UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Note sulla storia delle leggi di conservazione e loro relazione con la nozione di simmetria

Relatore
Prof. Giulio Peruzzi

Laureando
Luca Arzenton

Anno Accademico 2022/2023

Indice

Capitolo 1

Introduzione

La simmetria è un concetto che, più o meno esplicitamente, si presenta in una moltitudine di attività umane, quali l'architettura, le arti figurative, la musica o la poesia, e soprattutto nelle scienze.

Una nozione vaga e intuitiva di simmetria, che viene anche usata nel linguaggio quotidiano, è quella che viene associata alle nozioni di armonia e bellezza: ci troviamo costantemente a contatto con oggetti che, siano essi naturali o artificiali, consideriamo simmetrici.

La simmetria è stato oggetto di interesse costante nella storia del pensiero, ma è dall'inizio del XX secolo che iniza a giocare un ruolo di fondamentale importanza nella fisica.

Infatti nel 1905 viene pubblicato "Sull'Elettrodinamica dei Corpi in Movimento" *(Zur Elektrodynamik bewegter Körper)* dove Einstein pone le basi della fisica relativistica, e lo fa con due postulati:

1) Le leggi della fisica assumono la stessa forma in tutti i sistemi inerziali;

2) In ogni sistema di riferimento inerziale la velocità della luce assume un valore costante. [1]

Il primo postulato (spesso chiamato Principio di Relatività) afferma dunque che le leggi della fisica devono essere invarianti rispetto a certe trasformazioni, ovvero quelle che forniscono le coordinate di un sistema inerziale rispetto a un altro.

Abbiamo qui il primo esempio moderno di applicazione di un principio di simmetria in una teoria fisica: chiaramente ora il termine simmetria ha un significato preciso e di natura matematica, è l'invarianza delle leggi rispetto a un gruppo di trasformazioni. [2]

Da qui in avanti i principi di simmetria vengono usati con grande successo nella formulazione delle teorie fisiche: essi hanno un ruolo regolatore, di "meta-leggi" che impongono una certa forma alle equazioni.

[1] In verità dobbiamo fare alcune ipotesi aggiuntive: l'esistenza di un sistema di riferimento inerziale, l'omogeneità e isotropia dello spazio e l'omogeneitò del tempo. Queste assunzioni sullo spazio-tempo ci permettono di determinare la forma dei cambi di coordinate fra i sistemi inerziali.

[2] Nel caso della relatività ristretta le trasformazioni si chiamano trasformazioni di Lorentz.

Ovviamente la validità di tali principi, che potrebbero sembrare scelti a priori, discende sempre dalle verifiche empiriche sulle leggi derivate all'interno delle teorie fisiche.

Il concetto astratto di simmetria qui introdotto sembra non avere nulla a che fare con quello comune: in verità possiamo trovarne una connessione tramite la geometria.

Infatti anche per le figure geometriche, di cui comprendiamo più intuitivamente le proprietà di simmetria, possiamo usare la stessa definizione, ovvero quella di invarianza della figura rispetto ad un gruppo di trasformazioni.

In ogni caso, anche il carattere di armonia e bellezza in qualche modo legato alla simmetria gioca un ruolo in fisica moderna: ad esempio secondo Dirac, *Le leggi della fisica devono essere dotate di bellezza matematica* [3].

Un tema ricorrente e di fondamentale importanza nel corso di tutta la storia della scienza moderna è stato anche la ricerca di leggi di conservazione. Una legge di conservazione afferma che esiste una certa quantità che, in un sistema isolato [4], rimane costante con il passare del tempo.

L'importanza di questo tipo di leggi sta nel fatto che, se valide, danno un criterio per distinguere i processi fra quelli fisicamente permessi e quelli impossibili. Per esempio sono il mezzo usato in fisca subnucleare per determinare se un certo decadimento o urto sia possibile.

Essendo enunciati di tipo negativo, ovvero affermano che qualcosa non può accadere, sono impossibili da verificare sperimentalmente, ma questo non diminuisce la fiducia degli scienziati e in particolare dei fisici nei loro confronti.

Un esempio di questa fiducia è dato dalla predizione dell'esistenza del neutrino di Pauli: nel 1930 i fisici delle particelle studiavano il decadimento β in cui si credeva fossero prodotti solo gli elettroni, il cui spettro energetico era però continuo, mentre per la conservazione dell'energia il suo valore avrebbe dovuto essere fissato.

Per risolvere il problema Niels Bohr ipotizzò che la legge di conservazione valesse solo statisticamente (ovvero per un grande numero di decadimenti) e non per i singoli processi.

Pauli invece, per mantenera la validità generale della conservazione dell'energia, propose che vi fosse un ulteriore prodotto di reazione che doveva essere neutro e poco interagente per rimanere inosservato. L'ipotesi di Pauli fu successivamente confermata, ma si trattava, con le sue stesse parole, di «un rimedio disperato per salvare la legge di conservazione dell'energia» [5].

Quindi anche le leggi di conservazione hanno una funzione regolativa sulle altre leggi fisiche, come le simmetrie.

Nonostante la relazione fra le simmetrie spazio-temporali e la conservazione delle quantità meccaniche fosse già sfruttata in meccanica da Lagrange ed Hamilton, la con-

[3] P.A.M Dirac, 3/08/1956 Università di Mosca.

[4] Per sistema isolato si intende una porzione di universo limitata e non interagente con il resto dell'universo.

[5] L.M.Brown 1978, citazione presa da Barone 2013.

nessione fra le due emerge in tutta la sua generalità nei teoremi di Nother pubblicati nel 1918.

Secondo il lavoro della matematica tedesca, a ogni simmetria continua di un sistema fisico è associata una legge di conservazione locale, nel modo in cui vedremo nel capitolo 4.

Questo porta molti fisici a ritenere che sono le simmetrie ad implicare le leggi di conservazione.

In realtà tale affermazione non è così scontata: come enfatizza la stessa Emmy Nother, nel suo lavoro viene dimostrata anche l'implicazione inversa, cioè che a ogni legge di conservazione corrisponde una simmetria continua.

Questo problema viene affrontato in Lange 2007, in cui l'autore, dopo un'analisi logico-epistemologica, conclude come sia comunque corretto dare precedenza alle simmetrie.

Di seguito verrà approfondito il legame fra leggi di conservazione e simmetrie: nella prima parte vedremo alcune simmetrie basilari e lo sviluppo della nozione di simmetria nella storia della scienza.

Poi analizzeremo le piu importanti leggi di conservazione, soffermandoci specialmente su quella dell'energia, per poi vedere nel dettaglio il lavoro di Emmy Nother e le sue conseguenze.

Capitolo 2

La nozione di Simmetria

Nel linguaggio comune la simmetria ha due significati distinti: uno che possiamo chiamare antico e uno moderno. Con parole di Hermann Weyl, fisico fautore dell'uso delle simmetria in fisica, «Se non sbaglio la parola *simmetria* ha nell'uso comune due significati. Da un lato l'aggettivo "simmetrico" è sinonimo di ben proporzionato e ben equilibrato, e "simmetria" designa allora quel rapporto fra le diverse parti per cui esse si integrano in un tutto" [1]».

Questa è una descrizione più precisa della nozione intuitiva di simmetria a cui abbiamo accennato nell'introduzione, ed è simile alla concezione di simmetria che si trova negli antichi.

Come dice infatti il medico e architetto Claude Perrault nel 1673, «La simmetria degli antichi consiste in un rapporto di ragione di parti proporzionate [...] che hanno le grandezze delle parti le une rispetto le altre o ognuna rispetto al tutto [2]».

In greco il termine usato è $\sigma\upsilon\nu\mu\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$, che possiamo intendere come un sinonimo di commensurabile.

Infatti la parola viene da $\sigma\upsilon\nu$, che possiamo tradurre con insieme, e $\mu\epsilon\tau\rho o\nu$, che sta per misura.

Nel linguaggio matematico infatti, due grandezze omogenee si dicono commensurabili se ammettono un sottomultiplo comune.

«Simmetrici in questo senso sono quegli elementi che possono essere misurati attraverso la stessa misura, perchè multipli (interi) di una misura comune » [3].

Il termine si può trovare negli *Elementi* di Euclide (300 a.C ca), nel *Teeto* platonico (386-87 a.C ca) e in numerosi passi di aristotele.

Un esempio si trova nel trattato *Sull'equilibrio dei piani* di Archimede, dove illustra le leggi delle leve, di cui una è «pesi commensurabili (simmetrici) sono in equilibrio quando sono inversamente proporzionali alle loro distanza dal punto di appoggio» [4].

