

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

La varietà centrale ed applicazioni

Relatore

Prof. Francesco Fassò

Correlatore

Dr. Sara Galasso

Laureando

William Guidetti

Anno Accademico 2018/2019

Sommario

In questa tesi si analizzerà il concetto di varietà centrale per equazioni del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, y) \\ \dot{y} = By + g(x, y) \end{cases}$$

dove A e B sono due matrici tali che A abbia tutti gli autovalori con parte reale nulla e B abbia tutti gli autovalori con parte reale negativa e $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ e $f'(0, 0) = g'(0, 0) = 0$, seguendo i lavori [2] e [5]. Questa è una particolare varietà invariante che può essere pensata come la generalizzazione del sottospazio centrale del caso lineare. Dimosteremo come almeno una varietà centrale esista sempre per l'equazione considerata e come, almeno in prossimità dell'origine, le soluzioni che non stanno sulla varietà centrale tendano a quelle che invece vi giacciono. Nell'ultima parte applicheremo queste nozioni per risolvere dei semplici problemi di fisica matematica nei quali è presente dissipazione: con l'ausilio delle tecniche dei capitoli precedenti, mostreremo che sulla varietà centrale considerata la dissipazione non agisce e che dallo studio della dinamica su di essa, è possibile ricavare informazioni sul sistema.

Indice

1	Introduzione alle varietà centrali	4
1.1	Prima formulazione del problema	4
1.2	Il caso lineare: il sottospazio centrale	4
1.3	Caso non lineare: la varietà centrale	5
2	Dimostrazioni dei teoremi e proprietà	8
2.1	Richiami matematici	8
2.2	Dimostrazione del teorema 1	9
2.3	Dimostrazione del teorema 2	12
2.4	Sulla dimostrazione del teorema 3	15
2.5	Non unicità della varietà centrale	15
3	Applicazioni	17
3.1	Applicazione 1: sistema di molle	17
3.2	Applicazione 2: sbarrette rotanti	19

1 Introduzione alle varietà centrali

1.1 Prima formulazione del problema

Innanzitutto richiamiamo la definizione di insieme invariante per un'equazione differenziale autonoma del tipo

$$\dot{z} = X(z) \quad , \quad z \in \mathbb{R}^d \quad (1.1.1)$$

Definizione 1. Un'insieme $I \subset \mathbb{R}^n$ è detto "localmente invariante" per l'equazione (1.1.1) se, per ogni punto $x_0 \in I$, la soluzione $x(t)$ di (1.1.1) con $x(0)=x_0$ appartiene ad I per ogni $t \in A$, dove A è un sottoinsieme aperto contenente lo 0 dell'insieme massimale di esistenza di $x(t)$. Se inoltre I è una sottovarietà di \mathbb{R}^d , allora verrà chiamato varietà invariante.

Se $X(0) = 0$, l'equazione (1.1.2) può essere scritta nella seguente forma

$$\dot{z} = X'(0)z + N(z) \quad (1.1.2)$$

dove $N(0) = 0$, $N'(0) = 0$ e $X'(0)$, $N'(0)$ sono le matrici Jacobiane calcolate in $z = 0$ dei campi vettoriali $X(z)$ e $N(z)$. In (1.1.2) sono state separate e messe in evidenza la parte lineare (linearizzazione attorno all'origine) e la parte non lineare dell'equazione (1.1.2). Scopo della prossima sezione sarà l'analisi della parte lineare di (1.1.2), ossia dell'equazione

$$\dot{z} = X'(0)z \quad (1.1.3)$$

sotto certe ipotesi per gli autovalori di $X'(0)$. Scopo della sezione 1.3 sarà invece quello di generalizzare i risultati dal caso lineare al caso non lineare.

1.2 Il caso lineare: il sottospazio centrale

Si supponga che $d = n+m$ e che $X'(0)$ abbia n autovalori con parte reale nulla e m autovalori con parte reale negativa. In più si supponga che sia possibile trovare un cambiamento di base che permette di scrivere (1.1.3) nella forma

$$\dot{x} = Ax \quad , \quad \dot{y} = By \quad (1.2.1)$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$, ed A e B sono due matrici tali che A abbia tutti gli autovalori con parte reale nulla e B abbia tutti gli autovalori con parte reale negativa. Questo accade per esempio se la matrice $X'(0)$ è diagonalizzabile. In generale lo spazio delle fasi di un'equazione lineare omogenea si decompone nella somma di tre sottospazi invarianti (si veda per esempio [3]): il sottospazio stabile (E^S), somma degli autospazi relativi agli autovalori negativi e dei piani bidimensionali corrispondenti agli autovalori con parte reale negativa, il sottospazio instabile (E^I), somma degli autospazi relativi agli autovalori positivi e dei piani bidimensionali corrispondenti agli autovalori con parte reale positiva, e il sottospazio centrale (E^C), somma degli autospazi relativi agli autovalori nulli e dei piani bidimensionali corrispondenti agli autovalori immaginari. Dato che lo spettro di $X'(0)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \leq 0\}$, si ha che $\mathbb{R}^d = E^C \oplus E^S$, ossia (1.2.1) non possiede il sottospazio instabile. Per (1.2.1) si ha che E^S coincide con il sottospazio $x = 0$, mentre E^C è il sottospazio $y = 0$. Le soluzioni che stanno in E^S tendono all'origine per $t \rightarrow +\infty$. Nulla si può dire invece a priori sul comportamento asintotico delle soluzioni che giacciono su E^C (se $X'(0)$ fosse diagonalizzabile, allora sarebbero limitate e nessuna

