore, o equivalentemente, ad ogni proiettore dovrebbe corrispondere un'osservabile.
Questa assunzione tuttavia è troppo forte, infatti nel 1952 Wick, Wightman e Wigner avevano già pubblicato un articolo [18] nel quale viene dimostrato tramite le regole di superselezione che esistono operatori autoaggiunti e limitati che non corrispondono a nessuna osservabile.
Nel 1964 John Bell pubblicò il famoso articolo dove, tramite delle disuguaglianze che vengono violate dalla meccanica quantistica, dimostrò l'impossibilità di realizzare una teoria a variabili nascoste che soddisfacesse il principio di località. Nel 1969 Caluser, Horne, Shimony e Holt generalizzarono il risultato di Bell trovando la disuguaglianza CHSH, che deve essere anch'essa violata dalla meccanica quantistica. La violazione di tale disuguaglianza fu sperimentalmente verificata tramite un esperimento compiuto da Alain Aspect nel 1981.
Nel 1966 Bell, basandosi sul teorema di Gleason, pubblicò un articolo [2] nel quale compaiono un no-go theorem per sistemi rappresentati da spazi di Hilbert con dimensione maggiore di 2 ed un esempio costruttivo di una teoria a variabili nascoste per il caso bidimensionale.
Nel 1967, ed indipendentemente da Bell, Simon Kochen ed Ernst Specker [8] dimostrarono un no-go theorem (sempre valido in dimensione maggiore di 2) sotto la ragionevole assunzione di una certa relazione funzionale che dovrebbero rispettare i valori assegnati, detta ipotesi di *non contestualità* (che viene assunta anche nel secondo teorema di Bell).
Nel loro articolo il problema viene ridotto ad un problema di colorazione della sfera bidimensionale, e viene proposto un insieme finito di vettori (117) incolorabili secondo la regola assegnata. In seguito l'insieme dei vettori tridimensionali incolorabili è stato notevolmente ridotto, ad esempio nel 1991 Asher Peres [13] costruì un insieme di 33 vettori tridimensionali incolorabili ad elevata simmetria, semplificando notevolmente la dimostrazione; successivamente sono stati proposti anche insiemi più semplici in dimensionalità maggiore.
Nel 1993 David Mermin [10] ha trovato un modo di utilizzare gli argomenti di Kochen e Specker per dimostrare, senza l'ausilio di disuguaglianze, il teorema sulla località di Bell.
Ci sono poi stati altri sviluppi recenti: un esempio sono le obiezioni presentate da David Meyer [11] e da Adrian Kent [7] che si basano sulla finitezza della precisione che deve necessariamente avere una misurazione fisica e che sembrano riaprire le porte a certi tipi di teorie a variabili nascoste non contestuali. Tali obiezioni sono state successivamente rimesse in discussione, ad esempio nell'articolo di D. M. Appleby del 2005 [1], e sono ancora oggi oggetto di numerosi dubbi.

Le discussioni sull'esistenza di varie tipologie di teorie a variabili nascoste costituiscono una parte integrante dei fondamenti della meccanica quantistica, inoltre trovano applicazione in molte altre branche che coinvolgono la meccanica quantistica, ad esempio la logica quantistica e la teoria dell'informazione quantistica.

Nel **capitolo 1** del presente lavoro viene compiuta un'analisi critica del concetto di *osservabile* in una generica teoria fisica e, utilizzando il formalismo delle C^*-algebre, viene derivata la natura operatoriale delle osservabili tramite il teorema di Gelfand-Naimark del 1943. Vengono poi discusse le principali differenze tra l'algebra delle osservabili quantistiche e l'algebra delle osservabili classiche, in particolar modo la non commutatività della prima. Si introducono le cariche di superselezione, tramite le quali si deduce che esistono operatori autoaggiunti limitati che non corrispondono a nessuna osservabile fisica. Successivamente vengono presentati alcuni risultati matematici sulle osservabili quantistiche che tornano utili nei capitoli seguenti; in particolar modo viene dimostrato il teorema di Von Neumann sull'equivalenza tra *commutatività* e *commisurabilità* delle osservabili. I risultati di questo capitolo si basano principalmente sui lavori di Strocchi [16], [17] e sul lavoro originale di Von Neumann [12].

Nel **capitolo 2** viene formulato matematicamente il problema dell'esistenza di una teoria a variabili nascoste e viene in particolar modo discusso il concetto di *non contestualità*. Vengono poi introdotte le *algebre parziali* ed una serie di risultati matematici volti a trovare una caratterizzazione algebrica del problema. I risultati di questo capitolo si basano quasi interamente sul lavoro originale di Kochen e Specker [8]. Una novità rispetto alle discussioni note in letteratura è che si permette alle funzioni di predizione delle teorie a variabili nascoste di assumere valori al di fuori dello spettro dell'osservabile ad esse associate; tramite il **lemma 2.1** viene dimostrato che, affinché le distribuzioni probabilistiche della meccanica quantistica vengano riprodotte, ciò può avvenire solo con probabilità nulla, e il resto delle dimostrazioni rimane quasi invariato a questa modifica.

Nel **capitolo 3** viene dimostrato il teorema di Kochen-Specker per spazi di Hilbert di dimensione maggiore o uguale a 3. Viene poi dimostrato che non può esistere una teoria a variabili nascoste che assegni ad ogni osservabile quantistica più di una funzione di predizione anziché una sola, purché tali funzioni rispettino l'ipotesi di non contestualità. Infine viene fornito un esempio costruttivo di teoria a variabili nascoste per spazi di Hilbert di dimensione 2. I risultati di questo capitolo si basano sul lavoro originale di Kochen e Specker [8], eccezion fatta per l'insieme di vettori incolorabili, che è dovuto a Peres [13].

Nel **capitolo 4** vengono discusse le obiezioni di Meyer e di Kent basate sulla finitezza della precisione di una misurazione fisica. Viene considerato il sottoinsieme $\mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3$ denso in $\mathbb{S}^2$ e viene dimostrato che è colorabile secondo le regole di Kochen-Specker. Successivamente viene presentata la costruzione di Kent, tramite la quale viene colorato un sottoinsieme denso delle decomposizioni proiettive dell'identità per $\mathscr{H} \cong \mathbb{C}^n$. Tale risultato viene poi generalizzato in dimensione infinita, ossia per $\mathscr{H} \cong \ell^2(\mathbb{C})$, senza dover stravolgere la dimostrazione. Infine vengono accennate le critiche mosse da Appleby a queste costruzioni. I risultati di questo capitolo di basano sui lavori di Meyer [11], Godsil e Zaks [4] e Kent [7], fatta eccezione per la generalizzazione del risultato di Kent (**teorema 4.4**) che è una novità.

Capitolo 1

C*-algebre e osservabili in meccanica quantistica

Da un punto di vista operativo, un generico sistema fisico è caratterizzato dall'insieme $\mathcal{S}$ degli *stati* in cui esso può trovarsi in seguito a differenti procedure di preparazione ed è definito dall'insieme $\mathcal{O}$ delle sue *osservabili* (ovvero delle quantità fisiche misurabili), che possono essere misurate sugli stati; ogni osservabile è dunque associata ad uno specifico strumento di misura.
La discussione seguente è basata sulle analisi che si trovano in [9], [16] e [17].
Per ogni osservabile $\mathcal{A} \in \mathcal{O}$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ è possibile definire $\lambda\mathcal{A}$ come l'osservabile i cui risultati sono gli stessi di $\mathcal{A}$ moltiplicati per λ (lo strumento associato a tale osservabile è lo stesso associato ad $\mathcal{A}$, ma con la scala riscalata di λ). Analogamente è possibile definire le potenze intere di $\mathcal{A}$ e le loro somme, per cui, per ogni polinomio $\mathcal{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ è ancora un'osservabile del sistema (in particolare dalla definizione segue che $\mathcal{A}^0$ è quell'osservabile il cui strumento associato restituisce sempre il risultato 1).
Il valore atteso di un'osservabile $\mathcal{A}$ in uno stato ω, denotato con $\langle \mathcal{A} \rangle_\omega$, è definito tramite

$$\langle \mathcal{A} \rangle_\omega := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} m_i^\omega(A),$$

dove gli $m_i^\omega(\mathcal{A})$ sono i risultati di diverse misurazioni dell'osservabile $\mathcal{A}$ in stati identicamente preparati ω; l'esistenza del limite viene assunta come base della fisica sperimentale.
Il fatto che l'unico modo operativo di caratterizzare un particolare stato avvenga tramite i valori attesi delle osservabili implica che le osservabili separano gli stati, ossia

$$\langle \mathcal{A} \rangle_{\omega_1} = \langle \mathcal{A} \rangle_{\omega_2} \ \forall \mathcal{A} \in \mathcal{O}, \ \Rightarrow \ \omega_1 = \omega_2.$$

Un'osservabile $\mathcal{A}$ è detta positiva se tutti i risultati delle sue misurazioni $m_i^\omega(\mathcal{A})$ sono positivi per ogni stato ω; in tal caso il valore atteso di $\mathcal{A}$ è un funzionale positivo sull'insieme delle osservabili, infatti vale $\langle \mathcal{A} \rangle_\omega \geq 0 \ \forall \omega \in \mathcal{S}$.

Lemma 1.1. *Ogni osservabile* $\mathcal{A} \in \mathcal{O}$ *definisce un'algebra commutativa polinomiale* $\mathscr{A}_{\mathcal{A}}$ *sul campo* $\mathbb{R}$, $\mathscr{A}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{O}$, *con identità* $\mathbb{I} := \mathcal{A}^0$, *equipaggiata con una norma* $||\cdot||$, *per la quale,* $\forall\ \mathcal{B},\mathcal{C} \in \mathscr{A}_{\mathcal{A}}$ *e* $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, *vale*

$$\text{(i)}\ \ ||\mathcal{B}+\mathcal{C}|| \leq ||\mathcal{B}|| + ||\mathcal{C}||\,, \qquad \text{(ii)}\ \ ||\lambda\mathcal{B}|| = |\lambda|\cdot||\mathcal{B}||\,,$$
$$\text{(iii)}\ \ ||\mathcal{B}^2|| \leq ||\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2||\,, \qquad \text{(iv)}\ \ ||\mathcal{B}\mathcal{C}|| \leq ||\mathcal{B}^2||^{\frac{1}{2}}||\mathcal{C}^2||^{\frac{1}{2}}\,.$$

Inoltre gli stati definiscono dei funzionali lineari positivi $\omega(\mathcal{A})$ *su* $\mathscr{A}_{\mathcal{A}}$ *e tali che* $|\omega(\mathcal{A})| \leq ||\mathcal{A}||$ *(dunque continui rispetto alla norma).*

Dimostrazione. Gli elementi di $\mathscr{A}_{\mathcal{A}}$ sono polinomi di $\mathcal{A}$, quindi, per quanto osservato all'inizio, $\forall\ \mathcal{B},\mathcal{C} \in \mathscr{A}_{\mathcal{A}}$ e $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$m_i^\omega(\lambda\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \lambda m_i^\omega(\mathcal{B}) + m_i^\omega(\mathcal{C}), \qquad m_i^\omega(\mathcal{B}\mathcal{C}) = m_i^\omega(\mathcal{B})m_i^\omega(\mathcal{C}), \qquad m_i^\omega(\mathcal{B}^2) \geq 0.$$

Dalla definizione di valore atteso segue dunque: $\langle\lambda\mathcal{B}+\mathcal{C}\rangle_\omega = \lambda\langle\mathcal{B}\rangle_\omega + \langle\mathcal{C}\rangle_\omega$ e $\langle\mathcal{B}^2\rangle_\omega \geq 0$, cioè $\omega(\mathcal{A}) := \langle\mathcal{A}\rangle_\omega$ è un funzionale lineare positivo[1] su $\mathscr{A}_{\mathcal{A}}$. Dal momento che ad ogni osservabile è associato uno strumento fisico, la cui scala è necessariamente limitata indipendentemente dallo stato in cui la misurazione viene effettuata, si ha $\sup_\omega |m_i^\omega(\mathcal{A})| =: m(\mathcal{A}) < +\infty$. Dunque si può definire

$$||\mathcal{A}|| := \sup_\omega\ |\omega(\mathcal{A})|,$$

da cui segue banalmente $\omega(\mathcal{A}) \leq ||\mathcal{A}||$; si ha inoltre

$$||\mathcal{B}+\mathcal{C}|| = \sup_\omega|\omega(\mathcal{B}+\mathcal{C})| = \sup_\omega|\omega(\mathcal{B})+\omega(\mathcal{C})| \leq \sup_\omega|\omega(\mathcal{B})| + \sup_\omega|\omega(\mathcal{C})| = ||\mathcal{B}|| + ||\mathcal{C}||\,,$$
$$||\lambda\mathcal{B}|| = \sup_\omega|\omega(\lambda\mathcal{B})| = \sup_\omega|\lambda\omega(\mathcal{B})| = |\lambda|\sup_\omega|\omega(\mathcal{B})| = |\lambda|\,||\mathcal{B}||\,,$$
$$||\mathcal{B}^2|| = \sup_\omega|\omega(\mathcal{B}^2)| \leq \sup_\omega|\omega(\mathcal{B}^2)+\omega(\mathcal{C}^2)| = \sup_\omega|\omega(\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2)| = ||\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2||\,,$$

vale inoltre $0 \leq \omega((\mathcal{B}+\lambda\mathcal{C})^2)\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$; per cui

$$\omega(\mathcal{B}^2) + \lambda^2\omega(\mathcal{C}^2) + 2\lambda\omega(\mathcal{B}\mathcal{C}) \geq 0,$$

ponendo $\lambda = -\frac{\omega(\mathcal{B}\mathcal{C})}{\omega(\mathcal{C}^2)}$ si ottiene

$$|\omega(\mathcal{B}\mathcal{C})| \leq \omega(\mathcal{B}^2)^{\frac{1}{2}}\ \omega(\mathcal{C}^2)^{\frac{1}{2}} \leq ||\mathcal{B}^2||^{\frac{1}{2}}||\mathcal{C}^2||^{\frac{1}{2}},$$

passando al *sup* su ω si ottiene $||\mathcal{B}\mathcal{C}|| \leq ||\mathcal{B}^2||^{\frac{1}{2}}||\mathcal{C}^2||^{\frac{1}{2}}$. □

Sull'insieme $\mathcal{O}$ si consideri la seguente relazione di equivalenza

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}\ \Leftrightarrow\ \omega(\mathcal{A}) = \omega(\mathcal{B})\ \ \forall\omega\ \in \mathcal{S},$$

visto che la fisica non distingue osservabili equivalenti, è possibile considerare l'insieme quoziente $\mathcal{O}/\sim$ (che per non appesantire la notazione verrà denotato ancora con $\mathcal{O}$), a

[1] Un funzionale lineare f su uno spazio vettoriale ordinato V è detto positivo se $f(v) \geq 0$ per ogni v positivo.

questo punto anche l'insieme delle osservabili (a meno di equivalenza) separa gli stati.
Se si assume che gli stati caratterizzino la positività delle osservabili, in altre parole che

$$\langle \mathcal{A} \rangle_\omega \geq 0 \ \forall \omega \ \Rightarrow \ m_i^\omega(\mathcal{A}) \geq 0 \ \forall \omega,$$

è possibile introdurre un'ulteriore struttura matematica (tale assunzione è giustificata dal fatto che, siccome gli stati identificano completamente le osservabili, è plausibile che si possano preparare abbastanza stati in modo che, se qualche risultato della misurazione di $\mathcal{A}$ non è positivo, allora è possibile trovare uno stato ω per il quale $\langle \mathcal{A} \rangle_\omega$ non è positivo).

Definizione 1.1. *Una *-algebra è un'algebra $\mathscr{A}$ sul campo $\mathbb{C}$ sulla quale sia definita un'operazione di involuzione $^* : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ tale che*

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*, \qquad (\mathcal{A}+\mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*, \qquad (\lambda\mathcal{A})^* = \overline{\lambda}\mathcal{A}^*, \qquad (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A},$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e per ogni $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathscr{A}$.

