



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTA' DI INGEGNERIA

**Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile
Curriculum Trasporti**

**Modellazione stocastica delle scelte
di orario di partenza nelle reti di trasporto:
Analisi teorica ed esperimenti computazionali**

Relatore: prof. Claudio Meneguzzer

Laureando: Marco Baggio

ANNO ACCADEMICO 2011 – 2012

Si ringraziano vivamente

il relatore prof. Claudio Meneguzzer,
Carlo Giacomo Prato,
Simon,
Dmitry,
Klaas,
Marcin,
Nicolò,
Alice

per il contributo tecnico e morale dato allo scrivente
durante la realizzazione del presente elaborato.

Indice

Presentazione	7
1 Breve storia bibliografica del modello	9
2 Modello stocastico dinamico per la scelta del percorso e dell'orario di partenza	19
3 Implementazione del modello.....	25
4 Analisi di sensibilità: effetti dipendenti dalla globalità degli utenti	33
5 Analisi di sensibilità: effetti dipendenti dalla percezione del singolo utente	43
6 Il tempo di percorrenza e la dipendenza dal flusso.....	53
7 Estensione a tre percorsi, con sovrapposizione	63
8 Simulazione finale e conclusioni	75
Bibliografia	83

Presentazione

Col presente elaborato si vuole cercare di implementare un modello capace di descrivere le scelte della di orario di partenza per un gruppo di utenti che devono muoversi in una rete di trasporto nello stesso periodo temporale. Date un'origine ed una destinazione comuni, dei percorsi possibili che li colleghino ed un orario preferito comune per raggiungere la destinazione, si tratta di prevedere come un certo numero di viaggiatori scelga la combinazione di orario di partenza e percorso ritenuta più attrattiva.

La struttura dell'elaborato si basa su di un lavoro pubblicato da Moshe Ben-Akiva, Andre De Palma e Pavlos Kanaroglou nel 1986, in cui gli autori propongono un modello stocastico di scelta discreta, di tipo *Nested Logit*, per descrivere le scelte dei viaggiatori che devono raggiungere la destinazione, in base alle condizioni incontrate nella rete.

Si presenteranno brevemente quegli articoli che hanno portato, con sviluppi successivi, a definire quanto presentato da Ben-Akiva e colleghi. Seguendo l'evoluzione della problematica trattata si affronterà prima la definizione dello schema di rete, poi di un costo generalizzato per chi la percorre, che infine diventerà l'utilità aleatoria introducendo un modello stocastico. Anche il modello di scelta discreto subisce un'evoluzione, da modello che consideri solamente un percorso e la dinamica *within day*, si è passati alla dinamica combinata *within day* e *day to day*, infine si sono introdotti più percorsi tra cui scegliere, come nel caso di reti reali.

Sarà poi implementato il modello e su di esso verrà condotta un'analisi di sensibilità, andando a modificare il valore assegnato ad alcuni parametri e analizzando come muti la soluzione fornita. Particolare attenzione sarà posta a definire dei domini di convergenza, ossia le regioni dove i valori dati ai vari parametri assicurino il raggiungimento di una soluzione stabile, cercata con la dinamica *day to day*, secondo un certo criterio di convergenza.

Le analisi continueranno testando anche modifiche più consistenti, andando a mutare le assunzioni iniziali sulla costruzione della funzione di utilità aleatoria, passando da delle semplici funzioni lineari a delle forme più elaborate che possano meglio descrivere quanto un viaggiatore possa ritenere attrattiva o meno una data alternativa. Si cercherà inoltre di affinare la sensibilità degli utenti alle condizioni di traffico incontrate, introducendo le equazioni fondamentali della teoria del deflusso.

Si modificheranno poi anche alcune ipotesi fondamentali del Logit, per ottenere un modello misto che possa descrivere correttamente le scelte per alternative parzialmente sovrapposte, come possono essere i percorsi nelle reti reali. Si costruirà così un modello di tipo Logit *Kernel*, che non potrà essere risolto con una forma chiusa, ma richiederà l'implementazione di una soluzione numerica. Si procederà quindi a costruire un simulazione, seguendo la tecnica del *Latin Hypecubes Sampling*, in modo da ricercare la soluzione in una maniera efficiente nonostante la gran mole di calcoli da eseguire.

Infine l'elaborato verrà concluso con una applicazione ispirata ad un caso reale. Si andrà a testare il modello su di una rete con delle caratteristiche esistenti, volendo simulare il comportamento di una grande quantità di utenti che deve raggiungere lo stadio dal centro città, dovendo quindi arrivare tutti al medesimo orario prefissato per assistere ad un evento sportivo. Si eseguirà quest'ultima simulazione combinando assieme alcune delle modifiche apportate singolarmente al modello nei vari capitoli dell'elaborato, in modo da specificare un modello più sensibile e realistico e testarne la correttezza e la robustezza.

1 Breve storia bibliografica del modello

Si vuole cominciare il presente lavoro con una rassegna di quegli articoli, pubblicati sulle riviste del settore dei trasporti, che storicamente si sono occupati di interpretare la congestione e che, passo dopo passo, sono arrivati a formulare la teoria che si pone alla base della tematica discussa in questo elaborato.

E' negli Stati Uniti che si comincia a focalizzare l'attenzione sul problema della congestione. Fin dagli anni sessanta si vuole fornire un supporto decisionale, agli organi federali preposti, per la valutazione della necessità e della bontà degli investimenti atti alla realizzazione di nuove infrastrutture stradali.

Il primo concetto introdotto, osservando la congestione, è stato il cosiddetto "*bottleneck*", che traducendo letteralmente vuole significare il collo di bottiglia. Con questo si cerca intuitivamente di spiegare come alla grande domanda di utilizzo di servizi di trasporto si opponga spesso un limite fisico decisamente inferiore dell'offerta, determinandone il disservizio, che si esplicita nella congestione. Il *bottleneck* viene enunciato e descritto da W. Vickrey, un economista americano, nel 1969 su una rivista per articoli a carattere prettamente economico, chiaro segnale che tali dissertazioni fossero finalizzate ad un giudizio di tipo economico sulle opere esistenti e da realizzare.

Vickery definisce come *bottleneck* un segmento stradale relativamente breve di capacità fissa, decisamente minore però della domanda di traffico dei segmenti che lo precedono. Questa "strettoia" non produce ritardi rilevanti agli utenti finché non venga raggiunto un valore di flusso medio pari alla capacità, ma una volta superata per periodi di tempo significativi si creerà una coda a monte della strettoia e conseguenti aumenti dei ritardi causati ai viaggiatori. Inoltre la coda verrà smaltita quando la domanda di utilizzo del segmento sarà inferiore alla capacità dello stesso. La domanda a sua volta può essere depressa proprio dalla congestione, in quanto l'aumento del tempo di percorrenza spinge i nuovi utenti a cercare percorsi alternativi più favorevoli oppure a non partire affatto. Questo dunque sarà lo schema di base per i modelli di coda deterministica, con flusso in condizioni sovrassature a monte del *bottleneck*, quindi alimentazione continua della coda, e tasso di servizio costante.

La tematica effettivamente discussa nel presente elaborato viene formalizzata da C. Hendrickson e G. Kocur in un articolo nel 1981. Il problema prospettato consiste nelle modalità di scelta dell'orario di partenza da parte del pendolare, che minimizzi il proprio costo generalizzato di viaggio. Una simile questione era già stata affrontata anche da Vickrey nell'articolo citato poc'anzi, ma in un contesto di ipotesi molto semplificative.

Inoltre l'infrastruttura schematizzata in questo articolo è molto simile a quella descritta da Wickrey: gli utenti devono superare un collo di bottiglia di capacità definita, un parametro noto e deterministico. Se la domanda è inferiore alla capacità gli utenti riescono ad attraversare la strettoia senza intoppi con un tempo di percorrenza pressoché nullo, ma se la domanda eccede tale valore si genera la congestione, esattamente come prima. Il tempo perso rimanendo imbottigliati viene calcolato dal rapporto tra la lunghezza della coda in quel dato istante e il tasso di servizio costante del *bottleneck*. Il numero dei veicoli in coda viene facilmente determinato dall'integrazione, tra l'istante di inizio della coda t_0 (non appena il flusso superi la capacità) e l'istante considerato, della differenza tra il tasso di arrivo dei veicoli e il tasso di smaltimento costante:

$$t_{wait} = \frac{1}{s} \int_{t_0}^t (r(u) - s) du \quad (1.1)$$

dove $r(u)$ rappresenta il tasso di partenze in un dato istante temporale u , mentre s è il valore della capacità deterministica del collo di bottiglia.

Hendrickson e Kocur utilizzano poi il concetto di equilibrio enunciato nei principi di Wardrop, in modo da determinare l'andamento nel tempo delle partenze che garantisca l'uguaglianza dei costi tra tutti gli utenti. Nel calcolo del costo generalizzato introducono un termine detto "schedule delay", ossia ritardo previsto, che praticamente misura il costo aggiuntivo apportato dalla distanza temporale tra l'orario di arrivo effettivamente desiderato e l'orario effettivo previsto per la partenza in un certo istante. Si aggiunge così un nuovo costo oltre a quello del tempo fisico dello spostamento, ma, semplificando la parte comune e costante per tutti gli utenti, ai fini dell'equilibrio può essere considerato solo quello perso in coda. Con il nuovo termine si vogliono spiegare le opzioni offerte realmente al pendolare, che può scegliere cosa sia più conveniente tra una partenza anticipata o ritardata (con un costo marginale maggiore in caso di arrivo in ritardo), ma con meno congestione, quindi minor tempo di percorrenza, e una partenza più puntuale ma che si colloca nel picco della congestione. Il termine dello schedule delay, abbreviato d'ora in avanti come SD, viene proposto con la seguente formulazione, per tenere conto della possibilità di arrivi anticipati o successivi rispetto all'orario preferito:

$$SD = \begin{cases} \alpha_1(t_{out} - t_{eff}) & \text{se } t_{out} > t_{eff} \\ \alpha_2(t_{eff} - t_{out}) & \text{se } t_{out} < t_{eff} \end{cases} \quad (1.2)$$

Questo semplice modello deterministico viene risolto tramite integrazione delle diverse voci di costo generalizzato in un intervallo di tempo necessario a soddisfare tutti gli utenti, trovando così la funzione che determina il tasso di partenza per ogni istante temporale.

Il concetto di SD espresso in questo articolo verrà mantenuto pressoché invariato nella sostanza negli articoli successivi, a riconoscimento quindi di una sostanziale validità. Questo sarà dunque lo schema di base del funzionamento anche per tutti le simili situazioni di valutazione per il pendolare che saranno considerate nello sviluppo di questo elaborato.

Finora si sono citati due modelli di tipo deterministico, d'altronde questi erano decisamente semplici da risolvere, viste anche le differenti potenze di calcolo all'epoca della letteratura considerata. Purtroppo mostrano presto i loro limiti, in quanto l'utente, nonostante si consideri la tipologia del pendolare e quindi si possa ritenere esperto a sufficienza della rete che percorre con frequenza, non dispone della conoscenza perfetta, cioè non è in grado di stabilire con certezza quale sia il suo costo di percorrenza in funzione delle caratteristiche della rete in un dato momento. Per valutare quest'incertezza si cerca di utilizzare dei modelli probabilistici, in particolare riscuote un forte consenso il Logit, in quegli anni recentemente proposto da D. McFadden, grazie alla sua forma chiusa che porge risultati facilmente calcolabili.

Il modello di tipo Logit si fonda sulla teoria dell'utilità aleatoria, secondo la quale gli uomini sono "utility maximizers", cioè perseguono l'alternativa che massimizza la loro utilità percepita, che di discosta dal valore reale (deterministico) per un errore di percezione. L'ipotesi più importante, da cui è possibile ricavare la forma del Logit, è che l'errore di percezione sia indipendente ed identicamente distribuito (IID) secondo una distribuzione di tipo Gumbel per tutte le varie alternative (utilità). Da questa ne consegue l'indipendenza delle alternative (proprietà IIA, *independence of irrelevant alternatives*) e la ormai ben nota formula, semplice da utilizzare ai fini previsionali. Per quanto la distribuzione di tipo Gumbel possa apparire un brillante stratagemma per ottenere una forma chiusa, questa non è poi molto dissimile da una distribuzione normale in termini di forma vicino al valor medio, ma diversa nelle code ed asimmetrica. Questa intuizione poi è valsa per il premio Nobel a McFadden nel 2000.

Lo sviluppo di un modello probabilistico di tipo Logit applicato al *bottleneck* viene seguito da M. Ben-Akiva, A. De Palma ed altri, che pubblicano vari articoli sull'argomento durante gli anni ottanta. L'infrastruttura in questo caso viene schematizzata come un segmento di capacità infinita seguito dalla strozzatura alla Vickrey, che ne definisce la capacità effettiva e deterministica. Il

primo tratto rimane per definizione sempre privo di congestione, dunque percorribile con una velocità costante che determina una componente costante del tempo di percorrenza, da sommare semplicemente al tempo di attesa in coda quando si manifesti tale fenomeno. Ne consegue inoltre che a valle del collo di bottiglia si abbia un flusso massimo pari alla capacità, mentre a monte dello stesso si localizzi l'eventuale congestione, con i veicoli fermi incolonnati ad attendere il loro istante di passaggio. La colonna di veicoli non necessita di una dimensione fisica, in quanto si suppone che il tempo di attesa sia preponderante rispetto al tempo necessario per percorrere lo sviluppo della coda, quindi in pratica è come se l'intera congestione si localizzi in un punto immediatamente precedente il collo di bottiglia.

Aggiustate queste componenti del tempo di percorrenza, l'idea di base presentata da De Palma ed altri nel 1983 è come costruire un concetto di utilità, meglio di disutilità visto che si tratta esclusivamente di valori negativi, per i vari utenti. Questa assume pressoché la stessa forma del costo generalizzato per l'equilibrio secondo Hendrickson e Kocur:

$$U(t) = V(t) + \mu \varepsilon(t) \quad V(t) = -\alpha TT(t) + SD(t) \quad (1.3)$$

Il concetto di SD visto in precedenza viene leggermente aggiustato, si introduce infatti un intervallo desiderato, che contiene al centro l'orario di arrivo ottimale, per schematizzare un minimo di flessibilità negli arrivi rispetto ad un singolo istante desiderato da tutti gli utenti. Quindi esprimendo SD in notazione compatta:

$$SD = \beta \Delta |\theta| - \beta \theta (t_{ott} - t - t_{cost} - t_{wait}(t)) \quad (1.4)$$

$$\text{dove } \theta = \begin{cases} 1 & \text{se } t < t' \\ 0 & \text{se } t' < t < t'' \\ -\gamma & \text{se } t > t'' \end{cases} \quad (1.5)$$

I coefficienti β e $\beta\gamma$ rappresentano la disutilità unitaria del tempo, per arrivi anticipati e ritardati. Δ è la componente che descrive la flessibilità, quanto prima dopo l'istante ottimale ti possa arrivare senza penalizzazioni. Infine t' e t'' rappresentano gli istanti di partenza per giungere a destinazione, date le specifiche condizioni di percorrenza incontrabili nel percorso, all'inizio oppure al termine dell'intervallo preferito $t_{ott} \pm \Delta$.

La determinazione dei coefficienti β e γ è compito di economisti o studiosi di scienze sociali, che spesso si affiancano alla figura del trasportista nei vari articoli presentati o, come in questo caso, i coefficienti vengono presi da altri studi sull'argomento precedentemente pubblicati. Ma a parte questa finezza la forma di base del termine SD non muta, cresce sempre linearmente man mano che ci si allontana, sia in senso crescente che decrescente, dall'orario di arrivo desiderato.

Il tempo di percorrenza è calcolato come una costante finché il tasso di partenze (traslato lungo il percorso rappresenta il tasso di flusso) non superi la capacità massima attribuita al collo di bottiglia, creando così la situazione di congestione e la relativa coda. A questo punto si è detto che al tempo di percorrenza per il percorso libero viene aggiunto il tempo atteso dall'utente per essere "servito" dal *bottleneck*, ossia quando la coda $D(t)$ che lo precede viene smaltita con il tasso di servizio costante stabilito:

$$TT = t_{cost} + \frac{D(t)}{s} \quad \text{se } D(t) > 0 \quad (1.6)$$

$$D(t) = \int_{t_0}^t (r(u) - s) du$$

In questo modo, e con le altre ipotesi comportamentali necessarie, è possibile ricavare un modello di scelta di tipo Logit e calcolare la probabilità della scelta di un certo istante di partenza. De Palma

dimostra anche come esista una configurazione di equilibrio per la distribuzione delle partenze nel periodo considerato che soddisfi tutte le condizioni poste.

$$p(t) = \frac{\exp [V(t)/\mu]}{\int_{t_1}^{t_1+T} \exp [V(u)/\mu] du} = \exp [V(t)/\mu] / E \quad (1.7)$$

Questa particolare formula rappresenta un Logit continuo, si vede infatti come il denominatore non sia composto da un insieme discreto di alternative, ma dall'integrale su una variabile continua qual è il tempo, tra l'istante iniziale t_1 e l'istante finale $t_1 + T$.

La forma della distribuzione delle partenze, cioè la dispersione temporale delle scelte, che così si ricava dipende anche da un parametro di scala μ che va a normalizzare l'errore di tipo Gumbel (1.3) e da applicare quindi agli esponenti della formula Logit. Questo parametro va ad modificare tutti i coefficienti delle variabili utilizzate per calcolare la parte deterministica dell'utilità, rendendo i valori più o meno simili tra loro. Non è possibile però stimare tale coefficiente, in quanto è possibile stimare solo il rapporto tra i parametri che determinano l'utilità e il parametro di scala, ma per avere una rappresentazione del suo significato e degli effetti che produce si pone l'attenzione sui due estremi. Per valori di μ che tendono allo zero (errore pressoché nullo) tutti i coefficienti schizzano all'infinito, prospettando inoltre una scelta di tipo deterministico per tutti gli utenti, mentre per valori infiniti tutti i coefficienti vengono abbattuti a zero, la scelta finale in questo caso risulta perfettamente casuale, in accordo con la totale ignoranza della rete da parte degli utenti.

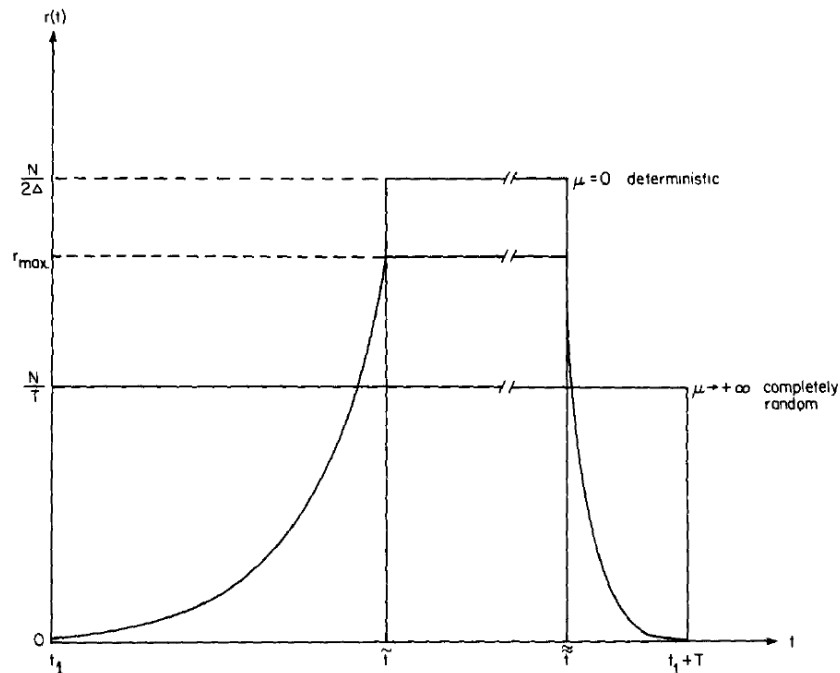


Fig 1.1: Effetto del parametro di scala sulla distribuzione delle scelte, da De Palma (1983).

Nell'articolo viene dimostrato inoltre che, nel caso vengano raggiunte le condizioni necessarie ad innescare la congestione, può esistere solamente un unico periodo con tali caratteristiche. Tale dimostrazione non viene qui riportata, in quanto per giungere alla tesi è necessario ricavare alcune proprietà della distribuzione delle partenze, andando a risolvere delle equazioni differenziali, per cui si invita a consultare l'articolo in questione per i dettagli.

Proseguendo in questa direzione di ricerca Ben-Akiva e De Palma pubblicano un'evoluzione dinamica dello stesso modello. Lo schema della rete rimane inalterato, così come il modello Logit continuo e la definizione dell'utilità, ma la soluzione viene ricercata introducendo la possibilità che una quota parte di utenti, che si ricorda essere sempre dei pendolari, decidano ogni giorno di cambiare il proprio orario di partenza. Ovviamente il numero totale di viaggi rimane lo stesso nel periodo considerato, vi è quindi un complessivo bilancio tra gli utenti che abbandonano un certo istante temporale e quelli che si aggiungono ad un altro.
Dato il numero di partenze in un dato intervallo considerato

$$x(t, \omega) = \int_t^{t+\delta} r(u, \omega) du \quad (1.8)$$

il numero di persone che cambiano idea per ciascun intervallo viene così definito:

$$\frac{\partial x(t, \omega)}{\partial \omega} = \sum_{t' \neq t} x(t', \omega) R(t', t, \omega) - x(t, \omega) \sum_{t' \neq t} R(t, t', \omega) \quad (1.9)$$

Ossia la variazione di partenze è data dagli utenti provenienti da altri intervalli $x(t')$, moltiplicata per la probabilità che questi scelgano l'intervallo considerato $R(t', t)$, a cui vanno poi sottratti i viaggiatori che, allo stesso modo, scelgono altri istanti di partenza partendo da quello considerato. Scegliendo di esprimere la variazione delle scelte con un semplice modello di tipo Logit, moltiplicato per la probabilità che gli utenti ripensino la propria decisione, quindi

$$R(t', t, \omega) = R \frac{\exp[V(t, \omega) / \mu]}{\sum_{t''} \exp[V(t'', \omega) / \mu]} \quad (1.10)$$

si ottiene la variazione giornaliera del numero di partenze per un dato intervallo temporale

$$\frac{\partial x(t, \omega)}{\partial \omega} = R \left[N \frac{\exp[V(t, \omega) / \mu]}{\sum_{t''} \exp[V(t'', \omega) / \mu]} - x(t, \omega) \right] \quad (1.11)$$

Passando poi a considerare il tempo come una variabile continua si ottiene un modello di tipo Logit continuo, dove alla sommatoria viene sostituito un integrale. Inoltre il numero di partenze per un intervallo unitario di tempo è esprimibile come tasso di partenze r , quindi:

$$\frac{\partial r(t, \omega)}{\partial \omega} = R \left[N \frac{\exp[V(t, \omega) / \mu]}{\int \exp[V(u, \omega) / \mu] du} - r(t, \omega) \right] \quad (1.12)$$

Il modello dinamico sarà dato quindi dalla soluzione del giorno precedente sommata alla variazione del tasso di partenze nel giorno in esame.

$$r^{n+1}(t, \omega) = r^n(t, \omega) + \frac{\Delta r(t, \omega)}{\Delta \omega} = r^n(t, \omega) + R \left[N \frac{\exp[V(t, \omega) / \mu]}{\int \exp[V(u, \omega) / \mu] du} - r^n(t, \omega) \right] \quad (1.13)$$

Dall'ultima formula presentata già si denota quale sia la struttura utilizzata per effettuare l'implementazione della soluzione numerica. Ogni giorno richiede una nuova iterazione e la nuova

assegnazione segue la logica che “l’utente di oggi effettuerà le proprie scelte sulla base di ciò che ha sperimentato ieri”. Quindi, accettando la semplificazione di un tasso di revisione delle proprie scelte costante per ogni istante temporale, una quota parte di pendolari andrà a ricollocarsi in istanti temporali ritenuti più convenienti al giorno precedente. Il processo dinamico dovrebbe giungere ad uno stato stazionario, ossia un perfetto equilibrio, quando l’utilità dei singoli istanti di partenza non varia di giorno in giorno, condizione al limite, cioè che si verifica per un numero infinito di iterazioni. Si deve quindi stabilire una misura di convergenza adeguata per stoppare il processo quando il passaggio al giorno successivo non apporti apprezzabili variazioni ai risultati già calcolati. Ben-Akiva fissa questo valore come il prodotto tra il tasso di ripensamento ed un ϵ da decidere, dove un minor valore di quest’ultimo richiede una maggiore precisione.

Inoltre, per ovviare le difficoltà connesse al calcolo degli integrali che compaiono nella formula del Logit continuo, si divide la variabile continua t , orario di partenza, in vari intervalli discreti di dimensione costante Δt , sufficientemente piccola da mantenere una buona somiglianza con il modello teorico dove gli intervalli sono infinitesimi, δt . Questa modifica trasforma l’integrale in una sommatoria, e il Logit stimerà così la probabilità di scegliere un certo intervallo temporale di partenza che, moltiplicata a sua volta per il numero totale di viaggiatori, fornirà la quantità di partenze di quell’intervallo. Non si ragiona più quindi in termini di tasso di partenza, ma di numero effettivo di nuovi viaggi nell’intervallo temporale considerato.

$$x^{n+1}(t, \omega) = x^n(t, \omega) + \frac{\Delta r(t, \omega)}{\Delta \omega} = x^n(t, \omega) + R \left[N \frac{\exp[V(t, \omega) / \mu]}{\sum \exp[V(u, \omega) / \mu]} - x^n(t, \omega) \right] \quad (1.14)$$

Per far lavorare la simulazione occorre specificare infine delle condizioni iniziali, il cosiddetto “giorno 0”, la soluzione iniziale da cui partire a iterare. Questa viene impostata secondo l’ipotesi che l’utente che non sa nulla delle condizioni della rete effettuerà la sua prima valutazione come se la rete fosse libera. Con tale definizione si assegnano la prima volta i viaggiatori ricercando una condizione pseudo stazionaria delle partenze, ottenuta fissando nulla la congestione. Questa soluzione porterà a delle incongruenze rispetto all’effettiva capacità della rete, in quanto nell’ipotesi di trascurare la congestione l’infrastruttura deve smaltire un flusso maggiore della propria capacità, ma il processo iterativo conseguente provvederà a correggere immediatamente questo problema e a ridistribuire le partenze secondo l’effettiva utilità dei diversi intervalli temporali.

Ancora nel 1986 Ben-Akiva e De Palma espandono le loro analisi, che si riportano qui brevemente ma verranno meglio trattate nel prossimo capitolo. Il modello di partenza è quello presentato negli anni precedenti, ma viene reso più sofisticato aggiungendo nuove dimensioni di scelta: il pendolare non deve più solamente decidere l’istante (o intervallo) temporale di partenza che più gli è vantaggioso, secondo la sua percezione, ma si trova a valutare anche una gamma di percorsi diversi. La domanda viene inoltre considerata elastica, l’utente infatti può comparare l’utilità percepita per uno spostamento effettuato utilizzando l’infrastruttura stradale con un’altra alternativa di trasporto non esplicitata. I livelli di scelta sono quindi diventati tre, gerarchizzati opportunamente per poter utilizzare un’appropriata struttura del modello Logit, un modello di tipo Nested-Logit. Il modello viene qui riportato nella sua formulazione risolutiva, per poter osservare come, nonostante la maggior complessità, non muti comunque la logica dinamica ed iterativa presentata nell’articolo precedente. Si vuole quindi calcolare una configurazione stabile per il tasso di partenze, o meglio in questo caso il prodotto di esso per la lunghezza dell’intervallo temporale discretizzato, cioè di fatto un numero di viaggiatori anziché un tasso. Tale valore verrà fornito dalla seguente relazione, ottenuta per intervalli temporali discreti:

$$R^{n+1}(t, \omega) = r^{n+1}(t, \omega) h = \tag{1.15}$$

$$R^n(t, \omega) + R \left[N \frac{\exp[V(t, \omega) / \mu_1]}{\exp[V^*(t, \omega) / \mu_1]} \frac{\exp[V^*(t, \omega) / \mu_2]}{\exp[V^*(*, \omega) / \mu_2]} \frac{\exp[V^*(*, \omega) / \mu_3]}{\exp[V^*(*, \omega) / \mu_3] + \exp[V_0 / \mu_3]} - R^n(t, \omega) \right]$$

Le componenti della formula verranno spiegate nel prossimo capitolo ma, per facilitare la comprensione, si anticipa che i termini V^* rappresentano l'utilità dei *nest*, mentre V_0 l'utilità di non utilizzare l'infrastruttura stradale.

Anche in questo caso si ricorre alla soluzione iniziale, da cui partire ad iterare, andando a calcolare l'equilibrio considerando nulla la congestione ossia la situazione pseudo stazionaria. Ed anche in questo caso il processo si stopperà una volta raggiunta l'accuratezza desiderata. La misura di convergenza viene effettuata sulla massima variazione tra i tassi di partenza in due giorni successivi e confrontata con il prodotto tra il tasso di ripensamento ed un ϵ scelto, esattamente la stessa cosa che accadeva nell'articolo precedente con un percorso solo.

Il modello così esposto costituisce la spina dorsale del presente elaborato, questo infatti verrà implementato e su di esso verranno condotte delle simulazioni numeriche, per testarne alcune proprietà enunciate nell'articolo, ed altre analisi. Inoltre nelle sezioni successive si cercherà di apportare delle miglione in alcune assunzioni.

Si presenta infine un altro tipo di studio, seguito da H. Mahmassani e R. Herman sempre nei primi anni ottanta. In questo caso si torna ad un modello che ricerca un equilibrio di tipo deterministico, quindi apparentemente si compie un passo indietro rispetto ai modelli probabilistici di Ben-Akiva, ma viene citato più per l'impostazione concettuale che per i risultati effettivamente conseguiti. Si descrive perciò brevemente.

Dalla definizione di Wardrop l'equilibrio si verifica quando un utente non può ridurre il proprio costo di percorrenza in seguito ad un cambiamento unilaterale di percorso. Si prende allora il costo generalizzato, così come descritto da Hendrickson e Kocur, composto da un tempo di viaggio e un termine SD per l'anticipo o per il ritardo rispetto all'orario preferito, tutti termini con dipendenza dell'orario di partenza. Il termine SD non viene manipolato, la novità interessante consiste nel calcolo del tempo di percorrenza non più come un valore costante più un'aggiunta in seguito al verificarsi della congestione, ma si introduce una relazione flusso-velocità. Il collo di bottiglia non è più puntuale, ma diventa un segmento esteso, con delle certe caratteristiche, soggetto alla legge fondamentale del deflusso ricavata sempre da Wardrop. In questo modo si introduce una maggior sensibilità dell'utente alle condizioni di traffico, infatti non avrà più un comportamento a scalino del tipo "va tutto perfettamente finché non comincia la congestione", ma percepirà un fastidio (ritardo) crescente man mano che ci si sperimenta la congestione.

Utilizzando un semplice modello di Greenshield, relazione lineare inversa tra velocità e densità, il sistema può andare teoricamente a lavorare in condizioni ben oltre le condizioni di saturazione, andando nella parte instabile e discendente della curva di deflusso fino ad arrivare alla densità massima del segmento, la densità teorica di "jam", in cui i veicoli non riescono più a muoversi, producendo così un flusso nullo. Il tempo di percorrenza del segmento-collo di bottiglia viene così calcolato, una volta fissata la lunghezza L :

$$v = v_m \left[1 - (k / k_j) \right] \tag{1.16}$$

$$TT = L / v$$

Seguendo il principio di Wardrop si cerca il flesso della funzione costo generalizzato individuale rispetto al tempo di partenza (dC/dt), ed attraverso una derivazione analitica si giunge alla relazione finale che lega il tasso di partenze all'orario, espressa come:

$$\lambda(t) = k_j \left[\frac{l\beta_1 t - v_m + v_m}{\beta_1 t + \beta_0} \right] / (\beta_1 t + \beta_0) \quad (1.17)$$

Si fa notare come questa impostazione non dipenda dal numero di utenti che desiderano utilizzare l'infrastruttura. Infatti sia il tasso di partenze che la sua successiva integrazione temporale, per avere il numero cumulativo delle partenze, dipendono solamente dalle caratteristiche della rete e dalle preferenze degli utenti, in termini di negoziazione tra tempo speso nella congestione e un arrivo anticipato o ritardato, espresse dai parametri β qui non esplicitati. Nell'articolo si può comunque vedere che, a seconda dei parametri utilizzati, prima o poi si tenda a raggiungere la congestione massima e di conseguenza la curva cumulativa delle partenze tenda ad assestarsi lungo un asintoto orizzontale. Si riportano dei grafici presentati nell'articolo per rendere meglio quel che accade.

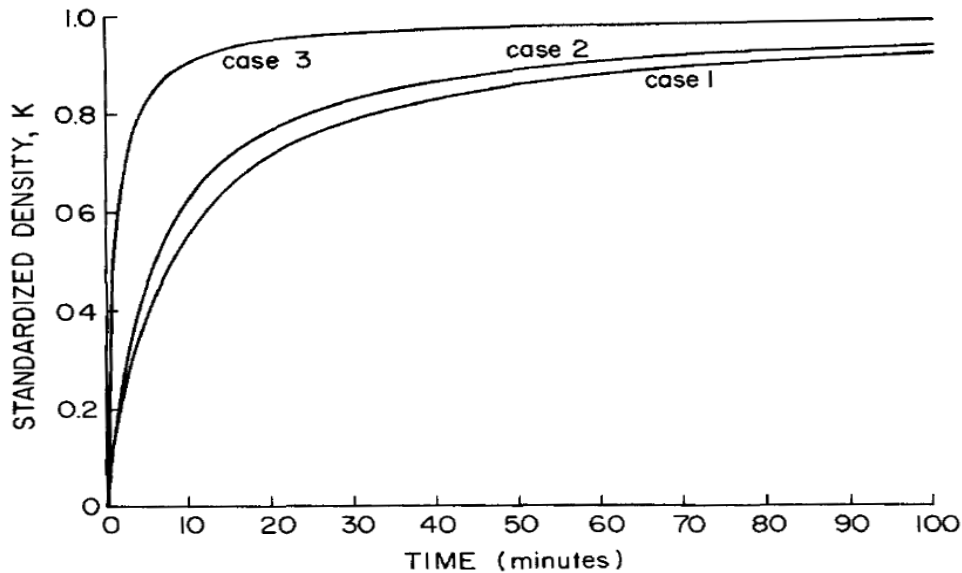


Fig 1.2: Andamento della densità dei veicoli in funzione del tempo, da Mahmassani (1984).

È evidente come, secondo questa impostazione, una volta raggiunta la congestione non si torni più indietro. Potenzialmente si possono aggiungere sempre nuovi utenti, che troveranno in qualche modo la propria condizione di equilibrio, ma questi incontreranno sempre condizioni di rete peggiori alle precedenti. In pratica, procedendo con l'integrazione temporale fino ad arrivare alla saturazione completa, possono anche partire nuovi viaggiatori ma che non arriveranno mai a destinazione, in quanto la velocità a cui sono costretti a procedere è nulla. Il numero cumulativo di partenze è mostrato nel grafico successivo, si nota come tenda anch'esso ad un asintoto orizzontale, descrivendo di fatto un valore massimo di utenti soddisfabile.

Questa evoluzione è chiaramente inaccettabile, anche perché si pensi come, seguendo la relazione biunivoca densità-velocità, si passi poi alla relazione non biunivoca densità-flusso ed in particolare, oltre un certo valore di densità, si ricada nel ramo discendente e per di più instabile della curva.

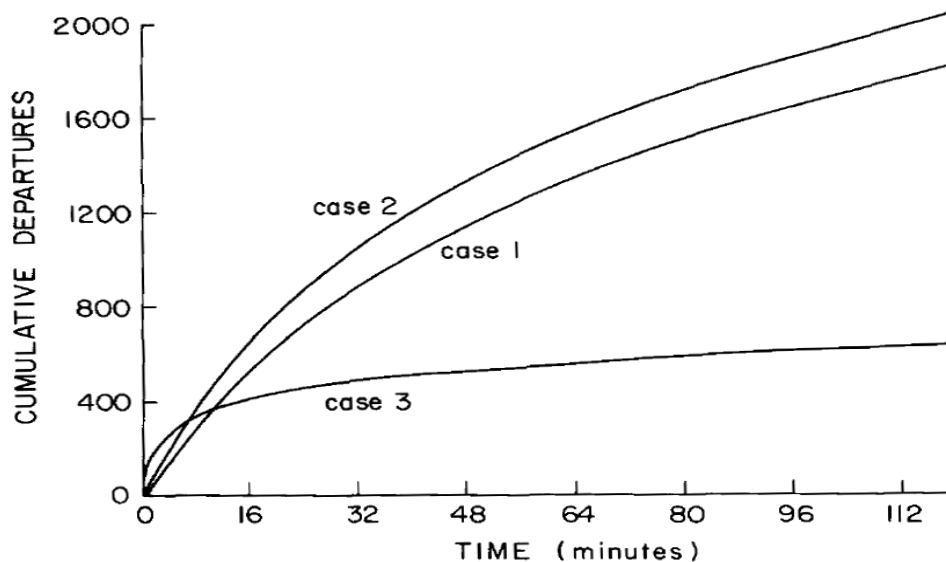


Fig 1.3: Numero cumulativo di partenze in funzione del tempo, da Mahmassani (1984).

Da questo articolo si prenderà quindi spunto quando, nel proseguo di questo elaborato, si vorrà indagare il cambiamento delle scelte dell'utenza rispetto alla metodologia con cui viene stimato il tempo di percorrenza nella rete.

Si è quindi presentata una sorta di evoluzione che porta all'argomento discusso nel presente lavoro. Partendo da un modello statico e deterministico, basato sui principi dell'equilibrio indicati da Wardrop, si è poi affinato un modello probabilistico per cercare di cogliere la stocasticità riscontrata nel comportamento degli individui. Si è poi espanso in un modello dinamico, che cerca di seguire l'evoluzione della variabili insite nel modello per produrre nuove informazioni utili al raggiungimento di uno stato di equilibrio. Infine si è considerata una diversa metodologia, una singola componente del modello, che può essere applicata al filone di cui si è seguita l'evoluzione per cercare di ottenere risultati più accurati.