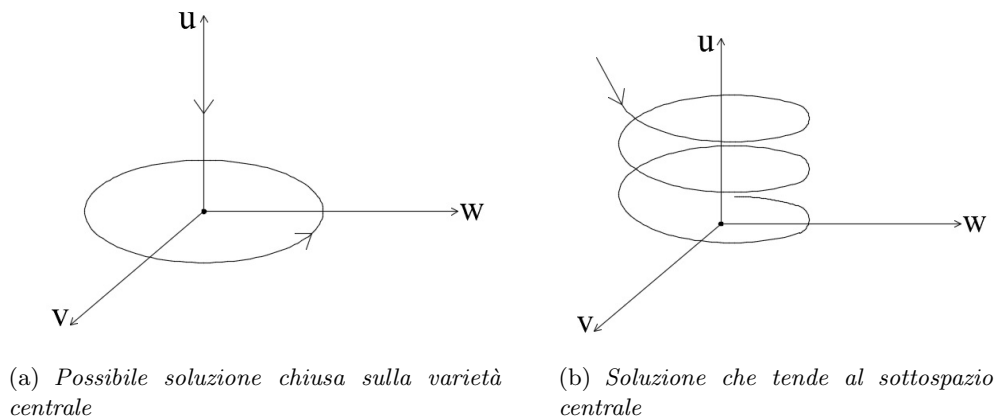


Figura 1: esempio nel caso diagonalizzabile

di esse tenderebbe all'origine per $t \rightarrow \pm\infty$). La linearità dell'equazione considerata e il fatto che \mathbb{R}^d sia ottenibile come somma dei sottospazi stabile e centrale fanno sì che ogni soluzione $(x(t), y(t))$ di (1.2.1) sia la somma di soluzioni delle equazioni ristrette a E^S e E^C . Da ciò si evince che $(x(t), y(t))$ tende alla sua proiezione $x(t)$ su E^C , soluzione a sua volta della prima equazione di (1.2.1), per $t \rightarrow +\infty$. Quindi l'equazione $\dot{x} = Ax$, restrizione di (1.2.1) al sottospazio centrale, determina il comportamento asintotico di (1.2.1).

In figura 1 è riportato un esempio nel caso tridimensionale in cui matrice del sistema è diagonalizzabile con autovalori $\pm i$ e -1 . Il piano (v, w) è il sottospazio centrale: su di esso le orbite sono chiuse e il punto $(v, w) = (0, 0)$ è stabile (come si vede in (a)). Le soluzioni con valori iniziali non appartenenti al piano (v, w) tendono al sottospazio centrale come si vede in (b).

1.3 Caso non lineare: la varietà centrale

Sotto il cambiamento di base adoperato nel caso lineare, (1.1.2) diventa

$$\dot{x} = Ax + f(x, y) \quad , \quad \dot{y} = By + g(x, y) \quad (1.3.1)$$

dove f, g sono funzioni di classe C^2 tali che $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ e $f'(0, 0) = g'(0, 0) = 0$. Come accennato nella sezione 1.1, in questa sezione si vorrebbe ottenere una varietà invariante per (1.3.1) che abbia lo stesso ruolo del sottospazio centrale per l'equazione linearizzata. In tal senso diamo la definizione di varietà centrale.

Definizione 2. Sia Σ^C una sottovarietà di dimensione n invariante per (1.3.1) e tangente a E^C nell'origine. Allora quest'ultima è detta *varietà centrale locale* per (1.3.1). Inoltre Σ^C è parametrizzabile con una funzione $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, dove U è un aperto di \mathbb{R}^n contenente l'origine.

La varietà locale centrale in generale non è unica. D'ora in poi quando si parlerà di varietà centrale, si sottointenderà che sia locale. Inoltre identificheremo Σ^C con la sua parametrizzazione $y = h(x)$. Nel prosieguo di questa sezione verranno presentati alcuni teoremi ed alcune considerazioni che mostreranno come (almeno) una varietà centrale per

(1.3.1) esista sempre ed abbia effettivamente lo stesso ruolo del sottospazio centrale per l'equazione linearizzata.

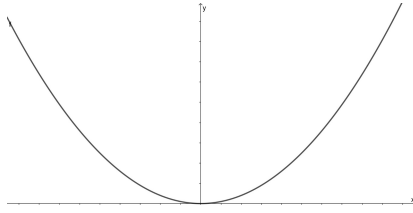


Figura 2: esempio di possibile varietà centrale in \mathbb{R}^2

Teorema 1. *Sotto le ipotesi fatte, esiste sempre una varietà centrale $y = h(x)$ per (1.3.1), con $|x| < \delta$ e h di Lipschitz.*

Il teorema 1 è un teorema di esistenza che garantisce la possibilità di trovare sempre (almeno localmente) una varietà centrale per (1.3.1).

Il flusso sulla varietà centrale è governato dalla seguente equazione

$$\dot{u} = Au + f(u, h(u)) \quad (1.3.2)$$

Il prossimo teorema chiarirà l'importanza della varietà centrale nella determinazione di alcune proprietà dinamiche del sistema (1.3.1) e del suo comportamento asintotico.

Teorema 2. *a) Si supponga che $x=0$ sia un equilibrio stabile (asintoticamente stabile o instabile) dell'equazione (1.3.2). Allora $(x, y) = (0, 0)$ è un equilibrio stabile (asintoticamente stabile o instabile) per l'equazione (1.3.1).*

b) Si supponga che l'origine sia un equilibrio stabile per (1.3.1) e che $y = h(x)$ sia una varietà centrale per (1.3.1). Sia $(x(t), y(t))$ la soluzione di (1.3.1) con $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ in un intorno dell'origine. Allora esistono $\gamma > 0$ che dipende solo dagli autovalori di B e una soluzione $u(t)$ di (1.3.2) tali che

$$x(t) = u(t) + O(e^{-\gamma t}) \quad , \quad y(t) = h(u(t)) + O(e^{-\gamma t})$$

Quindi il teorema 2 ci garantisce che, almeno in prossimità dell'origine, le soluzioni di (1.3.1) tendono a quelle di (1.3.2).

Il terzo teorema invece ci fornisce un modo efficace per approssimare $h(x)$ con un grado arbitrario di accuratezza. Definiamo preliminarmente, sull'insieme delle funzioni $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^1 in un intorno dell'origine, l'operatore

$$(M\Phi)(x) = \Phi'(x)[Ax + f(x, \Phi(x))] - B\Phi(x) - g(x, \Phi(x))$$

Teorema 3. Sia $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1 in un intorno dell'origine con $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$. Si supponga ora che per $x \rightarrow 0$, $(M\Phi)(x) = O(|x|^q)$ dove $q > 1$. Allora

$$|h(x) - \Phi(x)| = O(|x|^q) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

dove con $|\cdot|$ si indica la norma Euclidea.

Nel prossimo capitolo verranno presentate le dimostrazioni di questi teoremi e alcune proprietà deducibili da esse.

2 Dimostrazioni dei teoremi e proprietà

2.1 Richiami matematici

In questa sessione verranno richiamati alcuni fatti necessari per le dimostrazioni dei tre teoremi. In questa sezione si considereranno nozioni presenti in [1], [6] e [7].

SUCCESSIONE DI CAUCHY. Una successione $(x_n)_n$ in uno spazio metrico (X, d) si dice di Cauchy se per ogni $\epsilon > 0$ esiste \bar{n} tale che

$$d(x_n, x_p) < \epsilon$$

per ogni $n, p \geq \bar{n}$.

SPAZIO METRICO COMPLETO. Uno spazio metrico (X, d) si dice completo se ogni successione di Cauchy in (X, d) è convergente ad un elemento di X .

SPAZIO DI BANACH. Uno spazio di Banach è uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ che è completo rispetto alla metrica indotta dalla norma.