Definizione 1.2. *Una C^*-algebra è una *-algebra di Banach*[2] *per cui vale*

$$||\mathcal{A}^*\mathcal{A}|| = ||\mathcal{A}||^2.$$

Lemma 1.2. *Se si assume che gli stati caratterizzino la positività delle osservabili, ogni osservabile $\mathcal{A}$ genera una C^*-algebra commutativa $\mathscr{A}_\mathcal{A}^C$ con identità attraverso i polinomi complessi di $\mathcal{A}$, e l'unione insiemistica di tali algebre $\mathcal{O}^C$ costituisce un'estensione di $\mathcal{O}$; gli stati vengono naturalmente estesi a funzionali lineari positivi su ogni $\mathscr{A}_\mathcal{A}^C$.*

Dimostrazione. Iniziamo mostrando che $||\mathcal{B}^2|| = ||\mathcal{B}||^2 \quad \forall \mathcal{B} \in \mathscr{A}_\mathcal{A}$. dalla proprietà (iv) del lemma precedente, ponendo $\mathcal{C} = \mathbb{I}$, si trova $||\mathcal{B}^2|| \geq ||\mathcal{B}||^2$. Si ha poi $\omega(||\mathcal{B}||\mathbb{I} \pm \mathcal{B}) \geq 0 \ \forall \omega$, per cui, grazie all'assunzione sulla caratterizzazione della positività delle osservabili, $||\mathcal{B}||\mathbb{I} \pm \mathcal{B}$ sono osservabili positive di $\mathscr{A}_\mathcal{A}$; inoltre vale

$$m_i^\omega(||\mathcal{B}||^2\mathbb{I} - \mathcal{B}^2) = m_i^\omega(||\mathcal{B}||\mathbb{I} + \mathcal{B}) m_i^\omega(||\mathcal{B}||\mathbb{I} - \mathcal{B}) \geq 0,$$

dunque $\omega(||\mathcal{B}||^2\mathbb{I} - \mathcal{B}^2) \geq 0$, che implica $||\mathcal{B}||^2 \geq ||\mathcal{B}^2||$.
A questo punto se nella proprietà (iv) si sfrutta il fatto che $||\mathcal{B}^2|| = ||\mathcal{B}||^2$, si trova

$$||\mathcal{B}\mathcal{C}|| \leq ||\mathcal{B}|| \, ||\mathcal{C}||.$$

Per ogni coppia di osservabili $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathscr{A}_\mathcal{A}$ è possibile introdurre l'osservabile complessa $\mathcal{B} + i\mathcal{C}$, definita operativamente prendendo la combinazione complessa dei risultati delle misurazioni di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$; in questo modo si ottiene un'estensione complessa $\mathscr{A}_\mathcal{A}^C$ di $\mathscr{A}_\mathcal{A}$, stabile sotto l'involuzione * definita da: $(\mathcal{B} + i\mathcal{C})^* := \mathcal{B} - i\mathcal{C} \quad \forall \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathscr{A}_\mathcal{A}$. Le proprietà

$$m_i^\omega(\lambda\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \lambda m_i^\omega(\mathcal{B}) + m_i^\omega(\mathcal{C}), \qquad m_i^\omega(\mathcal{B}\mathcal{C}) = m_i^\omega(\mathcal{B}) m_i^\omega(\mathcal{C}),$$

trovate in precedenza continuano a valere per gli elementi di $\mathscr{A}_\mathcal{A}^C$, inoltre si ha anche

$$m_i^\omega(\mathcal{B}^*) = \overline{m_i^\omega(\mathcal{B})}, \qquad m_i^\omega(\mathcal{B}^*\mathcal{B}) \geq 0.$$

[2] Un'algebra di Banach è un'algebra dotata di una norma, che sia uno spazio di Banach rispetto ad essa e tale che per ogni coppia di elementi dell'algebra a e b valga $||ab|| \leq ||a|| \, ||b||$.

L'estensione della norma da $\mathscr{A}_{\mathcal{A}}$ a $\mathscr{A}_{\mathcal{A}}^C$ è definita in modo da soddisfare la condizione di C^*-algebra

$$||\mathcal{B}|| := ||\mathcal{B}^*\mathcal{B}||^{\frac{1}{2}}.$$

Per ogni $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathscr{A}_{\mathcal{A}}^C$ (grazie alla commutatività dell'algebra) si ha

$$||\mathcal{B}\mathcal{C}||^2 = ||\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*\mathcal{B}\mathcal{C}|| = ||\mathcal{C}^*\mathcal{C}\mathcal{B}^*\mathcal{B}|| \leq ||\mathcal{B}^*\mathcal{B}||\,||\mathcal{C}^*\mathcal{C}|| = ||\mathcal{B}||^2||\mathcal{C}||^2.$$

Posti $\mathcal{G} = \mathcal{B} + i\mathcal{C}$ e $\mathcal{H} = \mathcal{D} + i\mathcal{E}$, $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E} \in \mathscr{A}_{\mathcal{A}}$ si ha

$$\frac{1}{2}||\mathcal{G}^*\mathcal{H} + \mathcal{H}^*\mathcal{G}||^2 = ||\mathcal{B}\mathcal{D} + \mathcal{C}\mathcal{E}||^2 = ||(\mathcal{B}\mathcal{D} + \mathcal{C}\mathcal{E})^2|| \leq ||(\mathcal{B}\mathcal{D} + \mathcal{C}\mathcal{E})^2 + (\mathcal{B}\mathcal{E} - \mathcal{C}\mathcal{D})^2|| =$$
$$= ||(\mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2)(\mathcal{D}^2 + \mathcal{E}^2)|| \leq ||\mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2||\,||\mathcal{D}^2 + \mathcal{E}^2|| = ||\mathcal{G}||^2||\mathcal{H}||^2,$$

da cui segue che

$$||\mathcal{G} + \mathcal{H}||^2 = ||(\mathcal{G} + \mathcal{H})^*(\mathcal{G} + \mathcal{H})|| = ||\mathcal{G}^*\mathcal{G} + \mathcal{G} * \mathcal{H} + \mathcal{H}^*\mathcal{G} + \mathcal{H}^*\mathcal{H}|| \leq$$
$$\leq ||\mathcal{G} * \mathcal{G}|| + ||\mathcal{G}^*\mathcal{H} + \mathcal{H}^*\mathcal{G}|| + ||\mathcal{H}^*\mathcal{H}|| \leq ||\mathcal{G}||^2 + ||\mathcal{G}||\,||\mathcal{H}|| + ||\mathcal{H}||^2 =$$
$$= (||\mathcal{G}|| + ||\mathcal{H}||)^2.$$

Abbiamo mostrato che $\mathscr{A}_{\mathcal{A}}^C$ è una C^*-algebra; può essere conveniente considerare il suo completamento rispetto alla norma, che è ancora una C^*-algebra e, per non appesantire la notazione, continueremo a denotarlo con $\mathscr{A}_{\mathcal{A}}^C$. Gli stati ω intesi come funzionali lineari positivi ammettono un unica estensione per continuità a tale completamento. Infine, sempre per alleggerire la notazione, denoteremo $\mathcal{O}^C$ semplicemente con $\mathcal{O}$. $\square$

In generale potrebbero esistere delle coppie di osservabili $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{O}$, non necessariamente funzioni di una stessa osservabile (ad esempio in meccanica quantistica energia cinetica ed energia potenziale), tali che esiste un'osservabile $\mathcal{C} \in \mathcal{O}$ per cui valga

$$\omega(\mathcal{C}) = \omega(\mathcal{A}) + \omega(\mathcal{B}),$$

grazie al fatto che le osservabili separano gli stati e grazie alla commutatività dei valori attesi è possibile definire un'addizione commutativa in $\mathcal{O}$ definendo $\mathcal{A} + \mathcal{B} := \mathcal{C}$.
È possibile, almeno in linea di principio, definire la somma commutativa di due qualsiasi osservabili $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ utilizzando l'equazione precedente (e creando dunque una nuova estensione di $\mathcal{O}$), ma non è detto che l'osservabile $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ così definita condivida le proprietà delle osservabili definite operativamente: ad esempio potrebbe non esistere alcuno strumento fisico in grado di effettuare una misurazione di $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, e non si potrebbero dunque definire operativamente le potenze $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^n$. Sembra comunque naturale assumere che l'insieme $\mathcal{O}$ possa essere immerso in un insieme più grande, nel quale le somme di due osservabili abbiano ancora le proprietà di un'osservabile. Questa assunzione, che non può in alcun modo essere dedotta a priori, può essere presa come assioma per una generica teoria fisica (una giustificazione empirica di questo assioma è che sia la meccanica classica che la meccanica quantistica lo verificano).

Assioma. ***(Algebra delle osservabili)*** *Le osservabili generano una C^*-algebra completa*[3] *$\mathscr{A}$ con identità chiamata algebra delle osservabili; gli stati, che definiscono funzionali lineari positivi tramite il valore atteso (introdotto a inizio capitolo) sulle sottoalgebre $\mathscr{A}_{\mathcal{A}}$, separano le osservabili e si estendono a funzionali lineari positivi su $\mathscr{A}$.*

[3] Si può assumere che l'algebra sia completa rispetto alla norma infatti, se non lo fosse, sarebbe sempre possibile definire operativamente un'osservabile tramite una procedura di limite e completare l'algebra.

Partendo da questo assioma è possibile dimostrare che gli stati e le osservabili definite operativamente ammettono una descrizione in uno spazio di Hilbert.

Teorema 1.1. *(Gelfand, Naimark, Segal) Data una C^*-algebra $\mathscr{A}$ con identità ed uno stato ω (inteso come funzionale lineare positivo), esiste uno spazio di Hilbert $\mathscr{H}_\omega$ ed una rappresentazione $\pi_\omega : \mathscr{A} \to B(\mathscr{H}_\omega)$ nello spazio degli operatori limitati di $\mathscr{H}_\omega$ tale che:*

(i) *$\mathscr{H}_\omega$ contiene un vettore ψ_ω ciclico*[4] *per la rappresentazione π_ω;*

(ii) $\omega(\mathcal{A}) = (\psi_\omega, \pi_\omega(\mathcal{A})\psi_\omega)$;

(iii) *ogni altra rappresentazione π di $\mathscr{A}$ in uno spazio di Hilbert $\mathscr{H}$ con un vettore ciclico ψ tale che valga $\omega(\mathcal{A}) = (\psi, \pi(\mathcal{A})\psi)$ è unitariamente equivalente a π_ω, ossia esiste un'isometria $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}_\omega$ tale che $U\pi(\mathcal{A})U^{-1} = \pi_\omega(\mathcal{A})$.*

Dimostrazione. Siccome ω è un funzionale lineare positivo, questo definisce un prodotto scalare semidefinito su $\mathscr{A}$

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \omega(\mathcal{A}^*\mathcal{B}).$$

L'insieme $\mathcal{J} := \{\mathcal{A} \in \mathscr{A} \,|\, \omega(\mathcal{B}^*\mathcal{A}) = 0 \ \forall \mathcal{B} \in \mathscr{A}\}$ è un ideale sinistro di $\mathscr{A}$. Possiamo dunque considerare lo spazio quoziente $\mathscr{A}/\mathcal{J}$ ottenuto identificando elementi che differiscono additivamente per un elemento di $\mathcal{J}$. Ponendo

$$([\mathcal{A}], [\mathcal{B}]) := \omega(\mathcal{A}^*\mathcal{B})$$

si ottiene un prodotto scalare ben definito e strettamente positivo su $\mathscr{A}/\mathcal{J}$, infatti se $\mathcal{A}' = \mathcal{A} + a$ e $\mathcal{B}' = \mathcal{B} + b$ con $a, b \in \mathcal{J}$ allora

$$\omega(\mathcal{A}'^*\,\mathcal{B}') = \omega(\mathcal{A}^*\mathcal{B}) + \overline{\omega(\mathcal{B}^*a)} + \omega(\mathcal{A}^*b) + \omega(ab) = \omega(\mathcal{A}^*\mathcal{B}),$$

inoltre se $\mathcal{A} \in \mathcal{J}$ segue che $\omega(\mathcal{A}^*\mathcal{A}) = 0$, mentre se $\omega(\mathcal{A}^*\mathcal{A}) = 0$ si ha

$$|\omega(\mathcal{B}^*\mathcal{A})| \leq (\omega(\mathcal{A}^*\mathcal{A}))^{\frac{1}{2}}(\omega(\mathcal{B}^*\mathcal{B}))^{\frac{1}{2}} = 0 \quad \forall \mathcal{B} \in \mathscr{A},$$

per cui $\mathcal{A} \in \mathcal{J}$, cioè $([\mathcal{A}], [\mathcal{A}]) = 0$ se e solo se $[\mathcal{A}] = [0]$.
Il completamento di $\mathscr{A}/\mathcal{J}$ rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare è uno spazio di Hilbert $\mathscr{H}_\omega$. Per ogni $\mathcal{A} \in \mathscr{A}$ associamo ad $\mathcal{A}$ l'operatore definito da

$$\pi_\omega(\mathcal{A})[\mathcal{B}] = [\mathcal{A}\mathcal{B}],$$

l'applicazione è ben definita infatti se $\mathcal{B}' = \mathcal{B} + b$ con $b \in \mathcal{J}$ allora $AB' = AB + Ab$ con $Ab \in \mathcal{J}$. π_ω si estende per continuità su tutto $\mathscr{H}_\omega$, infatti

$$||\pi_\omega(\mathcal{A})[\mathcal{B}]||^2 = (\pi_\omega(\mathcal{A})[\mathcal{B}], \pi_\omega(\mathcal{A})[\mathcal{B}]) = ([\mathcal{A}\mathcal{B}], [\mathcal{A}\mathcal{B}]) = \omega(B^*A^*AB),$$

inoltre il funzionale positivo definito da

$$\omega_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) := \omega(\mathcal{B}^*\mathcal{A}\mathcal{B})$$

[4] Un vettore $\psi_\omega \in \mathscr{H}_\omega$ si dice ciclico per la rappresentazione π_ω se $\pi_\omega(\mathscr{A})\psi_\omega$ è un sottospazio denso di $\mathscr{H}_\omega$.

è tale che $\omega_{\mathcal{B}}(\mathbb{I}) = ||\mathcal{B}||^2$, poi dalla positività dell'osservabile $||\mathcal{A}||\mathbb{I} - \mathcal{A}$ segue anche che $\omega_{\mathcal{B}}(||\mathcal{A}||\mathbb{I} - \mathcal{A}) \geq 0$ ovvero $\omega_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \leq ||\mathcal{A}||\,\omega_{\mathcal{B}}(\mathbb{I})$; ponendo $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ si trova $\omega_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}^*\mathcal{A}) \leq ||\mathcal{A}||^2\,\omega_{\mathcal{B}}(\mathbb{I})$, per cui

$$||\pi_\omega(\mathcal{A})[\mathcal{B}]||^2 = \omega_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}^*\mathcal{A}) \leq ||\mathcal{A}||^2\,\omega_{\mathcal{B}}(\mathbb{I}) = ||\mathcal{A}||^2||\mathcal{B}||^2,$$

dunque $||\pi_\omega(\mathcal{A})|| \leq ||\mathcal{A}||$, ossia l'operatore è limitato, dunque continuo[5].
π_ω è uno *-omomorfismo, infatti

$$\begin{aligned}
&\pi_\omega(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2)[\mathcal{B}] = [\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}] = \pi_\omega(\mathcal{A}_1)[\mathcal{A}_2\mathcal{B}] = \pi_\omega(\mathcal{A}_1)\pi_\omega(\mathcal{A}_2)[\mathcal{B}],\\
&\pi_\omega(\mathcal{A}_1 + \lambda\mathcal{A}_2)[\mathcal{B}] = [\mathcal{A}_1\mathcal{B}] + \lambda[\mathcal{A}_2\mathcal{B}] = \pi_\omega(\mathcal{A}_1)[\mathcal{B}] + \lambda\pi_\omega(\mathcal{A}_2)[\mathcal{B}],\\
&\pi_\omega(\mathbb{I})[\mathcal{B}] = [\mathcal{B}] \;\Rightarrow\; \pi_\omega(\mathbb{I}) = \mathbb{I},\\
&([\mathcal{B}_1], \pi_\omega(\mathcal{A})[\mathcal{B}_2]) = ([\mathcal{B}_1], [\mathcal{A}\mathcal{B}_2]) = \omega(\mathcal{B}_1^*\mathcal{A}\mathcal{B}_2) = \omega((\mathcal{A}^*\mathcal{B}_1)^*\mathcal{B}_2) =\\
&\qquad\qquad = ([\mathcal{A}^*\mathcal{B}_1], [\mathcal{B}_2]) = (\pi_\omega(\mathcal{A}^*)[\mathcal{B}_1], [\mathcal{B}_2]).
\end{aligned}$$

Posto $\psi_\omega := [\mathbb{I}]$ l'insieme $\pi_\omega(\mathscr{A})\psi_\omega = [\mathscr{A}]$ è chiaramente denso in $\mathscr{H}_\omega$, dunque ψ_ω è ciclico per π_ω, si ha poi

$$(\psi_\omega, \pi_\omega(\mathcal{A})\psi_\omega) = ([\mathbb{I}], [\mathcal{A}\mathbb{I}]) = \omega(\mathcal{A}).$$

L'isometria U^{-1} è infine definita sul sottoinsieme denso di $\mathscr{H}_\omega$ generato dal vettore ciclico da

$$U^{-1}\pi_\omega(\mathcal{A})\psi_\omega := \pi(\mathcal{A})\psi,$$

U è un'isometria, infatti

$$\begin{aligned}
&(U^{-1}\pi_\omega(\mathcal{A})\psi_\omega, U^{-1}\pi_\omega(\mathcal{A})\psi_\omega) = (\pi(\mathcal{A})\psi, \pi(\mathcal{A})\psi) = (\psi, \pi(\mathcal{A}^*\mathcal{A})\psi) = \omega(\mathcal{A}^*\mathcal{A}),\\
&(\pi_\omega(\mathcal{A})\psi_\omega, \pi_\omega(\mathcal{A})\psi_\omega) = (\psi_\omega, \pi_\omega(\mathcal{A}^*\mathcal{A})\psi_\omega) = \omega(\mathcal{A}^*\mathcal{A}).
\end{aligned}$$

inoltre vale

$$U\pi(\mathcal{A})U^{-1}\pi_\omega(\mathcal{B})\psi_\omega = U\pi(\mathcal{A}\mathcal{B})\psi = \pi_\omega(\mathcal{A}\mathcal{B})\psi_\omega = \pi_\omega(\mathcal{A})\pi_\omega(\mathcal{B})\psi_\omega,$$

la tesi segue estendendo U su tutto $\mathscr{H}$. □

Teorema 1.2. *(Gelfand, Naimark) La C^*-algebra delle osservabili $\mathscr{A}$ è isomorfa ad una C^*-algebra degli operatori limitati di uno spazio di Hilbert $\mathscr{H}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di stati sulla C^*-algebra $\mathscr{A}$ che separano le osservabili (una tale famiglia esiste poiché l'insieme di tutti gli stati $\mathcal{S}$ separa le osservabili). Poniamo

$$\mathscr{H} := \bigoplus_{\omega\in\mathcal{F}} \mathscr{H}_\omega,$$
$$\pi := \bigoplus_{\omega\in\mathcal{F}} \pi_\omega,$$

dove $\mathscr{H}_\omega$ e π_ω sono definiti come nel teorema precedente. Poiché $\forall\omega \in \mathcal{F}$ si ha $||\pi_\omega(\mathcal{A})|| \leq ||\mathcal{A}||$, ed ogni $\psi \in \mathscr{H}$ può essere pensato come vettore di componenti $\psi^{(\omega)} \in \mathscr{H}_\omega$ con $\omega \in \mathcal{F}$, quindi si ha

$$||\pi(\mathcal{A})\psi||^2 = \sum_{\omega\in\mathcal{F}} ||\pi_\omega(\mathcal{A})\psi^{(\omega)}||^2 \leq ||\mathcal{A}||^2 \sum_{\omega\in\mathcal{F}} ||\psi^{(\omega)}||^2 = ||\mathcal{A}||^2||\psi||^2,$$

[5]Un operatore lineare su uno spazio di Hilbert è limitato se e solo se è continuo.

per cui $||\pi(\mathcal{A})|| \leq ||\mathcal{A}||$, dunque $\pi(\mathcal{A}) \in B(\mathscr{H})$. Infine, siccome se $\mathcal{A} \neq 0$ esiste uno stato $\omega \in \mathfrak{F}$ tale che $\pi_\omega(\mathcal{A}) \neq 0$, si ha $\pi(\mathcal{A}) \neq 0$, ossia $\ker \pi = \{0\}$, cioè la rappresentazione π è fedele. π è dunque uno *-isomorfismo di $\mathscr{A}$ su una sottoalgebra di $B(\mathscr{H})$. □

Potrebbe sembrare strano che, partendo dal solo assioma precedente (che è soddisfatto anche dalla meccanica classica), si sia derivata la natura operatoriale delle osservabili. In realtà si può dimostrare che gli effetti quantistici dovuti alla sovrapposizione degli stati compaiono solo se l'algebra $\mathscr{A}$ è non commutativa, mentre il tratto distintivo della meccanica classica è proprio (e solo) la commutatività dell'algebra delle osservabili.