2 Modello stocastico dinamico per la scelta del percorso e dell'orario di partenza

In questo capitolo si vuole presentare ed esaminare in dettaglio il lavoro proposto da Ben-Akiva, De Palma e Kanaroglou nel 1986. Come si è già anticipato si tratta di un modello probabilistico utilizzabile per prevedere la scelta dell'orario di partenza e del percorso per un certo numero di pendolari che hanno a disposizione più percorsi, previsione che è ottenuta mediante un modello di tipo Nested-Logit. L'equilibrio della rete in esame viene ricercato attraverso un processo dinamico "day to day" per l'aggiornamento delle scelte effettuate in funzione delle condizioni di viaggio sperimentate dagli utenti; nelle formule infatti, oltre a t (orario di partenza), compare sempre il termine ω che rappresenta il giorno considerato.

Innanzitutto si definisce una funzione di utilità sistematica per i singoli utenti. Come già visto, si tratta in realtà di una disutilità data dalla somma delle diverse voci (con segno negativo) del costo generalizzato:

$$V_i(t, \omega) = d_i - v \text{ toll}_i(t, \omega) - \alpha TT_i(t, \omega) - SD_i(t, \omega) \quad (2.1)$$

Il termine d_i rappresenta una costante specifica del percorso i -esimo, una quota parte di utilità sistematica che non si riesce a spiegare con le variabili considerate ma che distingue in termini relativi un cammino da un altro. Tale costante serve, in fase di stima dei parametri del modello, per riprodurre più accuratamente le scelte osservate, deve essere quindi stimata a partire da dati raccolti, ma, dal momento che nel presente lavoro non si dispone di osservazioni dirette, essa non verrà considerata nelle analisi successive.

Il termine toll_i rappresenta un eventuale pedaggio per l'uso del percorso i , possibilmente modulato per fasce temporali (dipendenza da t) [bisognerebbe spiegare perché dipende anche da ω]. Nell'articolo in esame viene considerata questa ipotesi, finalizzata a valutare la possibile efficacia di politiche di *road pricing*, ma non essendo utilizzata nel presente elaborato questa variabile viene omessa.

I termini TT_i e SD_i mantengono la stessa forma presentata nel capitolo precedente [non avendolo letto, non so se in quella sede venisse spiegato perché SD non ha un parametro associato] e vengono qui riportati per completezza. Il TT per ciascun viaggiatore viene calcolato come un tempo di percorrenza costante, quando l'infrastruttura non presenta congestione, sommato ad un termine di attesa in coda dovuto ad un "bottleneck" con capacità deterministica. Si introducono tre componenti di tempo costanti, in quanto Ben-Akiva et al. dividono il generico percorso i in altrettanti tronconi. Ai fini del calcolo la prima componente risulta molto importante, determina infatti lo sfasamento che intercorre tra la partenza del viaggiatore e l'arrivo al collo di bottiglia, momento nel quale verrà effettuata la valutazione della coda presente, come evidenziato nella formula sottostante.

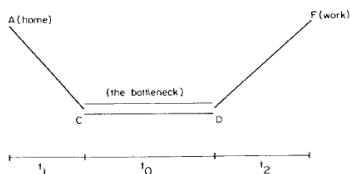


Fig 2.1: Tempi di percorrenza costanti.

$$TT_i(t, \omega) = t_{costi}^1 + t_{costi}^0 + t_{costi}^2 + t_{waiti}(t, \omega) = \quad (2.2)$$

$$t_{costi}^1 + T_{costi} + D_i(t + t_{costi}^1, \omega) / s_i$$

SD rappresenta la differenza tra l'orario di arrivo desiderato e l'orario di arrivo effettivo, considerando come orario desiderato un intervallo temporale. Gli autori hanno scelto di dare a questa variabile una forma semplice, ipotizzando una relazione lineare tra la relativa disutilità e la distanza temporale rispetto all'arrivo desiderato, come mostrato anche dal grafico seguente.

$$SD_i(t, \omega) = \begin{cases} \beta[t^* - \Delta - t - TT_i(t, \omega)] & \text{per } t < \bar{t}_i = t^* - \Delta - TT_i(\bar{t}_i, \omega) \\ 0 & \text{per } \bar{t}_i < t < \bar{\bar{t}}_i \\ \beta\gamma[t + TT_i(t, \omega) - t^* - \Delta] & \text{per } t > \bar{\bar{t}}_i = t^* + \Delta - TT_i(\bar{\bar{t}}_i, \omega) \end{cases} \quad (2.3)$$

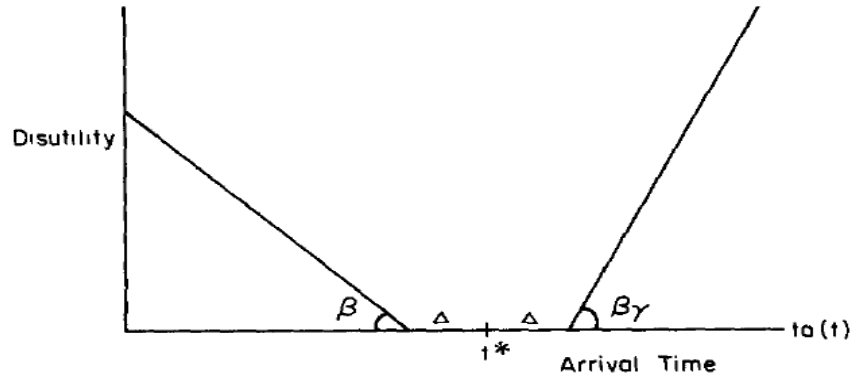


Fig 2.2: Andamento del termine SD in funzione del momento di arrivo.

Il grafico mostra la forma lineare scelta, si nota il tratto orizzontale di valore nullo, centrato nel tempo di arrivo t^* (il tempo ottimale), questo è il periodo desiderato per gli arrivi, la cui ampiezza è determinata dalla flessibilità Δ . Si nota che il grafico è presentato in funzione del tempo di arrivo, il quale a sua volta è funzione dell'orario di partenza, la funzione SD dovrà dunque essere traslata lungo l'asse dei tempi della quantità pari al tempo di percorrenza associato a ciascun orario di arrivo. Si distinguono inoltre due diverse pendenze per le rette che rappresentano la disutilità, si ipotizza infatti che un arrivo in ritardo sia maggiormente penalizzante di un arrivo in anticipo, il costo unitario dello *schedule delay* viene determinato come la tangente degli angoli formati dalle suddette rette con l'asse delle ascisse, che corrispondono ai coefficienti β nel caso di arrivi anticipati e $\beta\gamma$ (maggiore di β) nel caso di arrivi ritardati.

I parametri ν , α , β , γ e d_i dovrebbero provenire dalla stima o calibrazione del modello su dati osservati oppure, come nel caso del lavoro di Ben-Akiva e colleghi, si può operare un trasferimento dei parametri da un altro modello precedentemente stimato. Questa procedura nella pratica potrebbe causare errori, in quanto tali parametri dipendono dal comportamento degli utenti e quindi cambiando il gruppo degli utenti potrebbero cambiare anche i parametri, ma dato che l'analisi ha una valenza puramente teorica, si ritiene ragionevole utilizzare valori considerati attendibili dagli autori per ottenere un esempio con risultati plausibili. Nell'articolo si ricavano i valori dei parametri da un lavoro precedente di Small (1982); tali valori numerici verranno riportati nel seguito, quando si presenteranno i risultati ottenuti.

Data questa definizione di utilità si deve introdurre un'ipotesi comportamentale; l'utente è un soggetto razionale, che opera scegliendo l'alternativa che secondo la sua percezione si presenta come la migliore. Diversamente dal caso di un singolo percorso l'utente deve ora scegliere anche il percorso e, in base a quanto ipotizzato da Ben-Akiva e colleghi, c'è una certa inerzia nelle scelte, nel senso che se un giorno si sceglie una determinata alternativa quando poi si ridiscute la propria scelta si tende a prediligere delle alternative ritenute più simili. Questa caratteristica viene implementata mediante un modello *Nested-Logit*. Il termine "nested" significa letteralmente annidato, si cerca in pratica di suddividere le possibili alternative raccogliendole in gruppi che abbiano una certa somiglianza in termini di errore statistico.

Il *Nested-Logit* viene introdotto per cercare di correggere alcuni punti deboli del Logit multinomiale, in particolare la perfetta sostituibilità tra le alternative o proprietà IIA, indipendenza dalle alternative irrilevanti, conseguenza diretta dell'errore che si è ipotizzato per le utilità aleatorie, indipendente ed identicamente distribuito (IID) secondo una distribuzione del tipo Gumbel

(altrimenti detta “*extreme value type 1*”). Per la proprietà IIA il rapporto tra le scelte di due alternative non dipende dalle altre dell’insieme di scelta. Quindi modificando l’utilità di una singola alternativa muteranno di conseguenza tutte le probabilità calcolate, in quanto è cambiato il denominatore della funzione Logit, ma tutte le altre alternative che non hanno mutato le loro caratteristiche manterranno un rapporto tra le probabilità costante. Il modello di tipo *Nested-Logit* invece suddivide le alternative in gruppi, i cosiddetti “*nest*”, che raccolgono quelle alternative che si presentano correlate in termini di errore di percezione. Di fatto quindi si presuppone una maggiore sostituibilità all’interno dello stesso *nest*, rispetto ad alternative che appartengono ad altri *nest*.

Nel caso particolare del modello esaminato si hanno due differenti livelli di annidamento, quello gerarchicamente superiore riguarda la scelta di effettuare lo spostamento. All’interno di questa opzione si trovano tutte le possibilità con caratteristiche simili, il pendolare decide di prendere la macchina, divise a loro volta in *nest* di secondo livello, gli orari di partenza. All’interno di questi si trovano tutti i possibili percorsi per ogni singolo orario di partenza, che rappresentano la scelta finale effettuata dall’utente. Quindi la struttura logica del modello può essere così graficamente rappresentata:

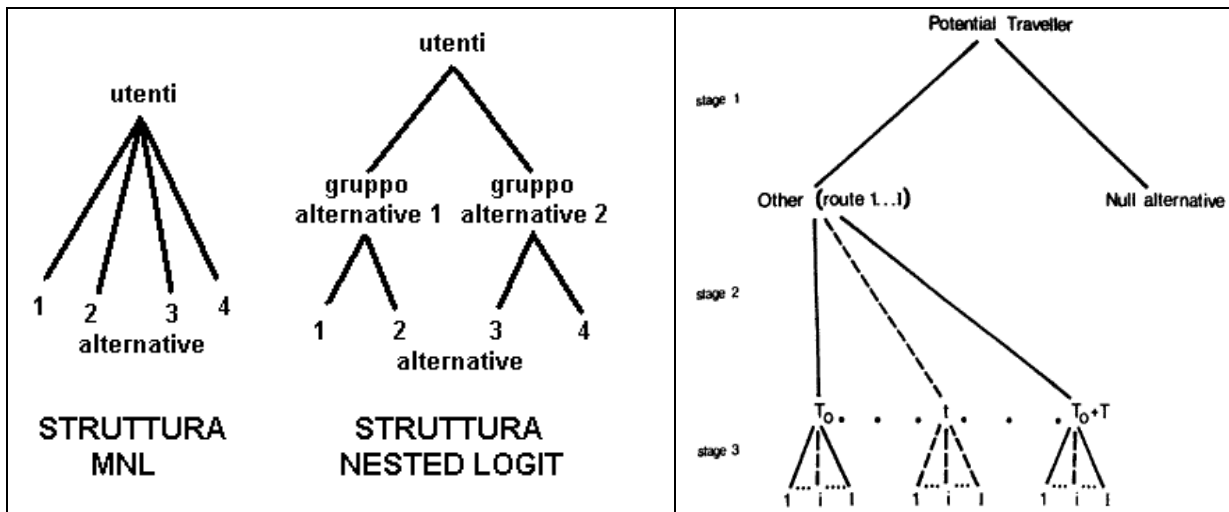


Fig 2.3: Differenza struttura MNL e Nested-Logit.

Fig 2.4: Livelli di scelta nel modello.

Si può notare come il modello così specificato non copra solo l’assegnazione dei veicoli alla rete, ma contenga implicitamente anche la fase di ripartizione modale, che si ritrova nel modello a quattro stadi proprio prima dell’assegnazione. Quindi dato un numero di utenti che richiedono di andare da un origine O ad una destinazione D, non solo si rappresentano le ultime due fasi del modello a quattro stadi, ma si aggiunge anche la dimensione temporale della scelta come quarto stadio, spostando quindi l’assegnazione al quinto step; si focalizza però l’attenzione su di un singolo modo di trasporto.

Nonostante lo schema formalmente più elaborato, la struttura del *Nested-Logit* rimane concettualmente semplice, si ricava dal prodotto di due o più (tre nel caso in questione) Logit Multinomiali, in cui le probabilità intermedie sono rappresentate da quelle di scelta dei singoli *nest*. La probabilità di scelta finale è la probabilità congiunta di scegliere una data alternativa *i* avendo scelto l’insieme che la contiene, in questo caso il generico *nest k*.

$$P_i = P_{i|k} P_k \tag{2.4}$$

Dal momento che lo scopo del MNL è stabilire la probabilità con cui un soggetto percepisce una data alternativa come la migliore tra quelle a lui disponibili, occorre definire che cosa possa essere

l'utilità complessiva per un nest, che racchiude più alternative, da confrontare con l'utilità offerta dagli altri *nest*. Questa viene definita come il valore atteso dell'utilità massima, cioè quella dell'alternativa più attraente, contenuta in ogni singolo *nest*, ed è uguale al logaritmo della somma dei valori deterministici delle utilità delle alternative raccolte in un *nest*, termine che viene quindi nominato comunemente "logsum":

$$\logsum_k = E[\max_i (U_{i|k})] = E[\max_i (V_{i|k} + \varepsilon_{i|k})] = \mu_k \log(\sum_i \exp(V_{i|k})) \quad (2.5)$$

Come si vede nel termine logsum si introduce anche un coefficiente di annidamento, altrimenti detto parametro del logsum, il cui valore deve essere compreso tra 0, che significa sostituibilità nulla tra i vari *nest*, ed 1, che significa perfetta sostituibilità (praticamente il modello collassa in un MNL). Nella formalizzazione presentata non compare il parametro di scala, già introdotto per il MNL, che non potendo essere stimato separatamente dal coefficiente di annidamento viene inglobato in esso, formando un parametro sintetico che può assumere valori anche superiori ad 1.

$$\mu_k = \mu_{NEST} / \mu_{ERR \text{ GUMBEL}} \quad \text{dove} \quad 0 < \mu_{NEST} < 1 \quad (2.6)$$

Data la struttura a tre livelli di scelta si devono utilizzare tre distinti coefficienti μ . Per mantenere valori ragionevoli dell'elasticità incrociata (la variazione della probabilità di scelta di un'alternativa a seguito del mutamento delle caratteristiche di un'altra) Ben-Akiva e colleghi pongono le condizioni $\mu_3 \geq \mu_2 \geq \mu_1 > 0$; inoltre per le ragioni di cui sopra i valori di base proposti per μ_3 e μ_2 risultano superiori ad 1.

La formula del Logit non viene applicata direttamente per la previsione delle probabilità di scelta del viaggiatore in partenza, ma seguendo la logica del ripensamento *day to day* da parte dell'utente, si applica per determinare le probabilità di scelta della quota parte di utenti che considerano la possibilità di cambiare la propria decisione. Come visto per l'articolo precedente (Ben-Akiva, De Palma e Cyna, 1984), si assume che riconsideri la propria scelta una percentuale costante di utenti per ogni istante od intervallo temporale considerato, per cui il bilancio tra quelli che vogliono partire in un altro momento e quelli che scelgono il momento considerato è esprimibile, come visto nel capitolo precedente:

$$\frac{\partial r(t, \omega)}{\partial \omega} = R \left[N \frac{\exp[V(t, \omega) / \mu]}{\int \exp[V(u, \omega) / \mu] du} - r(t, \omega) \right] \quad (1.11)$$

Si giunge quindi alla formula finale del modello, la configurazione dei tassi di partenza r del giorno successivo si trova a partire da quella del giorno precedente con l'opportuna correzione per gli utenti che si ridistribuiscono. Si noterà che in tale formula compaiono sia una sommatoria, chiaro indizio di una dimensione di scelta di tipo discreto (il percorso) che un integrale. Infatti per quanto concerne solamente la variabile tempo non si tratta di una scelta discreta, la variabile risulta continua in tutto il periodo di studio del fenomeno, ogni istante è potenzialmente considerato. A rigore quindi nella formula della probabilità del Logit dovrebbe apparire un integrale esteso sul tempo al denominatore, in questo modo però non sarebbe possibile avere dei valori puntuali del tasso di partenze, perché la probabilità di un singolo istante (infinitesimo) è nulla, ma solo l'andamento cumulativo.

$$r^i(t, \omega + 1) = r^i(t, \omega) + R \left[N \frac{\exp[V(t, \omega) / \mu_1] \exp[V^*(t, \omega) / \mu_2] \exp[V^*(*, \omega) / \mu_3]}{\exp[V^*(t, \omega) / \mu_1] \exp[V^*(*, \omega) / \mu_2] \exp[V^*(*, \omega) / \mu_3] + \exp[V_0 / \mu_3]} - r^i(t, \omega) \right] \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
V^*(t, \omega) &= \mu_1 \ln \sum_j \exp[V^j(t, \omega) / \mu_1] \\
V^*(*, \omega) &= \mu_2 \ln \int_{T_0}^{T_0+T} \exp[V^*(u, \omega) / \mu_2] du
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Per ottenere un valore numerico per il tasso di partenze nella sua evoluzione temporale ed inoltre ovviare ai problemi connessi al calcolo dell'integrale della funzione esponenziale (il termine SD è continuo ma composto da tre funzioni a seconda della fascia temporale) si ricorre ad una discretizzazione del periodo di studio in vari intervalli, che siano però abbastanza piccoli da poter approssimare numericamente la funzione di partenza. Nella formula finale, composta da sole sommatorie, si troveranno il numero di partenze L nell'intervallo considerato.

$$L^i(t, \omega+1) = r^i(t, \omega+1) h = L^i(t, \omega) + R \left[N \frac{\exp[V(t, \omega) / \mu_1] \exp[V^*(t, \omega) / \mu_2] \exp[V^*(*, \omega) / \mu_3]}{\exp[V^*(t, \omega) / \mu_1] \exp[V^*(*, \omega) / \mu_2] \exp[V^*(*, \omega) / \mu_3] + \exp[V_0 / \mu_3]} - L^i(t, \omega) \right] \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
V^*(t, \omega) &= \mu_1 \ln \sum_j \exp[V^j(t, \omega) / \mu_1] \\
V^*(*, \omega) &= \mu_2 \ln \sum_T \exp[V^*(u, \omega) / \mu_2]
\end{aligned} \tag{2.10}$$

A vederla così la formula appena proposta può sembrare notevolmente complicata, ma con un po' di attenzione si possono chiaramente distinguere i tre livelli di scelta. Potrebbe inoltre essere scritta in modo più compatto, andando a semplificare i termini comuni nei vari numeratori e denominatori, ma poi risulterebbe ancor meno intuitiva. Purtroppo, pur comprendendone il senso generale, dal punto di vista matematico la formula è molto complicata. Andando a considerare più percorsi si perde la possibilità di andare a verificare in maniera analitica l'esistenza, unicità e stabilità della soluzione d'equilibrio ricercata, il cosiddetto stato stazionario. Ben-Akiva e colleghi aggirano questo problema assicurando di aver trovato la stessa soluzione con una vasta gamma di simulazioni differenti e partendo da diverse soluzioni iniziali. Lo stato stazionario costituisce quella soluzione che nell'iterazione successiva rigenera se stessa e secondo l'algoritmo proposto viene raggiunto al tempo "infinito".

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega \rightarrow \infty} V_i(t, \omega) &= V_i(t) \\
\lim_{\omega \rightarrow \infty} L_i(t, \omega) &= L_i(t)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Si deve fornire anche la soluzione iniziale, dalla quale cominciare il processo iterativo. Dal momento che ogni iterazione rappresenta un nuovo giorno (si incrementa il valore di ω), la soluzione iniziale viene anche definita giorno 0. Questa viene assunta come una condizione pseudo stazionaria, ossia l'equilibrio ottenuto ipotizzando assenza di congestione. In altre parole equivale a dire che il viaggiatore, in mancanza di ulteriori informazioni sulle condizioni di traffico, effettuerà le proprie valutazioni considerando la rete completamente scarica, andando poi a correggere le sue scelte nelle successive iterazioni, una volta acquisita maggiore esperienza.

$$V(t) = -\alpha \sum_l t_{\cos ti}^l - SD_i(t, \sum_l t_{\cos ti}^l) \tag{2.12}$$

Questa formula va commentata in relazione a quella introdotta all'inizio (pag. 1)

Definito il punto di partenza è necessario definire una misura di convergenza, andando a stimare la massima variazione tra i tassi di partenza in due giorni successivi; questa verrà confrontata con il

prodotto tra il tasso di ripensamento ed un ϵ scelto e quando ne risulterà inferiore significa che si è raggiunta l'accuratezza desiderata e si può terminare l'esecuzione dell'algoritmo.

$$\max_t \frac{1}{R} \frac{|L_i(t, \omega + 1) - L_i(t, \omega)|}{L_i(t, \omega)} \leq \epsilon \quad (2.13)$$

Si riporta quindi il procedimento iterativo seguito per il calcolo, presentato da Ben-Akiva et al. come schema a blocchi e implementato poi ai fini del presente elaborato in un foglio MS Excel con linguaggio di programmazione VBA.

Passo 0: Soluzione iniziale

Definizione dell'intervallo temporale dell'analisi

- istante iniziale T_0 , e discretizzazione del periodo in n intervalli di ampiezza h .

Calcolo disutilità per ogni scelta possibile, in ipotesi di congestione nulla

- tempo percorrenza costante sommato allo SD per ciascun percorso, per ciascun intervallo;
- calcolo termini Logsum, per ciascun intervallo temporale e totale.

Calcolo probabilità di scelta

- utilizzo del modello Logit Multinomiale;
- la probabilità moltiplicata per il numero totale di viaggiatori fornisce il tasso di partenze r .

Passo 1: Aggiornamento disutilità delle diverse scelte possibili

Ricalcolo dei tempi di percorrenza TT

- coda deterministica per attraversare il collo di bottiglia, al superamento della capacità.

Ricalcolo utilità delle alternative

- tempo di percorrenza aggiornato sommato a SD, che dipende dal tempo di percorrenza;
- ricalcolo termini Logsum, per ciascun intervallo temporale e totale.

Passo 2: Ricalcolo dei tassi di partenza r

Formula dinamica Logit di Ben-Akiva e De Palma

- modifica numero di partenze dipende dal ripensamento, dinamica *day to day*.

Passo 3: Misura di convergenza

La massima variazione relativa, cercata su tutte le alternative di percorso ed orario, tra due iterazioni successive è inferiore ad una certa soglia ϵ prefissata?

- sì, fine del processo iterativo;
- no, ritornare al passo 1.

Non resta quindi che implementare l'algoritmo in modo opportuno, sarà poi possibile applicarlo con i valori dei parametri utilizzati nello studio in esame, così da controllare di ottenere gli stessi risultati ed assicurarsi quindi di aver compilato il programma correttamente.

3 Implementazione del modello

L'algoritmo iterativo esposto nel capitolo precedente non presenta grandi difficoltà concettuali, bisogna però porre una particolare attenzione nella sua implementazione. Nella struttura del calcolo vi è una stretta interdipendenza tra tutte le variabili considerate, sia nell'ottica *day to day* che *within day* (lo sviluppo delle code), occorre quindi settare, e controllare, con precisione i riferimenti, in particolare gli indici utilizzati per le notazioni vettoriali nel codice, in quanto piccoli errori di struttura (l'utente che vuole partire in un determinato intervallo andrà a considerare la situazione al giorno precedente in un corrispondente intervallo temporale per ciascuno dei due percorsi) possono nascondersi e propagarsi con facilità. Quindi per verificare la correttezza dell'algoritmo si può osservare anche l'output delle variabili interne, per esempio l'attesa in coda o la disutilità.

Un altro problema che può affliggere sempre la notazione degli indici consiste nello sfasamento temporale degli arrivi al collo di bottiglia rispetto alla partenza, dovuto al tratto iniziale del percorso supposto in condizioni di flusso libero, ma che può avere lunghezze diverse per i vari percorsi considerati. Quindi il pendolare che partirà in un certo istante dovrà valutare le condizioni che incontrerà più avanti nella sua strada, con uno sfasamento reale che deve essere tradotto in un numero finito di intervalli temporali utilizzati per la discretizzazione.

Si comincia definendo innanzitutto i parametri e assegnando i loro valori di input.

Capacità del collo di bottiglia:	$s_1 = 8000 \text{ veic/h}$	$s_2 = 3000 \text{ veic/h}$
Tempo di percorrenza costante:	$t_1^1 = 0,2 \text{ h}$	$T_{\text{cost}1} = 0,1 \text{ h}$
	$T_2^1 = 0,15 \text{ h}$	$T_{\text{cost}2} = 0,1 \text{ h}$
Utilità marginale del tempo di percorrenza:	$\alpha = 6,4 \text{ h}^{-1}$	
Utilità marginale per arrivi in anticipo ed in ritardo:	$\beta = 3,9 \text{ h}^{-1}$	$\beta\gamma = 15,2 \text{ h}^{-1}$
Coefficienti di annidamento:	$\mu_1 = 0,3$	$\mu_2 = 1$
Utilità alternativa nulla:	$V_0 = -1$	$\mu_3 = 2$
Numero totale viaggiatori potenziali:	$N = 27000$	
Tasso di ripensamento:	$R = 20\%$	
Orario arrivo preferito ed intervallo preferito:	$t^* = 08:00$	$\pm \Delta = 0,5 \text{ h}$
Istante iniziale e periodo di studio:	$T_0 = 05:00$	$+ T = 5 \text{ h}$

L'output finale dell'algoritmo consiste nella distribuzione temporale del tasso delle partenze. Per ogni singolo intervallo temporale si ricavano il numero effettivo delle partenze e dividendo questo numero per l'ampiezza dell'intervallo è possibile ottenere il tasso di partenze, espresso come partenze/ora. In questo modo si rende la misura omogenea con quanto presentato nell'articolo. Questa operazione produce una variazione di scala verticale della curva di output delle partenze, ma non ne modifica minimamente la forma.

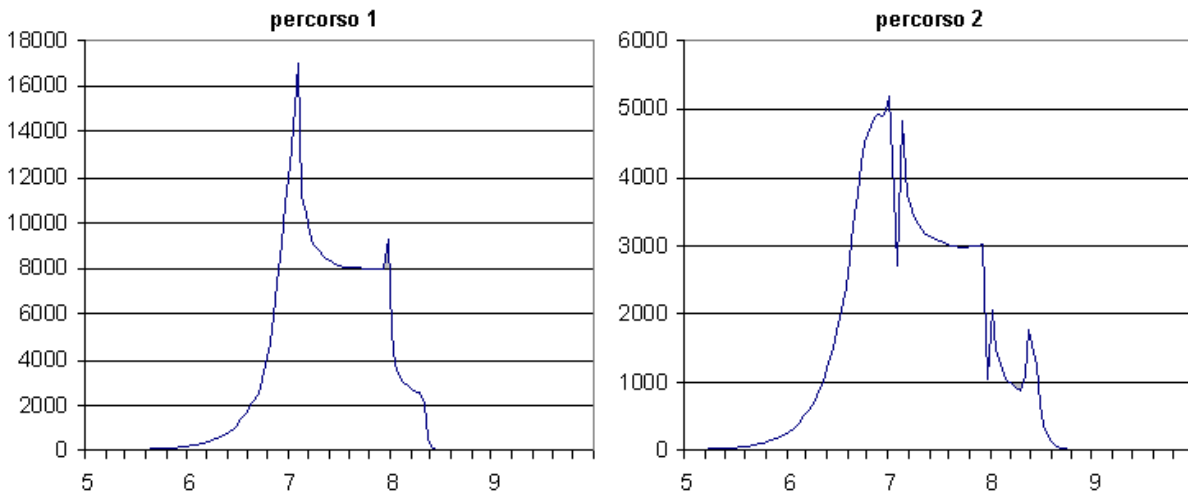


Fig 3.1: Risultati del modello: tassi di partenze orari per ogni intervallo temporale.

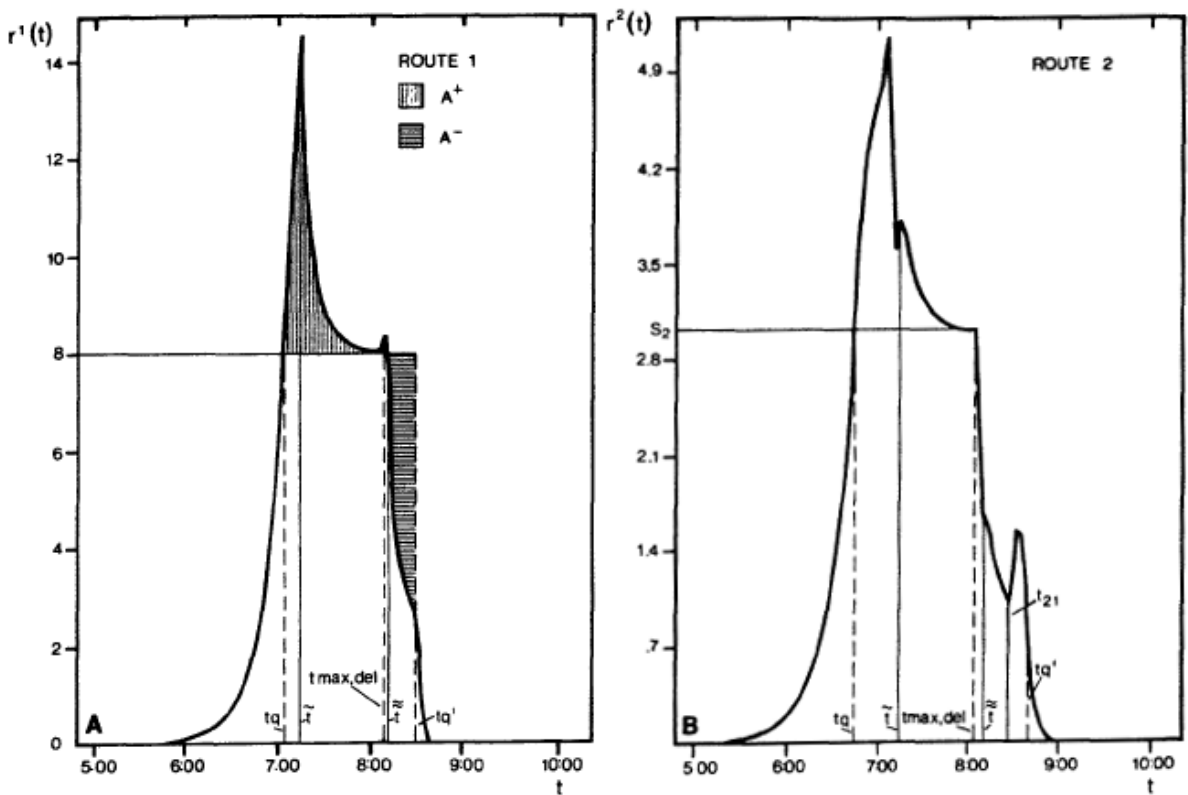


Fig 3.2: Tassi di partenze orari per ogni intervallo temporale riportati nell'articolo dagli autori.

Il confronto tra i grafici ottenuti dal calcolo e quelli presentati da Ben-Akiva e colleghi dà esito positivo. Il profilo relativo al primo percorso è sovrapponibile, le partenze iniziano alle 5,45 circa e raggiungono il picco alle 7,00. Il valore massimo appare lievemente diverso, dovuto probabilmente alla diversa precisione ed approssimazione numerica utilizzata. Dopo il picco si ritrova la stessa fase discendente molto ripida che lambisce il valore della capacità (8000 veicoli/ora) e termina con una piccola risalita. Quindi si scende molto velocemente, ma con una specie di flesso intermedio, fino ad abbattere praticamente a zero le partenze verso le 8,30. Il profilo del secondo percorso appare a prima vista un po' difforme rispetto ai risultati presentati nell'articolo. La curva comincia all'incirca alle 5,30 per poi raggiungere il picco alle 7,00 dove il valore massimo è lo stesso. Si

incontra poi, nei risultati ottenuti dall'implementazione del modello, una caduta abbastanza profonda del tasso di partenze, situata in contemporanea al massimo picco per il primo percorso. Rispetto ai risultati di Ben-Akiva quindi si ha uno spostamento di utenti verso il primo percorso in quel dato istante temporale, ma l'ammanto del secondo va a compensare il picco del primo, bilanciando il numero totale di viaggi. La curva scende successivamente fino a toccare asintoticamente il valore della capacità, poi precipita e subito risale in un altro piccolo picco, anche in questo caso si ha la compensazione con quanto accade nel primo percorso. Si affronta poi un avvallamento, per risalire sull'ultimo picco alle 8,30 e scendere definitivamente a zero per le 9,00. Si può concludere che le discrepanze sono dovute alla compensazione dei picchi più elevati ed aguzzi, dovuti all'approssimazione numerica.

È possibile inoltre andare a comparare l'andamento globale relativo a tutti i viaggiatori, semplicemente sommando i tassi di partenza dei due percorsi, con i risultati del modello di Ben-Akiva e De Palma (1984), dove non viene considerata la scelta tra più percorsi.

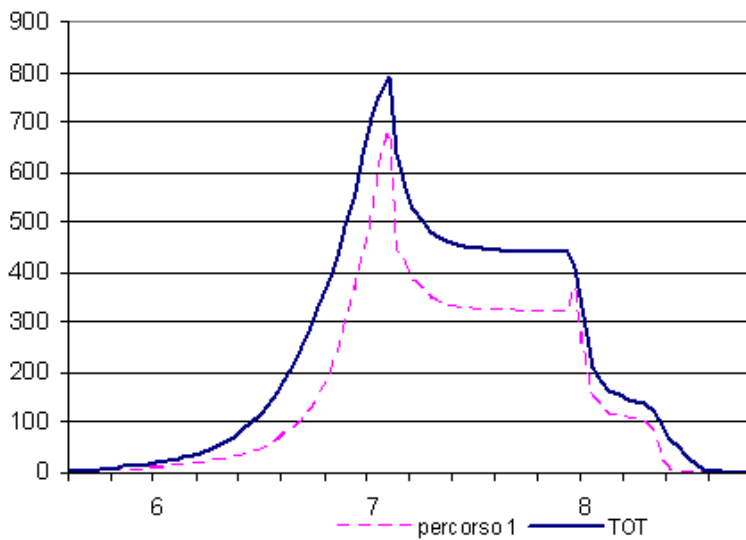


Fig 3.3: Risultati del modello: totale partenze per ogni intervallo temporale.

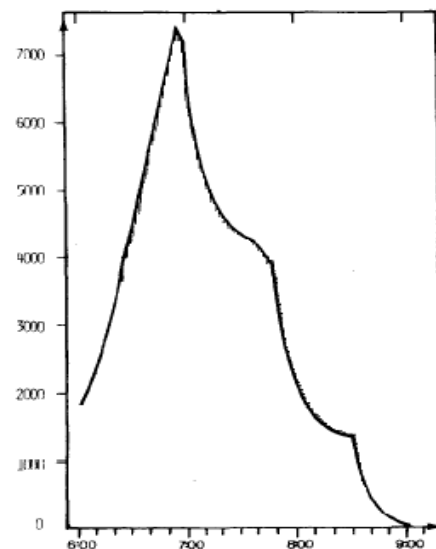


Fig 3.4: Andamento partenze percorso unico, Ben-Akiva ed altri (1984)

Trascurando i numeri, riferiti a due situazioni completamente diverse, e tenendo inoltre conto che non vi è flessibilità nell'orario di arrivo per il grafico di destra, si riconosce chiaramente la stessa struttura del picco. Vi è un'unica fase ascendente piuttosto ripida, mentre la discesa è composta da tre tratti, caratterizzati da una tipica forma a gradini.

Volendo controllare più approfonditamente i calcoli è possibile andare ad osservare i valori delle variabili interne, in particolare tempo di attesa in coda e disutilità delle varie alternative. La coda deve formarsi, se ciò accade, un'unica volta, come dimostrato da De Palma, inoltre il tempo speso in colonna provoca un proporzionale aumento della disutilità. Questa a sua volta ha un effetto esponenziale sulla probabilità di scelta. Si ricerca quindi questa coerenza nei grafici successivi.

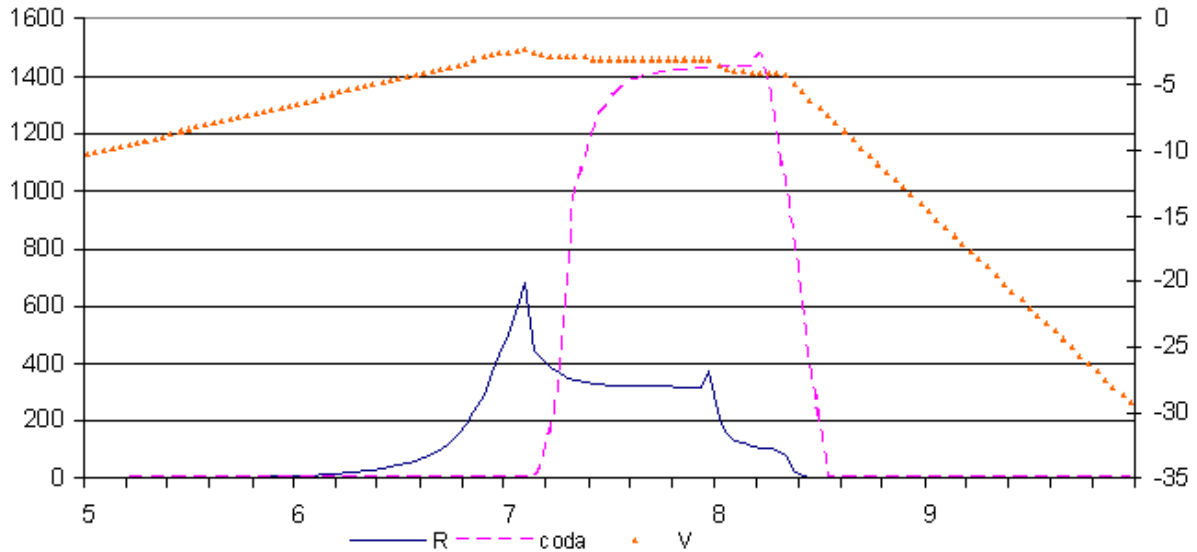


Fig 3.5: Risultati del modello: numero partenze, utilità e coda per ogni intervallo temporale, percorso 1.