[1] Hermann Weyl 1975.
[2] C.Perrault 1683, citazione tratta da Castellani 2000.
[3] Castellani 2000.
[4] Euclide 2007, citazione tratta da Barone 2013.

Sebbene il termine abbia una forte valenza matematica e si trovi dunque in problemi geometrici, viene anche usato nei testi non scientifici con un significato di tipo estetico, e si trova nei contesti piu disparati: dalle scienze naturali all'etica, ma soprattutto nell'architettura e nell'arte statuaria.

Per quanto riguarda la scultura greca, questa idea si presenta nel *Canone* di Policleto (IV secolo a.C), mentre nella cultura latina il termine *Symmetria* viene introdotto da Marco Vitruvio Pollione, architetto e scrittore romano vissuto fra lo 80 a.C circa al 15 a.C circa. Considerato uno dei piu influenti teorici dell'architettura di tutti i tempi, il suo trattato principale è il *De Architectura*, diviso in 10 libri. Qui la simmetria viene considerata come uno degli elementi fondamentali dell'architettura, e la definizione data è la seguente: «la simmetria è l'accordo armonico tra le parti di una medesima opera e la rispondenza di proporzioni fra le singole parti e l'intera figura»[5]

È questa idea di simmetria che si affermerà nei secoli successivi, lasciando tracce nei linguaggi moderni.

Perrault fornisce una seconda definizione, più moderna: la simmetria è «un rapporto di uguaglianza tra parti opposte», come «le parti destre hanno con le sinistre, le alte con le basse, le frontali con le posteriori, riguardo alla grandezza, alla figura, all'altezza, al numero, alla situazione; e in generale a tutto ciò che le può rendere simili le une alle altre» [6].

Al posto della proporzione troviamo dunque l'uguaglianza delle parti, ma questo non basta: la simmetria di una figura non può essere data da una semplice ripetizione di parti uguali, vi deve essere una legge che specifica come avvenga tale ripetizione.

In altre parole, le parti uguali possono essere scambiate fra di loro attraverso delle specifiche procedure che non ne cambiano la forma complessiva, ovvero che la lasciano invariata.

Possiamo stabilire dunque che un oggetto è simmetrico se invariante sotto un certo tipo di trasformazioni, e il tipo di simmetria dipende proprio dal tipo di trasformazioni.

Vediamo ora l'influenza della simmetria prima della sua definizione matematica moderna. Nelle teorie dei filosofi naturali le figure geometriche come i poligoni e i poliedri regolari, la sfera e il cerchio, sono sempre state importanti. Dal punto di vista moderno queste figure si dicono simmetriche in quanto invarianti sotto certe trasformazioni, mentre dal punto di vista antico/intuitivo lo sono per le proporzioni fra le loro componenti, quali lati, superfici e angoli.

Il *Timeo*, dialogo Platonico del 360 a.C ca. , contiene un mito cosmogonico, in cui gli elementi base del mondo -fuoco, terra, aria e acqua- hanno la forma di poliedri regolari, che sono a loro volta costituiti di triangoli isosceli. La motivazione primaria della scelta dei poliedri è quella estetica, oltre al fatto che possono comporsi in triangoli, e alcuni criteri fisici "dinamici" e "statici" legati alle proprietà degli elementi che costituiscono. [7]

[5]Marco Vitruvio Pollione 1990, citazione presa da Castellani 2000.

[6]C.Perrault 1683, citazione presa da Castellani 2000.

[7]Vedi Castellani 2000, pagina 33.

Alcuni studiosi, come Heisenberg, vedono l'uso di figure simmetriche in Platone come un collegamento con la fisica moderna, a sostegno della tesi della continuità fra scienza antica e moderna. L'errore qui è usare la nozione di simmetria moderna, come più volte rimarcato diversa da quella usata dagli antichi e in particolare da Platone, nella lettura del dialogo. Da uno studio più accurato si arriva alla conclusione che «È in ogni caso difficile ravvisare nel ruolo dei poliedri platonici un'influenza della simmetria in quanto tale, comunque si voglia intendere la nozione» [8].

Un caso simile si trova nel testo cosmologico *Mysterium Cosmographicum* (1596) di Keplero, dove i pianeti noti all'epoca sono dispositi in sfere concentriche separate da poliedri regolari. «Keplero cerca di fornire tutte le giustificazioni possibili, adducendo ragioni di natura matematica e fisica, ma anche metafisica, teologica e astrologica» [9]. Anche qui dunque non possiamo attribuire la scelta di poliedri a ragioni di simmetria nel senso moderno.

La simmetria viene usata anche per spiegare certi fenomeni, e queste spiegazioni si basano sul principio di ragione sufficente. Il primo esempio nella storia del pensiero è dovuto Anassimandro di Mileto, che lo usa per stabilire come la terra sia un rimanga immobile nello spazio. «Poichè nello spazio tutte le direzioni sono equivalenti, non c'è alcuna ragione per cui la Terra debba muoversi in un verso piuttosto che in un altro, e dunque la Terra rimane ferma». [10]

Prima di proseguire e vedere l'uso della simmetria nella sua concezione moderna, vediamo brevemente quali sono le principali simmetrie geometriche.

La più immediata è senz'altro la simmetria bilaterale, dato che si presenta nella struttura di molti animali e anche nell'uomo.

Si può chiamare anche simmetria fra destra e sinistra: dato un piano E, un oggetto ha simmetria bilaterale se, presa una qualsiasi retta ortogonale al piano e un punto P su tale retta, esite uno e un solo punto P' con la stessa distanza da E ma giacente dall'altra parte rispetto ad E.

Inoltre, vale P=P' solo quando il punto P appartiene al piano.

Quindi in questo caso la trasformazione di simmetria è una riflessione rispetto al piano E, e matematicamente è una mappa biettiva [11] $S : P \to P'$ che porta P nella sua immagine speculare P'.

L'uso di configurazioni con simmetria bilaterale è frequente nelle arti [12], specialmente in dipinti e affreschi ornamentali: fra le civiltà antiche soprattutto i Sumeri si distinguono per una forte inclinazione all'uso di questa tecnica.

---

[8] Castellani 2000.

[9] Castellani 2000.

[10] Barone 2013.

[11] Una mappa $f : A \to B$ fra due insiemi si dice biettiva se $\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad t.c \quad f(x) = y$.

[12] Numerosi esempi di simmetria bilaterale nell'arte sono forniti nel primo capitolo di Hermann Weyl 1975.

Le altre simmetrie geometriche fondamentali sono quella di traslazione e quella di rotazione.

Esempi [13] di simmetria per traslazione [14] si trovano nell'arte ornamentale, mentre quella rotazionale è ampiamente diffusa anche in natura.

Consideriamo due figure bidimensionali: un cerchio ed un poligono regolare di n lati.

Il cerchio è chiaramente invariante sotto la rotazione di un angolo qualsiasi attorno al suo centro, mentre il poligono lo è solo di rotazioni di $\frac{360}{n}$.

Nel primo caso ho dunque un numero infinito di trasformazioni possibili, nell'altro un numero finito.

Ci si può poi accorgere di un aspetto cruciale: data una figura dotata di simmetria, per la definizione data, vi saranno un certo numero di trasformazioni che la lasciano invariata, che chiameremo trasformazioni di simmetria. Ma allora se eseguo due trasformazioni di simmetria di seguito la figura rimane invariata, e dunque anche la combinazione delle due trasformazioni è una trasformazione di simmetria. Inoltre posso sempre considerare la trasformazione che non modifica nulla, l'identità: anche questa sarà una trasformazione di simmetria. Infine, una trasformazione avrà sempre anche la sua inversa.

Queste sono le proprietà che in astratto deve possedere l'insieme delle trasformazioni di simmetria della figura.

Questo fatto diventa essenziale ed estende i campi di applicazione della simmetria quando a inizio '800 viene formulata la teoria dei gruppi.

Infatti le proprietà astratte ricavate per le trasformazioni di simmetria sono proprio quelle che deve soddisfare un insieme, dotato di un'operazione binaria, per essere un gruppo algebrico.

Possiamo dunque dare in forma matematica la definizione moderna di simmetria: è l'invarianza rispetto a un certo gruppo di trasformazioni.

