



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA



DIPARTIMENTO  
DI INGEGNERIA  
DELL'INFORMAZIONE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN  
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

# Modellistica e Progettazione del Controllo di un Nanorobot

*Relatore:*

PROF. MARIA ELENA VALCHER

*Laureando:*

SEBASTIANO MATARAZZO

2000265

Anno Accademico 2022/2023

25 Settembre 2023



## **Abstract**

La tesi si propone di analizzare un modello dinamico di un Nanorobot in grado di viaggiare nel flusso sanguigno con scopi diagnostici. L'obiettivo principale è quello di progettare un controllore che garantisca che il risultante sistema controllato rispetti specifiche precise in termini di prestazioni e funzionalità. Inizialmente viene condotta un'analisi approfondita sul modello di stato del sistema dinamico, così da poterne studiare il comportamento. Successivamente è stato progettato un controllore al fine di soddisfare degli specifici obiettivi di controllo definiti a priori tenendo conto della presenza di disturbi esterni.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Applicazioni medicali dei nanorobot . . . . .	2
1.1.1	Microbiologia . . . . .	2
1.1.2	Ematologia . . . . .	3
1.1.3	Neurochirurgia . . . . .	3
1.1.4	Oncologia . . . . .	4
1.1.5	Odontoiatria . . . . .	5
1.2	Componenti e tratti essenziali di un nanorobot . . . . .	5
1.2.1	Sensore . . . . .	6
1.2.2	Attuatore . . . . .	7
1.2.3	Sistema di navigazione e alimentazione . . . . .	8
1.2.4	Trasmissione dati . . . . .	11
1.2.5	Monitoraggio . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Studio del modello dinamico di un Nanorobot</b>	<b>15</b>
2.1	Punti di equilibrio ad ingresso costante . . . . .	16
2.2	Linearizzazione del sistema non lineare . . . . .	19
2.3	Analisi dei modi tramite la Forma di Jordan . . . . .	21
2.4	Funzione di trasferimento . . . . .	24
2.5	Stabilità del sistema . . . . .	25
2.6	Risposta al gradino . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Controllo in retroazione</b>	<b>29</b>
3.1	Stabilità del sistema retroazionato . . . . .	30
3.1.1	Criterio di Bode . . . . .	30
3.1.2	Criterio di Nyquist . . . . .	33
3.1.3	Luogo delle radici . . . . .	35
3.1.4	Ipotesi su controllore stabilizzante . . . . .	37

---

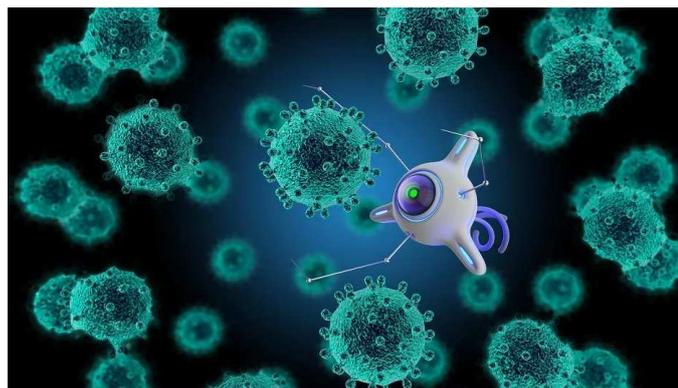
3.2	Specifiche di progetto . . . . .	38
3.2.1	Errore a regime . . . . .	38
3.2.2	Massima sovraelongazione e tempo di assestamento . . . . .	40
3.2.3	Reiezione dei disturbi a bassa frequenza . . . . .	41
3.3	Progettazione del controllore . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Conclusione</b>	<b>49</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>51</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

La nanotecnologia è il campo dell'ingegneria che si occupa dello studio della materia e dei processi di progettazione, creazione, sintesi e manipolazione di materiali su scala nanometrica.

In particolare si definisce nanorobotica lo studio di robot di dimensioni nanoscopiche, denominati nanorobot. Questo termine fu menzionato per la prima volta durante una famosa lezione (“There’s Plenty of Room at the Bottom”) tenuta dal fisico Richard Feynman nel 1959, durante la quale suggerì la possibilità di realizzare macchine su scala nanometrica con lo scopo di manipolare direttamente i singoli atomi.