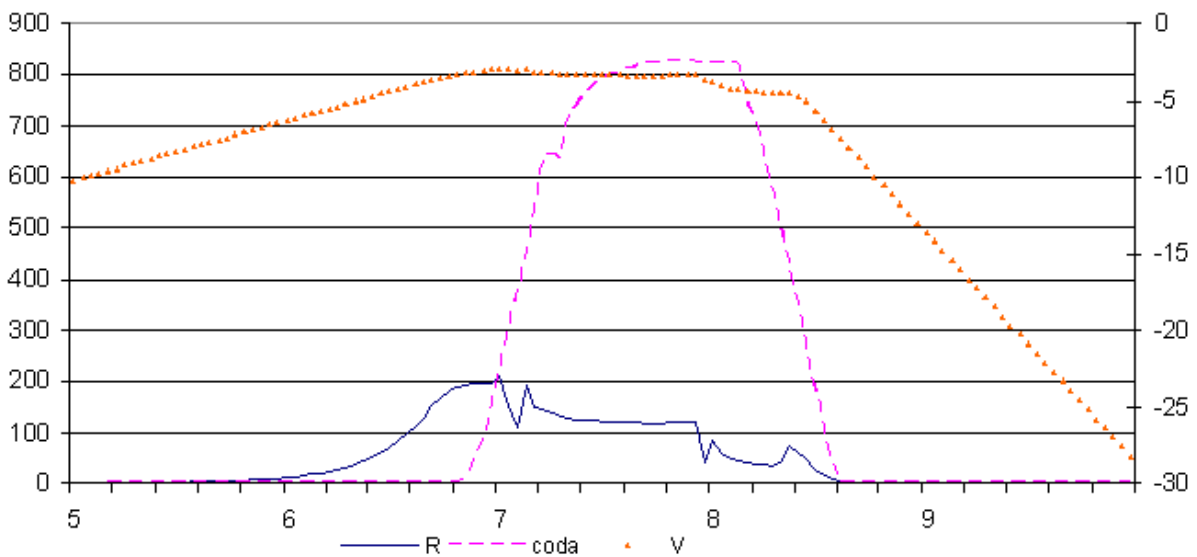


Fig 3.6: Risultati del modello: numero partenze, utilità e coda per ogni intervallo temporale, percorso 2.

Nel grafico si riferiscono all'asse graduato di sinistra il tasso di partenze e il numero di veicoli in coda, mentre a quello di destra con valori negativi è associata la disutilità. Tenendo presente che il denominatore del Logit rimane invariato all'interno di ciascuna iterazione, il tasso di partenze deve risultare proporzionale all'esponenziale dell'utilità. Si vede chiaramente la forma esponenziale del tratto iniziale ascendente delle partenze, data la forma lineare dell'utilità. Il tratto di valore massimo dell'utilità non risulta perfettamente orizzontale per la presenza della colonna di veicoli in attesa di superare il collo di bottiglia. Finite le perturbazioni dovute alla coda si ritorna alla forma lineare dell'utilità, che raggiunge valori sempre più bassi, abbattendo velocemente il numero delle partenze.

Si può arricchire l'analisi con qualche considerazione sull'evoluzione dello stato della rete nei periodi successivi, andando ad illustrare come si modifica la soluzione giorno dopo giorno e come evolve la misura di convergenza considerata fino allo stop dell'algoritmo. Si va ad osservare quindi

come la distribuzione iniziale si modifica giorno dopo giorno, per effetto delle rassegnazioni di quote degli utenti. Si riporta l'evoluzione del tasso di partenze relative al primo percorso, più lungo ma più veloce.

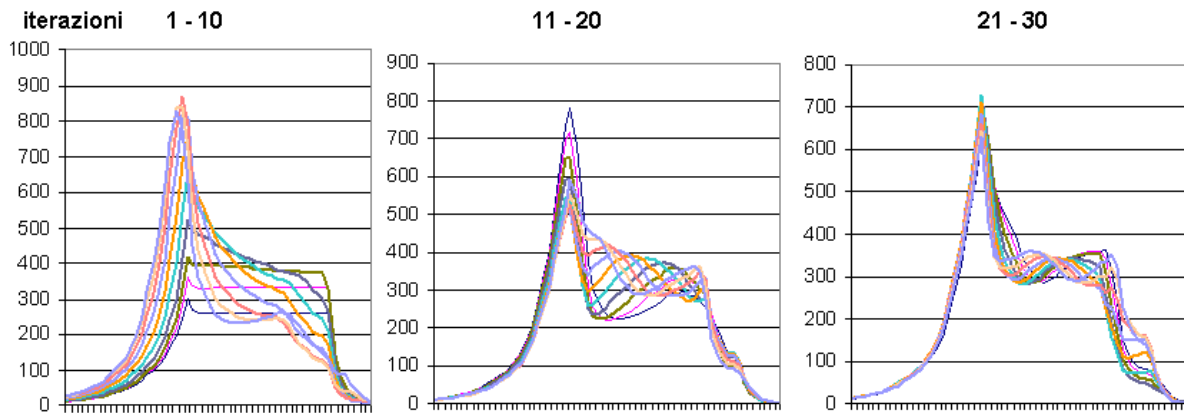


Fig 3.7: Evoluzione dei risultati durante il processo di calcolo iterativo, percorso 1, iterazioni 1-30.

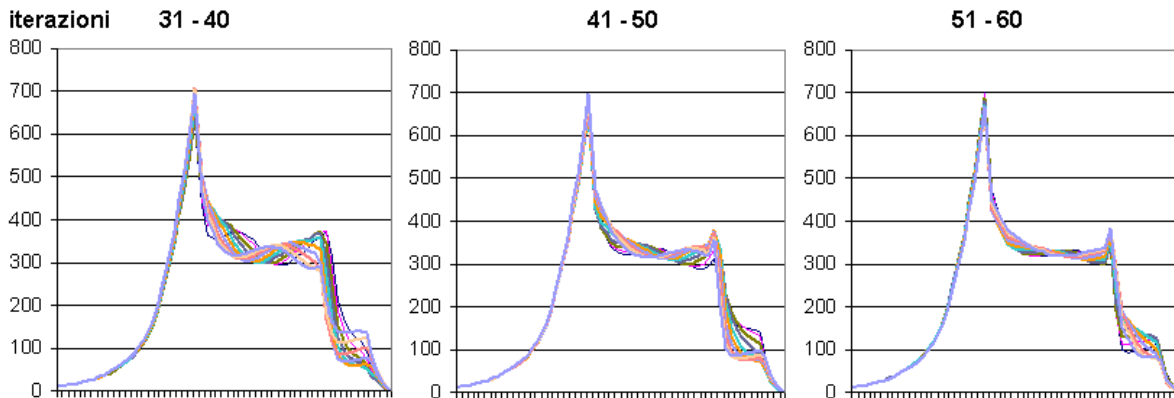


Fig 3.8: Evoluzione dei risultati durante il processo di calcolo iterativo, percorso 1, iterazioni 31-60.

La soluzione iniziale, qui non riportata, consiste in una struttura ascendente esponenziale, un tratto costante e una fase discendente anch'essa esponenziale. Tale struttura si ripete essenzialmente invariata nelle prime iterazioni, con l'unica differenza che il profilo tende ad alzarsi raggiungendo un tasso più elevato nel tratto orizzontale. Questo accade in quanto il primo percorso è più lungo, per cui risulta meno appetibile nelle condizioni iniziali quando l'effetto della congestione non viene risentito e di conseguenza il carico nelle prime iterazioni non raggiunge un livello tale da sviluppare una coda. Tale struttura è analoga a quella vista nel capitolo precedente, quando si presentava il primo modello, ancora senza la dinamica *day to day*, proposto da De Palma e colleghi, dove la funzione di utilità lineare-costante-lineare genera una tale distribuzione delle partenze. Tale struttura permane finché non si genera una coda che vada a rompere la linearità dell'utilità. Comincia quindi a delinarsi il picco, che cresce velocemente e poi sembra raggiungere una forma stabile già dopo una ventina di iterazioni. Sistemato il picco l'algoritmo cerca di stabilizzare la fase successiva, si vedono delle onde di veicoli che si spostano ad ogni iterazione. Infine le differenze si concentrano nella fase finale discendente, ma sono di piccola entità in quanto ormai il grosso delle partenze è stato allocato stabilmente. In una sessantina di iterazioni si è raggiunta una forma abbastanza simile alla configurazione finale, anche se il processo iterativo non ha ancora raggiunto la misura di convergenza stabilita.

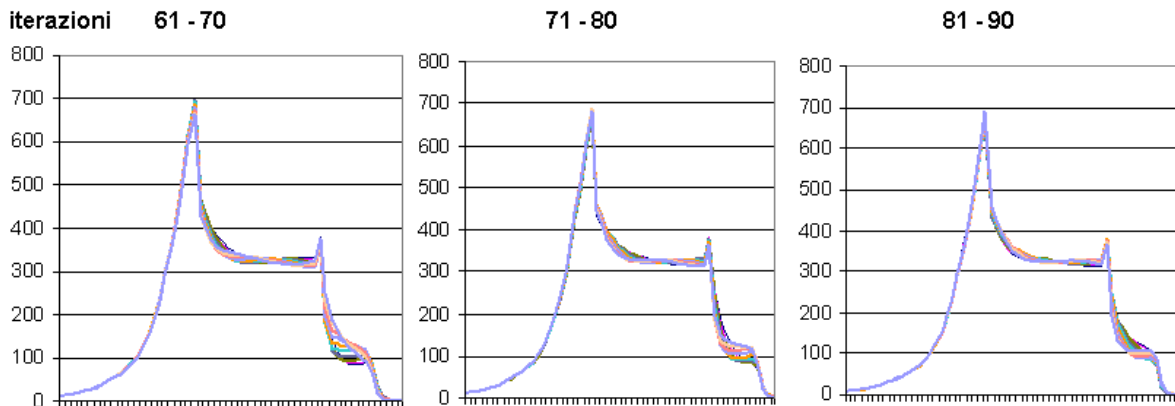


Fig 3.9: Evoluzione dei risultati durante il processo di calcolo iterativo, percorso 1, iterazioni 61-90.

Nel prosieguo del processo si nota come vi siano solo modeste riallocazioni di utenti, senza tuttavia apportare apprezzabili mutamenti alla distribuzione dei risultati. Ciò corrisponde ad una fase di assestamento, nella quale viene riallocata la quota parte di utenti determinata dal tasso di ripensamento, che in pratica si scambiano reciprocamente le posizioni temporali, senza però portare il sistema a raggiungere la misura di convergenza desiderata. Questa fase è ben diversa dalle sessanta iterazioni precedenti, dove la curva veniva sensibilmente rimodellata. Le differenze tra le varie curve diventano sempre più impercettibili nel grafico, perciò si mostra nell'immagine successiva un ingrandimento per le iterazioni finali.

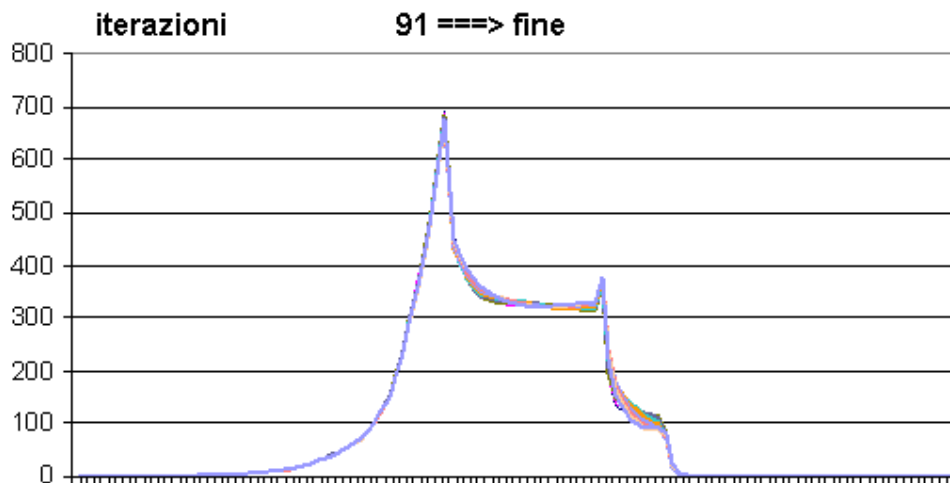


Fig 3.10: Evoluzione dei risultati durante il processo di calcolo iterativo, percorso 1, iterazioni 91-100.

Anche nel grafico ingrandito non si riscontrano grosse differenze nel procedere di dieci iterazioni. Non si riportano quindi le successive soluzioni fino alla convergenza. Si fa notare però che quest'ultima verrà ottenuta dopo ben 221 iterazioni. Si può andare ad osservare inoltre l'andamento degli scarti, cioè delle differenze tra le successive iterazioni anche quando queste non siano più apprezzabili visivamente nel grafico. Per comodità si rappresentano gli scarti in scala semilogaritmica. La retta rappresentante la precisione prestabilita ha il valore della tolleranza moltiplicata per il tasso di ripensamento, ossia $\epsilon \cdot R$.

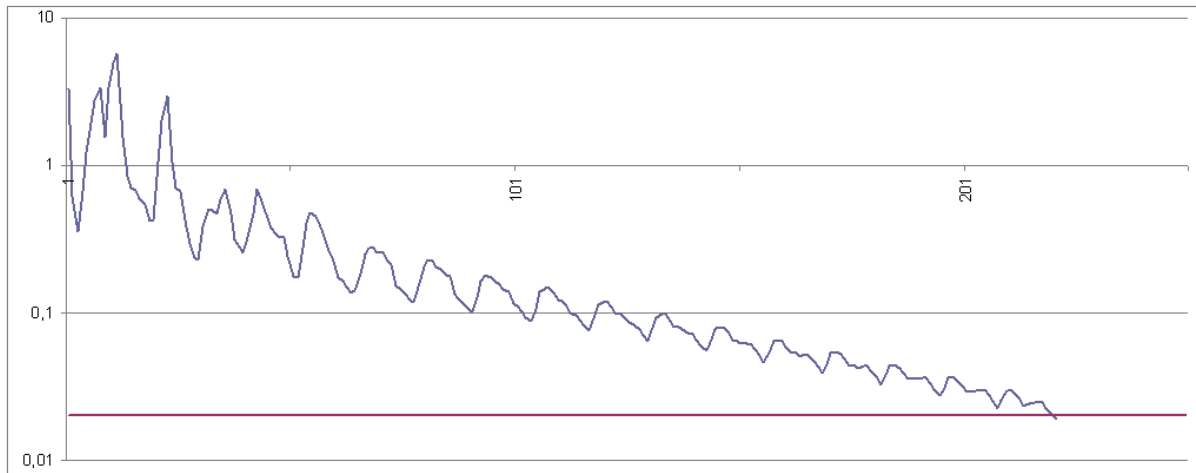


Fig 3.11: Misura di convergenza per ogni singola iterazione.

L'andamento dello scarto risulta ben delineato in direzione discendente. Se si escludono le prime 50 iterazioni circa, si può osservare un andamento oscillatorio dalla forma essenzialmente ricorrente. Essendo il grafico semilogaritmico, si può osservare che in realtà la misura di convergenza non ha una discesa mediamente lineare, ma segue una curva esponenziale, in pratica l'avvicinamento alla retta della tolleranza rallenta man mano che la misura di convergenza diminuisce. È infatti evidente come per metà del processo iterativo si rimanga al di sotto del valore 0,1.

Dopo averne analizzato dettagliatamente il comportamento, si può asserire che il modello così implementato riproduce adeguatamente quello proposto nell'articolo di Ben-Akiva e colleghi. Si è visto come i risultati ottenuti siano coerenti con la teoria di riferimento e come l'algoritmo lavori per raggiungere la soluzione finale. Si può procedere quindi a testare il comportamento del modello andando a cambiarne alcune componenti. Innanzitutto si proverà a variare semplicemente il valore di alcuni parametri che descrivono la sensibilità degli utenti per valutare come cambi la risposta, si procederà poi a cambiare le ipotesi che definiscono come l'utente percepisca le alternative disponibili, per arrivare ad un modello più raffinato, che possa descrivere in modo più corretto il comportamento degli utenti nell'affrontare la scelta di orario di partenza e di percorso nella rete.

4 Analisi di sensibilità: effetti dipendenti dalla globalità degli utenti

Dopo avere verificato che il modello implementato si comporta come quello proposto da Ben-Akiva e colleghi, si vuole andare a verificare la tesi, proposta nell'articolo, che riguarda l'unicità della soluzione. Come osservato in precedenza, sarebbe eccessivamente complesso andare a verificare analiticamente l'unicità e la stabilità della soluzione ottenuta. Nell'articolo gli autori affermano che non vi è evidenza che non vi sia una soluzione unica, in quanto tutte le simulazioni effettuate convergono alla stessa configurazione di equilibrio. Seguendo questo approccio si vuole ora convalidare ulteriormente questa tesi, utilizzando varie soluzioni iniziali, differenti dal caso di pseudo stazionarietà presentato, ed andando a confrontare i risultati ottenuti e la rispettiva velocità di convergenza. In questo modo è possibile valutare anche la stabilità della soluzione ottenuta, in quanto si assume come soluzione iniziale una versione perturbata di una precedente soluzione finale. In pratica si è operato rimuovendo il 10% o il 20% dei viaggiatori in un intervallo temporale comprendente il picco massimo delle partenze e traslandoli, senza riassegnazione, in un periodo temporale successivo. Anche se questo approccio può sembrare un po' rudimentale, esso consente di ottenere con facilità delle strutture simili alla soluzione finale, ma sulle quali occorre iterare per arrivare nuovamente a convergenza.

Si comincia a fornire all'algoritmo diverse soluzioni iniziali per testare l'unicità della soluzione, a tal proposito la più semplice consiste in una distribuzione uniforme delle partenze. Si suddividono quindi i viaggiatori in modo eguale per ciascun sub-intervallo temporale, ma considerando solo il periodo in cui si è trovato un significativo numero di partenze, mentre al di fuori di questo non si assegnerà alcuna partenza. Inoltre si assegna a ciascun percorso all'incirca il numero totale di viaggiatori trovato nella soluzione descritta nel capitolo precedente. Il profilo del giorno 0 viene rappresentato nel grafico successivo, mettendolo anche a confronto con il caso pseudo stazionario.

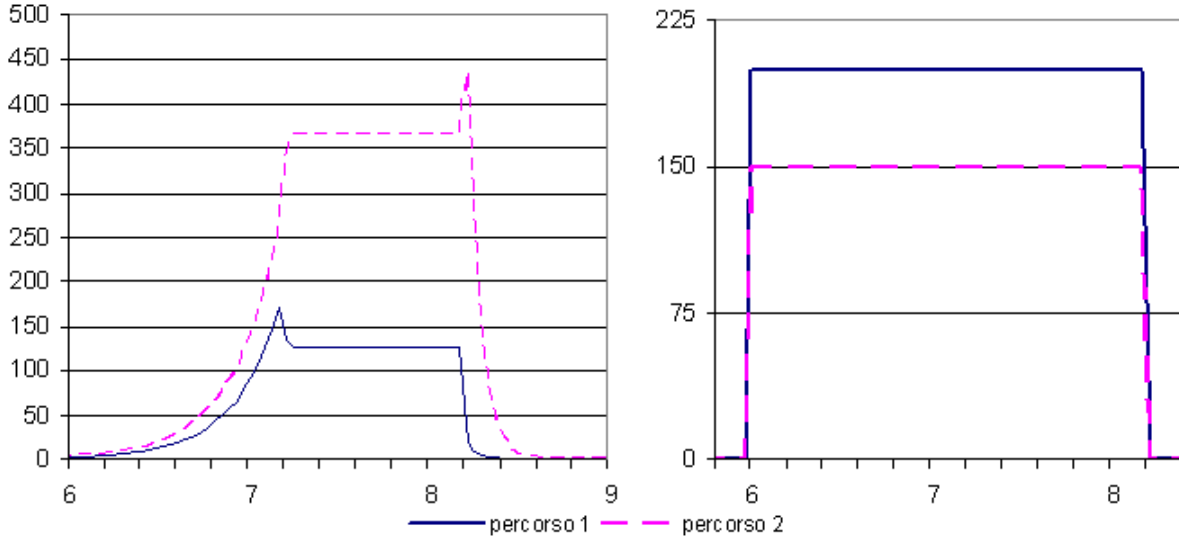


Fig 4.1: Possibili soluzioni iniziali: ipotesi pseudo stazionarietà e distribuzione uniforme delle partenze.

A parte l'andamento alle due estremità, la differenza più evidente consiste nel fatto che i percorsi sono caricati in modo opposto. Nel caso pseudo stazionario infatti il secondo percorso è più appetibile in quanto più breve, mentre nel caso omogeneo si preferisce l'altro, in quanto nella soluzione finale si trovano più utenti nel primo percorso, in virtù della maggior capacità disponibile. Si può procedere ora ad applicare nuovamente l'algoritmo risolutivo, si andranno a confrontare i grafici finali, il numero delle iterazioni necessarie alla convergenza e lo scarto massimo tra le due soluzioni.

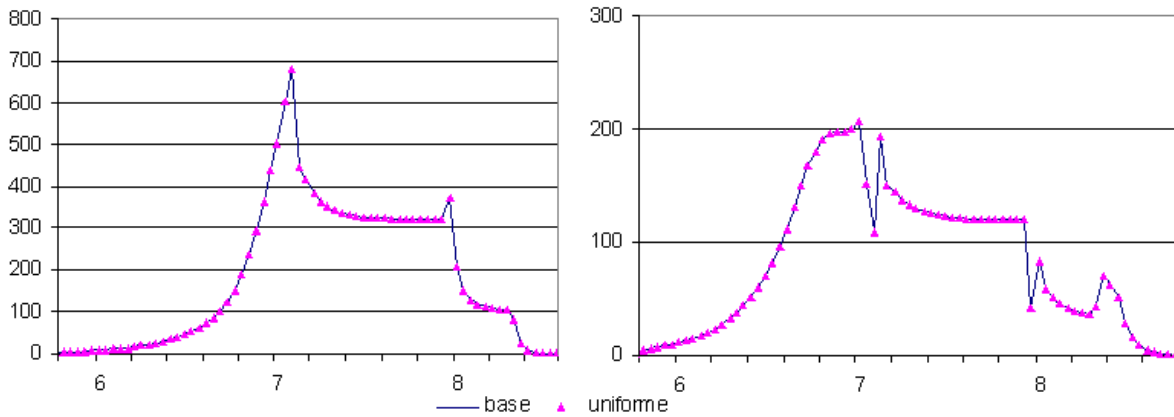


Fig 4.2: Confronto risultati del modello ottenuti con diverse soluzioni iniziali, percorsi 1 e 2..

Le due soluzioni sono indistinguibili, infatti anche lo scarto massimo calcolato è dell'1,06%, mentre la soluzione è ottenuta in 208 iterazioni. Si può inoltre ripartire da questa per illustrare il procedimento seguito per verificare la stabilità della soluzione.

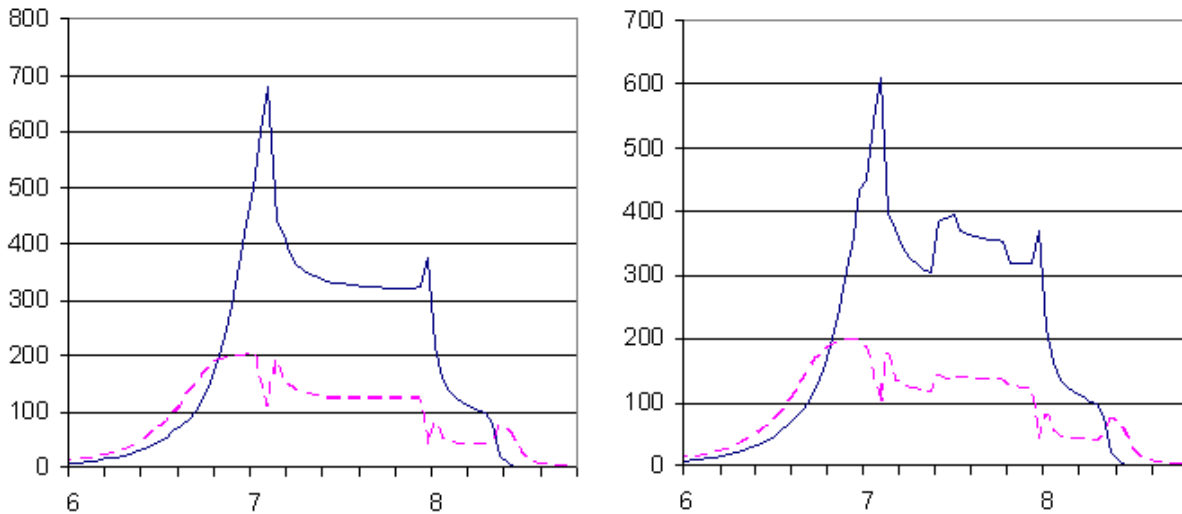


Fig 4.3: Soluzione finale del modello e successiva configurazione instabile con spostamento 10% picco.

Si nota come dal picco venga spostata una quota parte di utenti ad un intervallo temporale successivo, dove la curva assume un andamento quasi orizzontale. Questa soluzione destabilizzata costituisce l'ipotetico giorno 0 dal quale si parte per andare a verificare se l'algoritmo converge alla stessa soluzione di prima o tende a divergere verso un'altra configurazione (stabile o instabile).

Procedendo ancora con l'algoritmo iterativo si arriva a convergenza in 176 iterazioni, con una differenza massima dello 0,96% dal caso base. Omettendo qui la rappresentazione grafica della soluzione finale, si propone invece una tabella riassuntiva che presenta i risultati di vari esperimenti effettuati per indagare unicità e stabilità della soluzione. Si riportano il tipo di soluzione iniziale, il numero di iterazioni necessarie per la convergenza e la massima differenza dal caso base.

Soluzione iniziale	Base stab 10%	Uniforme	Uniforme stab 10%	Triangol 1	Triangol 1 stab 10%	Triangol 1 stab 20%	Triangol 2	Primo istante
num iter	221	208	176	209	209	176	213	176
max diff	0,96%	1,06%	0,96%	1,82%	0,96%	2,08%	0,13%	0,12%

Tabella 4.1: Ricerca unicità e stabilità della soluzione.

Si sono adoperate varie soluzioni iniziali, di forme ed ipotesi diverse, come la pseudo stazionaria, l'uniforme, un triangolare e la sua inversa, nulla al centro e massima alle estremità, ed il caso limite con assegnazione di tutti gli utenti in un unico istante. Si riportano schematicamente le distribuzioni utilizzate per indagare l'unicità della soluzione.



Fig 4.4: Possibili forme soluzioni iniziali provate.

Trovate le soluzioni finali si sono ricavate da queste le configurazioni stabilizzate delle stesse, con una frazione del 10% o anche del 20%, con cui testare la stabilità della soluzione.

Da questa poche prove non si può essere assolutamente certi che la soluzione sia unica e stabile, ma i risultati costituiscono evidenze sperimentali a supporto delle due proprietà in esame.

Una volta acquisita una sufficiente comprensione della meccanica del modello si può intraprendere l'analisi del suo comportamento esaminando aspetti diversi da quelli trattati nell'articolo. Si vuole iniziare andando ad indagare gli effetti dei vari parametri che vengono introdotti sull'elaborazione e sui risultati finali. Riassumendo brevemente quanto visto nel capitolo precedente, i principali parametri si trovano nella formula dell'utilità aleatoria (coefficienti delle caratteristiche deterministiche delle varie opzioni) inoltre un ruolo molto importante viene giocato dal tasso di ripensamento, la percentuale definita costante di utenti che riconsiderano le proprie scelte ad ogni iterazione. C'è infine una sorta di limite fisico, dato dall'interazione tra il numero totale di viaggiatori che desidera spostarsi, e la capacità dell'infrastruttura. Anche dall'esperienza comune è facile immaginare come vi sia una quantità massima di utenti che può venir servita dalla rete, mentre in situazioni di fortissima congestione si abbia un blocco della circolazione con conseguenze per gli utenti non prevedibili.

Si comincia quindi ad esaminare il ruolo svolto dal termine R , tasso di ripensamento. Ovviamente più alta sarà la percentuale di ripensamento più viaggiatori cercheranno di cambiare la loro scelta. La situazione di equilibrio, quindi il termine del processo iterativo, si ottiene quando la redistribuzione delle scelte è tale da non modificare in maniera sensibile l'andamento delle partenze dell'iterazione precedente.

Il caso base è stato calcolato con un valore di R pari al 20% e si è trovata una soluzione, peraltro con una soglia di scarto piuttosto bassa a giudizio dello scrivente, con 221 iterazioni. Ponendo questo risultato come base per il confronto si andranno ad esaminare l'andamento delle partenze e la velocità di convergenza per i diversi valori del tasso di ripensamento.

Inizialmente si è provato ad incrementare e diminuire il valore del 2%, ottenendo quindi un R pari al 22% e poi al 18%. Per l'incremento si nota una diminuzione della velocità di convergenza, sono necessarie infatti 700 iterazioni per ottenere l'accuratezza desiderata. Si va quindi a porre in un grafico entrambe le serie dei risultati, per il caso base e l'ultimo calcolato, separatamente per i due possibili percorsi.

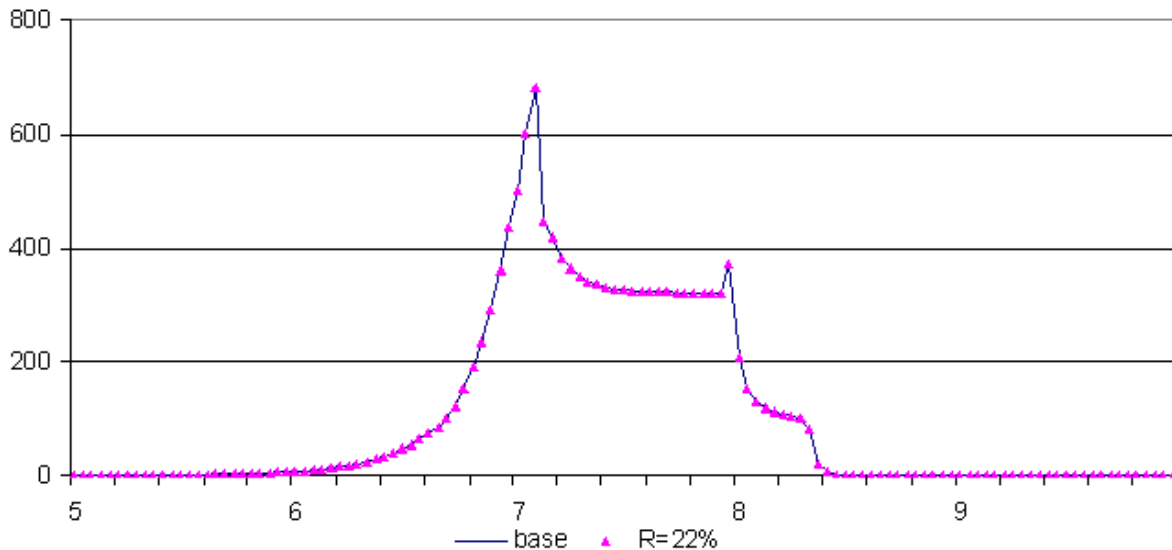


Fig 4.5: Soluzione finale del modello con tasso di ripensamento pari al 22%, percorso 1.

Graficamente si nota una totale sovrapposizione dei risultati, non vi sono punti che si discostano in modo apprezzabile. Si riporta per completezza anche il grafico relativo al secondo percorso, si andrà successivamente a determinare numericamente la massima entità delle differenze tra i due diversi casi considerati.

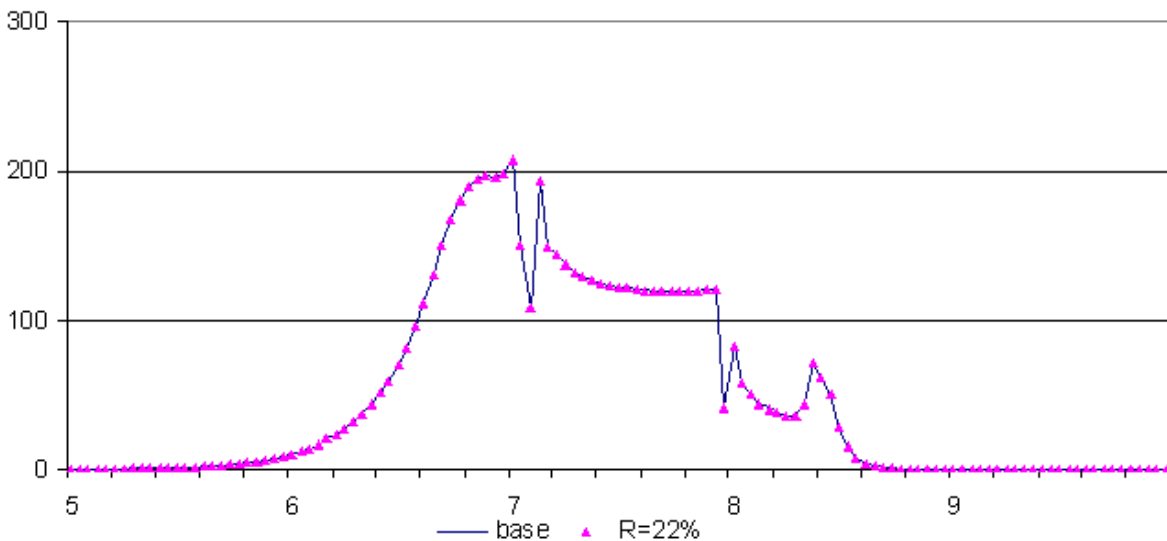


Fig 4.6: Soluzione finale del modello con tasso di ripensamento pari al 22%, percorso 2.

Andando a valutare poi per ogni singolo intervallo lo scostamento tra i risultati, calcolato come rapporto $|L-L_{base}| / L_{base}$, si trova che la massima differenza è dello 0,2%.

Andando a considerare invece il caso di decremento di R , si nota un sostanziale aumento della velocità di convergenza, trovando una soluzione accettabile dopo “sole” 157 iterazioni. Lo scostamento massimo ha un’entità del 2,1%, e si localizza sul secondo percorso, intorno alle 8,20 (il medesimo istante temporale del caso precedente). Data la sostanziale somiglianza con quelli

presentati poc' anzi si omettono i grafici degli andamenti delle partenze, si nota invece che l'effetto maggiore si manifesta nella velocità di convergenza.

Si è poi provato ad esplorare valori più elevati del tasso di ripensamento (dell'ordine del 25-30%) scoprendo che non si ottiene alcuna convergenza (sono state eseguite sessantamila iterazioni). Inoltre andando ad osservare l'andamento dello scarto si nota come dopo una iniziale discesa esso si stabilizzi oscillando intorno ad un valore essenzialmente costante, senza mai raggiungere il livello di accuratezza desiderato.

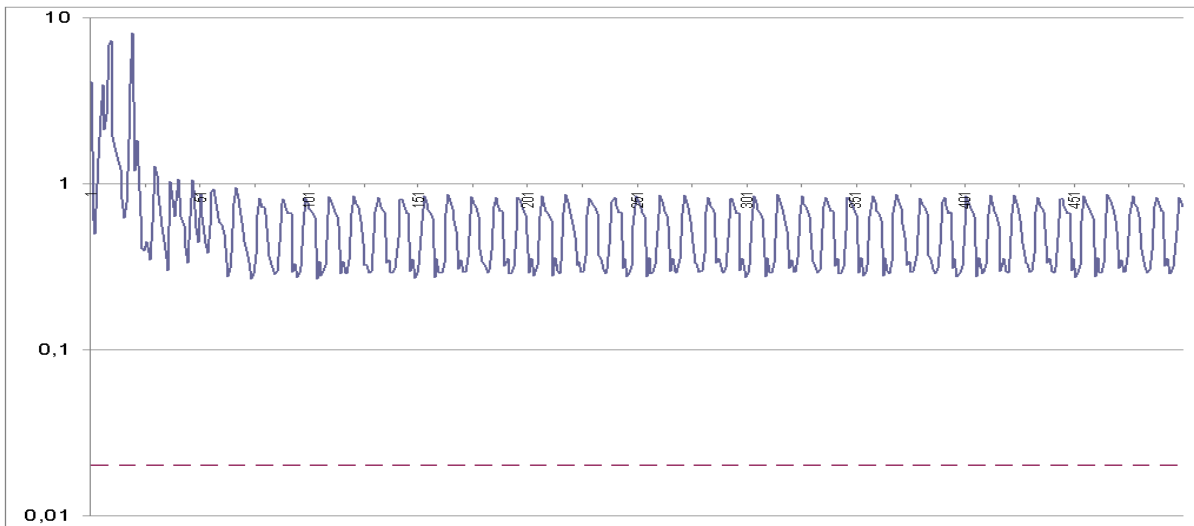


Fig 4.6: Misura di convergenza ad ogni iterazione con tasso di ripensamento pari al 25%.

Si riportano nel grafico le prime 500 iterazioni per R fissato al 25%, in scala semilogaritmica e dove la linea tratteggiata rappresenta la soglia di convergenza da raggiungere. L'andamento asintotico dello scarto risulta ben evidente già dopo un centinaio di iterazioni, ed è destinato ad oscillare indefinitamente. Alzando il valore di R l'oscillazione si attesta su valori più elevati, per esempio con un 28% si oscilla attorno all'1, mentre salendo al 30% aumentano ulteriormente sia il valore medio che l'ampiezza dell'oscillazione.

Considerando invece valori inferiori del tasso di ripensamento si va a testare il modello per R compreso nell'intervallo 16-10%, 5% e fino al caso limite dell'1%. Si è provato tutto il range dal 16% al 10% per studiare l'andamento della velocità di convergenza e trovare il valore a cui corrisponde il minor numero di iterazioni. Si riportano i risultati nella seguente tabella:

R	16%	15%	14%	13%	12%	11%	10%
num iterazioni	135	127	125	125	123	125	127
errore	9,17%	9,65%	4,59%	8,45%	6,12%	8,80%	5,13%

Tabella 4.2: Velocità di convergenza ed errore per valori di R nel range 10% - 16%.

Si nota come il numero di iterazioni sia pressoché lo stesso, si raggiunge un minimo attorno al 12%, ma di contro si ottiene un aumento della differenza rispetto al caso posto come base del confronto. Andando a localizzare la massima differenza si scopre che è il valore minimo della "valle" delle ore 8,20 nel secondo percorso.

