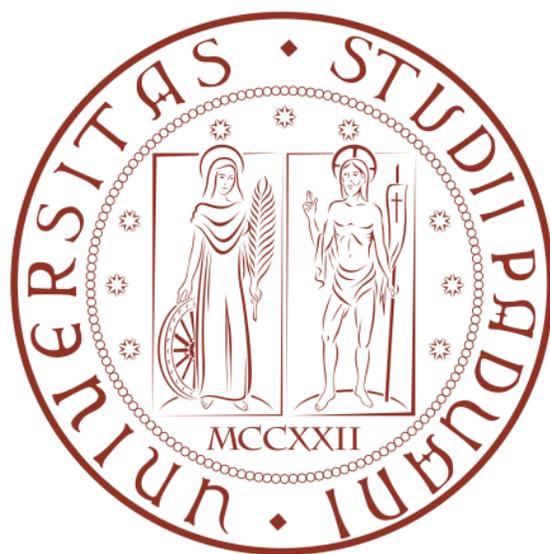


Università degli studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"  
Corso di Laurea Triennale in Astronomia



## ***Polarizzazione del fondo cosmico di microonde e parametri cosmologici***

Relatore: Dott. Michele Liguori  
Correlatore: Filippo Oppizzi

Laureanda: Chiara Testini  
Matricola: 1123706

Anno Accademico 2018/2019



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>1 Introduzione alla cosmologia</b>	<b>5</b>
1.1 Struttura generale dell'universo . . . . .	5
1.1.1 Principio Cosmologico . . . . .	5
1.1.2 Legge generale di espansione . . . . .	5
1.1.3 Metrica di Robertson-Walker . . . . .	6
1.2 Dinamica cosmica . . . . .	7
1.2.1 Equazioni cosmologiche di Friedmann . . . . .	7
1.2.2 Equazione dell'accelerazione . . . . .	9
1.2.3 Parametri cosmologici . . . . .	10
1.3 Costante cosmologica . . . . .	11
1.4 Inflazione . . . . .	12
<b>2 Fondo cosmico di microonde</b>	<b>15</b>
2.1 Radiazioni cosmiche di fondo . . . . .	15
2.2 Origine della CMB . . . . .	16
2.2.1 Superficie di ultimo scattering . . . . .	16
2.2.2 CMB . . . . .	16
2.3 Anisotropie della CMB . . . . .	18
2.4 Spettro di potenza e perturbazioni . . . . .	19
2.4.1 Spettro delle perturbazioni . . . . .	19
2.4.2 Fluttuazioni di temperatura . . . . .	20
2.5 Utilità dello studio della CMB . . . . .	20
<b>3 Polarizzazione CMB</b>	<b>23</b>
3.1 Scattering di Thomson . . . . .	23
3.2 Parametri di Stokes . . . . .	24
3.3 Meccanismo di formazione . . . . .	25
3.4 Perturbazioni della temperatura . . . . .	27
3.5 Modi E e B . . . . .	30
<b>4 Spettro di potenza e parametri cosmologici</b>	<b>33</b>
4.1 Costruzione degli spettri . . . . .	33
4.2 Dipendenza dai parametri cosmologici . . . . .	34
4.3 CAMB . . . . .	35
4.4 Spettri TT . . . . .	36
4.4.1 Parametri dovuti all'inflazione . . . . .	36
4.4.2 Geometria dell'universo . . . . .	37
4.4.3 Densità barionica . . . . .	38
4.5 Spettri EE . . . . .	39
4.6 Spettri BB . . . . .	41
4.7 Dipendenza degli spettri dalla costante di Hubble . . . . .	42
4.8 Dipendenza degli spettri dal parametro $r$ . . . . .	46
<b>Riferimenti bibliografici</b>	<b>50</b>

## Introduzione

Nel 1965 gli astronomi statunitensi Arno Penzias e Robert Wilson scoprirono che la Terra viene costantemente raggiunta in ogni direzione da una radiazione che presenta uno spettro di perfetto corpo nero a una temperatura di  $\sim 2.7K$ . Questa scoperta, avvenuta in modo piuttosto casuale, si rivelò essere una delle più importanti scoperte nell'ambito di tutte le scienze fisiche del ventesimo secolo, tanto che portò i due ricercatori a conseguire il Premio Nobel per la fisica nel 1978. Ben presto si scoprì, infatti, che questa radiazione non viene emessa da sorgenti cosmiche, ma costituisce una radiazione *fossile* che proviene dall'universo quando era ancora "giovane", ovvero prima che iniziasse a generare le strutture tipiche che costituiscono la *Large Scale Structure*. Questa radiazione presenta un picco di corpo nero attorno alla lunghezza d'onda di 2mm ed è dunque chiamata *radiazione di fondo cosmico nelle microonde* o CMB (dall'acronimo in inglese *Cosmic Microwave Background*).

La CMB, oltre a costituire una prova del modello cosmologico del Big Bang, permette di studiare le proprietà dell'universo primordiale. Il satellite COBE, lanciato nel 1990, aveva come obiettivo principale lo studio dello spettro e la distribuzione angolare della brillantezza superficiale della radiazione di fondo. Oltre ad aver rilevato un perfetto spettro di corpo nero (il più preciso mai osservato in natura) ha misurato le deviazioni dalla perfetta isotropia, che risultano essere soltanto di  $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$ . Nel 2002 il telescopio DASI, situato in Antartide, ha effettuato la prima rilevazione della polarizzazione della CMB che viene generata dall'interazione tra materia e radiazione nel plasma di cui era costituito l'universo primordiale.

Lo scopo di questa tesi è quello di illustrare, in modo qualitativo e senza rigore matematico, le informazioni che possono essere dedotte dallo studio della CMB. Nel primo capitolo vengono introdotti alcuni dei concetti cardine della cosmologia moderna e dei modelli inflazionari, mentre nel secondo capitolo sono chiariti dei concetti fondamentali riguardo alla CMB come la sua origine e la causa delle sue anisotropie in temperatura. Nel terzo capitolo viene indagata la polarizzazione del fondo cosmico di microonde limitandosi, come detto, a uno studio qualitativo. Nel quarto capitolo si spiega come vengono costruiti gli spettri di potenza della temperatura e della polarizzazione e sono riportati i grafici, ottenuti utilizzando il programma CAMB, che mostrano come questi varino a seconda del valore associato ad alcuni dei parametri che descrivono il modello cosmologico e il modello inflazionario.

# 1 Introduzione alla cosmologia

## 1.1 Struttura generale dell'universo

### 1.1.1 Principio Cosmologico

L'universo osservabile costituisce la regione dello spazio racchiusa da una sfera centrata sull'osservatore e corrisponde, nel caso della Terra, a quella parte di universo indagabile dall'uomo.

Mentre l'isotropia dell'universo può essere verificata direttamente osservando in ogni direzione, l'ipotesi di omogeneità, ovvero immaginare che un *qualsiasi* osservatore fondamentale veda la stessa pittura generale dell'universo in funzione solamente del tempo cosmico, deve essere dedotta. Nonostante esso risulti essere fortemente strutturato su scale fino a 100 Mpc, la distribuzione delle strutture, come le galassie, tende a divenire sempre più omogenea oltre questo limite e lo diviene completamente oltre i 200-300 Mpc. L'idea di omogeneità è supportata, inoltre, dallo studio del fondo X, dalla distribuzione di radiosorgenti, dalle osservazioni della CMB (Cosmic Microwave Background) e dal fatto che, sulla base di una semplice considerazione copernicana, non vi siano motivi per ritenere che la Terra si trovi in una posizione privilegiata nell'universo. Questa constatazione ha permesso ai cosmologi di assumere la validità del *Principio Cosmologico*: l'universo appare lo stesso in tutte le direzioni a tutti gli osservatori fondamentali che si trovino a osservare allo stesso tempo cosmico. Costituisce il punto di partenza della cosmologia moderna e rappresenta una proprietà dell'universo globale, che smette di avere validità se si considerano fenomeni locali dove, come detto, l'universo non può essere considerato omogeneo.

Il Principio cosmologico permette di semplificare enormemente la rappresentazione fisico-matematica dell'universo e sta alla base della teoria del Big Bang che ne rappresenta la migliore descrizione: questo viene visto come un'entità in evoluzione che appare, oggi, in modo completamente diverso rispetto al passato.

### 1.1.2 Legge generale di espansione

Una caratteristica generale dell'universo consiste nel suo moto di espansione, scoperto da Hubble nel 1929, che viene descritto come un allontanamento progressivo nel tempo di due punti casuali nello spazio.

Nell'universo locale questo allontanamento può essere misurato tramite l'effetto Doppler che si osserva nella luce proveniente dalle galassie. La lunghezza d'onda dei picchi di emissione o di assorbimento negli spettri delle galassie risulta essere sistematicamente maggiore di quella rilevata tramite esperimenti di laboratorio, causando, quindi, uno spostamento verso il rosso (*redshift*), indice dell'allontanamento della sorgente rispetto all'osservatore (non si considerano per questa trattazione i casi in cui i moti peculiari delle galassie generano uno spostamento verso il blu, chiamato *blueshift*). Questo effetto dipende dalla distanza dell'oggetto e ha validità generale: non rappresenta, quindi, una prerogativa delle osservazioni da Terra.

Considerando un sistema di punti in espansione uniforme, ovvero una situazione in cui la distanza tra due punti casuali presi, a esempio, su una superficie di una sfera o su un piano, scali di un fattore comune  $\alpha$  dopo un certo intervallo di tempo. Si ha dunque che, considerando  $r_i(t_1)$  e  $r_i(t_2)$  distanza tra l'osservatore e la galassia  $i$  misurata in due istanti diversi:

$$\frac{r_1(t_2)}{r_1(t_1)} = \frac{r_2(t_2)}{r_2(t_1)} = [\dots] = \frac{r_n(t_2)}{r_n(t_1)} = \alpha = \text{costante} \quad (1)$$

Nel caso di espansione uniforme la quantità  $\alpha$  non deve dipendere dalla posizione, mentre può eventualmente dipendere dal tempo. La velocità di recessione di qualsiasi punto  $n$  risulta essere:

$$v_n = \frac{r_n(t_2) - r_n(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{r_n(t_1)}{t_2 - t_1} \left[ \frac{r_n(t_2)}{r_n(t_1)} - 1 \right] = \frac{r_n(t_1)}{t_2 - t_1} [\alpha - 1] = H_0 r_n(t_1) \quad (2)$$

avendo posto in  $H_0$  tutte le costanti che non dipendono dalla posizione. Una legge di espansione uniforme, quindi, risulta automaticamente in una legge di velocità-distanza del tipo  $v \propto r$ . L'equazione appena ricavata è conosciuta come legge di Hubble e la costante  $H_0$  è la *costante di Hubble* che coincide con il fattore di scala cosmico al tempo attuale.

La legge di Hubble descrive il comportamento generale delle galassie anche considerando di studiare l'universo da un altro punto di osservazione, dato che la relazione tra la velocità e la distanza è di tipo lineare. Anche immaginando di osservare da un'altra galassia si trarrebbero le stesse conclusioni notando che le sorgenti indagate si allontanerebbero dal "nuovo centro" sempre con  $v' \propto r'$ : ogni galassia percepisce le altre allontanarsi a una velocità sempre maggiore man mano che si considerano oggetti più lontani.

Va evidenziato, però, che l'effetto del redshift ha un'interpretazione "locale" che è profondamente diversa da quella "generale": nel primo caso esso è interpretato come semplice effetto Doppler dovuto al moto relativo tra sorgente e osservatore, mentre nel secondo caso fa riferimento alla trasformazione dei tempi dovuta a una variazione del fattore di scala cosmico (di cui si parlerà nel seguito), che stabilisce come si espanda l'universo al trascorrere del tempo. I periodi di emissione della sorgente risultano, infatti, diversi dai periodi misurati dall'osservatore in modo proporzionale al fattore di scala e questo genera uno "stiracchiamento" delle lunghezze d'onda dei fotoni (*redshift cosmologico*).

### 1.1.3 Metrica di Robertson-Walker

Immaginando di descrivere la materia che riempie l'universo come un fluido continuo, si possono studiare le proprietà geometriche di un universo omogeneo e isotropo. A ogni evento nello spazio-tempo quadridimensionale si può associare un quadrivettore che rappresenta le tre coordinate spaziali del punto in cui sta passando l'elemento di fluido e una coordinata temporale che corrisponde al tempo proprio, ovvero al tempo misurato da un "orologio" trasportato dall'elemento di fluido stesso. Senza l'utilizzo delle equazioni di campo della Relatività Generale, ma sfruttando solamente la validità del principio cosmologico e semplici considerazioni geometriche si ottiene la relazione che vincola la geometria dell'universo, ovvero la metrica di Robertson-Walker, che in coordinate polari è data da:

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2) \right] \quad (3)$$

dove  $r$ ,  $\theta$  e  $\psi$  sono le *coordinate comoventi* e contrassegnano il punto spaziale che viene attraversato dall'elemento di fluido (in coordinate polari,  $r$  adimensionale),  $t$  è il tempo proprio,  $a(t)$  è il *fattore di scala* o *parametro di espansione* e  $k$  è il *parametro di curvatura*.  $k$  è una costante che, riscalandosi propriamente la coordinata radiale comoving  $r$ , può assumere i valori +1, 0, -1 per universi rispettivamente a curvatura positiva, nulla e negativa. Ai tre valori che può assumere  $k$  vengono associati diversi modelli di universo:

- $k = 0$ : universo *piatto*. La sezione spaziale della Robertson-Walker si riduce allo spazio Euclideo:

$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2) \quad (4)$$

il volume racchiuso da questo universo risulta, quindi, essere infinito per qualsiasi valore del tempo cosmico;

- $k = +1$ : universo *sferico*. In questo caso la sezione spaziale diventa:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2) \quad (5)$$

$r$  può dunque assumere solo valori compresi tra zero e uno, altrimenti l'elemento di distanza radiale  $\frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}$  assumerebbe valori immaginari. Questo spazio risulta essere finito, ma senza confine: se un fotone viaggiasse in questo tipo di universo si allontanerebbe fino a un valore massimo per cui un ulteriore allontanamento radiale corrisponderebbe, in realtà, a un avvicinamento rispetto all'osservatore. Un fotone, dunque, potrebbe navigare nello spazio-tempo all'infinito incrociando più volte l'osservatore;

- $k = -1$ : universo *aperto* (o *iperbolico*). Questo universo ha proprietà simili a quelle del caso piatto, la sezione spaziale della Robertson-Walker diviene:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2) \quad (6)$$

$r$  può assumere qualsiasi valore, quindi anche il volume racchiuso da questo universo è infinito a ogni istante di tempo cosmico.

## 1.2 Dinamica cosmica

### 1.2.1 Equazioni cosmologiche di Friedmann

Partendo da una trattazione newtoniana si può ricavare l'equazione di Friedmann, che consente di descrivere l'espansione dell'universo (questa discussione, nonostante porti allo stesso risultato, non possiede lo stesso rigore di quella che considera la Relatività Generale e le equazioni di campo di Einstein).

Va evidenziato, però, come questa fondamentale equazione debba sempre essere accompagnata da un'ulteriore formula che consenta di descrivere come la densità di materia dell'universo  $\rho$  evolva nel tempo. Immaginandolo costituito da un fluido ideale che viene diffuso omogeneamente, chiamato *substrato cosmico*, la densità di materia presente nell'universo esercita una pressione  $p$  seguendo una relazione che può essere descritta tramite le equazioni dei fluidi che vengono ricavate direttamente dalle leggi della termodinamica. Il risultato finale, assumendo di avere a che fare con un'espansione reversibile adiabatica, diventa:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \quad (7)$$

I termini che contribuiscono alla variazione di densità sono due: uno dovuto all'aumento del volume dell'universo ( $\dot{\rho}$ , la materia viene "diluata"), mentre l'altro alla perdita di energia, dato che la pressione compie lavoro durante l'espansione (l'energia persa dal fluido viene trasformata in energia potenziale gravitazionale).

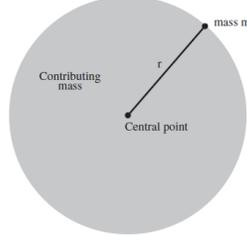


Figura 1: La particella al raggio  $r$  risente solamente la forza gravitazionale esercitata dalla materia all'interno

Tornando ora alla derivazione dell'equazione di Friedmann: si consideri una sfera di raggio  $r$  centrata in un punto qualsiasi dell'universo. Nella teoria newtoniana della gravitazione si sa che, per il teorema di Gauss, la forza che agisce su un oggetto di massa  $m$  che si trova sulla superficie di questa sfera dipende solo dalla quantità di materia contenuta all'interno :

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad (8)$$

con  $G$  costante di gravitazione universale,  $M$  massa totale contenuta nella sfera. Dato che  $F = ma = m\ddot{r}$  l'accelerazione che subisce l'oggetto risulta essere indipendente dalla propria massa e inversamente proporzionale al quadrato del raggio  $r$ .

L'energia potenziale gravitazionale è data, dunque, da:

$$V = -\frac{GMm}{r} \quad (9)$$

con la direzione della forza che indica dove l'energia gravitazionale decresce maggiormente; risulta negativo in quanto favorisce la collisione degli oggetti: la gravità è sempre attrattiva.