**Figura 1.1:** Rappresentazione ipotetica di un Nanorobot <sup>1</sup>

In seguito, lo scienziato ed ingegnere K. Eric Drexler, ispirato dal lavoro di Feynman, pubblicò nel 1986 il libro “Engines of Creation: The Coming Era of Nanotechnology” in cui propose l’idea di macchine molecolari geneticamente programmate, andando a descrivere ciò che sarebbe stata poi conosciuta come nanotec-

---

<sup>1</sup><https://www.azonano.com/article.aspx?ArticleID=4679>.

nologia molecolare (MNT).

Il primo vero e proprio studio dei nanorobot è attribuito al nanotecnologo Robert Freitas nel campo della nanomedicina, definita da lui come il processo di diagnosi, cura e prevenzione di malattie e lesioni traumatiche, di sollievo dal dolore e di conservazione e miglioramento della salute umana, attraverso l'utilizzo di strumenti molecolari e una conoscenza molecolare del corpo umano [2].

## **1.1 Applicazioni medicali dei nanorobot**

Se la nanomedicina si concentra sull'utilizzo di nanotecnologie per la diagnosi e il trattamento di malattie, dal lato più ingegneristico venne sviluppata la nanobiotecnologia, che si concentra sullo sviluppo di tecnologie, come prodotti farmaceutici e dispositivi meccanici, a livello nanometrico per lo studio di sistemi biologici e il loro trattamento.

Lo sviluppo di questa branca della nanotecnologia ha permesso di impiegare la costruzione dei nanorobot in svariate applicazioni in campo medico tra cui, per esempio, la microbiologia, l'ematologia, la neurochirurgia, l'oncologia e l'odontoiatria.

### **1.1.1 Microbiologia**

La microbiologia è stata uno dei primi campi in cui si è impiegata la nanotecnologia a scopo medicale, andando ad affrontare limiti come il trasporto di farmaci e il movimento del dispositivo all'interno del sistema vascolare.

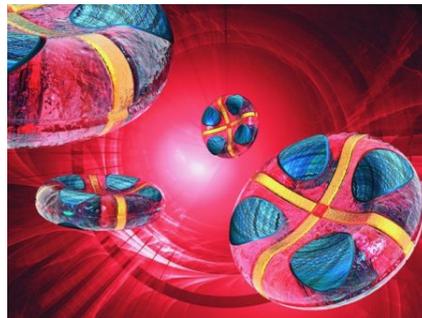
Una delle soluzioni adottate per risolvere queste problematiche è stata quella di accoppiare i nanorobot a dei batteri magnetotattici, cioè dei microrganismi acquatici capaci di generare i magnetosomi, organelli che permettono l'orientamento del batterio in risposta ad un campo magnetico. Sfruttando tale struttura si è sviluppata nel corso degli anni l'opportunità di trasportare prodotti farmaceutici e anticorpi artificiali attraverso il sistema vascolare, aprendosi inoltre alla possibilità di raccogliere informazione e svolgere le funzioni da sensore.

Uno studio sui vasi sanguigni ha evidenziato come nanorobot di dimensioni maggiori sono posti davanti a certi limiti nella navigazione nei piccoli vasi, allo stesso modo i nanorobot più piccoli, altamente sfruttati per la microvascolarizzazione, non riescono a raggiungere velocità efficienti nella navigazione nei grandi vasi. Con lo scopo di rimediare a questo problema si è andato a sviluppare un sistema robotico composto da due parti: un sistema più grande per il trasporto nei

grandi vasi e una componente più piccola, rilasciata in seguito, per permettere un'efficiente navigazione nei piccoli vasi [3].

### 1.1.2 Ematologia

Nel campo dell'ematologia la nanorobotica ha trovato un'ampia gamma di applicazioni, prima tra tutte la trasfusione di sangue per cui è stato progettato un particolare nanorobot, chiamato "respirocita".



**Figura 1.2:** Rappresentazione ipotetica dei respirociti <sup>2</sup>

Questo dispositivo simula il comportamento dei globuli rossi ed è dotato di tre funzioni che sfrutta nel suo viaggio nel flusso sanguigno: raccoglie l'ossigeno attraverso il sistema respiratorio così da poterlo poi distribuire nel flusso sanguigno, accumula l'anidride carbonica dai tessuti per rilasciarla in seguito nei polmoni e infine metabolizza il glucosio così da alimentare le proprie funzioni.

Tra le altre aree dell'ematologia in cui troviamo un grande impiego della nanorobotica troviamo l'emostasi, cioè il processo di arresto del sanguinamento di un vaso danneggiato, per cui è stata sviluppata una piastrina artificiale, o "clottocita", con lo scopo di velocizzare questo processo e che funziona dissolvendosi in una membrana appiccicosa a contatto con il plasma sanguigno [3].