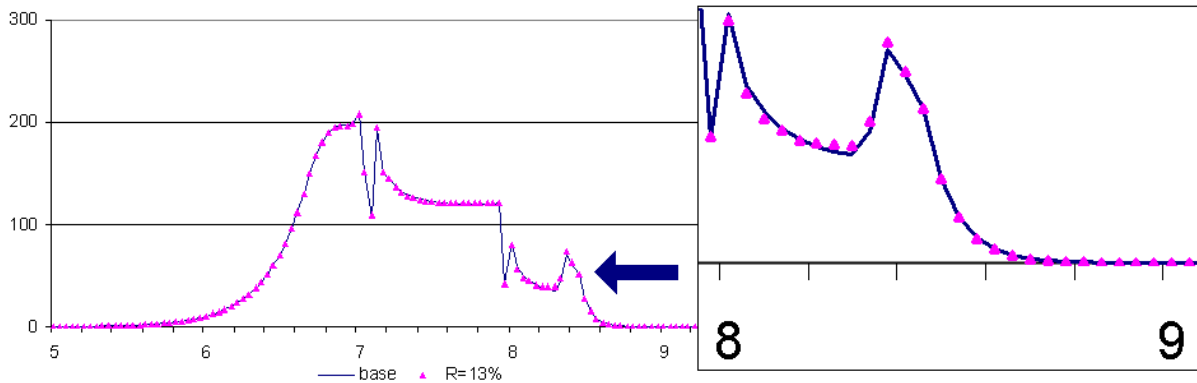


Fig 4.7: Massima differenza numero di partenze tra tasso di ripensamento pari al 20% e 13% e dettaglio.

Si riporta per esempio il confronto tra il caso base, R pari al 20%, e il 13%, ma il comportamento risulta lo stesso per tutti i valori considerati nel range. Si può comunque concludere che non vi siano sostanziali differenze tra le due serie, sono ben sovrapposte lungo tutto l'asse temporale.

Continuando ad abbassare il tasso di ripensamento si riscontra un aumento delle iterazioni necessarie a raggiungere la soluzione, ne servono 204 per R pari al 5%, con uno scostamento del 6,7% dalla soluzione base, localizzata sempre nella valle, mentre si arriva a ben 956 iterazioni per il caso limite di $R=1\%$, con una differenza oltre il 12% nel medesimo punto.

L'aumento del numero di iterazioni è da attribuire a due semplici ragioni. Prima di tutto la misura di convergenza dipende dal tasso di ripensamento scelto, come visto nel capitolo precedente, quindi assegnando un tasso più basso si avrà di conseguenza un criterio di convergenza più restrittivo. L'altra ragione riguarda la struttura dell'algoritmo iterativo, che va a ridistribuire ad ogni iterazione una certa percentuale di viaggiatori a partire dalla soluzione iniziale. Quindi più partenze si riassegnano ad ogni iterazione più velocemente si passa dalla configurazione iniziale a quella finale di equilibrio stocastico. Si pensi inoltre che la soluzione iniziale può avere delle configurazioni non coerenti con i limiti fisici della rete considerata, si sono visti per esempio dei tassi di partenza ben superiori alla capacità, quindi con un tasso di ripensamento più alto si riescono a correggere queste incongruenze con meno iterazioni.

D'altra parte è anche facile intuire come, per i valori superiori, l'incremento del tasso di ripensamento porti ad un numero maggiore di iterazioni, infatti si avrà un numero maggiore di utenti che vanno a destabilizzare la soluzione trovata nell'iterazione precedente. Si conferma quanto visto in precedenza, cioè che il processo iterativo consiste di due fasi. Quella iniziale porta a ridistribuire tutti gli utenti idealmente ammassati nell'unico picco della soluzione iniziale, dove non si considerava l'effetto della congestione, livellando in parte il grande disequilibrio dovuto alla forte congestione. Nella seconda fase del processo iterativo la forma generale della distribuzione risulta ben definita e si riscontrano solo dei piccoli aggiustamenti. Questo comportamento lo si era già evidenziato nel capitolo precedente confrontando le soluzioni ottenute nel corso delle iterazioni, si potrebbe qui riproporre la stessa rappresentazione per diversi valori del tasso di ripensamento, ma si preferisce andare a riprodurre invece le diverse serie delle misure di convergenza. La differenza grafica fra le curve delle partenze sarà di conseguenza più evidente dove si incontrano valori maggiori della misura di convergenza.

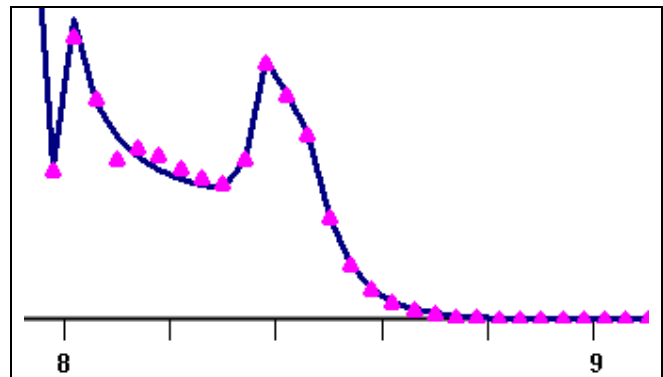


Fig 4.8: Dettaglio massima differenza partenze tra tasso di ripensamento pari al 20% e 1%.

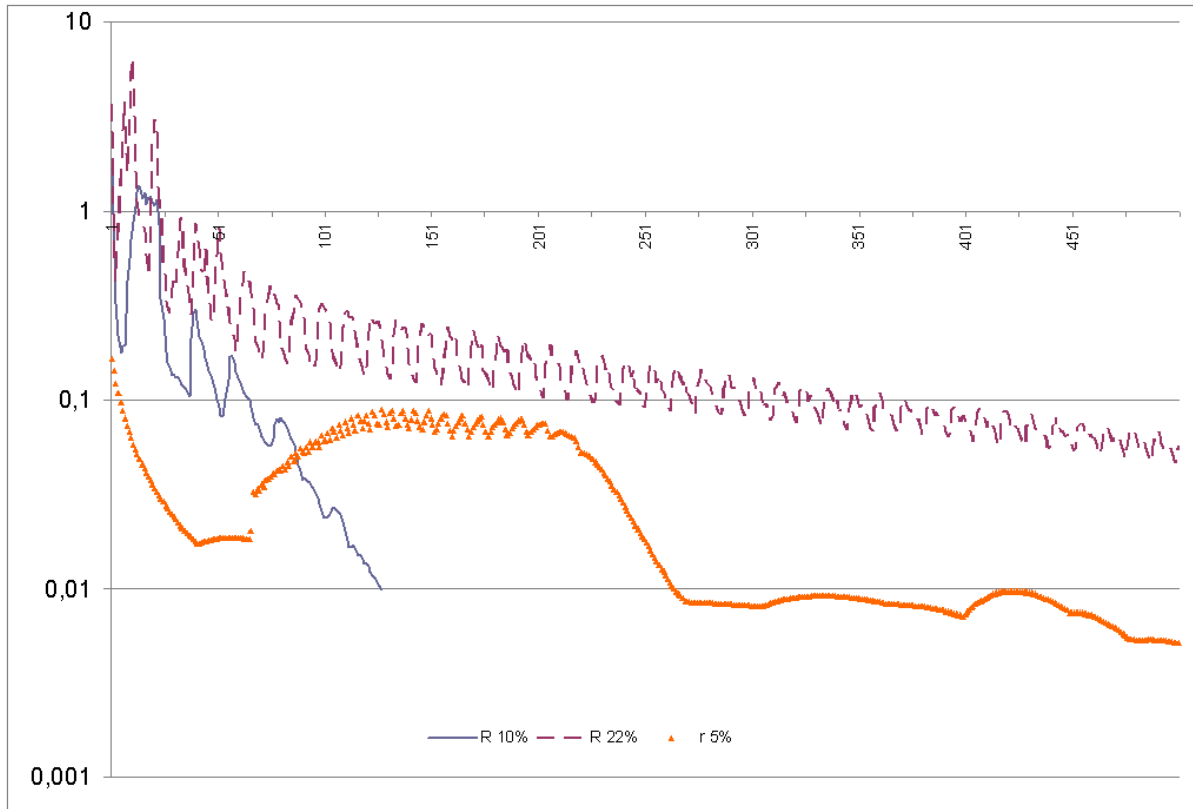


Fig 4.9: Misura di convergenza per ciascuna iterazione per diversi valori del tasso di ripensamento.

Si può quindi che tassi di ripensamento più elevati portino gli scarti tra le iterazioni successive in una fascia più bassa già con poche iterazioni, rimanendo però ad oscillare vicini alla soglia di convergenza anche per un elevato numero di iterazioni. Valori inferiori di R invece mostrano un maggior numero di oscillazioni in una fascia elevata, un ordine di grandezza in più della soglia di convergenza, ed oscillano di meno in prossimità della misura di convergenza. Si può quindi concludere che tassi di ripensamento più elevati accelerino la prima fase di allontanamento dalla soluzione iniziale, mentre tassi inferiori aumentino la stabilità della forma della distribuzione vicino alla configurazione finale. Si vede anche come un tasso intermedio possa far lavorare al meglio entrambe le fasi, aumentando notevolmente la velocità di convergenza.

L'altro parametro indagato è il valore della domanda potenziale, cioè il numero totale di viaggiatori che potrebbero utilizzare l'infrastruttura. L'offerta, ossia le caratteristiche della rete, rimane costante, si incrementerà o diminuirà soltanto il numero totale di utenti, mantenendo come caso base quello presentato nell'articolo con 27000 viaggiatori e un tasso di ripensamento del 20%.

Si prova, per cominciare, ad impostare la domanda a 30000 unità, ma ci si accorge che non si trova alcuna soluzione, secondo i parametri di convergenza definiti, ma che la soluzione continua ad oscillare. Per arrivare a convergenza con questo numero di viaggiatori occorre abbassare il tasso di ripensamento, per esempio al 18%, giungendo quindi ad una soluzione stabile dopo 271 iterazioni. Questa costituisce già un'indicazione circa la relazione che può intercorrere nell'algoritmo tra il tasso di ripensamento e il numero di utenti potenziali, ma si riporteranno più avanti i valori limite per R e numero viaggiatori combinati necessari per ottenere la convergenza. Si confrontano ora solo i grafici per le due diverse domande d'utilizzo della rete.

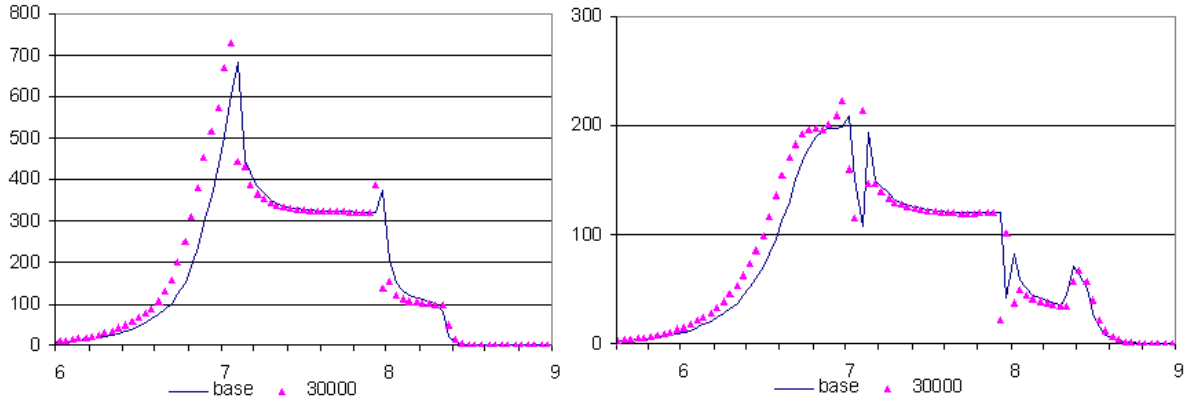


Fig 4.10: Confronto risultati finali per diversa quantità utenti potenziali totali, percorsi 1 e 2.

Invece abbassando gli utenti a 25000, e mantenendo R al 20%, si giunge alla soluzione in 113 iterazioni, si nota quindi una maggior propensione alla convergenza per un numero inferiore di viaggiatori, comportamento pienamente plausibile, dato che è più facile trovare un equilibrio in una rete leggermente congestionata piuttosto che in una saturata.

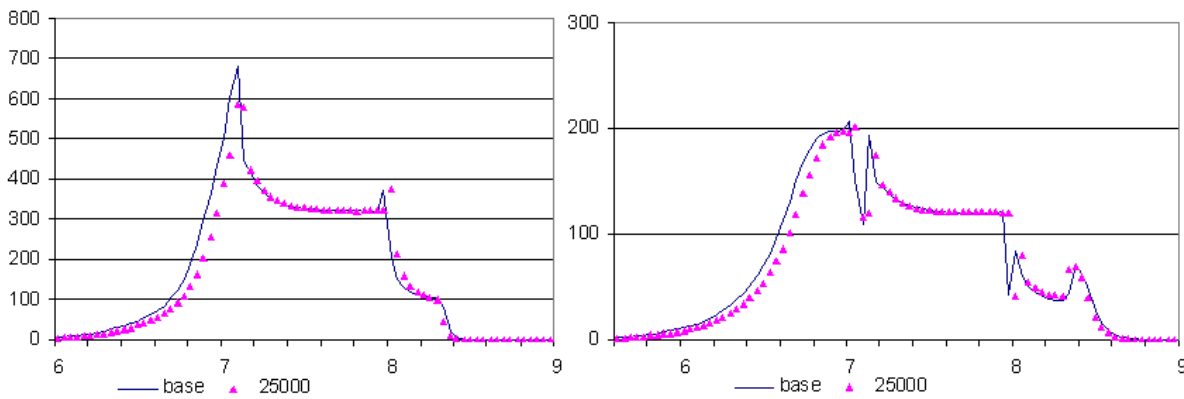


Fig 4.11: Confronto risultati finali per diversa quantità utenti potenziali totali, percorsi 1 e 2.

Con un numero minore di viaggiatori potenziali totali si vede che il numero di partenze risulta di conseguenza inferiore, rispetto al caso precedente con più utenti, per tutto il periodo dell'analisi. Inoltre si manifesta un altro fenomeno evidente. La curva trasla verso sinistra nel caso di maggiore congestione, occorre infatti anticipare le partenze per fare in modo che gli utenti possano superare il collo di bottiglia per giungere a destinazione in tempo, mentre nel caso contrario, se diminuisce l'attesa in coda, si può effettuare la partenza in un momento successivo, quindi la curva risulta tralata verso destra. Anche in questo caso il modello si dimostra coerente con il comportamento atteso nella realtà.

Si passa infine ad indagare il campo di convergenza del modello, determinato congiuntamente dai valori dei parametri appena considerati, tasso di ripensamento e numero totale di viaggiatori, ma senza modificare la forma funzionale dell'utilità associata alle varie alternative. Sono stati condotti svariati esperimenti a tal proposito, per due ragioni principali. Innanzitutto si rendeva necessario procedere per tentativi, aumentando il tasso di ripensamento fino a trovare quello massimo che portasse a convergenza. Inoltre, una volta ottenuti alcuni punti, si è trovato un andamento non monotono per la frontiera del dominio di convergenza, si è dovuto procedere così ad infittire gli intervalli di valori indagati, aumentando di conseguenza l'onere computazionale. Si sono indagati alla fine ventuno valori per il numero di viaggiatori potenziali, dal valore minimo che garantisca la

convergenza per qualunque tasso di ripensamento, ad un valore ritenuto molto alto, quasi il doppio degli utenti considerati nel caso base. Si riportano quindi le coppie di valori trovate, rappresentate anche in forma grafica.

N	6500	6700	7000	8000	10000	11000	13000
R max	100,00%	80,00%	43,98%	38,10%	32,45%	29,40%	28,20%
N	15000	16000	17000	19000	20000	22000	23000
R max	27,91%	27,42%	26,46%	29,80%	31,00%	30,86%	28,38%
N	25000	27000	30000	35000	40000	45000	50000
R max	26,10%	22,50%	19,92%	15,40%	12,50%	11,30%	8,80%

Tabella 4.3: Dati per la costruzione del dominio $N - R$ che assicuri la convergenza dell' algoritmo.

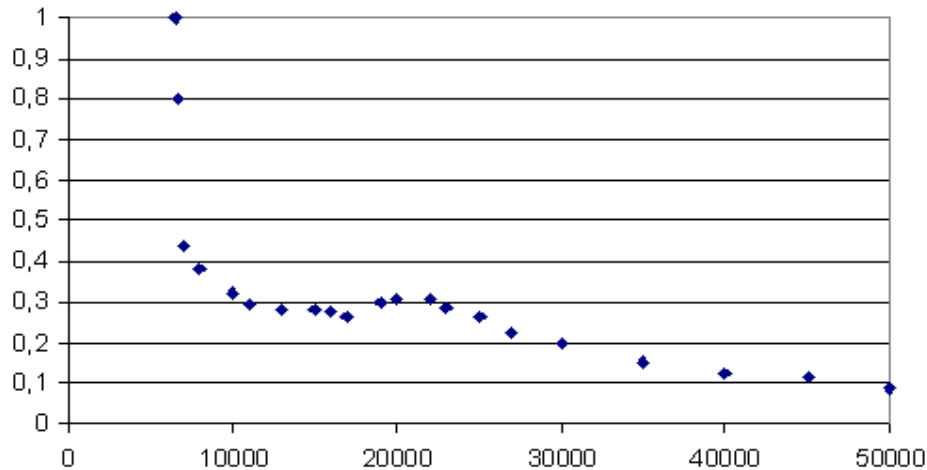


Fig 4.12: Dominio $N - R$ per assicurare la convergenza dell' algoritmo.

L'andamento appare abbastanza delineato, una relazione inversa tra il numero totale di viaggiatori e il tasso di ripensamento, anche se non perfettamente monotona. Per i valori limite inferiori del numero di viaggiatori, meno di 7000, la convergenza è assicurata a prescindere dal tasso di ripensamento, infatti non si genera congestione in nessun percorso. Quando si va a ricalcolare l'utilità per effettuare una nuova iterazione, riallocando anche la totalità degli utenti, si ritroverà lo stesso valore dell' iterazione precedente, per cui la configurazione delle partenze non muta. Si scende poi rapidamente fino al 30% circa per 10000 viaggiatori potenziali, dopo di che il valore massimo del ripensamento oscilla attorno a questa cifra per tutto il range 10000-20000, senza poter identificare un trend significativo. Superati i 20000 viaggiatori, avendo quindi maggiori problemi di congestione, il valore massimo del ripensamento possibile tende a scendere continuamente. Questo è spiegabile dal fatto che per forti livelli di congestione, e le conseguenti lunghezze di coda al collo di bottiglia, riassegnando un' alta percentuale di utenti si avrebbero dei forti mutamenti delle distribuzioni dei tempi di attesa ad ogni iterazione rendendo quindi difficile trovare stabilità nel processo iterativo.

Si sono analizzati fin qui gli effetti sul comportamento del modello relativi a parametri "esterni" rispetto all'utente. La domanda complessiva è considerata infatti esogena, inoltre il tasso di ripensamento può essere considerato tale, sia come parametro di calcolo senza basi comportamentali che lo supportano sia come valore medio per gli utenti della rete, eventualmente controllabile per mezzo di politiche di informazione all'utenza. Si passa quindi nel successivo capitolo ad analizzare gli effetti del cambiamento delle caratteristiche del singolo utente, in particolare come percepisce le alternative disponibili e come le ordina per scegliere la migliore.

5 Analisi di sensibilità: effetti dipendenti dalla percezione del singolo utente

Si prende ora in esame l'effetto della funzione di utilità sui comportamenti di scelta dei viaggiatori. La domanda di trasporto e l'offerta adesso sono considerate fissate, quello che si cerca di modificare è la sensibilità degli utenti, descritta nel modello tramite la specificazione della funzione di utilità. Si prenderanno in considerazione diversi tipi di funzione, soprattutto per il termine SD , dalle più semplici forme lineari a forme più elaborate.

Finora si è utilizzata una funzione di utilità lineare, basata sulla somma del tempo di percorrenza e di una penalizzazione (lineare, anzi meglio trilineare) dovuta allo scostamento tra l'orario di arrivo desiderato e quello effettivo. Come si è già spiegato precedentemente si hanno due diverse penalizzazioni unitarie per il caso di arrivi anticipati o ritardati, rappresentate dalle diverse pendenze delle rette. Questi parametri sono stati derivati da uno studio precedente, condotto da Small con riferimento a contesti americani tra gli anni '70 ed '80. Per questo motivo probabilmente non sarebbero utilizzabili in un contesto contemporaneo ed italiano, ma non vengono confutati in quanto non si dispone di fonti di dati su cui stimare dei nuovi parametri, né interessa dato il carattere teorico del presente lavoro. Si può comunque andare ad esaminare come le scelte dei viaggiatori vengano modificate da possibili variazioni introdotte nella funzione di disutilità percepita. Si possono quindi modificare i coefficienti β e $\beta\gamma$, mantenendo la forma trilineare ma aumentando o diminuendo la penalizzazione per arrivi diversi dall'intervallo preferito.

Si ricordano i valori dei parametri utilizzati da Ben-Akiva e colleghi, che costituiscono il caso base per i successivi confronti:

$$\beta = 3,9$$

$$\beta\gamma = 15,2$$

Per garantire la convergenza ad una soluzione di equilibrio anche per i casi successivamente presentati si è scelto di abbassare a 25000 il numero totale di viaggiatori potenziali. Si è già visto che così i risultati sono abbastanza simili al caso di 27000 passeggeri, i numeri relativi ai tassi di partenze sono conseguentemente un poco più bassi, ma la distribuzione mantiene la medesima forma complessiva. Si comincia quindi modificando solamente la penalizzazione per gli arrivi anticipati, aumentando il parametro β di circa il 15%, fissandolo quindi a 4,5.

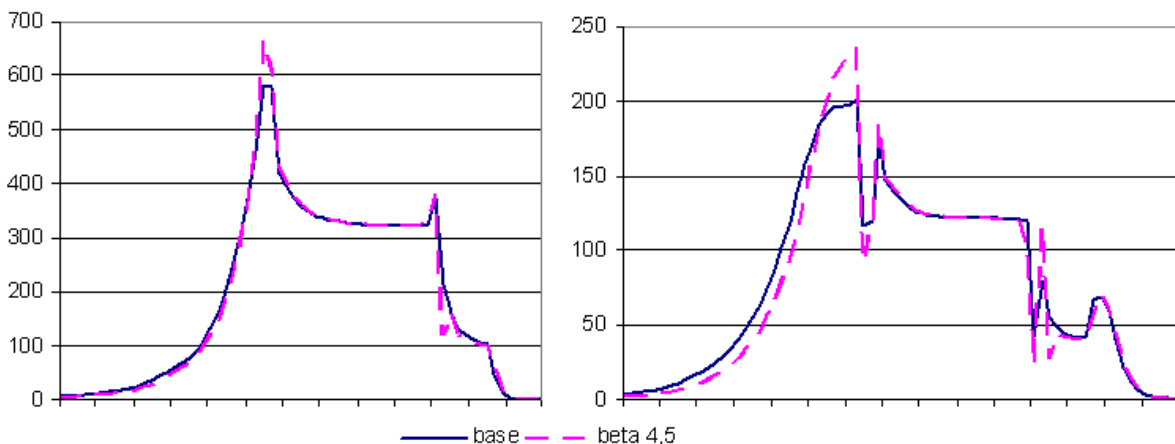


Fig 5.1: Differenza risultati per aumento 15% penalizzazione arrivi in anticipo, percorsi 1 e 2.

Le differenze appaiono più marcate per il secondo percorso piuttosto che nel primo. Comunque si nota come le partenze risultino un poco più ritardate ed inoltre i picchi, situati nel periodo di disutilità minima, diventino più elevati. Penalizzando maggiormente gli arrivi in anticipo praticamente si schiaccia un pochino la curva verso destra, mantenendo sostanzialmente immutata

la fase discendente. Inoltre complessivamente vengono persi circa 350 viaggiatori. Si procede ora a diminuire il coefficiente β del 15%, ponendolo pari a 3,3.

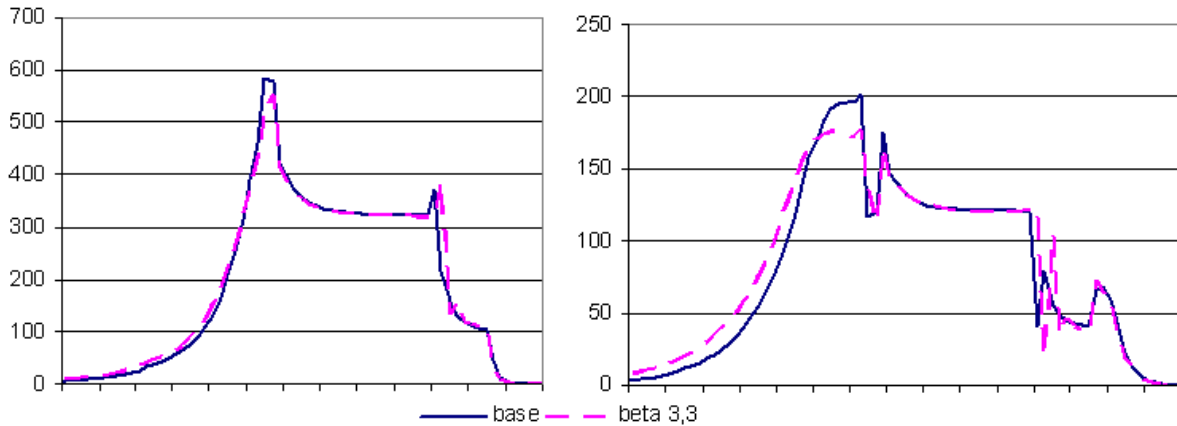


Fig 5.2: Differenza risultati per diminuzione 15% penalizzazione arrivi in anticipo, percorsi 1 e 2.

Anche in questo caso si notano maggiori modifiche nel secondo percorso. Rilassando la disutilità associata agli arrivi in forte anticipo si ottiene un anticipo delle partenze ed una conseguente diminuzione dei picchi. La fase discendente è rimasta immutata pure in questo caso. Sommando il numero totale di viaggi si vede che ce ne sono circa 400 in più del caso base. Si riporta l'entità massima delle differenze rispetto al caso base nella tabella 5.1.

Passando quindi ad indagare l'effetto della penalizzazione per gli arrivi in ritardo, si aumenta del 15% il coefficiente $\beta\gamma$ ponendolo pari a 17,5.

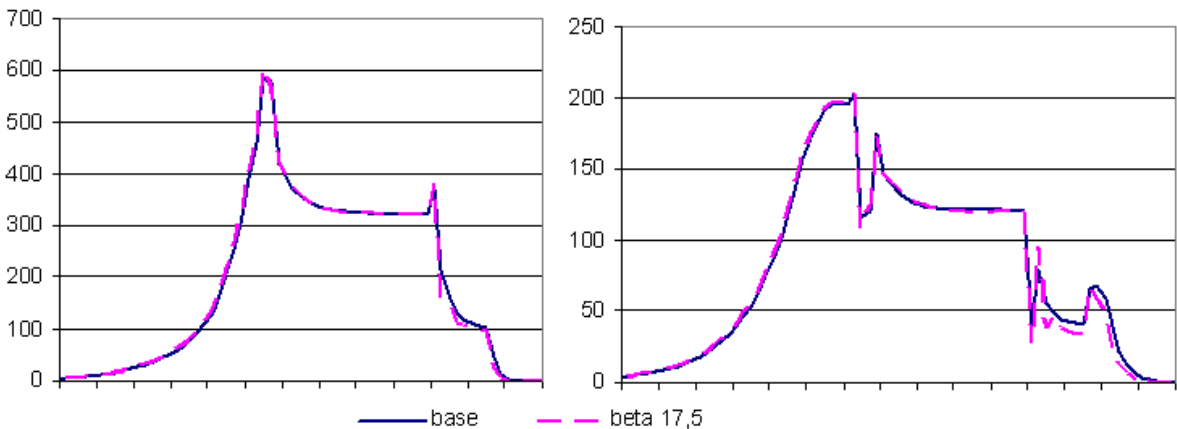


Fig 5.3: Differenza risultati per aumento 15% penalizzazione arrivi in ritardo, percorsi 1 e 2.

Si nota come in questo caso a modificarsi sia soltanto la fase finale discendente del percorso due. La curva risulta in questo caso leggermente schiacciata verso sinistra. Il valore delle partenze nei picchi però non è aumentato, per cui non è stato compensato lo schiacciamento imposto alla curva. Si sono persi così alcuni spostamenti, un centinaio in tutto. Globalmente l'effetto sembra minore di quello dovuto al coefficiente per gli arrivi anticipati.

Si prova ora a ridurre il coefficiente $\beta\gamma$, ponendolo pari a 12,9. I risultati sono riportati in figura 5.x.

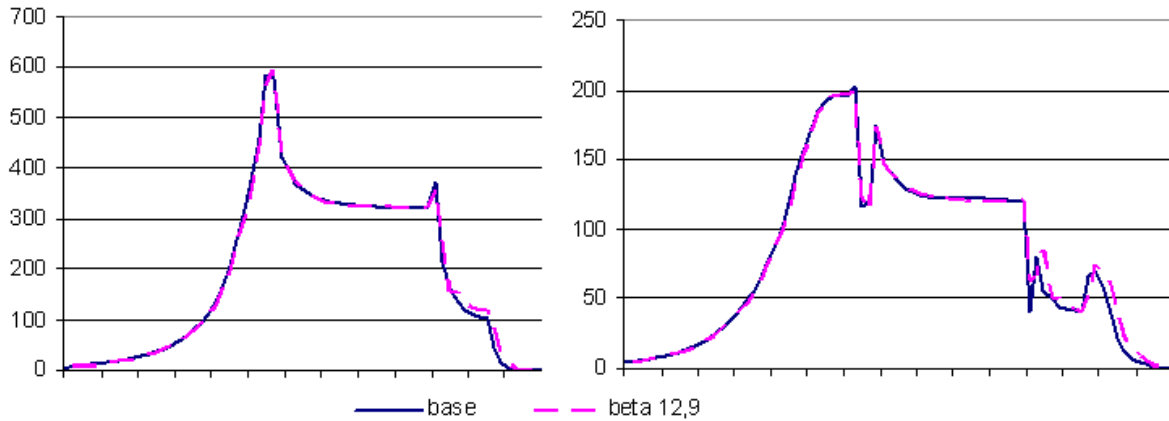


Fig 5.4: Differenza risultati per diminuzione 15% penalizzazione arrivi in ritardo, percorsi 1 e 2.

Si vede come in questo caso la fase discendente venga lievemente traslata verso destra, i picchi rimangono immutati e si guadagnano così cento viaggiatori. Si possono quindi riassumere i risultati appena rappresentati nei grafici precedenti nella seguente tabellina, in cui si riportano inoltre il numero di iterazioni per trovare la soluzione, la differenza massima tra i tassi di partenza rappresentata da due indici, uno calcolato comprendendo anche le code e uno solo per la fase centrale più affollata, inoltre si riportano gli incrementi o decrementi del numero totale di spostamenti effettuati.

parametri	base	$\beta = 4,5$	$\beta = 3,3$	$\beta\gamma = 17,5$	$\beta\gamma = 12,9$
iterazioni	113	129	98	120	118
max diff centrale		51,1 %	189,3 %	36,3 %	54,4 %
diff media punti notevoli		26,9%	14,3%	7,6%	2,7%
tot viaggi	18329	- 363	+ 421	- 98	+ 107

Tabella 5.1: Analisi di sensibilità, differenze delle distribuzioni per variazione parametri.

Si sono trovate delle enormi differenze, corrispondenti ai valori agli estremi dell'intervallo temporale, cioè quando il numero delle partenze è trascurabile. Si considerano quindi solo le massime differenze, ottenute da un confronto punto a punto, solo per il periodo centrale. Le differenze così calcolate hanno comunque valori molto elevati in quanto si ha una traslazione della curva piuttosto che ad un effettivo mutamento dei valori numerici (i picchi rimangono della stessa entità). Si procede quindi ad una misura media, confrontando i valori di due picchi ed un minimo locale, chiaramente individuabili nella struttura di tutte le soluzioni. Si riafferma così quanto visto graficamente, cioè che il mutamento del parametro β porta modifiche maggiori che il parametro $\beta\gamma$. Si vede chiaramente, oltre che dalla rappresentazione grafica, che aumentando la penalizzazione si perdono viaggiatori, che ritengono quindi più conveniente scegliere l'alternativa 0, non utilizzare la strada, mentre si acquisiscono nuovi spostamenti con una disutilità che cresce più lentamente. L'effetto maggiore del coefficiente β rispetto a $\beta\gamma$ è evidente anche dal numero di passeggeri che si acquisiscono o perdono, a parità di variazione del coefficiente, che resta sempre di circa il 15%. Infine non si denotano legami tra i coefficienti considerati e la velocità di convergenza.

Si può proseguire l'analisi andando ad ipotizzare una funzione di disutilità non più lineare. Si può ipotizzare che la disutilità cresca in modo più che proporzionale rispetto alla distanza temporale dall'intervallo di arrivo desiderato, in modo da rendere ancor più penalizzanti per l'utente arrivi molto anticipati o molto ritardati. Questo effetto può essere ottenuto per esempio elevando al quadrato la differenza temporale tra l'arrivo effettivo e quello desiderato, il termine SD assumerà

quindi una forma del tipo riportato qui di seguito, inoltre si mostra graficamente come cambia rispetto alla specificazione lineare.

$$SD_i = \begin{cases} \beta[t^* - \Delta - t - TT_i(t, \omega)]^2 & \text{per } t < \bar{t}_i \\ 0 & \\ \beta\gamma[t + TT_i(t, \omega) - t^* - \Delta]^2 & \text{per } t > \bar{t}_i \end{cases} \quad (5.1)$$

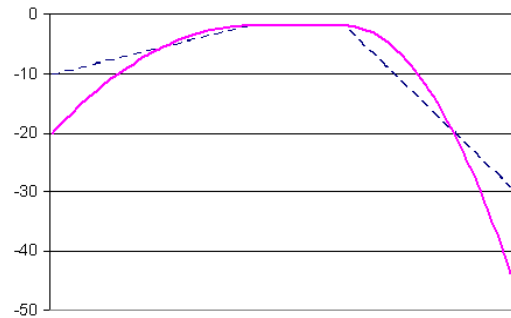


Fig 5.5: Andamento SD parabolico

Dal grafico si vede subito la peculiarità di questa forma funzionale, infatti, a parità di coefficienti β e $\beta\gamma$, la disutilità all'inizio risulta minore della forma lineare per poi crescere più rapidamente. In pratica si ha un fastidio minore, rispetto al caso lineare, per piccoli scostamenti dall'intervallo desiderato, si ha un impatto uguale in corrispondenza di un'ora e poi la disutilità aumenta maggiormente. Si può calcolare allora il modello con le nuove ipotesi, i valori base di β e $\beta\gamma$, 25000 viaggiatori e un tasso di ripensamento del 20%.

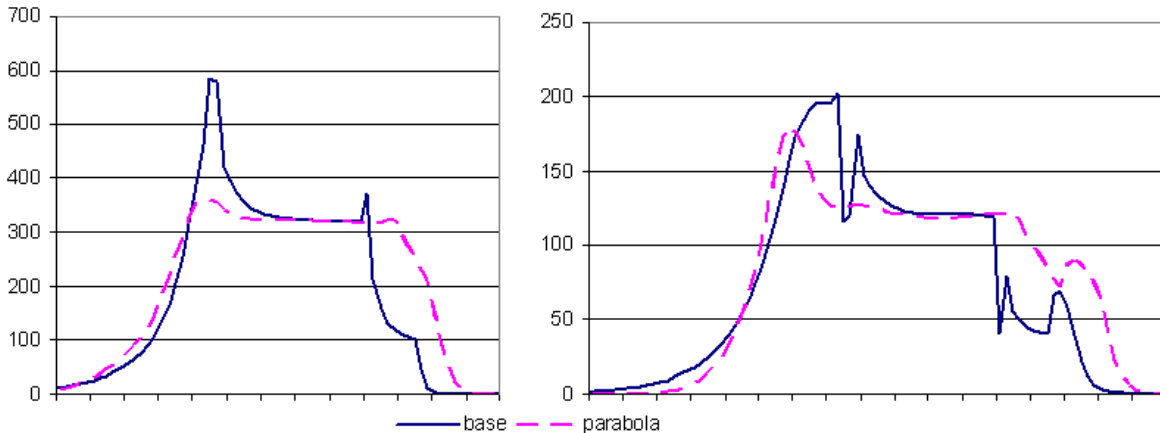


Fig 5.6: Differenza risultati finali caso base - SD forma parabolica, percorsi 1 e 2.

L'andamento delle partenze appare marcatamente diverso dai casi precedenti. Si nota come sia sparito il picco per il primo percorso, mentre la coda discendente appare traslata verso destra. La sparizione del picco è da attribuire all'allungamento del periodo di utilità massima. La parabola infatti arriva al valore nullo con tangente orizzontale, inoltre cresce lentamente nel primo tratto, generando così un allargamento dell'intervallo temporale preferito e una sostanziale diminuzione dell'entità della fase congestionata; tale allargamento però non è di entità sufficiente ad eliminare la congestione anche dal secondo percorso, che risulta quindi solamente ridotta. La forma senza picchi è corretta, in quanto la si incontra sia nell'articolo di De Palma del 1983, caso senza congestione, che nell'articolo di Ben-Akiva dell'anno successivo, quando viene mostrato l'effetto dell'aumento della capacità della rete. Inoltre penalizzando di meno gli arrivi in ritardo si ha la traslazione della coda discendente, esattamente come visto esaminando i coefficienti della forma lineare.

Si può inoltre ricorrere ad una forma esponenziale o logaritmica, nel caso si voglia invece mantenere la pendenza iniziale della forma lineare ed in più ottenere una nuova curva che domini o sia dominata dalla retta in ogni punto. In particolare utilizzando la differenza tra l'istante dia arrivo

desiderato e quello realizzato in una funzione esponenziale, invece che nella semplice forma lineare, si ottiene la medesima tangente all'origine ed una disutilità maggiore in ogni istante. Si scrivono quindi la nuova forma utilizzata per SD e il grafico relativo.

$$SD_i = \begin{cases} \beta \exp[t^* - \Delta - t - TT_i(t, \omega)] & \text{per } t < \bar{t}_i \\ 0 & \\ \beta \gamma \exp[t + TT_i(t, \omega) - t^* - \Delta] & \text{per } t > \bar{t}_i \end{cases} \quad (5.2)$$

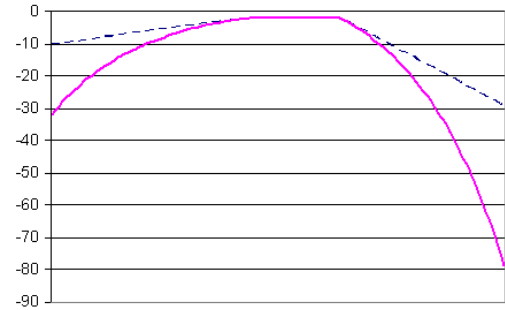


Fig 5.7: Andamento SD esponenziale.