Definizione 1.3. *Uno stato ω (inteso come funzionale lineare positivo) si dice puro se non esistono altri due stati ω_1 e ω_2 ed un numero $0 < \lambda < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\omega \equiv \lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2.$$

Lemma 1.3. *Se ω è uno stato puro allora la rappresentazione π_ω è irriducibile.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la rappresentazione π_ω sia riducibile, dunque esiste una proiezione $P \neq \mathbb{I}$ su un sottospazio invariante tale che $[P, \pi_\omega(\mathcal{A})] = [\pi_\omega(\mathcal{A}), P] = 0 \ \forall \mathcal{A} \in \mathscr{A}$. Siccome ψ_ω è un vettore ciclico allora $P\psi_\omega \neq 0$ e $(\mathbb{I} - P)\psi_\omega \neq 0$; inoltre $P\pi_\omega(\mathcal{A})(\mathbb{I} - P) = (\mathbb{I} - P)\pi_\omega(\mathcal{A})P = 0 \ \forall \mathcal{A} \in \mathscr{A}$. Segue dunque

$$\begin{aligned} \omega(\mathcal{A}) = (\psi_\omega, \pi_\omega(\mathcal{A})\psi_\omega) &= \\ &= (P\psi_\omega, \pi_\omega(\mathcal{A})P\psi_\omega) + ((\mathbb{I} - P)\psi_\omega, \pi_\omega(\mathcal{A})(\mathbb{I} - P)\psi_\omega) = \\ &= \lambda\omega_1(\mathcal{A}) + (1-\lambda)\omega_2(\mathcal{A}) \quad \forall \mathcal{A} \in \mathscr{A}, \\ \text{con} \quad 0 < \lambda = ||P\psi_\omega||^2 = (\psi_\omega, P\psi_\omega) < 1. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3. *La fase relativa della sovrapposizione di due stati (appartenenti a raggi vettori corrispondenti a stati puri diversi) dello spazio di Hilbert $\mathscr{H}$ di Gelfand-Naimark è osservabile se e solo se l'algebra $\mathscr{A}$ è non commutativa.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo un'implicazione, ossia che se l'algebra $\mathscr{A}$ è commutativa la fase relativa alla sovrapposizione di due stati non è osservabile. Ogni rappresentazione π_ω irriducibile della C^*-algebra commutativa $\mathscr{A}$ è necessariamente monodimensionale, infatti l'irriducibilità di π_ω è equivalente ad affermare che ogni operatore che commuta con tutti gli elementi di $\pi_\omega(\mathscr{A})$ è multiplo dell'identità, dunque in generale $\pi_\omega(\mathcal{A}) = \lambda_\omega(\mathcal{A})\mathbb{I}$ con $\lambda_\omega(\mathcal{A}) \in \mathbb{C}$. La rappresentazione $\pi(\mathscr{A})$ può quindi essere decomposta come somma diretta di rappresentazioni irriducibili su spazi monodimensionali invarianti sotto l'azione di $\mathscr{A}$. Segue dunque che, dati due vettori ψ e ϕ che rappresentano stati puri differenti, essi necessariamente appartengono a spazi invarianti $\mathscr{H}_\psi$ e $\mathscr{H}_\phi$ differenti (e ortogonali), dunque $(\psi, \pi(\mathcal{A})\phi) = 0 \ \forall \mathcal{A} \in \mathscr{A}$ poiché grazie all'invarianza si ha $\pi(\mathcal{A})\phi \in \mathscr{H}_\phi$. Da quanto appena detto segue che $(\psi + e^{i\theta}\phi, \pi(\mathcal{A})(\psi + e^{i\theta}\phi)) = (\psi + \phi, \pi(\mathcal{A})(\psi + \phi)) \ \forall \theta \in [0, 2\pi], \ \forall \mathcal{A} \in \mathscr{A}$, ossia che la fase relativa non è osservabile. □

Abbiamo dimostrato che l'algebra delle osservabili, fatte le dovute assunzioni, è isomorfa ad una sottoalgebra di $B(\mathscr{H})$. Tale sottoalgebra è propria, ossia non coincide con tutto $B(\mathscr{H})$, infatti esistono degli operatori, detti *cariche di superselezione*, che commutano con

tutte le osservabili pur non essendo multipli dell'identità (ad esempio la carica elettrica totale Q di un sistema). Ragionando come nella dimostrazione precedente è possibile decomporre $\mathscr{H}$ negli autospazi comuni di tali operatori, detti *settori di superselezione*, che diventano sede di diverse rappresentazioni irriducibili di $\mathscr{A}$; dunque non a tutti gli operatori limitati corrispondono delle osservabili (ad esempio agli operatori che "collegano" diversi settori di superselezione). Inoltre, sempre sulla falsa riga del teorema precedente, la fase relativa di due vettori appartenenti a diversi settori di superselezione non è osservabile, dunque non si possono osservare effetti di interferenza tra stati con diversa carica di superselezione; questo fatto viene generalmente chiamato *regola di superselezione*.
L'insieme delle osservabili reali (ossia che restituiscono valori reali quando vengono misurate) può quindi essere corrisposto all'insieme degli operatori autoaggiunti (o equivalentemente hermitiani, poiché essendo limitati il loro dominio coincide con $\mathscr{H}$) della sottoalgebra di $B(\mathscr{H})$ isomorfa ad $\mathscr{A}$.

I postulati della meccanica quantistica (che sono stati parzialmente giustificati dalle considerazioni precedenti) affermano che gli stati puri di tale teoria possono essere identificati con i vettori della sfera unitaria di uno spazio di Hilbert (solitamente assunto separabile) a campo complesso $\mathbb{S}_{\mathscr{H}}$, mentre le osservabili possono essere identificate con degli operatori autoaggiunti e limitati[6] di tale spazio, che generano una sottoalgebra propria di $B(\mathscr{H})$ completa rispetto alla norma

$$\psi \longleftrightarrow |\psi\rangle \in \mathbb{S}_{\mathscr{H}} \qquad\qquad \mathcal{A} \longleftrightarrow A, \quad \textit{con } A = A^{\dagger},\ A \in B(\mathscr{H}).$$

Per il teorema spettrale, se A è autoaggiunto e limitato[7], esiste un'unica misura spettrale $E_A(\cdot)$ tale che valga la seguente

$$\langle\, \psi \,|\, A \,|\, \phi \,\rangle = \int_{\sigma(A)} \lambda \; d \,\langle\, \psi \,|\, E_A(\lambda) \,|\, \phi \,\rangle\,, \qquad \forall\, \langle\psi| \in \mathbb{S}_{\mathscr{H}^*}\ , \forall\, |\phi\rangle \in \mathbb{S}_{\mathscr{H}},$$

dove $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda\mathbb{I} - A \textit{ non è invertibile}\}$ è lo spettro di A (che è compatto poiché A è limitato).
Formalmente si può dunque scrivere (si verifica facilmente che tutte le usuali proprietà di integrazione vengono rispettate)

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda \; dE_A(\lambda).$$

Se per ogni stato puro ψ e per ogni osservabile $\mathcal{A}$ si definisce una misura di probabilità $\mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi}(\cdot\,)$ su $\mathscr{B}$, la σ-algebra dei boreliani di $\mathbb{R}$, tramite la misura spettrale di A nel modo seguente

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi}(U) := \langle\, \psi \,|\, E_A(U) \,|\, \psi \,\rangle\,, \quad U \in \mathscr{B},$$

[6]Questa assunzione è necessaria per mantenere la struttura algebrica dell'insieme, infatti in generale la somma di due operatori autoaggiunti illimitati non definisce un operatore autoaggiunto, inoltre trova una giustificazione fisica nel fatto che ogni strumento abbia necessariamente una scala limitata. Questa restrizione non costituisce un grave problema, infatti ad esempio in un sistema di una particella libera ogni funzione limitata degli operatori P e Q può essere pensata come funzione di $e^{i\alpha P}$ e $e^{i\beta Q}$, i generatori dell'algebra di Weyl.

[7]Il teorema è valido anche per operatori illimitati con l'unica differenza che si perde la compattezza di $\sigma(A)$.

allora il valore atteso dell'osservabile $\mathcal{A}$ nello stato ψ può essere espresso nel modo seguente

$$\langle \mathcal{A} \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi}(\lambda).$$

In seguito vengono dimostrati alcuni risultati riguardanti le osservabili quantistiche che torneranno utili successivamente.

Lemma 1.4. *Per ogni osservabile quantistica $\mathcal{A}$ e per ogni funzione misurabile e limitata $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esiste un'unica osservabile $g(\mathcal{A})$ per cui valga la seguente condizione*

$$\mathcal{P}_{g(\mathcal{A})\psi}(U) = \mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi}(g^{-1}(U)), \qquad \forall U \in \mathscr{B}.$$

Dimostrazione. Sia A l'operatore autoaggiunto e limitato che rappresenta l'osservabile $\mathcal{A}$. Iniziamo con l'unicità: all'operatore autoaggiunto e limitato $g(A)$ che rappresenta l'osservabile $g(\mathcal{A})$ corrisponde un'unica misura spettrale $E_{g(A)}(\cdot)$; per ogni $U \in \mathscr{B}$, $|\psi\rangle \in \mathbb{S}_{\mathscr{H}}$ deve valere

$$\left\langle \psi \left| E_{g(A)}(U) \right| \psi \right\rangle = \mathcal{P}_{g(\mathcal{A})\psi}(U) = \mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi}(g^{-1}(U)) = \left\langle \psi \left| E_A(g^{-1}(U)) \right| \psi \right\rangle,$$

estendendo linearmente questa equazione per tutti i $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$ e sfruttando il fatto che, grazie all'identità della polarizzazione, date le norme allora sono univocamente determinati anche i prodotti scalari, si ha

$$\left\langle \psi \left| E_{g(A)}(U) \right| \phi \right\rangle = \left\langle \psi \left| E_A(g^{-1}(U)) \right| \phi \right\rangle, \qquad \forall \, |\psi\rangle \, , |\phi\rangle \in \mathscr{H},$$

pertanto l'operatore $E_{g(A)}(U)$ risulta univocamente determinato per ogni U, di conseguenza lo è anche $g(A)$. Per l'esistenza: per ogni $U \in \mathscr{B}$ sia $b_U(\psi, \phi)$ la forma bilineare e limitata definita da

$$b_U(\psi, \phi) := \left\langle \psi \left| E_A(g^{-1}(U)) \right| \phi \right\rangle,$$

per il lemma di Riesz esiste allora un unico operatore $E_{g(A)}(U)$ per il quale si abbia: $\left\langle \psi \left| E_{g(A)}(U) \right| \phi \right\rangle = b_U(\psi, \phi)$. Si ha dunque

$$\left\langle \psi \left| E_{g(A)}(U) \right| \phi \right\rangle = \left\langle \psi \left| E_A(g^{-1}(U)) \right| \phi \right\rangle.$$

Dalla formula precedente si deduce subito che $E_{g(A)}(U)$ è un proiettore poiché lo è anche $E_A(g^{-1}(U))$, inoltre dal fatto che $g^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, che $g^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e che $g^{-1}(\bigcup U_i) = \bigcup g^{-1}(U_i)$ si deduce anche che $E_{g(A)}(\cdot)$ è effettivamente una misura spettrale. Ponendo $\phi = \psi$ si ottiene un'uguaglianza equivalente a quella richiesta. $g(A)$ è costruita a partire dalla misura spettrale appena ottenuta e la sua limitatezza segue dalla quella di g. L'esistenza di $g(\mathcal{A})$ segue infine dalla completezza dell'algebra delle osservabili e dal fatto che in un insieme compatto le funzioni misurabili siano approssimabili da polinomi. □

In una teoria fisica delle osservabili $\mathcal{A}_i$, con $i \in \mathcal{I}$, sono dette *commisurabili* se esiste un'osservabile $\mathcal{B}$ e delle funzioni misurabili $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che si abbia $\mathcal{A}_i = f_i(\mathcal{B})$ $\forall i \in \mathcal{I}$ (in questo caso, infatti, per misurare le osservabili è sufficiente misurare l'osservabile $\mathcal{B}$ e applicare al risultato ottenuto le funzioni f_i). Invece in MQ un insieme di osservabili $\{\mathcal{A}_i | i \in \mathcal{I}\}$ è detto *compatibile* se gli operatori che rappresentano le osservabili commutano a due a due, ossia se vale $[E_{A_i}(U), E_{A_j}(V)] = 0$ $U, V \in \mathscr{B}$, $\forall i, j \in \mathcal{I}$ (per operatori limitati questa condizione è equivalente a $[A_i, A_j] = 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{I}$). In MQ queste due condizioni risultano essere equivalenti, come si vedrà nel prossimo teorema (la cui dimostrazione si basa principalmente su [12]).

