Costruzione di un portafoglio titoli
Dalla teoria di markowitz
Al modello Black&litterman

Ai miei genitori

SOMMARIO

TEORIA DI MARKOWITZ

Il primo contributo alla definizione e successivo sviluppo, degli *asset allocation models* lo si deve ad *Henry Markowitz (Portfolio selection. "Journal of Finance 7, 1952 N°1:77-91). Markowitz* propone l'approccio *media-varianza* per cui la composizione del portafoglio ottimale (a dato rischio si ottiene il massimo rendimento atteso ovvero la minimizzazione del rischio per ogni livello di rendimento atteso) dipende dal valore atteso μ e dalla matrice di varianza-covarianza (in seguito *V-C*) $\boldsymbol{\Sigma}$ del vettore dei rendimenti attesi z, quantità ignote approssimate con i relativi stimatori campionari.

1.1 TITOLI E PORTAFOGLIO

Lo studio di *Markowitz* si basa sull'analisi del processo che genera la domanda e l'offerta di attività finanziarie in funzione del rapporto rischio/rendimento da esse espresso. Il principio base che governa la teoria di *Markowitz,* è che, al fine di costruire un portafoglio efficiente occorre individuare una combinazione di titoli tale da minimizzare il rischio e massimizzare il rendimento complessivo, compensando gli andamenti asincroni dei singoli titoli. La diversificazione funziona poiché i prezzi di azioni diverse, non hanno un andamento esattamente concorde: non sono perfettamente correlati. Il rischio che può essere potenzialmente eliminato con la diversificazione è chiamato rischio specifico: deriva dal fatto che molti dei "pericoli" che circondano una singola impresa sono peculiari dell'impresa stessa. Vi sono poi, "pericoli" che interessano l'intera economia che costituiscono quello che viene definito rischio sistematico per il quale la diversificazione non ha effetti. La diversificazione riduce il rischio solo quando la correlazione è minore di uno, il miglior risultato che si può ottenere si ha quando due azioni sono perfettamente correlate negativamente.

Gli assunti fondamentali della teoria di portafoglio secondo *Markowitz* sono i seguenti:

- Gli investitori intendono massimizzare la ricchezza finale e sono avversi al rischio.
- Il periodo di investimento è unico.
- I costi di transazione e le imposte sono nulli, le attività sono perfettamente divisibili.
- Il valore atteso e la deviazione standard sono gli unici parametri che guidano la scelta.
- Il mercato è perfettamente concorrenziale

Quindi, riassumendo, il rischio che può essere potenzialmente eliminato con la diversificazione è chiamato rischio specifico: nel quale sono considerati tutti i "pericoli" che si possono considerare peculiari di un'azienda.

Definiamo rendimento di un'attività finanziaria il rapporto tra il capitale iniziale e gli utili prodotti da operazioni di investimento o di compravendita in un periodo di tempo specificato. Il rischio può essere definito come il grado di incertezza che il mercato esprime sulla effettiva realizzazione dei rendimenti attesi. Tanto il rendimento quanto il rischio, possono essere oggetto di misurazione *ex-ante* ovvero sono *ex-post*. Il rendimento semplice di un titolo azionario misurato *ex-post* in un intervallo $(t-1,t)$, può essere espresso come:

$$r_t = \frac{p_t + d_t}{p_{t-1}} - 1$$

dove p_t e p_{t-1} sono i prezzi di mercato negli istanti t e $t-1$ e d_t il dividendo per azione riconosciuto dall'emittente, la somma $1+r_t$ viene anche chiamata fattore di capitalizzazione. Si presuppone che i costi di transazione siano nulli, che sia nulla la ritenuta fiscale sui dividendi e, infine, che t sia l'istante di valutazione. L'approccio classico considera r_t, valutato *ex-ante*, come una variabile casuale caratterizzata da un valore medio μ_r, che misura il rendimento atteso sul titolo, da un livello di varianza σ_r^2, assunto come misura attendibile dell'incertezza che venga perseguito quel livello di rendimento atteso, e da una distribuzione di probabilità che identifica statisticamente il processo generatore dei prezzi. Il momento *n-esimo* di una variabile casuale continua è definito come:

$$m'_n = E\left(r_t^{\,n}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_t^{\,n} f(r_t) dr_t$$

Dove *E(·)* indica il valore atteso e *f(·)* è la funzione di densità della variabile casuale. Il momento di ordine *1* è detto media o valore atteso della variabile casuale; misura il punto centrale della distribuzione. Avendo a disposizione un campione di T osservazioni sotto forma di serie storica dei rendimenti, si potrà dunque considerare la media aritmetica delle osservazioni come uno stimatore attendibile del rendimento atteso μ, definita da:

$$\bar{r} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t$$

Nell'ambito della moderna teoria del portafoglio un'attività finanziaria si considera tanto più rischiosa quanto più elevata risulta la probabilità che i rendimenti futuri si disperdano rispetto al valore medio stimato. Una valida misura statistica di questo effetto è rappresentata dalla varianza dei rendimenti. Si definisce il momento centrale di ordine n :

$$m_n = E\left[\left(r_t - \mu_{r_t}\right)^n\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(r_t - \mu_{r_t}\right)^n f\left(r_t\right) dr_t$$

Quando l'integrale è definito. Il secondo momento centrale misura appunto, la variabilità della variabile aleatoria, la sua radice quadrata è definita *standard deviation.* I primi due momenti di una variabile casuale determinano univocamente una distribuzione normale. Come in precedenza si considera la varianza campionaria come una stima attendibile della varianza dell'intera popolazione e indicato con T il numero di osservazioni delle quali si dispone, il rischio di un'attività finanziaria si calcola utilizzando la formula seguente:

$$s_r^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(r_t - \bar{r}\right)^2$$

Per valori elevati di T si può utilizzare una stima alternativa della varianza:

$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{T-1}{T} s_r^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(r_t - \bar{r}\right)^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t^2 - \bar{r}^2$$

Un'assunzione fondamentale del mondo *markowitziano*, riguarda la distribuzione delle probabilità sulla quale si regge il meccanismo di formazione dei rendimenti, la quale si ipotizza essere di tipo *Gaussiano*. Ciò significa considerare che i prezzi siano generati da un processo casuale che esprime un valore medio atteso uguale a μ e una varianza pari a σ^2, assunzione assai utile dato che le variabili casuali distribuite normalmente sono descritte in modo completo dalle sole funzioni media e varianza. Per la verifica di tale ipotesi si fa riferimento agli indici di simmetria e curtosi rispettivamente il momento $III°$ e $IV°$ della distribuzione marginale:

Momenti teorici	Momenti empirici
$A_r = E\left[\left(\frac{r-\mu_r}{\sigma_r}\right)^3\right]$	$\hat{A} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{r_t-\bar{r}}{s_r}\right)^3$
$C_r = E\left[\left(\frac{r-\mu_r}{\sigma_r}\right)^4\right]$	$\hat{C} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{r_t-\bar{r}}{s_r}\right)^4$

Per effettuare un test di normalità dei rendimenti si ricorre alla statistica-test proposta da *Jarque-Bera (1980)* basata sul calcolo della differenza fra valori di simmetria e curtosi della serie osservata ed i valori che si hanno per una distribuzione gaussiana: simmetria e curtosi rispettivamente pari a zero e a tre:

$$JB = \frac{T}{6}\left[A^2 + \frac{1}{4}(C-3)^2\right]$$

Sotto l'ipotesi nulla di normalità si dimostra essere asintoticamente distribuita come una variabile casuale χ_2^2. Se il valore osservato supera il valore teorico corrispondente al χ_2^2 per un prefissato livello di significatività, allora l'ipotesi di *gaussianità* è rifiutata. Si noti innanzitutto, che la procedura non è costruttiva, nel senso che una volta rifiutata l'ipotesi di normalità non fornisce indicazioni sul da farsi. Peraltro un risultato campionario che non consenta di rifiutare l'ipotesi di normalità, sostanzialmente non costituisce una conferma del tipo di distribuzione ,dal momento che si tratta comunque di un test relativo solamente a simmetria e curtosi della stessa. Un ulteriore strumento basato sulle caratteristiche della sequenza campionaria ordinata, per verificare la compatibilità dei dati osservati con una distribuzione di tipo normale è il grafico *Quantile-Quantile (fig. 1)* nel quale si riportano sull'asse delle ascisse i quantili calcolati sulla distribuzione empirica e sulle ordinate i quantili della distribuzione teorica da mettere a confronto. Quanto più la rappresentazione si discosta dalla bisettrice tanto maggiore è la deviazione della distribuzione osservata dalla teorica. Per calcolare il rischio e il rendimento di un portafoglio costituito da N titoli è necessario inoltre, fare riferimento alla distribuzione congiunta, associata ad uno stesso rendimento osservato in diversi istanti per analizzare la dipendenza nel tempo, si definiscono quindi le autocovarianze:

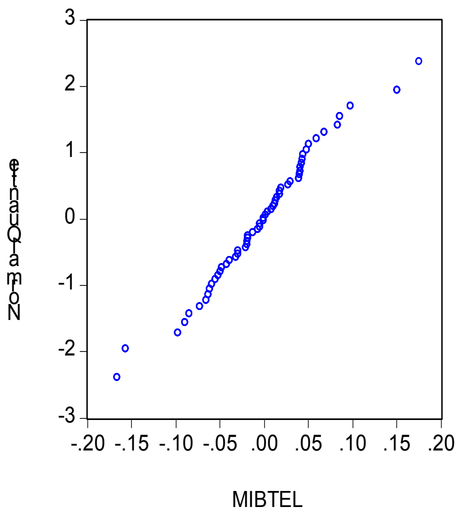


Figura 1:Q-Q plot riferito alla serie dei rendimenti mensili dell'indice Mibtel relativi al periodo gennaio '99-marzo '04

$$\gamma_r(h) = COV(r_t, r_{t-h}) = E[(r_t - \mu_r)(r_{t-h} - \mu_r)] = E(r_t r_{t-h}) - \mu_r^2 \rightarrow per\, h = 0,1,...$$

Per costruzione $\gamma_r(0) = \sigma_r^2$. Le autocovarianze dipendono dall'unità di misura del fenomeno analizzato; per questa ragione sono più utilizzate le autocorrelazioni definite da:

$$\rho_r(h) = CORR(r_t, r_{t-h}) = \frac{\gamma_r(h)}{\gamma_r(0)} = \frac{\gamma_r(h)}{\sigma_r^2} \qquad h = 0,1,K$$

Anche qui, si ha che $\rho_r(h)=1$. Un coefficiente di autocorrelazioni è sempre compreso fra *-1* e *+1*. I coefficienti di autocorrelazione vengono stimati sostituendo i momenti campionari a quelli teorici; la stima dell'autocovarianza di ritardo *h* è data da:

$$\hat{\gamma}_r(h)=\frac{1}{T-h}\sum_{t=h+1}^{T}(r_t-\bar{r})(r_{t-h}-\bar{r})$$

Si può dimostrare che per un portafoglio composto da N attività rischiose le espressioni del rendimento e della varianza *ex-ante* sono le seguenti:

$$E(r_p)=\mu_p=\sum_{i=1}^{N}\mu_i\omega_i \qquad VAR(r_p)=\sigma_p^2=\sum_{i=1}^{N}\omega_i^2\sigma_i^2+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\omega_i\omega_j\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}$$

dove ω_i è quantità di ricchezza investita nell'*i*-esimo titolo e ρ_{ij} è il coefficiente di correlazione tra il titolo *i*-esimo e il titolo *j*-esimo. E' importante sottolineare che i rendimenti e le varianze attese per i singoli titoli che compongono il portafoglio sono considerate variabili casuali, governate da una distribuzione di probabilità condizionata che tiene conto del legame esistente tra un titolo e la rimanente parte del mercato; quindi oltre al rendimento atteso e alla varianza di ciascun rendimento è importante analizzare la covarianza fra due rendimenti di indici i, j. E evidente che il rischio associato all'assunzione di un portafoglio composto da più titoli dipende anche dalla correlazione lineare esistente tra essi. Si riconosce che, se la correlazione è nulla la varianza del portafoglio è uguale alla media ponderata delle varianze dei singoli titoli, pesate dalla percentuale di ricchezza in essi investita. In pratica se non c'è alcuna correlazione tra i due titoli il rischio di assunzione di un portafoglio è analogo a quello che caratterizza i singoli titoli. Se la correlazione è positiva allora alla crescita del rendimento di un titolo corrisponde l'aumento del rendimento del secondo titolo, la variabilità del portafoglio, in questa situazione, è maggiore di quella che caratterizza ciascun titolo. Se la correlazione è negativa, la varianza del portafoglio risulta minore di quella di ciascun titolo. Si deduce che nel caso di andamenti contrapposti dei rendimenti dei titoli, il rischio di detenzione di un portafoglio si riduce.

1.2 IL PROBLEMA DELL'INVESTITORE

Al tempo *0* l'investitore decide come allocare la propria ricchezza *W* sino al tempo *1*; se riferite ad un investitore razionale, e in accordo con l'approccio *media-varianza*, si può ipotizzare che tali decisioni seguano la logica di massimizzare la ricchezza futura con il minimo rischio possibile, caratteristica questa che può essere riassunta analiticamente dalla *funzione di utilità attesa media-varianza*. Indichiamo la ricchezza al tempo *1*, grandezza incerta, come:

$$W_1 = W_0(1 + r_p)$$

W_0: *ricchezza al tempo 0,*

W_1: *ricchezza al tempo 1,*

r_p: *tasso di rendimento*

Essendo W_1 una quantità incerta si fa riferimento al suo valore atteso:

$$E[U(W_1)] = E(W_1) - \eta VAR(W_1) \rightarrow \textit{funzione di utilità attesa media - varianza}$$

$$\eta = \frac{\kappa}{W_0} \rightarrow \textit{coefficiente (positivo) di avversione al rischio}$$

L'utilità attesa è dunque una funzione crescente del valore atteso della ricchezza futura e decrescente della varianza della stessa. L'ipotesi di utilità attesa *M-V* vale se la funzione di utilità è quadratica, quindi sotto l'ipotesi poco plausibile di un'avversione assoluta al rischio crescente. *Chamberlain (1983)* ha dimostrato che l'analisi *M-V* è valida per qualsiasi *U(·)* qualora la distribuzione dei rendimenti sia di tipo ellittico; l'esperienza empirica evidenzia giust' appunto la normalità nella distribuzone dei rendimenti mensili dei titoli azionari, e la normale multivariata è un caso particolare di distribuzione ellittica.

1.3 IL MODELLO DI MARKOWITZ

Si massimizza la funzione di utilità attesa *M-V* rispetto ai pesi dei titoli:

$$\underset{\omega}{MAX}\{E[U(W_1)]\} = \underset{\omega}{MAX}\{E(r_p) - \kappa VAR(r_p)\}$$

ω_i: quota di ricchezza allocata nell' i-esima attività finanziaria.