Si vede come le due curve vadano a 0 alla stessa maniera e poi crescendo non si intersechino mai. Aumentando in questo modo la disutilità ci si aspetta che la curva delle partenze risulti con un picco più elevato e più schiacciata, coerentemente con il comportamento visto finora.

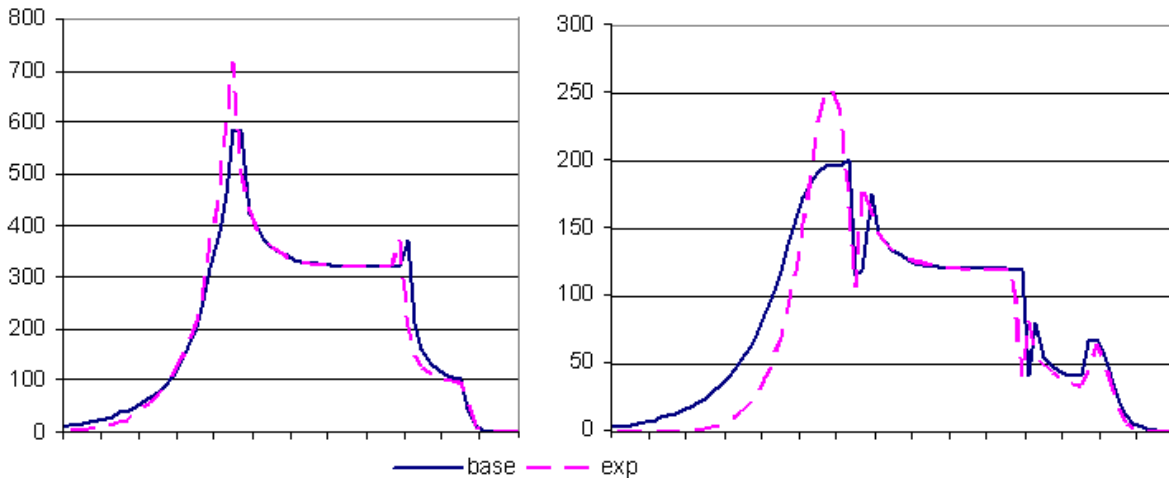


Fig 5.8: Differenza risultati finali caso base - SD forma esponenziale, percorsi 1 e 2.

I risultati confermano tale aspettativa, si verifica la congestione che genera il picco e la curva risulta schiacciata verso il centro. Si può calcolare poi che si perdono più di 750 spostamenti. La forma esponenziale porta quindi un incremento sensibile alla disutilità percepita dai viaggiatori. Si prova quindi con la forma logaritmica, per avere la stessa tangente all'inizio, ma una penalizzazione meno che proporzionale alla distanza temporale.

$$SD_i = \begin{cases} \beta \log[t^* - \Delta - t - TT_i(t, \omega)] & \text{per } t < \bar{t}_i \\ 0 & \\ \beta \gamma \log[t + TT_i(t, \omega) - t^* - \Delta] & \text{per } t > \bar{t}_i \end{cases} \quad (5.3)$$

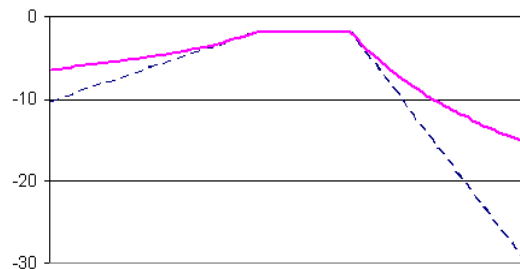


Fig 5.9: Andamento SD logaritmico.

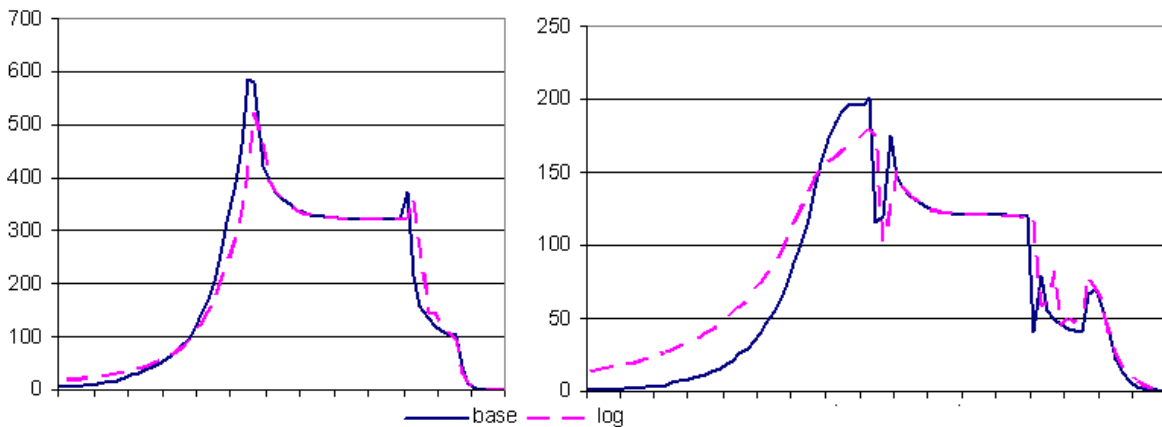


Fig 5.10: Differenza risultati finali caso base – SD forma logartimica, percorsi 1 e 2.

La novità notevole di questo caso consiste nella coda della distribuzione nella fase ascendente, che risulta ben diversa dai valori vicino allo 0 cui si era ormai abituati. Tale effetto è dovuto alla disutilità degli arrivi anticipati che, come appare nel grafico relativo (fig. 5.9), non riesce a raggiungere valori particolarmente elevati nell'intervallo temporale dell'analisi. Il significato di elevato è relativo, nel caso in esame si intende meglio paragonati ai valori in corrispondenza del massimo dell'utilità, dove si vi è *SD* nullo ma si è costretti ad attendere in coda, aggiungendo così alla disutilità il termine dell'attesa. Con la minor penalizzazione si guadagnano inoltre 800 nuovi viaggiatori.

Dai grafici presentati si è visto come le curve vengano più spesso deformate lungo l'asse temporale piuttosto che in senso verticale. Si trascura perciò di andare a calcolare una differenza istante per istante tra i valori della serie di base e i risultati ottenuti modificando la funzione di utilità.

Si è comunque indagata l'unicità e stabilità della soluzione per le forme logaritmica ed esponenziale dell'utilità, cambiando tasso di ripensamento e ridistribuendo parte della soluzione trovata.

forma	esponenziale	R = 23 %	stabilità	logaritmica	R = 23 %	stabilità
iterazioni	202	1649	155	86	94	38
max diff		0,67%	0,84%		9,59%	8,99%

Tabella 5.2: Unicità e stabilità della soluzione con *SD* forma non lineare.

Nel caso dell'esponenziale tutto torna perfettamente, le tre soluzioni presentate sono praticamente coincidenti. Si nota inoltre l'alto numero di iterazioni necessarie per arrivare alla soluzione per il tasso di ripensamento pari al 23%, probabilmente si sta lavorando vicino al valore limite per garantire la convergenza, ma tale tematica verrà approfondita nel proseguo. Nel caso della forma logaritmica si vede un 9%, che di per sé non è poco, ma andando a controllare le serie dei risultati si vede che le differenze si concentrano solamente in pochi intervalli temporali, prima dell'ultimo picco, mentre nel resto del dominio le due curve sono perfettamente sovrapposte. Si era già incontrata questa evenienza nel quarto capitolo, testando la convergenza per diversi valori di *R*. Probabilmente ciò è dovuto anche all'approssimazione numerica legata al calcolo del logaritmo. Si è comunque verificato che globalmente l'algorithmo fornisce la medesima soluzione.

Si può ancora indagare la regione dei valori $N - R$, ossia numero di viaggiatori potenziali e tasso di ripensamento, dove è possibile raggiungere la convergenza, analogamente a quanto fatto in precedenza nel capitolo 4 per il caso del termine *SD* di forma lineare. Si sono indagati alcuni valori significativi del numero di viaggiatori potenziali, trovando il massimo tasso di ripensamento, con precisione di un'unità percentuale, per garantire la convergenza. L'arrotondamento per difetto non fornirà certamente il vero tasso di ripensamento massimo possibile, ma ne da comunque una stima.

Si è scelto di non spendere tempo ad aumentare l'accuratezza, in quanto è ritenuto interessante scoprire se la regione sia più ampia o più ristretta, a prescindere dall'entità del mutamento, difficilmente quantificabile.

N	log	exp
30000	> 21%	> 14%
27000	> 24%	> 19%
25000	> 25%	> 23%
20000	> 25%	> 32%
15000	> 28%	> 28%
10000	> 34%	> 31%

Tabella 5.2: Dati per costruzione dominio $R - N$ che assicuri la convergenza con SD non lineare.

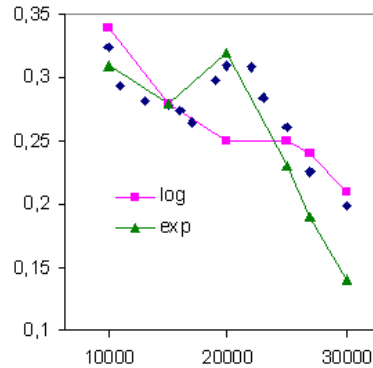


Fig 5.11: Dominio $R - N$ per garantire convergenza, SD non lineare

Per il confronto si sono riportati i punti trovati per segnare la frontiera del caso trilineare. Si nota come non vi sia una regione che comprenda totalmente le altre. Mentre per il caso logaritmico si vede una sorta di legame $N - R$ inverso e pseudo-lineare, utilizzando una forma esponenziale si ritrova quella specie di picco attorno ai 20000 viaggiatori, già visto nella forma base, che consente la convergenza per valori di ripensamento piuttosto alti, se confrontati con quelli usuali ritrovati. Non si sono trovate valide ragioni per giustificare tale picco, Probabilmente è frutto di una particolare combinazione tra i valori assegnati per la domanda globale e le caratteristiche della rete. Per ulteriori approfondimenti andrebbe indagato quel che accade qualora si cambiassero i valori attribuiti alla capacità del collo di bottiglia.

Si vuole ora proseguire andando ad esaminare un altro aspetto della sensibilità dell'utenza rispetto alle alternative proposte, che però non è direttamente collegato al concetto di utilità aleatoria. Si intende studiare come si possa meglio definire la frazione di viaggiatori che ad ogni iterazione riconsiderano la propria scelta, generalizzando un'ipotesi assunta nelle analisi precedenti. Si vuole perciò modificare il tasso di ripensamento, portandolo da un valore costante ad una variabile aleatoria, per cui il valore da utilizzare deve essere ricavato da una distribuzione.

Si ricorda come il tasso di ripensamento R sia stato definito come il parametro che regola la dinamica interperiodale del sistema; moltiplicato per il numero di partenze al giorno precedente vuole rappresentare la quantità di utenti che considera (ma non necessariamente decide) di cambiare l'orario di partenza, mentre moltiplicato per una probabilità di tipo Logit esprime la frazione di nuovi utenti che scelgono l'intervallo considerato.

$$\frac{\partial r(t, \omega)}{\partial \omega} = R \left[N \frac{\exp[V(t, \omega) / \mu]}{\int \exp[V(u, \omega) / \mu] du} - r(t, \omega) \right] \quad (1.11)$$

Nelle analisi precedenti si è assegnato ad R un valore costante sia per semplicità, sia per non dover attribuire un'interpretazione comportamentale a tale parametro. La difficoltà pratica connessa con quest'ultimo passaggio consiste nella stima del parametro da un campione di utenti, in quanto il ripensamento non è una caratteristica facilmente osservabile ed indagabile. Sfruttando i vantaggi di un'analisi puramente teorica si cerca ora di definire il tasso di ripensamento come una variabile aleatoria distribuita sulla popolazione dei viaggiatori, con la possibilità di cambiare valore giorno per giorno. Si ipotizza quindi che possa essere stimabile in una qualche maniera, con un certo valor medio ed una certa variabilità.

Premesso come sia assai difficile avere una stima realistica del tasso di ripensamento, si è scelto di rappresentarlo in modo semplice con una distribuzione di probabilità uniforme. Quindi R assumerà la forma seguente:

$$R \sim U(R_{\min}, R_{\max}) \quad E(R) = (R_{\max} - R_{\min}) / 2 \quad \text{var}(R) = (R_{\max} + R_{\min})^2 / 12 \quad (5.4)$$

Ipotizzando invece che sia possibile compiere uno studio approfondito sulla distribuzione del parametro, si immagina che possa risultare distribuito normalmente sulla popolazione degli utenti, assumendo quindi tale forma:

$$R \sim N(\mu, \sigma^2) \quad E(R) = \mu \quad \text{var}(R) = \sigma^2 \quad (5.5)$$

Ora quindi è possibile ricalcolare la soluzione, per esempio del caso base considerato, utilizzando una delle due nuove ipotesi introdotte. Nel caso di distribuzione uniforme si è scelto di utilizzare come dominio di R un intervallo di ampiezza 0,2 avente come punto centrale il valore preso prima come costante. Quindi, ad esempio, nel caso base si avrà un R distribuito uniformemente tra 10% e 30%. Ad ogni iterazione verrà estratto un valore casuale che costituirà il tasso di ripensamento di quella specifica iterazione. Questo influenzerà sia il calcolo della soluzione che la misura di convergenza, nella quale R compare al denominatore, per cui ad estrazioni di R con valori più bassi corrisponderanno valori più elevati della misura di convergenza. Il numero di iterazioni quindi diventa una misura meno significativa della velocità di convergenza, si può prendere in considerazione l'ordine di grandezza. Con l'estrazione casuale ogni volta che si ricalcherà il modello saranno necessarie un numero diverso di iterazioni, non definibile a priori. Nel caso base si è arrivati a convergenza con un numero di iterazioni compreso tra circa 330 e 550, sicuramente più del numero necessario con R fisso al 20%. Inoltre si fa notare come possano essere estratti facilmente valori superiori al 22%, che costituisce la frontiera del dominio di convergenza, quindi in pratica vi è il 40% di probabilità di estrarre un tasso di ripensamento che non garantisca la convergenza, da cui la necessità di molte iterazioni. Calcolando la massima differenza con il caso in cui si utilizzava un valore costante si scopre che si attesta sul 4%, praticamente si ottengono gli stessi risultati. È interessante riportare per ogni iterazione il valore estratto di R e la misura di convergenza, si mostra quindi una simulazione che ha trovato la soluzione con 352 iterazioni.

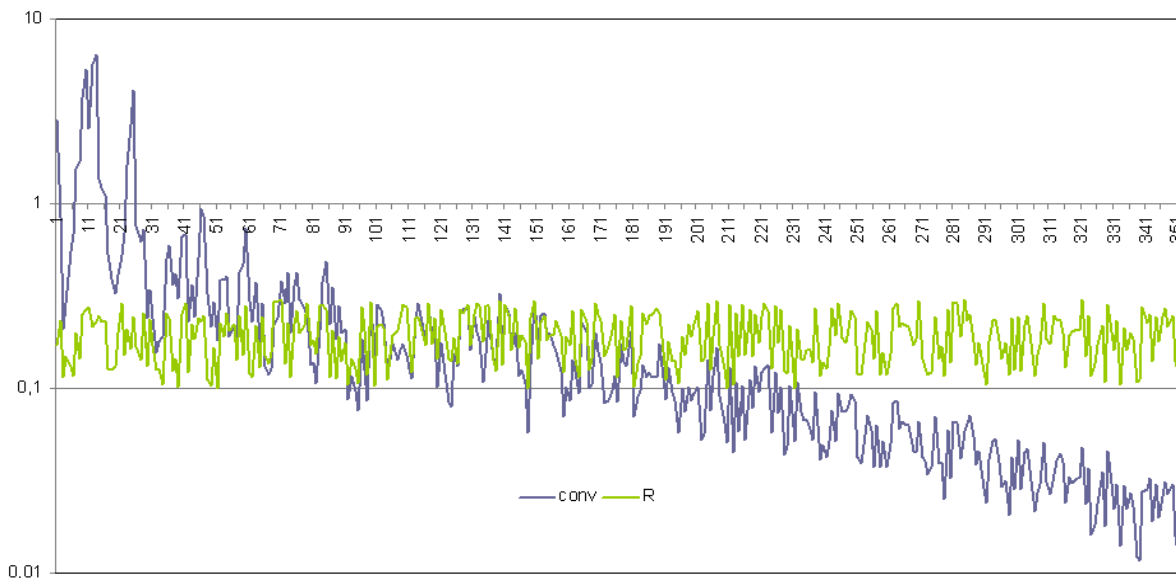


Fig 5.12: Distribuzione uniforme R : misura di convergenza per ogni iterazione e valore estratto di R .

Il grafico è in scala semilogaritmica, ma si vede bene come il tasso di ripensamento oscilli in modo completamente casuale tra 0,1 e 0,3. È interessante notare poi come un picco o una valle di R abbiano sempre una corrispondenza nella curva della misura di convergenza. Infatti con un ripensamento più alto vi sono più utenti che riconsiderano la loro scelta, quindi le due soluzioni successive saranno più differenti. Si vede infine come la convergenza venga raggiunta non al valore minimo riportato nel grafico, nel quale è rappresentata la differenza percentuale tra il tasso di partenze di due giorni successivi, mentre il criterio di convergenza prevede che questa quantità venga divisa ulteriormente per R . La soluzione si raggiunge quando la differenza dei tassi del grafico risulti minore del prodotto $R \epsilon$, e quindi, come si diceva in precedenza, si possono avere criteri più o meno restrittivi ad ogni singola iterazione. In questo caso non si soddisfa la condizione per un R piccolo, ma estraendone uno più elevato l'iterazione successiva l'algoritmo trova una soluzione accettabile.

Si è testata successivamente l'estrazione casuale del tasso di ripensamento da una distribuzione normale. Per definirla si imposta il valor medio, mentre si definisce una varianza tale da comprendere nell'intervallo 6σ circa lo stesso intervallo considerato per la distribuzione uniforme. Per questo motivo si fissa la deviazione standard a 0,03, risultando la varianza pari a 0,0009. Essendo l'estrazione più concentrata verso il valor medio si ottiene una soluzione in un numero di iterazioni minori rispetto alla distribuzione uniforme. Infatti servono dalle 225, praticamente come nel caso di R costante, alle 270 iterazioni circa. La soluzione risulta assolutamente sovrapponibile al caso base, errori massimi anche inferiori all'1%. Si riportano in grafico i valori di R estratti e la misura di convergenza, per una soluzione raggiunta in 242 iterazioni.

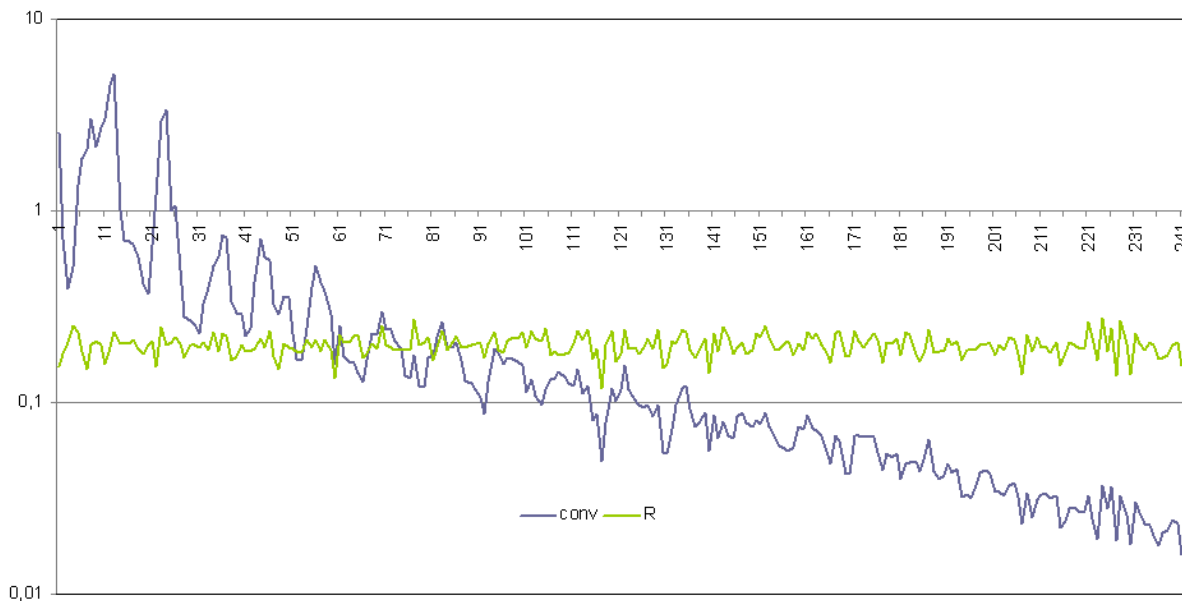


Fig 5.13: Distribuzione normale R : misura di convergenza per ogni iterazione e valore estratto di R .

Si vede come il tasso di ripensamento abbia un'oscillazione più contenuta, non si raggiungono quasi mai valori sulle code della distribuzione e la soluzione converge abbastanza velocemente. Si osserva anche in questo caso una evidente corrispondenza tra le strutture di variazione locale dei valori estratti e della misura di convergenza.

Alla luce dei risultati ottenuti si può capire come una soluzione venga raggiunta a prescindere dalla particolare distribuzione assunta al tasso di ripensamento. Ovviamente la convergenza dipenderà sempre dal range di valori che si attribuisce alla variabile R , in quanto valori molto elevati non consentiranno comunque il raggiungimento della configurazione di equilibrio stocastico, come succedeva considerando un parametro costante.

Si pone però la nuova problematica di definire la distribuzione del tasso di ripensamento, che richiede un'indagine comportamentale molto approfondita sulla popolazione dei viaggiatori. Per di più si ha da studiare una caratteristica non facilmente osservabile. Utilizzare un tasso costante risulta sicuramente più facile ai fini computazionali, inoltre in questo modo si può trascurare la parte relativa allo studio della varianza, rimanendo però le necessità di una stima accurata dell'unico valore impiegato.

Si ritiene invece interessante la possibilità di giungere alla convergenza utilizzando delle distribuzioni empiriche e molto semplici del tasso di ripensamento, come quella uniforme presentata. In questo modo non sarà necessario andare a stimare dei parametri accurati, ma la distribuzione si costruisce direttamente sui valori osservati, supposto che il ripensamento sia una caratteristica osservabile in qualche maniera. La distribuzione risulterà in questo caso molto grossolana e non rappresentativa della vera variabilità del parametro, ma sarà comunque utile a determinare la possibilità del raggiungimento o meno di una configurazione di equilibrio.

Un'altra interpretazione del tasso R potrebbe essere invece solamente come parametro utile all'algoritmo, avente il solo compito di far convergere la soluzione con il minor onere computazionale possibile. In questo caso si sarebbe più interessati a trovare rapidamente la soluzione di equilibrio, supposta la sua esistenza,. Può essere una visione più che sensata, considerando oltretutto che la soluzione iniziale fornita all'algoritmo non può avere alcuna valenza realistica, in quanto non ha senso ipotizzare una rete caricata completamente da utenti che la affrontano per la prima volta. Se lo scopo fosse quello di velocizzare il più possibile la convergenza dell'algoritmo si potrebbe cercare per esempio se sia migliore l'utilizzazione di un unico valore oppure sia possibile trovare una sequenza efficiente di valori di R che ottimizzi le due fasi del calcolo viste nei capitoli precedenti. Questa problematica però non viene affrontata in quanto si sta indagando su come rappresentare gli effetti dovuti alla percezione dell'utenza piuttosto che l'ottimizzazione di un algoritmo.

6 Il tempo di percorrenza e la dipendenza dal flusso

La capacità rappresentativa del modello può essere ulteriormente migliorata andando a modificare un'altra ipotesi che appare poco coerente con la realtà. Fino a questo punto si è considerato infatti ciascun possibile percorso composto da tratti di capacità infinita, quindi percorribili sempre in modo uniforme e alla medesima velocità, e da un collo di bottiglia nel quale si concentra l'effetto di congestione con i conseguenti ritardi. L'interpretazione di questa schematizzazione è che gli utenti viaggiano tutti alla stessa velocità finché non si genera improvvisamente il fenomeno di accodamento. Questo sembra assai distante dalla realtà, in quanto l'esperienza comune indica come vi sia un condizionamento tra i veicoli, che determina un rallentamento della circolazione, ben prima di raggiungere una fase completamente congestionata. Si tratta quindi di introdurre nel modello una relazione flusso-velocità in grado di rappresentare adeguatamente il suddetto effetto di condizionamento.

Prendendo spunto da Mahmassani (1984) e poi Newell (1988), si introduce la più semplice relazione flusso-velocità, basata sull'ipotesi di Greenshields.. Secondo la teoria di Greenshields il flusso, preso in dipendenza dalla densità, descrive una parabola, con il massimo collocato alla metà della densità massima e il cui valore convenzionalmente rappresenta la capacità della strada.

$$v = v_0(1 - k / 2k_m) \quad q = k v \quad (6.1)$$

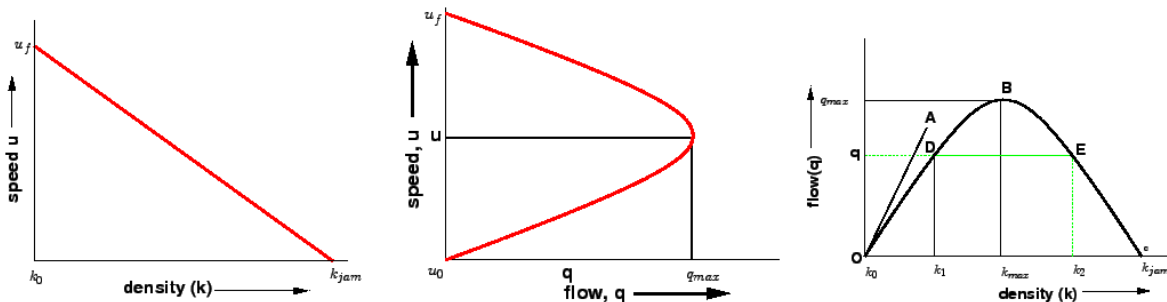


Fig 6.1: Relazioni tra le grandezze fondamentali del deflusso, da www.civil.iitb.ac.in.

Nell'articolo di Mahmassani (1984) viene impiegata l'approssimazione del traffico ad un continuo fluido, descritta matematicamente dalla relazione nota come equazione di continuità:

$$\partial k / \partial t = -\partial q / \partial x = (q_{in} - q_{out}) / L \quad (6.2)$$

Nell'articolo in questione, si presenta una soluzione analitica, in cui la progressione delle partenze, se la domanda eccede un certo valore definito dalle caratteristiche della rete e degli utenti, porta inevitabilmente alla saturazione della rete, si arriva fino al punto in cui la densità è quella massima, detta quindi di *jam*, ma il flusso risultante è nullo. Per ovviare a questo problema si sceglie di seguire la strada tracciata da Newell, il quale segue sì il legame flusso-densità, ma solo fino al valore di flusso massimo, ipotizzando poi di cadere nel caso di coda deterministica, quando il flusso entrante nel tronco stradale supera il valore di capacità dello stesso. In questo modo si rimane nel ramo stabile della curva di deflusso, riuscendo a seguire l'evoluzione temporale delle grandezze fondamentali densità, velocità e flusso. Il ramo instabile della curva non viene preso in considerazione, in quanto una volta giunti al valore di flusso massimo si assume che i veicoli procedano nel tronco stradale alle condizioni critiche, mentre a monte si genera una coda. Si reintroduce quindi il collo di bottiglia, i veicoli devono attendere per attraversarlo e dopo di ciò procedono nel tronco stradale con densità costante pari a k_m , a velocità costante v_m , rendendo costante anche il tempo di percorrenza.

$$\begin{aligned}
 TT_i &= t_{\text{cost}} + L/v_i && \text{per } k_i < k_m \\
 TT_i &= t_{\text{cost}} + L/v_m + D_i/s && \text{per } k_i = k_m
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

TT_i rappresenta il tempo di percorrenza di ciascun percorso e sarà dato dalla somma di un'eventuale componente costante t_{cost} , il tempo necessario a percorrere il tratto di lunghezza L alla velocità v assegnata e l'eventuale attesa per lo smaltimento dei veicoli che precedono in colonna in seguito alla formazione di coda.

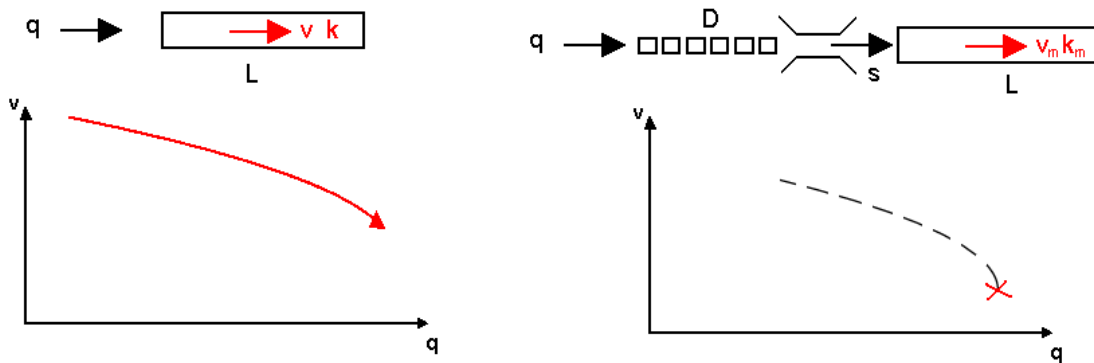


Fig 6.2: Deflusso in condizioni di stazionarietà e passaggio alla coda deterministica.

Seguendo questo ragionamento si deve però passare da una situazione stazionaria, applicabile alla relazione flusso-velocità, ad una situazione dinamica, che si riscontra nella coda deterministica. Il passaggio in questo senso non appare difficile. Si sta lavorando con intervalli temporali discreti e per ciascuno di essi è possibile attribuire una densità e velocità media. I veicoli idealmente rallentano man mano che la densità cresce, Newell mostra come in questo caso le variazioni di densità, che si propagano a velocità costante all'interno del tronco stradale omogeneo, hanno velocità sempre minori, quindi non si intersecano mai. Quindi un veicolo rallenterà sempre di più di quello che lo precede e non si incontreranno mai. Si può percorrere in questo modo la curva flusso-velocità fino a raggiungere la densità critica, quindi la capacità dell'infrastruttura, e formare la coda a monte del tronco stradale considerato. Inoltre anche quando si forma la coda, tranne che in quella sezione specifica, nel resto della rete le condizioni sono comunque stazionarie ed uniformi.

Un problema maggiore è rappresentato dal passaggio inverso, quando la coda si esaurisce, la densità nel tronco comincia a scendere ed i veicoli possono accelerare. Newell ha mostrato come in questo caso le variazioni di densità tendano a propagarsi con velocità sempre maggiori, per cui possono intersecarsi. In pratica un veicolo che trova la strada meno congestionata può andare più veloce ma rischia di compenetrarsi al veicolo che lo precede, se si suppongono viaggiare a moto uniforme per tutto lo sviluppo del tratto considerato. Perché ciò non accada si devono introdurre delle onde di shock, delle brusche variazioni delle velocità che portano delle discontinuità nella velocità, densità e di conseguenza il flusso. Per cui, onde evitare sia incidenti virtuali sia discontinuità nelle grandezze fondamentali del deflusso, si attribuisce ad ogni veicolo al massimo quella velocità media che gli consente di arrivare a seguito del veicolo che lo precede. Si procede poi al calcolo della densità media immaginando di svuotare il "tubo" pieno di veicoli. La densità quindi decrescerà linearmente. Questa procedura si applica finché nel tronco stradale saranno presenti ancora i veicoli precedentemente incolonnati, vincolati a procedere alla velocità corrispondente al flusso massimo. Oltretutto si concluderà in una fase posteriore al picco, quindi per la poca domanda la densità rimarrà bassa e muterà gradualmente, sarà quindi possibile ripercorrere il ramo stabile della curva flusso-velocità senza correre il rischio di sovrapposizione dei veicoli.

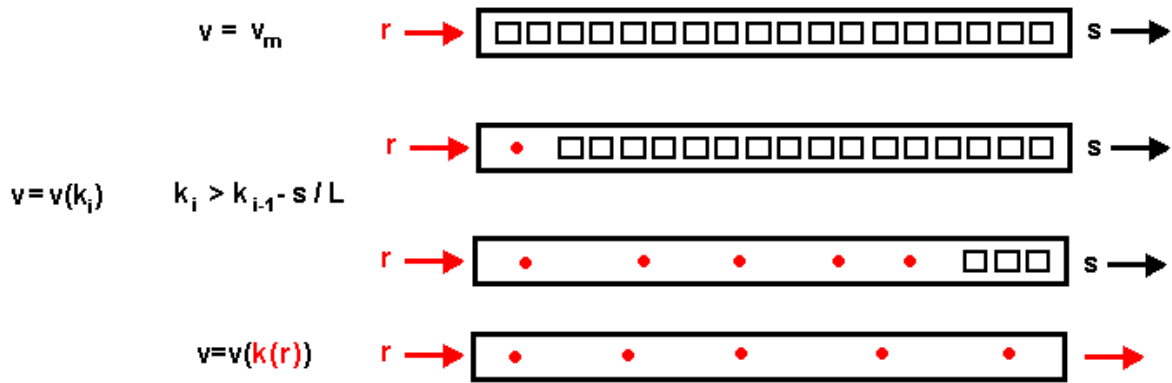


Fig 6.3: Esaurimento della coda deterministica e passaggio al deflusso in condizioni di stazionarietà.

A questo punto manca solo la definizione delle modalità per calcolare i valori medi di densità e velocità per ogni intervallo temporale discretizzato. Si è provato partendo dalla relazione di continuità del traffico visto come un fluido, espressa alle differenze finite invece che in termini infinitesimi. Il questo modo è possibile calcolare il termine ΔK , da sommare al valore di densità dell'intervallo precedente.

$$\Delta k_i(t) = \frac{L_i(t) - L_i(t - \Delta t)}{v_i(t - \Delta t) \Delta t} \quad k_i(t) = k_i(t - \Delta t) + \Delta k_i(t) \quad (6.4)$$

Purtroppo questo tipo di approccio, per quanto analiticamente corretto nel continuo temporale, non soddisfa le aspettative operando la discretizzazione. Per cominciare tende a sottostimare la densità, infatti si raggiunge il momento di passaggio alla coda deterministica con valori di flusso molto maggiori della capacità. Inoltre, quando la densità tende a calare dopo il valore massimo, si arriva persino a valori negativi, fisicamente impossibili. Si è provato quindi a misurare in maniera diretta la densità, espressa come numero di veicoli che si trovano nello spazio percorso dall'ultimo veicolo dell'intervallo precedente, che non può essere superato.

$$k_i = \frac{L_i(t)}{v_i(t - \Delta t) \Delta t} \quad (6.5)$$

Questa soluzione si dimostra molto soddisfacente, al raggiungimento della densità massima ammissibile i flussi sono di poco superiori alla capacità, l'approssimazione è quindi accettabile. Per rendere il nuovo caso analizzato comparabile con il collo di bottiglia deterministico visto fino ad adesso si sono dovute calcolare le caratteristiche dei percorsi che ne determinano le condizioni di deflusso.

		percorso 1	percorso 2	percorso 1	percorso 2
t cost	[h]	0,2	0,15	0	0
L	[km]	10	5	30	15
v0	[km/h]	90	60	90	60
Km	[veic/km]	45	50	45	50
corsie		4	2	4	2
flusso max	[veic/h /corsia]	2025	1500	2025	1500

Tabella 6.1: Definizione delle caratteristiche dei percorsi, diverse configurazioni possibili.

Si sono ipotizzate due diverse situazioni di deflusso, una in cui è presente anche un tratto di capacità molto elevata, per cui considerato percorribile a velocità costante per ogni volume di traffico, e il

caso dell'intero tronco stradale considerato omogeneo e sottoposto alle medesima relazione flusso-velocità.

Si può quindi cominciare a ricalcolare la distribuzione delle partenze, andando a inserire nella solita funzione di utilità il tempo di percorrenza ottenuto come somma di una componente costante più la componente dipendente dal flusso e l'eventuale ritardo di accodamento. Saranno affetti da questa modifica sia il termine del tempo di percorrenza sia il termine SD. Sono riportati i risultati per quello che dovrebbe essere il caso base, 27000 utenti ed un tasso di ripensamento assunto pari al 12%, per aumentare la velocità convergenza. La soluzione viene raggiunta in 90 iterazioni.

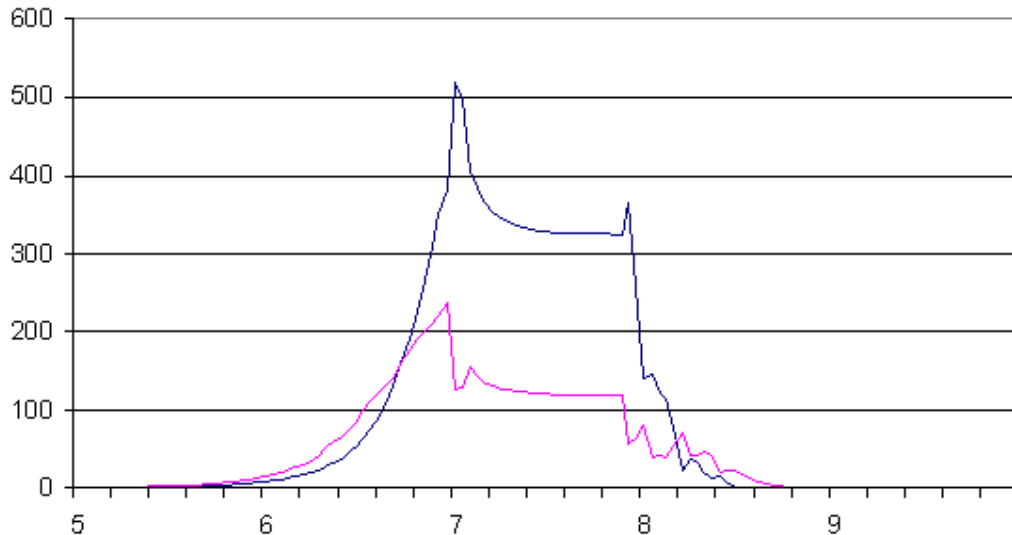


Fig 6.4: Risultati del modello utilizzando la relazione flusso-velocità su una porzione dei percorsi.