Tornando al caso delle rotazioni nel piano, vediamo che una rotazione è identificata dal valore dell'angolo di rotazione θ, e una forma esplicita della trasformazione è data da una matrice ortogonale, $R(\theta) \in SO(2)$, dove $SO(2)$ è l'insieme delle matrici 2x2 ortogonali [15], che per quanto detto deve essere un gruppo.

Tale angolo può assumere valori arbitrariamente vicini, e dunque può essere variato con continuità. Un gruppo con queste caratteristiche (dipendenza continua da un parametro) si dice Gruppo di Lie unidimensionale , e chiamiamo le simmetrie descritte da gruppi di Lie simmetrie continue.

Questo è rilevante ai fini della discussione nel capitolo 4 perchè i teoremi di Nother si applicano a simmetrie continue.

Invece il gruppo di simmetria di un poligono regolare, ad esempio un quadrato, è costituito dalla rotazione di 90° e suoi multipli e contiene dunque un numero finito di elementi. Queste simmetrie si dicono discrete: altri esempi di simmetrie discrete sono la simmetria bilaterale e le traslazioni per multipli interi di una quantità fissata.

[13] Vedi Hermann Weyl 1975.

[14] In verità una figura rigorosamente invariante per traslazione dovrebbe avere estensione spaziale infinita.

[15] Ovvero $RR^T = I$.

Vediamo qui un'altra funzione della simmetria, ovvero quella di classificazione: una figura geometrica può essere caratterizzata dai suoi gruppo di simmetria.

Più precisamente, il fatto che le trasformazioni lascino invariate certe proprietà delle figure mi dà una relazione di equivalenza fra di esse, e una relazione di equivalenza definisce una classe di equivalenza, caratterizzata proprio da tali proprietà invarianti. [16]

Data l'importanza della teoria dei gruppi nei teoremi di Nother può essere utile vederne brevemente il suo sviluppo storico, prima di tornare alla storia della nozione di simmetria nelle scienze.

Ad inizio '800 un importante problema in matematica era la determinazione delle condizioni per cui una equazione algebrica ammettesse soluzione. Continuando il lavoro di Lagrange, si occupò del problema Evariste Galois (1812-1832), un giovane matematico francese. Galois ebbe l'idea di studiare le possibili permutazioni [17] dell'insieme delle soluzioni di un'equazione. Vide poi che considerando le permutazioni che lasciavano invariate le relazioni algebriche fra le soluzioni, queste soddisfavano certe proprietà e definì come gruppo un insieme che le soddisfasse. Infine dimostrò che dallo studio del gruppo dell'equazione si poteva verificarne la risolubilità. Il metodo risoltivo dunque è lo studio delle trasformazioni che lasciano invariate certe proprietà dell'equazione, che è proprio l'idea fondamentale della simmetria.

Galois muore a soli 20 anni nel 1832 in un duello e i suoi lavori vengono parzialmente pubblicati nel 1846, ma non hanno inizialmente un grosso impatto. Bisogna aspettare il 1870, con la pubblicazione di *Traitè des substitutions et des équations algébriques* di Camille Jordan perchè venga riconosciuta l'importanza della teoria dei gruppi di Galois.

Nel 1872 Felix Klein, allievo di Jordan con cui condivideva l'interesse per la nuova teoria matematica, propone un nuovo modo di pensare la geometria; ovvero come lo studio delle proprietà di invarianza delle figure rispetto a gruppi di trasformazioni, il cosiddetto *Programma di Erlangen*. In quest'ottica ad esempio, la geometria euclidea è l'analisi delle proprietà delle figure invarianti rispetto al gruppo delle trasformazioni di similitudine.[18]

Nel 1893 il matematico norvegese Sophus Lie elabora la teoria dei gruppi continui in *Theorie der Transformationsgruppen*. Qui si occupa della descrizione del moto di corpi rigidi tramite i gruppi delle trasformazioni di coordinate, estendendo in un certo senso le idee di Jordan alla fisica.

L'approccio trasformazionale alla meccanica era già stato sviluppato da Hamilton e Jacobi a metà '800, si veda il capitolo successivo. «Il seme piantato da Lie germogliò all'inizio del Novecento grazie a un formidabile drappello di matematici con un forte interesse per la fisica- Jules-Henri Poincarè, David Hilbert, Hermann Minkowski, Emmy Nother».[19]

---

[16] Vedi Castellani 2000 pagine 46-47 .

[17] Quelle che Galois chiama sostituzioni. Ad esempio (a,b,c) è una permutazione di (c,a,b).

[18] Comprende le isometrie, che preservano la distanza euclidea (rotazioni,traslazioni,riflessioni) e le omotetie (dilatazioni), che preservano solamente gli angoli.

[19] Barone 2013.

Ora che abbiamo trattato la definizione moderna di simmetria, vediamo come essa si inserisce nelle scienze moderne. Abbiamo già accennato alla funzione classificatrice che può svolgere la simmetria: è in questo modo che la nozione entra nella fisica, e in particolare lo fa nella cristallografia.

La cristallografia nasce come scienza moderna a fine del 700 grazie soprattutto ai lavori di René-Just Haüy, minerologo francese. Haüy ipotizza l'esistenza di un elemento base del cristallo, la «molecola integrante», che racchiude tutte le caratteristiche del cristallo stesso.

Questi elementi base formano poi delle strutture geometriche le quali combinandosi a loro volta formano delle strutture secondarie, che sono quelle macroscopiche. Le strutture secondarie derivano da «decrementi» successivi, ovvero la sottrazione o addizione di strati di molecole. Le leggi dei decrementi devono soddisfare un ulteriore legge, che lui chiama legge di simmetria.

Ad inizio 800, in germania, una scuola mineralogica guidata da Christian Weiss e Johann Hessel inizia lo studio matematico della struttura dei cristalli. Nel 1830 Hessel afferma che i cristalli sono invarianti rispetto a rotazioni degli angoli 60°, 90°, 120°, 180° e loro multipli interi, che insieme alle riflessioni costituiscono 32 gruppi di simmetria. Nel 1849 il francese Auguste Bravais ottiene gli stessi risultati.

Negli anni a seguire si catalogano le possibili trasformazioni di simmetria dei cristalli e vengono enumerati i gruppi di simmetria, che risultano essere 230. Questo lavoro viene svolto, oltre che dal già citato Jordan, dal mineralogista russo Evgraf Fedorov (1890) e dal matematico tedesco Arthur Schönflies.

Nonostante il successo in cristallografia, le simmetrie e la teoria dei gruppi non vengono ancora apprezzate nelle altre discipline.

Il primo a capire l'importanza di questo nuovo strumento è Pierre Curie: «Penso che sarebbe di un certo interesse introdurre nello studio dei fenomeni fisici le considerazioni sulla simmetria familiari ai cristallografi»[20].

Sebbene il nome di Curie sia offuscato dalla celebrità della moglie Marie, che vinse il primo premio Nobel nel 1903 insieme al marito e il secondo dopo la sua morte nel 1911, il suo lavoro da fisico non è da sottovalutare.

Si interessa delle simmetrie nei cristalli dopo aver scoperto nel 1880, insieme al fratello Jacques, il fenomeno della piezoelettricità, ovvero la capacità di alcuni cristalli di polarizzarsi se sottoposti ad una sollecitazione meccanica (compressione o dilatazione).

L'aspetto che incuriosice Pierre è il fatto che un cristallo simmetrico per inversione non possa avere questa proprietà: da qui inizia il suo studio della relazione fra simmetria ed elettromagnetismo. Considerando sia la geometria che le grandezze fisiche coinvolte nei fenomeni, arriva ad affermare che «certi elementi di simmetria possono coesistere con alcuni fenomeni, ma non sono necessari. Ciò che è necessario, è che certi elementi di simmetria non esistano. È la dissimetria che crea il fenomeno [21]».

[20] *Sur la symmétrie dans les phénomès physiques, 1894*, citazione presa da Barone 2013.

[21] Citazione presa da Barone 2013.

Enuncia poi un principio, detto principio di Curie, che si può scrivere nel seguente modo: quando una causa produce un effetto, gli elementi di simmetria della causa devono ritrovarsi nell'effetto. L'effetto prodotto può essere più simmetrico, ma non meno simmetrico, della causa.

Purtroppo tale principio, se consideriamo[22] le equazioni fisiche come cause e le loro soluzioni come effetto, è sbagliato. Infatti sappiamo che lo stato di un sistema fisico può essere meno simmetrico delle leggi che ne governano la dinamica, e questo fenomeno si chiama rottura spontanea di simmetria.