Teorema 1.4. *(Von Neumann) In MQ le osservabili $\mathcal{A}_i$, con $i \in \mathcal{I}$ finito, rappresentate da operatori autoaggiunti e limitati a spettro discreto*[8]*, sono commisurabili se e solo se l'insieme $\{\mathcal{A}_i | i \in \mathcal{I}\}$ è compatibile.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, ...$, osservabili commisurabili e sia $\mathcal{B}$ un'osservabile tale che si abbia $\mathcal{A}_i = f_i(\mathcal{B})$. Sia poi $E_B(\cdot)$ la misura spettrale dell'operatore B che corrisponde all'osservabile $\mathcal{B}$. Per definizione di funzione di un operatore, ed utilizzando un cambio di variabili, gli operatori A_i possono essere riscritti nel modo seguente

$$A_i = f_i(B) = \int_{\sigma(B)} f_i(\lambda)\, dE_B(\lambda) = \int_{f_i(\sigma(B))} \omega\, dE_B(f_i^{-1}(\omega)),$$

A questo punto basta notare che, $\forall i, j \in \mathcal{I}$ e $\forall U, V \in \mathscr{B}$ si ha

$$E_B(f_i^{-1}(U))E_B(f_j^{-1}(V)) = E_B(f_i^{-1}(U) \cap f_j^{-1}(V)) = E_B(f_j^{-1}(V))E_B(f_i^{-1}(U)).$$

Viceversa, siano $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, ...$, osservabili di un insieme compatibile, siano $E_{A_1}(\cdot)$,$E_{A_2}(\cdot)$, $E_{A_3}(\cdot)$,..., le relative misure spettrali e siano $\mathfrak{L}_1(\cdot)$, $\mathfrak{L}_2(\cdot)$, $\mathfrak{L}_3(\cdot)$,..., i sottospazi lineari ad esse associati. Per ipotesi le proiezioni $E_{A_i}(\lambda_i)$ e $E_{A_j}(\lambda_j)$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (si ricorda che gli spettri sono discreti) commutano $\forall i, j$. Il prodotto di due proiezioni che commutano è a sua volta una proiezione, infatti se $[B, C] = 0$ allora vale

$$(BC)^\dagger = (CB)^\dagger = B^\dagger C^\dagger = BC \qquad (BC)^2 = BCBC = BBCC = B^2C^2 = BC.$$

Utilizzando ripetutamente questo fatto si ottiene che $\prod_i E_{A_i}(\lambda_i)$ è ancora una proiezione; sia $\mathfrak{A}(\lambda_1, \lambda_2, ...)$ il sottospazio lineare associato. Chiaramente si ha $\mathfrak{A}(\lambda_1, \lambda_2, ...) = \bigcap_i \mathfrak{L}_i(\lambda_i)$. Se $\{\lambda_i\} \neq \{\widetilde{\lambda}_i\}$, allora $\mathfrak{A}(\lambda_1, \lambda_2, ...) \perp \mathfrak{A}(\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, ...)$, infatti esiste almeno un i per cui $\lambda_i \neq \widetilde{\lambda}_i$, e da $|\psi\rangle \in \mathfrak{L}_i(\lambda_i)$, $|\widetilde{\psi}\rangle \in \mathfrak{L}_i(\widetilde{\lambda}_i)$ si deduce $A_i|\psi\rangle = \lambda_i|\psi\rangle$ e $A_i|\widetilde{\psi}\rangle = \widetilde{\lambda}_i|\widetilde{\psi}\rangle$, da cui $\langle\widetilde{\psi}|A_i|\psi\rangle = \lambda_i\langle\widetilde{\psi}|\psi\rangle = \widetilde{\lambda}_i\langle\widetilde{\psi}|\psi\rangle$, dunque $\langle\widetilde{\psi}|\psi\rangle = 0$. Avendo A_i uno spettro discreto $\forall i$, si ha

$$\bigoplus_{\lambda_i \in \sigma(A_i)} \mathfrak{L}_i(\lambda_i) = \mathscr{H}, \qquad \forall i,$$

a questo punto dato $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$ esiste $\lambda_1 \in \sigma(A_1)$ tale che $|\psi\rangle$ non sia ortogonale a $\mathfrak{L}_1(\lambda_1)$, cioè tale che $E_{A_1}(\lambda_1)|\psi\rangle \neq 0$. Continuando per induzione si può trovare un λ_i tale che $\prod_{j<i} E_{A_j}(\lambda_j)|\psi\rangle$ non sia ortogonale a $\mathfrak{L}_i(\lambda_i)$, cioè tale che $\prod_{j<i+1} E_{A_j}(\lambda_j)|\psi\rangle \neq 0$. Si ottiene dunque che per ogni $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$ esistono $\lambda_1, \lambda_2, ...$, tali che $\prod_i E_{A_i}(\lambda_i)|\psi\rangle \neq 0$, ossia tali che $|\psi\rangle$ non sia ortogonale a $\mathfrak{A}(\lambda_1, \lambda_2, ...)$; in altre parole l'unico vettore che è ortogonale a tutti i sottospazi $\mathfrak{A}(\{\lambda_i\})$ $\forall\{\lambda_i\}$ è il vettore nullo. Dunque deve essere

$$\bigoplus_{\{\lambda_i\},\ \lambda_i \in \sigma(A_i)} \mathfrak{A}(\{\lambda_i\}) = \mathscr{H}.$$

[8] In realtà il teorema è valido anche per un insieme qualunque di osservabili rappresentate da operatori autoaggiunti generici, ma la dimostrazione è più complicata; il teorema in questa forma è comunque più che sufficiente agli scopi.

Siano ora $|u_{n,\{\lambda_i\}}\rangle$ dei vettori ortonormali che generano $\mathfrak{A}(\{\lambda_i\})$ $\forall\{\lambda_i\}$, essi costituiscono una base ortonormale di $\mathscr{H}$, infatti se hanno lo stesso indice $\{\lambda_i\}$ ma indice n diverso sono ortogonali per definizione, mentre se hanno indice $\{\lambda_i\}$ diverso sono ortogonali per quanto detto prima. Inoltre dal momento che $|u_{n,\{\lambda_i\}}\rangle \in \mathfrak{A}(\{\lambda_i\}) \subseteq \mathfrak{L}_j(\lambda_j)$ $\forall j$, si deduce che i $|u_{n,\{\lambda_i\}}\rangle$ sono anche degli autovettori comuni per gli operatori A_i. Riordiniamo e rinominiamo la base ortonormale di autovettori comuni così ottenuta con $|v_k\rangle$. Siano $\{\mu_k\}$ dei coefficienti reali tutti diversi tra loro e tali che $\sup|\mu_k| < +\infty$, sia B l'operatore autoaggiunto e limitato definito come segue

$$B := \sum_k \mu_k |v_k\rangle\langle v_k|,$$

sia $\mathcal{B}$ l'osservabile ad esso associata.
Gli operatori A_i possono essere tutti decomposti come combinazioni lineari dei proiettori $|v_k\rangle\langle v_k|$

$$A_i = \sum_k \nu_{i,k} |v_k\rangle\langle v_k|,$$

a questo punto se si pone $f_i(\mu_k) := \nu_{i,k}$ e si estendono in modo qualunque (purché misurabile) queste funzioni al dominio $\mathbb{R}$, si ottengono delle funzioni misurabili tali che $\mathcal{A} = f_i(\mathcal{B})$. □

Osservazione 1.1. *In virtù del risultato precedente, in MQ se delle osservabili sono a due a due commisurabili tra loro, allora sono tutte insieme commisurabili.*

Capitolo 2

Algebre parziali e formulazione del problema

Gli stati di una teoria fisica si dividono generalmente in *stati puri* e *stati misti*, dove i primi contengono una quantità di informazione massimale sul sistema, mentre i secondi contengono solo delle informazioni parziali, a causa di un'ignoranza di carattere epistemico. Lo spazio degli *stati puri* viene indicato con Ω, mentre lo spazio degli *stati misti* è $\mathcal{M}_p(\Omega)$: infatti uno *stato misto* ψ si può caratterizzare con un'ulteriore misura di probabilità μ_ψ che, per ogni $\Gamma \subseteq \Omega$ misurabile (è dunque necessario introdurre una struttura di σ-algebra su Ω), indica con quale probabilità il sistema si trovi in uno stato puro contenuto in Γ.

Ad esempio in meccanica classica, per un sistema di N punti materiali, uno stato puro ψ è rappresentato da una $6N$-upla costituita dalle coordinate di posizione e momento delle particelle. In questo caso, per ogni stato puro, la misura di probabilità $\mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi}(U)$ assegnata ad ogni osservabile $\mathcal{A}$ è atomica, ossia esiste un numero reale a tale che $\mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi}(U) = 1$ se $a \in U$, $\mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi}(U) = 0$ altrimenti. Ad ogni osservabile $\mathcal{A}$ si può dunque associare una funzione di predizione $f_\mathcal{A} : \Omega \to \mathbb{R}$, $\psi \mapsto f_\mathcal{A}(\psi) := a$. Per uno stato misto, invece, si ha una misura di probabilità μ_ψ sullo spazio Ω, dunque per ogni osservabile $\mathcal{A}$ e stato ψ la misura di probabilità assegnata risulta essere la misura push-forward tramite f di μ_ψ

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi}(U) = \mu_\psi\left(f_\mathcal{A}^{-1}(U)\right) =: (f_\mathcal{A})_* \mu_\psi(U),$$

il valore atteso di $\mathcal{A}$ è dunque

$$\langle \mathcal{A} \rangle_\psi = \int_\mathbb{R} \lambda \; d\mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi}(\lambda) = \int_\Omega f_\mathcal{A}(\omega)\, d\mu_\psi(\omega).$$

Come è ben noto, in meccanica quantistica non esistono stati ψ per i quali $\mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi}(\cdot\,)$ sia una misura atomica simultaneamente per tutte le osservabili $\mathcal{A}$ della teoria. A questo punto è lecito chiedersi se il fatto che stati puri non portino più a misure di probabilità atomiche possa essere legato all'esistenza di gradi di libertà nascosti del sistema: la meccanica quantistica potrebbe avere lo stesso rapporto, con un'eventuale teoria a variabili nascoste, che la termodinamica ha con la meccanica Newtoniana.
Seguendo l'analisi di Kochen e Specker in [8], questa ipotesi si traduce nell'introdurre uno

spazio degli stati puri nascosti con una sua σ-algebra $(\Omega, \mathscr{F})$, una misura di probabilità μ_ψ per ogni stato puro della MQ (che diventa uno stato misto nella nuova teoria), ed una *funzione di predizione* $f_\mathcal{A} : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile per ogni osservabile $\mathcal{A}$. In modo del tutto analogo al caso classico la nuova teoria deve riprodurre le distribuzioni di probabilità di quella vecchia, deve dunque valere

$$\langle \psi \,|\, E_A(U) \,|\, \psi \rangle = (f_\mathcal{A})_* \mu_\psi(U), \tag{2.1}$$

in tal caso i valori attesi sono automaticamente in accordo

$$\int_{\sigma(A)} \lambda \; d \langle \psi \,|\, E_A(\lambda) \,|\, \psi \rangle = \int_\Omega f_\mathcal{A}(\omega) \; d\mu_\psi(\omega).$$

Solitamente si assume anche che le funzioni di predizione per una certa osservabile restituiscano valori appartenenti allo spettro dell'operatore ad essa associato. Quest'ipotesi può sembrare fisicamente sensata, ma in realtà è piuttosto forte: a priori è infatti possibile che per certi stati nascosti le funzioni di predizione assumano valori inaspettati, purché l'insieme di tali stati sia di misura nulla e dunque la probabilità di compiere una misura con un risultato inaspettato sia anch'essa nulla (allo stesso modo in meccanica statistica esistono stati che violano le leggi della termodinamica, ma nel limite termodinamico il peso di tali stati rispetto all'intero ensemble diviene trascurabile).
A partire dalla condizione (2.1) è possibile invece dimostrare un risultato un po' più debole:

Lemma 2.1. *Se $f_\mathcal{A} : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione di predizione per l'osservabile $\mathcal{A}$ per la quale vale la condizione* (2.1)*, allora $f_\mathcal{A}(\omega) \in \sigma(A)$ quasi ovunque per $\omega \in \Omega$ secondo la misura μ_ψ.*

Dimostrazione. Si ha

$$0 = \langle \psi | E_A(\mathbb{R} \smallsetminus \sigma(A)) | \psi \rangle = \mu_\psi(f_\mathcal{A}^{-1}(\mathbb{R} \smallsetminus \sigma(A)),$$

per cui l'insieme degli $\omega \in \Omega$ per i quali $f_\mathcal{A}(\omega) \in \mathbb{R} \smallsetminus \sigma(A)$ ha μ_ψ-misura nulla, da cui la tesi. □

Due funzioni di predizione che sono uguali quasi ovunque possono essere identificate, in tal caso infatti i valori attesi delle osservabili coinciderebbero.

Senza aggiungere ulteriori ipotesi, è sempre possibile, almeno da un punto di vista puramente matematico, costruire una teoria a variabili nascoste che soddisfi queste condizioni: a tale scopo è sufficiente porre

$$\begin{aligned} \Omega &:= \mathbb{R}^{|\mathcal{O}|} \cong \{\omega \,|\, \omega : \mathcal{O} \to \mathbb{R}\}, & \mathscr{F} &:= \mathscr{B}^{|\mathcal{O}|}, \\ f_\mathcal{A}(\omega) &:= \omega(A), & \mu_\psi &:= \prod_{A \in \mathcal{O}} \mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi} \quad \textit{(misura prodotto)}. \end{aligned}$$

Infatti in tal caso si avrebbe

$$(f_\mathcal{A})_* \mu_\psi(U) = \mu_\psi \left(f_\mathcal{A}^{-1}(U) \right) = \mu_\psi(\{\omega \,|\, \omega(A) \in U\}) = \mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi}(U), \qquad \forall U \in \mathscr{B}.$$

La sola condizione di riproduzione delle distribuzioni di probabilità (2.1) non è sufficiente per la costruzione di una teoria a variabili nascoste che sia anche sensata fisicamente; è necessario imporre qualche condizione aggiuntiva. Nella costruzione precedente le funzioni $f_{\mathcal{A}}$, essendo funzioni misurabili, corrispondono alla definizione di variabili casuali a valori reali sullo spazio Ω; si può verificare che siano tutte variabili indipendenti tra loro, infatti

$$\langle f_{\mathcal{A}}\rangle_{\psi}\,\langle f_{\mathcal{B}}\rangle_{\psi} = \int_{\mathbb{R}^{|\mathcal{O}|}} f_{\mathcal{A}}(\omega_1)\, d\mu_{\psi}(\omega_1) \;\cdot \int_{\mathbb{R}^{|\mathcal{O}|}} f_{\mathcal{B}}(\omega_2)\, d\mu_{\psi}(\omega_2),$$

ponendo $\lambda_1 = f_{\mathcal{A}}(\omega_1)$, $\lambda_2 = f_{\mathcal{B}}(\omega_2)$ ed effettuando un cambio di variabili si ottiene

$$\langle f_{\mathcal{A}}\rangle_{\psi}\,\langle f_{\mathcal{B}}\rangle_{\psi} = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1\, d\mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi}(\lambda_1) \;\cdot \int_{\mathbb{R}} \lambda_2\, d\mathcal{P}_{\mathcal{B}\psi}(\lambda_2).$$

D'altra parte si ha

$$\langle f_{\mathcal{A}}\cdot f_{\mathcal{B}}\rangle_{\psi} = \int_{\mathbb{R}^{|\mathcal{O}|}} f_{\mathcal{A}}(\omega)\cdot f_{\mathcal{B}}(\omega)\, d\mu_{\psi}(\omega),$$

si ponga $\widetilde{\mathcal{O}} := \mathcal{O}\setminus\{A,B\}$, $\widetilde{\Omega}$ e $\widetilde{\mu}_{\psi}$ come prima con $\widetilde{\mathcal{O}}$ al posto di $\mathcal{O}$; di conseguenza: $\omega = (\omega(A), \omega(B), \widetilde{\omega})$, $d\mu_{\psi} = d\mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi}\, d\mathcal{P}_{\mathcal{B}\psi}\, d\widetilde{\mu}_{\psi}$. Notando che, per definizione, $f_{\mathcal{A}}(\omega) = \omega(A)$ e $f_{\mathcal{B}}(\omega) = \omega(B)$ e che dunque le due funzioni dipendono solamente dal rispettivo operatore, si può utilizzare il teorema di Fubini

$$\begin{aligned}\langle f_{\mathcal{A}}\cdot f_{\mathcal{B}}\rangle_{\psi} &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{|\widetilde{\mathcal{O}}|}} \omega(A)\cdot\omega(B)\, d\mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi}(\omega(A))\, d\mathcal{P}_{\mathcal{B}\psi}(\omega(B))\, d\widetilde{\mu}_{\psi}(\widetilde{\omega}) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \omega(A)\, d\mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi}(\omega(A)) \;\cdot \int_{\mathbb{R}} \omega(B)\, d\mathcal{P}_{\mathcal{B}\psi}(\omega(B)) \;\cdot \int_{\mathbb{R}^{|\widetilde{\mathcal{O}}|}} d\widetilde{\mu}_{\psi} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_1\, d\mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi}(\lambda_1) \;\cdot \int_{\mathbb{R}} \lambda_2\, d\mathcal{P}_{\mathcal{B}\psi}(\lambda_2),\end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è sfruttata la normalizzazione di $\widetilde{\mu}_{\psi}$ e si sono rinominate le variabili $\omega(A)$ e $\omega(B)$. A questo punto è chiaro che le variabili sono indipendenti, infatti

$$cov_{\psi}\,(f_{\mathcal{A}}, f_{\mathcal{B}}) = \langle f_{\mathcal{A}}\cdot f_{\mathcal{B}}\rangle_{\psi} - \langle f_{\mathcal{A}}\rangle_{\psi}\,\langle f_{\mathcal{B}}\rangle_{\psi} = 0.$$

Invece è ovvio che in una teoria fisica sensata, due variabili, in generale, possano dipendere l'una dall'altra. Ad esempio l'osservabile rappresentata dall'operatore A^2 è una funzione dell'osservabile rappresentata dall'operatore A (nel senso che uno dei possibili modi di misurare A^2 deve essere quello di misurare A ed elevare al quadrato il risultato ottenuto) e certamente non è indipendente da essa. Utilizzando il lemma **(1.4)**, per ogni osservabile quantistica $\mathcal{A}$ e per ogni funzione misurabile $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si può definire un'unica osservabile $g(\mathcal{A})$ tale che valga

$$\mathcal{P}_{g(\mathcal{A})\psi}(U) = \mathcal{P}_{\mathcal{A}\psi}(g^{-1}(U)). \tag{2.2}$$

Si può dunque richiedere che questa struttura algebrica sia preservata anche nella teoria a variabili nascoste, ossia che per due osservabili dipendenti $\mathcal{A}$ e $g(\mathcal{A})$ le rispettive funzioni di predizione $f_{\mathcal{A}}$ e $f_{g(\mathcal{A})}$ stiano nella stessa relazione funzionale

$$f_{g(\mathcal{A})}(\omega) = g(f_{\mathcal{A}}(\omega)) \quad \forall \omega \in \Omega; \tag{2.3}$$

Se si hanno tre osservabili quantistiche $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ tali che per gli operatori ad esse associate valga $[A, B] = [A, C] = 0$ e $[B, C] \neq 0$, per il teorema **(1.4)** esistono delle osservabili $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ e delle funzioni reali misurabili g_1 e g_2 tali che $\mathcal{A} = g_1(\mathcal{D}_1) = g_2(\mathcal{D}_2)$ (nel senso che le distribuzioni di probabilità siano rispettate), ossia tali che $g_1(\mathcal{D}_1)$ e $g_2(\mathcal{D}_2)$ siano la stessa osservabile quantistica. Utilizzando la condizione (2.3) si ottiene

$$g_1(f_{\mathcal{D}_1}(\omega)) = g_2(f_{\mathcal{D}_2}(\omega)) \quad \forall\omega \in \Omega;$$

da un punto di vista operativo ciò significa che, indipendentemente da quale sia il modo di compiere una misurazione di $\mathcal{A}$, la teoria a variabili nascoste assegni a questa osservabile lo stesso valore. Le funzioni di predizione di una teoria a variabili nascoste che soddisfano l'assunzione (2.3) sono dunque indipendenti dal contesto della misura, per questo motivo la (2.3) viene detta *ipotesi di non contestualità*.
Questa proprietà può essere enunciata in modo più naturale tramite il concetto di *algebra parziale* (che viene introdotto seguendo sempre [8]).