Per derivare l'equazione di Friedmann si parte assumendo la validità del principio cosmologico e considerando un osservatore che si trova in un mezzo uniforme in espansione con una densità di massa media  $\rho$  (massa per unità di volume).

Dato che l'universo appare lo stesso ovunque lo si guardi si può considerare come "centro" un suo punto qualsiasi e si può, dunque, tracciare una sfera di raggio  $r$  che coincide con la posizione di una particella qualsiasi di massa  $m$ . Il materiale all'interno della sfera avrà massa  $M = \frac{4\pi\rho r^3}{3}$  e dunque, per le considerazioni viste sopra, la forza risulta essere:

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{4G\pi\rho r m}{3} \quad (10)$$

mentre l'energia potenziale gravitazionale della particella:

$$V = -\frac{GMm}{r} = -\frac{4G\pi\rho r^2 m}{3} \quad (11)$$

L'equazione che descrive l'evoluzione di  $r$  si ricava dalla legge di conservazione dell'energia della particella considerata, sapendo che la sua energia cinetica è  $T = \frac{m\dot{r}^2}{2}$ , con  $\dot{r}$  velocità dovuta all'espansione. L'energia totale, somma di quella potenziale e di quella cinetica, risulta essere:

$$U = T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho r^2 m \quad (12)$$

U descrive la variazione della separazione  $r$  tra due particelle e, nonostante sia costante, non è detto che assuma lo stesso valore prendendo in considerazione una diversa coppia di particelle separate da una distanza diversa.

Assumendo la validità del principio cosmologico queste considerazioni possono essere estese a qualsiasi coppia di punti nell'universo, quindi si può cambiare il sistema di riferimento, introducendo il sistema di coordinate *comoventi* che viene "trascinato" durante l'espansione. Esso coincide con il sistema centrato su un osservatore fondamentale, ovvero che si muove solidalmente al substrato cosmico. In questo riferimento, indicato con  $\vec{x}$ , le distanze tra le galassie rimangono fissate e, dato che l'espansione viene assunta uniforme, la relazione che lo lega al sistema di coordinate *fisiche*  $\vec{r}$  considerato inizialmente è del tipo:

$$\vec{r} = a(t)\vec{x} \quad (13)$$

con  $a(t)$  *fattore di scala cosmico*, nominato in precedenza, che deve essere funzione esclusivamente del tempo per garantire l'uniformità dell'espansione: descrive di quanto la distanza fisica tra due punti aumenti con lo scorrere del tempo.

Utilizzando le nuove coordinate nell'Equazione (12), sapendo che  $\dot{x} = 0$  per definizione, si ottiene:

$$U = \frac{1}{2}m\dot{a}^2x^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho a^2x^2m \quad (14)$$

Riscrivendo la formula in un altro modo si ottiene la forma standard dell'equazione di Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \quad (15)$$

dove  $kc^2 = -2U/mx^2$ .

Questa espressione per  $k$  deve essere indipendente dalla coordinata  $x$  in modo tale da mantenere l'omogeneità dell'universo nel tempo, dato che tutti gli altri termini della Friedmann sono a loro volta indipendenti da  $x$ : si ottiene dunque una dipendenza dell'energia potenziale gravitazionale del tipo  $U \propto x^2$ . Inoltre  $k$  deve essere indipendente anche dal tempo come conseguenza della conservazione dell'energia totale e del fatto che la coordinata comoving  $x$  sia, per definizione, fissa. Si conclude, dunque, che deve essere semplicemente una costante, sia nel tempo che nello spazio: un universo in espansione deve avere un unico valore di  $k$ .

Nonostante la trattazione newtoniana non dica nulla sul significato della costante  $k$ , che risulta essere semplicemente una costante di integrazione arbitraria, tramite una discussione che sfrutta i risultati delle equazioni di campo di Einstein si può concludere che  $k$  corrisponde alla costante di curvatura che appare nella metrica di Robertson-Walker. Essa consente, quindi, di ricavare un legame tra la geometria dell'universo (piatto, sferico o iperbolico) e la sua dinamica permettendo di costruire una serie di modelli cosmologici a partire dalle soluzioni formali delle equazioni dinamiche, ovvero l'equazione di Friedmann e l'equazione dell'accelerazione (discussa nel seguito).

### 1.2.2 Equazione dell'accelerazione

Utilizzando l'equazione di Friedmann e l'equazione dei fluidi è possibile ricavare la relazione che indica l'accelerazione del fattore di scala. Differenziando la Friedmann, infatti si ottiene:

$$2\frac{\dot{a}}{a}\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} + 2\frac{kc^2\dot{a}}{a^3} \quad (16)$$

Sostituendo a questa l'equazione dei fluidi per  $\dot{\rho}$  (equazione (7)) e riscrivendola nel modo corretto, si arriva alla forma standard per l'equazione dell'accelerazione:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) \quad (17)$$

Questa non dipende dal parametro di curvatura  $k$ . Illustra come la presenza di una pressione  $p$  generata dalla materia faccia decelerare l'espansione dell'universo a causa dell'aumento della forza gravitazionale.

### 1.2.3 Parametri cosmologici

I parametri cosmologici sono dei parametri fisici che consentono di descrivere lo stato dinamico dell'universo.

La costante di Hubble  $H_0$ , che determina il tasso di espansione *attuale* dell'universo, può essere sostituita, considerando un approccio più generale, con il *parametro di Hubble* che descrive la derivata prima del fattore di scala  $a(t)$ :

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (18)$$

Un secondo parametro può essere definito a partire dalla Friedmann utilizzando il risultato appena ricavato. Essa diventa:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \quad (19)$$

Fissando  $H(t)$  esiste un particolare valore della densità  $\rho$  che consente di avere un universo con una geometria piatta ( $k = 0$ ), questo valore è chiamato *densità critica*  $\rho_c$  e varia nel tempo dato che il parametro di Hubble dipende da esso:

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \quad (20)$$

Questo valore non corrisponde necessariamente all'effettiva densità dell'universo (nulla garantisce a priori che questo sia piatto), ma risulta utile riferire il *parametro di densità*  $\Omega$  a questa quantità in modo da renderlo adimensionale:

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} = \frac{8\pi G}{3H^2(t)} \rho(t) \quad (21)$$

Vi è un ulteriore parametro da considerare, ovvero il *parametro di decelerazione*  $q(t)$ . Questo risulta essere direttamente collegato alla derivata temporale seconda del fattore di scala:

$$q(t) \equiv -\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{\dot{a}^2(t)} \quad (22)$$

Riscrivendo quest'ultima formula utilizzando le equazioni della dinamica (Friedmann ed equazione dell'accelerazione) si ottiene una relazione che lega il parametro di decelerazione a quello di densità:

$$q(t) = \frac{\Omega(t)}{2} \quad (23)$$

Questa relazione risulta essere piuttosto intuitiva in quanto il rallentamento dell'espansione è dovuto al contenuto di materia gravitante nel volume medio di universo e, quindi, alla sua autogravità.

I parametri cosmologici appena definiti dalle equazioni (18), (21) e (22) possono essere messi in relazione alle proprietà geometriche dell'universo sfruttando il fatto che la costante  $k$  presente nella Friedmann coincida con il parametro di curvatura. Il risultato finale consiste in una relazione tra parametro di curvatura e di densità del tipo:

$$kc^2 = H^2(t)a^2[\Omega(t) - 1] \quad (24)$$

L'equazione descrive come da un punto di vista fisico le caratteristiche geometriche riflettono il rapporto relativo ai due ingredienti energetici fondamentali dell'universo: il contributo di materia gravitante come sorgente di potenziale gravitazionale e l'energia cinetica media dovuta al moto di espansione.

### 1.3 Costante cosmologica

Sfruttando osservazioni di Supernove di tipo 1A, considerate come *candele campione*, ovvero oggetti di luminosità nota, i cosmologi sono arrivati a concludere che l'universo sia in una condizione di espansione accelerata. Questo risultato non è comprensibile con la fisica utilizzata nelle sezioni precedenti per la descrizione dell'universo. Un modo per "risolvere" questo problema è di aggiungere un termine correttivo all'equazione di Friedmann per la dinamica cosmica chiamato *costante cosmologica*  $\Lambda$ :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (25)$$

$\Lambda$  ha la dimensione di [tempo]<sup>-2</sup> e la sua interpretazione più naturale è di un termine di energia repulsiva del vuoto che si contrappone alla gravità. In questo modo esso può essere descritto come un fluido di densità di energia a riposo  $\rho_V$  a cui corrisponde una pressione data dalla legge:

$$p_V = -\rho_V c^2 \quad (26)$$

La costante cosmologica risulta avere una pressione effettiva negativa: ciò significa che durante l'espansione dell'universo viene compiuto del lavoro sul fluido e questo consente alla densità di energia  $\rho_V$  di rimanere costante nonostante il volume di universo stia aumentando. La densità di energia del vuoto è, dunque, una costante e non dipende dal fattore di scala in quanto  $\Lambda$  deve essere *necessariamente* costante sia nel tempo che nello spazio (fatto che si deriva dalla Relatività Generale).

A priori la costante cosmologica può assumere valori sia positivi che negativi, ma considerando  $\Lambda > 0$  si ottiene un termine che agisce in modo repulsivo nell'equazione dell'accelerazione, come ci si aspetta dalle osservazioni:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3} \quad (27)$$

In particolare se assume valori sufficientemente elevati, ma abbastanza piccoli da non modificare, a esempio, le leggi del moto planetario, può arrivare a sovrastare il termine che corrisponde all'attrazione gravitazionale, portando a un'accelerazione nel moto di espansione dell'universo.

## 1.4 Inflazione

I vantaggi di ogni modello inflazionario adeguato sono quelli di risolvere il problema della piattezza dell'universo, dell'orizzonte cosmologico e dei monopoli magnetici.

- Evidenze sperimentali mostrano come la densità di materia dell'universo risulti avere un valore simile a quello della densità critica, indice del fatto che la sua geometria sia estremamente vicina al caso piatto (universo euclideo). Riscrivendo l'equazione (24) nel modo seguente:

$$|\Omega_{\text{tot}} - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2} \quad (28)$$

si deduce che se  $k = 0$  il valore della densità totale di materia dovrà sempre rimanere uguale a uno con il trascorrere del tempo. Il problema della piattezza consiste nel fatto che in realtà la funzione  $|\Omega_{\text{tot}} - 1|$  risulta essere crescente con il trascorrere del tempo sia nel caso di un universo dominato dalla materia, sia dalla radiazione. La geometria piatta sarebbe, quindi, una situazione fortemente instabile per l'universo: anche una piccola deviazione porterebbe l'universo a diventare sempre più curvo;

- Il problema dell'orizzonte è il più importante tra quelli generati dal modello del Big Bang Caldo e si riferisce alla comunicazione tra regioni differenti dell'universo. Dato che l'universo ha un'età finita, la luce può aver viaggiato solamente per una distanza finita (fatto che sta alla base della definizione di universo *osservabile*). La radiazione cosmica di fondo nelle microonde appare come un perfetto spettro di corpo nero e questo indica che, al momento dell'emissione (epoca del *disaccoppiamento*: epoca vicina al Big Bang in cui la radiazione e la materia si sono disaccoppiate, rendendo l'universo trasparente) vige una condizione di equilibrio termodinamico, ottenibile solamente nel caso in cui regioni diverse abbiano interagito tra loro in modo da raggiungere la stessa temperatura. Questa radiazione risulta essere quasi perfettamente isotropa e, quindi, anche la luce che arriva, a esempio, da parti opposte del cielo e che non ha avuto modo di comunicare durante il tragitto tra la superficie di ultimo scattering e la Terra, dovrebbe essere emessa alla stessa temperatura. Il problema consiste nel fatto che queste due regioni non hanno avuto il tempo di interagire e di portarsi alla stessa temperatura prima dell'epoca del disaccoppiamento e quindi, senza l'utilizzo di un modello cosmologico inflazionario, non si riesce a spiegare questo elevato grado di isotropia;
- L'universo è stato dominato dalla radiazione per i primi  $\sim 1000$  anni a seguito dei quali è stata, invece, la materia a prendere il sopravvento, dato che le densità di materia e quella di radiazione evolvono in modo diverso nel tempo a seguito dell'espansione cosmica. Il problema delle *"particelle relitto"* consiste nel fatto che le particelle pesanti, come i monopoli magnetici, previsti dal Modello Standard non solo dovrebbero essere stati rilevati sperimentalmente, ma dovrebbero addirittura dominare la dinamica dell'universo.

L'idea che sta alla base del modello inflazionario è che nelle primissime fasi dell'universo esso abbia subito un'espansione accelerata quasi esponenzialmente: in quest'epoca la densità di energia del vuoto dominava la densità di energia dell'universo. Il fattore di scala  $a(t)$  è cresciuto, quindi, in modo esponenziale permettendo a una piccola regione causalmente connessa (in cui è stato possibile raggiungere l'equilibrio termodinamico) di crescere fino a occupare, alla fine del periodo inflazionario, una regione più estesa dell'universo osservabile.

Esistono diverse versioni del modello inflazionario che si basano su una scelta di parametri che non hanno, a oggi, riscontri sperimentali: in una certa misura ognuno di questi modelli risulta essere, quindi, arbitrario.



## 2 Fondo cosmico di microonde

### 2.1 Radiazioni cosmiche di fondo

I fotoni costituiscono il principale mezzo di informazione che gli astronomi hanno a disposizione per indagare l'universo e per costruire teorie che spieghino la sua storia evolutiva. Oltre ai fotoni che provengono direttamente da sorgenti, individuabili tramite telescopi, una serie di scoperte a partire dagli inizi degli anni '60 ha mostrato che l'universo risulta essere pieno di fotoni diffusi di varie energie e lunghezze d'onda che fluiscono continuamente per ogni punto dello spazio-tempo. Questo "mare" di fotoni che permea in modo omogeneo l'universo viene chiamato *fondo cosmico* ed è definito come la radiazione elettromagnetica residua che proviene dall'universo quando si trovava nelle sue prime fasi evolutive, in accordo con il modello del Big Bang Caldo.

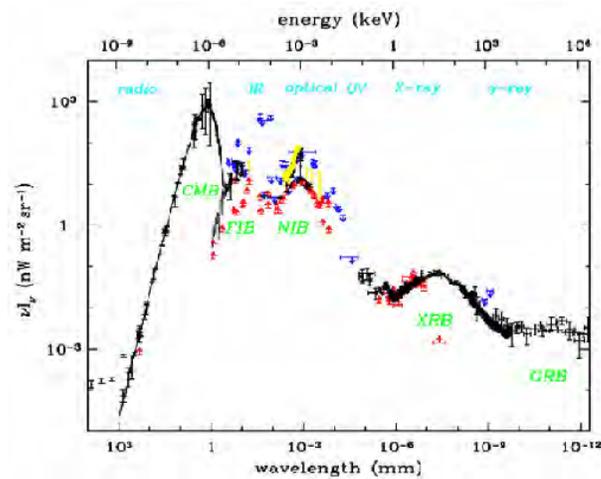


Figura 2: gráfico logaritmico dell'intensità spettrale della radiazione cosmica di fondo su un vasto intervallo di frequenze. Tra i 1000 Å e 100 Å la radiazione non è misurabile a causa del completo assorbimento dei fotoni dovuto all'idrogeno

Il fondo cosmico risulta essere particolarmente isotropo in coordinate galattiche, indice della sua origine extragalattica, e questo permette di derivare dei vincoli sull'omogeneità dell'universo.

Questa radiazione presenta uno spettro complesso ed esteso su un intervallo di frequenze molto ampio. In Figura 2, partendo dalle frequenze più basse e spostandosi verso quelle più alte (da sinistra a destra) si distinguono le seguenti componenti:

- fondo radio: emissione integrata delle radio-sorgenti extragalattiche;
- CMB: è la componente fotonica più rilevante dal punto di vista energetico, ha il picco di frequenza a  $2 \cdot 10^{11}$  Hz e, oltre a possedere un elevatissimo livello di isotropia angolare, possiede un perfetto spettro di corpo nero;
- fondo IR: emissione integrata di galassie primordiali e dai primi quasars;
- fondo ottico: emissione di galassie nell'universo ultra-profondo;

- fondo X: produzione di energia per collasso gravitazionale su buchi neri presenti nei quasar e nei Nuclei Galattici Attivi;
- fondo Gamma: dovuto ai Nuclei Galattici Attivi.

## 2.2 Origine della CMB

### 2.2.1 Superficie di ultimo scattering

Secondo la teoria del Big Bang Caldo, l'universo primordiale era costituito da un plasma in cui i fotoni altamente energetici interagivano fortemente con la materia.

Il parametro cosmologico  $\eta$  descrive il rapporto tra il numero di particelle non-relativistiche (barioni) e relativistiche (fotoni):

$$\eta \equiv \frac{n_B}{n_\gamma} \simeq 10^{-9} \quad (29)$$

con  $n_B$  e  $n_\gamma$  rispettivamente densità numeriche dei barioni e dei fotoni. Questo parametro è considerato un invariante cosmico in quanto sia  $n_B$  che  $n_\gamma$  risentono allo stesso modo dell'espansione dell'universo in assenza di creazione o distruzione di materia. L'elevato numero di fotoni presenti,  $10^9$  per ogni barione, ha permesso che, a una temperatura di  $T \geq 3000K$ , l'universo risultasse essere completamente ionizzato a causa dei continui scontri tra materia e radiazione. Durante le sue prime fasi, quando era abbastanza caldo, l'universo era, dunque, completamente opaco in quanto il cammino libero medio dei fotoni risultava essere estremamente piccolo a causa della continua interazione tramite scattering di Compton tra i fotoni e gli elettroni liberi.