Un esempio di rottura spontanea di simmetria si ha in elettrodinamica classica: sebbene le equazioni della teoria siano invarianti per inversione temporale, le soluzioni non lo sono. Questo perchè banalmente in natura osserviamo il moto di particelle cariche che irraggiano energia sotto forma di onde elettromagnetiche, mentre non vediamo il processo che si otterrebbe invertendo lo scorrere del tempo, ovvero l'asssorbimento. [23]

Dopo le intuizioni di Pierre Curie sull'uso delle simmetrie nelle descrizioni fisiche, come detto nell'introduzione dobbiamo aspettare il 1905 perchè Einstein elabori la prima teoria basata su un principio di simmetria.

La richiesta infatti che tutte le leggi fisiche non cambino forma passando da un sistema di riferimento inerziale a un altro vuol dire che la forma delle equazioni debba essere invariante rispetto a un gruppo di trasformazioni.

Questo significa che le quantità fisiche possono cambiare, mentre le relazioni fra di esse no, e tali equazioni si dicono covarianti. Ad esempio, se in un sistema K una legge ha la forma A=B, in un altro sistema K' avrà la forma A'=B'.

Le trasformazioni di Lorentz devono mappare linee rette in altre linee rette, e sono dunque trasformazioni lineari costanti, rappresentabili da matrici. Si trova che tali matrici Λ devono rispettare il vincolo $\Lambda^T g \Lambda = g$, con g metrica di Minkoswki, e formano dunque un gruppo, il gruppo pseudo-ortogonale SO(1,3). La forma di tali matrici ricorda quella delle rotazioni, ma ora sono rotazioni effettuate in uno spazio quadri-dimensionale, che contiene anche il tempo.

Dunque qualsiasi teoria fisica che si accordi con la relatività ristretta deve avere come gruppo di simmetria SO(1,3).

Il successivo caso di applicazione di un principio di simmetria è opera dello stesso Einstein nella teoria della Relatività generale, estensione di quella ristretta: ora si richiede l'invarianza rispetto a un qualsiasi cambio di coordinate [24]. Al contrario delle trasformazioni in relatività ristretta, queste cambiano da punto a punto: l'invarianza generale di coordinate è dunque una simmetria spazio-temporale locale.

---

[22]Una definizione ragionevole e consistente di causa ed effetto è, come per altri termini scientifici, un problema aperto in filosofia della scienza, vedi ad esempio Federico Laudisa 2011.

[23]Vedi Lechner 2014.

[24]Il gruppo di simmetria è quello dei diffeomorfismi, che sono i cambi di coordinate su una varietà differenziale come quella con cui descriviamo lo spazio-tempo delle teorie classiche.

Passando dalle teorie di Einstein alla meccanica quantistica, formulata fra il 1925 e il 1926 in due teorie equivalenti, vediamo che anche qui la simmetria riveste da subito un ruolo di spessore.

Esempio importante è la simmetria di scambio, dovuta al fatto che particelle identiche [25] sono indistinguibili in meccanica quantistica: scambiandole dunque lo stato del sistema deve rimanere invariato.

Questo porta, ad esempio, alla derivazione del fatto noto come principio di esclusione di Pauli.

Nel 1926 Wigner studia un sistema generico di particelle identiche e divide le particelle in due classi, bosoni e fermioni, a seconda del comportamento dello stato del sistema[26].

Questo è un primo esempio di uso delle simmetrie per classificare le particelle, che diventerà il modus operandi in fisica delle particelle. «In altre parole, *le simmetrie rispetto alle trasformazioni degli eventi determinano le proprietà degli oggetti*»[27]. Per via della struttura matematica della meccanica quantistica questo processo è altamente astratto e richiede l'uso della teoria delle rappresentazioni[28].

Nonostante il lavoro di Wigner, nel 1929 l'americano John Slater pubblica un lavoro in cui mostra come i risultati ottenuti in fisica atomica si potevano derivare senza usare la teoria dei gruppi e delle simmetrie.

Per diversi anni dunque la teoria viene ritenuta un inutile tecnicismo dalla maggior parte dei fisici, fino all'inizio degli anni '50. Fra i fisici contribuiscono alla diffusione dell'uso delle simmetrie vi è un gruppo di italiani: Giovanni Gentile jr, Ettore Majorana, Gian Carlo Wick, Giulio Racah, ottengono infatti importanti risultati usando la teoria dei gruppi e ne inaugurano l'uso in fisica delle particelle.

---

[25] Che condividono le stesse proprità indipendenti dallo stato come massa, carica, spin.

[26] Un sistema fermionico deve avere la funzione d'onda completamente antisimmetrica per lo scambio delle particelle, uno bosonico simmetrica.

[27] Barone 2013.

[28] Una rappresentazione è una mappa che associa ad ogni elemento di un gruppo un operatore (trasformazione lineare) in uno spazio vettoriale.

Capitolo 3

Le leggi di Conservazione

Prendiamo ora in considerazione le principali leggi di conservazione, quelle legate a grandezze fisiche classiche: momento, momento angolare, carica, massa ed energia. [1]

Nel 530 d.C il filosofo bizantino Giovanni Filopono, in un commento a *Fisica* di Aristotele, introduce un primo concetto di momento[2], come impeto di moto dato ad un oggetto dal suo lanciatore.

Nel 1020 il pensatore persiano Avicenna [3] si basa su Filopono ed elabora una sua teoria del moto: è daccordo sul fatto che l'impeto sia comunicato all'oggetto dal lanciatore, ma aggiunge il fatto che tale qualità sia persistente e richieda effetti esterni per consumarsi: nel vuoto un oggetto manterrebbe il suo impeto.

Nel 1350 il filoso Jean Buridan ipotizza come l'impeto sia proporzionale alla massa e velocità di un corpo [4], mentre nel 1644 Decartes pubblica *Principia Philosophiae* in cui stabilisce come la quantità di moto "*quantitas motus*" dell'intero universo sia conservata. Cartesio intende questa quantità come il prodotto fra massa di un corpo e il modulo della sua velocità, dunque, in termini moderni, una quantità scalare.

Secondo questa definizione due corpi che si muovono lungo la medesima direzione, e che percorrono lo stesso spazio nell'unità di tempo, ma in versi opposti, hanno lo stesso momento.

In questo modo però, il momento complessivo è chiaramente non conservato: si pensi a un oggetto composto inizialmente in quiete, con momento nullo, che esplode mettendo in moto le sue componenti, che avranno momento complessivo diverso da zero.

Se ne accorge presto Huygens, lavorando sulle collisioni elastiche, oltre a Newton e a Leibniz in *Discours de métaphysique* del 1686.

Nel 1670 il matematico inglese John Wallis aveva già enunciato una prima forma moderna del principio di conservazione del momento per un corpo, mentre nel 1687 viene pubblicato *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, l'opera più importante di Newton.

[1] Altre grandezze fisiche, come spin, colore o sapore hanno senso solo nelle teorie quantistiche.
[2] Che ovviamente è distante dalla sua concezione moderna.
[3] Nome latinizzato.
[4] Bisogna però notare che all'epoca il concetto di velocità non fosse ancora chiaro.

Qui viene data la prima formulazione generale della meccanica, chiamata appunto meccanica di Newton. In questa formulazione, a partire dalla legge della dinamica $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$ e la legge di azione-reazione $\vec{F_{12}} = -\vec{F_{21}}$ si può dimostrare che per un generico sistema meccanico isolato si conserva la somma dei momenti degli oggetti, ora visti come oggetti vettoriali, $\vec{p} = m\vec{v}$.

Sempre nella stessa opera Newton dimostra indirettamente la conservazione del momento angolare di un corpo in moto circolare, sebbene non avesse formulato tale concetto.

Newton si interessa principalmente di studiare la forza gravitazionale, e nello studio del moto dei pianeti dimostra geometricamente la legge delle aree, già dedotta empiricamente da Keplero nel 1609: il segmento che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.

In *Mechanica* di Eulero si trovano scritte le equazioni del moto di un corpo rigido, ma non viene data una definizione delle grandezze angolari in gioco.

Nel 1799 Pierre-Simon-Laplace si rende conto che in un generico problema a due corpi[5], come per il moto dei pianeti attorno al Sole[6], il moto relativo avviene sempre su un piano.

La prima definizione moderna di momento angolare, $\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}$ viene data nel 1858 da William Rankine.

Una volta definita la quantità, la sua conservazione per un generico sistema meccanico isolato è un semplice teorema della meccanica Newtoniana.