CONTRAZIONE. Sia (X, d) uno spazio metrico. Un'applicazione $T : X \rightarrow X$ è una contrazione se esiste un numero $0 < \lambda < 1$ tale che $d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$.

TEOREMA DI BANACH-CACCIOPOLI. Sia (X, d) uno spazio metrico completo e $T : X \rightarrow X$ una contrazione. Allora esiste un unico punto tale che $T(x) = x$. x è chiamato punto fisso di T .

DISUGUAGLIANZA DI GRONWALL. Siano ρ, α e β funzioni reali continue in $[a, b]$ con β non negativa. Si assuma inoltre che

$$\rho(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\rho(s)ds$$

per ogni $t \in [a, b]$. Allora

$$\rho(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\rho(s)e^{\theta(t,s)}ds$$

dove

$$\theta(s, t) = \int_s^t \beta(u)du$$

NORMA DEL SUP. $\|\mathbf{f}\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|$ con D dominio della funzione.

PROPRIETÀ 1. Sia B una matrice $n \times n$ con autovalori con parte reale negativa. Allora esistono due costanti positive K, β tali che

$$|e^{-Bt}x| \leq Ke^{\beta t}|x| \quad \text{per ogni } t < 0, x \in \mathbb{R}^n \quad (2.1.1)$$

PROPRIETÀ 2. Sia A una matrice con autovalori $n \times n$ con parte reale nulla. Allora per ogni $r > 0$ esiste una costante $f(r)$ indipendente da t tale che

$$|e^{At}x| \leq f(r)e^{r|t|}|x| \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \quad (2.1.2)$$

PROPRIETÀ 3. Sia A una matrice $n \times n$ con autovalori con parte reale nulla. Allora è possibile scegliere un cambio di base tale per cui si abbia $A = A_1 + A_2$ con A_2 nilpotente e per cui valgono

$$|e^{A_1 t}x| = |x| \quad (2.1.3)$$

e

$$|A_2 x| \leq \frac{\beta}{4}|x| \quad (2.1.4)$$

con β della proprietà 1.

Teorema 4 (dell'invarianza del dominio). *Sia $\Gamma : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$, dove U è un aperto di \mathbb{R}^n , una mappa continua e iniettiva. Allora $V = \Gamma(U)$ è un insieme aperto e Γ è un omeomorfismo tra U e V .*

2.2 Dimostrazione del teorema 1

Sia $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^∞ tale che sia identicamente uguale a 1 per $|x| \leq 1$ e nulla per $|x| \geq 2$. Si consideri ora

$$F(x, y) = f\left(x\theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), y\right) \quad , \quad G(x, y) = g\left(x\theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), y\right) \quad (2.2.1)$$

con $\varepsilon > 0$. L'utilizzo di θ (chiamata bump function) ai fini della dimostrazione sarà chiarito in seguito. Ora si dimostrerà che l'equazione

$$\dot{x} = Ax + F(x, y) \quad , \quad \dot{y} = By + G(x, y) \quad (2.2.2)$$

ammette una varietà centrale per ε sufficientemente piccolo. Dato che $F = f$ e $G = g$ in un intorno dell'origine, dimostrare che (2.2.2) ammette un varietà centrale è equivalente a dimostrare il teorema 1.

Sia $X_{L,P}$ lo spazio delle funzioni di Lipschitz $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con costante di Lipschitz L e tale che $|h(x)| < P$ e $h(0) = 0$. Con la norma uniforme $X_{L,P}$ è uno spazio di Banach. Per ogni $h \in X_{L,P}$, sia $\Phi_t^h(x)$ il flusso dell'equazione

$$\dot{x} = Ax + F(x, h(x)) \quad (2.2.3)$$

Ora si consideri la funzione $T : X_{L,P} \rightarrow X_{L,P}$ della forma

$$(Th)(x) = \int_{-\infty}^0 e^{-Bs} G\left(\Phi_s^h(x), h\left(\Phi_s^h(x)\right)\right) ds \quad (2.2.4)$$

(Mostreremo più avanti che è una buona definizione per ϵ , L e P sufficientemente piccoli)

Se esistesse un punto fisso per T , allora questo sarebbe una varietà centrale per (2.2.2): infatti si consideri la coppia $(\Phi_t^h(x), h(\Phi_t^h(x)))$ con h punto fisso di (2.2.4). Questa risolve la prima equazione di (2.2.2) dato che $\Phi_t^h(x)$ è il flusso di (2.2.3). Derivando invece $h(\Phi_t^h(x))$ si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(h \left(\Phi_t^h \right) \right) &= \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-Bs} G \left(\Phi_{s+t}^h(x), h \left(\Phi_{s+t}^h(x) \right) \right) ds \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(e^{Bt} \int_{-\infty}^t e^{-Bz} G \left(\Phi_z^h(x), h \left(\Phi_z^h(x) \right) \right) dz \right) \\ &= B e^{Bt} \underbrace{\int_{-\infty}^t e^{-Bz} G \left(\Phi_z^h(x), h \left(\Phi_z^h(x) \right) \right) dz}_{h(\Phi_t^h(x))} + G \left(\Phi_t^h(x), h \left(\Phi_t^h(x) \right) \right) \end{aligned}$$

Ciò dimostra come la coppia $(\Phi_t^h(x), h(\Phi_t^h(x)))$ con h punto fisso di (2.2.4) risolva (2.2.2). Quello che si farà nel prosieguo del paragrafo è mostrare che esistono dei valori di ϵ tali per cui $T : X_{L,P} \rightarrow X_{L,P}$ sia una contrazione (sotto certe condizioni su P). Questo garantisce l'esistenza di un punto fisso per il teorema di Banach-Caccioppoli. Prima di procedere nella dimostrazione di questo fatto, chiariamo il ruolo della funzione di bump θ utilizzata per definire F e G : θ fa sì che F e G siano limitate nella variabile x (al contrario di f e g che, in generale, possono non esserlo). La limitatezza in x delle due funzioni permette di trovare, per ogni valore di ϵ abbastanza piccolo, una funzione continua $k(\epsilon)$ (con $k(\epsilon) \rightarrow 0$ per $\epsilon \rightarrow 0$) che renda vera le seguenti disuguaglianze

$$|G(x, y)| + |F(x, y)| \leq \epsilon k(\epsilon) \quad (2.2.5)$$

$$|F(x, y) - F(x_1, y_1)| \leq k(\epsilon)(|x - x_1| + |y - y_1|) \quad (2.2.6)$$

$$|G(x, y) - G(x_1, y_1)| \leq k(\epsilon)(|x - x_1| + |y - y_1|) \quad (2.2.7)$$

per ogni x, x_1 e per $|y|, |y_1| < \epsilon$. Dimostriamo ora che T è effettivamente una contrazione per ϵ , L e P sufficientemente piccoli.