### 1.1.3 Neurochirurgia

La neurochirurgia, per sua natura orientata al livello microscopico, ha potuto trarre parecchi benefici dalle molteplici innovazioni offerte dalla nanotecnologia. Tra queste evidenziamo un migliorato rilevamento patologico, il monitoraggio intracranico minimamente invasivo e la somministrazione di farmaci.

Lesioni midollari e danni nervosi rappresentano problematiche di particolare rilevanza all'interno della neurochirurgia, sia come campo di studio che per l'impatto

<sup>2</sup><https://www.howitworksdaily.com/how-artificial-blood-works/>.

significativo sulla qualità di vita dei pazienti.

L'atto di riunire fibre nervose recise è da sempre una delle applicazioni più importanti e delicate in campo medico. Attualmente si continuano a studiare nuovi modi per migliorare il processo di riunificazione nervosa, includendo nel processo l'impiego di fattori di crescita e strutture di supporto. A tale scopo i progressi della nanotecnologia hanno portato alla creazione di nanodispositivi con l'abilità di manipolare i singoli assoni. Tra questi, un nanocoltello in silicio per permettere il taglio di singoli assoni in vitro. Una volta effettuata l'operazione di taglio, tecniche come la dielettroforesi, basata sull'impiego di campi elettrici per il controllo di oggetti polarizzabili, e la fusione tramite, per esempio, elettrofusione o fusione cellulare attivata da laser, permettono di realizzare la riconnessione delle fibre nervose con un maggiore livello di precisione e controllo.

Un'altra branca fondamentale della neurochirurgia è la gestione preventiva degli aneurismi cerebrali, al fine di evitarne la rottura a cui è associato un tasso di mortalità alquanto significativo. L'impiego della nanorobotica ha rappresentato un'opportunità per individuare prematuramente la comparsa di nuovi aneurismi o per individuare in maniera più precisa quelli già noti. Ad esempio, nel corso degli anni è stato proposto un modello di nanorobot intravascolare in grado di rilevare la formazione di aneurismi, riconoscendo incrementi nei livelli dell'enzima ossido nitrico sintasi (NOS) all'interno dei vasi sanguigni coinvolti. Tali nanorobot possono comunicare informazioni sugli andamenti vascolari tramite wireless, riducendo i costi legati agli esami di imaging e alle frequenti visite di controllo [3].

### **1.1.4 Oncologia**

Con l'aumento dell'anzianità nella popolazione e l'incremento di diagnosi di cancro correlato all'invecchiamento demografico, è diventato necessario far progredire le nanotecnologie con lo scopo di migliorare le tecniche oncologiche.

L'impiego della nanorobotica in campo oncologico permette significativi miglioramenti in diversi ambiti cruciali, tra cui l'incremento della sensibilità dei dispositivi di imaging, il superamento delle resistenze farmacologiche, il perfezionamento delle terapie per le metastasi e l'ottimizzazione delle procedure neoplastiche.

Uno dei principali limiti della chemioterapia classica è rappresentato dall'effetto tossico degli agenti chemioterapeutici sulle cellule sane, limitando di conseguenza le dosi somministrabili. A tale scopo l'evoluzione dei nanorobot ha permesso di individuare in maniera selettiva ed autonoma le cellule tumorali, così da poter rilasciare gli agenti terapeutici in aree precise. Alcuni esempi significativi sono i

nanorobot basati su filamenti di DNA o su componenti sintetici, che grazie alla loro struttura consentono di rilevare e rispondere a recettori presenti sulla superficie cellulare così da poter rilasciare con precisione la terapia immagazzinata nell'area bersaglio.

L'impiego dei nanorobot ha dimostrato la loro estrema utilità nelle procedure di asportazione tumorale al fine di migliorare il rilevamento intraoperatorio dei margini tumorali.

Tradizionalmente per queste operazioni si opta per la dissezione linfonodale o, con lo scopo di ottenere una maggiore sensibilità nel rilevare metastasi precoci, per la dissezione linfonodale guidata da radioisotopi, basata sull'utilizzo di un colloide radioattivo nella prostata il giorno antecedente all'asportazione. Il vantaggio dell'impiego dei nanorobot permette di perfezionare queste operazioni eliminando l'ingente costanza ospedaliera e il rischio di prostatite legato all'iniezione del colloide; infatti i nanorobot somministrati all'interno dei vasi durante l'intervento permettono di individuare i margini tumorali e inviare segnali di localizzazione al chirurgo tramite un campo elettromagnetico [3].