Al contrario del momento e del momento angolare, quantità fisiche astratte, massa e energia sono più vicine all'esperienza, ma anche più difficili da comprendere esattamente.

Tracce dell'idea l'universo sia costituito di una certa sostanza che non possa nè essere creata nè distrutta, e che quindi si conserva, si trovano nel pensiero antico.

Queste idee sono comunque lontane da quelle sviluppate a partire dalla metà del XVI secolo con la rivoluzione scientifica, dato che la sostanza degli antichi è da intendere come un ente metafisico, e non uno di natura fisica.

Nel *Tattvārthasūtra*, opera di filosofia indiana legata alla religione del Gianinsmo, si trova scritto che i costituenti del mondo non possono essere nè creati nè distrutti.

Nei presocratici, più pensatori sono accomunati dal fatto di credere nell'esistenza di un costituente fondamentale dell'universo che si conservasse indefinitivamente: secondo Talete era l'acqua, per Empedocle erano i 4 elementi e per Democrito gli atomi. [7]

Vediamo prima la legge di conservazione della massa.

Nel XVIII secolo viene usata nei lavori di chimici come Joseph Black, Cavendish, e una sua formulazione si può trovare nel lavoro di Mikhail Lomonosov nel 1756. La legge

[5] Studio del moto di due corpi soggetti ad un'interazione dipendente solo dalla distanza relativa fra di essi.

[6] In verità il sistema completo contiene tutti i pianeti del sistema solare, ma come noto il problema a tre corpi non è risolvibile analiticamente. Nella pratica si risolve il problema considerando solo il pianeta ed il sole, e poi si aggiungono perturbativamente i contributi degli altri pianeti.

[7] Vedi Tim Maudlin, Elias Okon, Daniel Sudarsky 2019, sezione 2.2 .

però non era stata provata sperimentalmente, ma era più un'ipotesi di lavoro fatta sulla base di considerazioni filosofiche.

Si deve a Lavoiser la prova empirica, che nel 1773 compie una serie di esperimenti che verificano la legge di conservazione della massa e la diffondono nella comunità scientifica. Il lavoro di Lavoiser in cui viene enunciata la legge è il *Traité élémentaire de Chimie*. Facendo ciò Lavoiser smentisce la teoria del Flogisto, che spiegava reazioni di combustione e ossidazione tramite il flogisto: una sostanza ponderabile, contenuta all'interno dei corpi e rilasciata nelle reazioni.

Andiamo ora ad approfondire la legge di conservazione dell'energia. Sebbene il concetto di energia sia fondamentale sia in fisica classica che moderna, è difficile darne una definizione precisa e non circolare: secondo Feynmann, «It is important to realize that in physics today, we have no knowledge of what energy is ».[8]

Sembrerebbe che il modo migliore di pensare al concetto di energia sia proprio attraverso la sua legge di conservazione: in un sistema chiuso l'energia è una quantità scalare, misurabile, che si può presentare in diverse forme e la cui somma totale di tutte queste deve essere costante.

Di questo avviso sono Plank e Poincaré, che dice «Per noi rimane solo un'enunciazione del principio: c'è qualcosa che rimane costante. È questo qualcosa che noi chiamiamo energia ». [9]

Potremmo essere portati a pensare dunque all'energia come una sostanza, e che abbia una qualche natura fisica.

Purtroppo, anche in fisica classica non relativistica tale idea non ha senso. Infatti una forma di energia, una delle prime a essere riconosciuta, è quella cinetica, legata al movimento, la cui espressione è $\frac{1}{2}mv^2$. La dipendenza dalle velocità dei corpi dell'energia implica che un dato sistema meccanico abbia un'energia totale differente in due sistemi di riferimento inerziali in moto relativo. Ovviamente in ogni sistema di rifermento l'energia si conserva, ma non ha senso considerare l'energia come una sostanza a sè. [10] Indicheremo più avanti un approccio diverso alla questione.

Ricostruire correttamente la scoperta della conservazione dell'energia non è facile: si tratta, almeno secondo lo storico della scienza Thomas Khun, di un caso di scoperta simultanea, in cui più scienziati giungono indipendentemente e nello stesso periodo alla medesima conclusione. [11]

Diversa invece è la tesi di Yehuda Elkana, che individua in Hermann von Helmholtz, fisico e fisiologo tedesco, il vero responsabile della formulazione del principio. [12]

Altro elemento a cui porre attenzione, come sempre in storia della scienza, è come il significato che i pensatori attribuiscono a certi termini vari nel tempo: spesso capita

[8]Richard Feynman 1964.
[9]Poincaré 1902 Capitolo 8, citazione presa da Elkana 1977.
[10]Tim Maudlin, Elias Okon, Daniel Sudarsky 2019.
[11]Vedi Kuhn 1959.
[12]Vedi Elkana 1977.

che anche nella stessa opera un termine venga usato con accezzioni diverse. Ciò accade soprattutto quando si trattano concetti poco chiari o mal definiti, come lo è l'energia fino alla formulazione della sua legge di conservazione.

Nel XVI secolo il termine energia viene spesso usato in modo letterario: a titolo di esempio, nell'Oxford English Dictionary del 1599, "Energy" è definita come "Forza o vigore di espressione".

A fine del XVII secolo (fra il 1676 e il 1689) Leibniz introduce una quantità chiamata forza viva, proporzionale alla massa ed al quadrato della velocità, e afferma come questa si conservi nei sistemi meccanici.

Molti scienziati dell'epoca, come Jhon Playfair, notano però che in alcuni processi, ad esempio negli urti anelastici, la quantità non è costante. Questo problema si inserisce nel dibattito sulla natura del calore: infatti alcuni, come il conte Rumford nel 1798, iniziano a ipotizzare come il calore generato dall'attrito fosse un'altra forma di forza viva.

Il termine *energy* associato all'energia cinetica viene usato per la prima volta da Thomas Young nel 1807.

Nel 1789 Lagrange pubblica il suo trattato di meccanica, *Mécanique analytique*, in cui ripresenta la meccanica classica in un nuovo formalismo, che aiuterà fortemente a sviluppare l'idea di energia meccanica e della sua conservazione.

Invece di basarsi sulla forza, funzione vettoriale, in questa formulazione un sistema meccanico è descritto da una funzione scalare detta lagrangiana $\mathcal{L}(q, q^{\cdot}, t)$, dove q è l'insieme delle coordinate generalizzate del sistema.

La dinamica del sistema è poi stabilita dal principio variazionale, che sostituisce la legge della dinamica, secondo cui fra due istanti di tempo il sistema evolve in modo da minimizzare l'azione, ovvero la quantità

$$S = \int_{t_2}^{t_1} \mathcal{L}(q(t), q^{\cdot}(t), t)\, dt.$$

Più precisamente, l'azione è un funzionale, una mappa fra uno spazio di funzioni e uno numerico. L'idea di applicare un principio del genere alla fisica viene a Lagrange dallo studio di problemi variazionali in matematica, come il calcolo della lunghezza minima di una curva fra due punti: Lagrange è infatti uno dei fondatori della branca della matematica chiamata calcolo variazionale.

La richiesta è dunque $\frac{\delta S}{\delta q} = 0$.

Facendo il conto, si trovano le equazioni dinamiche chiamate equazioni di Eulero-Lagrange[13]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}.$$

Si vede poi che, sotto certe ipotesi, la lagrangiana ha la forma $\mathcal{L} = T - V$ dove T è l'energia cinetica totale del sistema, e V è la funzione potenziale del sistema. Si trova poi

[13] In verità, la formulazione moderna della teoria lagrangiana e delle equazioni di Eulero-Lagrange è dovuta ad Hamilton.

che la funzione $H = T + V$ si conserva per forze indipendenti dal tempo e dalla velocità, ovvero lungo le soluzioni delle equazioni di Lagrange, $\frac{dH}{dt} = 0$.

Una funzione di questo tipo, invariante durante l'evoluzione del sistema si dice integrale primo, ed è l'espressione di una legge di conservazione in meccanica classica, dato che indica una quantità costante nel tempo [14].

Nella funzione H, T e V devono essere quantità omogenee: dunque H rappresenta l'energia meccanica totale, che si conserva, e V(q) è l'energia potenziale dovuta alla posizione reciproca dei corpi.

Definendo poi i momenti canonici coniugati alle coordinate, $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$, ci accorgiamo di un fatto importante: se la Lagrangiana non dipende dalla coordinata q_i, ovvero è invariante sotto traslazioni lungo tale direzione, si conserva il momento p_i. Una coordinata di questo tipo si dice ignorabile.