Lemma 1. *Se $P < \epsilon$ e ϵ è sufficientemente piccolo, allora $T : X_{L,P} \rightarrow X_{L,P}$ definita in (2.2.4) è una contrazione.*

Dimostrazione. Usiamo il fatto che $P < \epsilon$: ciò fa sì che $|h(\Phi_t^h(x))| < \epsilon$ per ogni coppia $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e questo permetterà di fare alcune stime necessarie nella dimostrazione. Per la proprietà 1 della sezione precedente e per (2.2.5) si ha

$$\begin{aligned} |(Th)(x)| &\leq \left| \int_{-\infty}^0 e^{-Bs} G \left(\Phi_s^h(x), h \left(\Phi_s^h(x) \right) \right) ds \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^0 |e^{-Bs} G \left(\Phi_s^h(x), h \left(\Phi_s^h(x) \right) \right)| ds \\ &\leq K \int_{-\infty}^0 e^{-\beta s} \left| G \left(\Phi_s^h(x), h \left(\Phi_s^h(x) \right) \right) \right| ds \leq \underbrace{K\beta^{-1}\epsilon k(\epsilon)}_{C_1(\epsilon)} \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Questa stima mostra come T mappa funzioni limitate in funzioni limitate.

Mostriamo ora che T mappa funzioni Lipschitziane in funzioni Lipschitziane. Iniziamo col notare che il flusso $\Phi_t^h(x)$ di (2.2.3) può essere scritto per $t \leq 0$ come

$$\Phi_t^h(x) = -e^{At}x - \int_t^0 e^{A(t-s)}F\left(\Phi_s^h(x), h\left(\Phi_s^h(x)\right)\right) ds \quad (2.2.9)$$

Infatti derivando il flusso rispetto a t , si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(-e^{At}x - e^{At} \int_t^0 e^{-sA}F(\Phi_s^h(x), h(\Phi_s^h(x)))ds \right) \\ &= -Ae^{tA}x - Ae^{tA} \int_t^0 e^{-sA}F(\Phi_s^h(x), h(\Phi_s^h(x)))ds + F(\Phi_s^h(x), h(\Phi_s^h(x))) \\ &= A \left(-e^{tA}x - e^{tA} \int_t^0 e^{-sA}F(\Phi_s^h(x), h(\Phi_s^h(x)))ds \right) + F(\Phi_s^h(x), h(\Phi_s^h(x))) \end{aligned}$$

Quindi il secondo membro di 2.2.9 risolve (2.2.3) con lo stesso valore iniziale di $\Phi_t^h(x)$. Allora per unicità, la (2.2.9) è verificata. Utilizzando questo fatto, la disuguaglianza (2.2.6), la proprietà 2 e la disuguaglianza di Gronwall si giunge a

$$\begin{aligned} |\Phi_s^h(x_0) - \Phi_s^h(x_1)| &\leq f(r)e^{rt}|x_0 - x_1| + \int_t^0 e^{r(t-s)} \left| \Phi_s^h(x_0) - \Phi_s^h(x_1) \right| ds \\ &\leq f(r)e^{-\sigma(\epsilon, r)t}|x_0 - x_1| \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

con $\sigma(\epsilon, r) = r + (1 + L)f(r)k(\epsilon)$, $t \leq 0$ e $r \in \mathbb{R}$. Ora, usando (2.2.10) e le disuguaglianze (2.2.5)-(2.2.7), si ottiene da (2.2.4) (simile a ciò che si è fatto in (2.2.8))

$$|(Th)(x_0) - (Th)(x_1)| \leq \underbrace{K(f(r) + L)k(\epsilon)r^{-1}(\beta - \sigma(\epsilon, r))^{-1}}_{C_2(\epsilon, r)} |x_0 - x_1| \quad (2.2.11)$$

Questo mostra come T mandi funzioni Lipschitziane in funzioni Lipschitziane.

Si è dunque dimostrato che $T : X_{L,P} \rightarrow X_{L,P}$: infatti scegliendo r e ϵ sufficientemente piccoli, si ottiene che $\beta - \sigma(\epsilon, r) > 0$. Quindi $C_2(\epsilon, r) > 0$. Inoltre (a meno di ulteriore ridimensionamento di ϵ) si ha che $C_1(\epsilon) = K\beta^{-1}k(\epsilon)\epsilon \leq \epsilon$ (così da poter scegliere $C_1(\epsilon) \leq P < \epsilon$) e $C_2(\epsilon, r) \leq L$ ($C_2 \rightarrow 0$ per $\epsilon \rightarrow 0$ dato che $k(\epsilon) \rightarrow 0$ per $\epsilon \rightarrow 0$).

Per chiudere la dimostrazione si deve ancora dimostrare che T sia una contrazione, ossia che

$$\|(Th_1) - (Th_2)\| \leq \lambda(r, \epsilon, L, P) \|x_0 - x_1\|$$

Con le stesse stime usate per dimostrare che $T : X_{L,P} \rightarrow X_{L,P}$, si mostra che

$$\lambda(\epsilon, r) = Kk(\epsilon)(\beta^{-1} + r^{-1}(\sigma - r)(\beta - \sigma)^{-1})$$

Scegliendo ϵ sufficientemente piccolo, si ha $\lambda(\epsilon, r) < 1$ (stesso ragionamento utilizzato per mostrare che per ϵ, r sufficientemente piccolo, si ha $T : X_{L,P} \rightarrow X_{L,P}$). Questo conclude la dimostrazione del Lemma (e del Teorema).

2.3 Dimostrazione del teorema 2

Si dimostrerà la parte b) del Teorema 2. Come per la dimostrazione del teorema 1, sostituiamo l'equazione (1.3.1) con (2.2.2): dato che i campi coincidono attorno all'origine, dimostrare il teorema 2 per (2.2.2) è equivalente a farlo per (1.3.1). La dimostrazione consta di due passaggi:

-Siano $(u_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ con $|(u_0, z_0)|$ sufficientemente piccolo e $u(t)$ la soluzione di (2.2.3) con $u(0) = u_0$. Il primo passaggio consiste nel dimostrare che esiste una soluzione $(x(t), y(t))$ di (2.2.2) tale che $x(t) - u(t) = O(e^{-\gamma t})$ e $y(t) - h(u(t)) = O(e^{-\gamma t})$ con $y(0) - h(u(0)) = z_0$ e γ costante maggiore di zero e indipendente da (u_0, z_0) .