Definizione 2.1. *Un insieme $\mathscr{N}$ forma un'algebra parziale sul campo K se esiste una relazione binaria $\female \subseteq \mathscr{N} \times \mathscr{N}$, un'operazione di addizione $+ : \female \to \mathscr{N}$, una di moltiplicazione $\times : \female \to \mathscr{N}$, una di moltiplicazione per scalare $\cdot : \mathscr{N} \times K \to \mathscr{N}$ ed un'unità $\underline{1} \in \mathscr{N}$ tali che:*

(i) *la relazione $\female$ è riflessiva $(a \female a)$ e simmetrica $(a \female b \Leftrightarrow b \female a)$ $\forall a, b \in \mathscr{N}$.*

(ii) $a \female \underline{1} \;\; \forall a \in \mathscr{N}$.

(iii) *se $a_i \female a_j$ per $1 \leq i, j \leq 3$ allora $(a_1 + a_2) \female a_3$, $(a_1 \times a_2) \female a_3$, $(\lambda \cdot a_1) \female a_3$ $\forall\lambda \in K$.*

(iv) *se $a_i \female a_j$ per $1 \leq i, j \leq 3$ allora i polinomi in a_1, a_2 e a_3 formano un'algebra commutativa sul campo K.*

Un'algebra parziale sul campo $\mathbb{Z}_2$ è detta *algebra parziale booleana.* Per essa è possibile definire delle operazioni di somma logica $(\wedge : \female \to A, (a, b) \mapsto a \wedge b := a + b - a \times b)$ e di prodotto logico $(\vee : \female \to A, (a, b) \mapsto a \vee b := a \times b)$ in modo che, se $a_i \female a_j$ per $1 \leq i, j \leq 3$, allora i polinomi in a_1, a_2 e a_3 formano un'algebra booleana. Si verifica facilmente che l'insieme degli elementi idempotenti di un'algebra parziale forma un'algebra booleana parziale.

Lemma 2.2. *L'insieme delle osservabili $\mathcal{O}$ della MQ*[1] *ha una struttura di $\mathbb{R}$-algebra parziale, che verrà denotata con $\mathscr{Q}$.*

Dimostrazione. Come relazione binaria si prende la commisurabilità: date due osservabili $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ allora $\mathcal{A} \female \mathcal{B}$ se e solo se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono *commisurabili.* Tale relazione è banalmente riflessiva e simmetrica, per cui la proprietà (i) è rispettata. come unità si pone l'osservabile identità: $\underline{1} := \mathbb{I}$; la proprietà (ii) è rispettata poiché $\mathbb{I}$ è funzione di ogni osservabile tramite $f(x) = 1$. Date poi due osservabili commisurabili $\mathcal{A}_i = f_i(\mathcal{B})$, $i = 1, 2$, si pone: $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 := (f_1 + f_2)(\mathcal{B})$, $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 := (f_1 f_2)(\mathcal{B})$, $\lambda \cdot \mathcal{A}_1 := (\lambda f_1)(\mathcal{B})$; la proprietà (iii) è una diretta conseguenza di questa definizione e del fatto che, grazie all'osservazione **1.1**, se $a_i \female a_j$ per $1 \leq i, j \leq 3$, allora a_1, a_2 e a_3 sono tutte e tre commisurabili. Sempre per questo fatto a_1, a_2 e a_3 possono essere identificate con le funzioni misurabili f_1, f_2 ed f_3 ed

[1] Lo stesso risultato si può ottenere per una qualsiasi teoria fisica per la quale, date tre osservabili che siano a due a due commisurabili, allora sono tutte e tre commisurabili; si noti che questa non è una conseguenza logica delle ipotesi fatte su una teoria fisica, né della definizione di commisurabilità.

è quindi ovvio che generino una $\mathbb{R}$-algebra commutativa, dunque anche la proprietà (iv) è soddisfatta. □

L'insieme delle osservabili della MQ che sono rappresentate da operatori idempotenti forma un'algebra booleana parziale, infatti la moltiplicazione $\times$ prima definita è equivalente alla composizione di operatori, inoltre gli operatori che rappresentano le osservabili devono essere autoaggiunti, per cui gli operatori idempotenti sono dei proiettori.
Lo spettro di un proiettore è $\{0, 1\}$, per cui, identificando questi valori con i valori di verità e falsità $\{F, T\}$, ad ogni operatore idempotente corrisponde una proposizione della teoria; l'insieme delle proposizioni della MQ ha dunque una struttura di algebra booleana parziale.

Definizione 2.2. *Una funzione $h : \mathscr{N} \to \widetilde{\mathscr{N}}$ tra algebre parziali su uno stesso campo K è un omomorfismo se $\forall a, b \in \mathscr{N} \mid a \,♀\, b,\ \forall \mu, \lambda \in K$:*

(i) $h(a) \,\widetilde{♀}\, h(b)$,

(ii) $h((\mu \cdot a) + (\lambda \cdot b)) = (\mu \cdot h(a)) + (\lambda \cdot h(b))$,

(iii) $h(a \times b) = h(a) \times h(b)$,

(iv) $h(\underline{1}) = \widetilde{\underline{1}}$.

Se la funzione h è anche iniettiva, l'omomorfismo è detto embedding di $\mathscr{N}$ in $\widetilde{\mathscr{N}}$.

Sia $\left[\mathbb{R}^\Omega\right]_\psi$ l'insieme delle classi di equivalenza di $\mathbb{R}^\Omega$ dove due funzioni sono equivalenti se sono uguali quasi ovunque secondo la misura μ_ψ. Grazie al fatto che unioni numerabili (e dunque a maggior ragione finite) di insiemi di misura nulla hanno ancora misura nulla, date $[f], [g] \in \left[\mathbb{R}^\Omega\right]_\psi$ è possibile definire univocamente $[f + g]$ ed $[fg]$ utilizzando due qualsiasi rappresentanti delle classi $[f]$ e $[g]$; $\left[\mathbb{R}^\Omega\right]_\psi$ costituisce dunque un'algebra commutativa. A questo punto è facile verificare che, grazie alla condizione (2.3), un'eventuale mappa $\iota : \mathscr{Q} \to \left[\mathbb{R}^\Omega\right]_\psi$ che associa ad ogni osservabile quantistica $\mathcal{A}$ la funzione di predizione $\iota(\mathcal{A}) := f_\mathcal{A}$ (d'ora in avanti, per non appesantire ulteriormente la notazione, con $f_\mathcal{A}$ si intenderà la sua classe di equivalenza) sarebbe un *embedding* dell'algebra parziale $\mathscr{Q}$ nell'algebra commutativa $\left[\mathbb{R}^\Omega\right]_\psi$:

Lemma 2.3. *Una mappa $\iota : \mathscr{Q} \to \left[\mathbb{R}^\Omega\right]_\psi$, $\mathcal{A} \mapsto \iota(\mathcal{A}) := f_\mathcal{A}$ iniettiva e che rispetta le condizioni* (2.1) *e* (2.3) *è un embedding di $\mathscr{Q}$ in $\left[\mathbb{R}^\Omega\right]_\psi$.*

Dimostrazione. La proprietà (i) è ovvia in quanto $\left[\mathbb{R}^\Omega\right]_\psi$ è un'algebra commutativa e dunque $\widetilde{♀} = \left[\mathbb{R}^\Omega\right]_\psi \times \left[\mathbb{R}^\Omega\right]_\psi$. Date due osservabili $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ tali che $\mathcal{A}_1 \,♀\, \mathcal{A}_2$ esistono $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\mathcal{B}$ tali che $\mathcal{A}_i = g_i(\mathcal{B})$. Si ha

$$\begin{aligned} f_{(\mu \cdot \mathcal{A}_1) + (\lambda \cdot \mathcal{A}_2)} &= f_{(\mu g_1 + \lambda g_2)(\mathcal{B})} \overset{(2.3)}{=} (\mu g_1 + \lambda g_2) \circ f_\mathcal{B} = \mu (g_1 \circ f_\mathcal{B}) + \lambda (g_2 \circ f_\mathcal{B}) \overset{(2.3)}{=} \\ &\overset{(2.3)}{=} \mu f_{g_1(\mathcal{B})} + \lambda f_{g_2(\mathcal{B})} = \mu f_{\mathcal{A}_1} + \lambda f_{\mathcal{A}_2}, \end{aligned}$$

dunque la proprietà (ii) è rispettata. Analogamente si ha

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} &= f_{(g_1 \cdot g_2)(\mathcal{B})} \overset{(2.3)}{=} (g_1 \cdot g_2) \circ f_\mathcal{B} = (g_1 \circ f_\mathcal{B}) \cdot (g_2 \circ f_\mathcal{B}) \overset{(2.3)}{=} \\ &\overset{(2.3)}{=} f_{g_1(\mathcal{B})} \cdot f_{g_2(\mathcal{B})} = f_{\mathcal{A}_1} \cdot f_{\mathcal{A}_2}, \end{aligned}$$

e anche la proprietà (iii) è rispettata. Grazie al lemma **2.1** si ha poi $f_{\mathbb{I}}(\omega) = 1$ quasi ovunque per $\omega \in \Omega$ secondo la misura μ_ψ, poiché $\sigma(\mathbb{I}) = \{1\}$; quindi $\iota(\mathbb{I}) = f_{\mathbb{I}}$ coincide con l'unità di $\left[\mathbb{R}^\Omega\right]_\psi$, dunque anche la proprietà (iv) è soddisfatta. $\square$

Una condizione necessaria per l'esistenza di una teoria a variabili nascoste per la meccanica quantistica è dunque l'esistenza di un *embedding* dell'algebra parziale $\mathscr{Q}$ delle osservabili quantistiche in un'algebra commutativa (a meno che non si voglia obiettare che ad una sola osservabile quantistica possano corrispondere diverse osservabili nella nuova teoria a variabili nascoste; questa obiezione verrà trattata in seguito). La restrizione di ι all'algebra parziale booleana dei proiettori $\mathscr{Q}^{id}$, denotata con $\iota|_{\mathscr{Q}^{id}}$, è dunque un embedding di $\mathscr{Q}^{id}$ in un'algebra booleana. L'esistenza di un tale embedding può essere caratterizzata tramite i seguenti risultati:

Lemma 2.4. *Sia $\mathfrak{B}$ un'algebra booleana finita*[2]. *Per ogni elemento $a \in \mathfrak{B}$ non nullo esiste un omomorfismo $h : \mathfrak{B} \to \mathbb{Z}_2$ tale che $h(a) = 1$.*

Dimostrazione. Sia M un ideale massimale che non contiene a (la cui esistenza è ovvia poiché $\mathfrak{B}$ è finita). Si ponga $h(p) = 0$ se $p \in M$ e $h(p) = 1$ se $\overline{p} := (1 + p) \in M$ (dire che M è un ideale massimale equivale a dire che una delle due condizioni precedenti, ma mai entrambe, è sempre verificata). Si ha $h(p \vee q) = h(p) \vee h(q)$: se $p, q \in M$ allora $p \vee q \in M$ e $h(p \vee q) = 0$, inoltre $h(p) = h(q) = 0$ per cui $h(p) \vee h(q) = 0$; se invece uno dei due, ad esempio p, non appartiene a M, allora $h(p) = 1$, cioè $h(p) \vee h(q) = 1$, d'altra parte $p \vee q \notin M$, infatti $\overline{(p \vee q)} = (\overline{p} \wedge \overline{q}) \in M$ poiché $\overline{p} \in M$, dunque $h(p \vee q) = 1$. Analogamente si ha $h(p \wedge q) = h(p) \wedge h(q)$: se $p, q \notin M$ allora $\overline{p \wedge q} = (\overline{p} \vee \overline{q}) \in M$ e dunque $p \wedge q \notin M$, allora $h(p \wedge q) = 1$, inoltre $h(p) = h(q) = 1$ per cui $h(p) \wedge h(q) = 1$; se invece uno dei due, ad esempio p, appartiene a M, allora $h(p) = 0$, cioè $h(p) \wedge h(q) = 0$, d'altra parte $p \wedge q \in M$, poiché $p \in M$, cioè $h(p \wedge q) = 0$. Infine $\overline{f(p)} = f(\overline{p})$ è una diretta conseguenza della definizione. h è dunque un omomorfismo per il quale vale $h(a) = 1$. $\square$

Teorema 2.1. *Sia $\mathscr{N}$ un'algebra booleana parziale finita*[3]. *Allora esiste un embedding di $\mathscr{N}$ in un'algebra booleana $\mathfrak{B}$ finita se e solo se per ogni coppia di elementi distinti $a, b \in \mathscr{N}$ esiste un omomorfismo $h : \mathscr{N} \to \mathbb{Z}_2$ che li separa, ossia tale che $h(a) \neq h(b)$.*

Dimostrazione. Sia $\varphi : \mathscr{N} \to \mathfrak{B}$ un embedding. se $a \neq b$ allora $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ cioè $\varphi(a) + \varphi(b) = 1$. Per il lemma precedente esiste un omomorfismo $h : \mathfrak{B} \to \mathbb{Z}_2$ tale che $h(\varphi(a) + \varphi(b)) = h(\varphi(a)) + h(\varphi(b)) = 1$, cioè tale che $h(\varphi(a) \neq h(\varphi(b))$; $k := h \circ \varphi : \mathscr{N} \to \mathbb{Z}_2$ è dunque l'omomorfismo richiesto.
Viceversa sia S l'insieme di tutti gli omomorfismi non banali da $\mathscr{N}$ in $\mathbb{Z}_2$ e sia $\mathbb{Z}_2^S$ l'algebra booleana delle funzioni definite su S e a valori in $\mathbb{Z}_2$. Sia $\varphi : \mathscr{N} \to \mathbb{Z}_2^S$ la mappa che manda $a \in \mathscr{N}$ nella funzione $\varphi(a) := g_a : S \to \mathbb{Z}_2$ tale che $g_a(h) = h(a)\ \forall h \in S$. La mappa φ appena definita è un embedding infatti: la proprietà (i) è ovvia in quanto $\mathbb{Z}_2^S$ è un'algebra commutativa, per la proprietà (ii) si ha: $\varphi((\mu \cdot a) + (\lambda \cdot b)) = g_{(\mu \cdot a)+(\lambda \cdot b)} : S \to \mathbb{Z}_2$ tale che

$$g_{(\mu \cdot a)+(\lambda \cdot b)}(h) = h((\mu \cdot a) + (\lambda \cdot b)) = \mu h(a) + \lambda h(b) = \mu g_a(h) + \lambda g_b(h) \qquad \forall h \in S,$$

[2]Il teorema vale per algebre booleane qualunque a patto di utilizzare il lemma di Zorn per dimostrare l'esistenza dell'ideale massimale; dal momento che il teorema di Kochen-Specker utilizza solo un numero finito di proposizioni della meccanica quantistica, si è preferito evitare di utilizzare una tale assunzione, che potrebbe solo essere motivo di ulteriori dubbi a livello metafisico.

[3]Si veda la nota precedente.

per cui $\varphi((\mu \cdot a) + (\lambda \cdot b)) = \mu\varphi(a) + \lambda\varphi(b)$; per la proprietà (iii): $\varphi(a \times b) = g_{a\times b} : S \to \mathbb{Z}_2$ tale che

$$g_{a\times b}(h) = h(a \times b) = h(a) \cdot h(b) = g_a(h) \cdot g_b(h) \qquad \forall h \in S,$$

per cui $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$; per la proprietà (iv): $\varphi(\underline{1}) = g_{\underline{1}} : S \to \mathbb{Z}_2$ tale che

$$g_{\underline{1}}(h) = h(\underline{1}) = 1 \qquad \forall h \in S,$$

per cui $\varphi(\underline{1}) \equiv 1$; infine se $a \neq b$ per ipotesi esiste un omomorfismo $\widetilde{h} : \mathscr{N} \to \mathbb{Z}_2$ tale che $\widetilde{h}(a) \neq \widetilde{h}(b)$, per cui $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ in quanto esse differiscono almeno quando calcolate in $\widetilde{h}$, dunque φ è anche iniettiva. $\square$

A questo punto per dimostrare che non può esistere una teoria a variabili nascoste per la meccanica quantistica che soddisfi entrambe le condizioni (2.1) e (2.3) è sufficiente dimostrare che esiste una sottoalgebra booleana parziale $\mathscr{P} \subsetneq \mathscr{Q}^{id}$ finita per la quale non esiste nessun omomorfismo $h : \mathscr{P} \to \mathbb{Z}_2$ (infatti se non esiste un embedding di $\mathscr{P}$ in un'algebra commutativa, a fortiori non può esistere nemmeno un embedding di $\mathscr{Q}$ in un'algebra commutativa).