Vediamo già qui il legame fra simmetrie della Lagrangiana e leggi di conservazione: Lagrange mostra che se $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo, ovvero è invariante sotto traslazioni temporali, si conserva la funzione H [15]. Lagrange e Hamilton lo usano come strumento per studiare i sistemi meccanici e stabilirne la dinamica, ma non capiscono la generalità e l'importanza della connessione fra simmetrie e leggi di conservazione.

L'importanza del formalismo Lagrangiano va ben oltre la meccanica: infatti può essere esteso a sistemi costituiti anche da campi, come il campo elettro-magnetico o il campo gravitazionale. Ad oggi, la maggior parte delle teorie fisiche sono formulate attraverso tale formalismo e le equazioni fondamentali della dinamica derivate tramite il principio variazionale. In meccanica l'importanza degli integrali primi sta nel fatto che consentono di ridurre la complessità del problema: la descrizione matematica del sistema può però rendere più o meno visibili tali costanti, e dunque tali simmetrie.

Grazie a opportuni cambi di coordinate, queste simmetrie possono manifestarsi più facilmente e possono semplificare le equazioni della dinamica: è questo il metodo trasformazionale della meccanica che studiano i matematici Hamilton e Jacobi.

«A questi sviluppi della meccanica analitica si deve dunque l'introduzione e la crescente utilizzazione nella fisica di considerazioni fondate sulle nozioni di *trasformazione* e di *invarianza*, e quindi di *simmetria* ». [16]

Legato al principio di conservazione vi è quello del moto perpetuo , *"perpetum mobile"*, i cui tentativi di costruzione risalivano già al Medio Evo. Ad esempio, quello che potrebbe essere il disegno di una macchina per il moto perpetuo si trova in un album da disegno di Villard de Honnecourt, artista francese del XIII secolo.

Nel 1775 l'Accademia francese delle scienze (Académie Royale des Sciences) proclama il problema chiuso, e che non avrebbe accettato più tentativi di soluzione: cresce dunque la consapevolezza dell'impossibilità di tale meccanismo. Bisogna comunque aspettare il 1840 per vedere progressi verso la formulazione della legge di conservazione dell'energia:

[14] Si usa anche il termine costante del moto.
[15] Vedi Analytical mechanics 1997, p.233.
[16] Castellani 2000.

la conoscenza dell'impossibilità del moto perpetuo è dunque una condizione necessaria, ma non sufficente, per giungere alla formulazione della legge.

Un problema importante per arrivare alla legge di conservazione è quello della natura del calore. Sostenitori della teoria dinamica del calore, secondo cui esso consisteva nella forza viva delle particelle costituenti i corpi, erano Daniel Bernoulli, il primo ad approcciarsi scientificamente al tema del calore, Boyle, Hooke e Locke.

Questa teoria era contrapposta a quella dominante del calorico, formulata da Lavoiser nel 1783. Qui il calore era considerato una sostanza, un fluido capace di penetrare in ogni corpo la cui densità stabiliva la temperatura dei corpi. Secondo la teoria, quando due corpi a temperatura diversa venivano messi a contatto il calorico si spostava da quello in cui era più concentrato a quello meno, fino a ottenere una concentrazione intermedia. Inoltre questo fluido era conservato, non poteva essere creato nè distrutto. Come indicato precedentemente, a inizio 800 il conte Rumford fornisce i primi risultati sperimentali che negano la necessità dell'esistenza del calorico.

A inizio 800 scienziati e ingegneri, stimolati dalla ricerca di modi per migliorare il rendimento dei motori a vapore, pongono le basi per lo sviluppo della termodinamica. Nel 1843 Joule enuncia l'omonima legge, che mette in relazione il calore rilasciato da un conduttore percorso da corrente con il quadrato dell'intensità di corrente per la resistenza.

Nello stesso periodo iniza ad occuparsi dei processi di conversione e conferma con ulteriori esperimenti i risultati precedenti, e che come il calore venisse effettivamente generato dal conduttore, in contrasto alla teoria del calorico. Nonostante i colleghi non riconoscano il suo lavoro, negli anni a seguire Joule effettua numerosi esperimenti in cui mostra la conversione di energia meccanica in calore. «Wherever mechanical force is expended, an exact equivalent of heat is always obtained». [17]

Pur ottenendo un risultato notevole, Joule non lo generalizza e non riesce, o si accorge, della possibilità di formulare una legge generale.

Nel 1842 anche il fisico tedesco Robert von Mayer comprende l'equivalenza fra calore e lavoro meccanico, ma la sua insufficente cultura matematica gli impedisce di esprimerlo tramite un'equazione.

Altro personaggio spesso menzionato per la scoperta del principio è l'ingegnere e fisico scozzese William Rankine. Interessato al funzionamento delle macchine termiche [18], nel 1849 elabora una teoria che ottiene ottimi risultati, come le giuste relazioni fra temperatura, pressione e densità dei gas e le espressioni dei calori latenti e di evaporazione di alcuni liquidi.

Nel 1851 deriva il teorema di Carnot [19], anche se questo risultato era già stato raggiunto nello stesso periodo da Clausius e Thomson.

[17] J.P. Joule, Agosto 1843 .

[18] Dispositivo fisico o teorico capace di scambiare calore e lavoro con l'ambiente o un altro sistema fisico.

[19] Questo teorema afferma che non è possibile realizzare una macchina termica operante tra due sorgenti con un rendimento maggiore di quello della macchina di Carnot operante tra le stesse sorgenti.

Anche lui non arriva alla legge di conservazione generale dell'energia.

La prima vera formulazione e dimostrazione della legge è, almeno secondo Elkana, dovuta a Hermann von Helmholtz, fisico e fisiologo tedesco.

In gioventù studia i lavori di Newton, Eulero, D'Alembert e Lagrange, ma non si limita alle discipiline matematiche e scientifiche: importante per la sua formazione è anche la filosofia, soprattutto nei lavori di Fitche e Kant.

Per volere del padre studia medicina e nel 1842 ottiene il dottorato. Lavorando nel laboratorio del fisiologo Johannes Muller viene a conoscenza della questione fondamentale del periodo in fisiologia, quella delle origini del calore vitale.

I suoi primi articoli si occupano proprio di questo, e mostrano un approccio fortemente riduzionista, nel senso che credeva fosse possibile ridurre i processi vitali alla fisica e la fisca fosse a sua volta riducibile alla sola meccanica.

Tutti questi elementi portano Helmholtz a scrivere e pubblicare nel 1847 il suo primo e importante saggio, *Ubeer die Ehaltun der Kraft*.

Dopo un'introduzione filosofica, Helmholtz mostra la conservazione dell'energia (da lui chiamata ancora forza viva) in sistemi meccanici con potenziale indipendente dal tempo.

Mostra poi esplicitamente la validità del risultato con vari esempi, come per la forza gravitazionale e il moto di corpi solidi e liquidi senza atrrito.

Prosegue argomentando a favore della teoria dinamica del calore e mostrando come in questo modo valga la conservazione dell'energia totale negli urti anelastici: l'energia che sembra persa dopo l'urto viene ripartita nelle componenti microscopiche dei due corpi, che si mettono in moto vibrazionale, e si ha dunque un incremento della temperatura rispetto a prima dell'urto. Così si spiega anche la conservazione dell'energia nei sistemi meccanici con attrito.

Si dedica poi all'energia nei processi elettrici e magnetici, e finisce analizzando i processi biologici.

La conclusione a cui arriva è che i vegetali traggono dalla luce solare l'energia. Questa energia viene usata nei processi chimici interni, ed eventualmente può essere rilasciata nella combustione o dopo la composizione degli stessi vegetali da parte di animali.

Capitolo 4

I teoremi di Nöther

Emmy Nöther nasce il 23 marzo 1882 nella città di Erlangen, in Germania. Figlia del matematico Max Nöther, noto per i suoi lavori in geometria algebrica, è la prima di quattro fratelli, ma unica insieme al fratello Max a raggiungere l'età adulta. Anche Max diventerà matematico dopo aver studiato a Monaco di Baviera, e si distingue per i suoi lavori in matematica applicata.

Durante la gioventù studia lingue, mostrando attitudine per l'inglese ed il francese, e la madre le insegna a svolgere le tipiche mansioni "da donna" dell'epoca come la cucina e le vengono date lezioni di pianoforte, ma non mostra particolare interesse per queste attività.