La soluzione dipende dal parametro κ, soluzione che può essere ottenuta dall'ottimizzazione rispetto ad uno dei seguenti problemi:

$$\underset{\omega}{MAX}\left[E(r_p)\right] \ s.v. VAR(r_p) = \bar{\sigma}^2 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \textit{massimizzare il rendimento atteso} \\ \textit{fissato il livello di rischio} \end{array} \right.$$

$$\underset{\omega}{MIN}\left[VAR(r_p)\right] \ s.v. \ E(r_p) = \bar{\mu} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \textit{minimizzare il rischio per un dato} \\ \textit{livello di rendimento atteso} \end{array} \right.$$

Risolviamo il problema di minimo per determinare l'insieme dei portafogli appartenenti alla frontiera efficiente in presenza di soli titoli rischiosi e supponendo di investire tutta la ricchezza disponibile; in notazione matriciale:

$$\underset{\omega}{MIN}\left\{\sigma_p^2 = \omega'\Sigma\omega\right\} \ s.v. \ \begin{cases} \omega'\Sigma\omega = \sigma_p^2 \\ \omega'\iota = 1 \end{cases}$$

La cui soluzione è :

$$\omega_{**} = \lambda_{**}\Sigma^{-1}\mu + \gamma_{**}\Sigma^{-1}\iota$$

dove:

$$\lambda_{**} = \frac{c\mu_{p**} - b}{\delta} \qquad \gamma_{**} = \frac{a - b\mu_{p**}}{\delta} \qquad \delta = ac - b^2$$

$$a = \mu'\Sigma^{-1}\mu \qquad b = \mu'\Sigma^{-1}\iota \qquad c = \iota'\Sigma^{-1}\iota$$

Le coppie $\left(\sigma_{p**}, \mu_{p**}\right)$ dell'equazione di un'iperbole formano l'insieme dei portafogli efficienti:

$$\sigma_{p**} = \sqrt{\frac{c}{\delta}\mu^2_{p**} - 2\frac{b}{\delta}\mu_{p**} + \frac{a}{\delta}} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \textit{frontiera efficiente per portafogli} \\ \textit{senza titolo non rischioso} \end{array} \right.$$

Dal *Teorema di separazione di due fondi* possiamo scrivere un qualsiasi portafoglio efficiente come combinazione lineare convessa di due portafogli ottimali *E, V:*

$$\omega_{**} = \lambda_{**} b\omega_E + \gamma_{**} c\omega_V \rightarrow \iota'\omega_E = \iota'\omega_U = 1$$

Portafoglio E		***Portafoglio V***
$\mu_E = \dfrac{a}{b}$	*Rendimento atteso*	$\mu_V = \dfrac{b}{c}$
$\sigma_E = \dfrac{\sqrt{a}}{b}$	*Rischio*	$\sigma_V = \dfrac{1}{\sqrt{c}}$

Portafoglio sulla frontiera efficiente con il miglior *trade-off* rendimento-atteso/rischio:

$$MAX \frac{\omega'\mu}{\sqrt{\omega'\Sigma\omega}}$$

Portafoglio della frontiera efficiente con varianza minima:

$$\omega_V = \underset{\omega}{MIN}\{\omega'\Sigma\omega\} \ s.v. \ \omega'\iota$$

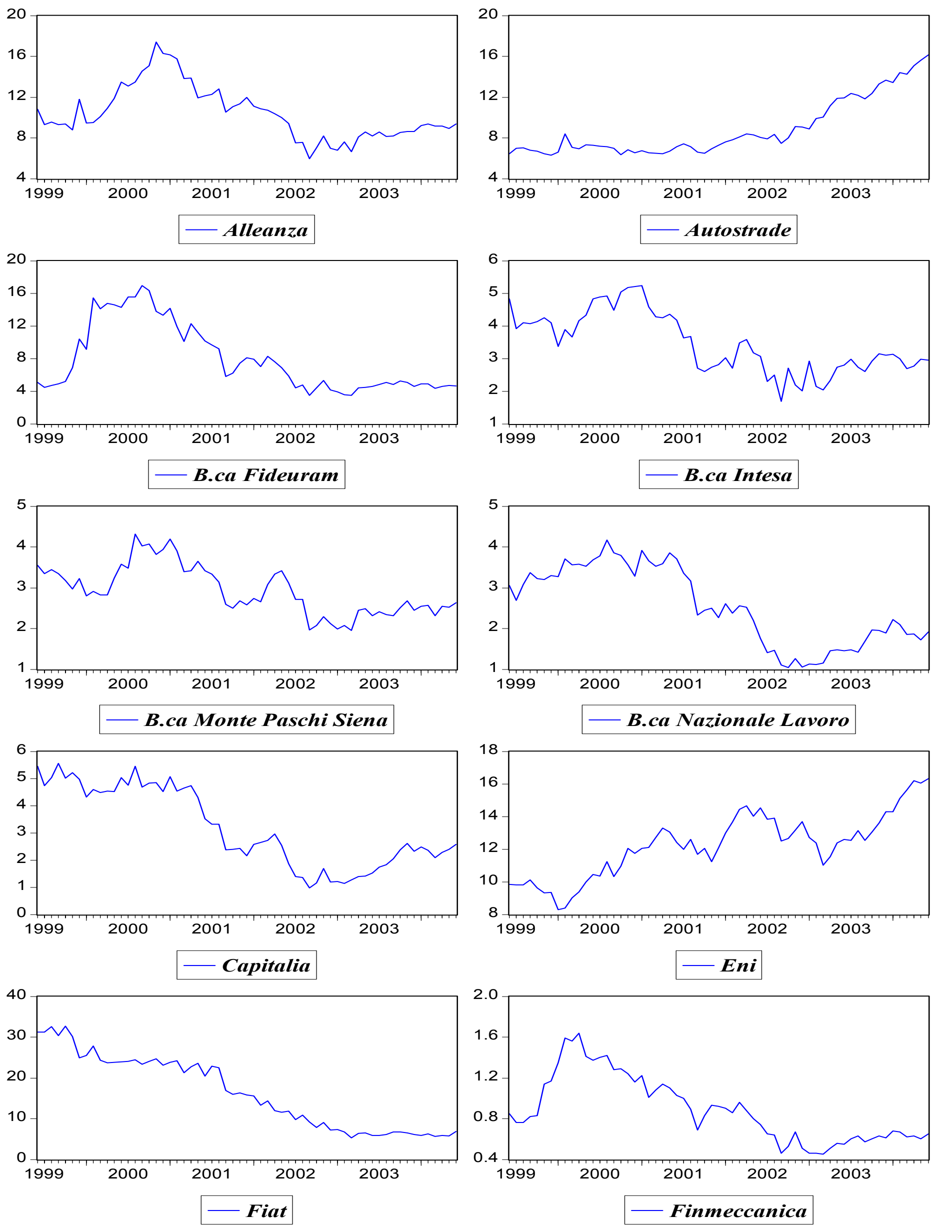
Tutti i portafogli sulla frontiera efficienti possono essere ottenuti dalla combinazione lineare di *E V*:

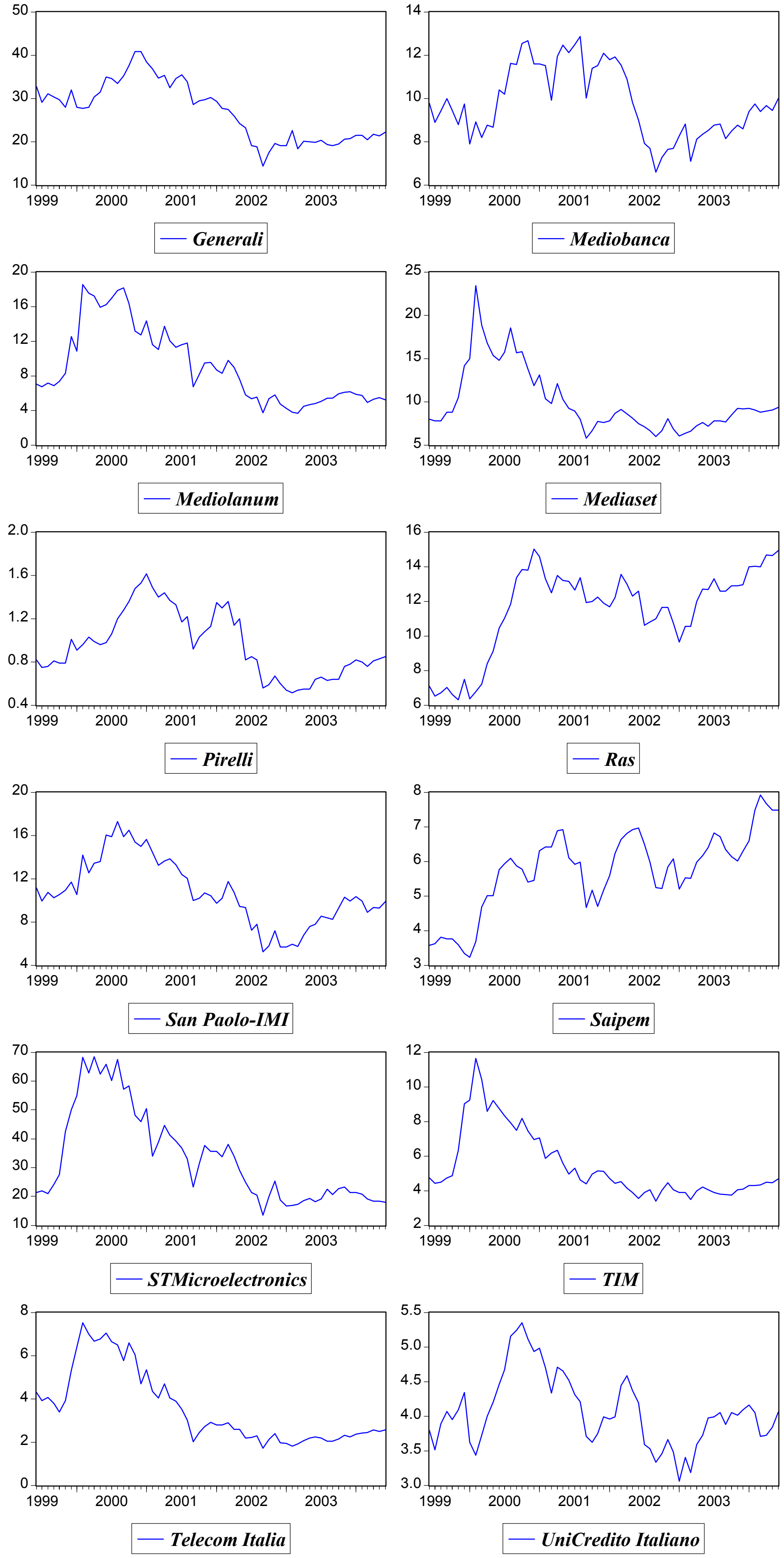
$$\omega_{**} = \gamma\omega_E + (1-\gamma)\omega_V \qquad \gamma = b\lambda_{**} = \frac{\mu_{p**} - \mu_V}{\mu_E - \mu_V}$$

γ può assumere un qualsiasi valore dipendendo dal vincolo arbitrario μ_{p**}

Calcolo della frontiera efficiente con titoli del Mib30.

I titoli sono: Alleanza ***(AL)***, Autostrade ***(AUTO)***, B.ca Fideuram ***(BFI)***, B.ca Intesa ***(BIN)***, Monte dei Paschi Siena ***(BMPS)***, Bnl ***(BNL)***, Capitalia ***(CPTA)***, Eni ***(ENI),*** Fiat ***(F),*** Finmeccanica ***(FNC),*** Generali ***(G),*** Mediaset ***(MS),*** Mediobanca ***(MB),*** Mediolanum ***(MED),*** Pirelli ***(PC),*** Ras ***(R),*** Saipem ***(SPM),*** San Paolo-Imi ***(SPI),*** Stmicroelectronix ***(STM),*** Telecom ***(TIT),*** Tim ***(TIM),*** Unicredit ***(UC).*** I prezzi fanno riferimento alle chiusure aggiustate per dividendi e split relative al primo giorno del mese, hanno cadenza mensile e fanno riferimento al quinquennio *Giugno 1999-Giugno 2004* (*fonti: www.yahoo.finance.it*, *Borsa Italiana SPA)*:




Generali
Mediobanca
Mediolanum
Mediaset
Pirelli
Ras
San Paolo-IMI
Saipem
STMicroelectronics
TIM
Telecom Italia
UniCredito Italiano

Il processo generatore dei prezzi, si caratterizza come somma di variabili casuali con media zero e varianza costante, con la peculiarità che ciascuna variazione di prezzo si mantiene intatta in tempi futuri (memoria lunga): si dice anche che la persistenza delle innovazioni nel processo è totale e che la somma di queste può essere vista come trend stocastico. Tale processo è detto *random walk*:

$$p_t = p_0 + \sum_{t=0}^{T-1} \varepsilon_{T-t}$$

Il processo appartiene alla categoria dei processi non stazionari in quanto i momenti della distribuzione ad esso sottostante dipendono dal tempo: in particolare un tale processo viene detto integrato di ordine 1. Per ovviare al problema della non stazionarietà dei prezzi si fa riferimento, come detto, alle serie storiche dei rendimenti azionari. La rappresentazione grafica nel piano Rischio-Rendimento:

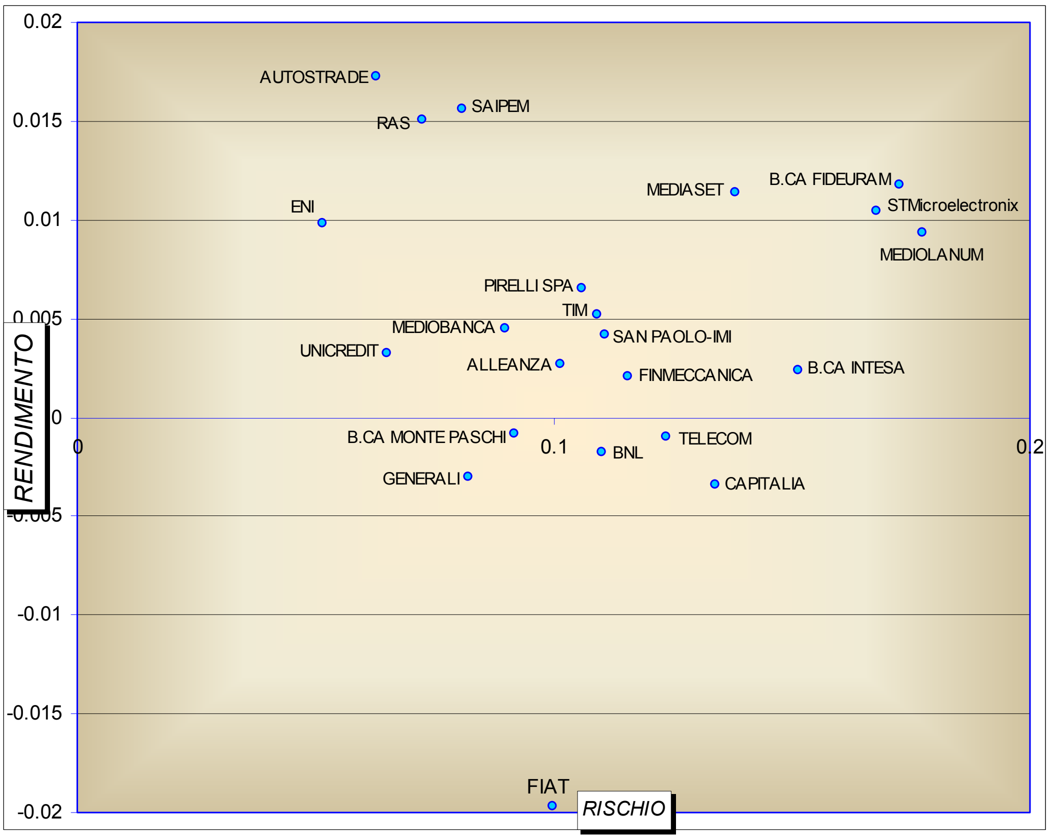


Figura 2: Piano rischio-rendimento

	R_AL	R_AUTO	R_BFI	R_BIN	R_BMPS	R_BNL	R_CPTA	R_ENI	R_F	R_FNC	R_G	R_MB	R_MED	R_MS	R_PC	R_R	R_SPI	R_SPM	R_STM	R_TIM	R_TIT	R_UC
R_AL	0.0101	0.0016	0.0097	0.0059	0.0054	0.0049	0.0062	0.0021	0.0031	0.0042	0.0071	0.0061	0.0093	0.0048	0.0054	0.0050	0.0068	0.0022	0.0059	0.0046	0.0059	0.0041
R_AUTO	0.2478	0.0039	0.0049	0.0020	0.0024	0.0026	0.0029	0.0004	0.0024	0.0027	0.0016	0.0017	0.0053	0.0045	0.0013	0.0003	0.0040	0.0009	0.0032	0.0021	0.0028	0.0004
R_BFI	0.5654	0.4608	0.0293	0.0119	0.0079	0.0103	0.0112	0.0012	0.0060	0.0134	0.0064	0.0082	0.0278	0.0189	0.0094	0.0062	0.0139	0.0035	0.0201	0.0131	0.0148	0.0051
R_BIN	0.3923	0.2141	0.4647	0.0225	0.0062	0.0065	0.0085	0.0021	0.0035	0.0060	0.0056	0.0062	0.0126	0.0043	0.0044	0.0033	0.0091	0.0009	0.0101	0.0037	0.0069	0.0030
R_BMPS	0.5935	0.4182	0.5075	0.4539	0.0083	0.0067	0.0076	0.0020	0.0043	0.0042	0.0041	0.0048	0.0077	0.0051	0.0047	0.0035	0.0071	0.0026	0.0058	0.0028	0.0045	0.0039
R_BNL	0.4438	0.3767	0.5517	0.3981	0.6785	0.0119	0.0112	0.0013	0.0060	0.0074	0.0035	0.0049	0.0094	0.0074	0.0059	0.0027	0.0083	0.0029	0.0084	0.0036	0.0067	0.0033
R_CPTA	0.4657	0.3508	0.4920	0.4277	0.6292	0.7734	0.0177	0.0024	0.0050	0.0093	0.0046	0.0053	0.0109	0.0090	0.0080	0.0030	0.0100	0.0038	0.0126	0.0039	0.0078	0.0041
R_ENI	0.4128	0.1256	0.1333	0.2735	0.4353	0.2277	0.3528	0.0026	0.0012	0.0010	0.0016	0.0022	0.0015	0.0009	0.0018	0.0012	0.0019	0.0023	0.0012	0.0003	0.0009	0.0016
R_F	0.3091	0.3901	0.3515	0.2379	0.4721	0.5557	0.3803	0.2306	0.0098	0.0043	0.0024	0.0036	0.0047	0.0033	0.0014	0.0011	0.0059	0.0016	0.0032	0.0015	0.0025	0.0017
R_FNC	0.3667	0.3788	0.6845	0.3463	0.4012	0.5875	0.6110	0.1757	0.3751	0.0132	0.0035	0.0037	0.0126	0.0109	0.0054	0.0018	0.0085	0.0028	0.0169	0.0076	0.0099	0.0028
R_G	0.8680	0.3098	0.4569	0.4595	0.5458	0.3947	0.4277	0.3923	0.2974	0.3756	0.0067	0.0051	0.0065	0.0029	0.0039	0.0035	0.0053	0.0016	0.0050	0.0031	0.0041	0.0032
R_MB	0.6793	0.2982	0.5372	0.4614	0.5915	0.5002	0.4443	0.4939	0.4117	0.3583	0.7006	0.0080	0.0087	0.0057	0.0041	0.0036	0.0063	0.0026	0.0055	0.0030	0.0049	0.0034
R_MED	0.5270	0.4825	0.9245	0.4752	0.4819	0.4887	0.4661	0.1684	0.2702	0.6245	0.4495	0.5522	0.0310	0.0196	0.0103	0.0056	0.0135	0.0041	0.0210	0.0134	0.0156	0.0044
R_MS	0.3498	0.5257	0.8069	0.2097	0.4102	0.4974	0.4935	0.1360	0.2401	0.6909	0.2565	0.4683	0.8133	0.0188	0.0068	0.0029	0.0097	0.0028	0.0165	0.0106	0.0127	0.0027
R_PC	0.5093	0.1927	0.5260	0.2761	0.4938	0.5180	0.5705	0.3287	0.1309	0.4487	0.4506	0.4333	0.5564	0.4721	0.0110	0.0028	0.0051	0.0026	0.0074	0.0047	0.0075	0.0028
R_R	0.6994	0.0589	0.5009	0.3099	0.5356	0.3436	0.3105	0.3338	0.1534	0.2131	0.5946	0.5661	0.4434	0.2992	0.3668	0.0051	0.0041	0.0019	0.0027	0.0014	0.0022	0.0033
R_SPI	0.6125	0.5848	0.7389	0.5511	0.7097	0.6956	0.6828	0.3374	0.5444	0.6768	0.5965	0.6421	0.6997	0.6427	0.4436	0.5217	0.0121	0.0031	0.0111	0.0055	0.0076	0.0038
R_SPM	0.2735	0.1775	0.2518	0.0727	0.3591	0.3328	0.3523	0.5553	0.1976	0.3071	0.2467	0.3684	0.2933	0.2536	0.3075	0.3256	0.3548	0.0064	0.0031	-0.0001	0.0023	0.0023
R_STM	0.3537	0.3128	0.7062	0.4030	0.3796	0.4600	0.5706	0.1427	0.1959	0.8868	0.3678	0.3699	0.7176	0.7223	0.4240	0.2238	0.6062	0.2294	0.0277	0.0118	0.0144	0.0037
R_TIM	0.4243	0.3071	0.7065	0.2263	0.2882	0.3036	0.2716	0.0603	0.1359	0.6148	0.3550	0.3154	0.7015	0.7167	0.4096	0.1799	0.4619	-0.0141	0.6577	0.0117	0.0098	0.0012
R_TIT	0.4803	0.3614	0.7048	0.3731	0.4026	0.4997	0.4795	0.1411	0.2046	0.7013	0.4139	0.4466	0.7232	0.7536	0.5845	0.2486	0.5663	0.2386	0.7074	0.7404	0.0151	0.0023
R_UC	0.6291	0.0877	0.4641	0.3063	0.6582	0.4726	0.4757	0.4868	0.2676	0.3717	0.5989	0.5936	0.3909	0.3057	0.4076	0.7130	0.5377	0.4403	0.3412	0.1708	0.2844	0.0042

Varianze	*Covarianze*	*Correlazioni*

Titolo	Rendimento	Rend. Annuo (%)	Rischio	Titolo	Rendimento	Rend. Annuo (%)	Rischio
AL	0.002679	3.2148	0.101411	**MB**	0.004468	5.3616	0.089945
AUTO	0.01726	20.712	0.062927	**MED**	0.009361	11.2332	0.177481
BFI	0.011811	14.1732	0.17258	**MS**	0.011362	13.6344	0.13816
BIN	0.002419	2.9028	0.151425	**PC**	0.006522	7.8264	0.105869
BMPS	-0.000802	-0.9624	0.091913	**R**	0.015046	18.0552	0.072362
BNL	-0.001781	-2.1372	0.110074	**SPI**	0.004193	5.0316	0.110894
CPTA	-0.003413	-4.0956	0.133989	**SPM**	0.015593	18.7116	0.080915
ENI	0.009786	11.7432	0.051421	**STM**	0.010417	12.5004	0.167779
F	-0.01972	-23.664	0.099811	**TIM**	0.005174	6.2088	0.109212
FNC	0.00208	2.496	0.115739	**TIT**	-0.000946	-1.1352	0.123772
G	-0.003016	-3.6192	0.082244	**UC**	0.003271	3.9252	0.065209

Tabella 1:Rendimento atteso percentuale annualizzato nell'ipotesi di rendimenti mensili attesi costanti

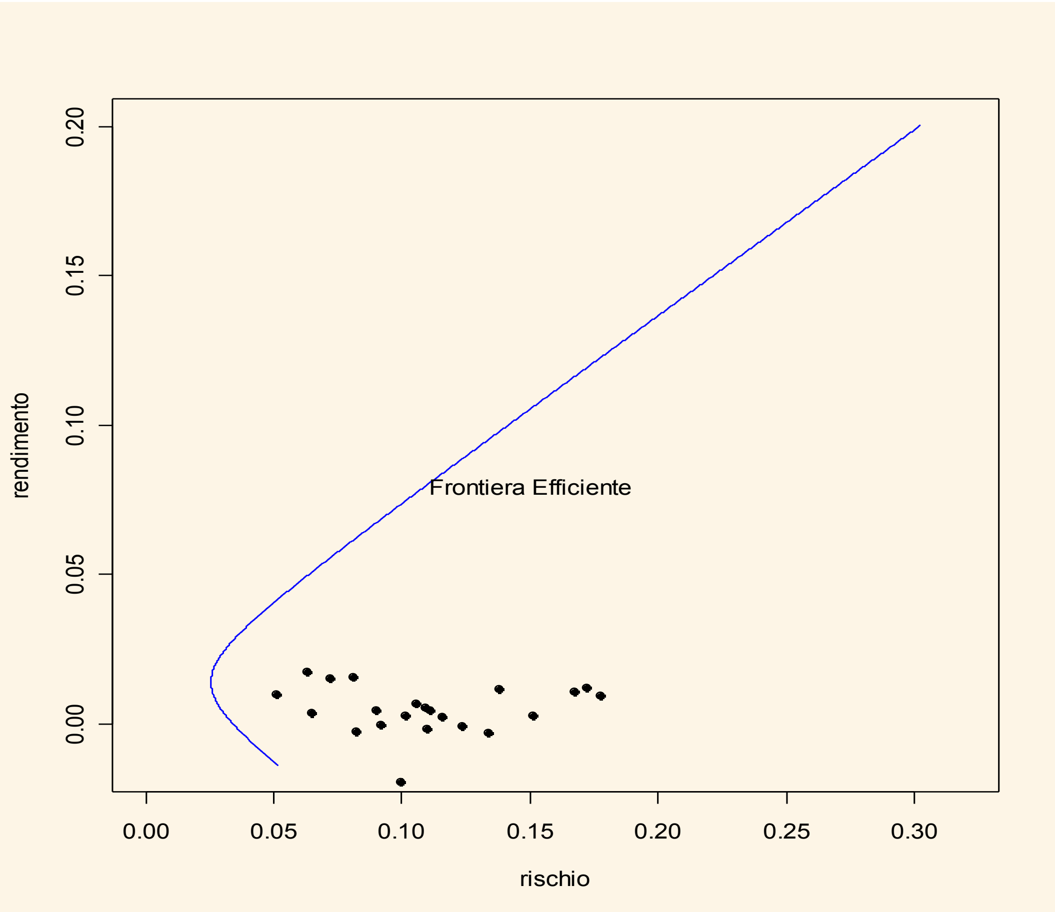


Figura 3: Frontiera efficiente senza titolo non rischioso

L'iperbole ottenuta rappresenta lo spazio contenente tutti i portafogli efficienti ottenibili dati i titoli prescelti.

Considerando, ora, la possibilità di investire una parte di ricchezza in un'attività finanziaria "priva" di rischio mantenendo la condizione di investire tutta la ricchezza disponibile:

$$\omega_0 = 1 - \sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1 - \omega'\iota \quad \begin{cases} \omega_0 : \textit{peso risk free,} \\ \omega_i : \textit{peso titolo rischioso} \\ N : \textit{numero attività finanziarie rischiose} \end{cases}$$

Il problema di ottimo è ora definito da.

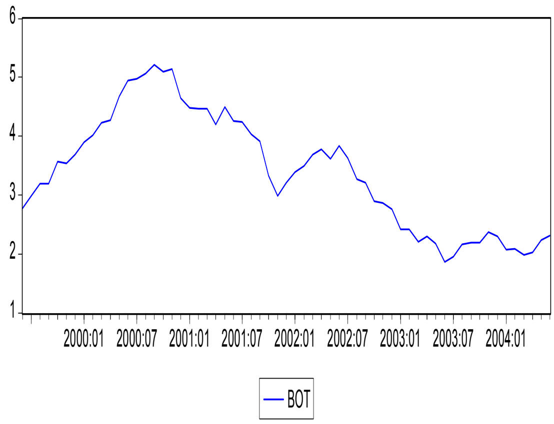
$$\underset{\omega}{MIN} = \left\{ \sigma_p^2 = \omega'\Sigma\omega \right\} \quad s.v. \quad \underbrace{\omega'(\mu - r_0\iota)}_{\substack{\textit{rendimenti medi} \\ \textit{netti dei titoli} \\ \textit{rischiosi}}} = \underbrace{\dot{\mu}_p - r_0}_{\substack{\textit{rendimento medio} \\ \textit{netto del} \\ \textit{portafoglio}}}$$

La frontiera efficiente con titolo rischioso *(CML)* è definita come:

$$\dot{\sigma}_p = \frac{\dot{\mu}_p - r_0}{\sqrt{a - 2br_0 + cr_0^2}} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{\sigma}_p : \textit{rischio del portafoglio efficiente} \\ \dot{\mu}_p : \textit{rendimento del portafoglio efficiente} \end{array} \right.$$

Frontiera efficiente con titolo non rischioso del portafoglio:

Si assume come attività finanziaria priva di rischio i Buoni Ordinari del Tesoro *(BOT)* annuali con riferimento al rendimento annuo semplice lordo *(Fonte: Banca d'Italia).*



In data 15 giugno 2004 tale rendimento è del 2.306 %

Nella *figura 4* sono evidenziati due particolari portafogli: *Rf* per il quale tutta la ricchezza viene investita nel titolo *risk free*, e *Pt* (portafoglio di tangenza) composto di soli titoli rischiosi; i portafogli situati sulla frontiera efficiente a sinistra di *Pm* investono una quota positiva della ricchezza iniziale, sia nel titolo rischioso sia in quello senza rischio; quelli a destra investono una quota negativa nell'attività *risk free* (si indebitano al tasso r_0) investendo in attività rischiosa tutta la ricchezza iniziale più la quota per cui si sono indebitati.

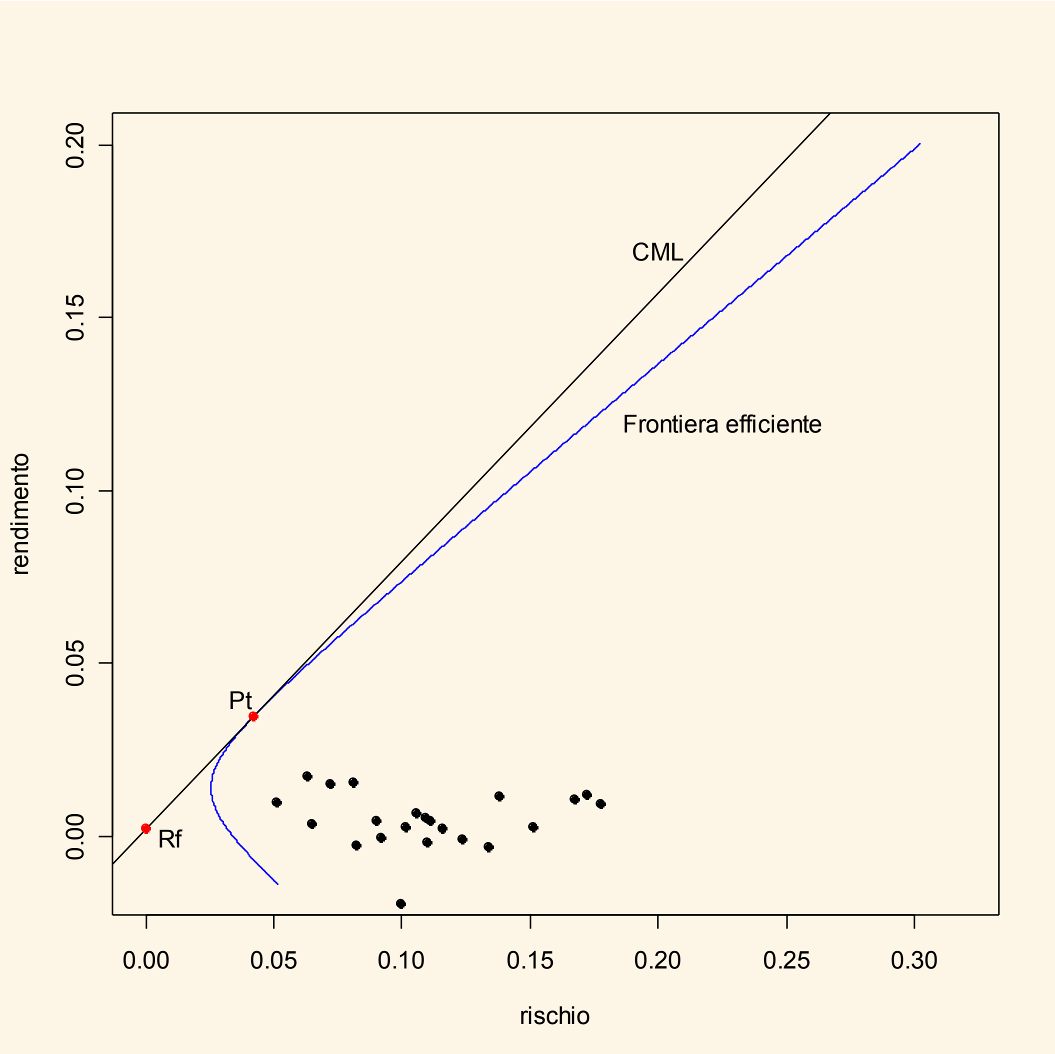


Figura 4: Frontiera efficiente con titolo non rischioso

Tutti i portafogli sulla *CML* hanno rendimento medio determinato come.

$$\dot{\mu}_p = r_0 + ps\,\dot{\sigma}_p$$

Questa relazione lineare definisce la pendenza della *Capital Market Line (CML)*, che va sotto il nome di *Performance di Sharpe (ps)*: misura il rapporto tra il maggior rendimento, e la maggior volatilità rispetto al titolo privo di rischio realizzato da un'attività finanziaria; analiticamente:

$$ps = \frac{\dot{\mu}_p - r_0}{\dot{\sigma}_p}$$

In particolare rendimento e rischio del portafoglio di tangenza possono essere scritti come.