-dal primo punto è possibile definire $S(u_0, z_0) = (x_0, z_0)$. Questa è una mappa da $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ in \mathbb{R}^{n+m} , dove U è intorno dell'origine. Il secondo passaggio consiste nel dimostrare che il codominio di S contiene un intorno dell'origine (questo prova che la parte b) del teorema 2 è vera in un intorno dell'origine).

Assumiamo preliminarmente che la base di \mathbb{R}^{n+m} è quella che rende valida la proprietà 3 della sezione 2.1.

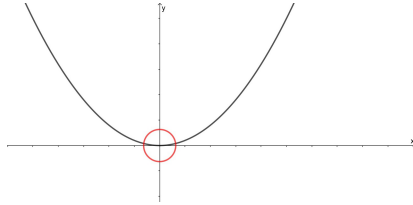


Figura 3: possibile intorno di validità del punto b) del teorema 2

L'impianto dimostrativo del primo punto è simile a quello del teorema 1, ossia si formulerà il problema come ricerca di punto fisso di un funzionale definito in un opportuno spazio di Banach. In tal senso definiamo X come lo spazio delle funzioni continue $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che

$$\left| \alpha(t) e^{\frac{\beta}{2}t} \right| \leq 1 \quad \text{per } t \geq 0.$$

Con la norma

$$\|\alpha\| = \sup_{t \geq 0} \left| \alpha(t) e^{\frac{\beta}{2}t} \right|$$

X è uno spazio di Banach. Siano ora $(u_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\alpha \in X$ e $u(t)$ è la soluzione di (2.2.3) con $u(0) = u_0$. Consideriamo allora l'equazione differenziale

$$\dot{z} = Bz + N((\alpha + u)(t), z) = X_\alpha(z) \tag{2.3.1}$$

dove

$$N(x, y) = h'(x)[F(x, h(x)) - F(x, y + h(x))] + G(x, y + h(x)) - G(x, h(x))$$

Dunque possiamo definire il funzionale $T_{u_0, z_0} : X \rightarrow X$ nel seguente modo

$$(T_{u_0, z_0} \alpha)(t) = - \int_0^{+\infty} e^{A_1(t-s)} [A_2 \alpha(s) + R_{u(t)}(\alpha(s), z_\alpha(s))] ds \tag{2.3.2}$$

dove

$$R_w(x, y) = F(w + x, y + h(x + w)) - F(w, h(w)) \quad \text{con } x, w \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$$

e $z_\alpha(t)$ è la soluzione di (2.3.1) con $z_\alpha(0) = z_0$. Dimostriamo ora che, se ϵ è sufficientemente piccolo, T_{u_0, z_0} è effettivamente una mappa da X in X e in più è una contrazione.

Prima però, così come è stato fatto nella dimostrazione del teorema 1, analizziamo il ruolo della bump function: il fatto che F e G siano definite attraverso l'utilizzo di una bump function fa sì che si possano trovare delle stime per i campi N e R della forma

$$|N(x_1, y_1) - N(x_2, y_2)| \leq k(\epsilon) (|y_1| |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \quad (2.3.3)$$

$$|R_z(x_1, y_1) - R_z(x_2, y_2)| \leq k(\epsilon) (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \quad (2.3.4)$$

per ogni $x_1, x_2, z \in \mathbb{R}^n, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$ e $|z_i| < \epsilon$. La funzione $k(\epsilon)$ ha le stesse proprietà di quella definita nella dimostrazione del primo teorema. D'ora in avanti ometteremo i pedici che indicano il fatto che sia stato fissato (u_0, z_0) e il pedice $u(t)$ di R .

Lemma 2. *Se ϵ è sufficientemente piccolo, allora $T : X \rightarrow X$ definita in (2.3.2) è una contrazione.*

dimostrazione. Nelle stime che seguiranno sarà necessario che $|z_i| < \epsilon$ per $t \geq 0$. Ciò avviene per valori di (u_0, z_0) sufficientemente piccoli: infatti abbiamo imposto che l'origine sia un punto di equilibrio stabile.

Sia $z_\alpha(t)$, soluzione di (2.3.1) con $z(0) = z_0$. $z(t)$ può essere scritto nella forma

$$z_\alpha(t) = e^{Bt} z_0 + \int_0^t e^{B(t-s)} N(\alpha(s) + u(s), z_\alpha(s)) ds \quad (2.3.5)$$

(per verificare ciò, seguire il procedimento in 2.2.12)

Ora, utilizzando la proprietà 1 e (2.3.3), si ha

$$|z_\alpha(t)| \leq K |z_0| e^{-\beta t} + \int_0^t K k(\epsilon) e^{-\beta(t-s)} |z_\alpha(s)| ds \quad (2.3.6)$$

Infine applicando la disuguaglianza di Gronwall si giunge a

$$|z_\alpha(t)| \leq K |z_0| e^{\beta_1 t} \quad \text{con } \beta_1 = \beta - K k(\epsilon) \quad (2.3.7)$$

Ora, applicando a (2.3.2) le proprietà 1, 2 e 3 e le stime (2.3.3), (2.3.4) e (2.3.7) si ottiene

$$\begin{aligned} |(T\alpha)(t)| &\leq \frac{e^{-at}}{2} + k(\epsilon) \int_t^{+\infty} \left(e^{-as} + K |z_0| e^{-\beta_1 s} \right) ds \\ &\leq \frac{e^{-at}}{2} + k(\epsilon) \left(\frac{1}{a} + \frac{K |z_0|}{\beta_1} \right) e^{-at} \leq e^{-at} \leq 1 \quad \text{per } t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Questo dimostra come $TX \subset X$.

Con le stesse stime utilizzate per dimostrare (2.3.8), si può mostrare che

$$|z_{\alpha_1}(t) - z_{\alpha_2}(t)| \leq K_1 k(\epsilon) \|\alpha_1 - \alpha_2\| e^{-\beta_1 t} \quad (2.3.9)$$

dove $z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}$ sono soluzioni di (2.3.1) con $z_i(0) = z_0$ e K_1 è una costante.