Dopo aver completato la scuola superiore, nella primavera del 1900 supera con ottimi risultati il test di abilitazione all'insegnamento per le lingue nelle scuole per ragazze, ma decide invece di continuare gli studi in matematica all'università di Erlagen.

Essendo donna non può partecipare ufficialmente ai corsi, ma può farlo da uditrice previa autorizzazione del professore. Nonostante ciò, il 14 luglio 1903 supera un esame in un Gymnasium di Norimberga che le permette di iniziare il dottorato.

Fra il 1903 e il 1904 studia all'università di Gottinga, partecipando alle lezioni di David Hilbert, Felix Klein e Hermann Minkowski. Tornata a Erlargen, inizia la sua tesi di dottorato seguita da Paul Gordan, e la completa nel 1907.

Inizia allora ad insegnare occasionalmente all'università, seppur non pagata, prendendo il posto di Gordan o di suo padre. Dopo il ritiro di Gordan, conosce Erhard Schmidt, che ha una forte influenza sui suoi lavori.

Nel 1915 viene invitata da Hilbert e Klein, nonostante le proteste di numerosi accademici, a ritornare a Gottinga per aiutarli in un problema inerente alla conservazione dell'energia in relatività generale.

Anche qui, durante i primi anni non viene retribuita e non ha un ruolo ufficiale all'interno dell'università. Il 26 luglio del 1918 Klein presenta per conto di Emmy *Invariante Variationsprobleme* alla Royal Society of Sciences di Gottinga, che contiene la dimostrazione dei teoremi di Nöther.

Durante la guerra Hilbert prova a spingere per l'abilitazione all'insegnamento di Emmy: come ricorda Weyl, «during the war Hilbert tried to push through Emmy Noether's

Habilitation in the Philosophical Faculty in Göttingen. He failed due to the resistance of the philologists and historians. It is a wellknown anecdote that Hilbert ... [declared] at the faculty meeting; 'I do not see that the sex of a candidate is an argument against her admission as Privatdocent. After all, we are a university not a bathing establishment»[1].

Dopo la fine della prima guerra mondiale, si inziano in Germania a concedere più diritti alle donne e Emmy inizia ufficialmente ad insegnare, anche se non viene ancora retribuita.

Durante gli anni 20 lavora estensivamente all'algebra astratta, collaborando strettamente con l'olandese van der Waerden ed il russo Pavel Alexandrov con cui lavorerà anche a Mosca fra il 1928 e il 1929.

A Gottinga Nöther supervisiona numerosi studenti di cui promuove i lavori, senza mai cercare notorietà . Si distingue per uno stile di vita frugale e la sua dedizione totale alla matematica: le sue lezioni sono molto difficili da seguire, non essendo strutturate come le lezioni classiche ma improvvisate e basate su discussioni con gli studenti.

A inizio degli anni 30' il lavoro di Nöther viene riconosciuto dalla comunità dei matematici, anche se non entra ufficialmente nella Royal Society of Sciences.

Nel gennaio del 1933 Hitler sale al potere e una delle sue prime leggi rimuove ebrei e persone politicamente sospette da incarichi pubblici, Emmy continua comunque ad incontrare privatamente i suoi studenti per discutere di matematica.

Come molti altri colleghi fisici o matematici, ad esempio Einstein e Weyl, Emmy riesce ad ottenere un visto americano, nel suo caso sponsorizzato dalla fondazione Rockfeller su richiesta del Bryn Mawr College in Pennsylvania. Muore nel 1935 dopo essersi sottoposta ad un intervento per una cisti ovarica.

Vediamo ora nel dettaglio le circostanze che portano alla formulazione dei teoremi ed il loro contenuto.

Nel 1915 Nöther viene invitata da Hilbert a Gottinga. Il matematico aveva letto la sua tesi di dottorato, in cui aveva calcolato tutti gli invarianti delle forme quadratiche in tre variabili, e ne era rimasto colpito. A detta di Weyl, «To both Hilbert and Klein, Emmy was welcome as she was able to help them with invariant-theoretic knowledge» [2].

In questo periodo Einstein stava completando la teoria della Relatività generale, a cui aveva iniziato a lavorare nel 1905. Nel 1907 aveva capito l'importanza dell'uguaglianza fra massa inerziale e gravitazionale e enunciato il principio di equivalenza, ma la formulazione matematica della teoria aveva necessitato otto anni di lavoro.

Nell'estate del 1915, poco dopo l'arrivo di Nöther, Einstein tiene sei conferenze a Gottinga in cui espone i suoi risultati: pur convincendo Hilbert e Klein , «To my great joy, I completely succeeded in convincing Hilbert and Klein» [3], non aveva ancora trovato le esatte equazioni di campo.

[1]Herman Weyl 1935, citazione presa da Byers 1998.
[2]Herman Weyl 1935, citazione presa da Byers 1998.
[3]Einstein 1915, citazione presa da Byers 1998.

Nel Novembre del 1915 completa la teoria pubblicando i risultati, e lo stesso mese Hilbert pubblica un lavoro in cui vengono derivate con il metodo variazionale le stesse equazioni del campo gravitazionale di Einstein. Sembra dunque che i due giungano agli stessi risultati indipendentemente [4]. Il lavoro di Hilbert è un tentativo di elaborare una teoria unificata di gravità, elettromagnetismo e materia e seppur fallendo in questo, la formulazione lagrangiana della relatività è un importante risultato.

Nöther inizia allora a studiare la teoria di Einstein, come si evince da quello che scrive a Ernst Fischer: «Hilbert plans to lecture next week about his ideas on Einstein's differential invariants, and so ..[we] had better be ready» [5]. Da questo studio Nother inzia a lavorare sugli omonimi teoremi, ed i primi risultati colpiscono Weyl, Einstein e Hilbert.

A questo punto, pur essendo la teoria della relatività completa, c'erano alcuni problemi da risolvere, e il più grosso riguardava la conservazione dell'energia.

Infatti, al contrario delle altre teorie di campo classiche come elettromagnetismo, idrodinamica e gravità Newtoniana, in questa teoria della gravitazione l'energia non era localmente conservata.

Hilbert, in un messaggio a Weyl, ipotizza che questo fatto sia una caratteristica della teoria e che esistano dei teoremi di conservazione "impropri".

Per provare questo chiede aiuto a Nöther: questa include una dimostrazione e generalizzazione delle sue ipotesi nella sezione conclusiva suo articolo del 1918 *Invariante Variationsprobleme*, chiamata "Un'asserzione Hilbertiana".

Nel 1924 Hilbert riconosce a Nöther la soluzione del problema della conservazione dell'energia in relatività generale. In seguito, Nöther ritorna a lavorare sul suo campo di ricerca primario, l'algebra astratta.

Vediamo ora il contenuto dei due teoremi.

Entrambi si occupano della relazione fra simmetrie di un sistema fisico e le loro leggi di conservazione. Vengono considerati sistemi fisici descritti da campi, al contrario della meccanica classica in cui si consideravano punti materiali od oggetti comunque localizzati.

Mantenendo il formalismo lagrangiano introdotto in precedenza, ora la lagrangiana sarà una funzione scalare dei campi, delle loro derivate ed eventualmente delle coordinate. L'azione si scriverà dunque come

$$S[\phi] = \int \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, x) d^4x.$$

Un campo è, matematicamente, una mappa che associa a ogni punto dello spazio un numero (campo scalare), un vettore (campo vettoriale), o oggetti più complicati (campo tensoriale).

In fisica classica i campi si iniziano a usare per descrivere più facilmente le interazioni elettromagnetiche: ad esempio se sappiamo che una particella carica esercita una forza su di un'altra particella, possiamo pensare che la particella isolata modifichi lo spazio generando un campo elettrico, e poi questo produca la forza sull'altra particella.

[4] Vedi Pais 2012.

[5] Dick 1981, citazione presa da Byers 1998.

Si vede poi dalle equazioni di Maxwell che nel vuoto, senza cariche o correnti, i campi elettrici e magnetici si propagano come onde alla velocità della luce.

Se in fisica Newtoniana i campi sono strumenti utili alla descrizione matematica dei sistemi, nelle teorie relativistiche sono indispensabili: infatti ora vi è una velocità limite alla trasmissione dell'informazione e le interazioni non si propagano nello spazio istantaneamente, ma con una velocità finita: dunque per descriverle devo usare dei campi.

Si adotta lo stesso procedimento visto in meccanica analitica, e dall'azione si ricavano le equazioni del moto dei campi.