$$\mu_t = \frac{a - br_0}{b - cr_0} \Rightarrow rendimento$$

$$\sigma_t = \frac{\sqrt{a - 2br_0 + cr_0^2}}{b - cr_0} \Rightarrow rischio$$

	PESI	***RENDIMENTO***	***RISCHIO***	***SHARPE***	***s.e. SHARPE***	***INT. CONF (α=0.5)***	
PORTF. MERCATO	**1.0000**	0.0342	0.0416	0.7821	0.2436	0.3045	1.2596
ALLEANZA	**0.1622**	0.0027	0.1014	0.0099	0.2132	-0.4080	0.4278
AUTOSTRADE	**0.8988**	0.0173	0.0629	0.2476	0.2164	-0.1766	0.6719
B.CA FIDEURAM	**0.0263**	0.0118	0.1726	0.0587	0.2134	-0.3595	0.4770
B.CA INTESA	**0.0844**	0.0024	0.1514	0.0049	0.2132	-0.4130	0.4228
B.CA MONTE PASCHI	**-0.3265**	-0.0008	0.0919	-0.0270	0.2132	-0.4449	0.3910
BNL	**0.1413**	-0.0018	0.1101	-0.0314	0.2133	-0.4494	0.3866
CAPITALIA	**-0.0914**	-0.0034	0.1340	-0.0380	0.2133	-0.4560	0.3800
ENI	**0.0529**	0.0098	0.0514	0.1577	0.2145	-0.2628	0.5782
FIAT	**-0.1443**	-0.0197	0.0998	-0.2144	0.2156	-0.6370	0.2083
FINMECCANICA	**-0.2168**	0.0021	0.1157	0.0035	0.2132	-0.4144	0.4214
GENERALI	**-0.6604**	-0.0030	0.0822	-0.0571	0.2134	-0.4753	0.3611
MEDIOBANCA	**0.2088**	0.0045	0.0899	0.0310	0.2133	-0.3869	0.4490
MEDIOLANUM	**-0.2772**	0.0094	0.1775	0.0433	0.2133	-0.3748	0.4614
MEDIASET	**-0.2169**	0.0114	0.1382	0.0701	0.2135	-0.3483	0.4885
PIRELLI SPA	**0.1724**	0.0065	0.1059	0.0458	0.2133	-0.3723	0.4639
RAS	**0.5362**	0.0150	0.0724	0.1847	0.2150	-0.2367	0.6062
SAN PAOLO-IMI	**-0.0757**	0.0042	0.1109	0.0227	0.2132	-0.3952	0.4406
SAIPEM	**0.1887**	0.0156	0.0809	0.1720	0.2148	-0.2490	0.5929
STMicroelectronix	**0.2941**	0.0104	0.1678	0.0521	0.2133	-0.3661	0.4702
TIM	**0.2887**	0.0052	0.1092	0.0320	0.2133	-0.3860	0.4500
TELECOM	**-0.1087**	-0.0009	0.1238	-0.0212	0.2132	-0.4391	0.3967
UNICREDIT	**0.0633**	0.0033	0.0652	0.0244	0.2132	-0.3935	0.4424

Tabella 2: Dati riassuntivi del portafoglio di tangenza di Markowitz

MODELLO BLACK&LITTERMANN

"I modelli quantitativi di allocazione delle risorse non giocano un ruolo importante nella gestione di portafoglio. Questo perché tali modelli sono di difficile utilizzo e portano a risultati poco "plausibili" (*F.Black, R. Littermann "Global Portfolio Optimization", Financial Analysts Journal, Settembre-Ottobre 1992)*. L'applicazione vista nel capitolo precedente non fa altro che avvalorare l' affermazione riportata: in special modo, con riferimento al portafoglio di tangenza ottenuto tramite l'approccio *media-varianza,* pochi investitori sarebbero persuasi dall'idea di investire un ammontare pari al 96.39% della propria ricchezza su un titolo e, contemporaneamente, vendere allo scoperto il 67.61% della stessa!

2.1. INTUIZIONI DEL MODELLO

Il modello *Black-Littermann* fa fronte al problema della poca plausibilità dei portafogli ottenuti con l'approccio media-varianza. Attraverso un approccio bayesiano, si combinano previsioni *(views)* sui rendimenti dei titoli del portafoglio del gestore, con le aspettative sugli stessi dedotte dall'equilibrio di mercato (distribuzione *ex-ante*) così da avere una nuova stima di tali rendimenti. Si ottiene così, un nuovo vettore dei rendimenti attesi (distribuzione *ex-post*) frutto dei due precedenti. Il risultato è quello di ottenere un portafoglio equilibrato, efficiente secondo il paradigma media-varianza, e basato sulle percezioni dell'investitore. Come verrà in seguito confermato anche da *Lee (2000)* il modello *B-L* permette di risolvere il problema di stima di massimizzazione degli errori "spalmando" gli errori su tutto il vettore dei rendimenti attesi.

L'oggetto principale dell' approccio *media-varianza* è, come detto in precedenza, il vettore dei rendimenti attesi; *Best e Grauer (1991)* hanno dimostrato come, anche una piccola variazione in un solo rendimento medio di un qualsiasi titolo del portafoglio modifica gran parte dei pesi dei restanti. *Black e Littermann (1992)* e successivamente *Lee e Littermann (1999)* cercano un ragionevole punto di partenza alternativo, per eludere tale problema: rendimenti storici, rendimenti medi uguali per tutti i titoli con o senza rettifiche del rischio portano tutti a portafogli estremi caratterizzati da forti posizioni, sia "lunghe" che "corte", concentrate in un numero ristretto di titoli, e tutti gli altri con pesi pressoché nulli.

Il modello B-L assume i rendimenti di "equilibrio" come punto di partenza. Tali rendimenti possono essere calcolati sia tramite il *CAPM (Capital Asset Pricing Model)*, sia tramite il processo di ottimizzazione *media-varianza* inverso: ottenendo un vettore di rendimenti attesi di equilibrio impliciti:

$$\Pi = \delta\Sigma\omega \Rightarrow \begin{cases} \omega : \textit{vettore dei pesi di capitalizzazione del mercato,} \\ \Sigma : \textit{matrice di covarianza fissata,} \\ \delta : \textit{coefficiente di avversione al rischio.} \end{cases}$$

Il coefficiente di avversione al rischio rappresenta la tolleranza media al rischio di tutti gli investitori. Sia *Both Satchell e Scowcroft (2000)* che *Best e Grauer (1985)* lo definiscono come il rapporto tra il premio al rischio di mercato e il rischio :

$$\delta = \frac{r_m - r_f}{\sigma_m^2}$$

Se il portafoglio ottenuto *via* le previsioni dei rendimenti dati dal *CAPM*, è ben diversificato il metodo di deduzione dei rendimenti attesi impliciti fornisce un vettore dei rendimenti attesi simile a quello che ha origine dal *CAPM*. La letteratura relativa al modello *B-L* si concentra su gestioni di portafogli globali; qui se ne presenta un'applicazione con i titoli trattati in precedenza.

2.2 FATTORI CHE SPIEGANO IL RISCHIO E IL RENDIMENTO

In *"The Risk and return from factors" Chan, Karceski e Lakonishok (1998)* hanno verificato l'efficacia di alcuni fattori, in termini di capacità nel evidenziare andamenti simili nei rendimenti dei titoli. Nel lavoro gli autori prendono in considerazioni tutti i più importanti fattori suggeriti dalla letteratura, considerando non tanto i rendimenti attesi bensì concentrandosi, sulle covarianza dei rendimenti; lo studio ha suddiviso i fattori in cinque aree caratteristiche:

- *I Fondamentali:* Valori contabili, liquidità, dividendi, utili, capitalizzazione di mercato;
- *Fattori tecnici:* ispirati dal fatto che i rendimenti passati aiutano a predire i futuri, nello specifico: *R(-7,-1)* rendimenti azionari nei sette mesi precedenti al periodo campionario, *R(-60,-12)* per catturare la performance di lungo periodo e *R(-1,09)* per il mese immediatamente precedente al campione di riferimento;
- *Fattori macroeconomici*: tasso di crescita della produzione industriale, *default premium* misurato come la differenza tra il più alto rendimento mensile di un indice obbligazionario e la resa di un titolo di stato a lungo termine, tasso d'interesse reale, *maturity premium* cioè la differenza tra i rendimenti dei titoli di stato a lungo contro quelli ad un mese, *slope* ovvero la differenza tra rendimenti obbligazionari governativi a lunga scadenza e tasso dei *Treasury Bills*, la variazione mensile dell'inflazione attesa;

- *Fattori statistici*: *factor scores* basati su tutti i possibili rendimenti azionari con più di sessanta osservazioni precedenti al periodo campionario;
- *Fattori di mercato*: il *Capital Asset Pricing Model* in cui il fattore è il rendimento del portafoglio di mercato in due diverse accezioni: i rendimenti sui pesi di un portafoglio *benchmark* di riferimento, i rendimenti del portafoglio di mercato.

Chan, Karceski e Lakonishok hanno verificato la capacità dei fattori sopraindicati nello spiegare movimenti simili di rendimenti azionari per il mercato nipponico, statunitense e britannico. L'evoluzione dell'approccio *media-varianza* sviluppata da *Black&Litterman* prende in considerazione i fattori di mercato come punto di partenza per il modello finale.

2.3 CAPITAL ASSET PRICING MODEL

Una prima rivisitazione all'approccio *media-varianza*, propone di utilizzare le stime dei *beta (market factor)* per ottenere i rendimenti attesi medi dei titoli *(Single Index Model).* Il *CAPM* studia la relazione tra redditività e rischiosità di tutti i titoli finanziari sotto l'ipotesi di equilibrio fra domanda ed offerta aggregate; misurando l'esposizione al rischio non diversificabile (sistematico) di un titolo attraverso il suo *beta (β):* un parametro collegato alla covarianza fra il rendimento del titolo e quello di mercato

$$\mu_i = \beta_i \mu_M \quad \textit{dove} \quad \beta_i = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} \quad \textit{Security Market Line}$$

Per la stima del parametro che influenza l'extrarendimento del titolo si regredisce l'extrarendimento del titolo stesso su una costante e sull' extrarendimento del *(proxy)* portafoglio di mercato, secondo un *MRLS:*

$$(r_i - r_{rf}) = \alpha + \beta(r_{mercato} - r_{rf}) + u$$

Dove il parametro α è chiamato *alpha di Jensen* e rappresenta una stima della remunerazione attesa del titolo non giustificata dalla sua esposizione al rischio di mercato:

- $\hat{\alpha} = 0 \Rightarrow$ il titolo non presenta un eccesso di rendimento medio netto rispetto al *benchmark*
- $0 < \hat{\beta} < 1 \Rightarrow$ titolo ciclico e difensivo
- R^2: stima percentuale di rischio sistematico sul rischio complessivo del titolo

La bontà delle stime del modello è dovuta al fatto che si è assunta l'ipotesi che gli extrarendimenti siano *IID*, la violazione dell'ipotesi può essere testata attraverso l'analisi dei residui e test di instabilità dei parametri nel periodo campionario.

Capital Asset Pricing Mode applicato al portafoglio titoli:

Si assume come rendimento medio di mercato *(r_m)* la media degli storici di una sua *proxy,* in questo caso l'indice *Mibtel* nel periodo *Giugno 1999-Giugno 2005*, e come rendimento dell' attività priva di rischio *(r_f)* la sua ultima osservazione, per tanto quella di Giugno 2004, il premio al rischio *(r_m-r_f)* risulta essere pari al *2.52%.* Si eseguono le regressioni per determinarne i parametri di interesse. Prima di proseguire nella determinazione del nuovo vettore dei rendimenti sono stati effettuati *test* per la verifica di indipendenza e identica distribuzione degli *extra-rendimenti* attraverso l'analisi dei residui la stabilità dei parametri e di forma funzionale nel periodo campionario.

Si è provata la normalità dei residui con il test congiunto *Jarque-Brera;* la non correlazione e l'indipendenza degli stessi con il test *Ljung-Box* e *di Breusch-Godfre;* per l'omoschedasticità si è fatto ricorso all' *Arch Test* e al *Test di White;* la forma funzionale è stata verificata per mezzo del *Test Reset,* infine, la stabilità dei parametri è stata studiata con il *Chow*

Breakponit Test, Chow Forecast Test e con i *Minimi quadrati ricorsivi*. Sono riportati di seguito i dettagli delle regressioni:

	Parametri	*Coefficient*	*Std.error*	*t-Statistic*	*Prob.*	*R-squared*	*std.dev. resid*
ALLEANZA	Alpha	0.0034	0.0100	0.3429	0.7329	0.4320	0.0764
	Beta	1.0814	0.1628	6.6420	0.0000		
AUTOSTRADE	Alpha	0.0163	0.0068	2.4010	0.0196	0.3171	0.0522
	Beta	0.5767	0.1111	5.1893	0.0000		
B.CA FIDEURAM	Alpha	0.0171	0.0106	1.6189	0.1109	0.7788	0.0812
	Beta	2.4716	0.1730	14.2882	0.0000		
B.CA INTESA	Alpha	0.0035	0.0173	0.2025	0.8402	0.2328	0.1327
	Beta	1.1860	0.2827	4.1956	0.0001		
B.CA MONTE PASCHI	Alpha	-0.0004	0.0090	-0.0436	0.9653	0.4329	0.0692
	Beta	0.9812	0.1475	6.6539	0.0000		
BNL	Alpha	-0.0007	0.0107	-0.0636	0.9495	0.4434	0.0822
	Beta	1.1906	0.1752	6.7971	0.0000		
CAPITALIA	Alpha	-0.0017	0.0136	-0.1271	0.8993	0.3945	0.1044
	Beta	1.3672	0.2224	6.1475	0.0000		
ENI	Alpha	0.0080	0.0062	1.2824	0.2048	0.1381	0.0477
	Beta	0.3098	0.1016	3.0490	0.0035		
FIAT	Alpha	-0.0203	0.0118	-1.7215	0.0905	0.1822	0.0903
	Beta	0.6914	0.1924	3.5944	0.0007		
FINMECCANICA	Alpha	0.0040	0.0097	0.4121	0.6818	0.5867	0.0745
	Beta	1.4398	0.1587	9.0732	0.0000		
GENERALI	Alpha	-0.0032	0.0085	-0.3721	0.7111	0.3692	0.0653
	Beta	0.8109	0.1392	5.8258	0.0000		
MEDIOBANCA	Alpha	0.0049	0.0087	0.5565	0.5800	0.4465	0.0669
	Beta	0.9752	0.1426	6.8403	0.0000		
MEDIOLANUM	Alpha	0.0147	0.0119	1.2300	0.2236	0.7342	0.0915
	Beta	2.4682	0.1950	12.6582	0.0000		
MEDIASET	Alpha	0.0149	0.0094	1.5812	0.1193	0.7286	0.0720
	Beta	1.9151	0.1535	12.4775	0.0000		
PIRELLI SPA	Alpha	0.0071	0.0111	0.6347	0.5281	0.3519	0.0853
	Beta	1.0191	0.1816	5.6115	0.0000		
RAS	Alpha	0.0141	0.0082	1.7198	0.0908	0.2414	0.0629
	Beta	0.5761	0.1341	4.2962	0.0001		
SAN PAOLO-IMI	Alpha	0.0063	0.0080	0.7935	0.4307	0.6967	0.0611
	Beta	1.5029	0.1302	11.5427	0.0000		
SAIPEM	Alpha	0.0142	0.0100	1.4219	0.1604	0.1068	0.0765
	Beta	0.4290	0.1629	2.6340	0.0108		
STMicroelectronix	Alpha	0.0143	0.0147	0.9708	0.3357	0.5500	0.1126
	Beta	2.0197	0.2399	8.4191	0.0000		
TIM	Alpha	0.0068	0.0091	0.7475	0.4578	0.5886	0.0701
	Beta	1.3608	0.1494	9.1088	0.0000		
TELECOM	Alpha	0.0016	0.0095	0.1683	0.8669	0.6554	0.0727
	Beta	1.6275	0.1550	10.5022	0.0000		
UNICREDIT	Alpha	0.0023	0.0072	0.3187	0.7511	0.2825	0.0553
	Beta	0.5626	0.1177	4.7792	0.0000		

Tabella 3: Parametri delle regressioni

Si è determinato il nuovo vettore dei rendimenti, e su questo si è ottenuto un nuovo portafoglio efficiente di tangenza.