Questo ci permette di chiudere la dimostrazione del lemma: infatti applicando a (2.3.2) le stime della proprietà 3, (2.3.4) e (2.3.9), si ottiene

$$\begin{aligned} \|T\alpha_1 - T\alpha_2\| &\leq \frac{1}{2} \|\alpha_1 - \alpha_2\| + k(\epsilon) \int_t^{+\infty} |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)| + |z_1(s) - z_2(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{2} \|\alpha_1 - \alpha_2\| + k(\epsilon) \left(2C_1 e^{-at} + C_2 e^{-\beta_1 t} \right) \leq \lambda \|\alpha_1 - \alpha_2\| \quad \text{con } \lambda < 1 \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che $k(\epsilon) \rightarrow 0$ per $\epsilon \rightarrow 0$ e C_1, C_2 sono costanti che derivano dalle sostituzioni e dall'integrazione. Abbiamo mostrato che (2.3.2) è una contrazione. Si consideri ora la coppia $(\tilde{\alpha}(t), z_{\tilde{\alpha}}(t))$ con $\alpha(t)$ l'unico punto fisso di (2.3.2) in X . Allora questa risolve

$$\dot{z} = Bz + N((\alpha + u)(t), z) \quad , \quad \dot{\alpha} = A\alpha + R(\alpha, z)$$

dove $u(t)$ è la soluzione di (2.2.3) con $u(0) = u_0$ (la prima è risolta per costruzione, mentre per verificare che la seconda equazione è risolta dalla coppia considerata, si seguano i calcoli in (2.2.5). Definiamo $x(t) = u(t) + \tilde{\alpha}(t)$ e $y(t) = z_{\tilde{\alpha}}(t) + h(x(t))$ (ricordiamo che la coppia (u_0, z_0) è fissata nella dimostrazione del primo punto). Questa risolve 2.2.2: infatti derivando $x(t)$ e $y(t)$ e sostituendo a $\dot{u}(t)$, $\dot{z}_{\tilde{\alpha}}$ e $\dot{\alpha}(t)$ i corrispondenti campi delle equazioni differenziali che risolvono, si ottiene 2.2.2. Inoltre da (2.3.7) e (2.3.8), è evidente che

$$\tilde{\alpha}(t) = x(t) - u(t) = O(e^{-\gamma t}) \quad , \quad z_{\tilde{\alpha}}(t) = y(t) - h(x(t)) = O(e^{-\gamma t})$$

con $\gamma = \min(\beta_1, a)$ e $C_O = \max(1, K|z_0|)$ (notare che γ dipende solo dagli autovalori di B). Abbiamo concluso la dimostrazione del primo passaggio.

Per completare la dimostrazione dobbiamo dimostrare il secondo passaggio.

Dato che per ogni (u_0, z_0) (in intorno sufficientemente piccolo dell'origine) esiste un unico punto fisso in X per il funzionale T, possiamo definire una funzione S nel seguente modo:

$$S(u_0, z_0) = (u_0 + \alpha(u_0, z_0)(0), z_0)$$

Dalla dimostrazione del primo punto si evince che S è continua in un intorno dell'origine. Se riuscissimo a dimostrare che esiste un intorno U dell'origine tale per cui S è una mappa iniettiva, allora avremmo dimostrato il secondo punto: infatti per il teorema 4, l'immagine di U sarebbe aperta e in più conterrebbe l'origine dato che $S(0, 0) = 0$, quindi mapperebbe U in un intorno dell'origine dello spazio delle fasi. Consideriamo l'intorno dell'origine per cui è valido il punto primo. Dimostrare che la mappa S è iniettiva significa far vedere che, se $u_0 + \alpha_0(0) = u_1 + \alpha_1(0)$, allora $u_0 = u_1$ ($\alpha(i) := \alpha(u_i, z_0)(0)$). Se $u_0 + \alpha_0(0) = u_1 + \alpha_1(0)$, allora i valori iniziali per x e y sono gli stessi. Quindi per l'unicità delle soluzioni di (1.3.1), $u_0(t) + \alpha_0(t) = u_1(t) + \alpha_1(t)$ per ogni $t \geq 0$. Da ciò segue che $u_0(t) - u_1(t) = \alpha_1(t) - \alpha_0(t)$. Ora, dal momento che A ha tutti gli autovalori con parte reale nulla, si può provare che, se $u_0(0) \neq u_1(0)$, si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u_0(t) - u_1(t)| e^{\epsilon t} = +\infty \quad \text{per ogni } \epsilon > 0 \quad (2.3.11)$$

Ma $|\alpha_i(t)| \leq e^{-at}$. Quindi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u_0(t) - u_1(t)| e^{\epsilon t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\alpha_1(t) - \alpha_0(t)| e^{\epsilon t} \leq 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\epsilon - a)t} = 0 \quad \text{per } \epsilon < a$$

Quindi per (2.3.11), si ha che $u_0 = u_1$ e questo prova l'iniettività di S .

2.4 Sulla dimostrazione del teorema 3

La dimostrazione del teorema 3 non verrà presentata nella sua interezza: dopo aver impostato l'impianto dimostrativo, le stime successive non verranno analizzate dato che sono molto simili a quelle dei teoremi 1 e 2.

Sia

$$Y = \{z \in X : |z(x)| \leq K|x|^q \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^n\} \quad (2.4.1)$$

dove X è lo spazio definito nel teorema 1. Y è un sottoinsieme chiuso di X .

Sia $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile a supporto compatto che coincide con $\Phi(x)$ in un intorno dell'origine. Consideriamo ora $Sz = T(z+\theta) - \theta$ dove T è il funzionale definito in (2.2.4) e $Z \in Y$. Se S mappasse Y in se stesso, allora questa sarebbe una contrazione (questo deriva dal fatto che Y sia un sottoinsieme chiuso di X e che T sia una contrazione in X). Ciò implicherebbe l'esistenza di un (unico) punto fisso \tilde{z} per S . $\tilde{z} + \theta$ sarebbe una varietà centrale (è un punto fisso di T , dimostrazione teorema 1) e \tilde{z} , differenza tra questa varietà e θ , sarebbe un $O(|x|^q)$, dato che $\tilde{z} \in Y$ (si tenga θ coincide con Φ in un intorno dell'origine). Questo proverebbe l'asserto.

Quindi per chiudere la dimostrazione è necessario mostrare che esiste un K tale per cui $SY \subset Y$. Come detto sopra, è possibile mostrare ciò con le stesse tecniche delle precedenti dimostrazioni.

2.5 Non unicità della varietà centrale

In generale l'equazione (1.3.1) non ha un'unica varietà centrale.

Il teorema 3 però ci assicura che se esistono due varietà centrali h_1 e h_2 di (1.3.1), allora

$$|h_1(x) - h_2(x)| = O(|x|^q) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^n$$

Infatti $Mh_{1,2} = 0$ e questo rende applicabile il teorema 3 per ogni $q > 1$.

Un esempio nel quale è riscontrabile la non unicità delle varietà centrali è

$$\dot{x} = -x^3, \quad \dot{y} = -y \quad (2.5.1)$$

Questa è della forma (1.3.1): infatti basta prendere $a = 0$, $b = -1$, $f(x, y) = -x^3$ e $g(x, y) = 0$.