A seguito dell'espansione cosmica il plasma primordiale ha iniziato a raffreddarsi e i fotoni a perdere la loro energia consentendo ai protoni di catturare gli elettroni per formare i primi atomi di idrogeno neutro. La fase appena descritta corrisponde all'*Epoca della Ricombinazione*.

Il confinamento degli elettroni negli atomi non è un processo istantaneo. Man mano che questo processo procede il cammino libero medio dei fotoni si allunga a causa della minore disponibilità di elettroni liberi fino ad arrivare a un'epoca in cui l'universo diventa completamente trasparente e la radiazione può viaggiare indisturbata dato che i fotoni non vengono più scatterati: *Epoca del Disaccoppiamento* (se la ricombinazione fosse istantanea le due epoche appena citate coinciderebbero). Si ritiene che quest'epoca sia avvenuta  $\sim 350000$  anni dopo il Big Bang, quando l'universo si è portato a una temperatura  $T \geq 3000K$ , come accennato in precedenza.

L'Epoca del Disaccoppiamento può essere considerata come la *superficie di ultimo scattering* della radiazione di fondo, così come la fotosfera lo è per i fotoni emessi da una stella, e costituisce un orizzonte oltre il quale la visione diretta dell'universo, ovvero attraverso l'utilizzo delle onde elettromagnetiche, non è possibile.

Il fondo che si osserva dal sistema di riferimento terrestre proviene, dunque, dalla superficie di ultimo scattering. La posizione spaziale di questa superficie non è assoluta: un osservatore fondamentale diverso percepirebbe comunque la radiazione cosmica di fondo provenire da ogni direzione, ovvero da una sfera centrata, ora, nella propria posizione.

### 2.2.2 CMB

Come detto in precedenza la radiazione cosmica di fondo è formata da diverse componenti che danno contributo allo spettro complessivo a frequenze diverse a seconda della loro origine. Nella Figura 2 il picco che si osserva a frequenza  $2 \cdot 10^{11}$  Hz è l'unico che proviene dalla superficie di ultimo

scattering. Questa radiazione raggiunge la Terra in modo quasi perfettamente isotropo e presenta un perfetto spettro di corpo nero a una temperatura di  $T_0 = 2.725 \pm 0.001 K$ . Lo spettro è definito dalla seguente equazione, che descrive la densità di energia sulla distribuzione di corpo nero:

$$\epsilon(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (30)$$

Questa forma spettrale è spiegabile immaginando che nel plasma primordiale, prima della ricombinazione, gli urti tra particelle e tra particelle e fotoni erano talmente frequenti da realizzare a qualsiasi epoca uno stato di completo equilibrio tra materia e radiazione, cui è corrisposto uno spettro fotonico descritto dall'equazione (30).

Integrando questa equazione si può ricavare la densità di energia totale associata a una data temperatura T:

$$\epsilon_{\text{rad}} \equiv \rho_{\text{rad}} c^2 = \alpha T^4 \quad (31)$$

con  $\alpha$  costante di corpo nero.

Sapendo che nel tempo la densità della radiazione scala come  $\rho_{\text{rad}} \propto 1/a^4(t)$  a seguito dell'espansione cosmica, si ricava che la temperatura deve seguire una legge del tipo:

$$T \propto \frac{1}{a(t)} \quad (32)$$

Questa relazione mostra come, effettivamente, l'universo si raffredda a seguito dell'aumento del fattore di scala. Quindi anche se oggi si osserva la CMB a una temperatura di  $\sim 3$  K andando indietro nel tempo e avvicinandosi al tempo del Big Bang essa doveva apparire a una temperatura via via sempre maggiore; in particolare, al momento dell'emissione, possedeva una temperatura di  $\sim 3000$  K (dal rapporto tra la temperatura osservata oggi e quella di emissione si può notare come l'universo, a quell'epoca, fosse  $\sim 1/1000$  di quello attuale).

Nonostante la distribuzione di temperatura evolva nel tempo, l'equazione (30) continua a mantenere la stessa forma dato che, a seguito dell'espansione, anche  $\nu$  diminuisce con  $1/a(t)$  a causa del redshift gravitazionale e quindi si ottiene:

- al denominatore si ha una funzione soltanto di  $\nu/T$  e dato che scalano allo stesso modo il loro rapporto rimane costante;
- al numeratore il fattore  $\nu^3$  scala come l'inverso del volume che corrisponde a un'evoluzione della densità numerica dei fotoni con un universo che si espande.

Si deduce, dunque, che mentre l'universo si espande e si raffredda la distribuzione dei fotoni continua a essere termica, descritta dalla distribuzione di corpo nero, ma a una temperatura più bassa: se in una certa epoca l'universo riesce a raggiungere una distribuzione termica, questa rimane tale anche quando i fotoni e la materia non hanno più la possibilità di interagire tra loro (Figura 3).

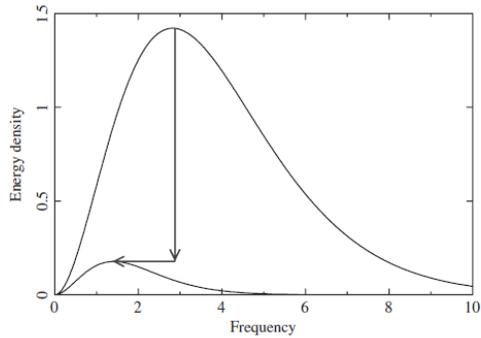


Figura 3: Evoluzione dello spettro di corpo nero a seguito dell'espansione cosmica

### 2.3 Anisotropie della CMB

Nonostante la radiazione di fondo nelle microonde risulti essere estremamente isotropa, essa presenta delle piccole oscillazioni di temperatura nella sua distribuzione spaziale. Queste anisotropie sono dell'ordine di  $\Delta T/T \sim 10^{-5}$ , con una temperatura media  $\langle T \rangle = 2.725$ , e si spiegano considerando l'universo primordiale non perfettamente omogeneo, ma che presenta delle regioni sovradense di materia e radiazione. Le "macchie" visibili nella Figura (4) rappresentano, quindi, il risultato di fluttuazioni gravitazionali sulla superficie di ultimo scattering dettate dal *potenziale gravitazionale primordiale*  $\phi$  determinato alla fine del periodo inflazionario.

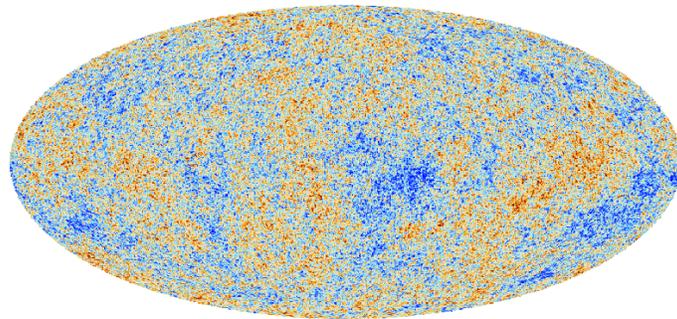


Figura 4: Mappa delle anisotropie della radiazione cosmica di fondo nelle microonde ottenuta con la missione Planck (ESA)

L'universo primordiale, secondo il modello del Big Bang Caldo, era costituito da un plasma di barioni, *cold dark matter*, fotoni e neutrini di massa nulla: la gravità ha guidato i barioni nelle regioni sovradense generate dal potenziale  $\phi$  creando delle buche di potenziale dentro cui vengono trascinati i fotoni (perturbazioni della curvatura primordiale generata dall'inflazione). La densità

del fluido cosmico è, così, cresciuta finchè la pressione di radiazione è diventata abbastanza forte da generare delle oscillazioni acustiche. Prima dell'epoca della ricombinazione, quindi, materia e radiazione erano indistinguibili tra loro e oscillavano insieme in una condizione fortemente interagente (tramite scattering di Compton), mentre in seguito queste due componenti hanno subito destini molto differenti tra loro a causa dell'espansione. Dopo il disaccoppiamento le perturbazioni della componente barionica sono state libere di crescere fino a generare le instabilità gravitazionali che hanno portato alla formazione dei vari elementi che caratterizzano la struttura su grande scala dell'universo (galassie e cluster).

I fotoni sovradensità nelle buche di potenziale che subiscono redshift gravitazionale e le oscillazioni acustiche sono, dunque, i processi che stanno alla base delle anisotropie nella temperatura della CMB.

## 2.4 Spettro di potenza e perturbazioni

### 2.4.1 Spettro delle perturbazioni

L'anisotropia della CMB è dunque immaginata, nell'ambito di un universo inflazionario, come risultato di naturali fluttuazioni primordiali di carattere quantistico su scale microscopiche, riscaldate su scale di interesse cosmologico durante il periodo di espansione accelerata. L'evoluzione dello spettro di queste perturbazioni dipende dalla natura delle particelle che dominano l'universo (barioni o no, calde o fredde) e dalle caratteristiche dello spettro.

La distribuzione di densità della materia dell'universo può essere descritta come una sovrapposizione di onde piane che evolvono indipendentemente l'una dall'altra nel caso in cui valga l'approssimazione lineare dell'evoluzione delle perturbazioni.

Si consideri un volumetto di universo  $V_u$ , a esempio un cubo di lato  $L$  molto maggiore rispetto alla massima scala in cui l'universo presenta una struttura dovuta alle fluttuazioni. La fluttuazione di densità relativa al volume considerato  $\delta(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x}) - \langle \rho \rangle}{\langle \rho \rangle}$  può essere sviluppata in serie di Fourier, avendo definito  $\langle \rho \rangle$  densità media nel volume  $V_u$  e  $\rho(\vec{x})$  la densità nel punto contrassegnato con il raggio vettore  $\vec{x}$ :

$$\delta(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{k}) = \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}}^* \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{k}) \quad (33)$$

dove  $\vec{k}$  è il numero d'onda, mentre  $\delta_{\vec{k}}$  e  $\delta_{\vec{k}}^*$  sono rispettivamente i coefficienti della trasformata e dell'antitrasformata di Fourier (la serie di questi coefficienti cambia se si cambia il volume considerato).

Per le proprietà di omogeneità e isotropia dell'universo su grandi scale  $\delta_{\vec{k}}$  dipende solamente dal modulo del numero d'onda  $\vec{k}$  e non dalla sua direzione: questo dice che, mentre il valore della perturbazione  $\delta_{\vec{x}} \equiv \delta$ , mediato su tutto lo spazio, è identicamente nullo, il valore della sua media quadratica, ovvero la sua *varianza*, in generale non lo è:

$$\sigma^2 \equiv \langle \delta^2 \rangle = \sum_{\vec{k}} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle = \frac{1}{V_u} \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}}^2 \quad (34)$$

Facendo tendere  $V_u$  all'infinito si ottiene l'equazione:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^2 dk \quad (35)$$

avendo posto per semplicità  $\delta_k^2 = P(k)$ : questa quantità è chiamata *spettro di potenza* delle perturbazioni. La varianza non dipende dalle coordinate, ma solamente dal tempo in seguito all'evoluzione delle perturbazioni e descrive l'ampiezza delle oscillazioni senza dire nulla sulla loro struttura spaziale.

In generale si assume che lo spettro delle perturbazioni  $P(k)$ , entro un certo intervallo di  $k$ , venga descritto da una legge di potenza:

$$P(K) = Ak^n \quad (36)$$

avendo chiamato  $n$  l'*indice spettrale*.

## 2.4.2 Fluttuazioni di temperatura

Le fluttuazioni primordiali generate dal potenziale gravitazionale  $\phi$  sono generate da processi quantistici e risultano essere, quindi, casuali. Questo implica il fatto che la CMB e la distribuzione di materia, che riflettono le proprietà di queste oscillazioni, possano essere trattate come campi scalari casuali. Le predizioni teoriche non si concentrano su specifiche realizzazioni, a esempio della temperatura, ma sulle proprietà statistiche, come lo spettro di potenza.

Lo sviluppo in multipoli è una serie che rappresenta una funzione dipendente da variabili angolari. La serie viene solitamente troncata a un determinato ordine  $n$  e approssima in modo sempre più fedele la funzione al crescere di  $n$ . Permette di semplificare la funzione considerata in quanto i termini che compaiono sono formalmente identici a quelli di semplici configurazioni spaziali opportunamente scelte: si può considerare lo sviluppo come scomposto nella somma dei potenziali dovuti, nell'ordine, a una singola carica (monopolo), un dipolo, un quadrupolo, e così via.

Avendo definito l'espansione in multipolo e considerando il campo delle fluttuazioni di temperatura della CMB definito su una sfera, si può effettuare lo sviluppo in coordinate sferiche (utilizzando le armoniche sferiche):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{T}(\theta, \varphi) &= \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \\ &< a_{\ell_1 m_1}^* a_{\ell_2 m_2} > = C_{\ell_1} \delta_{\ell_1}^{\ell_2} \delta_{m_1}^{m_2} \end{aligned} \quad (37)$$

con  $a_{\ell m}$  coefficiente dell'armonica sferica  $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ ,  $m$  orientazione e  $\ell$  frequenza angolare. Quest'ultima descrive la distanza angolare alla quale si presentano i massimi e i minimi della temperatura attraverso la relazione  $\theta \sim \frac{\pi}{\ell}$  con  $\theta$  scala angolare dell'oscillazione (a esempio  $\ell = 0$  descrive un profilo di temperatura costante, se  $\ell = 1$  i massimi e i minimi sono intervallati da  $180^\circ$ , mentre per  $\ell = 2$  risultano intervallati da  $90^\circ$ ).

Le equazioni (37) descrivono lo spettro di potenza angolare della temperatura e mostrano, quindi, le deviazioni dalla temperatura media come descritto in precedenza (Figura 5).

## 2.5 Utilità dello studio della CMB

Le piccole variazioni di temperatura che si osservano sulla superficie di ultimo scattering sono utili per determinare in che modo gli oggetti, a esempio le galassie, si sono formati nell'universo. Le fluttuazioni generate dal potenziale gravitazionale primordiale a seguito dell'inflazione si sono manifestate in "valli" e "picchi" di densità producendo regioni sovradense che sono diventate siti per la formazione delle galassie. Lo schema di increspature della CMB, dovute alle onde acustiche

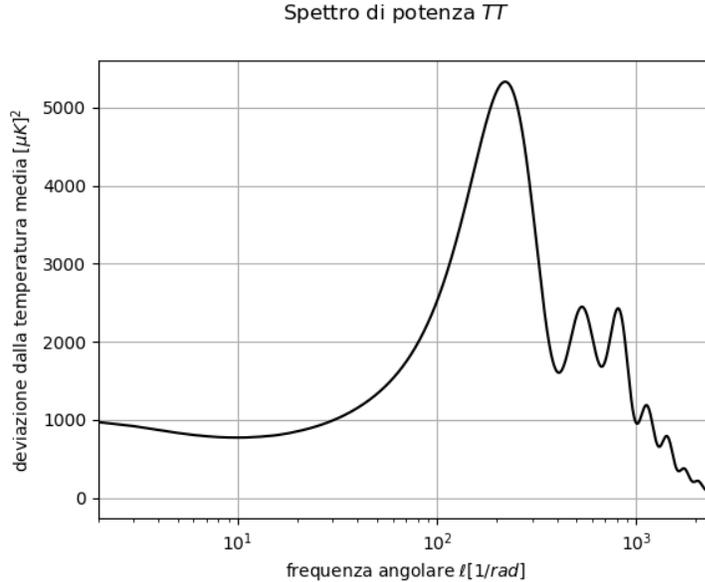


Figura 5: Spettro di potenza angolare della temperatura

accennate in precedenza, può essere sviluppata in serie armoniche ed è considerata una "firma" dell'inflazione.

Le "oscillazioni" della materia hanno la stessa fisica delle oscillazioni del fondo cosmico, ma appaiono in ere cosmiche molto diverse. Le piccole differenze di temperatura che si rilevano nella CMB, dovute alle variazioni di densità, infatti, si riflettono, nell'universo vicino, come piccole variazioni nella distanza tra le galassie rispetto a una distribuzione uniforme. L'oscillazione definisce una scala caratteristica periodica che si manifesta con una probabilità leggermente maggiore di trovare due galassie a una distanza di 500 Mpc rispetto a 400 o 600 Mpc: confrontando queste oscillazioni con quelle del fondo cosmico è possibile mappare l'evoluzione dell'universo tra le due diverse epoche.

La CMB può anche fornire informazioni sulla curvatura dell'universo che può essere misurata a partire dalla grandezza delle "macchie" osservabili nella sua distribuzione. In uno spazio curvo la luce viene piegata lungo il tragitto come se agissero delle lenti, a esempio nel caso di un universo con curvatura positiva un oggetto apparirebbe con dimensioni maggiori rispetto a quelle reali. Conoscendo la grandezza effettiva delle "macchie" della CMB dovute all'anisotropia nella temperatura (generata dalle oscillazioni acustiche), la loro grandezza osservata nel cielo dopo l'effetto del *lensing* può, dunque, dare informazioni sulla curvatura dell'universo.