### 1.1.5 Odontoiatria

Anche il campo dell'odontoiatria ha saputo sfruttare lo sviluppo delle nanotecnologie con la possibilità di incorporare in tutte le fasi del trattamento e della cura dentale l'utilizzo dei nanorobot offrendo un servizio di assistenza di livello più elevato di quello attuale.

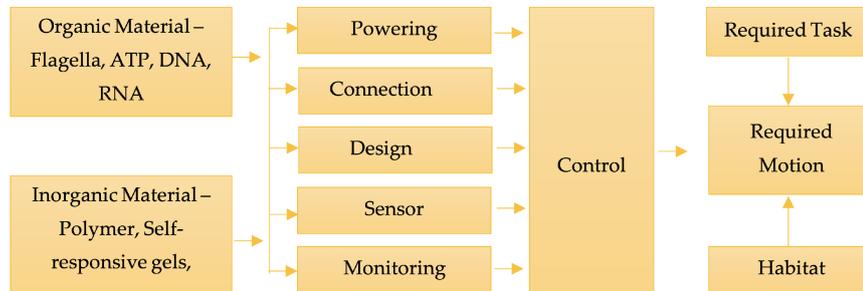
I principali impieghi e vantaggi della nanorobotica in quest'area spaziano dall'anestesia dentale, attraverso la penetrazione dei nanorobot nei tubuli dentinali con lo scopo di occludere o somministrare analgesici in maniera mirata, ad una più efficiente visualizzazione della radice con un conseguente aumento del tasso di successo delle procedure canalari.

Di recente si è inoltre aperta la possibilità di impiegare nanorobot per la manipolazione diretta dei tessuti parodontali o direttamente all'interno di collutori e dentifrici così da migliorare la procedura di sostituzione degli strati smalto e l'igiene dentale [3].

## 1.2 Componenti e tratti essenziali di un nanorobot

In questa sezione andiamo ad esaminare le componenti essenziali di un nanorobot come sensori, attuatori, sistemi di navigazione, alimentazione, trasmissione dati

e monitoraggio.



**Figura 1.3:** Esempio dell'architettura di un Nanorobot [4]

A seconda dell'applicazione, i vari gradienti di temperatura e le concentrazioni chimiche nel flusso sanguigno sono parametri chiave per il monitoraggio e la progettazione di nanorobot. Infatti, il nanorobot che viaggia attraverso le vene superficiali risulta più suscettibile alle variazioni di temperatura data la vicinanza all'ambiente esterno, mentre quando viaggia attraverso le vene profonde queste mantengono una temperatura circa costante in modo tale da garantire il corretto funzionamento degli organi, permettendo così al nanorobot di operare in condizioni termiche più stabili.

Al fine di incorporare tali pratiche di monitoraggio e progettazione l'utilizzo del VHDL (Very High Speed Integrated Circuit Hardware Description Language) è diventato molto popolare nell'industria della fabbricazione dei circuiti integrati (IC) [4].

### 1.2.1 Sensore

Il nanorobot fa affidamento su dei sensori con lo scopo di ottenere informazioni riguardanti l'ambiente circostante, la propria posizione e il corretto funzionamento.

In base al compito che devono svolgere, questi sensori si suddividono in due principali categorie: i sensori a lunga distanza, che si occupano della navigazione del nanorobot, e i sensori a breve distanza, che hanno lo scopo di individuare cellule indesiderate.

La fabbricazione di questi sensori chimici si basa su un'architettura a due livelli: il livello dei sensori, dove avviene la rilevazione di dati e informazioni, e il livello del silicio, che comprende microprocessori e circuiti integrati e si occupa dell'elaborazione dei dati forniti dai sensori. Questo sistema sfrutta l'uso di

nanofili e circuiti integrati CMOS in modo tale da ottenere la massima efficienza in risposta ai cambiamenti chimici.

Infatti la tecnologia dei semiconduttori di ossido di metallo ha contribuito alla produzione di circuiti delle dimensioni dell'ordine di decine di nanometri, mentre i circuiti di silicio, assemblati con matrici sospese di nanofili, hanno ridotto drasticamente l'autoriscaldamento e l'accoppiamento termico e hanno aumentato la capacità operativa dei CMOS, riuscendo a mantenere un basso consumo di energia ed un'elevata sensibilità per le rilevazioni.