Una famiglia di varietà centrali si trova considerando le orbite di (2.5.1). Infatti integrando l'equazione considerata, troviamo che le soluzioni hanno la seguente forma

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2tx_0^2}}, \quad y(t) = y_0 e^{-t} \quad (2.5.2)$$

Ora, ricavando t dalla prima equazione di (2.5.2) e sostituendolo nella seconda, si ottiene

$$h(c_1, c_2, x) = \begin{cases} c_1 e^{-\frac{1}{2}x^{-2}} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ c_2 e^{-\frac{1}{2}x^{-2}} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti in \mathbb{R} ottenute dal raggruppamento di termini contenenti x_0 e y_0 . Per ogni scelta della coppia di costanti otteniamo una varietà centrale: infatti si ha che $h(c_1, c_2, 0) = h'(c_1, c_2, 0) = 0$. Inoltre il campo dell'equazione è tangente alla varietà M_h per ogni c_1, c_2 dato che $(x, h(x))$ è un'orbita. Questo garantisce l'invarianza.

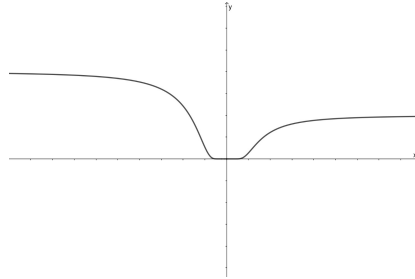


Figura 4: grafico di $h(1, 2, x)$

3 Applicazioni

In questa sezione esamineremo alcune piccole applicazioni che evidenzieranno il ruolo della varietà centrale nella determinazione delle proprietà dinamica del sistema. Inoltre si mostrerà che nei fenomeni dissipativi, è possibile trovare delle varietà centrali in cui l'attrito non agisce.

3.1 Applicazione 1: sistema di molle

In questa applicazione mostreremo come si possano applicare i risultati della sezione 1.2 ad un problema fisico-matematico considerato in [4]. Il sistema in figura consiste in una

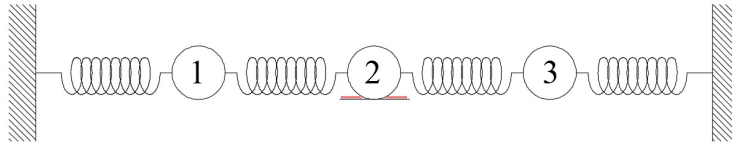


Figura 5: sistema di molle. L'attrito agisce su quella centrale

catena di tre masse identiche, con massa m , e quattro molle identiche e ideali, con costante elastica k .

La lagrangiana che descrive il sistema è della forma

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2 - \frac{1}{2}kx_3^2$$

Attraverso un riscalamento della forma $t \rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}t$ la Lagrangiana diventa

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}(x_3 - x_2)^2 - \frac{1}{2}x_3^2$$

Ciò conduce alle seguenti equazioni di Lagrange della forma

$$\ddot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \quad , \quad \ddot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + x_3 \quad , \quad \ddot{x}_3 = x_2 - 2x_3 \quad (3.1.1)$$

Assumiamo ora che in corrispondenza della seconda massa venga inserito una lastra ruvida. L'equazione (3.1.1) deve essere modificata nel seguente modo per tenere conto della dissipazione

$$\ddot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \quad , \quad \ddot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + x_3 - \gamma x_2 \quad , \quad \ddot{x}_3 = x_2 - 2x_3 \quad (3.1.2)$$

con $\gamma > 0$. Assumiamo per semplicità che $\gamma = 1$.

L'equazione (3.1.2) è lineare: cerchiamo quindi di applicare le nozioni acquisite in 1.1. Consideriamo il corrispondente sistema di primo ordine: la matrice associata è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il suo polinomio caratteristico è

$$pol(\lambda) = (\lambda^2 + 2) [(\lambda^2 + 2)(\lambda^2 + \lambda + 2) - 2] \quad (3.1.3)$$

il cui spettro è sottoinsieme di $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \leq 0\}$. In particolare, è evidente da (3.1.3) che $\pm\sqrt{2}i$ appartengono allo spettro di M . Inoltre esistono altre 2 coppie di autovalori con parte reale negativa.

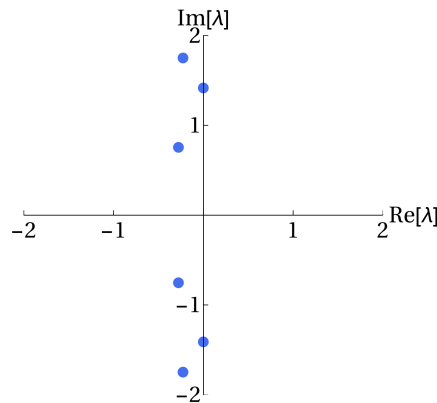


Figura 6: spettro di M con $\gamma = 1$

Dal momento che esistono sei autovalori distinti, la matrice M è diagonalizzabile. Quin-

di è possibile scrivere l'equazione di primo grado associata a (3.1.2) nella forma (1.2.1), attraverso il cambio di coordinate dato dalla matrice che ha per colonne gli autovettori associati a ciascun autovalore (o meglio che ha per colonne le parti reali e immaginarie degli autovettori complessi). Dato che $\pm\sqrt{2}i$ sono puramente immaginari, lo spazio S generato dai relativi autovettori è il sottospazio centrale dell'equazione (3.1.2).

S è generato da

$$S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e la restrizione di (3.1.2) ad esso è

$$\ddot{x} = -2x \quad (3.1.4)$$

(3.1.4) è l'equazione dell'oscillatore armonico: quindi le soluzioni su S sono periodiche con periodo $T = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$. Notiamo inoltre che su S l'attrito non agisce. Quindi abbiamo trovato un sottospazio invariante nel quale non agisce la dissipazione.

Le soluzioni con valori iniziali che non stanno su S non sono periodiche: però, in base a quanto appreso nella sezione 1.2, queste tendono alle soluzioni in S per $t \rightarrow +\infty$. Questo significa che per ogni scelta di posizione e velocità iniziali per le tre masse si ha o la periodicità o si tende ad essa per $t \rightarrow +\infty$. Il sottospazio centrale del sistema quindi rappresenta lo spazio a cui tendono tutte le soluzioni dell'equazione (3.1.2).

3.2 Applicazione 2: sbarrette rotanti

Il secondo esempio (considerato in [4]) tratta invece il caso non lineare.