TITOLO	STORICO	CAPM
ALLEANZA	3.21	34.98
AUTOSTRADE	20.71	19.73
B.ca FIDEURAM	14.17	76.97
B.ca INTESA	2.90	38.13
MONTE PASCHI	-0.96	31.95
BNL	-2.13	38.27
CAPITALIA	-4.09	43.61
ENI	11.74	11.67
FIAT	-23.66	23.19
FINMECCANICA	2.49	45.80
GENERALI	-3.61	26.80
MEDIOBANCA	5.36	31.77
MEDIOLANUM	11.23	76.87
MEDIASET	13.63	60.16
PIRELLI SPA	7.82	33.09
RAS	18.05	19.71
SAN PAOLO-IMI	5.03	47.71
SAIPEM	18.71	15.27
STMicroelectronix	12.50	63.32
TIM	6.20	43.42
TELECOM	-1.13	51.47
UNICREDIT	3.92	19.30

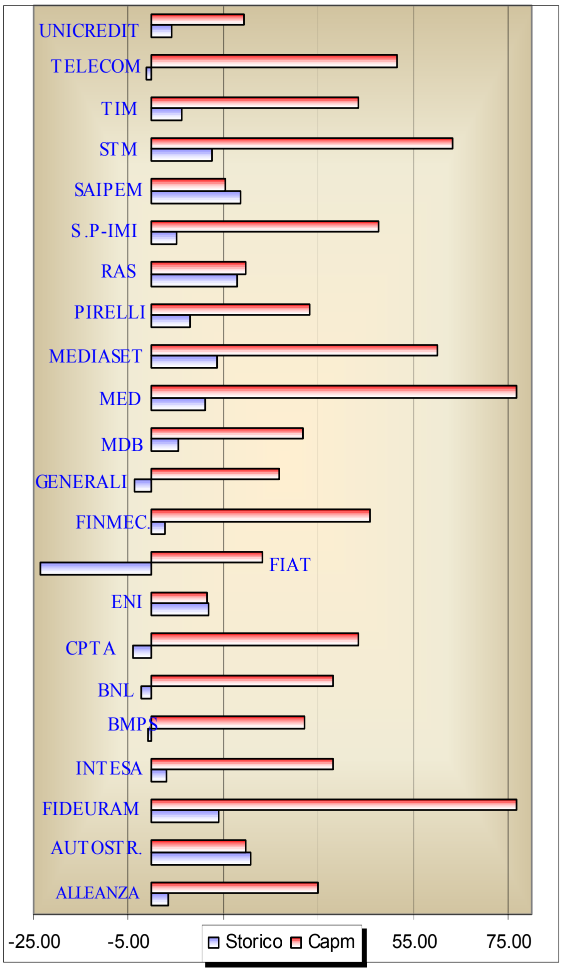


Figura 6: Rendimenti annui medi a confronto (valori in percentuale)

Dalla rappresentazione grafica si vede chiaramente che si paga uno scotto per un portafoglio più "plausibile", in termini di rendimento rischio e *Performance di Sharpe.* Questo ha però consentito di ottenere un portafoglio di tangenza con le posizioni corte che passano da otto a sei, ma soprattutto una variabilità di molto inferiore: la *std. Deviation* passa dal *32%* al *6.08%,* la massima esposizione lunga passa da *89.88%* a *20.70%,* la *short position* più rilevante è ora pari a *3.37%* a fronte della precedente che era del *66.04%.*

Nella *figura 7,* relativa ai portafogli di tangenza, in nero sono rappresentati i nuovi rendimenti ottenuti dal *Capital Asset Pricing Model.*

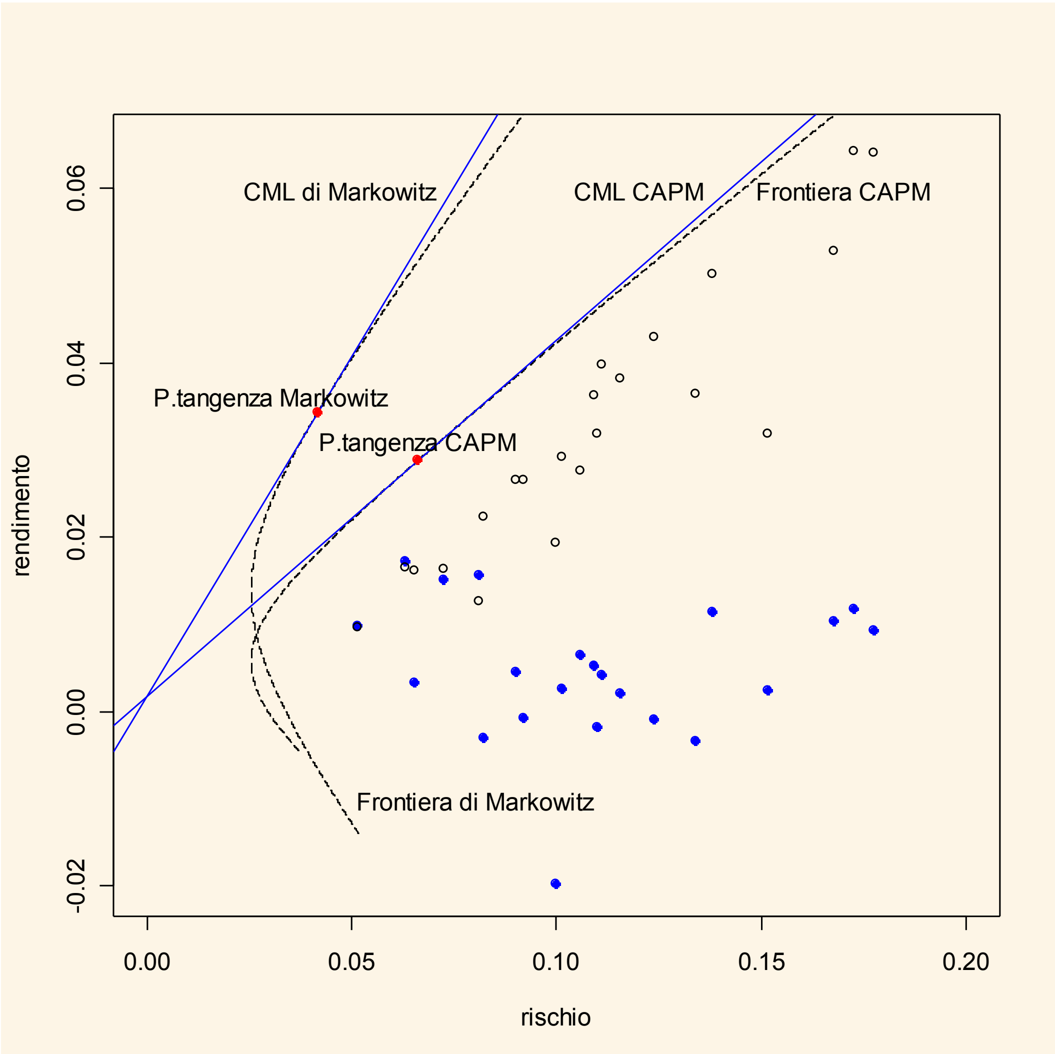


Figura 5: Frontiere efficienti, Capital Market Line e Portafogli di Tangenza

TITOLO	STORICO	CAPM
ALLEANZA	16.22	-3.37
AUTOSTRADE	89.88	10.90
B.ca FIDEURAM	2.63	6.01
B.ca INTESA	8.44	1.91
MONTE PASCHI	-32.65	2.69
BNL	14.13	6.01
CAPITALIA	-9.14	-0.13
ENI	5.29	20.70
FIAT	-14.43	1.28
FINMECCANICA	-21.68	6.43
GENERALI	-66.04	9.82
MEDIOBANCA	20.88	1.36
MEDIOLANUM	-27.72	-0.03
MEDIASET	-21.69	11.48
PIRELLI SPA	17.24	-1.05
RAS	53.62	6.47
SAN PAOLO-IMI	-7.57	2.03
SAIPEM	18.87	-2.90
STMicroelectronix	29.41	-3.16
TIM	28.87	14.09
TELECOM	-10.87	6.48
UNICREDIT	6.33	2.99
SOMMA	100.00	100.00
Std. DEVIATION	32.00	6.08
HIGH	89.88	20.70
LOW	-66.04	-3.37

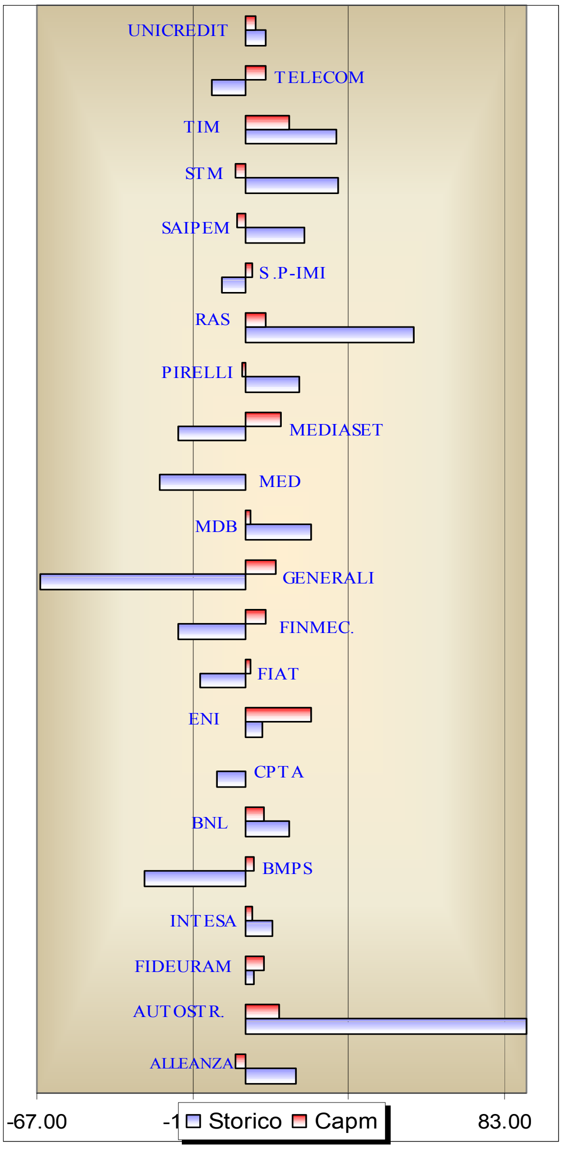


Figura 7: Pesi a confronto (valori in percentuale)

2.4 RENDIMENTI IMPLICITI DI EQUILIBRIO

Il vettore dei rendimenti impliciti di mercato, come detto, si ottiene dal prodotto di un coefficiente di avversione al rischio, una matrice di covarianza fissata e il vettore dei pesi di capitalizzazione di mercato:

$$\Pi = \delta\Sigma\omega \Rightarrow \begin{cases} \omega : \textit{vettore dei pesi di capitalizzazione del mercato,} \\ \Sigma : \textit{matrice di covarianza fissata,} \\ \delta : \textit{coefficiente di avversione al rischio.} \end{cases}$$

La determinazione di tali rendimenti segue l'assioma per cui "*il portafoglio efficiente è dedotto dal mercato*". Quindi i rendimenti attesi si possono dedurre dal processo inverso di ottimizzazione *media-varianza*. I pesi efficienti sono determinati come il rapporto tra:

$$\omega_{EFF} = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r_0\iota)}{\iota'\Sigma^{-1}(\mu - r_0\iota)} \quad \textit{dove} \quad (\mu - r_0\iota) = \textit{extrarendimento atteso}$$

Sostituendola l'espressione dei pesi efficienti nella precedente, si può determinare il coefficiente di avversione al rischio come:

$$\delta = \left[\Sigma \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r_0\iota)}{\iota'\Sigma^{-1}(\mu - r_0\iota)} \right]' \mu$$

Avendo specificato così tutte le quantità dell'espressione possiamo determinare il vettore degli extrarendimenti impliciti di equilibrio per i quali il portafoglio efficiente di tangenza è uguale a quello di capitalizzazione.

<u>*Rendimenti impliciti di equilibrio del portafoglio*</u>

I pesi di capitalizzazione del mercato sono stati determinati in modo proporzionale agli ufficiali *(Borsa Italiana Spa)* del *MIB30* (il portafoglio analizzato ne è un sottoinsieme). I rendimenti impliciti così ottenuti evidenziano una variabilità molto bassa; si osserva, inoltre, l'altissima correlazione tra il vettore dei rendimenti ***Π*** e quello del *CAPM*,di molto inferiore quella tra i rendimenti impliciti e gli storici.

TITOLO	*STOR*	*CAPM*	*Π*	*TITOLO*	*STOR*	*CAPM*	*Π*
ALLEANZA	3.21	34.98	2.01344	*MEDIASET*	13.63	60.16	2.01365
AUTO	20.71	19.73	2.01311	*PIRELLI*	7.83	33.09	2.01338
FIDEURAM	14.17	76.97	2.01394	*RAS*	18.06	19.71	2.01318
INTESA	2.90	38.13	2.01353	*S P-IMI*	5.03	47.71	2.01357
BMPS	-0.96	31.95	2.01336	*SAIPEM*	18.71	15.27	2.01313
BNL	-2.14	38.27	2.01341	*STM*	12.50	63.32	2.01384
CAPITALIA	-4.10	43.61	2.01355	*TIM*	6.21	43.42	2.01346
ENI	11.74	11.67	2.01308	*TELECOM*	-1.14	51.47	2.01362
FIAT	-23.66	23.19	2.01319	*UC*	3.93	19.30	2.01319
FNM	2.50	45.80	2.01354	*MEDIA*	5.55	38.78	2.01345
GENERALI	-3.62	26.80	2.01332	*Std. Dev*	9.82	18.55	0.00026
MDB	5.36	31.77	2.01336	*HIGH*	20.71	76.97	2.01396
MED	11.23	76.87	2.01396	*LOW*	-23.66	11.67	2.01308
CORRELAZONE (Π, CAPM)=0.986957419							
CORRELAZIONE (Π, STORICI)=0.007435931							

Tabella 4: Rendimenti medi annui a confronto (valori in percentuale)

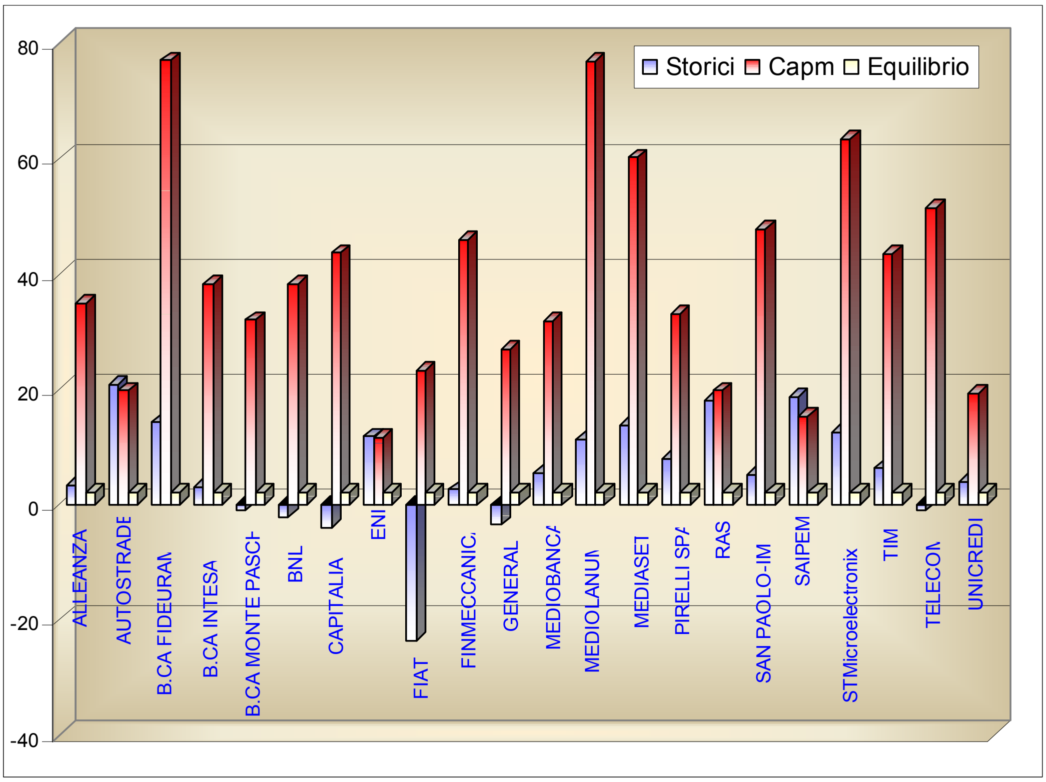


Figura 6: Rendimenti medi annui a confronto

Costruiamo, dal vettore dei rendimenti impliciti, il nuovo vettore dei pesi sempre con l'approccio *media-varianza* determinando Frontiera Efficiente *Capital Market Line* e portafoglio efficiente di tangenza e confrontiamolo con i precedenti, banalmente il vettore dei pesi efficienti del portafoglio di tangenza così ottenuto risulta uguale, per costruzione, ai pesi di capitalizzazione

Il vettore dei pesi di mercato presenta una situazione differente dalla precedente, innanzitutto il vettore dei pesi del portafoglio efficiente di mercato ottenuto partendo dai pesi di capitalizzazione ha varianza simile a quella riferita al *CAPM*, ha solo posizioni lunghe, seppur alto il coefficiente di correlazione passa da *98.69%* a *71.36%* tra rendimenti impliciti e *Capital Asset Pricing Model*, e da *0.74%* a *-4.03%* con gli storici.. L'adozione di tale strategia, cioè la replica dell' indice, prende il nome di gestione passiva di portafoglio.