Non si rilevano apprezzabili differenze nella forma complessiva della distribuzione, che sembra del tutto simile a quelle ottenute nelle analisi precedenti. D'altronde tale risultato corrisponde alle aspettative, la struttura della parte centrale non può mutare molto visto che si ricade ancora nel caso di coda deterministica, mentre saranno più soggette a mutamento le estremità, dove si manifesta l'effetto del passaggio da un tempo di percorrenza fisso ad uno dipendente dal flusso. Si mettono quindi nello stesso grafico i risultati appena ottenuti con quelli del caso base per il confronto.

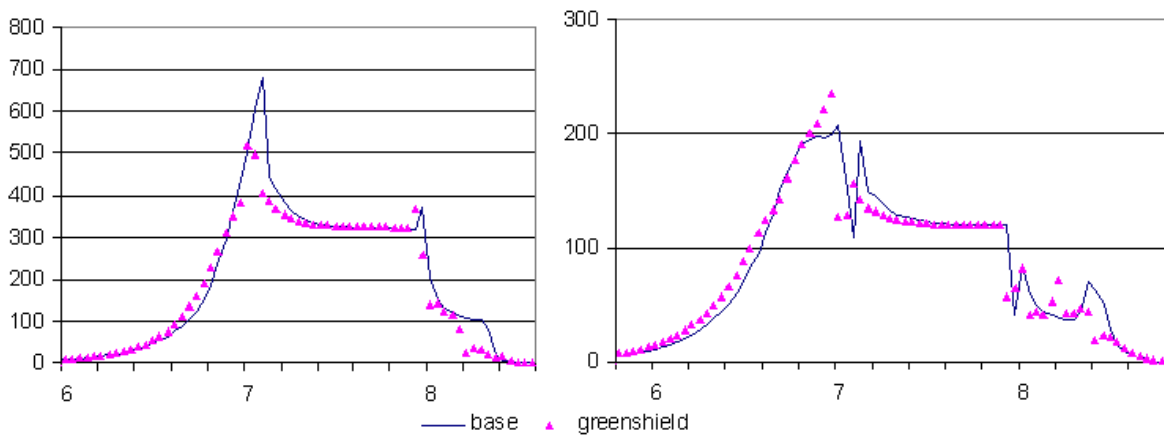


Fig 6.5: Confronto risultati caso base ed utilizzo relazione flusso-velocità, percorsi 1 e 2.

La fase ascendente sembra rimanere immutata, ma osservando con maggior attenzione si può distinguere il cambio di pendenza dovuto al passaggio a condizioni di coda deterministica, quando la curva sembra smorzarsi e poi s'impenna improvvisamente. La fase di picco ha sì la stessa forma,

ma i valori mutano, in quanto i parametri sono stati calibrati per ottenere a flusso nullo circa il tempo di percorrenza del caso base, mentre nel caso congestionato si deve aggiungere il tempo speso per percorrere il tronco stradale superato il collo di bottiglia e tale tempo sarà proporzionale alla lunghezza da percorrere. Si scende poi ancora asintoticamente verso il valore della capacità. La fase discendente appare nota accorciata, più schiacciata verso sinistra, inoltre le partenze tendano ad esaurirsi prima, dato il maggior tempo di percorrenza legato alle condizioni di deflusso.

Si possono osservare anche gli andamenti delle variabili interne da cui dipendono le scelte dei viaggiatori, alla condizione di equilibrio. Si riportano a tal scopo l'evoluzione della densità, della velocità e della lunghezza della coda durante il periodo di studio. Per controllare che non vi siano sorpassi o compenetrazioni tra veicoli si riporta anche il tempo di arrivo per ogni intervallo di partenza, che deve essere sempre superiore a quello dell'intervallo precedente.

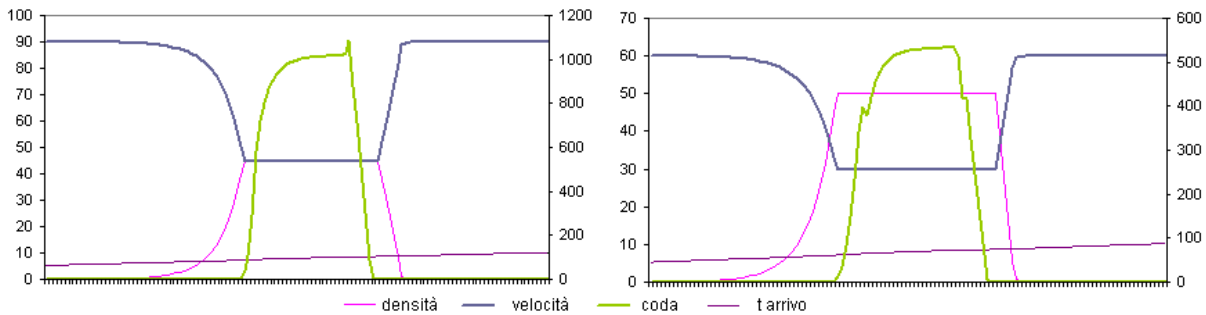


Fig 6.6: Variabili interne: densità, velocità, lunghezza coda e tempo di arrivo, percorsi 1 e 2.

Si possono notare il progressivo aumento della densità e la conseguente riduzione della velocità nella fase iniziale. Dopo di che sia la densità che la velocità sono costanti e si forma la coda deterministica a monte del collo di bottiglia, rappresentata dalla curva verde, presente sempre nella fase centrale ed un'unica volta. Esaurita la coda il tronco stradale dovrà svuotarsi gradualmente dei veicoli prima incolonnati, ecco quindi che la densità decresce quasi linearmente, visto anche lo scarso numero di veicoli entranti in quel momento rispetto alla capacità offerta dall'infrastruttura.

Si è visto che considerare un tratto di strada a tempo di percorrenza costante ed una parte minoritaria soggetta alla legge flusso-velocità non porta grandi stravolgimenti nella sostanza dei risultati. Si prova allora a considerare l'intero percorso omogeneo, dove il tempo di percorrenza è dipendente dal flusso per tutta la distanza da percorrere, in questo modo la penalizzazione dovuta al traffico presente sarà decisamente più evidente, dato che le distanze da percorrere in condizioni di congestione come si è visto vengono triplicate. Si riportano i risultati finali, ottenuti con 67 iterazioni ed un tasso di ripensamento del 12%.

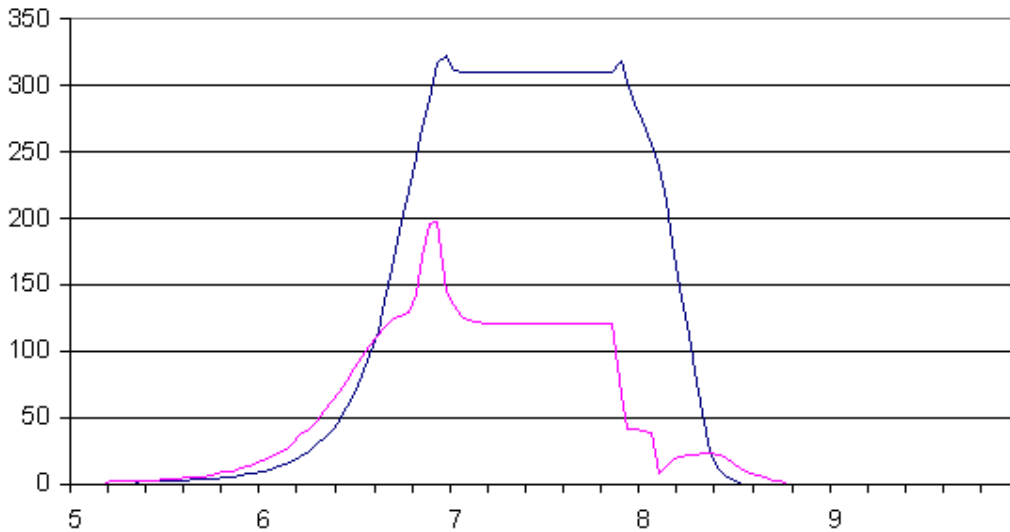


Fig 6.7: Risultati del modello utilizzando la relazione flusso-velocità sulla lunghezza totale dei percorsi.

La distribuzione cambia completamente forma, per il primo percorso si ottiene una forma tronca, senza picchi e la cui sommità è orizzontale, per l'assenza di coda deterministica. Infatti il tasso di partenze non supera mai il valore posto come capacità, di conseguenza non si può formare coda a monte del collo di bottiglia. Per il percorso più corto si vede invece come si abbia un modesto picco dove si genera coda, che perdura e viene alimentata dal flusso entrante pari alla capacità, come mostrato nel grafico successivo.

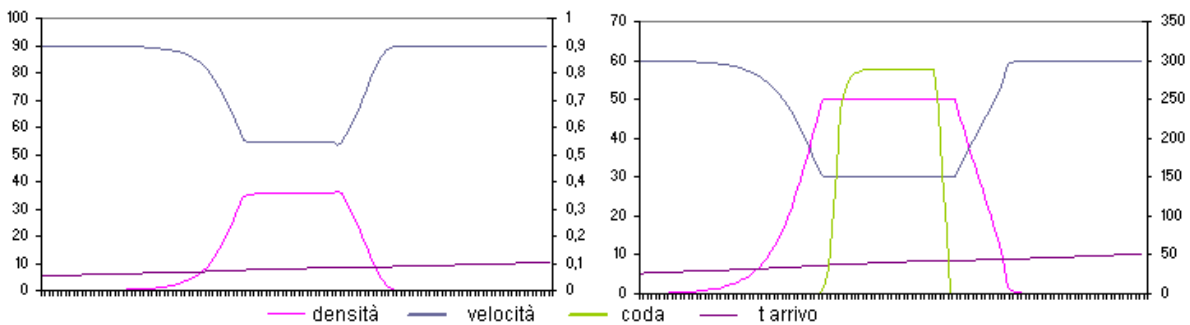


Fig 6.8: Variabili interne: densità, velocità, lunghezza coda e tempo di arrivo, percorsi 1 e 2.

Si vede come nel primo percorso si rimanga nel ramo stabile della relazione flusso velocità, il tasso di partenza si è assestato ad un valore costante, inferiore alla capacità, e anche nel tronco stradale si riscontra costanza di densità e velocità. Data la minor capacità disponibile il secondo percorso non è in grado di soddisfare la domanda degli utenti, per cui si genera una coda, peraltro breve, ogni utente infatti viene servito in un tempo pari a tre intervalli della discretizzazione temporale. Si vuole aggiungere che la convergenza viene raggiunta in virtù di un tasso di ripensamento non troppo elevato, in caso contrario si assisterebbe ad una continua oscillazione della congestione tra i due percorsi, senza il raggiungimento di una configurazione di equilibrio.

Si illustrano ora brevemente i risultati ottenuti per entrambe le configurazioni di deflusso, con la presenza di un tratto percorribile a tempo costante o meno. Si inizia con la prima possibilità, utilizzando un diverso numero di utenti potenziali totali per trovare le varie possibili configurazioni dell'equilibrio, con assenza di coda su entrambi i percorsi, coda solo su uno ed infine su entrambi. Si è visto come il caso di 27000 passeggeri trovi equilibrio con la formazione di code su ambedue i

percorsi. Ci si aspetta quindi che quantità superiori di viaggiatori vengano allocate nella stessa maniera, a tal proposito si testa il modello con 30000 e 40000 utenti potenziali.

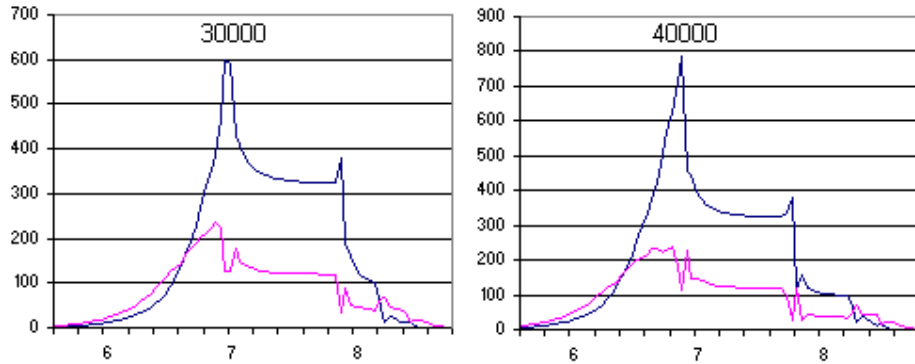


Fig 6.9: Risultati per 30000 e 40000 passeggeri, densità relazione flusso-velocità su lunghezza totale percorsi.

Tutti e due i casi convergono con un centinaio di iterazioni, si fa però presente che per 30000 viaggiatori è necessario scendere fino al 9% col tasso di ripensamento per trovare una soluzione stabile. È verificata l'aspettativa che in entrambi i percorsi si sviluppino code. La forma della distribuzione appare sostanzialmente la stessa e con un maggior numero di viaggiatori si ha comprensibilmente un picco più elevato. Ma andando a sommare tutte le partenze si scopre che sono circa 19000 e 22000. Non vi è una grandissima differenza, aggiungendo 10000 utenti potenziali solo 3000 troveranno effettivamente conveniente utilizzare l'infrastruttura stradale. Si può concludere che, in presenza di questi livelli di domanda potenziale, la capacità della rete risulta decisamente insufficiente, in quanto su 30000 utenti quelli che ritengono conveniente usufruirne sono il 60% circa, mentre per 40000 utenti si scende al 55%.

Si è poi provato ad utilizzare un valore di domanda più moderato, pari a 20000 viaggiatori potenziali. Nella soluzione così trovata si riscontra la formazione di una coda soltanto nel secondo percorso, peraltro di entità non particolarmente rilevante. Si può osservare come questa soluzione assomigli molto a con quella calcolata nel caso di 27000 viaggiatori nell'ipotesi in cui tutto il tragitto sia sottoposto alla relazione flusso-velocità. Queste similitudini supportano l'idea di robustezza del modello, nel senso che in condizioni di congestione comparabili si ritrovano distribuzioni delle partenze simili, a prescindere dai valori specifici utilizzati in ciascun caso. Si riportano quindi la soluzione trovata e le grandezze caratteristiche del deflusso nei due percorsi.

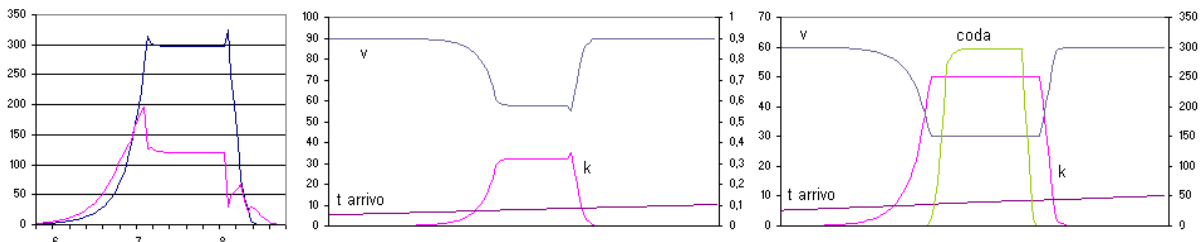


Fig 6.10: Risultati per 20000 passeggeri, densità, velocità, lunghezza coda e tempo di arrivo, percorsi 1 e 2.

Il primo percorso mostra una distribuzione delle partenze di forma tronca, segno quindi che non si abbia alcuna formazione di coda. Ciò si nota anche dal grafico centrale di fig 6.x relativo alla densità e velocità nel percorso in esame, dove non si raggiungono mai i valori critici. Nel secondo percorso invece si ha la formazione di coda, in seguito al picco mostrato dal grafico delle partenze. La coda poi ha una lunghezza costante, in quanto il flusso di veicoli che la alimenta è pari alla capacità di smaltimento, quindi gli entranti eguagliano gli uscenti dal collo di bottiglia. Con questa

configurazione gli spostamenti che effettivamente usano la rete sono più di 15000, ossia il 75% dei viaggiatori potenziali.

La stessa configurazione si ritrova provando ad assegnare 15000 o 10000 viaggiatori, si omettono quindi le soluzioni trovate, ma si evidenzia come nei due casi vengano soddisfatti rispettivamente il 78% e l'80% degli utenti potenziali. Si fa inoltre notare come la coda per 10000 viaggiatori sia formata da un esiguo numero di veicoli, poco più d una decina, formata in conseguenza di un minuscolo picco oltre capacità nel secondo percorso; inoltre per la convergenza è necessario porre R al massimo all'11%.

Scendendo infine a 9000 utenti si riesce a trovare una configurazione di equilibrio che non prevede alcuna formazione di coda.

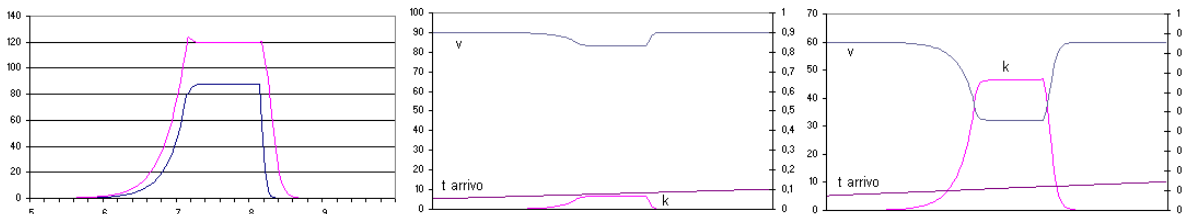


Fig 6.11: Risultati per 9000 passeggeri, densità, velocità, lunghezza coda e tempo di arrivo, percorsi 1 e 2.

In questo caso si può notare come la densità rimanga sempre molto contenuta e la velocità vicina alla velocità libera per il primo percorso, che lavora ampiamente sotto la propria capacità e risulta inoltre meno utilizzato del secondo. In queste condizioni di scarsa congestione la maggior parte degli utenti ritiene quindi più conveniente utilizzare il percorso più breve.

Si ipotizza ora che l'intero percorso sia soggetto alla relazione flusso velocità, cioè che non vi siano più tratti percorribili a velocità costante per qualunque valore di flusso che vi transiti. Si ricorda come per 27000 utenti si è trovata la soluzione con la formazione di coda solamente nel secondo percorso. Salendo a 30000 non cambia nulla e si servono quasi 19000 utenti, pari al 63%.

Si deve aumentare la domanda potenziale fino a 40000 viaggiatori per formare coda su entrambi i percorsi, in questo caso si riescono a far transitare solo 20400 spostamenti, il 51%. Si riportano i risultati ottenuti.

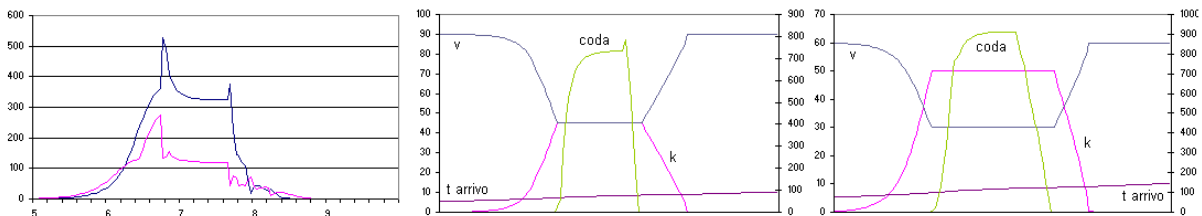


Fig 6.12: Risultati per 40000 passeggeri, densità, velocità, lunghezza coda e tempo di arrivo, percorsi 1 e 2.

Si vedono i due picchi, presenti su entrambi i percorsi, che innescano le rispettive code, la fase congestionata del secondo appare più lunga, segno di una maggior predilezione da parte degli utenti, che lo preferiscono a quello più lungo ma più scorrevole.

Spostandosi a valori di domanda più moderati si testa il modello per 20000 viaggiatori potenziali. In questo caso si riscontrano difficoltà di convergenza ad una soluzione di equilibrio, occorre abbassare il tasso di ripensamento fino al 2%, ossia riassegnare una frazione molto esigua di utenti ad ogni iterazione, per arrivare finalmente ad una soluzione in 379 iterazioni. Si è già visto in precedenza come abbassando il parametro R l'algoritmo lavori più finemente, assicurando la convergenza sia pur con un maggior numero di iterazioni. In questo caso si può osservare come questa caratteristica sia necessaria per garantire la convergenza. La soluzione trovata consta di un equilibrio senza la formazione di code in alcun percorso, ma si sta lavorando di poco sotto il limite della capacità per il secondo percorso. Bastano quindi pochi utenti in più per innescare la

formazione di coda e molto probabilmente andando a riassegnare una quota parte di utenti troppo elevata si avrebbe un fenomeno di continua formazione e dissolvimento ad intermittenza della coda, che precluderebbe il raggiungimento di una soluzione stabile. Questo problema relativo alla convergenza si rileva per tutto il range dai 20000 ai 16000 viaggiatori. Si riportano quindi la soluzione trovata e le grandezze caratteristiche del deflusso nei due percorsi, inoltre si segnala come vengano soddisfatti quasi il 75% degli utenti.

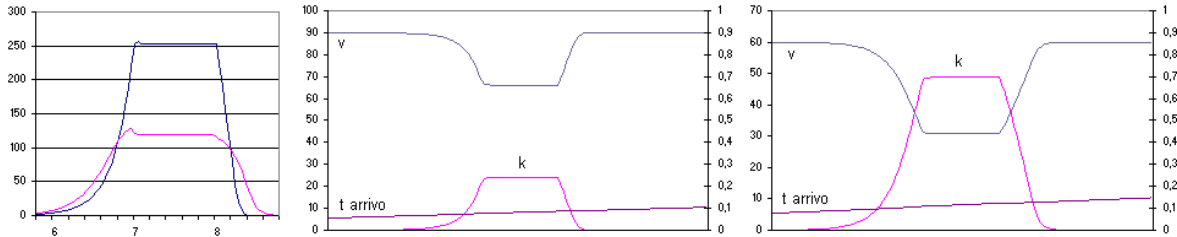


Fig 6.13: Risultati per 20000 passeggeri, densità, velocità, lunghezza coda e tempo di arrivo, percorsi 1 e 2.

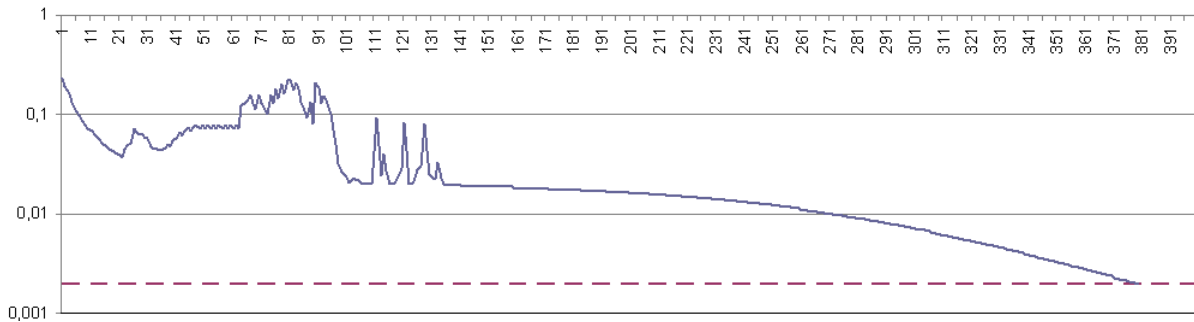


Fig 6.14: Misura di convergenza per ciascuna iterazione per 20000 utenti totali, R pari al 2%.

Si riporta anche l'andamento della misura di convergenza in funzione delle iterazioni, in quanto si ritiene interessante osservare il comportamento dell'algoritmo per un valore di R così basso. Si nota come le differenze tra le iterazioni successive siano sempre di entità contenuta, se si esclude qualche oscillazione locale di entità non trascurabile, rispetto a quanto visto in altri grafici analoghi. Dopo la prima fase di assestamento le oscillazioni praticamente scompaiono, la soluzione continua ad avvicinarsi con gradualità alla forma finale, senza subire alcun fenomeno destabilizzante con riferimento alla dinamica *day to day*.

Ripetendo i calcoli per 15000 e 10000 utenti si ritrovano comunque delle distribuzioni delle partenze dalla forma tronca per entrambi i percorsi, con assenza di code, per cui non si ritiene d'interesse riportare i risultati. Si ricava invece la frazione di utenti serviti, che si attesta al 75% e 77%.

In analogia con quanto fatto in precedenza si è ricercata la frontiera del dominio di convergenza N-R, per i casi di percorso con o senza una parte percorribile a tempo costante. Si riportano nella tabella seguente i risultati ottenuti, inoltre nel grafico si aggiunge un confronto con i valori trovati per il caso base dell'articolo.

N	tratto cost	tutto q-v
40000	12%	20%
30000	14%	9%
27000	24%	14%
23000	0%	13%
20000	33%	20%
15000	31%	11%
10000	11%	25%
9000	20%	27%

Tabella 6.2: Dati per costruire dominio $R - N$ per assicurare convergenza impiegando una relazione flusso-velocità.

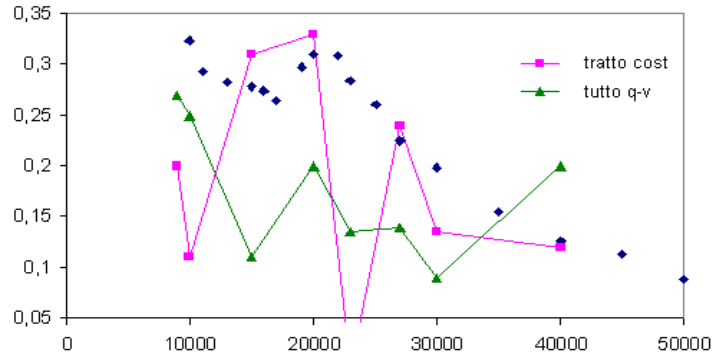


Fig 6.15: Dominio $R - N$ per assicurare la convergenza impiegando una relazione flusso-velocità.

Si nota facilmente come per entrambe le serie siano presenti due valori decisamente più bassi degli altri. Questi rappresentano il range di passaggio tra le diverse configurazioni di distribuzione della congestione nella rete, quando occorre riassegnare pochi viaggiatori ad ogni iterazione per trovare una configurazione stabile. Indagando in questa zona di transizione si è trovato per esempio il caso riportato, per 23000 utenti potenziali, dove la convergenza non viene raggiunta nemmeno con tassi di ripensamento quasi nulli. Ciò non vuol dire che l'algoritmo non trovi affatto una soluzione, la forma generale risulta comunque definita, ma lavorando nella zona più sensibile del passaggio tra ipotesi stazionarie e caso dinamico si generano delle oscillazioni della soluzione che non si riescono a smorzare, a meno di non ammettere una tolleranza leggermente maggiore.

La modifica al calcolo del tempo di percorrenza proposta e testata in questo capitolo si ritiene abbastanza soddisfacente. Innanzitutto la dipendenza del tempo di percorrenza dalle condizioni di deflusso presenti in un tronco stradale appare un'ipotesi del tutto realistica, sicuramente migliore dell'assegnazione di un tempo di percorrenza fisso a prescindere dal grado di congestione. Inoltre si è riusciti a rendere compatibili due assai diverse descrizioni teoriche del deflusso dei veicoli. Infatti la relazione tra le variabili fondamentali del deflusso è ottenuta in condizioni stazionarie, mentre la coda deterministica ha un carattere dinamico. Per questo motivo è stato necessario introdurre un passaggio forzato tra queste situazioni, trovando una condizione comune. Ancora più complicato è stato costruire il passaggio inverso, viste anche tutte le difficoltà connesse alle onde di shock per i veicoli che accelerano (in accordo con la teoria di Newell). Alla fine il modello sembra funzionare correttamente e rimane assicurato il raggiungimento di una soluzione di equilibrio. Il modello appare anche robusto per diverse condizioni di carico, in quanto le distribuzioni trovate come risultato mantengono una forma simile.

7 Estensione a tre percorsi, con sovrapposizione

In tutti gli esperimenti presentati finora sono stati considerati solamente due percorsi disponibili. Per effettuare lo spostamento era possibile scegliere tra un percorso definibile "urbano", decisamente più breve ma con capacità limitata, ed un percorso più lungo e capace di assorbire un numero elevato di veicoli, assimilabile ad un "bypass". Questo è un esempio di tipo "scolastico", che certamente non rappresenta la complessità delle reti stradali reali, dove generalmente non vi è una differenza così netta tra le alternative disponibili e comunque vi possono essere più possibilità di scelta. In particolare si pensa come possa essere effettivamente disponibile un unico percorso definibile "tangenziale", un'infrastruttura unica o comunque nettamente distinguibile dal resto della viabilità, mentre si presenti una ragnatela più o meno complicata di percorsi urbani tra cui scegliere. Perciò si vuole in questo capitolo testare come si comporti il modello in presenza di tre alternative, due delle quali con caratteristiche comparabili o addirittura comuni.

A differenza dei capitoli precedenti, nei quali si sono analizzate varie possibili modifiche riguardanti il calcolo dell'utilità, qui si utilizza la formulazione del modello così come proposto dall'autore. Il tempo di percorrenza dei vari percorsi sarà considerato costante fino alla formazione di coda, il termine SD avrà la forma trilineare e i coefficienti sono quelli riportati nell'articolo.

Si comincia considerando la situazione in cui gli utenti sono chiamati a scegliere tra tre percorsi alternativi e completamente distinti. Gli itinerari risultano quindi mutuamente esclusivi, ciascuno viene descritto dalle proprie caratteristiche, riguardanti il tempo di percorrenza e la capacità, e l'errore di percezione degli utenti può essere considerato una variabile aleatoria indipendente e con distribuzione di tipo Gumbel. Le ipotesi del modello *Nested Logit* fin qui utilizzate non vengono quindi intaccate, in pratica si aggiunge solo un termine V_i e si ricalcolano le utilità dei vari *nest* tenendo conto di tale termine. La formula generale dell'algoritmo rimane inalterata.

Nella definizione della nuova rete si sono considerati i due percorsi con le caratteristiche presentate nell'articolo ed inoltre si è aggiunto un percorso di tipo prettamente urbano, il più corto di tutti ma con la minore capacità disponibile. Si sono scelte le seguenti caratteristiche per i percorsi offerti agli utenti:

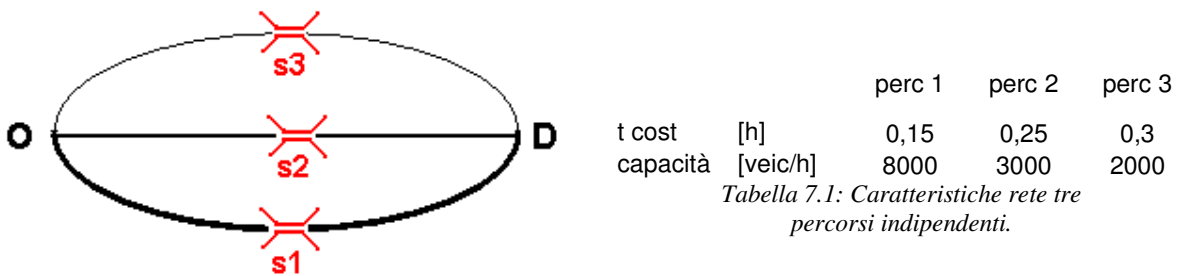


Tabella 7.1: Caratteristiche rete tre percorsi indipendenti.

Fig 7.1: Schema di rete tre percorsi indipendenti.

I tempi di percorrenza di ogni tratto per ciascun percorso possono essere sommati in un termine unico. Non lo si era fatto precedentemente per considerare, come proposto nell'articolo, lo sfasamento temporale tra l'istante di partenza e l'istante d'incontro della congestione, ma tale finezza è totalmente ininfluenza ai fini del calcolo. Infatti traslando la posizione del collo di bottiglia si sposta anche il momento di arrivo allo stesso, ma vi si incontreranno sempre le medesime condizioni, dato che il deflusso è stazionario e tutti i veicoli viaggiano alla stessa velocità. D'ora in avanti quindi si considererà solo un termine di tempo di percorrenza costante per ciascun percorso.

Si può procedere quindi con l'algoritmo, per trovare la soluzione di equilibrio, se esiste. La soluzione iniziale è costituita sempre dall'assegnazione degli utenti alla rete scarica e anche in questo caso si deve fissare il tasso di ripensamento.

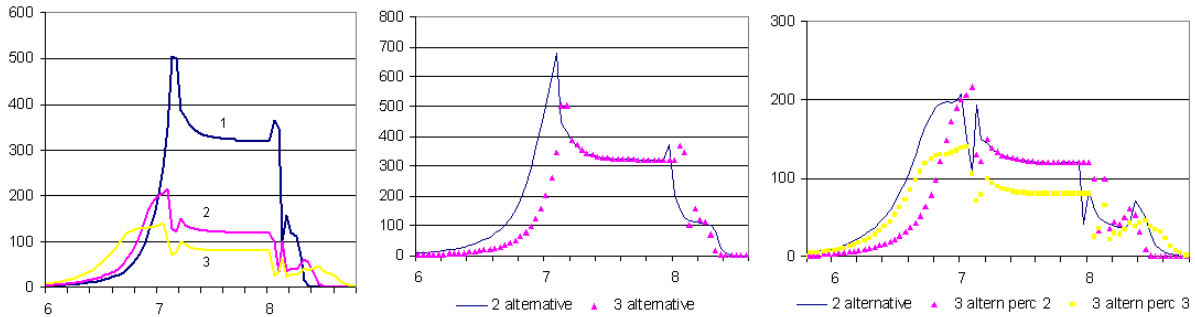


Fig 7.2: Risultati per tre percorsi indipendenti disponibili e confronto con caso due soli percorsi.

L'andamento delle partenze assomiglia molto al caso con soli due percorsi. Il primo percorso in entrambe le reti ha la medesima struttura con picco molto pronunciato, tasso di partenze pari alla capacità e picco più basso, ed anche gli altri mostrano una struttura del tutto simile tra loro. I valori di picco sono più bassi, come si vede dai grafici di destra, in virtù dell'aumento della capacità totale dell'infrastruttura di 2000 unità per ora. Inoltre per lo stesso motivo le partenze risultano globalmente più ritardate e si riescono a servire più utenti, arrivando a circa 20750.

Dati i diversi tempi di percorrenza si nota come le partenze s'impennino in ordine dal percorso più breve al più lungo, anche le code di conseguenza si formano in questo ordine, mentre si esauriscono in ordine contrario. Si riportano inoltre le serie relative ai valori della funzione di utilità per i singoli percorsi ad ogni intervallo temporale, si vede ancor più chiaramente come il percorso più breve risulti il preferito nelle fasi meno congestionate, mentre poi si passi a quello intermedio ed infine a quello più lungo ma più capiente.

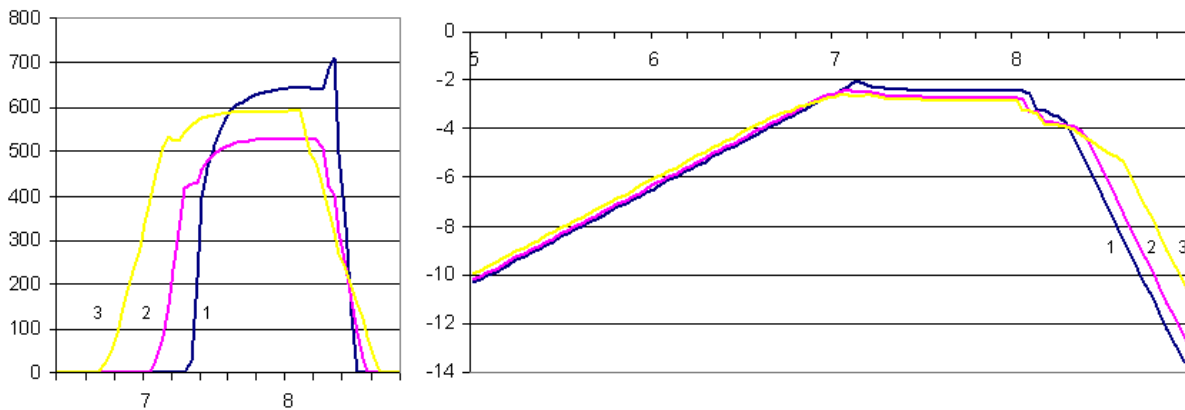


Fig 7.3: Coda e valore utilità per ciascun intervallo temporale per tre percorsi indipendente.

Quindi si è visto come volendo aggiungere un percorso parallelo è sufficiente modificare l'indice relativo al numero dei percorsi nell'algoritmo e procedere come nelle analisi precedenti. In un caso reale però non è infrequente che due percorsi possano risultare parzialmente sovrapposti. In questo caso è lecito ipotizzare che il collo di bottiglia sia localizzato nel tratto di strada comune, dove devono transitare gli utenti di entrambi i percorsi. Volendo continuare ad utilizzare l'algoritmo già implementato occorre modificarlo per ottenere il tasso di partenze per questo tronco comune, dato dalla somma dei viaggi sui due diversi percorsi. Si dovranno quindi sommare i tassi di partenza dei due percorsi e questo valore verrà confrontato con la capacità di smaltimento di quel tronco per definire l'inizio della fase di congestione.

$$\begin{aligned}
r_1(t) + r_2(t) < s_1 &\rightarrow TT_1 = t_{comune} + t_{cos t1} & TT_2 = t_{comune} + t_{cos t2} \\
r_1(t) + r_2(t) > s_1 &\rightarrow TT_1 = t_{comune} + D_1(t)/s_1 + t_{cos t1} & TT_2 = t_{comune} + D_1(t)/s_1 + t_{cos t2} \\
r_3(t) < s_3 &\rightarrow TT_3 = t_{cos t3} \\
r_3(t) > s_3 &\rightarrow TT_3 = t_{cos t3} + D_3(t)/s_3
\end{aligned} \quad (7.1)$$

In questo caso il termine relativo allo sfasamento non è più ininfluenza, in quanto se due percorsi avessero una parte comune dopo una prima fase indipendente, con diversi tempi di percorrenza, lo sfasamento servirebbe a definire in quale momento l'utente arriva a valutare le condizioni dell'eventuale coda. Il flusso rimane sempre in condizioni stazionarie durante la percorrenza della strada, ma arrivando in momenti diversi alla sezione comune si possono avere condizioni diverse della coda, che ha un carattere dinamico.