Capitolo 3

Il teorema di Kochen-Specker

Teorema 3.1. *(Kochen, Specker) se* $\dim \mathscr{H} > 2$ *non esiste alcun embedding dell'algebra booleana parziale* $\mathscr{Q}^{id}$ *in un'algebra booleana (dunque non esiste nemmeno alcun embedding di* $\mathscr{Q}$ *in* $\left[\mathbb{R}^\Omega\right]_\psi$*).*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{L} \subsetneq \mathscr{H}$ un sottospazio di dimensione 3 e sia $\mathscr{L}'$ tale che $\mathscr{H} = \mathscr{L} \oplus \mathscr{L}'$. Sia poi $\{u_1, u_2, u_3\}$ una base di versori ortonormali per $\mathscr{L}$ e siano $P_{u_1}, P_{u_2}, P_{u_3}$ le proiezioni sugli spazi generati dai rispettivi vettori. Si ponga $\widehat{P}_{u_i} := P_{u_i} \otimes \mathbb{I}_{\mathscr{L}'}$, dunque $\widehat{P}_{u_i} \in \mathscr{Q}^{id}$; inoltre si ha $[\widehat{P}_{u_i}, \widehat{P}_{u_j}] = 0$, dunque $\widehat{P}_{u_i} \,\female\, \widehat{P}_{u_j}$ $\forall i, j$. Dal momento che u_1, u_2 e u_3 generano $\mathscr{L}$ vale anche

$$\widehat{P}_{u_1} + \widehat{P}_{u_2} + \widehat{P}_{u_3} = \mathbb{I}_{\mathscr{L}} \otimes \mathbb{I}_{\mathscr{L}'} = \mathbb{I}.$$

Sia per assurdo $h : \mathscr{P} \to \mathbb{Z}_2$ un omomorfismo dove $\mathscr{P}$ è una sottoalgebra booleana di $\mathscr{Q}^{id}$ contenente i $\widehat{P}_{u_i}$ per ora non meglio specificata. Allora deve valere

$$h(\widehat{P}_{u_1}) + h(\widehat{P}_{u_2}) + h(\widehat{P}_{u_3}) = 1,$$

dunque uno ed uno solo degli $h(\widehat{P}_{u_i})$ deve essere uguale a 1, mentre gli altri due devono essere nulli. Se si identificano 0 e 1 rispettivamente con i colori *verde* e *rosso*, la condizione precedente equivale a dire che per ogni terna di direzioni ortogonali in $\mathscr{L}$ due direzioni sono "colorate" di verde e una di rosso (regola di Kochen-Specker). A questo punto per concludere la dimostrazione è sufficiente trovare un insieme di direzioni per le quali questa colorazione sia impossibile, infatti in tal caso si sarebbe dimostrato che non esiste alcun omomorfismo tra la sottoalgebra booleana parziale $\mathscr{P}$ generata dai proiettori in tali direzioni (che è ovviamente finita poiché è finitamente generata ed il suo campo $\mathbb{Z}_2$ è anch'esso finito) e $\mathbb{Z}_2$.
A tal proposito verrà utilizzato l'insieme di Peres [13].
Scelta una qualunque base ortonormale $\{u_x, u_y, u_z\}$ di $\mathscr{L}$ è possibile identificare una direzione con le coordinate (x, y, z); per brevità si utilizzeranno i simboli $0, 1, \overline{1}, 2, \overline{2}$ al posto di (rispettivamente) $0, 1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ (per esempio $\overline{1}02$ è la direzione parallela al vettore che congiunge l'origine con il punto $\left(-1, 0, \sqrt{2}\right)$), inoltre le direzioni scritte in grassetto saranno intese essere colorate di verde, mentre le altre di rosso. A meno di cambiare il versore u_z la direzione 001 è sicuramente verde, per cui si ha

$$\mathbf{001}\ \ 100\ \ 010, \qquad\qquad (110\ \ 1\overline{1}0),$$

una tra le direzioni 101 e $\bar{1}01$, entrambe perpendicolari a 010 che è rossa, deve essere verde, dunque a meno di scambiare u_x con $-u_x$ si ha

$$\mathbf{101}\quad \bar{1}01\quad 010,$$

ragionando come prima, a meno di scambiare u_y con $-u_y$ si ha

$$\mathbf{011}\quad 0\bar{1}1\quad 100,$$

una tra le direzioni $1\bar{1}2$ e $\bar{1}12$ è verde, poiché sono entrambe perpendicolari a 110 che è rossa, a meno di scambiare u_x con u_y si ha dunque

$$\mathbf{1\bar{1}2}\quad \bar{1}12\quad 110, \qquad\qquad (\bar{2}01\quad 021),$$

la direzione 102 è verde poiché è perpendicolare a $\bar{2}01$ e a 010; entrambe rosse

$$\mathbf{102}\quad \bar{2}01\quad 010, \qquad\qquad (\bar{2}11),$$

la direzione 211 è verde poiché è perpendicolare a $0\bar{1}1$ e a $\bar{2}11$; entrambe rosse

$$\mathbf{211}\quad 0\bar{1}1\quad \bar{2}11, \qquad\qquad (\bar{1}02),$$

la direzione 201 è verde poiché è perpendicolare a 010 e a $\bar{1}02$; entrambe rosse

$$\mathbf{201}\quad 010\quad \bar{1}02, \qquad\qquad (\bar{1}\bar{1}2),$$

la direzione 112 è verde poiché è perpendicolare a $1\bar{1}0$ e a $\bar{1}\bar{1}2$; entrambe rosse

$$\mathbf{112}\quad \bar{1}10\quad \bar{1}\bar{1}2, \qquad\qquad (0\bar{2}1),$$

la direzione 012 è verde poiché è perpendicolare a 100 e a $0\bar{2}1$; entrambe rosse

$$\mathbf{012}\quad 100\quad 0\bar{2}1, \qquad\qquad (1\bar{2}1),$$

la direzione 121 è verde poiché è perpendicolare a $\bar{1}01$ e a $1\bar{2}1$; entrambe rosse

$$\mathbf{121}\quad \bar{1}01\quad 1\bar{2}1, \qquad\qquad (0\bar{1}2),$$

le tre direzioni 100, 021 e $0\bar{1}2$ sono mutuamente ortogonali e risultano essere tutti e tre verdi, dunque l'insieme non è colorabile secondo la regola prefissata. □

Come accennato in precedenza, è possibile obiettare che in una reinterpretazione classica della meccanica quantistica ad una singola osservabile $\mathcal{A}$ possano corrispondere diverse osservabili nella nuova teoria, ossia diversi elementi di $\left[\mathbb{R}^{\Omega}\right]_{\psi}$. Anziché un embedding di $\mathscr{Q}$ in $\left[\mathbb{R}^{\Omega}\right]_{\psi}$ si avrebbe dunque un omomorfismo suriettivo $\kappa : \mathscr{C} \to \mathscr{Q}$, dove $\mathscr{C}$ è una sottoalgebra di $\left[\mathbb{R}^{\Omega}\right]_{\psi}$; in realtà però anche quest'ipotesi conduce ad un assurdo.

Definizione 3.1. *Siano $\mathscr{N}$ ed $\widetilde{\mathscr{N}}$ due algebre parziali su uno stesso campo K. Una relazione $R \subseteq \mathscr{N} \times \widetilde{\mathscr{N}}$ è detta omomorfica tra $\mathscr{N}$ ed $\widetilde{\mathscr{N}}$ se, per ogni $a \,♀\, b$ in $\mathscr{N}$ e $\alpha \,\widetilde{♀}\, \beta$ in $\widetilde{\mathscr{N}}$, $R(a,\alpha)$ e $R(b,\beta)$ implicano $R(\lambda \cdot a + \mu \cdot b, \lambda \cdot \alpha + \mu \cdot \beta)$ e $R(a \times b, \alpha \times \beta)$ $\forall \lambda, \mu \in K$ e inoltre vale $R(\underline{1}, \underset{\sim}{1})$.*
La relazione ha dominio $\mathscr{N}$ se per ogni $a \in \mathscr{N}$ esiste un $\alpha \in \widetilde{\mathscr{N}}$ tale che valga $R(a,\alpha)$. La relazione si dice non banale se non vale $R(\underline{1}, \underset{\sim}{0})$.

Osservazione 3.1. *Un omomorfismo suriettivo $h : \widetilde{\mathscr{N}} \to \mathscr{N}$ definisce una relazione omomorfica non banale con dominio $\mathscr{N}$ ponendo $R(a, \alpha)$ se $a = h(\alpha)$. Una condizione necessaria per l'esistenza dell'omomorfismo κ è dunque l'esistenza di una relazione omomorfica non banale tra $\mathscr{Q}$ e $\left[\mathbb{R}^\Omega\right]_\psi$ con dominio $\mathscr{Q}$.*

Teorema 3.2. *Sia $\mathscr{N}$ un'algebra parziale. Se esiste una relazione omomorfica non banale tra $\mathscr{N}$ ed un'algebra commutativa $\mathscr{A}$ con dominio $\mathscr{N}$ allora esiste un'algebra commutativa $\mathscr{A}\,'$ ed un omomorfismo suriettivo $h : \mathscr{N} \to \mathscr{A}\,'$.*

Dimostrazione. sia S l'insieme di tutti gli elementi $\alpha \in \mathscr{A}$ per i quali esiste $a \in \mathscr{N}$ tale che valga $R(a, \alpha)$. Sia $\overline{S}$ la sottoalgebra di $\mathscr{A}$ generata da S. Sia I l'insieme di tutti gli $\alpha \in \mathscr{A}$ tali che valga $R(\underline{0}, \alpha)$; chiaramente I è chiuso sotto combinazioni lineari. Se $\beta \in \overline{S}$ allora esistono $\lambda_i \in K$ e $\beta_{ij} \in S$ tali che

$$\beta = \sum_i \lambda_i \beta_{i1} \beta_{i2} ... \beta_{in_i}.$$

Se $\alpha \in I$, allora $\alpha\beta_{ij} \in I$, quindi $\alpha\beta = \sum_i \lambda_i \beta_{i1} ... \beta_{in_i} \in I$, inoltre $1 \notin I$; I è dunque un ideale proprio di $\overline{S}$. Si ponga $\mathscr{A}\,' := \overline{S}/I$ e sia $\varphi : \overline{S} \to \mathscr{A}\,'$ l'omomorfismo canonico che manda un elemento $\alpha \in \overline{S}$ nella propria classe di equivalenza. Definiamo $h : \mathscr{N} \to \mathscr{A}\,', a \mapsto h(a) := \varphi(\alpha)$ dove α è un qualunque elemento di S tale che valga $R(a, \alpha)$; la definizione è buona infatti dati $\alpha, \alpha' \in S$ per cui valgono $R(a, \alpha)$ e $R(a, \alpha')$ si ha anche $R(\underline{0}, \alpha - \alpha')$, per cui $\alpha - \alpha' \in I$; cioè $\varphi(\alpha - \alpha') = 0_{\mathscr{A}\,'}$. Infine dalle proprietà di relazione omomorfica segue direttamente che $h(\mu \cdot a + \lambda \cdot b) = \mu h(a) + \lambda h(b)$, che $h(a \times b) = h(a) \times h(b)$ e che $h(\underline{1}) = 1_{\mathscr{A}\,'}$ per cui h è effettivamente un omomorfismo. $\square$

A questo punto è facile concludere che un omomorfismo suriettivo $\kappa : \mathscr{C} \to \mathscr{Q}$ non può esistere: infatti per assurdo dovrebbe esistere anche un'algebra commutativa $\mathscr{A}\,'$ ed un omomorfismo suriettivo $h : \mathscr{Q} \to \mathscr{A}\,'$ che indurrebbe per restrizione un omomorfismo tra le algebre dei rispettivi elementi idempotenti; componendo h con un qualunque omomorfismo dall'algebra booleana degli idempotenti di $\mathscr{A}\,'$ in $\mathbb{Z}_2$ si otterrebbe infine un omomorfismo da $\mathscr{Q}^{id}$ in $\mathbb{Z}_2$, ma per quanto dimostrato nel teorema **3.1** un tale omomorfismo non può esistere.

Per sistemi quantistici rappresentati da spazi di Hilbert $\mathscr{H}$ con $dim\,\mathscr{H} = 2$ (o a maggior ragione $dim\,\mathscr{H} = 1$) è invece possibile costruire una teoria a variabili nascoste che rispetti entrambe le condizioni (2.1) e (2.3). Anche se tali sistemi sono una strettissima minoranza, e sono solitamente modelli giocattolo (ad esempio sistemi costituiti da una singola particella di *spin* $\frac{1}{2}$ senza gradi di libertà spaziali), per completezza conviene fornire un esempio costruttivo di tale teoria (l'esempio è dovuto a Kochen e Specker [8]).

Esempio 3.1. *(teoria a variabili nascoste per sistemi rappresentati da $\mathscr{H}_2$)*
Sia $\mathcal{A}$ un'osservabile e sia A l'operatore autoaggiunto e limitato ad essa associato; dal momento che si lavora in dimensione finita l'operatore A può essere identificato con una matrice hermitiana 2×2. L'insieme V delle matrici hermitiane a traccia nulla ha una struttura di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale tridimensionale, infatti una sua base è costituita dalle matrici di Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se ad $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ *associamo una base ortonormale* (u_x, u_y, u_z) *dello spazio vettoriale euclideo tridimensionale* $\mathbb{E}^3$*, otteniamo un isomorfismo* $v : V \to \mathbb{E}^3$*; inoltre se* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *sono tali che* $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ *allora la matrice* $a \cdot \sigma_x + b \cdot \sigma_y + c \cdot \sigma_z$ *è ancora una matrice di spin, ossia ha autovalori* ± 1*, infatti*

$$det\,(a \cdot \sigma_x + b \cdot \sigma_y + c \cdot \sigma_z) = det \begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & -a \end{pmatrix} = -a^2 - (b^2 + c^2) = -1,$$

per cui ad ogni matrice di spin in V *corrisponde, tramite l'isomorfismo* v*, un elemento di* $\mathbb{S}^2$ *in* $\mathbb{E}^3$*. Sia ora* A *una qualunque matrice hermitiana* 2×2 *con autovalori distinti* λ_1 *e* λ_2*, poniamo*

$$\sigma(A) := \left(\frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2)}\right) A - \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) \mathbb{I},$$

allora $\sigma(A)$ *è una matrice di spin i cui autovettori corrispondenti agli autovalori* $+1$ *e* -1 *sono uguali agli autovettori di* A *corrispondenti agli autovalori* λ_1 *e* λ_2*. Introduciamo a questo punto uno spazio degli stati nascosti* $\Omega = \mathbb{S}^2$ *con la* σ*-algebra dei suoi boreliani secondo la topologia indotta da* $\mathbb{E}^3$*. Se* $\mathcal{A}$ *è rappresentata da una matrice con autovalori differenti* λ_1 *e* λ_2 *allora poniamo*

$$f_{\mathcal{A}}(x) := \begin{cases} \lambda_1 & se\ x \in {\mathbb{S}^2}^+_A \\ \lambda_2 & altrimenti, \end{cases}$$

dove ${\mathbb{S}^2}^+_A$ *è l'emisfero superiore di* $\mathbb{S}^2$ *se si considera come polo Nord l'elemento* $v(\sigma(A))$ *di* $\mathbb{S}^2$ *legato a* $\sigma(A)$ *tramite l'isomorfismo precedente (come si vedrà in seguito non è necessario specificare se l'emisfero contenga o meno l'equatore poiché esso risulterà essere un insieme di misura* μ_ψ*-nulla per ogni stato* ψ*). Se* $\mathcal{A}$ *invece è rappresentata da una matrice con due autovalori uguali* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ *allora poniamo*

$$f_{\mathcal{A}} := \lambda\ \forall x \in \mathbb{S}^2.$$

Una qualunque matrice hermitiana A 2×2 *può essere scritta nella forma* $A = \alpha\mathbb{I} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ *dove* $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^3$ *e* $\boldsymbol{\sigma}$ *ha come componenti* σ_x, σ_y *e* σ_z*. Ne segue che, se* $B = \widetilde{\alpha}\mathbb{I} + \widetilde{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$*, allora si ha*

$$[A, B] = [\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \widetilde{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\sigma}] = 2i(a\widetilde{b} - b\widetilde{a})\sigma_z + 2i(b\widetilde{c} - c\widetilde{b})\sigma_x + 2i(c\widetilde{a} - a\widetilde{c})\sigma_y,$$

dunque $[A, B] = 0$ *se e solo se* $a\widetilde{b} - b\widetilde{a} = b\widetilde{c} - c\widetilde{b} = c\widetilde{a} - a\widetilde{c} = 0$*, ossia se e solo se* $\frac{\widetilde{a}}{a} = \frac{\widetilde{b}}{b} = \frac{\widetilde{c}}{c}$*, cioè* $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} \parallel \boldsymbol{\beta}$*. Da* $[A, g(A)] = 0$ *si deduce quindi che deve essere* $g(A) = \alpha A + \beta\mathbb{I}$ *per qualche* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Infine si ha:* $\sigma(\alpha A + \beta\mathbb{I}) = \sigma(A)$*, infatti*