TITOLO	STOR	CAPM	Π	TITOLO	STOR	CAPM	Π
ALLEANZA	16.22	-3.37	2.49	***MEDIASET***	-21.69	11.48	3.39
AUTO	89.88	10.90	2.71	***PIRELLI***	17.24	-1.05	0.86
FIDEURAM	2.63	6.01	1.43	***RAS***	53.62	6.47	3.19
INTESA	8.44	1.91	4.86	***S P-IMI***	-7.57	2.03	4.39
BMPS	-32.65	2.69	1.92	***SAIPEM***	18.87	-2.90	1.09
BNL	14.13	6.01	1.31	***STM***	29.41	-3.16	5.22
CAPITALIA	-9.14	-0.13	1.59	***TIM***	28.87	14.09	12.2
ENI	5.29	20.70	21.54	***TELECOM***	-10.87	6.48	8.49
FIAT	-14.43	1.28	1.4	***UC***	6.33	2.99	7.87
FNM	-21.68	6.43	1.73	***SOMMA***	100.00	100.00	100
GENERALI	-66.04	9.82	8.74	***Std. Dev***	32.00	6.08	4.87
MDB	20.88	1.36	2.39	***HIGH***	89.88	20.70	21.54
MED	-27.72	-0.03	1.18	***LOW***	-66.04	-3.37	0.86
CORRELAZONE (Π, CAPM)=0.713629975							
CORRELAZIONE (Π, STORICI)=-0.038227256							

Tabella 5: Pesi a confronto (valori in percentuale)

Il vettore dei rendimenti impliciti di equilibrio è il punto di partenza per il modello *Black-Littermann*, quello in cui da parte dell'investitore o gestore del portafoglio non v'è alcuna idea sui scenari futuri in termini assoluti e relativi, rispetto alle singole attività finanziarie in questione.

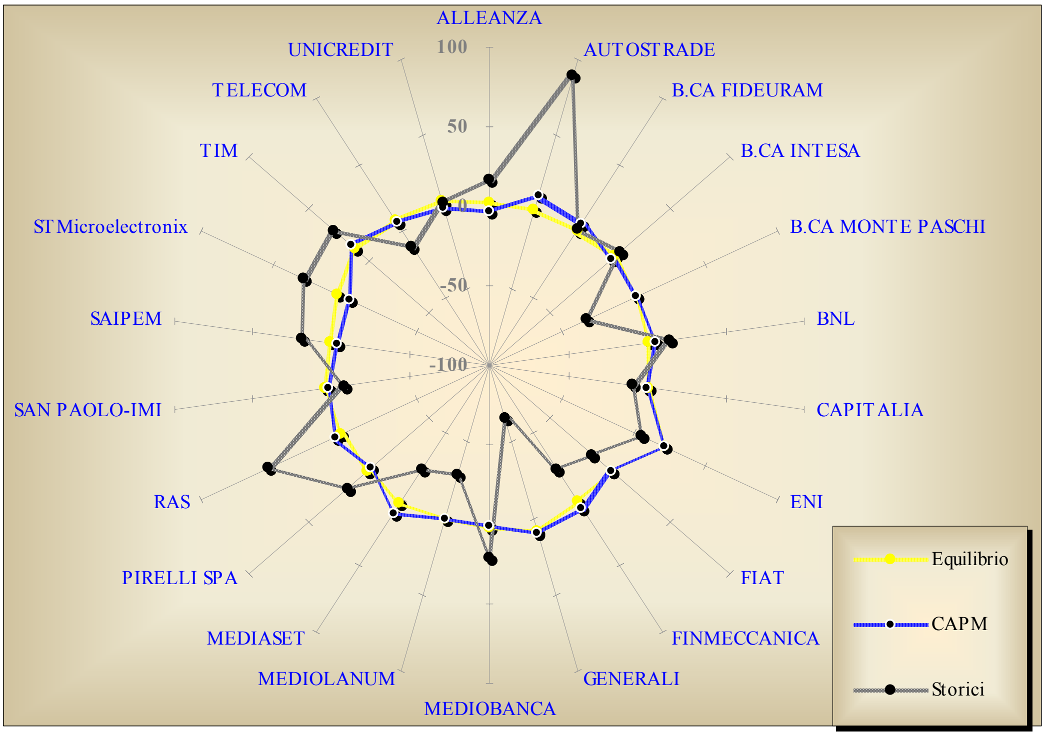


Figura 7: Pesi dei tre portafogli a confronto

2.5 BASI DEL MODELLO BLACK-LITTERMANN

Le intuizioni su cui si basa il modello sono essenzialmente tre:

- Ci sono due fonti di informazione distinte per i rendimenti futuri: l'equilibrio di mercato e le *views* degli investitori,
- Si assumono tali fonti come aleatorie quindi descrivibili mediante distribuzione di probabilità,
- Si scelgono rendimenti attesi coerenti con le fonti.

Conseguenza importante di tali intuizioni è quella per cui una *view* che coinvolga solo alcuni degli *assets* di un generico portafoglio ha conseguenze anche sui rimanenti titoli.

Per verificarlo ipotizziamo di conoscere l'esatta struttura di un mercato composto da tre attività finanziarie A, B e C; delle quali si conosce il processo generatore dei rendimenti attesi dato da un premio al rischio di equilibrio un fattore comune e un errore indipendente tra i tre *assets*:

$$\left.\begin{array}{l} R_A = \pi_A + \gamma_A Z + \upsilon_A \\ R_B = \pi_B + \gamma_B Z + \upsilon_B \\ R_C = \pi_C + \gamma_C Z + \upsilon_C \end{array}\right\rangle \Rightarrow \left| \begin{array}{l} R_i = rendimento\ \ i\text{-}esimo\ \ asset, \\ \pi_i = premio\ al\ rischio\ \ i\text{-}esimo\ \ asset, \\ \gamma_i = impatto\ di\ Z\ sull'\ i\text{-}esimo\ asset, \\ Z = fattore\ \ comune, \\ \upsilon_i = errore\ \ i\text{-}esimo\ \ asset. \end{array}\right.$$

In questo mercato ideale, la matrice di covarianza $\boldsymbol{\Sigma}$ dei rendimenti è determinata dal impatto sul fattore comune e dal errore. I rendimenti attesi sono una funzione del premio al rischio di equilibrio, del valore atteso del fattore comune, e dell'errore di ogni attività finanziaria. Indicando con $E[R_A]$ il rendimento atteso si può scrivere

$$E[R_A] = \pi_A + \gamma_A E[Z] + E[\upsilon_A]$$

Con la quale non si assume che il mercato sia in equilibrio, nel qual caso $E[Z]$ e $E[\upsilon_i]$ sarebbero zero. Si assume che la media $E[R_A]$ sia essa stessa una variabile casuale non osservata la cui distribuzione è centrata sul premio al rischio di equilibrio; l'incertezza sul rendimento atteso è dovuta quindi sia all'aleatorietà dell'errore che del fattore comune. Si assume inoltre che il grado di incertezza relativo ad $E[Z]$ ed $E[\upsilon_i]$ sia proporzionale alla volatilità del fattore comune stesso e degli errori. Questo implica che il rendimento atteso è distribuito con una struttura di covarianza proporzionale a $\boldsymbol{\Sigma}$. Si farà riferimento quindi, alla matrice di covarianza dei rendimenti attesi come $\tau\boldsymbol{\Sigma}$. Visto che l'incertezza in media è minore dell'incertezza degli stessi rendimenti τ tende necessariamente a zero. Il premio al rischio di equilibrio assieme alla matrice $\tau\boldsymbol{\Sigma}$ determina la distribuzione per i rendimenti attesi. Si assume tale informazione conosciuta da tutti gli operatori, e non influenzata della forza finanziaria di alcuno. Si assume inoltre, che ogni investitore fornisca ulteriori informazioni sotto forma di *views*, ad esempio: "mi aspetto che *l'asset A* consegua una performance migliore rispetto all'*asset B* di una quantità *Q*", dove la quantità *Q* è dichiarata quindi nota. Si ha quindi, un'interpretazione soggettiva sui rendimenti attesi futuri del titolo *A* rispetto a *B*. Un modo di rappresentare tali informazioni, nel caso si disponga di statistiche riassuntive riferite ad un campione del disegno dei dati, è quello di integrarle nella distribuzione dei rendimenti attesi. In alternativa si possono considerare le *views* direttamente come una distribuzione di probabilità relativa alla differenza in media del rendimento di *A* sul corrispettivo di *B*. Qualunque sia l'interpretazione relativa alle informazioni soggettive di cui si dispone, il risultato a cui si giunge non cambia, è quindi indifferente operare con una piuttosto che con l'altra. Tutt'altra rilevanza ha l'individuazione di una misura per il livello di confidenza che l'investitore ripone nelle sue previsioni, al fine di determinare il peso da attribuire alle corrispettive *views* nel momento in cui dovranno essere integrate nell'equilibrio. Una possibile misura del grado di confidenza può essere ottenuta o come il numero di osservazioni che si hanno dalla distribuzione dei rendimenti futuri, oppure assumendo direttamente la *std deviation* della distribuzione di probabilità. Nell' esempio precedente consideriamo il caso limite per cui l'investitore ha piena certezza nella *view*. Potrebbe essere il caso di un altissimo numero di osservazioni dalla distribuzione dei rendimenti futuri, e dove il valor medio della differenza tra i rendimenti di A e di B $(R_A\text{-}R_B)$ sia Q. in questo caso particolare si può rappresentare la *view* come una restrizione lineare dei rendimenti attesi ovvero:

$$E[R_A] - E[R_B] = Q$$

Quindi si determina la distribuzione della media dei rendimenti:

$$E[R] = \{E[R_A], E[R_B], E[R_C]\}$$

condizionata all'equilibrio e all'informazione; problema relativamente semplice di statistica multivariata, assumendo la distribuzione normale per le medie delle componenti aleatorie. Il rendimento atteso di equilibrio avrà distribuzione:

$$E[R] \sim N(\pi, \tau\Sigma) \quad con \quad \pi = \{\pi_A, \pi_B, \pi_C\}$$

È desiderabile quindi, poter calcolare la distribuzione condizionale per i rendimenti attesi che soddisfino la restrizione lineare:

$$E[R_A] - E[R_B] = Q$$

Possiamo riscrivere tale restrizione come un'equazione lineare nei rendimenti attesi:

$$P * E[R]' = Q \quad dove \quad Q = [1 \quad -1 \quad 0]$$

La distribuzione normale condizionata ha media definita da:

$$\pi' + \tau\Sigma P'\left[P\tau\Sigma P'\right]^{-1}\left[Q - P\pi'\right]$$

Che è soluzione al problema di minimo:

$$\left(E[R] - \pi\right)\tau\Sigma^{-1}\left(E[R] - \pi\right)' \;\; s.v.\;\; P * E[R]' = Q$$

Nell'ipotesi estrema di certezza nella *views*, si userà quindi, la media condizionata come vettore dei rendimenti attesi.

Nel caso più consueto, in cui non vi sia la certezza nelle *views,* possiamo pensare queste ultime come rappresentative di un numero fissato di osservazioni dedotto dal disegno della distribuzione dei rendimenti futuri. In questo caso seguiamo la "stima mista"; strategia indicata da *Theil*. In alternativa possiamo pensare alla *view* come riflesso diretto della distribuzione dei rendimenti attesi. In questo caso il riferimento è all'approccio *Black-Littermann*. Qualsiasi sia l'approccio per l'interpretazione della *view* la si riassume nella forma:

$$P * E[R]' = Q + \varepsilon \rightarrow \begin{cases} P, Q : \textit{quantità note,} \\ \varepsilon : \textit{variabile casuale con distribuzione } N(0,\Omega) \end{cases}$$

La matrice di covarianza ***Ω*** descrive il grado di incertezza attribuito alla view; il caso limite in cui ***Ω=0*** fa riferimento all'esempio visto in precedenza. Quando si hanno a disposizione più *views* la quantità ***P*** deve essere interpretata come una matrice, mentre la variabile casuale ε oltre ad essere distribuita come una *N(**0,Ω**)* deve avere la peculiarità di essere diagonale; quest'ultima assunzione è atta a descrivere l'indipendenza delle *views* nelle distribuzioni dei rendimenti futuri, ovvero, che gli scostamenti dei rendimenti attesi dalle medie della distribuzione rappresentanti le *views* siano indipendenti. Ritornando all'ipotetico mercato ipotizzato sopra, nel quale la correlazione tra i tre *assets* era effetto di un fattore comune; il valore degli effetti dei fattori specifici *(*γ_A*,* γ_B *e* γ_C*)*sui rispettivi *assets* è generalmente non noto; supponiamo tuttavia che questi valori siano *[3,1,2]*. Supponiamo altresì, che gli *shocks* indipendenti siano piccoli, tali da rendere fortemente correlati i tre *assets* con rispettive volatilità descrivibili approssimativamente dal rapporto *3:1:2*; supponiamo a titolo di esempio, la matrice di covarianza nella forma:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 9.1 & 3.0 & 6.0 \\ 3.0 & 1.1 & 2.0 \\ 6.0 & 2.0 & 4.1 \end{bmatrix}$$

Per semplicità assumiamo la percentuale del premio al rischio di equilibrio uguale per i tre *assets*, ad esempio *[1,1,1]*. Nell'ipotesi di un investitore che preveda per il futuro una performance dell'*asset A* che superi del *2%* la corrispettiva di *B,* avremo tutta la volatilità degli *assets* attribuibile ai movimenti del fattore comune e il rendimento atteso di *A* superiore a quello di *B* più che non in condizioni di equilibrio. È chiaro quindi si debba imputare la migliore *performance* di *A* rispetto a *B* allo *shock* nel fattore comune, se così è, *C* dovrebbe *performare* meglio che non in equilibrio. La media condizionata in questo caso, è *[3.9,1.9,2.9],* dove coerentemente si nota che la *view* dell'investitore di *A* rispetto a *B* ha avuto l'effetto di far aumentare il rendimento atteso di *C* di *1.9* punti percentuali. Si supponga, ora, che gli *shocks* abbiano un impatto maggiore sul fattore comune. Ipotizziamo sempre un premio al rischio pari a *[1,1,1]*, la matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ data da:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 19.0 & 3.0 & 6.0 \\ 3.0 & 11.0 & 2.0 \\ 6.0 & 2.0 & 14.0 \end{bmatrix}$$

assumiamo nuovamente che l'investitore preveda una performance di *A* rispetto a *B* superiore di due punti percentuali. Questa volta più della metà della volatilità di *A* è associata con il proprio *shock*. Sebbene si debba imputare una parte del cambiamento nel fattore al rendimento maggiore di *A* rispetto a *B*, l'impatto di *C* dovrebbe essere minore se confrontato con il caso precedente. In questo caso la media condizionata risulta pari a *[2.3,0.3,1.3]*. L'effetto implicito dello *shock* del fattore comune sull' *asset* *C* è in effetti inferiore che in precedenza. Si può attribuire un' influenza maggiore dello *shock* relativo alla miglior performance di *A* su *B,* infatti la ripercussione su $E[R_B]$ è negativa rispetto all'equilibrio. Si considera quindi, che l'impatto dello *shock* domini sul contributo di *B* anche se l'influenza del fattore comune è positiva. La determinazione di tale impatto è possibile solo grazie al fatto di aver assunto nota la vera struttura generatrice della matrice di covarianza dei rendimenti, cosa difficilmente realizzabile nella realtà. A favore torna che, il calcolo della media condizionata non dipende da tale specifica conoscenza, bensì semplicemente dalla matrice di covarianza dei rendimenti. Un ultimo sguardo a cosa accade qualora l'investitore riponga un basso livello di confidenza nella *view*: si assume sempre come previsione una *performance* di *A* su *B* superiore di due punti, varianza pari a uno e la matrice di covarianza dei rendimenti iniziale. Rispetto ai casi precedenti la media condizionata è basata su una previsione con alto grado di incertezza, nello specifico risulta pari a *[3.3,1.7,2.5]*. Un minor livello di certezza nella propria *view* da parte dell'investitore porta ad avere una differenza $(E[R_A]-E[R_B])$ in equilibrio che passa dai due punti della previsione ad *1.6,* e un effetto minore del fattore comune sul *asset C.*

2.6 MODELLO BLACK&LITTERMANN

Si entra ora, nello specifico del modello partendo dall' espressione fondamentale e analizzandone le varie componenti nel dettaglio:

$$E[R] = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q\right]$$

Dove si definiscono:

- ***E[R]***= vettore dei rendimenti attesi "*post-views*" di dimensione *(n x 1),*
- τ = scalare,
- ***Σ*** = matrice di covarianza dei rendimenti di dimensione (n x n),
- ***P*** = matrice di selezione degli assets coinvolti nelle views di dimensione (k x n) dove k è il numero di views considerate,
- ***Ω*** = matrice diagonale di covarianza degli errori delle views ovvero il livello di confidenza di ognuna, la dimensione è (k x k),
- ***Π*** = vettore dei rendimenti di equilibrio (n x 1),
- ***Q*** = vettore delle views di dimensione (k x 1).