La misura della curvatura, che è generata dalla presenza di materia (una maggiore quantità di materia determina una curvatura maggiore), può fornire delle stime sulla futura evoluzione dell'universo. Secondo le leggi della dinamica, infatti, la densità di materia presente può portare a un rallentamento nell'espansione dovuto all'attrazione gravitazionale, fino addirittura a essere abbastanza elevata da determinare un ricollasso dell'universo (chiamato "*Big Crash*").



### 3 Polarizzazione CMB

#### 3.1 Scattering di Thomson

Lo scattering di Thomson consiste in uno scattering elastico di radiazione elettromagnetica da parte di una particella carica libera: il campo elettromagnetico dell'onda incidente accelera la particella inducendo l'emissione di radiazione alla stessa frequenza dell'onda incidente che risulta essere, quindi, diffusa. La spiegazione classica di questo processo consiste nel considerare la particella carica in moto non relativistico che viene accelerata dal campo elettrico dell'onda (l'effetto del campo magnetico può essere trascurato). La particella si muoverà nella stessa direzione del campo elettrico oscillante generando radiazione di dipolo che irradia in modo più intenso nelle direzioni perpendicolari al suo moto e in queste direzioni la radiazione sarà polarizzata lungo la direzione del moto della particella: in base alla posizione dell'osservatore, la radiazione prodotta in un elemento di volume apparirà più o meno polarizzata.

Nel seguito vengono discusse due configurazioni particolari in cui la radiazione può interagire con un elettrone libero immaginando l'osservatore posizionato lungo la direzione  $+\hat{Z}$ .

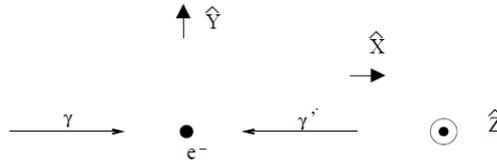


Figura 6: Radiazione incidente su un elettrone nella direzione  $\pm\hat{X}$

Nella Figura 6 la radiazione incidente fa oscillare l'elettrone nella direzione  $\pm\hat{Y}$  facendo scatterare la radiazione nella direzione  $\pm\hat{Z}$ .

Se la radiazione incidente fosse polarizzata linearmente con il campo elettrico  $\vec{E}$  nella direzione di  $\hat{Z}$  l'elettrone oscillerebbe lungo questa direzione e non emetterebbe radiazione di dipolo verso l'osservatore. Se fosse, invece, polarizzata lungo  $\hat{Y}$  l'osservatore vedrebbe la radiazione di dipolo polarizzata linearmente in questa direzione; lo stesso effetto si avrebbe se la radiazione incidente arrivasse solamente dalla direzione  $\pm\hat{Y}$ : in questo caso l'osservatore percepirebbe una polarizzazione lungo  $\pm\hat{X}$ .

Nel caso in cui la radiazione incidente non fosse polarizzata, solo la componente con  $\vec{E} // \hat{Y}$  verrebbe scatterata verso l'osservatore, che vedrebbe, quindi, la radiazione polarizzata lungo  $\hat{Y}$ .

Nella configurazione mostrata in Figura 7 si possono avere due diverse configurazioni a seconda dell'intensità della radiazione incidente nelle due direzioni: se incide con uguale intensità lungo  $\pm\hat{X}$  e  $\pm\hat{Y}$  le polarizzazioni lungo  $\pm\hat{X}$  e  $\pm\hat{Y}$  vengono cancellate e la radiazione osservata risulta essere non polarizzata; al contrario se, a esempio, l'intensità della radiazione lungo  $\pm\hat{X}$  eccede leggermente quella in  $\pm\hat{Y}$  la radiazione osservata risulta essere polarizzata lungo quest'ultima direzione.

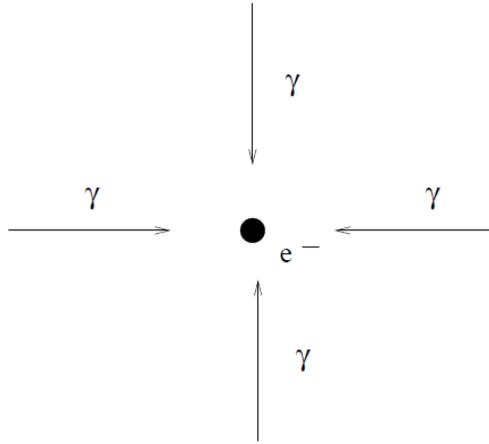


Figura 7: Radiazione incidente su un elettrone nelle direzioni  $\pm\hat{X}$  e  $\pm\hat{Y}$

### 3.2 Parametri di Stokes

I parametri di Stokes sono un insieme di valori che descrivono lo stato di polarizzazione della radiazione elettromagnetica.

Considerando un'onda monocromatica che si propaga lungo la direzione  $\hat{z}$  si può definire un vettore  $\vec{E}$  che rappresenta il suo campo elettrico e che può essere scomposto nelle componenti lungo  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ :

$$\begin{aligned} E_x &= a_x \cos(\omega t - \xi_x) \\ E_y &= a_y \cos(\omega t - \xi_y) \end{aligned} \quad (38)$$

L'intensità si ricava direttamente dalla somma quadratica delle ampiezze d'onda presenti nelle equazioni precedenti:

$$I = a_x^2 + a_y^2 \quad (39)$$

mentre i parametri di Stokes sono definiti come segue:

$$\begin{aligned} Q &= a_x^2 - a_y^2 \\ U &= 2a_x a_y \cos(\xi_x - \xi_y) \\ V &= 2a_x a_y \sin(\xi_x - \xi_y) \end{aligned} \quad (40)$$

I primi due, Q e U, descrivono la polarizzazione lineare dell'onda: il primo quantifica la polarizzazione nelle direzioni x-y, mentre il secondo lungo gli assi ruotati di  $45^\circ$  (Figura 8).

Il parametro V non verrà considerato in questa trattazione in quanto descrive lo stato della polarizzazione circolare che non viene indotta dallo scattering di Thomson.

Utilizzando i parametri di Stokes Q e U si può descrivere la polarizzazione tramite un vettore "headless"  $P$ , ovvero che, differenza di un vettore "tradizionale", trasforma in se stesso a seguito di

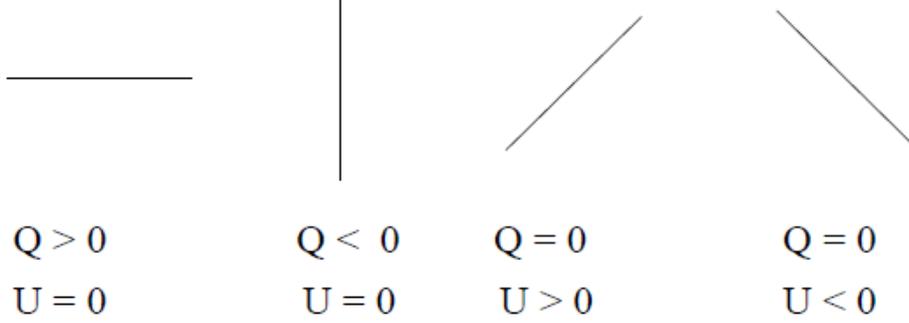


Figura 8: Polarizzazione lineare descritta tramite i parametri di Stokes Q e U

una rotazione di  $180^\circ$ , invece che di  $360^\circ$ :

$$\begin{aligned} |P| &= \sqrt{Q^2 + U^2} \\ \alpha &= \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{U}{Q}\right) \end{aligned} \quad (41)$$

$|P|$  è il grado di polarizzazione dell'onda, mentre  $\alpha$  è la sua orientazione rispetto all'asse delle x.

Ruotando gli assi x-y di un angolo  $\alpha$  attorno alla linea di vista (asse  $\hat{z}$ ), il nuovo sistema di coordinate x'-y' è rappresentato da:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (42)$$

Come anticipato costruendo un vettore con i parametri di Stokes (Q, U) si vede come questi, invece, non trasformino come un vettore a seguito della stessa rotazione degli assi:

$$\begin{pmatrix} Q' \\ U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix} \quad (43)$$

Formalmente Q e U sono due quantità che, a seguito di un cambiamento del sistema di coordinate generato da A matrice di rotazione  $x'_i = A_i^k x_k$ , trasforma come  $P'_{ij} = A_i^k A_j^l P_{kl}$ : Q e U costituiscono, quindi, le componenti di un tensore simmetrico  $2 \times 2$  di traccia nulla, che trasforma effettivamente come tale:

$$\begin{pmatrix} Q' & U' \\ U' & -Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & U \\ U & -Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad (44)$$

### 3.3 Meccanismo di formazione

Nei capitoli precedenti si è anticipato come l'universo primordiale fosse costituito da un plasma fortemente interagente in cui materia e radiazione fossero indistinguibili tra loro e si mantenessero alla stessa temperatura interagendo tramite scattering di Compton (urti perfettamente elastici ad alta energia). Con l'espansione cosmica l'universo ha iniziato a raffreddarsi fino a generare il

disaccoppiamento tra le due componenti sulla superficie di ultimo scattering su cui, invece, prevaleva lo scattering di Thomson che avviene a più basse energie dato che, a quell'epoca, le particelle si muovevano a velocità non relativistiche.

Come illustrato precedentemente quando un'onda elettromagnetica incide su una particella carica, come gli elettroni liberi presenti nel plasma primordiale, induce un'oscillazione di queste particelle nella direzione del campo elettrico dell'onda, ovvero nella direzione della polarizzazione. L'intensità della radiazione scatterata risulta, quindi, piccata nella direzione perpendicolare a quella dell'oscillazione e la sua polarizzazione è nella stessa direzione di quella della radiazione incidente.

Se il campo di radiazione incidente è isotropo gli stati di polarizzazione ortogonali che provengono da direzioni separate da un angolo di  $90^\circ$  si bilanciano tra loro facendo sì che la radiazione scatterata risulti essere non polarizzata.

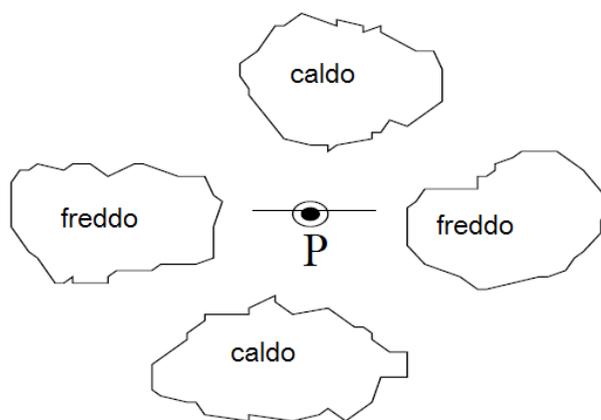


Figura 9: Radiazione scatterata dal centro di un quadrupolo di temperatura

Se, invece, il campo di radiazione incidente possiede una variazione di quadrupolo in temperatura o in intensità, ovvero possiede picchi intervallati da angoli di  $90^\circ$ , la radiazione scatterata risulta essere polarizzata linearmente. In Figura 9 è riportato uno schema in cui viene raffigurata la radiazione scatterata al centro di un quadrupolo di temperatura: la polarizzazione risulta essere lungo la direzione delle "macchie" fredde del campo di temperatura. Se le fluttuazioni di temperatura cambiassero segno (ovvero se le posizioni delle regioni calde e fredde si scambiassero) la direzione della polarizzazione risulterebbe ruotata di  $90^\circ$ .

Il grado di polarizzazione della radiazione scatterata è proporzionale alla grandezza del quadrupolo della radiazione che incide sull'elettrone e la sua orientazione è determinata dall'orientazione di questo quadrupolo secondo la dipendenza angolare dello scattering di Thomson:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} |\hat{\epsilon} \cdot \hat{\epsilon}'|^2 \quad (45)$$

con  $\sigma_T$  sezione d'urto di Thomson,  $\hat{\epsilon}$  e  $\hat{\epsilon}'$  polarizzazioni della radiazione incidente e scatterata.

In termini di un'espansione in multipoli del campo di radiazione in armoniche sferiche,  $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ , il quadrupolo è caratterizzato, dunque, da una frequenza angolare  $\ell = 2$  e questo implica una

configurazione con cinque gradi di libertà a seconda dell'orientazione assunta dal quadrupolo dato che i possibili valori che possono essere attribuiti a  $m$  sono  $0, \pm 1, \pm 2$ .

A seguito delle considerazioni appena svolte il fondo cosmico di microonde *deve* risultare polarizzato: osservare variazioni angolari nella temperatura della CMB implica che anche sulla superficie di ultimo scattering (al momento dell'emissione) esistessero delle disomogeneità nella temperatura, e quindi nell'intensità. In generale, dunque, una determinata particella carica su questa superficie vede una distribuzione non isotropa della radiazione incidente, generando una radiazione scatterata che presenta un grado di polarizzazione dipendente dal livello di anisotropia.

Per capire lo schema di polarizzazione osservabile nella CMB ci si può ridurre, quindi, allo studio delle fluttuazioni di quadrupolo della temperatura sulla superficie di ultimo scattering.

### 3.4 Perturbazioni della temperatura

Le perturbazioni di temperatura hanno tre diverse fonti geometriche che corrispondono a diversi schemi di polarizzazione: scalari (di compressione), vettoriali (vorticose) e tensoriali (onde gravitazionali).

- Perturbazioni scalari: corrispondono alla configurazione con  $\ell = 2$  e  $m = 0$ . Rappresentano fluttuazioni (adiabatiche) nella densità del fluido cosmico sulla superficie di ultimo scattering dovute alle fluttuazioni di energia dettate dal potenziale gravitazionale primordiale definito dall'inflazione. Coincidono, quindi, alle perturbazioni che consentono la formazione di strutture a seguito dell'instabilità gravitazionale.

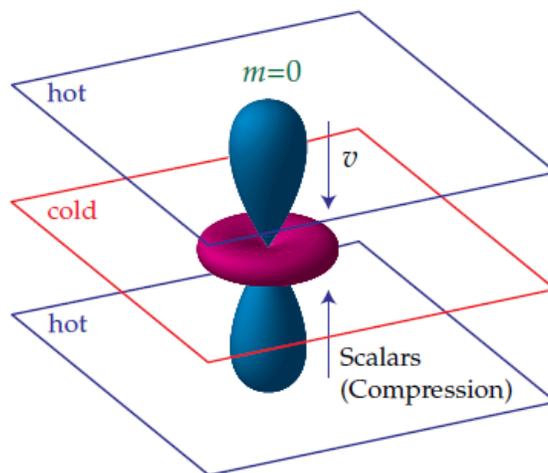


Figura 10: Momento di quadrupolo scalare ( $\ell = 2, m = 0$ ). Il flusso dei fotoni dalle regioni calde (blu) a quelle fredde (rosso) produce lo schema  $Y_{2,0}$  con simmetria azimutale

Si può introdurre il concetto di temperatura *effettiva* tramite la seguente relazione:

$$(\Delta T/T)_{\text{eff}} = (\Delta T/T) + \Phi \quad (46)$$

con  $\Phi$  potenziale gravitazionale.

Con il tempo il gradiente di temperatura effettiva e quello gravitazionale generano un flusso globale dei fotoni che si spostano dalle regioni calde alle regioni con una temperatura effettiva minore. Dove la gravità sovrasta la pressione di radiazione si crea un flusso di materia che genera dei picchi di densità: inizialmente queste regioni sovradense risultano essere più fredde in quanto i fotoni che tentano di risalire i muri di potenziale perdono energia durante il processo; i fotoni fluiscono, dunque, da regioni sottodense verso regioni sovradense.

Un elettrone che si trova, a esempio, al centro di una regione sovradensa vede l'intensità della radiazione incidente maggiore nella direzione del flusso e minore nel piano ortogonale a esso: l'effetto totale dello spostamento dei fotoni è, dunque, descritto da un quadrupolo locale modulato da un'onda piana nello spazio,  $-Y_{2,0}(\hat{n})exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})$ , con  $\pm\vec{k}$  direzione della polarizzazione che coincide con la direzione lungo cui fluiscono i fotoni. Il segno negativo denota il fatto che i fotoni che scorrono verso regioni fredde sono caldi. La polarizzazione della radiazione scatterata picca dove la variazione di temperatura è perpendicolare alla normale  $\hat{n}$ ;

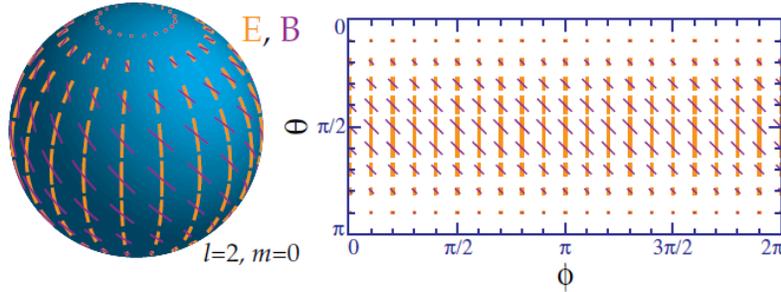


Figura 11: Schema di polarizzazione per  $\ell = 2$  e  $m = 0$ . La perturbazione scalare genera lo schema di modi E (in giallo) sulla sfera; una rotazione di  $45^\circ$  rappresenta lo schema di modi B (in viola) come mostrato in figura

- Perturbazioni vettoriali: corrispondono alla configurazione con  $\ell = 2$  e  $m = \pm 1$ . Rappresentano i moti vorticosi della materia e non sono associati alle perturbazioni di densità, ma all'effetto Doppler dovuto alla velocità del fluido. Queste perturbazioni vengono smorzate dall'espansione cosmica e si ritiene siano trascurabili;
- Perturbazioni tensoriali: corrispondono alla configurazione con  $\ell = 2$  e  $m = \pm 2$ . Rappresentano perturbazioni della metrica dello spazio-tempo che possono essere visualizzate come onde gravitazionali.