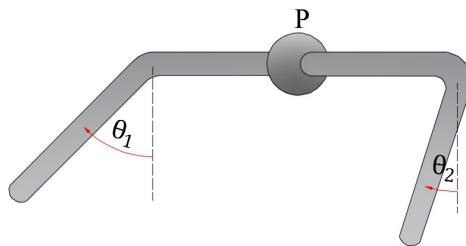


Figura 7: sbarrette rotanti attorno all'asse passante per il perno P

Il sistema in figura è formato da due sbarrette a forma di L, attaccate con perno ideale. Le estremità delle sbarrette, di massa m , possono ruotare attorno all'asse passante per il

perno. Gli angoli θ_1 e θ_2 sono presi rispetto alla verticali come in figura. Il sistema è descritto dalla seguente Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}I(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + k(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad \text{con } \theta_1, \theta_2 \in S^1 \quad \text{e } \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 \in \mathbb{R}$$

Ciò conduce alle equazioni di Lagrange della forma

$$\ddot{\theta}_1 = -\sin \theta_1 \quad , \quad \ddot{\theta}_2 = -\sin \theta_2$$

dove abbiamo considerato $\frac{k}{I} = 1$. Ora immaginiamo di sostituire il perno ideale con una giunzione che causa degli attriti sulle sbarrette. Le equazioni di Lagrange quindi devono essere modificate con l'introduzione di un nuovo termine che tiene conto della dissipazione. Le nuove equazioni hanno la forma

$$\ddot{\theta}_1 = -\sin \theta_1 - \gamma(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \quad , \quad \ddot{\theta}_2 = -\sin \theta_2 - \gamma(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \quad (3.2.1)$$

con $\gamma > 0$.

E' necessario utilizzare un cambio di variabili al fine di avere un sistema di equazioni in una forma più consona ai nostri scopi. Allora applichiamo a (3.2.1) il cambio di variabili

$$\phi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad , \quad \psi = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$$

e otteniamo

$$\ddot{\phi} = -\sin \phi \cos \psi \quad , \quad \ddot{\psi} = -\sin \psi \cos \phi - 2\gamma\dot{\psi} \quad (3.2.2)$$

Queste equazioni possono essere messe nella forma (1.3.1): infatti la corrispondente equazione di primo ordine è

$$\dot{\phi} = v \quad , \quad \dot{\psi} = w \quad , \quad \dot{v} = -\sin \phi \cos \psi \quad , \quad \dot{w} = -\sin \psi \cos \phi - 2\gamma w \quad (3.2.3)$$

Calcolando gli autovalori della Jacobiana in $(0, 0, 0, 0)$ del campo che definisce (3.2.3), troviamo che il suo polinomio caratteristico è

$$pol(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + 1) \quad (3.2.4)$$

il cui spettro è sottoinsieme di $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \leq 0\}$ per ogni $\gamma > 0$. In particolare, $pol(\lambda)$ ha sempre due autovalori completamente immaginari ($\pm i$) e due autovalori con parte reale negativa (la cui forma dipende da γ).

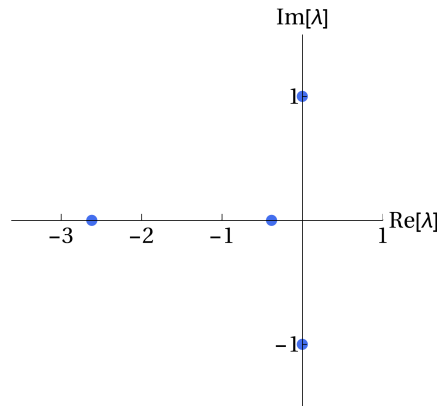


Figura 8: $\gamma = 1.5$

Questo garantisce l'esistenza di (almeno) una varietà centrale. Una possibile varietà centrale Σ^C è data da

$$\psi = 0 \quad , \quad w = 0$$

Σ^C così definito è isomorfo a $S \times \mathbb{R}$. La verifica del fatto che sia una varietà centrale è banale: è evidente che il campo associato a (3.2.3) appartenga, per ogni punto di Σ^C , al piano (ϕ, v) e che quindi sia tangente a Σ^C in ogni suo punto.

L'equazione che governa la dinamica sulla varietà è data dalla restrizione a Σ^C di (3.2.2), cioè

$$\ddot{\phi} = -\sin \phi \quad (3.2.5)$$

(3.2.5) è l'equazione del pendolo: quindi le soluzioni $(\phi(t), \psi(t))$ con $(\phi_0, \psi_0) \in \Sigma^C$ sono periodiche (escluse le separatrici). Notiamo inoltre che su Σ^C è scomparso il termine dissipativo.

Il teorema 2 dimostrato precedentemente garantisce che l'origine sia stabile (l'origine

è stabile per 3.2.5). Inoltre sempre per il teorema 2, le soluzioni con (ϕ_0, ψ_0) sufficientemente vicini all'origine tendono alle soluzioni in Σ^C . Ciò significa che le soluzioni di (3.2.2) inizialmente vicine all'equilibrio tendono a diventare periodiche e a sincronizzarsi per $t \rightarrow +\infty$.

Analizziamo la questioni dal punto fisico: se posizionassimo inizialmente le due sbarrette in modo da avere ampiezza e velocità uguali(cioè consideriamo le soluzioni con dato iniziale in $\psi = 0$ e $w = 0$), otterremmo un'oscillazione sincronizzata e periodica attorno all'origine (dato che la dinamica sarebbe governata da (3.2.5)). Se modificassimo le condizioni iniziali in modo da non avere sia ampiezza che velocità uguali, in generale non otterremmo oscillazioni periodiche e sincronizzate. Però per quanto detto sopra, se la modifica delle condizioni iniziali fosse lieve, le sbarrette tenderebbero a sincronizzarsi e a diventare periodiche al crescere del tempo. Quindi abbiamo utilizzando i teoremi 1 e 2, è possibile dedurre questa proprietà dinamica del sistema descritto.

Riferimenti bibliografici

- [1] M. Abate. C. de Fabritiis. *Geometria analitica con elementi di algebra lineare*. McGraw-Hill Education, 2009
- [2] J. Carr. *Applications of Centre Manifold Theory*. Springer-Verlang New York, 1982
- [3] F. Fassò. *Dispense per il corso di Istituzioni di Fisica Matematica*. Università degli Studi di Padova, A.A. 2017-2018.
- [4] S. Galasso *Dynamics of pendula hanging from a string* (tesi di laurea magistrale, Università degli Studi di Padova, A.A 2017-2018, relatore prof. F. Fassò)
- [5] J. Guckenheimer, P.Holmes. *Nonlinear oscillations, Dynamical systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 1983.
- [6] C. Marastoni *Dispense per il corso di Analisi Matematica 3*. Università degli Studi di Padova, A.A. 2017-2018.
- [7] R. Monti. *Dispense per il corso di Analisi Matematica 2*. Università degli Studi di Padova, A.A. 2016-2017.