2.7 PREVISIONI DEGLI INVESTITORI (VIEWS)

Spesso gli investitori hanno, e fanno, congetture sull'andamento futuro dei corsi azionari; queste possono essere riferite sia ad un singolo titolo , ma anche a confronti fra due o più titoli o fra settori o gruppi di titoli. Come detto in precedenza il *modello Black&Litterman* si propone di tenere conto di tali previsioni ritenendole preziose fonti di informazioni, fedele al detto che recita: "*frequentemente si sa più di quanto si voglia ammettere"*. Coerentemente con quanto sopra, si possono individuare e classificare le *views* nel seguente modo:

- Il titolo *A* avrà un rendimento assoluto del *(α)%* con un livello di confidenza del *(σ)%,*
- Il titolo *B* otterrà una performance superiore al titolo *C* di *α* punti percentuali, livello di confidenza *(σ)%,*
- Il settore assicurativo sovraperformerà rispetto agli industriali del *(α)%*, con un livello di confidenza del *(σ)%*

Il primo esempio di previsione la si definisce una previsione assoluta, nella fattispecie il rendimento *(α)* previsto per *l'asset A* entrerà nel modello a discapito del rispettivo rendimento implicito di equilibrio. Il secondo e il terzo caso esprimono previsioni relative attraverso le quali gli investitori esprimono delle preferenze di un qualche titolo o settore rispetto a qualche altro o altri. Nel secondo caso, la *view*, qualora preveda uno scostamento sui rendimenti dei titoli azionari coinvolti, superiore a quello determinato attraverso i rendimenti impliciti di equilibrio, comporterà uno spostamento del portafoglio a favore del titolo più performante. Nel terzo caso l'implementazione della previsione nel modello richiede una maggiore complessità derivante dal dover confrontare gruppi di titoli all'interno dei quali i vari *assets* hanno presumibilmente rendimenti impliciti tra loro diversi. In questo caso si definiscono dei "mini-portafogli" formati dai titoli coinvolti nella previsione a cui si fa riferimento. Si definisce, di ogni "mini-portafoglio", il suo rendimento come somma dei prodotti delle capitalizzazioni di mercato per il rendimento implicito di equilibrio di ciascun titolo; si confronta a questo punto la previsione con la rispettiva differenza nei rendimenti dei gruppi relativi alla *view*. In genere se la congettura supera la differenza ottenuta dai "mini-portafogli" attraverso i rendimenti impliciti di equilibrio il modello tende a sovrappesare gli assets sovraperformanti.

Aspetto cruciale e non banale del modello *Black&Litterman*, è come devono concorrere le *views* nell'espressione che determina il nuovo vettore dei rendimenti ottemperando rigorosamente ai principi statistico-matematici.

Innanzitutto il modello non richiede sia specificata una congettura per ogni *asset* considerato, impone però che non siano in numero superiore a questi ultimi; si assume poi, ci sia termine di errore casuale, normalmente distribuito con media *0* associato ad ogni *view* che può essere quindi descritta dall'espressione:

$$Q + \varepsilon = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{bmatrix} \quad dove \;\; \varepsilon \sim N(0, \Omega)$$

Gli *ε,* in presenza di più di una previsione, non entrano direttamente nella formula di *Black&Litterman*, ne fanno parte però le varianze *(ω)* dei termini di errore intese come il reciproco del livello di confidenza *(LC)* nella *view* moltiplicate per un opportuno fattore di correzione *(CF).* Le varianze suddette costituiranno la matrice diagonale ***Ω*** che avendo assunto l'ipotesi di indipendenza tra i termini di errore avrà degli zeri fuori dalla diagonale. Si può a questo punto descrivere rigorosamente la matrice delle varianze dei termini di errore come:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CF/LC_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & CF/LC_k \end{bmatrix}$$

Tale matrice ha dimensione *(k x k)* dove *k* sono le *views*. Sorge quindi il problema di assegnare ad ogni titolo la corrispettiva previsione; questo avviene costruendo una matrice di selezione ***P*** di dimensione *(k x n)* con n il numero di assets nel portafoglio:

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k,1} & \cdots & p_{k,n} \end{bmatrix}$$

A questo punto nella formula per la determinazione del nuovo vettore dei rendimenti manca di definire lo scalare *τ*. La letteratura, a tal proposito, non è vasta e spesso contraddittoria: nella definizione del modello gli autori affermano che essendo l'incertezza in media inferiore all'incertezza nei rendimenti *τ* deve tendere a 0, dello stesso parere è *Lee* in uno studio successivo *(2000).* Di parere opposto sono *Satchell* e *Scowcroft (2000)* affermando che lo scalare è spesso impostato sul valore 1. Considerando che il modello ha lo scopo di esprimere un vettore dei rendimenti come una media pesata dei rendimenti impliciti di equilibrio con le previsioni degli investitori, dove i pesi sono una funzione di τ e il livello medio di confidenza nelle *views*; allora, tanto più alto sarà quest'ultimo, tanto più il nuovo vettore dei rendimenti dovrà tendere alle previsioni di cui si dispone, di converso se gli investitori non manifestano un alto livello di confidenza nelle loro congetture si vorranno dei rendimenti più vicini a quelli impliciti di equilibrio. Si può quindi definire un comportamento inversamente proporzionale tra questi ultimi con lo scalare in questione.

He e *Litterman* tarano il livello di confidenza in modo tale che il rapporto:

$$\omega\& / \tau \qquad \textit{con } \omega\& \textit{: varianza media del termine di errore} (\omega)$$

È pari alla varianza del del vettore delle *views*. In presenza di un' unica previsione risulta:

$$\omega\& = \omega = CF / LC$$

La varianza delle congetture è la somma degli elementi della matrice quadrata di ordine k ottenuta dal prodotto $\boldsymbol{P\Sigma P'}$. Quando vi è più di una previsione sui rendimenti ci sono due possibili interpretazioni di $\omega\&$: o come somma degli elementi *(ω)* che stanno sulla diagonale della matrice di covarianza dei termini di errore ***(Ω)*** o come media degli stessi. La somma indica l'incertezza totale delle *views*, analogamente la media ne rappresenta l'incertezza media.

Gli elementi sulla diagonale della matrice di covarianza dei termini di errore ***(Ω)*** sono i reciproci del livello di confidenza posto in ciascuna delle previsioni di cui si dispone moltiplicati per un opportuno fattore di correzione *(FC),* da questo segue che, per quelle *views* in cui si riscontra un' alta fiducia verrà associata una varianza minore come è lecito aspettarsi. Un basso livello di confidenza può portare a rilevanti impatti sul modello se si usa la somma degli elementi sulla diagonale *(ω)* della matrice ***(Ω)*** per la determinazione del valore dello scalare *(τ),* per avere quindi, una maggiore stabilità è preferibile usare i valor medio degli *(ω)* anziché la loro somma; la loro definizione analitica è:

$$\bar{\omega} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{CF}{LC_i}}{k}$$

In base alle considerazioni fatte sulla determinazione dello scalare *(τ)* relative a *He* e *Litterman (1999)* il uso valore iniziale è il rapporto tra il valor medio della varianza dei termini di errore e la varianza del delle previsioni, ovvero:

$$\tau = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{CF}{LC_i}}{k}}{\bar{\omega}}$$

L'unica variabile osservabile è la varianza delle *views* ovvero il prodotto ***PΣP***,mettendolo in evidenza nella precedente espressione diventa:

$$\bar{\omega} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{CF}{LC_i}}{k}}{\tau}$$

Ovvero si ha che, per ogni valore (positivo) possibile assunto come media delle varianze dei termini di errore *(ω)* il valore *(τ)* debba cambiare in modo tale che l'uguaglianza con la varianza delle *views* sia mantenuta. questo è il punto di partenza per calibrare le varianze dei termini di errore attraverso un fattore di correzione *(FC)*. Il fattore di correzione dovrebbe permettere che la scala di valori del livello di confidenza vari da *0* a *100%* per ottenere portafogli non estremi. Concettualmente il *LC* può essere interpretati come una variabile con distribuzione normale di media *50%* e varianza *16.33%*, nella quale i valori *0%* e *100%* corrispondono a tre volte la *std. deviation* dalla media. Quando il modello è ben equilibrato le deviazioni dai pesi di capitalizzazioni di mercato dovrebbero tendere a *0* quando il livello di confidenza si avvicina allo *0%*. In questo caso, quindi le opinioni dovrebbero essere espresse come una stima puntuale *(q)%,* un intervallo simmetrico attorno alla stima *(± l)%* ad un dato livello di confidenza *(1-α)%* formalmente:

$$\Pr\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{V_i - q_i}{\sqrt{\omega_i}} \leq z_{\alpha/2}\right) = (1-\alpha)$$

Ovvero:

$$\Pr\left(q_i - z_{\alpha/2}\sqrt{\omega_i} \leq V_i \leq q_i + z_{\alpha/2}\sqrt{\omega_i}\right) = (1-\alpha)$$

Dove $z_{\alpha/2}$ è il percentile di una *N(0,1)*che lascia alla propria destra un livello di probabilità pari ad $\alpha/2$ di conseguenza si ha che:

$$q_i \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\omega_i} = q_i \pm l_i \quad con \quad \sqrt{\omega_i} = \frac{l_i}{z_{\alpha/2}}$$

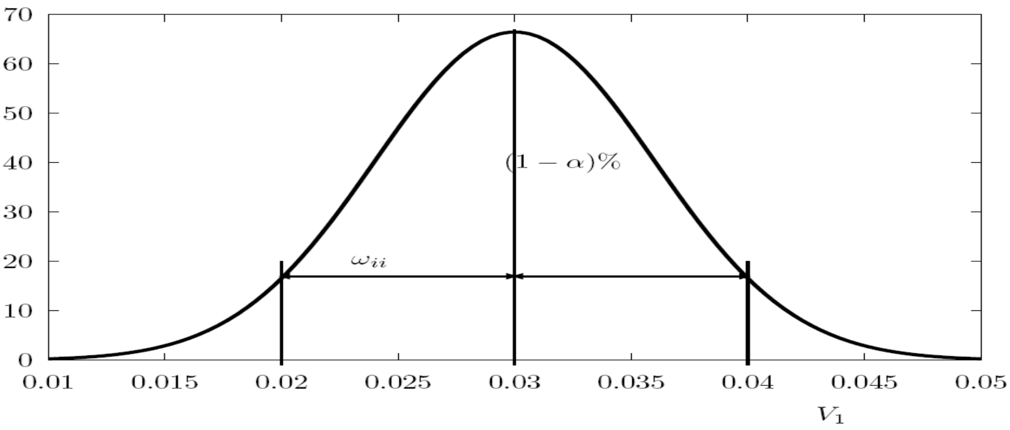


Figura 8: Normal Density

Questo lo si ottiene impostando il valore dello scalare *(τ)* pari ad *1;* invertendo quindi la relativa espressione si può scrivere:

$$\tau = \frac{\dot{\omega}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} \dfrac{CF}{LC_i}}{k}}$$

Osservando che quando $\tau=1$ segue che $\boldsymbol{P\Sigma P'=\dot{\omega}}$; combinando questo risultato con un dato livello medio di confidenza è possibile ottenere il fattore di correzione dall'espressione:

$$CF = \frac{\dot{\omega}}{1/LC}$$

A questo punto la varianza del termine di errore per ogni *view* è calcolata e di conseguenza si può determinare lo scalare *(τ)*. Come è logico aspettarsi se tutte le previsioni hanno un livello di confidenza pari al *50%* il valor medio degli elementi *(ω)* della matrice ***Ω*** è uguale alla varianza delle *views* e ne deriva che si ottiene un valore dello scalare *(τ)=1*.
Si osserva come all'aumentare del valor medio degli elementi di ***Ω***, ovvero al reciproco del livello di confidenza, decresce il valore di *(τ);* questo comporta che nel nuovo vettore dei rendimenti il peso dei rendimenti impliciti di equilibrio assumono maggiore rilevanza a scapito delle opinioni degli investitori.
Black&Litterman hanno dimostrato che pur assumendo un livello di confidenza del *100%* in ogni *view*, il modello non ignoro l'apporto dell'informazione derivante dai rendimenti impliciti di equilibrio, a meno che, oltre ad avere totale fiducia nelle previsioni degli investitori si disponga di un numero di congetture pari al numero di attività finanziarie coinvolte nel portafoglio.

Rendimenti e pesi di Black&Litterman per il portafoglio in esame:

Si sono prese in considerazione *17* previsioni che vari operatori finanziari hanno fatto sui titoli appartenenti al portafoglio analizzato *(Fonte:yahoo.com/finance.com).* Nello specifico i titoli coinvolti nelle congetture degli investitori sono: Alleanza, B.ca Fideuram, B.ca Intesa, B.co Monte Paschi di Siena, B.ca Nazionale del Lavoro, Capitalia, ENI, Finmeccanica, Generali, Mediobanca, Mediaset, RAS, San Paolo-IMI, Saipem, TIM, Telecom, Unicredit.

Le *views* sono tutte del tipo "assoluto", se ne interpreta la media come stima puntuale e il rapporto tra stima puntuale e *range* di variazione come varianza. Il livello di confidenza nella *view* è quindi il reciproco di detto rapporto.

TITOLO	MEDIA	MASSIMO	MINIMO	LC	1/LC
ALZI	0.004341	0.016868	-0.02071	0.05296476	8.658228
fideuram	0.000325	0.013342	-0.0192	0.00998587	100.1415
intesa	0.005811	0.017705	-0.03582	0.10857763	9.21
BMPS	0.001451	0.015195	-0.01229	0.05279376	18.94163
bnl	0.004194	0.060752	-0.01843	0.05296476	18.88048
CPTA	0.007179	0.057191	-0.08034	0.05219744	19.15803
ENI	0.008998	0.045262	-0.01933	0.13930430	7.178529
finmecc	0.000571	0.144	-0.04724	0.00298805	334.6667
GASI	0.001854	0.02548	-0.02473	0.03692316	27.08327
MDBI	0.004785	0.045797	-0.05673	0.04667417	21.42513
MS	0.005015	0.024731	-0.01799	0.11738507	8.518971
RAS	0.003147	0.02159	-0.00761	0.10776942	9.27907
SPI	0.001983	0.022946	-0.04947	0.02737862	36.52484
SPMI	-0.00378	0.024666	-0.0101	0.10876133	9.194444
TIM	0.003878	0.026453	-0.02998	0.06871445	14.55298
TLIT	0.001366	0.066923	-0.06419	0.01042205	95.95041
CRDI	0.002623	0.015848	-0.0106	0.09915612	10.08511

Tabella 6: views, range e livello di confidenza

La matrice diagonale di covarianza delle *views* dove sulla diagonale compare il reciproco del livello di confidenza della previsione:

	ALZI	fideuram	intesa	BMPS	bnl	CPTA	ENI	finmecc	GASI	MDBI	MS	RAS	SPI	SPMI	TIM	TLIT	CRDI
ALZI	8.66	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
fideuram	0	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
intesa	0	0	9.21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
BMPS	0	0	0	18.94	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
bnl	0	0	0	0	18.88	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CPTA	0	0	0	0	0	19.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ENI	0	0	0	0	0	0	7.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
finmecc	0	0	0	0	0	0	0	334	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GASI	0	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0	0
MDBI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21.43	0	0	0	0	0	0	0
MS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8.52	0	0	0	0	0	0
RAS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9.28	0	0	0	0	0
SPI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	36.52	0	0	0	0
SPMI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9.19	0	0	0
TIM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14.55	0	0
TLIT	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	95	0
CRDI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10.09