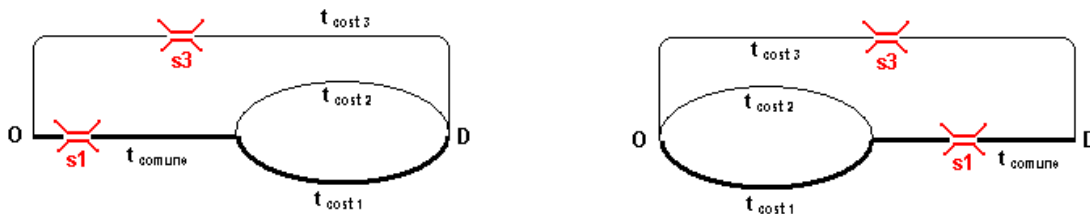


Fig 7.4: Schema di rete tre percorsi con sovrapposizione parziale: possibili configurazioni.

Per comodità si considera che il tratto comune sia situato all'inizio, in questo modo non si ha sfasamento tra l'istante di partenza e le condizioni di congestione incontrate al collo di bottiglia. Per coerenza col caso precedente, percorsi indipendenti, si utilizzano le stesse caratteristiche relativamente ai tempi di percorrenza, mentre la capacità del collo di bottiglia comune sarà data dalla somma delle singole capacità dei percorsi separati, per mantenere costante la capacità complessiva della rete. Si è scelto di associare insieme i due percorsi più lunghi, immaginando come uno possa essere composto interamente da tangenziale mentre l'altro consta di un tratto in tangenziale ed un tratto urbano. Il restante percorso, il più breve e meno capiente, viene considerato tutto in contesto urbano. Quindi:

$$s_1 = s_{tangenziale} + s_{urbano1} = 8000 + 3000 = 11000 \text{ veic/h} \quad s_3 = 2000 \text{ veic/h}$$

La capacità risultante dalla somma dei due percorsi risulta un valore decisamente assurdo, troppo alto per essere riscontrabile nella realtà, ma si è tenuto per coerenza con la somma nel caso dei tre percorsi distinti. I valori scelti non sembrano molto realistici nemmeno se considerati singolarmente. In particolare, 8000 v/h corrisponderebbe già ad almeno quattro corsie per senso di marcia nella tangenziale. Si è scelto di associare il percorso di tipo tangenziale con quello di tipo urbano più lungo in quanto più simili come tempo di percorrenza costante. Essendo unico il collo di bottiglia, entrambi i percorsi hanno per l'utenza la medesima capacità, l'unica differenza consiste nel diverso tempo di viaggio costante aggiuntivo. Dal punto di vista del modello di tipo Logit, sarà sicuramente preferito il percorso più rapido, inoltre per la proprietà IIA all'interno di ciascun *nest* la probabilità della scelta tra i due rami finale rimarrà pressoché costante per tutto il periodo temporale di studio. Si riportano quindi i risultati ottenuti.

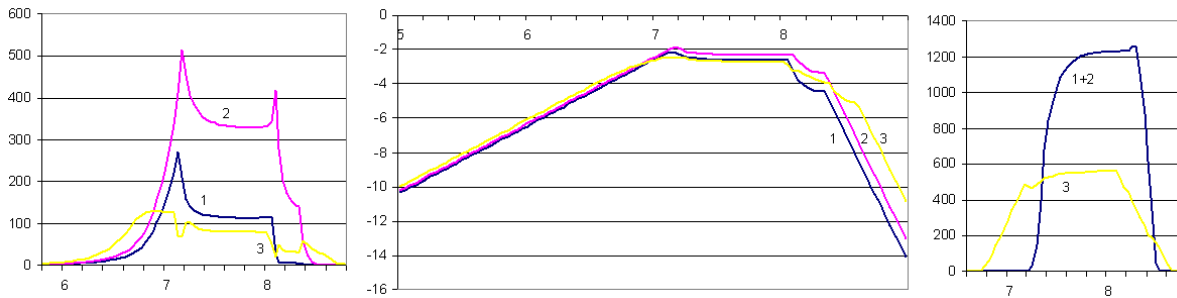


Fig 7.5: Risultati, valore utilità per ciascun intervallo temporale e coda per tre percorsi con sovrapposizione.

Avendo fuso i due colli di bottiglia in un'unica sezione si nota come i profili dei due percorsi ora definiti come tangenziale abbiano la stessa forma. Considerandoli invece indipendenti si era trovato che avessero una forma più simile i percorsi considerati urbani, con tempi di percorrenza e capacità minori. Questa differenza accade per quanto detto nel paragrafo precedente, i due percorsi sovrapposti mantengono una differenza costante tra le utilità, per cui di conseguenza anche le probabilità di scelta avranno un andamento proporzionale tra loro. La differenza tra le utilità non è costante solamente nel periodo tra gli istanti di passaggio, per ciascun percorso, da arrivi puntuali a ritardati, nel calcolo del termine SD . Gli istanti temporali risultano sfasati per i due itinerari in virtù del diverso tempo di percorrenza, quello con un tempo maggiore, in blu, si trova penalizzato, rispetto a quello segnato in viola, quando alla coda si somma la disutilità dell'arrivo in ritardo. Si spiega così anche il secondo picco per il percorso giallo. Si vede anche che l'entità della coda per i due percorsi uniti risulta molto maggiore, il numero di veicoli è il triplo rispetto a quello singolo, ma in realtà l'attesa per il tratto comune risulta inferiore in virtù del fatto che la capacità è maggiore di cinque volte quella del percorso più breve. Infine si calcola il numero totale di viaggiatori, che si assesta a 21000, grossomodo lo stesso che considerando i percorsi separati.

Il modello utilizzato però non è corretto con una tale configurazione della rete. La parziale sovrapposizione dei percorsi si trova in evidente contrasto con le ipotesi d'indipendenza dell'errore di tipo Gumbel, in quanto la parte comune presuppone una covarianza tra le alternative. Ci sono vari metodi per cercare di esprimere con una forma di tipo Logit la correlazione tra alternative, per esempio utilizzando un modello *Cross-Nested Logit*, dove si introducono dei termini aggiuntivi che vanno a modificare l'utilità delle singole alternative. Per definire queste modifiche si possono trovare molte opzioni nella letteratura, sono infatti stati proposti da vari autori un gran numero di coefficienti, atti a misurare la somiglianza tra le varie alternative disponibili. Se si volessero assegnare solamente gli utenti alla rete, senza considerare la dinamica intraperiodale (*within day*), l'introduzione del *Cross-Nested Logit* rappresenterebbe l'approccio più utilizzato, si ritrovano infatti svariate applicazioni di tale metodo in letteratura. Ma data la complessità che verrebbe introdotta da questo tipo di modello, da combinare poi con la struttura a *nest* per scegliere anche l'istante di partenza, si è scelto di non perseguire questo approccio.

Si possono in alternativa utilizzare distribuzioni più elaborate per l'errore di percezione, scomponendolo nella somma di due termini con distribuzioni diverse. Si introduce quindi una doppia stocasticità, mantenendo un termine distribuito secondo Gumbel e un altro secondo la distribuzione più appropriata per la situazione studiata, e si può costruire in tal modo un modello misto-Logit, o meglio definibile come *Logit Kernel*. Un modello di questo genere fornisce la probabilità di scelta di ciascuna alternativa dall'integrazione congiunta della distribuzione di tipo Logit, con la consueta forma chiusa, e la seconda distribuzione introdotta.

$$P_i = \int \frac{\exp(\eta / \beta z_i)}{\sum_k \exp(\eta / \beta z_k)} f(\eta) d\eta \quad (7.2)$$

dove z_i è il vettore delle caratteristiche della alternativa i -esima, β è il parametro di scala del Logit, η è un vettore di termini dipendenti da un'altra distribuzione e $f(\eta)$ è la sua funzione densità di probabilità. Il vettore η viene definito per mantenere una forma sintetica dell'utilità aleatoria con il modello di tipo Logit, in quanto:

$$U_i = \eta z_j = \alpha x_i + \varepsilon_i \quad (7.3)$$

dove α ed x sono comunque vettori di parametri e caratteristiche.

Nel caso esaminato si è voluto descrivere la scelta del solo percorso da seguire, una volta scelto l'intervallo temporale di partenza, con un modello del tipo Probit. Il Probit multinomiale utilizza una distribuzione di tipo normale, la cui forma viene definita dai parametri necessari, e con una normale multivariata è possibile esprimere la dipendenza tra le variabili attraverso la covarianza.

La scelta dell'istante temporale può essere ancora descritta da un modello di tipo *Nested Logit*, in quanto gli intervalli sono mutualmente esclusivi ed indipendenti. Il modo di calcolare l'utilità dei *nest* non viene modificato, una discreta misura dell'attrattività globale di un certo intervallo temporale può essere ricavata senza considerare la sovrapposizione dei percorsi, che influirà solo nella distribuzione dei viaggiatori all'interno dello stesso intervallo. La probabilità congiunta che un viaggiatore scelga un dato percorso in un dato intervallo sarà quindi data dal prodotto delle probabilità delle scelte parziali, istante e percorso.

$$P_i(t) = P_i(t) P_{it} = P_i^{Logit} P_{it}^{Mxd Logit} \quad (7.4)$$

L'utilità aleatoria del modello Logit *Kernel* risulterà così composta dalla componente deterministica, dipendente dalle caratteristiche del percorso, e da due errori di tipo stocastico, quello con distribuzione di tipo Gumbel ε e quello normale appena introdotto, definito in (7.5) come ζ . L'errore del primo tipo deve per forza rimanere indipendente ed identicamente distribuito, mentre la parziale dipendenza tra i percorsi dovuta alla presenza di tratti condivisi viene descritta dalla normale multivariata, che può introdurre una covarianza non nulla tra le variabili dove necessario. I due errori inoltre vengono definiti a media nulla, tutto ciò che modifica il valore atteso dell'utilità aleatoria viene così descritto dal termine deterministico.

$$U_i = \alpha x_i + \zeta y_i + \varepsilon_i \quad (7.5)$$

I due errori avranno la loro propria distribuzione, indipendente tra loro ma comunque dipendente dalle caratteristiche del percorso. L'errore di tipo normale è facilmente determinabile dalle ipotesi del Probit, dove il valor medio dall'utilità aleatoria deve essere quello della componente deterministica, e la varianza risulta proporzionale a tale valore. Essendo l'errore supposto a media nulla, la somma con la componente deterministica risulta una variabile aleatoria con la media desiderata e la varianza assegnata. Questa variabile cambierà i propri parametri media e varianza per ogni percorso considerato, per ogni intervallo temporale discretizzato e per ogni iterazione, cambiando la disutilità in funzione della congestione.

È un poco più complicato definire la varianza dell'errore di tipo Gumbel, in quanto deve essere la stessa per i vari percorsi, ma avere una distribuzione coerente con le caratteristiche incontrate. La varianza di tale errore quindi dovrà cambiare sicuramente ad ogni iterazione, ad ogni intervallo temporale, per adattarsi alle condizioni specifiche, mentre rimane costante per i tre percorsi in un dato momento dell'analisi. Si decide di legare il valore della varianza con il tempo di percorrenza minimo per i tre percorsi nell'intervallo temporale considerato, ed il valore verrà attribuito quindi dalla formula (7.5).

Infine si sono dovuti rendere comparabili i due diversi errori, in modo che uno non coprisse l'altro, quindi si sono scelti opportunamente i parametri per ottenere la stessa varianza per entrambe le distribuzioni. Si sono costruite in tal modo le distribuzioni (7.6).

$$\begin{aligned} \varepsilon &\sim G\left(0, \frac{\pi^2}{6\beta^2}\right) & \eta &\sim N(0, \alpha TT) \\ \sigma_{Logit}^2 = \sigma_{Probit}^2 &\Rightarrow & \beta &= \pi / \sqrt{6 \alpha TT} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Definite le distribuzioni utilizzate con i loro parametri si può procedere ad integrare la formula (7.2), incontrando però evidenti difficoltà. La soluzione più utilizzata per risolvere questo tipo di operazioni con termini stocastici consiste nell'effettuare una simulazione del tipo Montecarlo. Invece di calcolare la probabilità con la formula analitica si simula quello che ipoteticamente accade, cosa gli utenti percepiscono come migliore o peggiore, andando ad estrarre dei valori casuali per le variabili aleatorie in gioco. È possibile andare quindi ad osservare direttamente le scelte (simulate) effettuate e semplicemente contarle per ottenere delle frequenze. Trattandosi di un'estrazione casuale, o meglio pseudo casuale, sono necessarie numerose estrazioni e simulazioni per andare a coprire in modo esaustivo i possibili valori di una distribuzione, dando anche il giusto peso ai valori degli intervalli più probabili. Nel caso vi siano più variabili in gioco, come accade nel problema in esame, per ogni simulazione si dovrà estrarre un valore per ciascuna distribuzione, ossia effettuare delle estrazioni congiunte ad ogni simulazione. Già nel caso di due variabili, anziché una solamente, si intuisce come occorra fare un numero molto elevato di estrazioni, per andare a coprire le varie possibili combinazioni, dando sempre il giusto peso statistico alle scelte osservate. Ed aumentando il numero di variabili (nel caso presentato sono ben più di due) il numero di estrazioni cresce in maniera esponenziale, diventando presto insostenibile.

È possibile invece andare ad aumentare l'efficienza dell'estrazione completamente casuale, effettuando un'estrazione pilotata. Questa tecnica, denominata *Latin Hypercubes*, consiste nel dividere una generica distribuzione nota in un certo numero di intervalli ai quali corrispondono uguali probabilità, andando poi ad estrarre un solo valore casuale all'interno di ciascuno. I valori estratti dalle varie distribuzioni verranno poi abbinati insieme per ciascuna simulazione, andando a coprire in modo completo ed unico tutte le possibili combinazioni. Il peso maggiore dei valori vicini al valore centrale della distribuzione viene quindi reso in quanto la densità di probabilità lì risulta più elevata e di conseguenza gli intervalli equi-probabilistici sono più stretti, inoltre non si ha il problema di combinazioni ripetute dello stesso tipo, che su poche estrazioni possono portare ad una scarsa rappresentatività delle distribuzioni considerate. In questo modo è possibile ridurre in modo considerevole le simulazioni da effettuare.

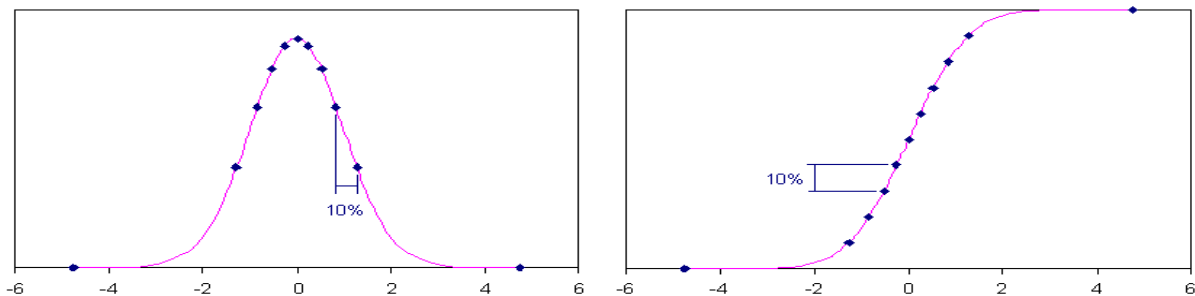


Fig 7.6: Suddivisione di una distribuzione in intervalli equiprobabilistici.

esempio 4 variabili		$estr1(1), estr2(1), estr3(1), estr4(1)$
$estrazione1(N)$		$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad estr4(N)$
$estrazione2(N)$	\Rightarrow	$estr1(1), estr2(1), estr3(2), estr4(1)$
$estrazione3(N)$	<i>combinazioni</i>	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$estrazione4(N)$		$estr1(N), estr2(N), estr3(N), estr4(N)$

Volendo applicare questa tecnica al caso in esame occorre innanzitutto definire qual siano le variabili aleatorie che vengono considerate per costruire la funzione di utilità aleatoria. Si introduce la doppia stocasticità per descrivere come l'utente percepisce il tempo di percorrenza di ciascun percorso e questo tempo sarà dato dalla somma delle varie componenti da percorrere, con le proprie caratteristiche. Si procede quindi a schematizzare la rete, dividerla nelle componenti salienti e assegnare a ciascuna le giuste variabili. Si riporta successivamente come venga suddiviso il grafo e le caratteristiche associate.

Come è noto vi sono tre percorsi tra cui scegliere, dato che l'errore di tipo Gumbel si applica all'intero percorso, saranno quindi sicuramente necessari tre termini di questo tipo, uno per ciascun percorso. I tre termini avranno la stessa distribuzione, ma possono venir estratti valori diversi, quindi vi sarà un'estrazione per ciascun percorso.

Il percorso totalmente indipendente poi potrà essere descritto da un'unica componente di tipo normale, con la varianza proporzionale al tempo di percorrenza totale, in quanto è indipendente dagli altri itinerari. Gli altri due vengono suddivisi nella componente comune e nelle componenti indipendenti, ed ad ognuna delle tre si associa una variabile di tipo normale, avente varianza proporzionale alla lunghezza del tratto parziale. In questo modo la somma delle due componenti, comune e non comune, di ciascun percorso darà una variabile aleatoria, sempre con distribuzione di tipo normale, la cui media è la somma delle medie e la varianza è la somma delle varianze, quindi la media risulta il costo totale e la varianza proporzionale ad esso. Inoltre la covarianza tra i due percorsi parzialmente sovrapposti risulterà pari alla varianza della parte comune.

Il tempo di percorrenza di ciascun percorso sarà quindi la somma delle componenti seguenti:

$$TT_1(t) = t_{comune} + D_1(t)/s_1 + t_{cost1} + \eta(0, \alpha(t_{comune} + D_1(t)/s_1 + t_{cost1})) + \varepsilon(TT_{min}(t)) \quad (7.7)$$

$$TT_2(t) = t_{comune} + D_1(t)/s_1 + t_{cost2} + \eta(0, \alpha(t_{comune} + D_1(t)/s_1 + t_{cost2})) + \varepsilon(TT_{min}(t)) \quad (7.8)$$

$$TT_3(t) = D_3(t)/s_3 + t_{cost3} + \eta(0, \alpha(D_3(t)/s_3 + t_{cost3})) + \varepsilon(TT_{min}(t)) \quad (7.9)$$

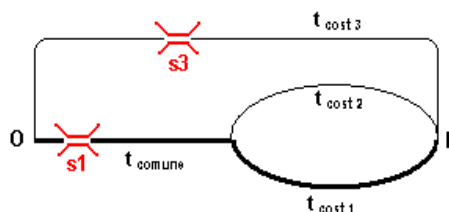


Fig 7.7: Schema di rete a tre percorsi, con parziale sovrapposizione.

Si può procedere infine alla simulazione, andando a definire in quante parti andare a dividere le distribuzioni utilizzate. Andando a suddividere in maniera più fitta si avranno delle estrazioni sicuramente più precise, ma un onere di calcolo superiore, in quanto il numero di combinazioni possibili varia in modo esponenziale, con alla base il numero di suddivisioni mentre all'esponente si ha il numero di variabili da considerare. Nel caso presentato si sono introdotte ben sette variabili, per dare un'ordine di grandezza si pensi che suddividendo in sei le distribuzioni si hanno 279936 combinazioni, con otto se ne hanno 2097152 e con dieci si arriva ai dieci milioni. Il tutto poi va ripetuto per il numero totale di intervalli considerati e per le iterazioni necessarie per giungere, si spera, alla convergenza. Quindi si nota facilmente un onere computazionale di un ordine di grandezza molte volte superiore al modello di tipo Logit presentato nell'articolo.

Volendo provare varie suddivisioni della distribuzione, fino ad una rappresentazione abbastanza dettagliata della gaussiana, si è cercato di diminuire il periodo temporale dell'analisi per ridurre i

tempi di elaborazione. Si è scelto quindi di condurre gli esperimenti dividendo le densità di probabilità in 4, 6 o 10 intervalli di uguale area ed eliminare l'ora iniziale e quella finale del periodo. In questo modo si considerano solo tre ore anziché cinque, con un risparmio del 40% dei calcoli, eliminando le due code della distribuzione della partenze che mostravano un numero di nuovi viaggi pressoché nullo.

Si comincia presentando il caso della suddivisione più grossolana, si effettuano solo quattro estrazioni da ogni distribuzione, ossia una per ogni quartile. Non è sicuramente rappresentativa come estrazione, ma ha il notevole vantaggio di essere rapida, si avranno “solamente” $4^7 (=16384)$ combinazioni possibili, da ricalcolare 75 volte, il numero di intervalli temporali discretizzati, per avere un'iterazione completa. Questa modalità potrà essere messa poi a confronto con l'opportunità di un campionamento più fitto, ricercando un compromesso tra precisione e tempo necessario al calcolo.

Si prende come soluzione iniziale la stessa del caso precedente, in condizioni pseudo stazionarie e trovata con un modello Logit nonostante le sovrapposizioni dei percorsi, ma si è visto come la soluzione finale ricercata non dipenda dal punto di partenza. Si fissa il numero di utenti potenziali totale a 27000, le capacità della rete e i tempi di percorrenza in assenza di congestione rimangono immutati, si pone il tasso di ripensamento al 15% nella speranza di velocizzare ulteriormente la convergenza. Si è mantenuto inoltre il valore sempre utilizzato per la tolleranza ϵ , ma si è fissato a 300 il numero massimo di iterazioni dell'algoritmo in caso di mancato raggiungimento della convergenza. Si riportano quindi le distribuzioni ritrovate e successivamente la misura della convergenza, che però non viene raggiunta.

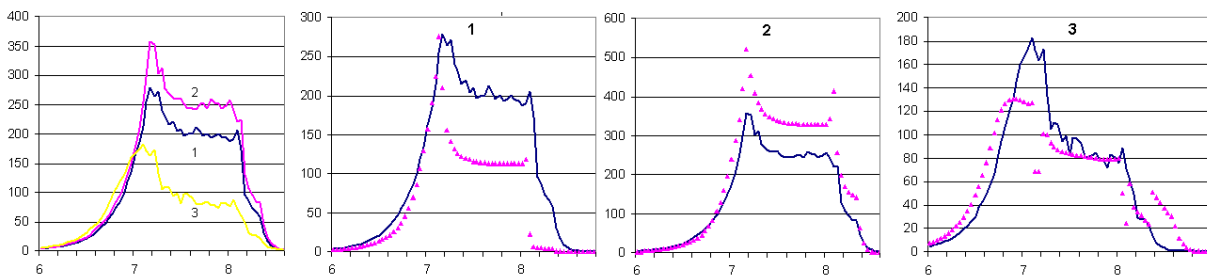


Fig 7.8: Risultati finali simulazione 3 percorsi e confronto con risultati modello Logit.

I profili ottenuti arrestando l'algoritmo hanno una forma molto frastagliata, segno che si era in una fase di calcolo dove si stavano ancora riallocando un gran numero di utenti alla ricerca di una configurazione stabile. Data la bassa densità di campionamento tale configurazione stabile pare non essere raggiungibile, in quanto le scelte ad ogni iterazione possono variare anche parecchio, pur senza che varino i valori medi che fungono da parametri delle distribuzioni.

Tuttavia è possibile notare, anche se in forma solo abbozzata, una fisionomia diversa delle distribuzioni per i tre percorsi rispetto al modello di tipo Logit. Si delinea infatti un'unica fase di picco per tutti i percorsi, scendendo poi asintoticamente verso un valore che si può considerare come la capacità, la somma di tali valori per i percorsi col tratto comune darà appunto la capacità complessiva fissata, per poi discendere. Si vede ancor meglio questo comportamento mettendolo a confronto con la vecchia soluzione senza considerare le sovrapposizioni. Si nota poi come sia mutato il rapporto tra il numero di utenti che sceglievano i percorsi con tratto comune, in quanto la coda comune avvantaggia quello con il tratto indipendente più breve. È mutata anche la percezione globale dei tre percorsi disponibili, in quanto i percorsi sovrapposti parzialmente sono meno distinti per l'utenza e questo avvantaggia la scelta del terzo percorso indipendente, nonostante caratteristiche inferiori.

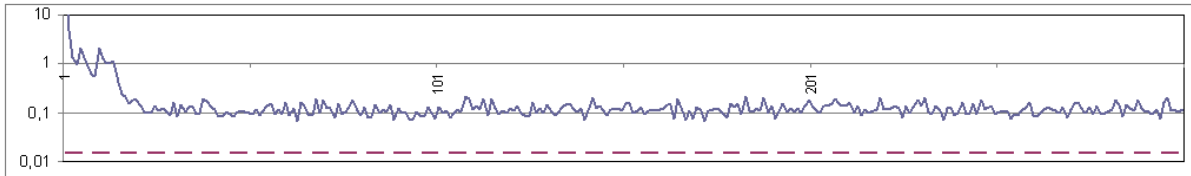


Fig 7.9: Misura di convergenza per ciascuna iterazione della simulazione.

Dal grafico della misura di convergenza si nota come non vi sia possibilità di arrivare a soddisfare le condizioni imposte con un ϵ così piccolo, sarebbe necessaria una soglia che sia ben cinque volte quella considerata.

Si registra infine il tempo necessario a compiere un'intera iterazione, che dipende in termini assoluti dalle caratteristiche del processore utilizzato, ma può essere usato come confronto dell'ordine di grandezza per ciascun esperimento effettuato. Per queste poche estrazioni si compie un'iterazione completa in poco più che un secondo.

Si passa ora ad un campionamento un poco più fitto delle distribuzioni, suddividendole in sei porzioni di uguale probabilità. In questo modo si assicurano ben quattro valori casuali nel 66% centrale della distribuzione. Il numero complessivo di combinazioni si attesta attorno ai ventuno milioni per ciascuna iterazione, un incremento del 1700% rispetto al caso di sole quattro estrazioni. Gli altri parametri utilizzati per l'algorithm rimangono inalterati, ma imparando dal caso precedente si pone un valore di ϵ più alto, pari a 0,3. Si ricerca la soluzione, che alzando così la tolleranza viene raggiunta, nel caso specifico in 110 iterazioni. Si riportano i risultati ottenuti.

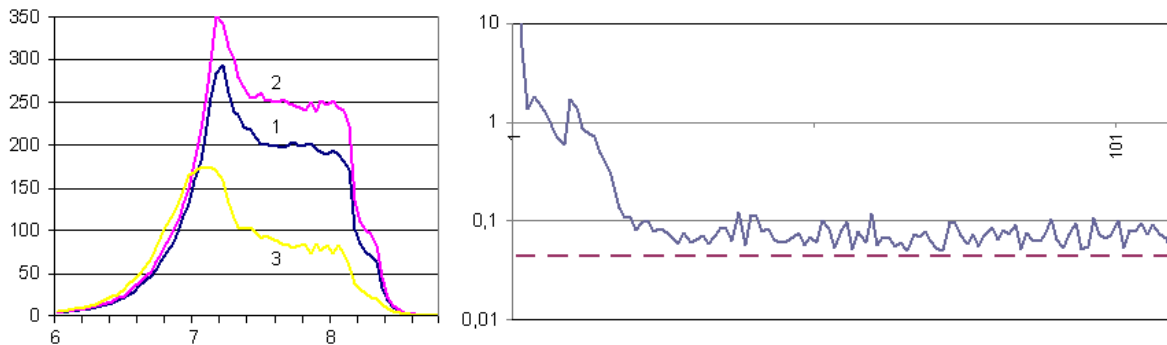


Fig 7.10: Risultati e misura di convergenza per ciascuna iterazione effettuando 6 estrazioni da ogni distribuzione.

Si nota come le distribuzioni delle partenze abbiano la stessa forma trovata nel caso precedente, ma con un andamento un po' meno frastagliato. Il numero di 110 iterazioni di per sé non è significativo, l'estrazione casuale non consente di determinare in modo unico quando si raggiunga la soluzione. È senza dubbio un segnale positivo il fatto che la soluzione venga raggiunta, inoltre andando a vedere l'andamento della misura di convergenza si nota come si stia sfiorando la soglia desiderata di tolleranza per un certo numero di iterazioni, fino a che non si riesca ad avere un'estrazione favorevole a scendere al di sotto. Si evince comunque come aumentando il numero di estrazioni il modello fornisca una soluzione più stabile nel susseguirsi delle iterazioni.

In questo caso sono necessari per ogni singola iterazione 24 secondi, l'aumento del tempo di calcolo risulta conseguente all'aumento del numero di combinazioni da calcolare.

Si è provato successivamente con un campionamento più fitto, dividendo le distribuzioni in dieci parti, per cercare di abbassare la differenza tra due iterazioni successive. Si avranno settecentocinquanta milioni di possibili combinazioni ad ogni iterazione, un ulteriore aumento del 3500% rispetto alle sei estrazioni, il tempo necessario risulterà quindi considerevole. Si riportano i risultati ottenuti.

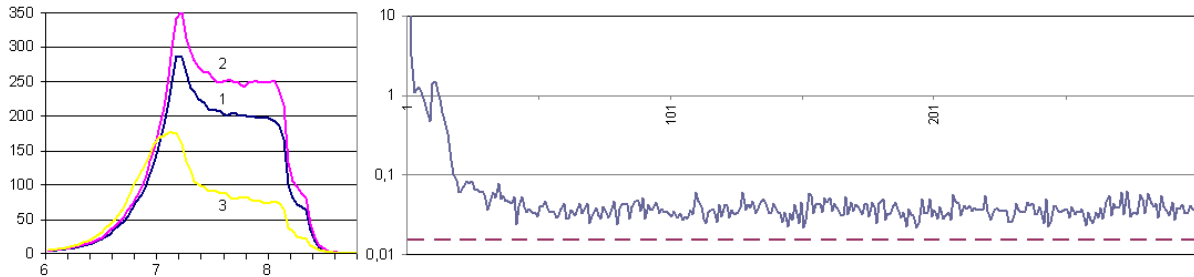


Fig 7.11: Risultati e misura di convergenza per ciascuna iterazione effettuando 10 estrazioni da ogni distribuzione.

La forma generale dei risultati rimane comunque inalterata, i picchi mantengono la stessa entità, e le fasi successive sono praticamente sovrapponibili. Appare ancora più smorzato l'andamento seghettato, confermando che con un maggior campionamento si può ottenere una maggiore stabilità della soluzione tra un'iterazione e l'altra. Questo si vede ancora meglio considerando l'andamento della misura di convergenza. In questo caso si è posto di nuovo ϵ pari a 0,1 ma un tale livello di accuratezza risulta ancora irraggiungibile. Per quanto riguarda i tempi di elaborazione sono necessari, data la potenza di calcolo disponibile, ben sei minuti per compiere un'intera iterazione, si capisce poi come farne trecento risultati abbastanza oneroso. Per di più senza la possibilità di arrivare a convergenza, infatti con le iterazioni eseguite si è ben delineato l'andamento asintotico, in senso lato, della misura di convergenza, che non sembra poter scendere dalla fascia in cui si è assestata. Il criterio di convergenza potrebbe essere soddisfatto alzando il valore di ϵ , per esempio ponendolo a 0,15. Si è provato infine ad eseguire qualche iterazione effettuando 14 estrazioni per distribuzione, non raggiungendo per un soffio la soglia fissata di convergenza, ma impiegando un'ora per ciascuna iterazione. Comunque è oramai evidente come aumentando la densità del campionamento per la simulazione sia possibile avere risultati sempre più stabili e precisi, soddisfacendo criteri di convergenza sempre più restrittivi.

Si può indagare ancora l'effetto del tasso di ripensamento alzato al 20%, in teoria aumentandolo sarebbe possibile avere una soglia di convergenza meno restrittiva, ma più utenti da riassegnare ad ogni iterazione. I risultati sono gli stessi a prescindere dal valore di R , ma andando a vedere la misura di convergenza si scopre che si è rimasti nella stessa situazione appena vista. Non si arriva alla convergenza con un ϵ pari a 0,1, ma occorre alzarlo almeno fino a 0,15.

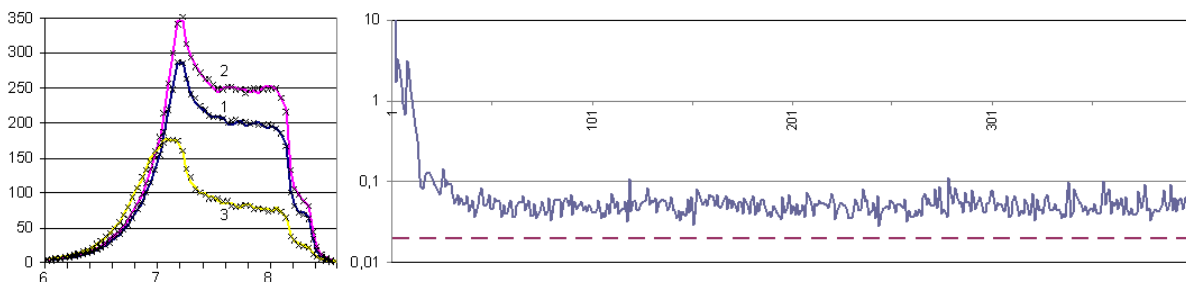


Fig 7.12: Risultati e misura di convergenza effettuando 10 estrazioni da ogni distribuzione, R pari a 20%.

Finora si sono analizzate solamente le configurazioni finali, o comunque configurazioni molto simili alla soluzione ricercata, delle scelte di partenza per ciascun percorso nel periodo considerato. Si vuole ora andare a controllare come evolvono le variabili interne dell'algoritmo, la funzione di utilità di ciascun percorso e la coda che si forma.

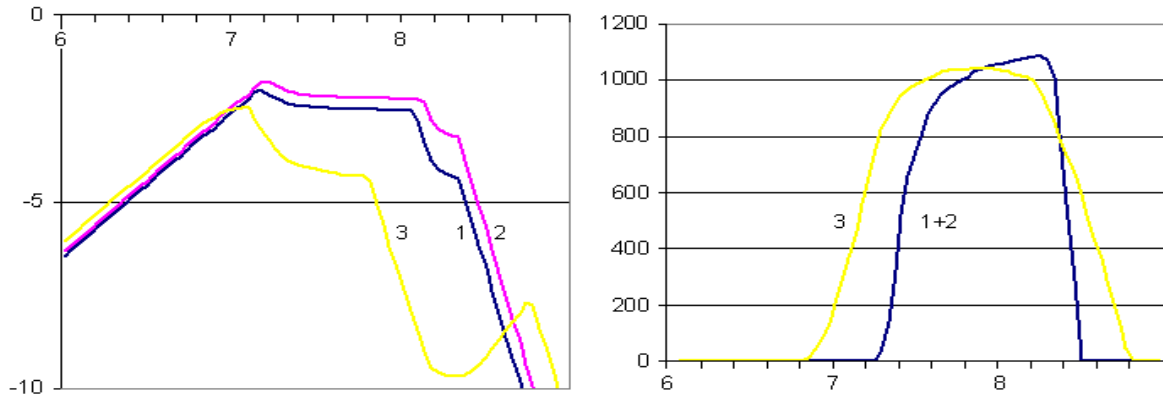


Fig 7.13: Utilità per ciascun intervallo temporale e coda nella configurazione finale.

Si vede, come in precedenza, che il percorso più breve risulta ovviamente il più appetibile, ma il valore dell'utilità precipita in corrispondenza della coda. Osservando questa caduta si scorge inoltre la stessa forma arrotondata del grafico relativo alla coda su quel percorso. A causa di questa gli utenti preferiscono altri percorsi e il numero di partenze scende rapidamente. Le utilità degli altri percorsi sono parallele tra loro, analogamente con quanto detto in precedenza sulla similitudine dei percorsi parzialmente sovrapposti.

Andando invece ad osservare le code si nota come abbiano la stessa entità, sebbene la capacità dei percorsi uniti sia cinque volte l'altra. Usando il modello Logit si era vista una coda maggiore per i percorsi sovrapposti, le preferenze si sono quindi spostate verso il percorso totalmente indipendente. La coda si forma sempre prima sul percorso più breve e vi termina per ultima.

Si può ancora visualizzare graficamente quali siano le differenze tra le scelte secondo il modello di tipo Logit e il modello misto Logit-Probit introdotto. A tal scopo si sono riportate le probabilità di scelta dei singoli percorsi, ottenute dalla simulazione e calcolate anche con la formula analitica del Logit nelle medesime condizioni, per coglierne le diversità. Si utilizza ovviamente la simulazione più precisa che si possiede, con 10 estrazioni per ogni singola distribuzione, ed i risultati riportati sono riferiti alla trecentesima iterazione.

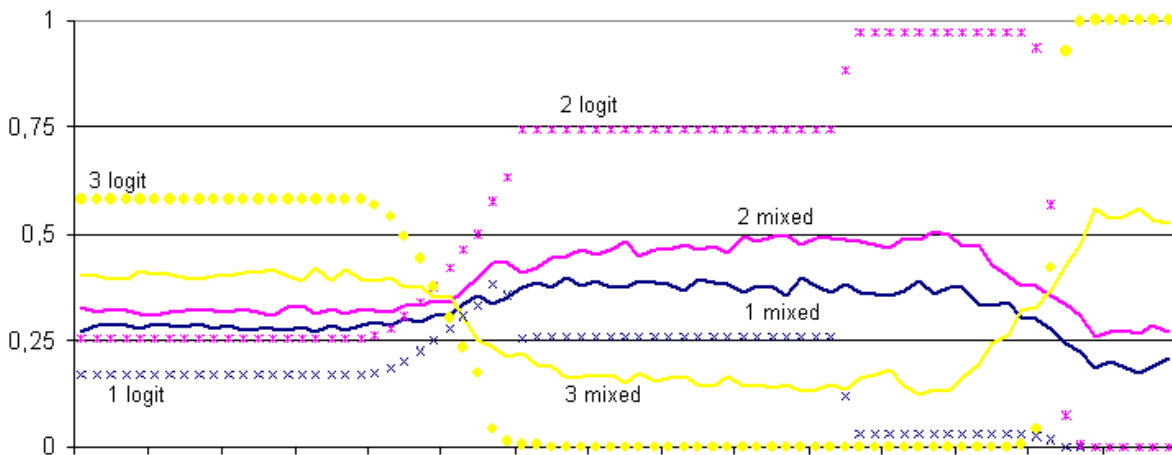


Fig 7.14: Confronto probabilità di scelta del percorso dalla simulazione e da modello Logit.