Una perturbazione dovuta a un'onda gravitazionale piana rappresenta uno "stiracchiamento" dello spazio nel piano della perturbazione. Immaginando le particelle "bersaglio" disposte lungo una circonferenza si osserva, a seguito del passaggio dell'onda o di una variazione della sua ampiezza, una distorsione di questa configurazione in un'ellisse con semi-asse maggiore e semi-asse minore che oscillano seguendo lo stesso periodo, rispettivamente, delle creste e delle valli dell'onda gravitazionale (Figura 12).

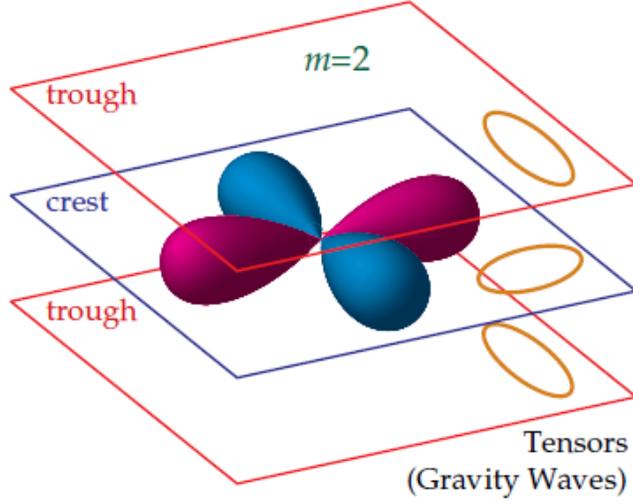


Figura 12: Momento di quadrupolo tensoriale ( $\ell = 2, m = 2$ ). Dato che l'onda gravitazionale distorce lo spazio nel piano della perturbazione la radiazione acquista un momento di quadrupolo con  $m = 2$ . I lobi non risultano più allineati con il flusso di velocità (come avviene per le perturbazioni scalari)

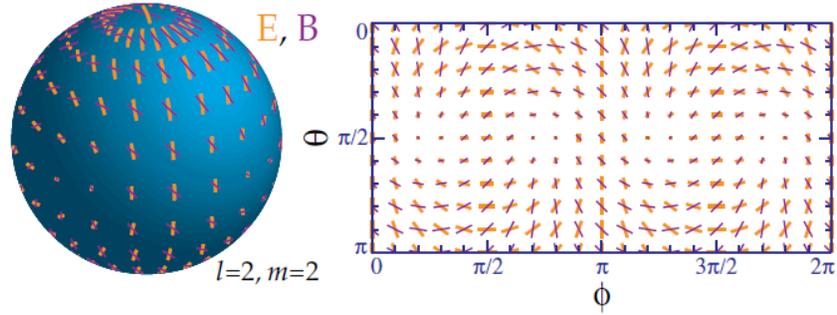


Figura 13: Schema di polarizzazione per  $\ell = 2$  e  $m = 2$ . Lo scattering dovuto a un tensore genera lo schema dei modi E (in giallo) e quello dei modi B (in viola) come mostrato in figura

Nonostante le perturbazioni scalari, vettoriali e tensoriali conducano a schemi di polarizzazione per la CMB diversi tra loro, lo schema di polarizzazione osservabile nel cielo non distingue i diversi valori che può assumere l'orientazione dei quadrupoli  $m = 0, \pm 1, \pm 2$ . Assumendo che l'isotropia della CMB valga statisticamente, infatti, si può intuire come la media di tutti i possibili multipoli relativi a un valore fissato di  $\ell$  risultino essere indipendenti da  $m$ .

### 3.5 Modi E e B

Si immagini, ora, di restringere l'analisi al caso di cielo piatto, condizione verificata se si prende in considerazione una piccola regione in cui la superficie di ultimo scattering può essere approssimata a un piano. Si supponga di osservare, oltre allo schema di temperatura, una radiazione polarizzata che viene quantificata dai parametri di Stokes  $Q(\hat{n})$  e  $U(\hat{n})$  misurate in funzione della posizione nel cielo  $\hat{n}(\theta, \Phi)$ . Dato che i parametri Q e U rappresentano le componenti di un tensore  $2 \times 2$  simmetrico di traccia nulla, questi dipendono dal sistema di riferimento considerato. Una volta misurati  $Q(\vec{\theta})$  e  $U(\vec{\theta})$  come funzione della posizione  $\vec{\theta} = (\theta_x, \theta_y)$  in una regione piatta di cielo, si può definire la polarizzazione sia tramite un tensore  $2 \times 2$ :

$$P_{ab} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q(\vec{\theta}) & U(\vec{\theta}) \\ U(\vec{\theta}) & -Q(\vec{\theta}) \end{pmatrix} \quad (47)$$

sia come numero complesso:

$$P = |P| \exp(2i\alpha) = \sqrt{Q^2 + U^2} \exp(2i\alpha) = Q + iU \quad (48)$$

con modulo e orientazione rispetto all'asse x descritti dalle equazioni (41).

I vettori possono sempre essere scomposti in una componente *curlfree* (elettrica, E) e *divergenceless* (magnetica, B):  $\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}$ .

Allo stesso modo qualsiasi schema di polarizzazione osservabile in cielo può essere separato nelle sue componenti "elettrica" E e "magnetica" B. Dato che P trasforma come un tensore simmetrico si utilizza una decomposizione simile a quella vettoriale, ma che coinvolge le derivate seconde covarianti dell'ampiezza della polarizzazione. A livello locale i modi E e B, che corrispondono rispettivamente alla componente di gradiente (G) e alla componente "curl" (C) del campo tensoriale, risultano essere indipendenti dall'orientazione degli assi x-y e sono descritti dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \nabla^2 P_G &= \partial_a \partial_b P_{ab} \\ \nabla^2 P_C &= \epsilon_{ac} \partial_b \partial_c P_{ab} \end{aligned} \quad (49)$$

con  $\epsilon$  tensore antisimmetrico. Si possono scrivere relazioni più esplicite per le componenti G e C nello spazio di Fourier utilizzando le trasformate e le antitrasformate:

$$\begin{aligned} P_{ab}(\vec{\theta}) &= \int \frac{d^2 \vec{\ell}}{(2\pi)^2} \tilde{P}_{ab}(\vec{\ell}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{\theta}) \\ \tilde{P}_{ab}(\vec{\ell}) &= \int d^2 \vec{\theta} P_{ab}(\vec{\theta}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{\theta}) \end{aligned} \quad (50)$$

Le componenti di Fourier di  $P_G(\vec{\theta})$  e  $P_C(\vec{\theta})$  risultano, quindi:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_G(\vec{\ell}) &= \frac{1}{2} \frac{(\ell_x^2 - \ell_y^2) \tilde{Q}(\vec{\ell}) + 2\ell_x \ell_y \tilde{U}(\vec{\ell})}{\ell_x^2 + \ell_y^2} \\ \tilde{P}_C(\vec{\ell}) &= \frac{1}{2} \frac{2\ell_x \ell_y \tilde{Q}(\vec{\ell}) - (\ell_x^2 - \ell_y^2) \tilde{U}(\vec{\ell})}{\ell_x^2 + \ell_y^2} \end{aligned} \quad (51)$$

Le componenti di Fourier appena ricavate sono delle quantità scalari: questo permette di costruire lo spettro di potenza dei modi E e dei modi B in modo analogo a come si costruisce lo spettro di potenza della temperatura.

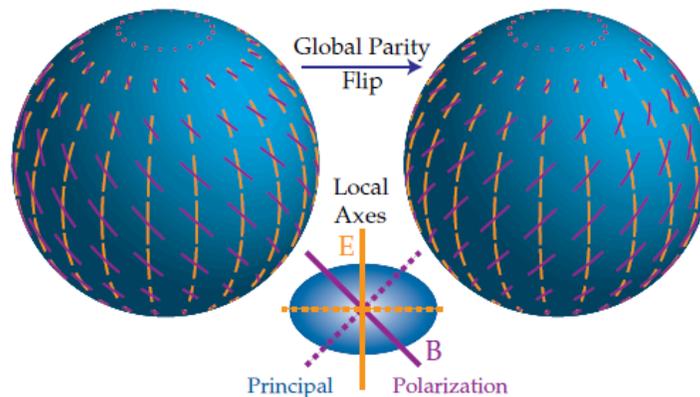


Figura 14: I modi elettrici (E) e magnetici (B) vengono distinti tra loro in base al loro comportamento a seguito di un'inversione di parità  $\hat{n} \rightarrow -\hat{n}$ . Nel caso rappresentato in figura  $\ell = 2$  e  $m = 0$  facendo sì che i modi E risultino pari e B dispari. La distinzione locale tra i due modi è che l'asse di polarizzazione risulta allineato con l'asse di polarizzazione per i modi E e inclinato di  $45^\circ$  per i modi B. Le linee "punteggiate" raffigurano la configurazione in caso di cambio di segno nella polarizzazione

Globalmente le armoniche sferiche definite dai multipoli dei modi E e dei modi B presentano una parità rispettivamente di  $(-1)^\ell$  e di  $(-1)^{\ell+1}$  e questo si traduce nel fatto che a seguito di un'inversione di parità  $\hat{n} \rightarrow -\hat{n}$  i modi E non cambino per valori pari di  $\ell$ , mentre i modi B cambiano di segno nel modo illustrato in Figura 14.

Perturbazioni scalari (in densità) della CMB generano solamente modi E con l'intensità che svanisce andando verso i poli (come è possibile notare in Figura 11) dato che l'asse di polarizzazione è allineato con il flusso di velocità dei fotoni e risulta, quindi, allineato con  $\vec{k}$ : l'onda piana modula l'ampiezza lungo la direzione della polarizzazione.

Perturbazioni tensoriali (onde gravitazionali) generano, invece, sia modi E che modi B (Figura 13) dato che il vettore d'onda  $\vec{k}$ , ovvero la modulazione, non è allineata con l'asse della polarizzazione.

Attualmente la rilevazione dei modi E non risulta perfettamente ottimale a causa degli errori generati dal forte rumore strumentale: si ritiene, dunque, che nel futuro si possano ottenere risultati sempre migliori.

I modi B invece non sono ancora stati misurati. Le ricerche svolte fino a ora, però, hanno contribuito a fissare dei limiti superiori di cui la migliore stima è stata fornita dal satellite Planck dell'ESA in collaborazione con il rilevatore BICEP2 e con l'esperimento Keck Array. La ricerca dei modi B sarà l'obiettivo principale per la maggior parte delle future osservazioni della CMB in quanto risultano direttamente collegati alla propagazione delle onde gravitazionali, minuscole fluttuazioni nel tessuto dello spaziotempo, che si ritiene siano state generate durante la fase inflazionaria primordiale.

I modi B nella CMB rappresentano, quindi, un'indicazione fisicamente valida della presenza di onde gravitazionali primordiali e una conferma del modello inflazionario (concetto che verrà chiarito nel seguito).

## 4 Spettro di potenza e parametri cosmologici

### 4.1 Costruzione degli spettri

Dopo aver misurato Q e U si possono estrapolare i modi E e B, come descritto precedentemente, e l'espansione in armoniche sferiche della polarizzazione con multipoli  $a_{\ell m}^E$  e  $a_{\ell m}^B$ . La temperatura T e i modi E e B costituiscono dei campi scalari su una sfera (i modi B in realtà formano un campo *pseudo-scalare* a causa della parità) e risultano, dunque, completamente definiti dai loro spettri di potenza angolari che possono essere ricavati a partire dalle loro espansioni in armoniche sferiche:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T}{T}(\theta, \varphi) &= \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^T Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \\ \frac{\Delta E}{E}(\theta, \varphi) &= \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^E Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \\ \frac{\Delta B}{B}(\theta, \varphi) &= \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}^B Y_{\ell m}(\theta, \varphi)\end{aligned}\tag{52}$$

Le varianze mediate su tutte le realizzazioni, direttamente collegate agli spettri di potenza delle funzioni considerate, risultano descritte dalle equazioni:

$$\begin{aligned}\langle |a_{\ell m}^X|^2 \rangle &= C_{\ell}^{XX} \\ \langle a_{\ell_1 m_1}^X a_{\ell_2 m_2}^Y \rangle &= C_{\ell_1}^{XY} \delta_{\ell_1}^{\ell_2} \delta_{m_1}^{m_2}\end{aligned}\tag{53}$$

Utilizzando le componenti di Fourier  $\tilde{P}_G(\vec{\ell})$  e  $\tilde{P}_C(\vec{\ell})$  trovate tramite le equazioni (51) le statistiche del campo di polarizzazione e della temperatura sono determinati dagli spettri di potenza  $C_{\ell}^{TT}, C_{\ell}^{GG}, C_{\ell}^{CC}$ :

$$\begin{aligned}\langle \tilde{T}(\vec{\ell}) \tilde{T}(\vec{\ell}') \rangle &= (2\pi)^2 \delta(\vec{\ell} + \vec{\ell}') C_{\ell}^{TT} \\ \langle \tilde{P}_G(\vec{\ell}) \tilde{P}_G(\vec{\ell}') \rangle &= (2\pi)^2 \delta(\vec{\ell} + \vec{\ell}') C_{\ell}^{GG} \\ \langle \tilde{P}_C(\vec{\ell}) \tilde{P}_C(\vec{\ell}') \rangle &= (2\pi)^2 \delta(\vec{\ell} + \vec{\ell}') C_{\ell}^{CC}\end{aligned}\tag{54}$$

Se si considera la correlazione tra temperatura e polarizzazione, in totale si ottengono sei spettri a legge di potenza:

$$\langle \tilde{X}_1(\vec{\ell}) \tilde{X}_2(\vec{\ell}') \rangle = (2\pi)^2 \delta(\vec{\ell} + \vec{\ell}') C_{\ell}^{X_1 X_2}\tag{55}$$

dove  $X_1, X_2 = \{T, P_G, P_C\}$ .

Supponendo di fare un'inversione di parità, a esempio considerando una riflessione lungo l'asse x, per un determinato schema di temperatura o di polarizzazione si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\theta_y \rightarrow -\theta_y, \quad Q \rightarrow Q, \quad U \rightarrow -U, \quad \ell_x \rightarrow \ell_x, \quad \ell_y \rightarrow -\ell_y \\ \tilde{T}(\vec{\ell}) \rightarrow \tilde{T}(\vec{\ell}), \quad \tilde{P}_G(\vec{\ell}) \rightarrow \tilde{P}_G(\vec{\ell}), \quad \tilde{P}_C(\vec{\ell}) \rightarrow -\tilde{P}_C(\vec{\ell})\end{aligned}\tag{56}$$

La componente G della polarizzazione e la temperatura risultano essere, quindi, funzioni pari, mentre la componente C è una funzione dispari. Dato che lo scattering di Thomson conserva la parità ci si aspetta che gli spettri di potenza costruiti prendendo in considerazione una funzione pari e una dispari diano risultato nullo:

$$C_{\ell}^{TC} = C_{\ell}^{GC} = 0\tag{57}$$

La statistica degli schemi della temperatura e della polarizzazione risultano, quindi, completamente definiti dai quattro spettri di potenza  $C_\ell^{TT}$ ,  $C_\ell^{GG}$ ,  $C_\ell^{TG}$  e  $C_\ell^{CC}$ .

## 4.2 Dipendenza dai parametri cosmologici

Lo spettro angolare della CMB ha una forte dipendenza dai parametri cosmologici, in particolare dalla densità barionica  $\Omega_b$ , della *cold dark matter*  $\Omega_c$  e dei fotoni  $\Omega_\Lambda$ , dalla curvatura dell'universo  $k$ , dalla profondità ottica alla reionizzazione  $\tau$  e dalla scala acustica  $\theta_{MC}$  (grandezza angolare delle oscillazioni acustiche).

I modelli inflazionari, inoltre, definiscono degli ulteriori parametri che caratterizzano le condizioni iniziali dell'universo: l'ampiezza delle fluttuazioni scalari e tensoriali primordiali  $A_s$  e  $A_t$ , gli indici spettrali scalare e tensoriale  $n_s$  e  $n_t$  e il parametro  $r$ .

Le perturbazioni della curvatura primordiale generate dall'inflazione possono essere descritte da un campo casuale definito da uno spettro di potenza che risulta essere *quasi* un invariante di scala (ovvero continua a mantenere la stessa forma se si scalano le lunghezze, o le energie, di un fattore comune):

$$P_s(k) = A_s \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1} \quad (58)$$

con l'indice spettrale  $n_s$  che descrive la pendenza dello spettro e definisce la deviazione dalla perfetta invarianza di scala (considerando le proprietà dello spettro dovrà dunque avere un valore  $\sim 1$ ).