Matrice ***P*** di dimensione *(k x n)* per assegnare la previsione al titolo corrispettivo:

$$
\mathbf{P}=\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}
$$

Il valor medio che si ottiene dalla diagonale della matrice di covarianza delle *views* è pari a *44.0852*, mentre la varianza dei termini di errore delle congetture è *6410.8651* che corrisponde al valore della varianza del portafoglio delle previsioni in corrispondenza di un valore dello scalare τ

pari ad *1*. Da questo si ottiene il fattore di correzione che permetterà di determinare la matrice di covarianza delle congetture. Il *Calibration Factor(FC)* è quindi ottenuto dal rapporto:

$$CF = \frac{P\Sigma P'}{1/50\%} = \frac{\varpi\&}{1/50\%} = \frac{6410.8651}{1/50\%} = 6405.4325$$

Si moltiplica, ora, gli elementi sulla diagonale della matrice di varianza ottenuta in precedenza per il fattore di correzione appena determinato. Il risultato è ancora una matrice diagonale di ordine *k* con le varianze corrette delle *views* sulla diagonale e tutti zero fuori. La matrice ***(Ω)*** così ottenuta servirà per determinare il nuovo vettore dei rendimenti. Di seguito si riporta la diagonale della matrice delle varianze corrette dal *Calibration Factor*:

ALZI	27753.36547
fideuram	320996.8551
intesa	29522.0339
BMPS	60716.13117
bnl	60520.09925
CPTA	61409.76279
ENI	23010.29081
finmecc	1072751.431
GASI	86813.60343
MDBI	68676.80465
MS	27306.98723
RAS	29743.43238
SPI	117077.9266
SPMI	29472.17161
TIM	46648.59639
TLIT	307562.5789
CRDI	32327.12839

La media della diagonale della matrice è pari a *141312.3058,* il valore τ da inserire nella formula dei rendimenti secondo *Black&Litterman* è il rapporto della varianza dei termini di errore delle *views* con la media appena trovata, formalmente:

$$\tau = \frac{d\&}{\frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{CF}{LC_i}}{k}} = \frac{6410.865125}{141312.3058} = 0.04537$$

Iterando l'algoritmo assumendo come livello di confidenza medio *LC=20%* e *LC=80%*, si sono ottenuti tre nuovi vettori dei rendimenti di *Black&Litterman* (un è quello associato ad un *Confidence Level* pari al *50%*) , che sono appunto, i rendimenti aggiustati secondo le opinioni degli investitori considerando la loro fiducia riposta nelle stesse *views*.
La formula usata è quella vista in precedenza, ovvero:

$$E[R] = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q\right]$$

I tre nuovi vettori così ottenuti sono:

	LC=50%	*LC=20%*	*LC=80%*
ALLEANZA	36.45	36.12	36.46
AUTOSTRADE	-5.16	-5.77	-5.00
B.CA FIDEURAM	2.74	2.85	2.73
B.CA INTESA	48.79	48.38	48.81
B.CA MONTE PASCHI	12.48	13.81	12.30
BNL	34.98	33.97	35.13
CAPITALIA	60.28	60.02	60.29
ENI	72.28	59.85	74.24
FIAT	12.49	9.22	13.07
FINMECCANICA	4.80	4.82	4.80
GENERALI	15.64	16.16	15.60
MEDIOBANCA	40.26	40.31	40.23
MEDIOLANUM	1.87	4.72	1.42
MEDIASET	41.74	39.75	41.97
PIRELLI SPA	41.59	36.17	42.49
RAS	25.94	23.97	26.24
SAN PAOLO-IMI	16.69	16.89	16.67
SAIPEM	-30.61	-26.08	-31.30
STMicroelectronix	8.90	11.80	8.41
TIM	32.55	32.03	32.57
TELECOM	11.48	11.54	11.48
UNICREDIT	22.05	21.64	22.05
CORRELAZIONE (Π,LC=50%)=-0.0912063			
CORRELAZIONE (Π,LC=20%)=-0.0366476			
CORRELAZIONE (Π,LC=80%)=-0.0993926			

Tabella 7: Rendimenti annui percentuali B&L

Le correlazioni tra i vettori dei rendimenti *Black&Litterman* con gli impliciti di equilibrio da cui "parte" il modello è molto bassa, interessante è però notare come cresca con il livello di confidenza come è lecito aspettarsi. Partendo da questi rendimenti e avendo imposto dei vincoli sui pesi di portafoglio (la loro somma deve essere pari ad *1* ovvero tutta la ricchezza disponibile è investita nel portafoglio), *Black&Litterman* suggeriscono che la determinazione del vettore dei pesi di portafoglio avvenga tramite l'approccio *media-varianza* adottato finora.

Si determina quindi le frontiera efficiente per ognuno dei livelli di confidenza considerato, la relativa *Capital Market Line* e il portafoglio di efficienza. I tre vettori dei pesi ottenuti sono:

	LC=50%	***LC=20%***	***LC=80%***
ALLEANZA	2.05	2.50	2.21
AUTOSTRADE	2.02	2.20	1.58
B.CA FIDEURAM	1.69	1.43	1.80
B.CA INTESA	4.86	5.15	4.74
B.CA MONTE PASCHI	2.28	1.96	2.77
BNL	1.38	1.64	1.41
CAPITALIA	1.65	1.66	1.63
ENI	22.32	22.29	22.46
FIAT	1.21	1.18	0.98
FINMECCANICA	2.17	2.28	2.81
GENERALI	9.98	9.59	10.12
MEDIOBANCA	2.01	1.87	2.25
MEDIOLANUM	1.23	1.25	1.54
MEDIASET	3.92	4.22	3.78
PIRELLI SPA	0.63	0.68	0.45
RAS	3.10	3.28	2.80
SAN PAOLO-IMI	4.39	4.22	4.31
SAIPEM	0.86	0.57	0.66
STMicroelectronix	4.79	4.65	4.53
TIM	11.83	11.54	11.65
TELECOM	8.43	8.25	8.63
UNICREDIT	7.19	7.61	6.88
Correlazione (Π, LC=50%)=0.9960425			
Correlazione (Π, LC=20%)=0.996068			
Correlazione(LC=80%)=0.9919334			

Tabella 8: Pesi di Tangenza per i tre livelli di confidenza (valori percentuali)

I portafogli determinati sono portafogli di tangenza, quindi soggetti al vincolo di sommare ad uno, ovvero di impiegare tutta e sola la ricchezza in titoli rischiosi. Questo comporta che anche i titoli non coinvolti nelle previsioni degli investitori abbiano subito modifiche rispetto ai al portafoglio relativo ai rendimenti impliciti di equilibrio.

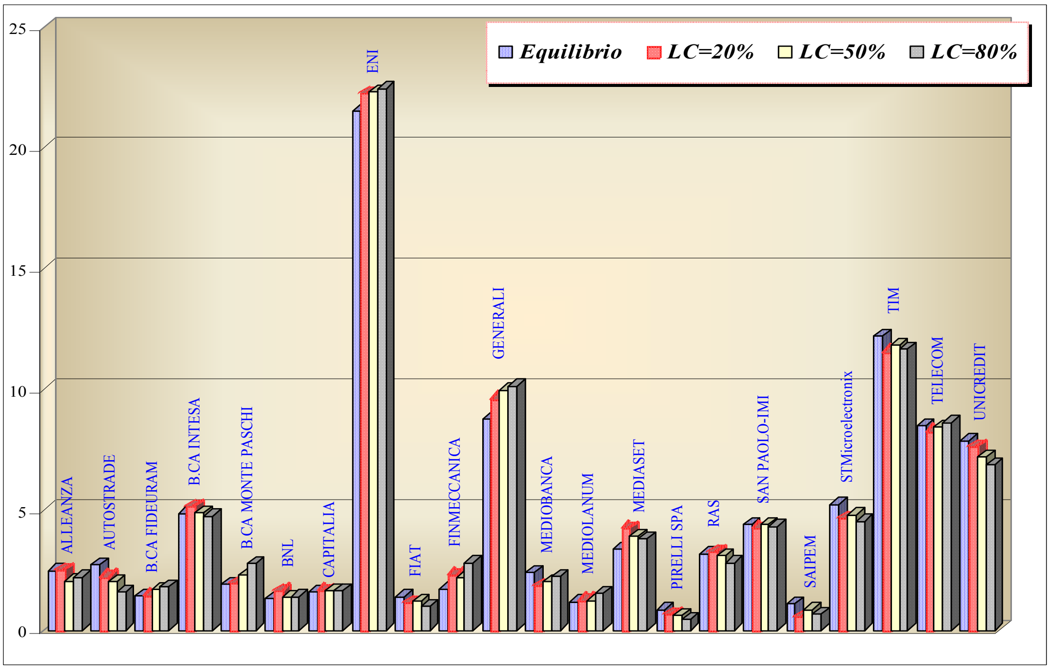


Figura 8: Pesi di portafogli Black&Litterman e di capitalizzazione

Il grafico successivo è la simulazione dell'andamento dei vari portafogli costruiti, le osservazioni sono relative alle chiusure aggiustate dell'ultima seduta borsistica di ogni settimana per le *33* settimane successive dalla realizzazione dei portafogli stessi (Troppo breve per una rigorosa analisi della *Performance*)

Si vede come i portafogli relativi ai Rendimenti Impliciti a *Black&Litterman* e l'indice *Mibtel* nel periodo considerato si equivalgano: ogni euro investito in uno dei tre, dopo le *33* settimane diventa circa *1.18*; per quanto riguarda il *Capital Asset Pricing Model* si passa da *1* a circa *1.22*, infine per il portafoglio ottenuto dai rendimenti attesi delle serie storiche dei titoli selezionati si passa da *1* a circa *1.32*.

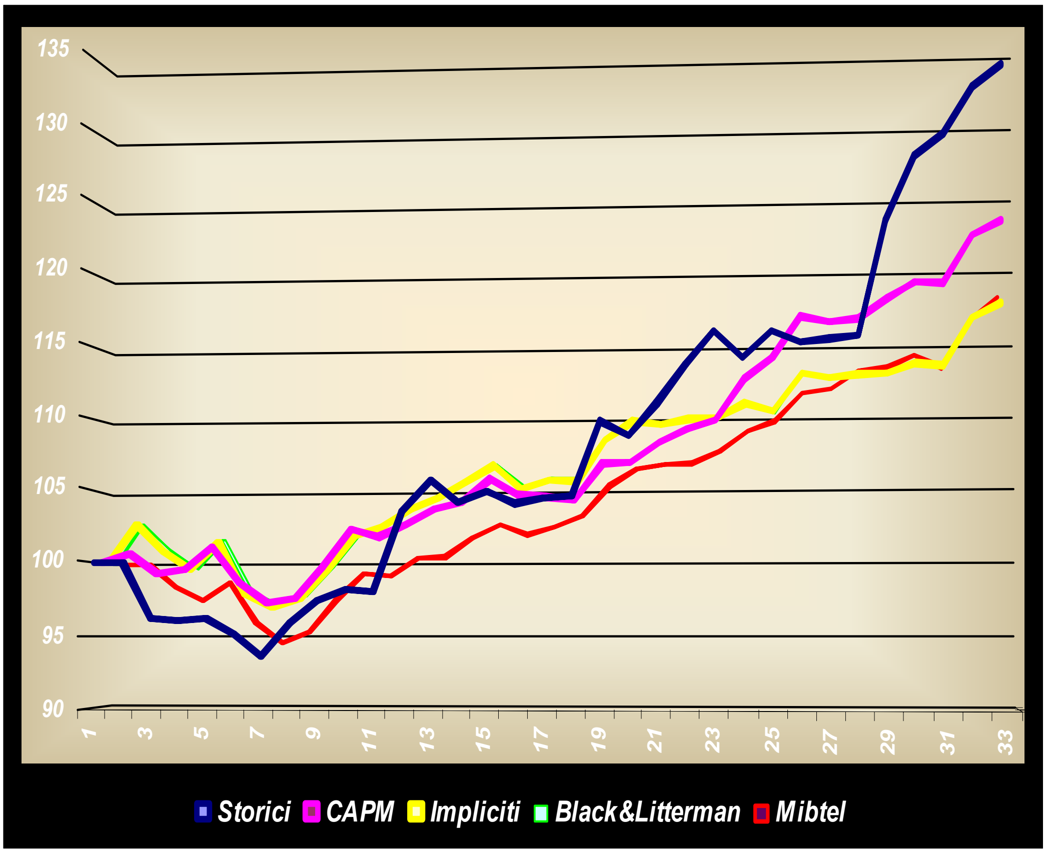


Figura 9: Simulazione dell'andamento dei portafogli

```
# rendimenti.attesi= valore atteso delle serie storiche dei rendimenti
# sigma = matrice di covarianza dei rendimenti
# r0=ultima osservazione del titolo “privo” di rischio
# m= numero di titoli del portafoglio
peff.1<-solve(sigma))%*%(rendimenti.attesi-10*i)
peff.2<-solve(sigma)%*%(rendimenti.attesi-40*i)
sum1<-sum(peff.1)
sum2<-sum(peff.2)
peff1<-peff.1/sum1
rend1<-peff1*rendimenti.attesi
media1<-sum(rend1)
peff2<-peff.2/sum2
rend2<-peff2*rendimenti.attesi
media2<-sum(rend2)
g<-seq(-10000,1499)
x<-t(g)
mediaeff<-g%*%t(peff1)%*%rendimenti.attesi+(1-g) %*%t(peff2)%*rendimenti.attesi
vareff<-g^2%*%t(peff1)%*%sigma%*%peff1+(1-g)^ %*%t(peff2)%*%sigma%*%peff2
        +2*g*(1-g)%*%t(peff1)%*%sigma%*%peff2
sharpe<-sqrt(t(rendimenti.attesi-r0*i)%*%solve(sigma)%*%(rendimenti.attesi-r0*i))
pesi.mercato<-(solve(sigma)%*%(rendimenti.attesi-r0*i))
            /(sum(solve(sigma)%*%(rendimenti.attesi-r0*i)))
rend.port.merc<-t(pesi.mercato)%*%rendimenti.attesi
stderr.port.m<-((rend.port.merc-r0)/sharpe)
stderrcml<-sqrt(1/m*(1+((sharpe^2)/2)))
ps<-(rendimenti.attesi-r0)/sqrt(diag(sigma))
sepstit<-sqrt(1/m*(1+(ps^2)/2))
up<-ps+1.96*sepstit
down<-ps-1.96*sepstit
```

Software utilizzato

Software E-VIEWS:

- *Analisi dei rendimenti: normalità, incorrelazione, indipendenza*
- *Regressioni univariate,*
- *Test di forma funzionale, assenza di autocorrelazione degli errori, omoschedasticità degli errori, normalità degli error, stabilità dei parametri,*

Software R: determinazione della frontiera efficiente, della Capital Market Line, e del portafoglio di tangenza e performance di Sharpe con i relativi intervalli di confidenza

Riferimenti Bibliografici

Bevan A., Winkelmann K. (June 1998). "Using the Black&Litterman Global Asset Model: Three Years of Practical Experience". *Global Fixed income portfolio strategy.* Goldman Sachs.

Black F., Litterman R.(1992). "Global Portfolio Optimization". *Financial Analysts Journal,* 28-43.

Bradfield D., Swartz J. (October 2002). "Demostration of the Black&Litterman Portfolio Design Procedure in the South African Setting". *Quantitative Research*. Cadiz Financial Strategists

Brealey R. A., Myers S. C., Sandri S. (1999). "*Principi di finanza aziendale"*. McGraw Hill.

Chan L. K. C., Karceski J., LakonishoK J. (1998). "The Risk and Return from Factors". *Journal of financial and quantitative analysis.* **2,**159-188

Gallo G.P., Pacini B. (2002). *"Metodi Quantitativi per i Mercati Finanziari".* Carocci.

Idzorek T. M. (July 2004). "A step by step guide to the Black&Litterman Model". *Zephir Allocation Advisor.* Zephir Associates, Inc.

Idzorek T. M., Adrogue J. (September 2003). "Black&Litterman Return Forecast in". *Zephir Allocation Advisor.* Zephir Associates, Inc.

Investment Management Division (December 1999). *"The Intuition Behind Black&Litterman Model portfolios"*. Goldman Sachs.

Jackwerth J. C. *"Mean-Variance Model".* University of Kostanz

Kock W. (June 2003). "Consistent Asset Return Estimates via Black&Litterman. Theory and Application". *PM Balanced/Asset Allocation* Cominvest asset *Management.*.

Pastorello S. (2001). *"Rischio e Rendimento. Teoria Finanziaria e Applicazioni Econometriche".* Il Mulino.

Theil H. (1971). *"Principles of Econometric".* Wiley.

Tsay R. S. (2002). *"Analysis of Financial Time Series".* Wiley