Le probabilità calcolate con un modello Logit appaiono innanzitutto maggiormente distinte, ve n'è sempre una nettamente superiore alle altre, ancora più evidente nel finale quando praticamente tutti gli utenti scelgono il percorso più breve. Inoltre si delinea un andamento a gradini, con ampi tratti costanti. Andando invece ad osservare i risultati della simulazione si vedono che le probabilità si

assomigliano maggiormente in tutto l'arco temporale considerato, in virtù della maggior variabilità introdotta nel modello. Si nota, per esempio, come le probabilità di scelta dei percorsi 1 e 2 siano sempre molto vicine, i percorsi condividono un tratto non irrilevante, ma con il percorso più breve che sovrasta sempre l'altro. E, come già detto, si ha uno spostamento delle preferenze verso il percorso più breve, specie nella fase congestionata. Si vede anche in questo come le probabilità assumano grossomodo lo stesso valore per periodi di tempo abbastanza lunghi, ma l'andamento è frastagliato a causa dei valori sempre diversi che possono essere estratti nella simulazione. Si può notare come vi sia una corrispondenza tra le probabilità Logit e *Mixed*, in quanto l'ordine delle preferenze rimane immutato per ciascun intervallo temporale. Le probabilità inoltre tendono a crescere o decrescere in modo quasi sincrono. Il modello quindi riesce a cogliere le similitudini tra le alternative mantenendo però l'ordine delle preferenze.

In questo capitolo si è introdotta una nuova tipologia di modello per la sola scelta del percorso, lasciando inalterate le modalità di scelta del momento di partenza. Il nuovo modello si è dimostrato sicuramente più oneroso da implementare e calcolare, ma si è visto come tale maggior onere sia inevitabile nel caso si debbano prendere in considerazione percorsi parzialmente sovrapposti, cosa che nelle reti reali può accadere molto frequentemente.

Si è visto inoltre come sia possibile avvicinarsi alla soluzione finale con un basso tasso di campionamento dalle distribuzioni considerate nella simulazione, mentre sia necessario un alto numero di estrazioni da ogni distribuzione per arrivare alla soglia di convergenza richiesta. Sulla base di queste osservazioni si potrebbe considerare, per ottenere un modello allo stesso tempo preciso e calcolabile in tempi rapidi, la possibilità di un campionamento ridotto per le prime iterazioni, cioè nella fase di avvicinamento alla soluzione. Si potrebbe quindi procedere ad infittire gradualmente le estrazioni, cominciando con un basso campionamento ed effettuando un alto numero di iterazioni, dopo di che usare un campionamento di livello intermedio per qualche altra decina di iterazioni ed infine effettuare un campionamento piuttosto fitto per pochissime iterazioni, comunque sempre onerose dal punto di vista del tempo, con delle distribuzioni ben descritte in modo che la soluzione rimanga stabile.

L'algoritmo proposto, anche se migliorabile, globalmente sembra funzionare in maniera soddisfacente e porta a soluzioni accettabili. Si può quindi procedere a combinarlo con le altre osservazioni fatte a riguardo della funzione di utilità, per ottenere un modello il più rappresentativo possibile delle scelte dei viaggiatori.

8 Simulazione finale e conclusioni

Nel corso dei capitoli precedenti si sono introdotte alcune modifiche ed estensioni al modello inizialmente presentato da Ben-Akiva e colleghi. Si è cercato di migliorare alcune assunzioni, utili a mantenere una struttura semplice da maneggiare e calcolare, ma poco soddisfacenti nel caso in cui si debba affrontare lo studio di una situazione reale. Si è intervenuti maggiormente sulla definizione della funzione di utilità aleatoria per ciascun individuo, modificandone sia la forma funzionale che le ipotesi sulla stocasticità delle variabili prese in considerazione. Il modello è quindi stato arricchito capitolo dopo capitolo, ma tutte le modifiche sono state testate e validate singolarmente. Si è costruita quindi la seguente simulazione finale, andando a studiare una rete con delle proprietà realistiche, se non proprio reali, e combinando assieme alcune delle migliorie presentate per descrivere nel modo più accurato possibile il comportamento degli utenti chiamati alla scelta.

Innanzitutto si è ritenuto opportuno modificare la causa degli spostamenti. L'evento alla base della necessità di viaggiare presentato nell'articolo, il dover andare a lavorare per dei pendolari, non poteva essere coerente con un'ipotesi fondamentale del modello, ossia che tutti i viaggiatori abbiano lo stesso tempo di arrivo desiderato. Si è quindi pensato a qualcosa che abbia tale caratteristica, i viaggiatori adesso dovranno raggiungere lo stadio per un grande evento sportivo, dato che la partita comincerà sicuramente alla stessa ora per tutti.

Lo scrivente prende ispirazione da un fatto reale, accaduto nella città di Padova in occasione della gara finale dei playoff di Serie B in data 9 giugno 2011. L'affluenza di pubblico è stata massiccia, quasi 22000 persone si sono dirette allo stadio per assistere alla sfida, bloccando la viabilità nel periodo precedente la partita. Non è ovviamente possibile descrivere fedelmente il fenomeno accaduto in tale occasione, in quanto nel modello si assume ancora un unico punto di partenza, mentre allo stadio si giungeva da diverse origini diffuse in tutta la città e nel territorio circostante. Per questo si prova a semplificare notevolmente la rete, riducendo il problema alla scelta da parte di quei padovani che partivano da un ipotetico centroide rappresentante il centro della città.

Un altro elemento di debolezza del modello consiste nei coefficienti utilizzati nella funzione di utilità aleatoria, come si è detto provenienti da un articolo di Small e stimati per il caso americano qualche decennio fa. Purtroppo non si dispone di valori rapportabili al caso italiano e contemporaneo in esame, ma si può supporre che, qualunque valore assumano, il rapporto tra di essi sia rimasto invariato, siano cioè aumentati (rappresentano sempre un costo unitario) in maniera proporzionale a partire dai valori di Small. In tal modo è possibile mascherare questa costante di proporzionalità nel parametro di scala, il cui valore viene comunque assunto a priori, e continuare ad utilizzare i vecchi coefficienti.

Definiti quindi i limiti del modello si può cominciare a descrivere la domanda potenziale totale. Si è detto che all'incontro erano presenti 22000 spettatori, è logico pensare che il 60-70% di questi possa essere arrivato in automobile, data la particolare ubicazione dello stadio, che rende poco agevole il suo raggiungimento camminando, in bicicletta e con mezzi pubblici. Quindi si ipotizzano 15000 persone e, se si tolgono quelli che non provengono dal centro città e si assume un tasso di occupazione medio pari a 2 persone per veicolo, si possono stimare grossomodo 5000 vetture che giungono a destinazione. Inoltre, dalle immagini aeree della zona, se si considerano i parcheggi ufficiali, quelli su strada ed il campo incolto messo a disposizione per la particolare occasione, si può valutare approssimativamente lo stesso numero di posti auto disponibili. In questo modo si possono confermare le stime fatte sulla domanda. Data inoltre la possibilità di un'alternativa nulla, cioè chi non considera conveniente usare la macchina, si fissa il numero di utenti (veicoli) potenziali totali a 6000, un 20% in più.

Passando a descrivere l'offerta dell'infrastruttura occorre innanzitutto fissare l'origine unica di tutti gli spostamenti. Il centroide rappresentante il potenziale generativo del centro di Padova si è scelto di collocarlo schematicamente alle poste centrali, in corso Garibaldi vicino alla chiesa degli Eremitani. Da qui si sono individuati tre percorsi, i più razionali, per giungere allo stadio.

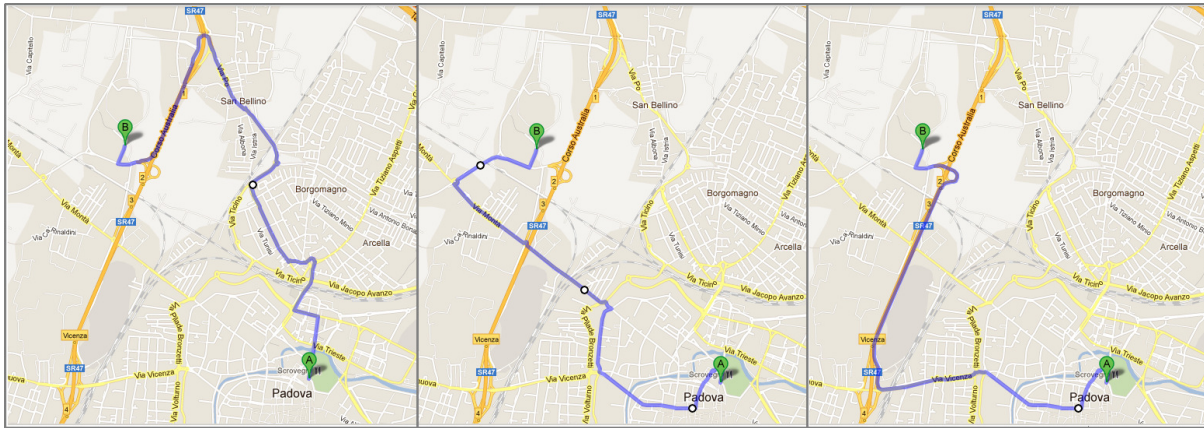


Fig 8.1: Risultati Possibili percorsi disponibili per raggiungere lo stadio, da Google maps.

Il primo percorso si suppone totalmente indipendente dagli altri e consiste nel percorrere via Giotto, viale Codalunga, il cavalcavia ferroviario Borgomagnano, quindi via Annibale da Bassano, il cavalcavia Camerini, via Po fino a prendere corso Australia ed uscire allo svincolo dedicato allo stadio. Risulta lungo in totale 5,5 chilometri, da percorrere in 13 minuti circa secondo il database Tele Atlas.

Il secondo percorso condivide un tratto comune col terzo e consiste nel percorrere via Martiri della Libertà, piazza Insurrezione, corso Milano, piazzale Savonarola, quindi girare per via Raggio di Sole, via Bezzacca, via Montà ed infine via Croce Verde per giungere allo stadio. Questo itinerario risulta lungo 4,9 chilometri e necessita di 13 minuti in condizioni normali.

Il terzo ed ultimo percorso segue il secondo per il tratto fino a piazzale Savonarola, ma prosegue dritto per via Vicenza, andando a prendere poi corso Australia in direzione nord ed arrivare allo svincolo dello stadio. In questo modo si percorrono 5,1 chilometri in 11 minuti.

Si vuole applicare alla rete, descritta con le sue caratteristiche di percorrenza normali, la relazione flusso-velocità per calcolare il tempo di percorrenza. Data l'eterogeneità degli itinerari non appare ragionevole utilizzare una tale relazione per tutta la distanza da percorrere, si è deciso quindi di scomporli in un tratto dipendente dal flusso ed uno indipendente, la cui lunghezza dipenderà dalle peculiari caratteristiche della rete reale. Per i percorsi parzialmente sovrapposti si è scelto di applicare la relazione flusso-velocità al tronco comune, in quanto costituisce il tratto critico per entrambi dato il maggior numero di veicoli che lo attraversa. Invece per il percorso totalmente indipendente si è calcolato il tempo di percorrenza in funzione del flusso per tutto il tratto non di tangenziale, supponendo che solo questa rimanga percorribile a velocità costante date le idonee caratteristiche. La schematizzazione della rete viene riportata nel seguente specchio.

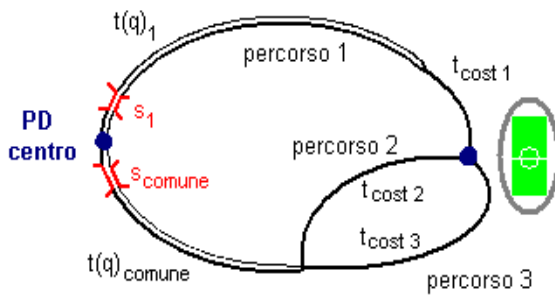


Fig 8.2: Schema semplificato rete considerata.

		perc 1	perc 2	perc 3
t cost	[h]	0,05	0,13	0,1
L TOT	[km]	5,5	4,9	5,1
L	[km]	4	1,7	
v0	[km/h]	30	20	
tq(0)	[h]	0,133	0,085	
Km	[veic/km]	45	50	
corsie		2	2	
capacità	[veic/h /corsia]	675	500	

Tabella 8.1: Caratteristiche rete considerata.

I valori di capacità si sono calcolati seguendo la teoria delle curve di deflusso, andando cioè a calcolare il flusso massimo che si raggiunge alle condizioni critiche. Dati i tempi di percorrenza forniti da Tele Atlas è possibile calcolare una velocità di percorrenza media, che si considera nel caso di rete in assenza di congestione, e dimezzandola, per le ipotesi di Greenshield, è possibile

ricavare il valore della velocità critica che si attesta tra i 10 i 15 chilometri all'ora. Da questa, utilizzando una formula per la distanza di sicurezza tra i veicoli come quella contenuta al punto 5.1.2 del DM 5/11/2001 "Norme funzionali e geometriche per la costruzione delle strade", si è calcolata una densità di circa 50 veicoli per kilometro. Si fa notare che le velocità medie ricavate sono comprensive anche dei ritardi dovuti alle numerose intersezioni incontrate sulla rete, che ostacolano il libero deflusso dei veicoli. Per cui, per calcolare la densità, si è utilizzato un distanziamento interveicolare abbastanza elevato per un caso urbano, ma utile a rendere l'effetto dell'andamento disturbato e non continuo del deflusso.

Per il buon funzionamento del modello bisogna che gli intervalli temporali, su cui si effettuano le valutazioni relative al tempo di percorrenza, risultino più brevi dei tempi di percorrenza dei diversi tratti della rete. Viste le brevi distanze considerate, e di conseguenza i brevi tempi di percorrenza, si è resa necessaria una discretizzazione piuttosto fine del periodo dell'analisi per poter seguire l'evoluzione della congestione e la formazione delle code. Si simulerà quindi un periodo di tre ore, ciascuna divisa in 50 intervalli, praticamente uno per minuto. In totale vi saranno quindi 150 intervalli da calcolare ad ogni iterazione.

Data la natura ludico-ricreativa dell'evento considerato, si può ipotizzare di utilizzare una penalizzazione lineare del tempo perso. Il termine SD sarà quindi calcolato con la semplice legge trilineare. L'orario preferito di arrivo è stato posto mezz'ora prima del fischio d'inizio, fissato alle 20,30, in modo che l'intervallo degli arrivi con termine SD nullo termini quando la partita cominci. Si utilizzano sempre i due coefficienti che esprimono una maggior disutilità per gli arrivi ritardati rispetto a quelli anticipati.

Si è già detto che si considerano tre percorsi, due dei quali parzialmente sovrapposti, di conseguenza si deve ricorrere ad una simulazione ed utilizzare la tecnica del *Latin Hypercubes Sampling*. Vi sono comunque dei problemi inerenti al tempo di calcolo, si ricorda come nei capitoli precedenti si considerasse un numero di intervalli temporali discretizzati che era la metà di quello attuale e per fare un'intera iterazione si impiegasse anche un'ora, per di più senza la possibilità di arrivare ad una soluzione che soddisfacesse i criteri utilizzati. Quindi, dopo vari esperimenti per testare un campionamento che garantisse la convergenza, si è implementato un algoritmo che nelle prime iterazioni prevede un basso numero di estrazioni dalle varie distribuzioni, quando dalla soluzione iniziale si deve raggiungere una forma "grezza" della distribuzione finale delle partenze, passando poi ad infittire il campionamento man mano, per arrivare alla convergenza in tempi ragionevoli. La sequenza implementata prevede nella prima fase di effettuare sole 4 estrazioni per 90 iterazioni e poi aumentare a 6 estrazioni fino all'iterazione numero 135, in modo da essere abbastanza prossimi alla soluzione nell'ordine di pochi minuti. Dopo di che si effettuano 10 estrazioni per altre 25 iterazioni, al fine di stabilizzare i risultati ottenuti impiegando meno di dieci minuti per iterazione, infine si eseguono una o più iterazioni con un campionamento a 16 punti da ciascuna distribuzione, in modo da raggiungere (si spera, i valori estratti sono sempre casuali), la soglia di convergenza in un'unica o comunque poche iterazioni da quattro-cinque ore ciascuna.

La situazione che si cerca di descrivere non è certamente di tipo ricorrente, avvenimenti di tale afflusso di pubblico allo stadio non sono molto frequenti. Si suppone comunque che una configurazione di equilibrio stocastico possa venire raggiunta in quanto gli utenti hanno una certa conoscenza pregressa della rete, proveniente da esperienze precedenti, ad esempio per altri eventi sportivi o concerti che attraessero un gran numero di persone. Si ricerca quindi la configurazione finale delle partenze, senza interessarsi alla dinamica che si sviluppa tra un'iterazione e la successiva. A tal proposito, per descrivere la non completa dimestichezza dei viaggiatori che devono valutare l'itinerario migliore, viene utilizzata una grande variabilità per l'estrazione dei tempi di percorrenza, fissando per le varie distribuzioni la varianza in modo da aver basse possibilità di incorrere in valori senza senso, ad esempio negativi. Quindi, volendo ritrovare solamente la soluzione finale di equilibrio in qualunque maniera venga raggiunta, si cerca di garantire una sicura e rapida convergenza fissando un valore basso del tasso di ripensamento, pari al 5% e senza legarlo alle caratteristiche degli utenti.

La soluzione viene trovata in almeno 8 ore, la metà delle quali spese per l'ultima iterazione a campionamento massimo, ma i tempi di calcolo possono allungarsi aggiungendo altre 4 ore per ogni iterazione aggiuntiva. Si riportano quindi i risultati ottenuti, partendo dal numero di partenze per ogni intervallo temporale, praticamente ogni minuto.

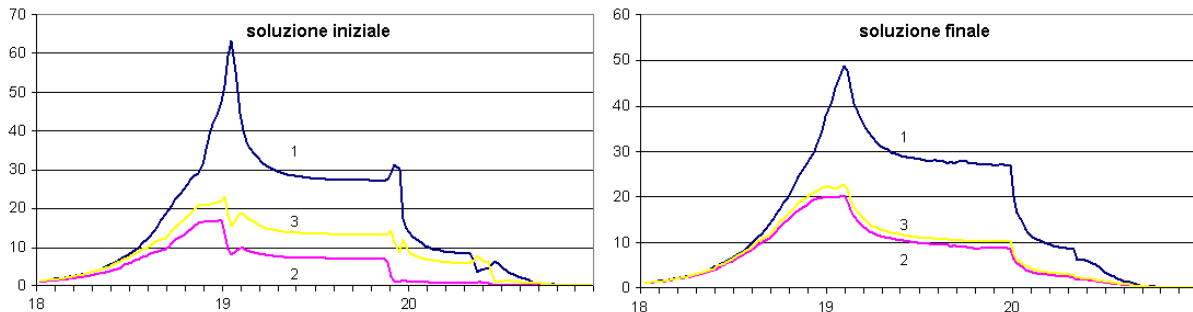


Fig 8.3: Soluzione iniziale e configurazione di equilibrio stocastico.

Dalla soluzione finale si può notare l'effetto della maggior variabilità introdotta nella simulazione Logit *Kernel*, rispetto alle ipotesi del Logit, rappresentato dalla soluzione iniziale. Le forme della distribuzione delle partenze appaiono più smussate dopo la simulazione, non vi sono più quei picchi aguzzi segno di una netta preferenza da parte dei viaggiatori, tanto che contemporaneamente si deprimono le partenze negli altri percorsi. Ciò accade nel Logit quando l'utilità di un percorso è nettamente maggiore delle altre, date le particolari condizioni di congestione, per cui quell'alternativa risulta di gran lunga la favorita. Il valore del tempo di percorrenza, preso come parametro deterministico da cui si definiscono le distribuzioni degli errori, può ancora avere dei bruschi salti di valore, specie nella zona di formazione della coda, ma utilizzando una maggior variabilità, quindi incertezza, nella simulazione Logit *Kernel* si livellano le differenze nelle probabilità finali di scelta. Si ha quindi di conseguenza un andamento più regolare delle curve rappresentate.

Sempre per l'effetto dell'aumento dell'incertezza si vede come il picco massimo risulti decisamente più basso, il 20% in meno, nonché più largo. Inoltre il secondo ed il terzo percorso risultano molto simili, praticamente costituiscono due alternative uguali. Il parallelismo delle scelte tra il secondo ed il terzo è dato ovviamente dalla covarianza introdotta dal tratto comune, ma la maggior variabilità tende ad avvicinare le curve. Il tratto comune porta ad una differente ripartizione dei viaggiatori tra i tre percorsi disponibili rispetto alla soluzione iniziale.

Passando ad altri aspetti dell'analisi, si possono contare in tutto 4600 viaggi, che ben si accordano con le stime fatte in precedenza. Si può notare come la maggior parte degli utenti tenda a partire nell'intervallo compreso tra le due ore e la mezzora precedenti l'inizio della partita, mentre dopo tale orario il numero di partenze cala drasticamente, a causa della congestione da smaltire. Potendo calcolare l'orario di arrivo per ogni singolo intervallo temporale, si possono anche contare i viaggiatori che, date queste condizioni, preferiranno tardare la partenza e sperimentare un'attesa in coda minore, ma si perderanno l'inizio della partita. Si sono contati ben 660 arrivi in ritardo, circa il 15% del totale, ma con il 90% di questi che si concentra nella prima mezz'ora.

La collocazione temporale del picco delle partenze è abbastanza fedele rispetto a quanto accaduto realmente in quella giornata, per di più si fa presente come le autorità cittadine avessero invitato gli spettatori a dirigersi allo stadio due o tre ore prima dell'incontro al fine di evitare forti fenomeni di congestione.

Esaminata la distribuzione delle partenze si può dunque passare ad osservare le altre variabili fornite dal modello, che descrivono ciò che accade nell'infrastruttura. Si riportano il valore della densità e la conseguente velocità, per i tratti modellati mediante la teoria del deflusso, inoltre la coda che si forma nelle sezioni critiche. Per controllare la correttezza dell'algoritmo vi è riportato

anche il tempo di arrivo per ciascun istante di partenza, che dovrà ovviamente essere successivo a quello dell'istante che lo precede per non avere compenetrazioni dei veicoli.

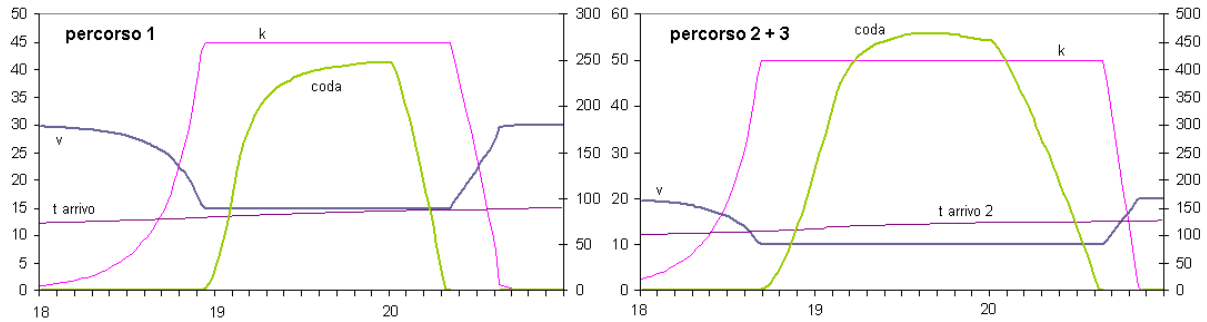


Fig 8.4: Variabili interne: densità, velocità, coda e tempo di arrivo per ciascun intervallo temporale, 3 percorsi.

Innanzitutto si vede una situazione di congestione diffusa su tutti i percorsi della rete. Si potrebbe poi notare come la coda si formi con venti minuti di differenza tra i due grafici, mentre il tasso delle partenze, dal grafico visto in precedenza, all'inizio del periodo dell'analisi sembra crescere alla stessa maniera per i tre percorsi. Se si considera invece che due di questi hanno in comune il primo tratto, si capisce come in questa porzione condivisa il tasso di partenze risulti in realtà doppio. Perciò la densità critica, e la conseguente coda deterministica, si raggiunge prima nel tratto condiviso. Si ricorda inoltre che si era fissato un valore di densità critica maggiore per il tratto comune, quindi per il percorso indipendente la coda si formerà con flussi di traffico minori.

La congestione perdura per quasi un'ora e mezza nel primo percorso, anche se il tempo speso in coda sia al massimo di dieci minuti. L'attesa è quindi tutto sommato contenuta rispetto al tempo viaggiato nella rete congestionata, stimato in venticinque minuti circa. Nel tratto di strada condiviso dagli altri due percorsi invece la coda è presente per ben due ore, inoltre l'entità delle attese risulta ben maggiore, con punte massime di venti e più minuti. In questo caso si ha un peso decisamente maggiore della coda deterministica rispetto al tempo di percorrenza nella rete congestionata, in quanto il tratto sottoposto alla legge del deflusso è molto più breve, percorribile in dieci minuti alle condizioni critiche, al quale poi andranno aggiunti i contributi costanti dei tratti successivi.

Per capire ancor meglio quel che condiziona le scelte dei viaggiatori si può riportare in un grafico il valore della componente deterministica dell'utilità aleatoria per ciascun percorso per ogni singolo intervallo temporale.

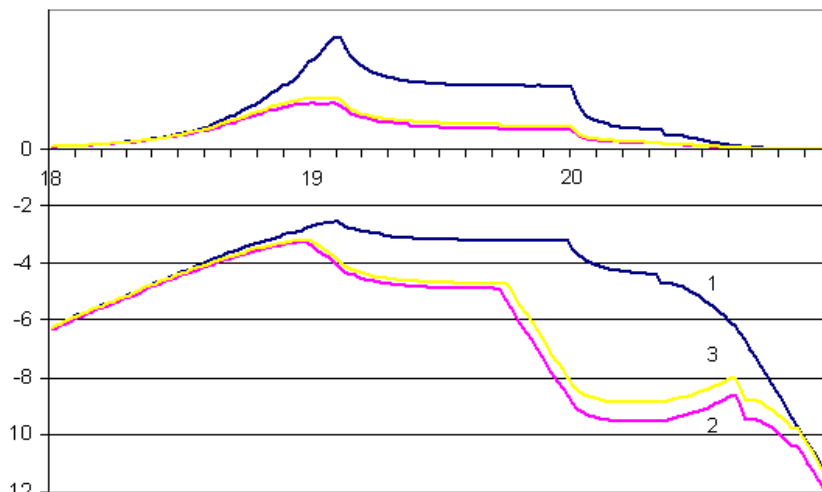


Fig 8.5: Valore componente deterministica utilità per ciascun intervallo temporale.

Si sono riportate anche le partenze, in scala diversa rispetto al grafico precedente, per analizzare in maniera comparativa gli andamenti delle due curve. Si vede come all'inizio sia praticamente indifferente la scelta del percorso per gli utenti, le utilità hanno lo stesso valore e anche le partenze son equidistribuite. Formandosi la congestione sul tratto condiviso, come visto nei grafici precedenti, il percorso indipendente diventa il preferito dai nuovi partenti. La disutilità poi aumenta ancora, si passa nel periodo in cui le partenze generano arrivi in ritardo. La curva delle partenze in questa fase tende ad abbattersi velocemente, per la maggior penalizzazione unitaria attribuita al ritardo.

Si può infine riportare la misura di convergenza, per vederne l'evoluzione con la particolare sequenza di campionamento utilizzata per la simulazione.

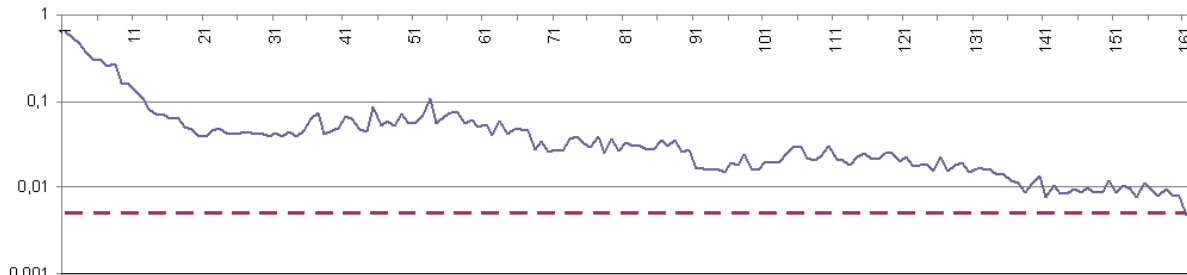


Fig 8.6: Misura di convergenza per ciascuna iterazione, tasso di campionamento dalle distribuzioni variabile.

Si può notare come la misura di convergenza, dopo la discesa iniziale, tenda ad oscillare all'interno di un range sempre più ridotto (la scala è semilogaritmica) in funzione del maggior campionamento che si realizza con il procedere delle iterazioni. L'andamento ottenuto è valido per la specifica simulazione effettuata con le estrazioni eseguite, si possono ritenere indicative le fasce dove la linea oscilla, ma non i singoli punti riportati. Data la casualità delle estrazioni si può cadere nell'evenienza che la soluzione non venga raggiunta con la sequenza fissata di iterazioni e campionamento, ma la soluzione può comunque considerarsi trovata, in quanto sicuramente si è molto vicini alla soglia definita da ϵ . Si può notare inoltre che, per il caso specifico riportato, l'ultima iterazione impiega la metà del tempo di calcolo ma non porta modifiche apprezzabili alla soluzione. Quindi essendo praticamente arrivati a convergenza si possono evitare ulteriori iterazioni con elevato campionamento che confermano la soluzione già trovata ma che, in questo caso, impiegano quattro-cinque ore ciascuna.

Nel presente elaborato si è presentata la problematica della scelta del momento in cui effettuare la partenza per gli utenti che affrontano la necessità di arrivare a destinazione entro un certo orario in un contesto di rete congestionata. Ci si è mossi, nel corso della analisi effettuate, partendo da un modello ottenuto con ipotesi molto semplificative, riguardo la schematizzazione della rete considerata e il comportamento degli utenti, fino ad ottenere un modello più raffinato, che meglio possa descrivere, e prevedere poi, le scelte dei viaggiatori.

Il lavoro di riferimento è stato un modello proposto da Ben-Akiva ed altri, si è visto brevemente il filone della letteratura che ne ha portato lo sviluppo, le ipotesi e le assunzioni fatte e lo si è poi implementato. È stato possibile quindi andarne a studiare le caratteristiche principali, relativamente alla sua capacità di produrre la soluzione cercata e la sua robustezza, alla funzione dei vari parametri introdotti, alla ricerca di un dominio multidimensionale in cui assicurare una soluzione.

Sono stati compiuti poi dei passi avanti, si sono introdotte delle nuove ipotesi più verosimili, in particolare per il comportamento di scelta degli utenti, si sono testate e si sono ricercati anche i limiti teorici e numerici per l'utilizzo delle modifiche. In particolare si ricordano le varie funzioni provate per l'utilità aleatoria, per descrivere una penalizzazione non lineare del tempo perso dai viaggiatori, la cui forma corretta da impiegare in un caso reale deve essere scelta dopo un'indagine sulla popolazione, al fine di coglierne le preferenze e calibrare i parametri da utilizzare.

In più si è introdotta una dipendenza del tempo di percorrenza dal flusso dei veicoli presente su un tronco stradale. Per utilizzare tale formulazione però occorre porre attenzione sulle ipotesi che vi stanno alla base, circa la stazionarietà del deflusso, il flusso ininterrotto e l'omogeneità del tronco stradale esaminato. Tale relazione quindi è stata usata nella simulazione, costruita con un contesto urbano, per mostrarne le potenzialità, ma sarebbe maggiormente corretto utilizzarla in contesti di taglio extraurbano, per le ipotesi di omogeneità e deflusso ininterrotto, e con una discretizzazione temporale di almeno cinque minuti, meglio ancora dieci, per mantenere quelle di stazionarietà.

Si è dovuto costruire ancora due nuovi sottomodelli, uno per poter passare dalle condizioni stazionarie della relazione del deflusso alla coda deterministica di natura dinamica, l'altro per il passaggio ancor più delicato in direzione contraria. Si sono impostati dei punti comuni alle due condizioni in cui effettuare il passaggio, inoltre si è dovuto preservare la continuità dei veicoli, considerandoli come un fluido, in modo da non creare discontinuità né compenetrazioni tra di essi.

Infine si sono dovute cambiare le ipotesi sulla stocasticità insita nell'utilità aleatoria, a spese però di una comoda forma chiusa tipica dei modelli della famiglia Logit. In questo modo si sono potute cogliere delle caratteristiche abbastanza comuni nelle reti reali, come la sovrapposizione parziale dei percorsi che ne fa decadere la mutua indipendenza, ma per calcolare una soluzione di equilibrio stocastico si è dovuta implementare una procedura di tipo numerico, che si è dimostrata molto onerosa in termini di costo computazionale.

Si è osservato come gran parte dell'onere computazionale derivi dalla definizione di una soglia di convergenza piuttosto bassa, tuttavia si è visto come il modello possa produrre in maniera più veloce dei risultati che ben approssimano la soluzione finale, pur senza soddisfarne i requisiti per la convergenza. Si è notato infatti in molte occasioni come la forma di massima della distribuzione delle partenze si raggiunga già dopo una frazione minoritaria delle iterazioni necessarie a giungere alla convergenza. Oltretutto, nel caso specifico delle simulazioni, per avvicinarsi alla soluzione non è nemmeno indispensabile utilizzare dei tassi di campionamento molto alti, si possono utilizzare un numero modesto di estrazioni e di conseguenti calcoli da eseguire.

Si è quindi espanso il modello da cui si è partiti nell'analisi, costruendone un altro che superasse alcune ipotesi del precedente, legate alla necessità di mantenere delle forme semplici da calcolare, e maggiormente fedele se usato in un contesto reale. Per un utilizzo pratico, senza particolari richieste di precisione, indagini troppo approfondite, né tempi di calcolo eccessivi, si possono ottenere dei risultati che diano lo stato generale della rete e l'ordine di grandezza delle eventuali congestioni che si verifichino. Indagini molto approfondite sulla popolazione dei viaggiatori devono essere compiute nel caso si voglia seguire anche la dinamica *day to day*, potenzialità già insita nel modello, andando a prevedere l'effettiva evoluzione dei flussi da un giorno all'altro. In questo caso servirà una buona conoscenza sia di quei parametri che regolano la percezione e le preferenze individuali degli utenti, sia del tasso di ripensamento, assegnando ad esso un valore coerente con il comportamento degli utenti e legato alle caratteristiche del sistema esaminato.

Il modello così come presentato non è immediatamente spendibile in un contesto reale, ma potrebbe facilmente essere una componente per un modello più ampio. In particolare occorre considerare la molteplicità dei punti di origine e destinazione in una rete reale, combinando assieme le domande d'uso per i differenti percorsi al fine di calcolare i tempi di percorrenza nella rete e di lì procedere alla riassegnazione degli utenti. Inoltre bisogna considerare la non unicità degli orari di arrivo, legati alle specifiche esigenze delle tipologie di utenti della popolazione. L'ipotesi di un orario unico preferito appare troppo semplificativa, tanto che era stata proposta un'estensione ad una generica distribuzione già da Hendrickson e Kocur nel 1981. Comunque, arricchendo il modello con delle specifiche applicazioni esistenti, che vanno ad estrarre le diverse caratteristiche degli utenti da delle specifiche distribuzioni, è in teoria possibile studiare le scelte a seguito della negoziazione tra le esigenze diverse dei viaggiatori.

Il modello presentato ricerca comunque dei comportamenti per gli utenti coerenti con le varie ricerche condotte nel campo dei trasporti nell'arco di decenni, è quindi una valida componente da modificare opportunamente e combinare con le estensioni richieste, per un modello di rete

completo. Una volta fornita una domanda, stimata con altri modelli di generazione-distribuzione oppure avendo a disposizione una matrice dinamica di flussi O-D, si hanno tutti gli strumenti necessari a delineare il problema dell'assegnazione. Si pensa quindi come sia in teoria possibile andare ad esaminare una rete reale, con percorsi ben definiti, poi stimare dei parametri per definire l'utilità aleatoria, o ricavarli dalla letteratura, per ottenere così un modello di assegnazione dinamica utilizzabile per una piccola realtà urbana.

Bibliografia

- BEN-AKIVA, M., CYNA, M. e DE PALMA, A. (1984) Dynamic model of peak period congestion, *Transportation Research B*, 18 (4), pp 339-355.
- BEN-AKIVA, M., DE PALMA, A. e KANAROGLOU, P. (1986) Dynamic model of peak period traffic congestion with elastic arrival rates. *Transportation Science*, 20 (2), pp 164-181.
- DAGANZO, C.F. e SHEFFI, Y. (1977) On stochastic models of traffic assignment. *Transportation Science*, 11 (3), pp 253-274.
- DE PALMA, A., BEN-AKIVA, M., LEFEVRE, C. e LITINAS, N. (1983) Stochastic Equilibrium Model of Peak Period Traffic Congestion. *Transportation Science*, 17 (4), pp 430-453.
- HENDRICKSON, C. e KOCUR, G. (1981) Schedule delay and departure time decisions in a deterministic model. *Transportation Science*, 15 (1), pp 62-77.
- MAHMASSANI, H. e HERMAN, R. (1984) Dynamic user equilibrium departure time and route choice on idealized traffic arterials. *Transportation Science*, 18 (4), pp 362-384.
- MCFADDEN, D. (1978) Modelling the choice of residential location. In KARLQVIST, A., LUNDQVIST, L., SNICKARS, F. e WEIBULL, J. *Spatial Interaction Theory and Residential Location*, pp 75-96. North-Holland (Amsterdam)
- NEWELL, G. F. (1988) Traffic flow for the morning commute. *Transportation Science*, 22 (1), pp 47-59.
- SHEFFI, Y. (1985) *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*, Prentice-Hall (Englewood Cliffs, N.J.).
- SMALL, K.A. (1982) The scheduling of consumer activities: work trips. *American Economic Review*, 72 (3), pp 647-679.
- SMITH, M. J. (1984). The Existence of a Time-Dependent Equilibrium Distribution of Arrivals at a Single Bottleneck. *Transportation Science*, 18 (4), pp 385-394.
- TRAIN, K. E. (2003) *Discrete choice methods with simulation*, Cambridge University Press (New York, NY.).
- VICKREY, W. S. (1969) Congestion theory and transport investment. *American Economic Review*, 59 (2), pp 251-260.
- WARDROP, J.G. (1952) Some theoretical aspects of road traffic research. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers II*, 1, pp 325-378.