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha A + \beta\mathbb{I}) &= \frac{2}{(\alpha\lambda_1 + \beta) - (\alpha\lambda_2 + \beta)}(\alpha A + \beta\mathbb{I}) - \frac{\alpha\lambda_1 + \alpha\lambda_2 + 2\beta}{(\alpha\lambda_1 + \beta) - (\alpha\lambda_2 + \beta)}\mathbb{I} = \\ &= \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}A - \frac{\alpha\lambda_1 + \alpha\lambda_2 + 2\beta - 2\beta}{\alpha\lambda_1 - \alpha\lambda_2}\mathbb{I} = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}A - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\mathbb{I}, \end{aligned}$$

per cui ${\mathbb{S}^2}^+_A \equiv {\mathbb{S}^2}^+_{g(A)}$*, e dal fatto che gli autovalori di* $g(A)$ *sono* $g(\lambda_1)$ *e* $g(\lambda_2)$ *segue infine che* $g(f_{\mathcal{A}}) \equiv f_{g(\mathcal{A})}$*, ovvero la condizione* (2.3)*. Ad ogni stato* $|\psi\rangle \in \mathbb{S}_{\mathscr{H}_2}$ *associamo poi la matrice di spin* σ_ψ *per la quale* $|\psi\rangle$ *è autovettore relativo all'autovalore* $+1$*; per ogni* $x \in \mathbb{S}^2$ *rimane allora univocamente definito l'angolo* $\theta_\psi(x)$ *sotteso all'origine tra* x *ed il vettore immagine di* σ_ψ *sotto l'isomorfismo* v*; la funzione* $\theta_\psi : \mathbb{S}^2 \to [0, 2\pi]$ *così definita è* *chiaramente misurabile (è addirittura continua). Allo stato $|\psi\rangle$ associamo infine la misura di probabilità μ_ψ definita da*

$$\mu_\psi(V) := \int_V u(\theta_\psi(p))\, dp^1 \quad \forall V \in \mathscr{B}(\mathbb{S}^2), \qquad u(x) := \begin{cases} \frac{1}{\pi} cos\, x & se\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

A questo punto rimane da verificare la condizione (2.1)*, cioè*

$$\mu_\psi(f_{\mathcal{A}}^{-1}(U)) = \langle\psi|E_A(U)|\psi\rangle.$$

Se lo spazio V viene equipaggiato con un prodotto scalare[2] *definito da*

$$(A, B) := \frac{1}{2} tr(AB),$$

si nota subito che la base $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ è ortonormale, infatti

$$\frac{1}{2} tr(\sigma_i \sigma_j) = \delta_{ij},$$

Per calcolare il secondo termine, utilizziamo la notazione bracket e poniamo $\sigma_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| - |\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp|$, $\sigma(E_A(U)) = |a\rangle\langle a| - |a^\perp\rangle\langle a^\perp|$, dove $|a\rangle$ è l'autovettore di $E_A(U)$ relativo all'autovalore $+1$ (assumiamo $E_A(U) \neq \mathbb{I}$, $E_A(U) \neq 0$, altrimenti il calcolo è banale), si ha

$$\begin{aligned} tr(\sigma_\psi \sigma(E_A(U)) &= tr((|\psi\rangle\langle\psi| - |\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp|)(|a\rangle\langle a| - |a^\perp\rangle\langle a^\perp|) = \\ &= |\langle\psi|a\rangle|^2 - |\langle\psi|a^\perp\rangle|^2 - |\langle\psi^\perp|a\rangle|^2 + |\langle\psi^\perp|a^\perp\rangle|^2 = \\ &= 2|\langle\psi|a\rangle|^2 - 1 + 1 - 2|\langle\psi^\perp|a^\perp\rangle|^2 = \\ &= 2(2|\langle\psi|a\rangle|^2 - 1) = 4|\langle\psi|a\rangle|^2 - 2, \end{aligned}$$

per cui si ha

$$\langle\psi|E_A(U)|\psi\rangle = |\langle\psi|a\rangle|^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} tr(\sigma_\psi \sigma(E_A(U)) + 1\right) = \frac{\cos\rho + 1}{2} = \cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right),$$

dove nell'ultimo passaggio è stato posto ρ uguale all'angolo tra $v(\sigma_\psi)$ e $v(\sigma(E_A(U)))$ e si è sfruttato il fatto che l'isomorfismo v preserva i prodotti scalari.
Per calcolare il primo termine, assumiamo che $\lambda_1 \in U$ (se entrambi gli autovalori o nessuno di essi è contenuto in U il calcolo è banale, mentre se solo $\lambda_2 \in U$ la condizione (1.1) *segue dal fatto che $\mu_\psi(f_{\mathcal{A}}^{-1}(U) + \mu_\psi(f_{\mathcal{A}}^{-1}(\mathbb{R} \setminus U) = 1$ e che $E_A(U) + E_A(\mathbb{R} \setminus U) = \mathbb{I}$); di conseguenza si ha $f_{\mathcal{A}}^{-1}(U) = \mathbb{S}^{2}{}^{+}_{A}$. Si ha*[3]

$$\mu_\psi(f_{\mathcal{A}}^{-1}(U)) = \int_{\mathbb{S}^{2}{}^{+}_{A}} u(\theta_\psi(p))\, dp = \int_{\mathbb{S}^{2}{}^{+}_{A} \cap \mathbb{S}^{2}{}^{+}_{\sigma_\psi}} \frac{\cos\theta_\psi(p)}{\pi} dp = cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right);$$

Dunque anche la condizione (2.1) *è rispettata.*

[1] $p(U) := 3\lambda^3(\{tx \,|\, x \in U, t \in [0,1]\}) \quad \forall U \in \mathscr{B}(\mathbb{S}^2)$, dove $\lambda^3(\cdot)$ è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^3$; si verifica facilmente che $p(\cdot)$ è una misura sulla σ-algebra $\mathscr{B}(\mathbb{S}^2)$, e che per insiemi sufficientemente regolari corrisponde all'usuale definizione di superficie.

[2] Si può verificare facilmente che la definizione rispetti le proprietà di prodotto scalare.

[3] Per un calcolo esplicito si veda l'appendice A.

Capitolo 4

Misurazioni a precisione finita ed elusione del teorema

Per dimostrare il teorema di Kochen-Specker è stato in precedenza assunto che l'insieme delle misurazioni possibili fisicamente coincidesse con l'insieme delle misurazioni ammesse dal formalismo della meccanica quantistica. In realtà, siccome non è possibile specificare una misurazione con precisione infinita, ma è possibile, almeno in linea di principio, specificarla con precisione arbitrariamente grande, il sottoinsieme delle misurazioni possibili fisicamente potrebbe essere un sottoinsieme denso (anche di misura nulla) di quello delle misurazioni ammesse dal formalismo. Questo argomento costituisce una possibile scappatoia per ogni *no go theorem* che non continui a valere quando si restringe l'insieme delle misurazioni ad un sottoinsieme denso. Ad esempio nel teorema di Kochen-Specker, le terne ortogonali sarebbero solamente confinate in un piccolo intorno della loro posizione ideale; ciò è sufficiente ad evitare la contraddizione che nasce nella dimostrazione del teorema, poiché esistono sottoinsiemi densi di $\mathbb{S}^2$ (i cui punti vengono identificati con le direzioni nello spazio tridimensionale) che sono colorabili secondo la regola di Kochen-Specker. In seguito vengono illustrati degli esempi costruttivi di tali insiemi (dovuti a Meyer [11] e a Kent [7]).

Definizione 4.1. *Il piano proiettivo razionale* $\mathbb{QP}^2$ *è l'insieme di tutte le triple di interi* $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ *che non hanno altri fattori in comune oltre ad* 1 *(con la convenzione che ogni intero divide* 0*).*

Lemma 4.1. *Il sottoinsieme di* $\mathbb{QP}^2$ *formato dalle triple* (x, y, z) *tali che* $x^2 + y^2 + z^2$ *sia un quadrato può essere identificato con i vettori di* $\mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3$.

Dimostrazione. Sia $(x, y, z) \in \mathbb{QP}^2$ con $x^2 + y^2 + z^2 = n^2$, $n \in \mathbb{N}$; allora si ha

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 + \left(\frac{z}{n}\right)^2 = 1, \qquad \Longrightarrow \left(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}, \frac{z}{n}\right) \in \mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3.$$

Viceversa, siano $\frac{p_i}{q_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ con p_i e q_i primi tra loro e tali che

$$\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{q_2}\right)^2 + \left(\frac{p_3}{q_3}\right)^2 = 1,$$

poniamo $m := mcm(q_1, q_2, q_3)$ e $n_i := \frac{m}{q_i}$, allora

$$(p_1 n_1)^2 + (p_2 n_2)^2 + (p_3 n_3)^2 = m^2,$$

inoltre $(p_1 n_1, p_2 n_2, p_3 n_3) \in \mathbb{QP}^2$, infatti per assurdo sia $d \neq 1$ tale che $d \,|\, p_i n_i \, \forall i$, allora $d \,|\, m$, dunque d divide almeno uno dei q_i, ad esempio q_1 (senza perdere di generalità), quindi $d \nmid p_1$ poiché $\frac{p_1}{q_1}$ è ai minimi termini, infine da $d \,|\, p_1 n_1$ si ottiene $d \,|\, n_1$. Se d divide anche un altro dei q_i con lo stesso ragionamento si ottiene $d \,|\, n_i$, se invece d non divide q_j allora chiaramente $d \,|\, n_j = \frac{m}{q_j}$ poiché d è contenuto in m ma non in q_j. Abbiamo dimostrato che tutti gli n_i sono divisibili per d ossia che $\frac{m}{d \cdot q_i}$ è ancora un intero $\forall i$, dunque $\frac{m}{d}$ è un comune multiplo dei q_i contraddicendo la minimalità di m. □

Osservazione 4.1. *Come si può notare nella dimostrazione precedente gli elementi di $\mathbb{QP}^2$ e di $\mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3$ che vengono identificati sono triple che differiscono per un solo fattore moltiplicativo; se definiamo una funzione $\phi : \mathbb{QP}^2 \times \mathbb{QP}^2 \to \mathbb{R}$, $\phi((x, y, z), (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})) := x\widetilde{x} + y\widetilde{y} + z\widetilde{z}$, allora essa è nulla se e solo se il prodotto scalare (di $\mathbb{E}^3$) degli elementi identificati con essi è nullo.*

Seguendo l'analisi di Meyer in [11] si dimostra che l'insieme $\mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3$ è colorabile secondo le regole di Kochen-Specker.

Teorema 4.1. *I vettori di $\mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3$ possono essere colorati secondo la regola di Kochen-Specker.*

Dimostrazione. Consideriamo gli elementi di $\mathbb{QP}^2$ tali che $x^2 + y^2 + z^2$ sia un quadrato. Almeno uno tra x, y e z deve essere dispari per ipotesi, inoltre $(2m)^2 \equiv 0 \mod 4$ e $(2m + 1)^2 \equiv 1 \mod 4$, dunque se $x^2 + y^2 + z^2 = n^2$ allora esattamente uno tra x, y, e z deve essere dispari. Per ogni terna di vettori ortogonali $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ di $\mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3$ siano (x_i, y_i, z_i) i rispettivi elementi di $\mathbb{QP}^2$, dall'ortogonalità segue che $x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j = 0$ se $i \neq j$, cioè (x_i, y_i, z_i) e (x_j, y_j, z_j) devono differire in quale sia la loro componente dispari; dunque in ogni terna ortogonale un solo vettore ha una componente z dispari, se questa viene colorata di verde e le altre due di rosso si ottiene una colorazione che rispetta la regola di Kochen-Specker. □

i vettori di $\mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3$ sono densi in $\mathbb{S}^2$ poiché sono mappati (ad eccezione del polo Nord) tramite la proiezione stereografica biettivamente e in maniera continua in $\mathbb{Q}^2$ che è denso nel piano $\mathbb{R}^2$.

Lemma 4.2. *I vettori colorati in verde tramite la colorazione precedente sono densi in $\mathbb{S}^2$.*

Dimostrazione. Un vettore colorato di verde è nella forma $\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right)$ con x, y pari e R, z dispari. Sia α tale che $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ e $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Una rotazione di angolo α intorno all'asse $\hat{x}$ manda il vettore $\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right)$ in $\left(\frac{x}{R}, \frac{4z+3y}{5R}, \frac{3z-4y}{5R}\right)$; per quanto detto prima x e $4z + 3y$ sono pari e R e $5R$ sono dispari, per cui nella rappresentazione in $\mathbb{QP}^2$ le prime due componenti sono necessariamente pari e la terza è dispari, dunque il vettore che si ottiene dalla rotazione è ancora verde. Analogamente si trova che il vettore ottenuto partendo da un vettore verde ed effettuando una rotazione di angolo α intorno all'asse $\hat{y}$ è ancora verde. Notando che α non è un multiplo razionale di π si deduce che i vettori ottenuti iterando le rotazioni di questo angolo a partire da un qualsiasi vettore sono densi nella circonferenza ottenuta intersecando la sfera $\mathbb{S}^2$ con il piano di rotazione. La tesi segue infine dal fatto che combinando rotazioni intorno all'asse $\hat{x}$ e intorno all'asse $\hat{y}$ e partendo da $(1, 0, 0)$ è possibile raggiungere qualunque punto di $\mathbb{S}^2$. □

Partendo dalla permutazione $(\frac{y}{R}, \frac{z}{R}, \frac{x}{R})$ si dimostra allo stesso modo che anche i vettori colorati in rosso sono densi in $\mathbb{S}^2$.

Teorema 4.2. *Le terne ortogonali dei vettori di* $\mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3$ *sono dense nello spazio delle terne ortogonali.*

Dimostrazione. Sia $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ una terna di vettori ortogonali. Per il lemma precedente $\forall \epsilon > 0$ esiste un vettore razionale $\mathbf{a}$ in un intorno di raggio $\frac{1}{2}\epsilon$ di $\mathbf{u}$ che è immagine di $(0, 0, 1)$ tramite una rotazione di $SO(3, \mathbb{Q})$. Questa rotazione manda i vettori razionali $(x, y, 0)$ in una circonferenza massima passante per gli intorni di raggio $\frac{1}{2}\epsilon$ di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Siccome i vettori razionali sono densi nell'equatore, le loro immagini sotto la rotazione sono dense in tale circonferenza massima, per cui è possibile trovare un vettore razionale $\mathbf{b}$ in un intorno di raggio $\frac{1}{2}\epsilon$ di $\mathbf{v}$ e tale che $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. Infine $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ è razionale ed è in un intorno di raggio ϵ di $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. □

Per quanto appena dimostrato, supponiamo di avere un apparato sperimentale in grado di effettuare una misura di colore ad una terna ortogonale; a causa della precisione finita dello strumento sarà impossibile distinguere la terna che si intende misurare dalle infinite terne razionali che cadono in un intorno di essa. Un tale esperimento non potrebbe essere dunque in grado di confutare l'esistenza di una teoria a variabili nascoste non contestuale e definita sui razionali. È importante sottolineare che il ruolo giocato dai numeri razionali in questa costruzione non ha alcuna interpretazione fisica, esistono infatti altri esempi di insiemi densi in $\mathbb{S}^2$ che possono essere colorati secondo la regola di Kochen-Specker.

Più in generale, dato uno spazio di Hilbert $\mathscr{H}$ generico, ci si può chiedere se esista una funzione $h : \mathscr{Q}^{id} \to \mathbb{Z}_2$ tale che, per un sottoinsieme denso delle decomposizioni proiettive dell'identità, ossia degli insiemi di proiettori $\{P_i\}$ per i quali

$$\sum_i P_i = \mathbb{I},$$

valga:

$$\sum_i h(P_i) = 1. \tag{4.1}$$

In tal caso, visto che le misure sono a precisione finita, non sarebbe possibile confutare l'esistenza di una teoria a variabili nascoste utilizzando argomenti simili a quello del teorema di Kochen-Specker. Nel caso finito-dimensionale, ossia se $\mathscr{H} \cong \mathbb{C}^n$, la risposta è positiva (la dimostrazione si basa su quella di Kent [7]).

Teorema 4.3. *Se* $\mathscr{H} \cong \mathbb{C}^n$ *allora esistono un sottoinsieme denso* $\mathfrak{I}$ *dell'insieme di tutte le possibili decomposizioni proiettive dell'identità ed una funzione di verità che rispetti la condizione* (4.1) *e che sia definita per ogni proiettore che appartenga ad almeno una decomposizione di* $\mathfrak{I}$.