Ad esempio, dalla Lagrangiana del campo elettromagnetico libero $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$[6], si ottengono le equazioni di Maxwell per le sorgenti in forma covariante

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu,$$

dove $F^{\mu\nu}$ è il tensore elettromagnetico, oggetto che contiene i campi [7] e j^ν è la quadricorrente che contiene le sorgenti.

In questo formalismo, il sistema è simmetrico se la lagrangiana è invariante rispetto a un gruppo continuo di trasformazioni, ovvero un gruppo di Lie.

Le due distinzioni importanti da fare riguardo i possibli gruppi di simmetria sono sul numero di generatori infinitesimi indipendenti del gruppo: essi possono essere in numero finito/numerabile oppure infiniti.

I generatori infinitesimi sono i parametri che caratterizzano una trasformazione arbitrariamente vicina all'identità.

Ad esempio consideriamo una trasformazione di Lorentz propria infinitesima, $\Lambda \in SO(1,3)$.

Usando i vincoli su tali matrici, si trova [8] che deve avere la forma

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + g^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\nu}$$

con ω matrice antisimmetrica e dunque avente sei parametri indipendenti. Fisicamente questi parametri sono i boost infinitesimi lungo le direzioni spaziali e le rotazioni lungo i tre assi cartesiani.

Dunque per una generica teoria relativistica, che sappiamo deve essere simmetrica sotto il gruppo di Poincarè, ho anche le traslazioni: il gruppo ha 10 generatori e ricade dunque nel primo caso.

In relatività generale invece come detto il gruppo di simmetria è quello di tutti i diffeomorfismi, di cui il gruppo di Poincarè costituisce un sottogruppo, e questo ha un numero infinito di generatori infinitesimi. In questo caso la simmetria si dice anche di Gauge.

Il primo teorema di Nöther tratta i gruppi continui con un numero finito di generatori, il secondo quello con un numero infinito.

[6] Si usa la notazione di Einstein: indici ripetuti sono sommati.

[7] $E^i = F^{i0}$, $B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}$.

[8] Vedi Lechner 2014.

Nel primo teorema si dimostra che a ogni gruppo di trasformazioni dei campi e delle coordinate viene associata una corrente a divergenza nulla, ovvero $\partial_\mu j^\mu = 0$. Un'altra forma più classica dell'equazione è

$$\frac{\partial j^0}{\partial t} - \nabla \dot{\vec{j}} = 0.$$

Ad esempio, per una generica teoria di campo relativistica, associata all'invarianza sotto trasformazioni di Poincarè vi è la corrente

$$j^\mu = -a_\nu T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\omega_{\nu\alpha} M^{\mu\nu\alpha},$$

dove T e M sono i tensori energia-impulso e momento angolare,[9] con a_ν e $\omega_{\nu\alpha}$ arbitrari.

La componente T^{00} è la densità di energia, le T^{0i} sono le densità di momento lungo la direzione i oppure, per l'equivalenza massa-energia, le densità di flusso di energia. Ad esempio, per il campo elettromagnetico libero si trova $T^{00} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2)$, che è la definizione classica di densità di energia.

Dalle densità si passa alle quantità totali del sistema integrando in tutto lo spazio. Definendo il quadrimomento la cui prima componente rappresenta l'energia totale del sistema e le altre il momento, $P^\nu = \int T^{\nu 0} dx^3$, dalla conservazione locale della corrente usando il teorema di Gauss in 4 dimensioni, si vede facilmente che $\frac{dP^\nu}{dt} = 0$.

Dunque associata all'invarianza sotto traslazioni spazio-temporali vi è la conservazione del quadrimomento totale del sistema.

Si vede invece che, associata all'invarianza sotto trasformazioni di Lorentz, vi è la conservazione del tensore momento angolare $L^{\alpha\beta}$.

Seguendo la dimostrazione del primo teorema si può, sebbene non l'abbia fatto Nöther, mostrare l'analogo per sistemi meccanici. Come detto nel capitolo precedente, si tratta di una generalizzazione di un fatto già noto. In questo caso, data una simmetria della Lagrangiana a un parametro, descritta da $\Phi^s(x)$, si conserva $j = p\dot{u}$, con p momento lagrangiano e u generatore del gruppo, $u = \frac{d}{ds}\Phi^s(x)|_{s=0}$.

Inoltre, si dimostra che per ogni simmetria esiste un cambio di coordinate che la manifesta come una coordinata ignorabile [10]. Questo è un esempio del metodo trasformazionale in meccanica, di cui si è parlato nel capitolo 3.[11]

Il secondo teorema invece si applica anche alla relatività generale e ne risolve i problemi inerenti alla conservazione dell'energia.

In questa teoria si può costruire un analogo del tensore energia-impulso relativistico, ma non è Gauge invariante: dipende dalla scelta del sistema di coordinate. Invece questo

[9] In verità questi sono i tensori canonici, che a volte non hanno la forma che vogliamo. Ad esempio in elttrodinamica classica il tensore energia impulso non è simmetrico sotto lo scambio degli indici, ma possiamo costruirne uno che lo sia attraverso passaggi matematici che non variano la descrizione fisica.

[10] Dal teorema di rettificazione del campo vettoriale, corso di Fisica Matematica.

[11] In verità tale approccio mostra tutta la sua potenza nel formalismo Hamiltoniano, in cui sono possibili un numero più elevato di cambi di coordinate, le trasformazioni canoniche.

oggetto è covariante sotto trasformazioni lineari del gruppo di Poincarè e ciò si può usare per derivare la legge di conservazione dell'energia localmente, in regioni lontane da fonti di campo gravitazionale.

In generale dunque non esiste una legge di conservazione locale del quadrimomento nel senso visto in precedenza, ma Nöther dimostra nel secondo teorema come si possa costruire un altro oggetto che implica la conservazione totale dello stesso.

Tornando al problema della natura dell'energia introdotto all'inizio del precedente capitolo, possiamo ora provare a dare una risposta [12]: le quantità conservate possono essere pensate non come quantità fisiche "sostanziali", ma come risultati matematici dalle simmetrie globali della Lagrangiana, e dipendono quindi dal sistema nella sua interezza più che dai singoli costituenti.

In questo senso, tutte le diverse energie nei sistemi di riferimento inerziali, la cui conservazione deriva dall'omogeneità del tempo, sono uguali.

[12] Vedi Tim Maudlin, Elias Okon, Daniel Sudarsky 2019.

Bibliografia

Analytical mechanics, repr. Boston studies in the philosophy of science (Vol. 191) (1997). *La scoperta della conservazione dell'Energia*. Kluwer Academic Publisher.

Barone, Vincenzo (2013). *L'ordine del mondo*. Bollati Boringhieri.

Byers, Nina (1998). «E. Noether's Discovery of the Deep Connection Between Symmetries and Conservation Laws». In: *Proceedings of a Symposium on the Heritage of Emmy Noether*.

C.Perrault (1683). *Ordonnance des cinq espèces de Colonnes selon la Mèthode des Anciens*.

Castellani, Elena (2000). *Simmetria e natura*. Editori Laterza.

Dick, Auguste (1981). *Emmy Noether (1882 -1935)*. Birkhauser.

Einstein, Albert (1915). *Sitzungsberichte*. Preussische Akademie der Wissenschaften.

Elkana, Yehuda (1977). *La scoperta della conservazione dell'Energia*. Feltrinelli.

Euclide (2007). *Elementi*. Bompiani.

Federico Laudisa, Edoardo Datteri (2011). *La natura e i suoi modelli : un'introduzione alla filosofia della scienza*. Archeetipolibri.

Kuhn, Thomas (1959). *Energy Conservation as an Example of Simultaneous Discvery*.

L.M.Brown (1978). «The idea of the neutrino». In: *Physics Today*, pp. 22–23.

Lange, Marc (2007). «Laws and meta-laws of nature: Conservation laws and symmetries». In: *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 38.

Lechner, Kurt (2014). *Elettrodinamica classica*. Springer.

Marco Vitruvio Pollione, testo a cura di L.Mingotto (1990). *De architectura III 1.1-9*. Edizioni Studio Tesi.

Pais, Abraham (2012). *Einstein. «Sottile è il signore»*. Bollati Boringhieri.

Poincaré, Henri (1902). *Science et hypothése*.

Richard Feynman Robert B. Leighton, Matthew Sands (1964). *The Feynman Lectures on Physics*. Addison–Wesley.

Weyl, Herman (1935). *Scripta Mathematica III*.

Weyl, Hermann (1975). *La simmetria*. Feltrinelli.