L'inflazione prevede anche l'esistenza di un fondo cosmico di onde gravitazionali descrivibili tramite lo spettro:

$$P_t(k) = A_t \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_t} \quad (59)$$

con l'indice spettrale  $n_t$  che viene automaticamente determinato una volta che si è ricavato il valore di  $n_s$  a partire dallo spettro di potenza della densità (non è un parametro libero).

Nonostante non siano ancora stati rilevati modi tensoriali, i dati ricavati dalle osservazioni permettono di determinare dei vincoli al parametro  $r$  chiamato *Tensor to scalar ratio*:

$$r = \frac{P_t(k_*)}{P_s(k_*)} \quad (60)$$

che parametrizza la forza del segnale delle onde gravitazionali primordiali. Qualitativamente, il limite superiore a questo parametro è determinato dal confronto tra lo spettro di potenza del rumore causato dagli strumenti durante le osservazioni (a esempio del satellite Planck) e lo spettro di potenza dei modi B, che variano in modo consistente con il parametro  $r$  (come si discuterà nel seguito). Dal fatto che non sia stato ancora rilevato  $r$ , si deduce che il suo valore deve necessariamente essere più piccolo del limite generato dal rumore strumentale.

Misurare un valore di  $r > 0$ , tramite lo studio degli spettri di potenza dei modi B, rappresenta una conferma dell'inflazione e le osservazioni della CMB che permettono di vincolare i parametri  $n_s$  e  $r$  consentono di scartare i modelli inflazionari che non sono compatibili con i dati sperimentali.

Attualmente i limiti imposti dalle osservazioni implicano un valore per il *Tensor to scalar ratio*  $r < 0.07$ .

Uno tra i più importanti ostacoli con cui i cosmologi si devono confrontare è la presenza, lungo la linea di vista, degli oggetti astrofisici che intralciano le osservazioni del fondo cosmico. Un'ulteriore

complicazione con cui ci si deve confrontare è l'effetto del lensing gravitazionale che agisce tra la superficie di ultimo scattering e l'osservatore: questo effetto genera modi B che influiscono nello spettro complessivo e, dunque, non devono essere considerati ai fini di vincolare i parametri generati dall'inflazione in quanto non hanno origine primordiale.

### 4.3 CAMB

CAMB, acronimo di Code for Anisotropies in the Microwave Background, è un codice di Python e Fortran che permette di analizzare la CMB e l'effetto lensing che subisce. Fornisce, inoltre, funzioni per il conteggio di sorgenti (come le galassie), per calcolare le funzioni di trasferimento della materia e gli spettri di potenza e le funzioni cosmologiche del fondo cosmico.

Il programma consente di ottenere in output le perturbazioni scalari, vettoriali e tensoriali che caratterizzano la CMB nei casi di modello di universo piatto, chiuso o aperto in modo rapido e con un livello di accuratezza controllabile.

Una volta che sono stati specificati il modello cosmologico da utilizzare e i valori dei vari parametri tramite i comandi `camb.set_cosmology()` e `camb.set_params()` si possono ottenere, utilizzando la libreria `matplotlib` di python, gli spettri di potenza della CMB.

I parametri cosmologici che possono essere impostati manualmente sono:

- $H_0$ : costante di Hubble in km/s/Mpc;
- $\Omega_{bh2}$ : parametro di densità barionica moltiplicato per la costante di Hubble al quadrato (per una convenzione sulle unità di misura);
- $\Omega_{ch2}$ : parametro di densità della cold dark matter moltiplicato per la costante di Hubble al quadrato (convenzione);
- $\Omega_k$ : parametro di curvatura;
- $m_\nu$ : somma delle masse dei neutrini misurata in eV, la  $\Omega_\nu$  è calcolata automaticamente da questo parametro assumendo che oggi tutti i neutrini siano non-relativistici;
- $\tau$ : profondità ottica alla reionizzazione.

Oltre a questi parametri, che definiscono il modello cosmologico preso in considerazione, possono essere definiti anche i parametri direttamente collegati all'inflazione:

- $A_s$ : ampiezza delle oscillazioni scalari primordiali;
- $n_s$ : indice spettrale scalare;
- $r$ : rapporto tra lo spettro di perturbazioni primordiali tensoriali e scalari.

Un'ulteriore funzionalità del programma consiste nel poter impostare la frequenza angolare massima degli spettri  $\ell_{max}$ , ovvero il valore del multipolo a cui viene arrestata l'espansione in armoniche sferiche.

Una volta settati i parametri sopra citati è possibile ottenere direttamente gli spettri di potenza  $C_\ell^{TT}$ ,  $C_\ell^{EE}$ ,  $C_\ell^{TE}$  e  $C_\ell^{BB}$  descritti in precedenza (cambia solamente la notazione considerata). Nel seguito vengono riportati questi spettri in funzione dei parametri cosmologici appena definiti accompagnati da una breve spiegazione qualitativa che illustra i motivi fisici che stanno alla base della variazione delle curve in funzione di alcuni di questi parametri.

## 4.4 Spettri TT

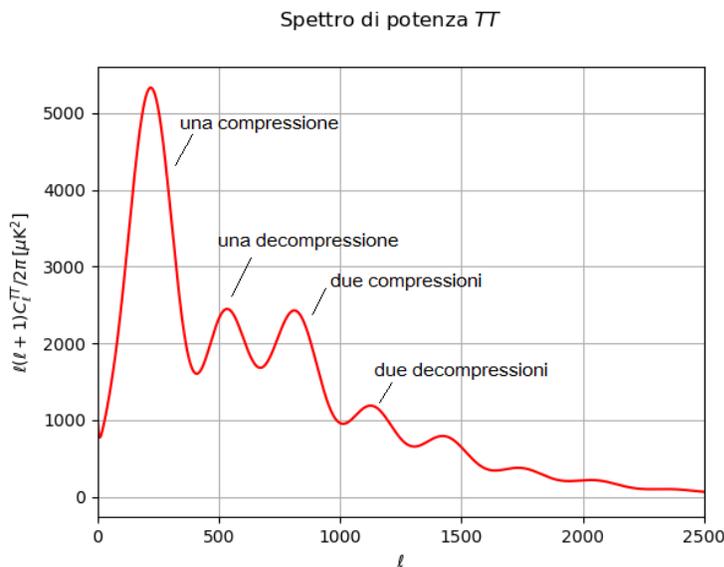


Figura 15: Spettro di potenza della temperatura ottenuto fissando i valori dei parametri:  $H_0 = 67.5$ ,  $\Omega_{\text{bh}2} = 0.022$ ,  $\Omega_{\text{ch}2} = 0.122$ ,  $m_\nu = 0.06$ ,  $\Omega_k = 0$ ,  $\tau = 0.06$ ,  $A_s = 2 \cdot 10^{-9}$ ,  $n_s = 0.965$ ,  $r = 0$ )

### 4.4.1 Parametri dovuti all'inflazione

La CMB, come detto, presenta un perfetto spettro di corpo nero che mantiene la stessa forma, ma che si sposta verso temperature più basse a seguito dell'espansione cosmica (Figura 3). Questa radiazione risulta avere un grado di isotropia molto elevato e, infatti, per una parte su  $10^4$ , la sua temperatura risulta avere lo stesso valore su tutto il cielo. Un'osservazione di questo tipo indica che l'intero universo osservabile si è trovato contemporaneamente in una situazione di completo equilibrio termico: a qualsiasi tempo, e in qualsiasi punto, nella storia evolutiva dell'universo esiste un *orizzonte cosmologico causale*. Questo è definito dalla distanza che ha percorso la luce a partire dal Big Bang (da  $t = 0$  fino a  $t$ ) e corrisponde, quindi, alla massima distanza che consente a due particelle di creare una connessione causale e di raggiungere l'equilibrio termico.

Il primo tratto dello spettro di temperatura (a piccoli valori dei multipoli  $\ell$ ) risulta essere piatto proprio a seguito della presenza di questo orizzonte cosmologico, mentre i picchi caratteristici dello spettro TT sono generati dalle oscillazioni che si instaurano tra materia e radiazione, di cui si discuterà meglio nel seguito.

La scala angolare dell'orizzonte all'epoca della ricombinazione risulta, oggi, di  $\sim 1^\circ$  nel cielo: a questo valore corrisponde un multipolo  $\ell \sim \frac{\pi}{\theta} \sim \frac{180^\circ}{1^\circ} \sim 200$ . Considerando scale angolari più grandi del valore appena ricavato (multipoli più piccoli) si possono, quindi, studiare delle porzioni di cielo solo debolmente processate dalla gravità e dalla pressione.

A seguito di quanto appena discusso si può affermare che la parte sinistra della Figura 15, ovvero quella caratterizzata da un valore della frequenza angolare  $\ell < 50$ , fornisce una descrizione "diretta" delle fluttuazioni generate dall'inflazione.

Dallo spettro della temperatura si possono stimare i parametri  $A_s$  e  $n_s$  (che deve avere un valore  $\sim 1$ ) determinati dall'inflazione fittando la funzione che descrive lo spettro delle fluttuazioni  $P_s(k) = A_s \left(\frac{k}{k_*}\right)^{n_s-1}$  ai dati reali con  $\ell < 50$ . Questo è possibile grazie al fatto che lo spettro delle fluttuazioni è quasi un invariante di scala e quindi le oscillazioni risultano avere la stessa forza su tutte le scale.

#### 4.4.2 Geometria dell'universo

Lo studio della CMB consente di ricavare informazioni sulla geometria dell'universo. Secondo la Relatività Generale la luce è obbligata a muoversi lungo le geodetiche dello spazio-tempo che hanno proprietà diverse a seconda della sua curvatura: nel caso di universo piatto le geodetiche sono raffigurate da linee rette, nel caso chiuso sono delle linee curve che tendono a convergere, mentre nel caso aperto esse divergono.

Assumendo di conoscere la dimensione dell'orizzonte all'epoca della ricombinazione (determinato dalle proprietà del plasma primordiale) e la distanza della superficie di ultimo scattering (ricavabile dall'espansione cosmica), la geometria dell'universo può essere dedotta dalla scala angolare dell'orizzonte a partire dalla posizione del primo picco osservabile nella Figura 15 dovuto alle oscillazioni acustiche che si instaurano tra materia e radiazione.

Le onde acustiche viaggiano alla velocità del suono  $c_s$  e, quindi, al tempo che corrisponde all'epoca della ricombinazione, esse hanno percorso una distanza tipica  $r_s$ . Facendo una decomposizione in serie di Fourier, la distanza appena ricavata definisce la lunghezza dell'onda che corrisponde alla prima compressione (il primo picco in Figura 15) e costituisce un *regolo standard*, in quanto descrive una scala tipica nella CMB in cui si osserva il massimo di contrasto tra regioni calde e regioni fredde (o analogamente la dimensione delle "macchie" nello schema della CMB). La deduzione di  $r_s$  non è immediata, in quanto deve essere ricavata dalla velocità di propagazione delle onde acustiche in un mezzo costituito da fotoni e barioni e dipende, quindi, dal rapporto tra le densità di massa-energia barionica e fotonica (all'aumentare della densità barionica la velocità di propagazione rallenta). Il valore esatto di  $r_s$  richiede, dunque di calcolare con molta accuratezza la densità dei barioni, che dipende dall'altezza del primo picco dello spettro di temperatura o, più precisamente, dal rapporto tra le altezze del primo e del secondo (concetto che risulterà più chiaro nel seguito).

A seguito di queste considerazioni, il valore di  $r_s$  risulta essere  $\sim 1^\circ$  (lunghezza fisica). A seconda dell'angolo sotto cui viene effettivamente osservato si può estrapolare lo spettro di potenza che permette di passare da scale angolari a valori di multipoli  $\ell$  e, in questo modo, la geometria dell'universo risulta essere vincolata, appunto, dalla posizione del primo picco dello spettro TT:

- $\ell \sim 220$ : universo piatto;
- $\ell > 220$ : universo aperto. La deviazione delle geodetiche porta la struttura delle oscillazioni a multipoli più elevati e, quindi, a scale angolari più piccole rispetto al caso piatto;
- $\ell < 220$ : universo chiuso. In questo caso, invece, la deviazione delle geodetiche conduce a multipoli minori.

I dati osservativi risultano in accordo con il caso di universo piatto.

### 4.4.3 Densità barionica

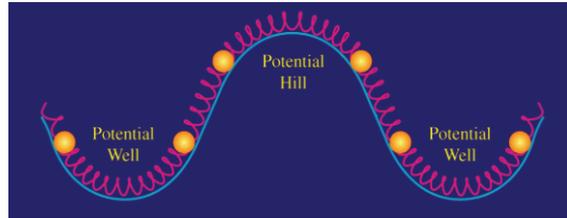


Figura 16: Scenario dei picchi e delle valli di potenziale che costituiscono l'universo primordiale. La materia barionica è rappresentata dai pallini gialli, i fotoni dalle "molle" rosse e la materia oscura dalla linea blu

L'universo primordiale era costituito da un plasma formato da materia barionica e fotoni che interagivano tra loro all'interno delle buche di potenziale definite dalla *dark matter* (Figura 16). Le concentrazioni di materia tendono ad attrarsi a vicenda a causa della gravità (cadono all'interno delle buche), mentre la pressione di radiazione, che aumenta proporzionalmente all'aumentare della densità, agisce come forza repulsiva instaurando delle oscillazioni acustiche tra materia e radiazione che si propagano nell'universo.

Le oscillazioni tra radiazioni e barioni sono guidate dal fondo di *dark matter* che definisce le buche di potenziale e che non viene modificato a seguito della propagazione delle oscillazioni acustiche. Se la densità dei barioni non è troppo elevata materia e radiazione oscillano in modo simmetrico attorno all'equilibrio e questo implica che nello spettro di potenza della temperatura in Figura 15 i picchi dovuti alla compressione e alla decompressione risulterebbero avere la stessa altezza.

Una maggiore quantità di barioni genera un effetto chiamato *baryon drag*, ovvero i barioni stessi, possedendo una carica gravitazionale, aumentano la profondità delle buche di potenziale facendo sì che le perturbazioni in compressione risultino potenziate e quelle in rarefazione, al contrario, vengano smorzate: nella Figura 15 questo si traduce nel fatto che il primo e il terzo picco (relativi alle compressioni) risultano essere più forti del secondo e del quarto picco (decompressioni). Sempre da questa figura è possibile notare come questo effetto aumenti in modo consistente all'aumentare della densità barionica.

La densità barionica risulta essere direttamente collegata alla temperatura della CMB, infatti a densità maggiori è associata una temperatura minore del fondo cosmico, mentre le regioni con una densità minore corrispondono alle zone calde nella mappa della CMB.

Valori elevati per la frequenza angolare  $\ell$  corrispondono a scale fisiche molto piccole. Considerando porzioni ridotte di cielo le fluttuazioni iniziali generate dall'inflazione non sono osservabili in quanto la diffusione dei fotoni ne smorza l'effetto: i movimenti casuali dei fotoni che interagiscono con i barioni conducono a un "rimiscolamento" tra regioni calde e fredde. Nel grafico riportato a destra della Figura 17 si può osservare come lo spettro di potenza della temperatura decada esponenzialmente all'aumentare della frequenza angolare. Il tasso di questo effetto, chiamato anche *damping*, dipende dal valore dei parametri cosmologici considerati e, in particolare, si può notare in questa figura il suo andamento in funzione della densità barionica. All'aumentare della densità dei barioni il cammino libero medio dei fotoni si accorcia e questo conduce a una minore efficienza nella loro diffusione e quindi a un "appiattimento" dell'effetto del *damping*.

Spettro di potenza  $TT$

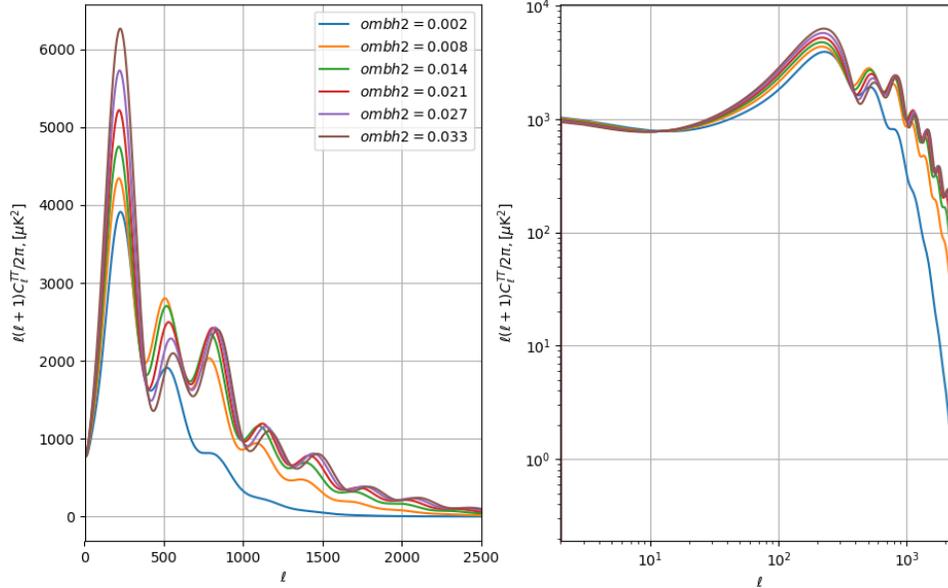


Figura 17: Spettri di potenza della temperatura al variare della densità barionica fissando i parametri:  $H_0 = 67.5$ ,  $\Omega_{ch2} = 0.122$ ,  $m_\nu = 0.06$ ,  $\Omega_k = 0$ ,  $\tau = 0.06$ ,  $A_s = 2 \cdot 10^{-9}$ ,  $n_s = 0.965$ ,  $r = 0$ . A sinistra è riportato il grafico in coordinate lineari, mentre a destra quello in coordinate logaritmiche (la legenda dei colori vale per entrambi i grafici). Al variare della densità barionica si considera che vari automaticamente anche la densità della componente fotonica dato che si mantiene fisso il valore della costante di curvatura  $\Omega_k = 0$  (la somma di tutte le componenti alla densità totale deve essere costantemente uguale a uno)

## 4.5 Spettri EE

In qualsiasi punto del cielo si può specificare il grado di polarizzazione della CMB e la direzione preferenziale del campo elettrico. Si può, quindi, descrivere il campo tensoriale, tramite i parametri di Stokes Q e U, e scomporlo nelle sue componenti *gradient* e *curl* che rappresentano rispettivamente il campo scalare E e il campo pseudo-scalare B, indipendenti dal sistema di riferimento considerato, di cui si possono costruire gli spettri di potenza. I modi E derivano da perturbazioni di densità mentre i modi B da distorsioni tensoriali della metrica dello spazio-tempo.