Dimostrazione. Denotiamo con $P_{r_1,...,r_{2n}}$ il proiettore monodimensionale di $\mathbb{C}^n$ sul sottospazio generato dal vettore normalizzato $(r_1+ir_2,...,r_{2n-1}+ir_{2n})$, dove $r_1,...,r_{2n} \in \mathbb{R}$ non sono tutti nulli. Poniamo $P_{r_1,...,r_{2n}}$ *vera* se gli r_i sono tutti razionali, e se scrivendo $r_i = \frac{p_i}{q_i}$ con p_i e q_i primi tra loro risulta che q_1 è divisibile per 3 ma nessuno degli altri q_i lo è. Chiamiamo una n-upla di proiettori monodimensionali ortogonali $\{Q_1,...,Q_n\}$ *adeguata* se almeno una delle Q_i è vera. Infine poniamo P *falsa* se P appartiene ad una n-upla adeguata ma non è vera. Ogni n-upla adeguata di proiettori contiene esattamente una proiezione vera, infatti se Q e P sono entrambe proiezioni monodimensionali vere i corrispondenti autovettori hanno un prodotto scalare della forma $\frac{a}{9}+\frac{p}{q}+i\frac{r}{s}$ dove 3 non è un fattore di q, per cui la parte reale non può essere nulla e di conseguenza Q e P non possono essere ortogonali. Le proiezioni vere sono dense nello spazio di tutte le proiezioni monodimensionali, infatti data una $2n$-upla $(r_1,...,r_{2n})$ è possibile trovare una $2n$-upla arbitrariamente vicina $(r'_1,...,r'_{2n})$ con $r'_i = \frac{p'_i}{q'_i}$ razionali; se poi q_1 non è divisibile per 3 è possibile trovare un razionale $r''_1 = \frac{p''_1}{q''_1}$ arbitrariamente vicino a r'_1 e divisibile per 3 prendendo $p''_1 = 3Np'_1 + 1$ e $q''_1 = 3Nq'_1$ per N sufficientemente grande, similmente se qualche q_i per $i > 1$ è divisibile per 3, è possibile trovare dei razionali $r''_i = \frac{p''_i}{q''_i}$ arbitrariamente vicini ad r'_i e non divisbili per 3 prendendo $p''_i = Np'_i$ e $q''_i = Nq'_i + 1$ per N sufficientemente grande; a questo punto però non è detto che $(r''_1+ir''_2,...,r''_{2n-1}+ir''_{2n})$ sia normalizzato, supponendo $|r_i-r''_i| < \frac{\epsilon}{2n^2}$ si ha però

$$C := \sum_i |r''_i|^2 \leq \sum_i |r_i|^2 + \sum_i |r''_i - r_i|^2 < 1 + \frac{\epsilon}{2n},$$
$$C = \sum_i |r''_i|^2 \geq \sum_i |r_i|^2 - \sum_i |r''_i - r_i|^2 > 1 - \frac{\epsilon}{2n},$$

da cui segue $|\frac{1}{C}r''_i - r_i| \leq |\frac{1}{C}r''_i - r''_i| + |r''_i - r_i| < \frac{\epsilon}{n} + \frac{\epsilon}{2n^2} = \frac{\epsilon}{n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)$, per cui vale

$$|| \frac{1}{C}(r''_1 + ir''_2,...,r''_{2n-1} + ir''_{2n}) - (r_1 + ir_2,...,r_{2n-1} + ir_{2n})|| \leq \epsilon\left(1+\frac{1}{2n}\right),$$

dunque i due proiettori $P_{r_1,...,r_{2n}}$ e $P_{\frac{1}{C}r''_1,...,\frac{1}{C}r''_{2n}}$ sono arbitrariamente vicini. L'insieme delle n-uple adeguate è denso nell'insieme delle n-uple di proiezioni ortogonali monodimensionali, infatti data una n-upla $\{P_1,...,P_n\}$ possiamo trovare una proiezione vera Q arbitrariamente vicina a P_1, sia ora $U \in SU(n)$ una rotazione che manda P_1 in Q e tale che $||U - \mathbb{I}||_{op}$ sia minima (una tale U, anche se non unica, esiste sempre grazie alla compatezza di $SU(n)$), allora $||U-\mathbb{I}||_{op} \to 0$ per $Q \to P_1$, per cui $\{UP_1,...,UP_n\}$ è una n-upla adeguata arbitrariamente vicina all'originale. Infine anche le proiezioni false sono dense nello spazio delle proiezioni monodimensionali, infatti data una proiezione P si prenda una n-upla di proiezioni ortogonali a cui appartiene e sia Q un'altra proiezione della stessa n-upla, si trovi una n-upla adeguata arbitrariamente vicina alla prima dove la proiezione che approssima Q è vera, allora la proiezione che approssima P è falsa. □

Anche se con ogni esperimento fisico è possibile misurare solo un numero finito di proiettori, e dunque lo spazio generato da tali proiettori sia necessariamente finito-dimensionale, in linea teorica è possibile immaginare un insieme numerabile di esperimenti che misurano il valore di un numero finito di proiettori che generano spazi diversi e che si intersecano, la cui somma diretta è $\mathscr{H}$. Una teoria non contestuale dovrebbe poi assegnare ad ogni proiettore un valore indipendentemente dall'esperimento che è stato scelto, dunque può essere utile generalizzare il risultato precedente al caso infinito-dimensionale.

Teorema 4.4. *Generalizzazione del teorema* **4.3** *al caso* $\mathscr{H} \cong \ell^2(\mathbb{C})$.

Dimostrazione. Denotiamo con $P_{\{r_i\}}$ il proiettore sullo spazio generato dalla sequenza normalizzata $\{r_1 + ir_2, r_3 + ir_4, ...\}$, dove gli $r_i \in \mathbb{R}$ non sono tutti nulli. Poniamo $P_{\{r_i\}}$ *vera* se $\{r_i\}$ contiene al più un numero finito di elementi non nulli, tutti razionali, e tali che, posto $r_i = \frac{p_i}{q_i}$ con p_i e q_i primi tra loro, q_1 sia divisibile per 3 e gli altri q_i no. Chiamiamo una sequenza di proiettori monodimensionali ortogonali $\{Q_{r_i^1}, Q_{r_i^2}, ...\}$ *adeguata* se contiene almeno una $Q_{r_i^k}$ vera. Infine poniamo $P_{\{r_i\}}$ falsa se $P_{\{r_i\}}$ appartiene ad una sequenza adeguata ma non è vera. Ogni sequenza adeguata contiene esattamente una proposizione vera, il ragionamento è analogo al caso finito-dimensionale poiché ogni proiezione vera ha al più un numero finito di elementi non nulli. Le proiezioni vere sono dense nello spazio di tutte le proiezioni monodimensionali, infatti data una sequenza normalizzata $\{r_{2i-1} + ir_{2i}\}$ esiste n tale che $\sum_{i>n} |r_{2i-1} + ir_{2i}|^2 < \frac{\epsilon}{6}$, inoltre, per quanto dimostrato nel teorema precedente, esiste una sequenza di norma $C = \sum_{i\leq n} |r_{2i-1} + ir_{2i}|^2$ di razionali complessi $\{\widetilde{r}_{2i-1} + i\widetilde{r}_{2i}\}$, con $\widetilde{r}_{2i-1} = \widetilde{r}_{2i} = 0$ se $i > n$, tali che scritti $\widetilde{r}_i = \frac{p_i}{q_i}$ ai minimi termini, solo q_1 sia divisibile per 3 e tali che $\sum_{i\leq n} |(\widetilde{r}_{2i-1} + i\widetilde{r}_{2i}) - (r_{2i-1} + ir_{2i})|^2 < \frac{\epsilon}{2}$. Si ha inoltre $1 - \frac{\epsilon}{6} \leq C \leq 1$, dunque $1 \leq \frac{1}{C} \leq 1 + \frac{\epsilon}{3}$, per cui

$$
\begin{aligned}
&|| \frac{1}{C}\{\widetilde{r}_1 + i\widetilde{r}_2, ..., \widetilde{r}_{2n-1} + i\widetilde{r}_{2n}, 0, ...\} - \{r_1 + ir_2, ..., r_{2n-1} + ir_{2n}, r_{2n+1} + ir_{2n+2}, ...\}|| \leq \\
&\leq || \frac{1}{C}\{\widetilde{r}_1 + i\widetilde{r}_2, ..., \widetilde{r}_{2n-1} + i\widetilde{r}_{2n}, 0, ...\} - \{\widetilde{r}_1 + i\widetilde{r}_2, ..., \widetilde{r}_{2n-1} + i\widetilde{r}_{2n}, 0, ...\}|| + \\
&+ ||\{\widetilde{r}_1 + i\widetilde{r}_2, ..., \widetilde{r}_{2n-1} + i\widetilde{r}_{2n}, 0, ...\} - \{r_1 + ir_2, ..., , r_{2n-1} + ir_{2n}, 0, ...\}|| + \\
&+ ||\{r_1 + ir_2, ..., r_{2n-1} + ir_{2n}, 0, ...\} - \{r_1 + ir_2, ..., r_{2n-1} + ir_{2n}, r_{2n+1} + ir_{2n+2}, ...\}|| \leq \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{6} = \epsilon,
\end{aligned}
$$

per cui le proiezioni $P_{\{r_i\}}$ e $P_{\{\frac{1}{C}\widetilde{r}_i\}}$ sono arbitrariamente vicine. L'insieme delle sequenze adeguate è denso nell'insieme delle sequenze di proiettori monodimensionali ortogonali, infatti data $\{P_{r_i^1}, P_{r_i^2}, ...\}$ sia $Q_{r_i^1}$ una proiezione vera arbitrariamente vicina a $P_{\{r_i^1\}}$ e U un operatore speciale unitario che manda la proiezione $P_{r_i^1}$ in $Q_{r_i^1}$, che sia l'operatore identico sullo spazio ortogonale al piano generato da $P_{r_i^1}$ e $Q_{r_i^1}$ e che abbia $||U - \mathbb{I}||_{op}$ minima (una tale U, anche se non unica, esiste sempre, poiché il gruppo di Lie degli operatori speciali unitari di $\ell^2(\mathbb{C})$ che non agiscono come l'identità solo su un sottospazio bidimensionale è compatto essendo isomorfo a $SU(2)$), allora $||U - \mathbb{I}||_{op} \to 0$ per $Q_{r_i^1} \to P_{r_i^1}$, per cui $\{UP_{r_i^1}, UP_{r_i^2}, ...\}$ è una sequenza adeguata arbitrariamente vicina[1] all'originale. Infine la densità delle proiezioni false si dimostra come nel caso finito-dimensionale. □

Dagli esempi precedenti è possibile notare come i coloramenti effettuati siano tutti fortemente discontinui (infatti sia le proiezioni *vere* che quelle *false* sono dense nello spazio di tutte le proiezioni). Si può dimostrare che in genere una qualunque colorazione che rispetti la regola di Kochen-Specker e che sia densa nello spazio delle proiezioni debba condividere

[1] In realtà sarebbe necessario specificare esattamente cosa si intende per "arbitrariamente vicina". Dal punto di vista fisico ciò che importa è che ogni proiettore della sequenza adeguata sia arbitrariamente vicino (nel senso della norma operatoriale) al corrispettivo della sequenza iniziale.

questa proprietà [1]. Ne segue che il ruolo che ricoprirebbe la misurazione in un'eventuale teoria a variabili nascoste debba essere essenzialmente diverso da quello nel caso classico: infatti non sarebbe più possibile tramite una successione di misurazioni a precisione arbitrariamente grande purché finita scoprire il vero colore di una proiezione, che dunque, non sarebbe più fisicamente "osservabile".

Appendice A

Calcolo esplicito della misura di probabilità per una teoria a variabili nascoste rappresentata da $\mathscr{H}_2$

$$\mu_\psi(f_{\mathcal{A}}^{-1}(U)) = \int_{\mathbb{S}^2{}_{\mathcal{A}}^{+}} u(\theta_\psi(p))\, dp = \int_{\mathbb{S}^2{}_{\mathcal{A}}^{+} \cap \mathbb{S}^2{}_{\sigma_\psi}^{+}} \frac{\cos\theta_\psi(p)}{\pi} dp.$$

passando a coordinate polari con polo $v(\sigma_\psi)$ e angolo azimutale di $v(g(E_A(U)))$ posto uguale a 0, si distinguono due casi:
(i) se $\rho \geq \pi/2$

$$\mu_\psi(f_{\mathcal{A}}^{-1}(U)) =: g_1(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{\rho-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\varphi_\theta}^{\varphi_\theta} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\phi,$$

dove $\varphi_\theta = \arccos(-\cot\rho\cot\theta)$ e $-\varphi_\theta$ sono i due punti di intersezione del circolo massimo giacente sul piano ortogonale a $v(\sigma(E_A(U)))$ con il parallelo di angolo zenitale pari a θ. Si ha

$$g_1(\rho) = \frac{2}{\pi} \int_{\rho-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \arccos(-\cot\rho\cot\theta)\, d\theta.$$

Sia $x = \rho - \frac{\pi}{2}$ e sia $\widetilde{g_1}(x) := g_1(x + \frac{\pi}{2})$, allora

$$\widetilde{g_1}(x) = -\frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{x} \cos\theta \sin\theta \arccos(\cot\theta \tan x)\, d\theta,$$

da cui ricaviamo che $\widetilde{g_1}(\frac{\pi}{2}) = 0$. Differenziando rispetto a x si ha

$$\widetilde{g_1}'(x) = -\frac{2}{\pi} \cos x \sin x \arccos(\cot x \tan x) + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{x} \frac{\cos\theta \sin\theta \cot\theta}{\cos^2 x \sqrt{1 - \cot^2\theta \tan^2 x}}\, d\theta,$$

dal momento che $\cot x \tan x = 1$ e che $\arccos 1 = 0$ allora

$$\pi \widetilde{g_1}'(x) \cos^2 x = 2 \int_{\pi/2}^{x} \frac{\cos^2\theta}{\sqrt{1 - \cot^2\theta \tan^2 x}}\, d\theta,$$

ponendo $s = \cos\theta$, si ha $d\theta = \frac{-ds}{\sqrt{1-s^2}}$ e $\cot\theta = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$ per cui

$$\pi\widetilde{g_1}'(x)\cos^2 x = -2\int_0^{\cos x} \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-\frac{s^2}{1-s^2}\tan^2 x}}\,ds = -2\cos x\int_0^{\cos x}\frac{s^2}{\sqrt{\cos^2 x - s^2}}\,ds,$$

da cui

$$\pi\widetilde{g_1}(x)'\cos x = -\left[-s\sqrt{\cos^2 x - s^2} + \cos^2 x \arcsin\left[\frac{s}{\cos x}\right]\right]_0^{\cos x} = -\frac{\pi}{2}\cos^2 x,$$

cioè

$$\widetilde{g_1}(x) = -\frac{\sin x}{2} + C;$$

imponendo $\widetilde{g_1}(\frac{\pi}{2}) = 0$ si trova $C = \frac{1}{2}$ per cui

$$g_1(\rho) = \frac{1-\sin(\rho - \frac{\pi}{2})}{2} = \frac{1+\cos\rho}{2} = \cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right).$$

(ii) se $\rho < \pi/2$

$$\mu_\psi(f_A^{-1}(U)) =: g_2(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2-\rho}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2-\rho}^{\pi/2}\int_{-\varphi_\theta}^{\varphi_\theta}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

con $\varphi_\theta = \arccos(-\cot\rho\cot\theta)$ definito come prima. Si ha

$$g_2(\rho) = \left[\frac{-\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2-\rho} - \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2-\rho}^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\arccos(-\cot\rho\cot\theta)\,d\theta.$$

Sia $x = \frac{\pi}{2} - \rho$ e sia $\widetilde{g_2}(x) := g_2(\frac{\pi}{2} - x)$, allora

$$\widetilde{g_2}(x) = -\frac{\cos 2x - 1}{2} - \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{x}\cos\theta\sin\theta\arccos(-\cot\theta\tan x)\,d\theta,$$

da cui ricaviamo che $\widetilde{g_2}(\frac{\pi}{2}) = 1$. Differenziando rispetto a x si ha

$$\widetilde{g_2}'(x) = \sin 2x - \frac{2}{\pi}\cos x\sin x\arccos(-\cot x\tan x) - \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{x}\frac{\cos\theta\sin\theta\cot\theta}{\cos^2 x\sqrt{1-\cot^2\theta\tan^2 x}}\,d\theta,$$

dal momento che $\cot x\tan x = 1$ e che $\arccos(-1) = \pi$ allora

$$\widetilde{g_2}'(x) = -\widetilde{g_1}'(x) = \frac{\cos x}{2},$$

cioè

$$\widetilde{g_2}(x) = \frac{\sin x}{2} + C;$$

imponendo $\widetilde{g}(\frac{\pi}{2}) = 1$ si trova $C = \frac{1}{2}$ per cui

$$g_2(\rho) = \frac{1+\sin(\frac{\pi}{2} - \rho)}{2} = \frac{1+\cos\rho}{2} = \cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right).$$

Bibliografia

[1] D. M. Appleby, *The Bell-Kochen-Specker theorem*, Stud. Hist. Philos. Mod. Phys. 36, 1 (2005).

[2] J. S. Bell, *On the problem of hidden variables in quantum mechanics*, Rev. Mod. Phys. 38, 447 (1996).

[3] A. M. Gleason, *Measures on the closed subspaces of a Hilbert space*, J. Math. Mech. 6, 885 (1957).

[4] C. D. Godsil and J. Zaks, *Colouring the sphere*, University of Waterloo research report CORR 88-12, 1988.

[5] P. R. Halmos, *Lectures on boolean algebras*, Van Nostrand Studies 1963.

[6] M. Jammer, *The philosophy of quantum mechanics: the interpretation of quantum mechanics in historical perspective*, John Wiley & Sons Inc (1974).

[7] A. Kent, *Noncontextual hidden variables and physical measurements*, Phys. Rev. Lett. 83, 3755 (1999).

[8] S. Kochen and E. P. Specker, *The problem of hidden variables in quantum mechanics*, J. Math. Mech. 17, 59 (1967).

[9] A. Maggi, *Metodi matematici delle teorie quantistiche, Vol. 2*, Tortuga Publisher, 2002.

[10] N. D. Mermin, *Hidden variables and the two theorems of John Bell*, Rev. Mod. Phys 65, 803 (1993).

[11] D. A. Meyer, *Finite precision measurement nullifies the Kochen-Specker theorem*, Phys. Rev. Lett. 83, 3751 (1999).

[12] J. von Neumann, *Matematical foundations of quantum mechanics*, Princeton University Press 1955.

[13] A. Peres, *Two simple proofs of the Kochen-Specker theorem*, J. Phys. A 24, L175 (1991).

[14] M. Redhead, *Incompleteness, nonlocality, and realism: a prolegomenon to the philosophy of quantum mechanics*, Oxford University Press (1987).

[15] N. Straumann, *A simple proof of the Kochen-Specker theorem on the problem of hidden variables*, Ann. Phys. (Berlin) 19, 121 (2010).

[16] F. Strocchi, *An introduction to the mathematical structure of quantum mechanics*, World Scientific Publishing 2008.

[17] F. Strocchi, *The physical principles of quantum mechanics. A critical review*, Eur. Phys. J. Plus 127, 12 (2012).

[18] G. C. Wick, A. S. Wightman and E. P. Wigner, *The intrinsic parity of elementary particles*, Phys. Rev. 88, 101 (1952).