I modi E vengono prodotti quando ci si trova in regime di diffusione dato che lo scattering di Thomson isotropizza la radiazione e, quando è molto attivo, "uccide" i quadrupoli che generano la polarizzazione. Per ottenere dei quadrupoli si deve andare, quindi, su scale che corrispondono all'incirca al libero cammino medio di un fotone tra due elettroni liberi in modo che quando i fotoni vengono scatterati hanno tempo di diffondere e di creare un quadrupolo generando un'alternanza di zone calde e fredde attorno all'elettrone bersaglio. Lo spettro di modi E, infatti, presenta i picchi generati dalle oscillazioni scalari primordiali su scale angolari che corrispondono a valori dei multipoli con  $\ell > 1000$  (Figura 18), al contrario dello spettro della temperatura che a questi valori delle frequenze angolari presenta un decadimento esponenziale (profilo di *damping* che si osserva

in Figura 17) a seguito del fatto che lo scattering di Thomson non riesce più in modo efficiente a termalizzare tutti i fotoni.

I picchi dello spettro EE risultano essere sfasati di  $180^\circ$  rispetto ai picchi dello spettro della temperatura dato che la polarizzazione è generata dallo scattering e risulta, quindi, massima quando è massima la velocità dei fotoni che si scontrano con l'elettrone, mentre le oscillazioni di temperatura sono generate dal gradiente di densità. Temperatura e modi E costituiscono, quindi, un oscillatore armonico dove la velocità dei fotoni risulta massima quando la densità barionica è minima. Dato che i modi E derivano, come detto, da perturbazioni scalari, questo spettro, al variare della densità barionica presenta un andamento analogo a quello della temperatura: l'effetto del *baryon drag* è osservabile anche nella Figura 18.

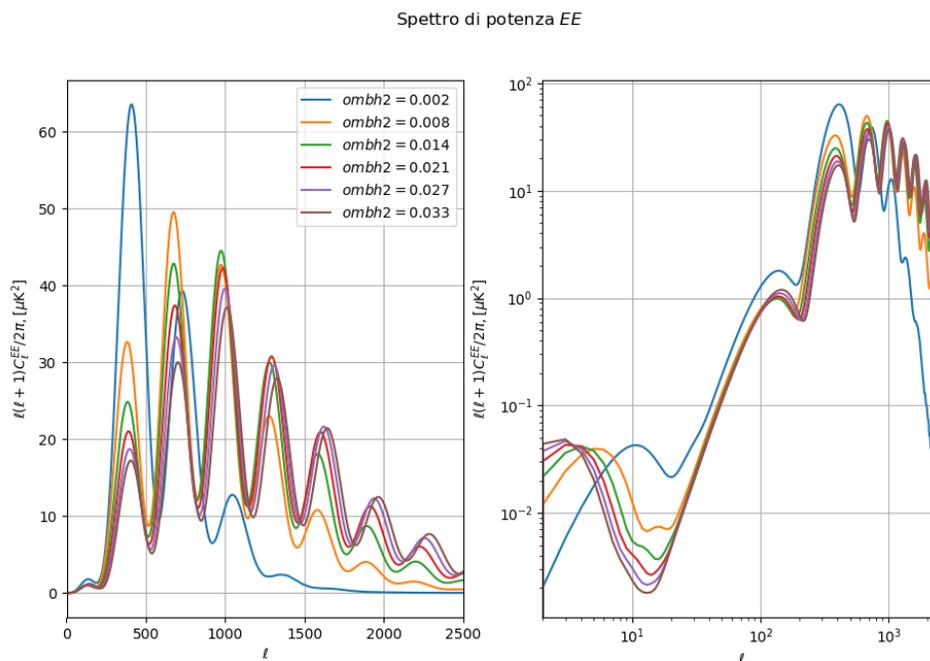


Figura 18: Spettri di potenza dei modi E della polarizzazione al variare della densità barionica fissando i parametri:  $H_0 = 67.5$ ,  $\Omega_{\text{ch}2} = 0.122$ ,  $m_\nu = 0.06$ ,  $\Omega_k = 0$ ,  $\tau = 0.06$ ,  $A_s = 2 \cdot 10^{-9}$ ,  $n_s = 0.965$ ,  $r = 0$ ). A sinistra è riportato il grafico in coordinate lineari, mentre a destra quello in coordinate logaritmiche (la legenda dei colori vale per entrambi i grafici)

L'altezza dello spettro dei modi E, come si può notare in Figura 18, aumenta per piccoli valori della frequenza angolare  $l$ : questo andamento indica che l'universo, a seguito di processi astrofisici come la formazione delle prime protostelle, è stato ionizzato nuovamente dopo l'epoca della ricombinazione. La presenza di un fluido ionizzato, infatti, scatterà i fotoni durante il loro tragitto a causa della presenza di elettroni liberi e può produrre uno schema di polarizzazione che può essere rilevato. Questo avviene solamente nel caso in cui la radiazione incidente su un elettrone presenti

un momento di quadrupolo, analogamente a quanto avviene sulla superficie di ultimo scattering, altrimenti questo nuovo scattering di Thomson dei fotoni ha come effetto quello di cancellare la polarizzazione preesistente e di isotropizzare la temperatura della CMB.

Anche lo spettro TT, infatti, viene influenzato a bassi multipoli, ovvero su scale angolari molto ampie, dal passaggio dei fotoni attraverso questa nube di elettroni liberi e, a seconda del valore della profondità ottica  $\tau$ , lo spettro della temperatura viene riscalato di un fattore  $e^{-\tau}$  a causa del rimescolamento di fotoni caldi e freddi dovuto al processo di scattering che rompe le anisotropie primordiali della temperatura.

Questa reionizzazione è, però, avvenuta quando l'universo era molto più espanso di quanto lo fosse all'epoca della ricombinazione (si passa da redshift  $z \sim 1000$  a  $z < 10$ ) e gli elettroni risultano, quindi, fortemente diluiti. La distanza media tra due elettroni è molto più grande all'epoca della reionizzazione rispetto che a quella della ricombinazione e, quindi, la scala di diffusione viene shiftata su scale molto grandi e piccoli multipoli: per questo il picco nello spettro EE dovuto alla reionizzazione si trova a piccoli valori di  $\ell$ .

Alla reionizzazione possono essere generati solamente modi E della polarizzazione in quanto l'assenza di onde gravitazionali a questa epoca non permette di generare modi B.

Questa nuova fonte di scattering può essere utilizzata per rilevare le onde gravitazionali: la regione caratterizzata da valori dei multipoli  $\ell = 4 - 8$  dovrebbe essere, infatti, influenzata in modo sostanziale dagli effetti dovuti a queste onde.

## 4.6 Spettri BB

Lo spettro dei modi B della polarizzazione, come si nota dalla Figura 19, risulta essere molto più debole degli spettri della temperatura e dei modi E, motivo per cui non è ancora stato rilevato, e non presenta delle oscillazioni acustiche. Risulta essere originato quasi esclusivamente dalle oscillazioni tensoriali primordiali ed è dunque cruciale per ottenere una conferma delle onde gravitazionali primordiali: una sua rilevazione rappresenta, infatti, uno dei principali obiettivi dei futuri esperimenti sulla CMB. Mostra, inoltre, un decadimento rapido per multipoli  $\ell < 100$ : la ragione risiede nel fatto che i modi tensoriali generano, a esempio, una compressione nella direzione x accompagnata da una rarefazione nella direzione y e questo non produce una variazione netta della densità che genererebbe, altrimenti, una contrazione nel caso in cui la densità aumenti.

A differenza degli spettri dei modi E della polarizzazione e della temperatura, lo spettro BB non cambia in modo consistente al variare della densità barionica.

Spettro di potenza  $BB$

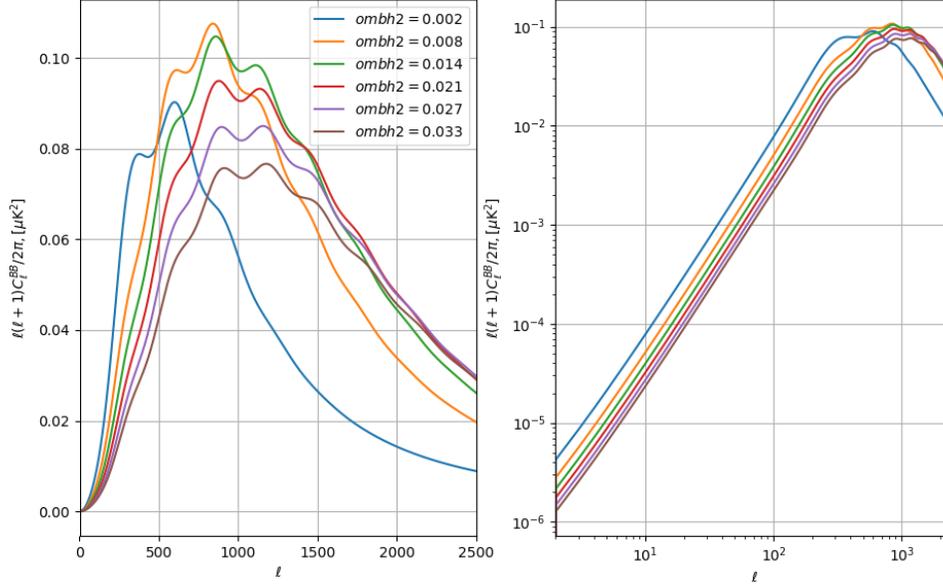


Figura 19: Spettri di potenza dei modi B al variare della densità barionica fissando i parametri:  $H_0 = 67.5$ ,  $\Omega_{ch2} = 0.122$ ,  $m_\nu = 0.06$ ,  $\Omega_k = 0$ ,  $\tau = 0.06$ ,  $A_s = 2 \cdot 10^{-9}$ ,  $n_s = 0.965$ ,  $r = 0$ ). A sinistra è riportato il grafico in coordinate lineari, mentre a destra quello in coordinate logaritmiche (la legenda dei colori vale per entrambi i grafici)

#### 4.7 Dipendenza degli spettri dalla costante di Hubble

La costante di Hubble corrisponde al parametro di Hubble  $H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$  considerato al tempo cosmico attuale. Una variazione di questo parametro si traduce, quindi, in una variazione del tasso di espansione dell'universo. Come è possibile osservare nelle figure riportate in seguito, un aumento del parametro  $H_0$  comporta semplicemente una traslazione verso sinistra degli spettri della temperatura e dei modi E della polarizzazione (Figure 20 e 21) e un riscaldamento dello spettro dei modi B della polarizzazione (Figura 22). Questi effetti sono dovuti al fatto che, cambiando il valore di  $H_0$  e prendendo in considerazione tassi di espansione cosmica diversi, cambiano le dimensioni dell'universo e di conseguenza la distanza con la superficie di ultimo scattering.

Spettri di potenza  $TT$

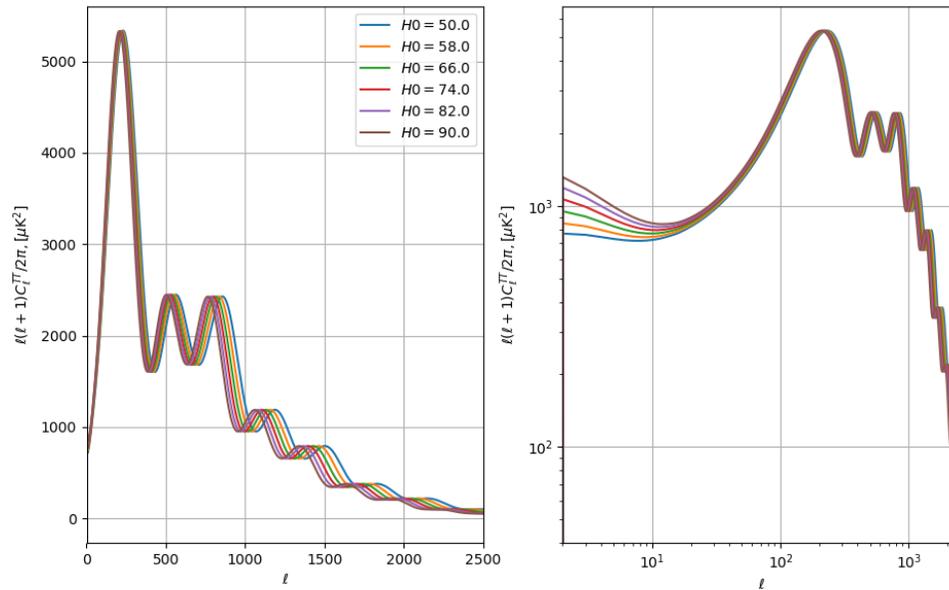


Figura 20: Spettri di potenza della temperatura al variare della costante di Hubble fissando i parametri:  $\Omega_{\text{bh}2} = 0.022$ ,  $\Omega_{\text{ch}2} = 0.122$ ,  $m_\nu = 0.06$ ,  $\Omega_k = 0$ ,  $\tau = 0.06$ ,  $A_s = 2 \cdot 10^{-9}$ ,  $n_s = 0.965$ ,  $r = 0$ ). A sinistra è riportato il grafico in coordinate lineari, mentre a destra quello in coordinate logaritmiche (la legenda dei colori vale per entrambi i grafici)

Spettro di potenza  $EE$

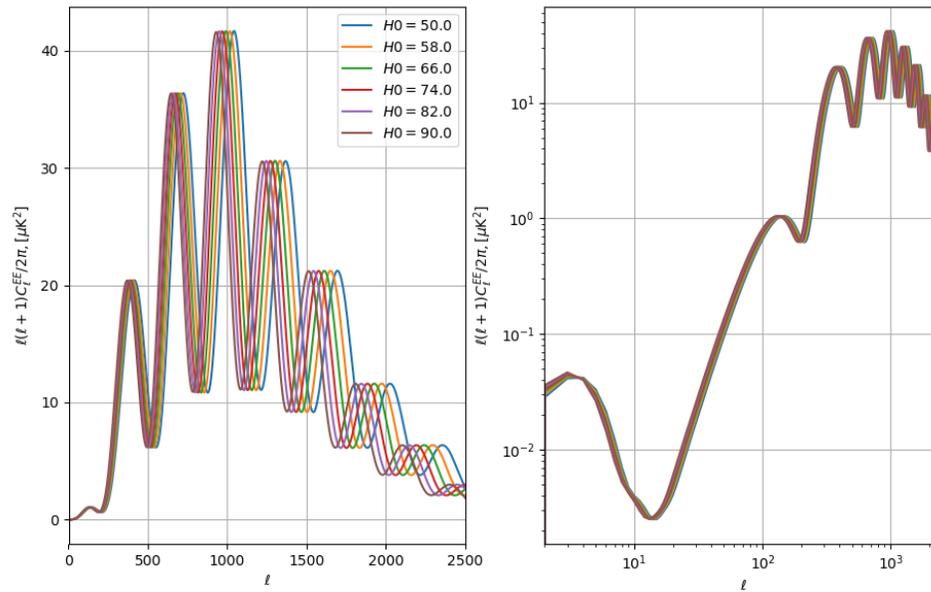


Figura 21: Spettri di potenza dei modi E della polarizzazione al variare della costante di Hubble fissando i parametri:  $\Omega_{\text{bh}2} = 0.022$ ,  $\Omega_{\text{ch}2} = 0.122$ ,  $m_\nu = 0.06$ ,  $\Omega_k = 0$ ,  $\tau = 0.06$ ,  $A_s = 2 \cdot 10^{-9}$ ,  $n_s = 0.965$ ,  $r = 0$ ). A sinistra è riportato il grafico in coordinate lineari, mentre a destra quello in coordinate logaritmiche (la legenda dei colori vale per entrambi i grafici)

Spettro di potenza  $BB$

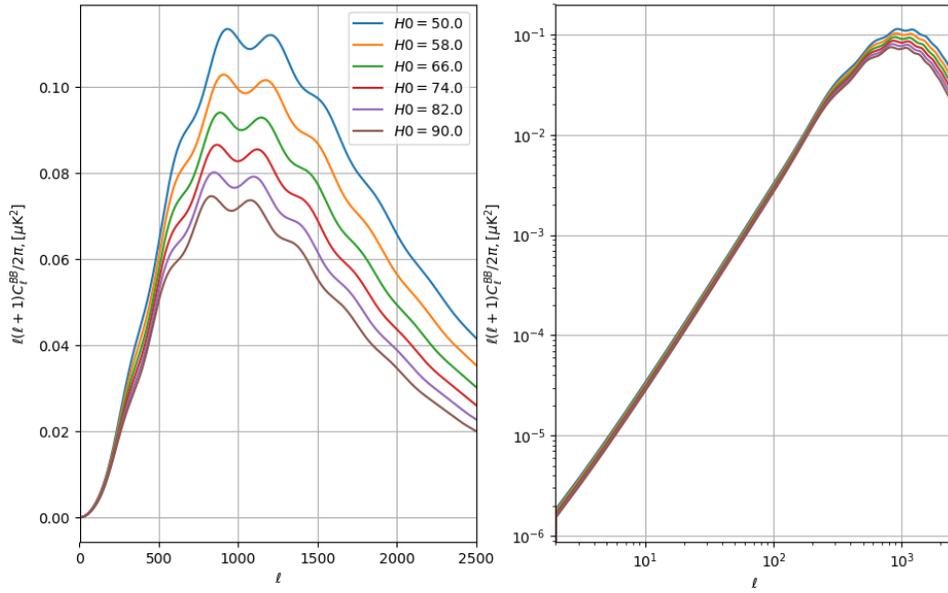


Figura 22: Spettri di potenza dei modi B della polarizzazione al variare della costante di Hubble fissando i parametri:  $\Omega_{\text{bh}2} = 0.022$ ,  $\Omega_{\text{ch}2} = 0.122$ ,  $m_\nu = 0.06$ ,  $\Omega_k = 0$ ,  $\tau = 0.06$ ,  $A_s = 2 \cdot 10^{-9}$ ,  $n_s = 0.965$ ,  $r = 0$ ). A sinistra è riportato il grafico in coordinate lineari, mentre a destra quello in coordinate logaritmiche (la legenda dei colori vale per entrambi i grafici)

## 4.8 Dipendenza degli spettri dal parametro $r$

Il *Tensor to scalar ratio* parametrizza la forza del segnale delle onde gravitazionali primordiali che generano le perturbazioni tensoriali. Per questo motivo, come si osserva nelle Figure 23 e 24, al variare di  $r$  gli spettri di potenza EE e TT cambiano in modo trascurabile in quanto rappresentano perturbazioni di tipo scalare.

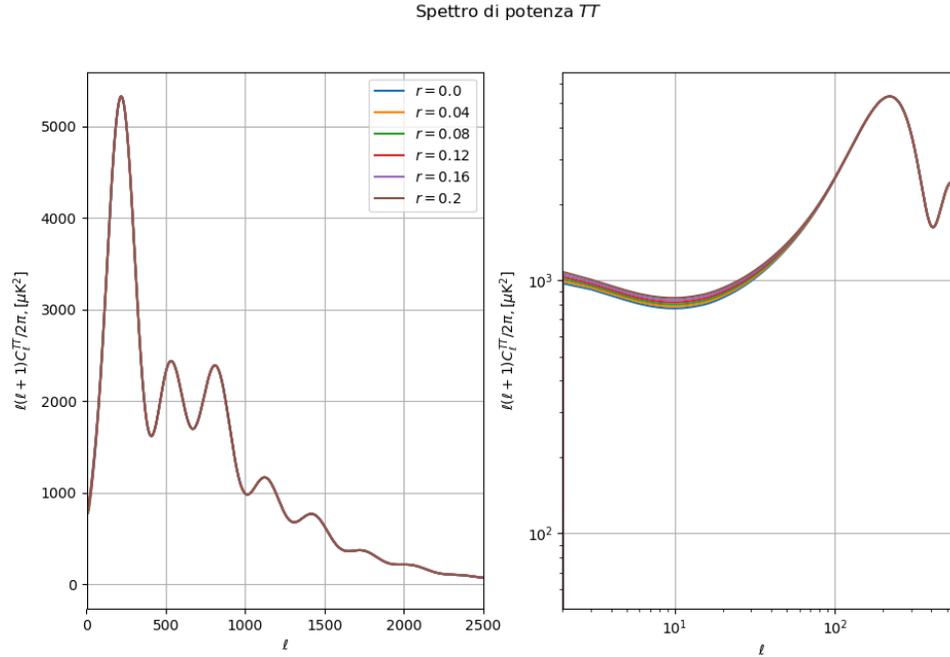


Figura 23: Spettri di potenza della temperatura al variare del *Tensor to scalar ratio* fissando i parametri:  $H_0 = 67.5$ ,  $\Omega_{\text{bh}2} = 0.022$ ,  $\Omega_{\text{ch}2} = 0.122$ ,  $m_\nu = 0.06$ ,  $\Omega_k = 0$ ,  $\tau = 0.06$ ,  $A_s = 2 \cdot 10^{-9}$ ,  $n_s = 0.965$ ). A sinistra è riportato il grafico in coordinate lineari, mentre a destra quello in coordinate logaritmiche (la legenda dei colori vale per entrambi i grafici)

Al contrario lo spettro dei modi B della polarizzazione, che riflette perturbazioni di tipo tensoriale, varia in modo consistente al variare del parametro  $r$  (Figura 25): è da questo spettro che si può ricercare una conferma della presenza delle onde gravitazionali e una conferma dei modelli inflazionari.

Considerando elevati valori dei multipoli l'effetto degli oggetti che si trovano "davanti" alla superficie di ultimo scattering genera modi B a partire dai modi E della polarizzazione a seguito dell'effetto del lensing gravitazionale. Sia il campo di temperatura che quello di polarizzazione subiscono una leggera distorsione quando passano vicino alle strutture che si sono formate a seguito del collasso gravitazionale della materia nel tardo universo. La luce risulta, quindi, deflessa e i fotoni che si osservano in una direzione, in realtà, non provengono da quella porzione di cielo.

Spettro di potenza  $EE$

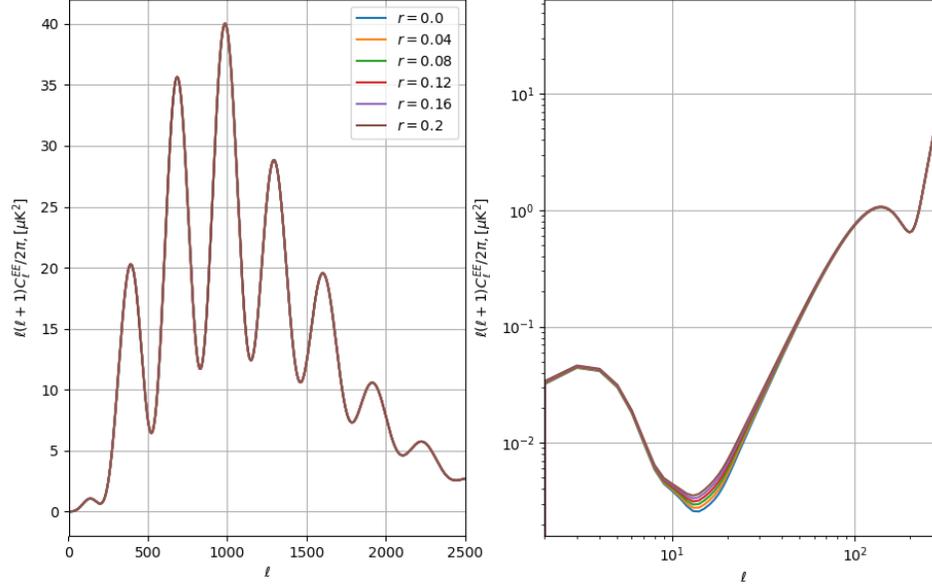


Figura 24: Spettri di potenza dei modi E della polarizzazione al variare del *Tensor to scalar ratio* fissando i parametri:  $H_0 = 67.5$ ,  $\Omega_{\text{bh}2} = 0.022$ ,  $\Omega_{\text{ch}2} = 0.122$ ,  $m_\nu = 0.06$ ,  $\Omega_{\text{k}} = 0$ ,  $\tau = 0.06$ ,  $A_s = 2 \cdot 10^{-9}$ ,  $n_s = 0.965$ ). A sinistra è riportato il grafico in coordinate lineari, mentre a destra quello in coordinate logaritmiche (la legenda dei colori vale per entrambi i grafici)

L'andamento dei modi B prodotti dal lensing gravitazionale in funzione della frequenza angolare corrisponde alla linea blu (ovvero quella con  $r = 0$ ) che si vede nella Figura 25. Questo effetto agisce sia sul campo di temperatura che su quello di polarizzazione, ma l'effetto più importante lo si può notare nello spettro di potenza dei modi B in quanto, appunto, modi E della polarizzazione vengono trasformati in modi B. Lo spettro dei modi B che comprendono l'effetto del lensing dovrà, dunque, seguire l'andamento dello spettro dei modi E: in Figura 25 si può notare come, all'aumentare di  $\ell$  gli spettri BB tendano tutti a convergere all'andamento dei modi B prodotti dal lensing.

Se si vuole vincolare il parametro  $r$  in modo da confermare l'esistenza di un fondo di onde gravitazionali primordiali si deve limitare lo studio dello spettro BB a piccoli multipoli e si deve schermare l'effetto del lensing gravitazionale in quanto, agendo tra la superficie di ultimo scattering e l'osservatore, non costituisce un effetto di origine primordiale (Figura 26).

Spettro di potenza  $BB$  (lensing)

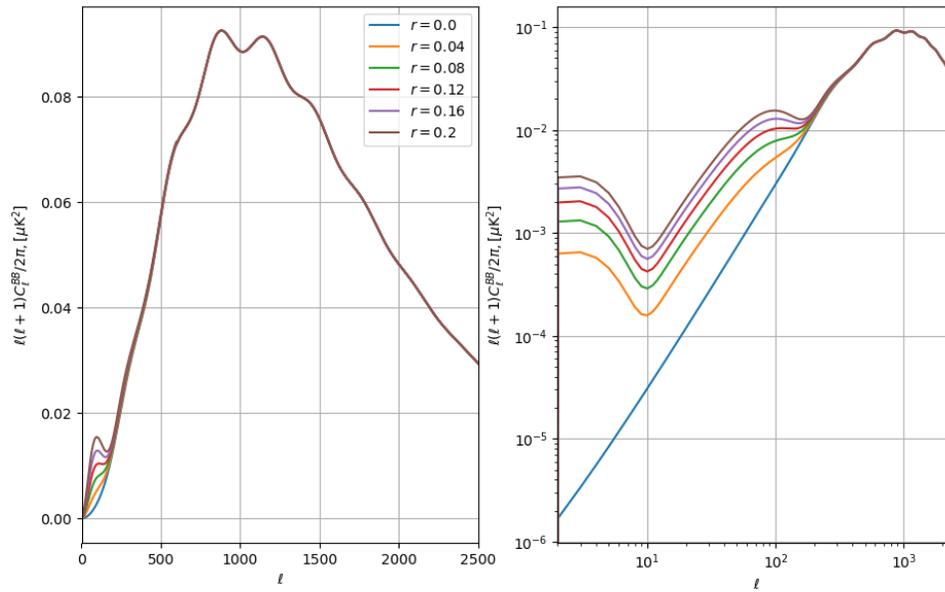


Figura 25: Spettri di potenza dei modi B della polarizzazione al variare del *Tensor to scalar ratio* fissando i parametri:  $H_0 = 67.5$ ,  $\Omega_{\text{bh}2} = 0.022$ ,  $\Omega_{\text{ch}2} = 0.122$ ,  $m_\nu = 0.06$ ,  $\Omega_k = 0$ ,  $\tau = 0.06$ ,  $A_s = 2 \cdot 10^{-9}$ ,  $n_s = 0.965$ ). A sinistra è riportato il grafico in coordinate lineari, mentre a destra quello in coordinate logaritmiche (la legenda dei colori vale per entrambi i grafici)

Spettro di potenza  $BB$  (no lensing)

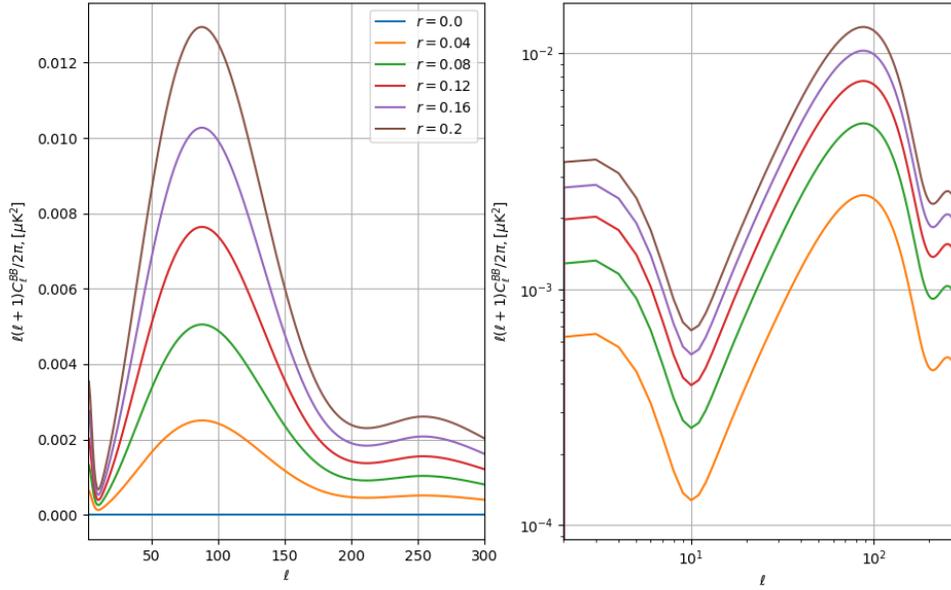


Figura 26: Spettri di potenza dei modi B della polarizzazione al variare del *Tensor to scalar ratio* fissando i parametri:  $H_0 = 67.5$ ,  $\Omega_{\text{bh}2} = 0.022$ ,  $\Omega_{\text{ch}2} = 0.122$ ,  $m_\nu = 0.06$ ,  $\Omega_k = 0$ ,  $\tau = 0.06$ ,  $A_s = 2 \cdot 10^{-9}$ ,  $n_s = 0.965$ ). A sinistra è riportato il grafico in coordinate lineari, mentre a destra quello in coordinate logaritmiche (la legenda dei colori vale per entrambi i grafici). Per questo grafico non si è considerato l'effetto del lensing gravitazionale e si è limitata l'analisi a bassi multipoli dove agisce maggiormente l'effetto dei parametri definiti dall'inflazione

## Riferimenti bibliografici

- [1] A. Liddle, *An introduction to Modern Cosmology*, (John Wiley & Sons, 2015)
- [2] F. Lucchin, *Introduzione alla cosmologia*, (Zanichelli, 1994)
- [3] A. Franceschini, *Corso di Cosmologia*, (Laurea Triennale in Astronomia, anno accademico 2013-2014)
- [4] P. Cabella and M. Kamionkowski, *Theory of Cosmic Microwave Background Polarization*, arXiv:astro-ph/0403392 (2005)
- [5] M. Liguori, *The polarization of the Cosmic Microwave Background - "Looking at Cosmic Sources in Polarized Light"*, (2018)
- [6] W.Hu's Tutorials: <http://background.uchicago.edu/index.html>
- [7] W. Hu's Polarization Primer:  
<http://background.uchicago.edu/whu/polar/webversion/polar.html>
- [8] W. Hu's Cosmic Microwave Background Anisotropies:  
<http://background.uchicago.edu/whu/araa/araa.html>
- [9] W. Hu and M. White, *A CMB Polarization Primer*, arXiv:astro-ph/9706147 (1997)
- [10] D. Samtleben, S. Staggs and B. Winstein, *The Cosmic Microwave Background for Pedestrians: A Review for Particle and Nuclear Physicists*, (Annual Review of Nuclear and Particle Science, 2007)
- [11] H. Eriksen, *An introduction to the CMB power spectrum*, AST5220 - lecture 2 (2011)
- [12] M. Liguori, *Primary CMB*, (CMB day, 2016)
- [13] camb.model - Code for Anisotropies in the Cosmic Microwave Background (CAMB) 1.0.4 documentation: <https://camb.readthedocs.io/en/latest/model.html>
- [14] CAMBdemo: <https://camb.readthedocs.io/en/latest/CAMBdemo.html>
- [15] Radiazione cosmica di fondo Planck: [https://www.google.com/search?q=radiazione+cosmica+di+fondo+planck&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjz1vO1zLPgAhVh1eAKHddwC8IQ\\_AUIDygC&biw=672&bih=657#imgrc=nqsbO6w03nL21M](https://www.google.com/search?q=radiazione+cosmica+di+fondo+planck&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjz1vO1zLPgAhVh1eAKHddwC8IQ_AUIDygC&biw=672&bih=657#imgrc=nqsbO6w03nL21M):
- [16] M. Viel, *Sulle onde dell'universo in espansione*, (Editoriali, In evidenza, INAF, News, 2012)
- [17] C. Ruscica, *Planck vs BICEP2: nessuna traccia di onde gravitazionali primordiali*, (AstronomicaMens, 2015)