Nel corso degli anni sono state sviluppate alternative più efficienti, come per esempio l'utilizzo della lega germaniuro di silicio (SiGe) con lo scopo di ridurre l'autoriscaldamento e migliorare le prestazioni oppure la tecnologia silicio su isolante (SOI) in modo da assemblare circuiti logici a dimensioni ulteriormente ridotte e ad alte prestazioni [4].

### 1.2.2 Attuatore

Gli attuatori possono essere di diversi tipi, per esempio elettromagnetici, piezoelettrici, elettrostatici ed elettrotermici, e se ne stanno studiando vari tipi in base al loro scopo nella nanotecnologia. Uno dei possibili modelli di attuatore è costruito utilizzando componenti a base biologica e ha un elemento mobile che in sostanza si muove linearmente all'interno dell'attuatore come risultato dell'interazione biomolecolare tra questi componenti. Per i sistemi meccanici su nanoscala, questi attuatori possono essere utilizzati per pompare fluidi, aprire e chiudere valvole o per fornire movimento traslatorio.

Con il progresso della nanotecnologia sono stati sviluppati diversi prototipi destinati alla propulsione delle macchine molecolari o dei nanomotori, per esempio il motore flagellare batterico, una nanomacchina rotante reversibile di circa  $45nm$  di diametro, oppure il motore ATPasi<sup>3</sup>, che permette di generare movimenti più precisi e con l'impiego di meno energia rispetto al precedente motore.

Per la fabbricazione dell'attuatore vengono utilizzati dei nanotubi di carbonio (CNT), impiegati come strutture conduttive che consentono movimenti guidati elettrostaticamente al fine di fornire le forze necessarie alla nanomanipolazione. Inoltre sono largamente impiegati dei materiali morbidi intelligenti, come polimeri e gel, che possono sfruttare l'interazione con segnali esterni come la luce o la temperatura per potenziare il controllo del robot o per introdurre diverse

---

<sup>3</sup>Un enzima che impiega l'energia chimica ricavata dall'idrolisi dell'ATP in ADP e P per generare movimento.

strategie di locomozione. L'impiego di nanotubi in carbonio è spesso combinato alla tecnologia SOI al fine di ottenere dispositivi con alte prestazioni, basso riscaldamento e basso consumo energetico con la possibilità di sfruttare i vantaggi di entrambi e di realizzare nanomanipolatori come sistemi embedded per l'integrazione con nanodispositivi di macchine molecolari.

Al fine di supportare il bisogno energetico necessario al funzionamento degli attuatori si sfruttano i canali ionici<sup>4</sup> presenti nella membrana cellulare, questi rappresentano l'interfaccia tra la segnalazione elettrica e biochimica nei sistemi biologici e permettono il passaggio del sodio sfruttato per la generazione di energia, consentendo così al nanorobot un'interazione attiva diretta con i modelli del flusso sanguigno e i parametri molecolari del corpo umano [5].

### 1.2.3 Sistema di navigazione e alimentazione

Le modalità di guida di un nanorobot si dividono in due categorie: guida passiva e guida attiva. La guida passiva viene impiegata all'ingresso nel corpo e nel controllo del nanorobot. La sua caratteristica principale è l'applicazione dell'energia esterna ottenuta dal sistema circolatorio o da campi elettrici o magnetici per il movimento. La guida attiva, invece, sfrutta, per esempio, un nanomotore elettrico a motore molecolare<sup>5</sup> per alimentare il dispositivo.

L'energia, erogata a seconda del metodo di alimentazione utilizzato (come viene spiegato in seguito), si dissipa nel processo di spostamento e nella trasmissione di informazioni, pertanto il compito principale del sistema è fornire l'adeguato ammontare di energia al fine di svolgere le mansioni per cui è stato creato, entrando però in conflitto con il limite nelle dimensioni del nanorobot. Le fonti interne di energia includono celle microchimiche e convertitori come, ad esempio, celle a combustibile e motori ATP. Le fonti esterne sono inoltre di due tipi: una dissipa energia sotto forma di corrente o luce attraverso una connessione fisica come cavo o fibra e l'altra converte l'energia esterna, come microonde e ultrasuoni, attraverso un convertitore a bordo.

I fattori determinati dalla superficie del nanorobot, come il tasso di dissipazione dell'energia, diventano significativamente importanti e limitanti. Pertanto, i nanorobot devono essere in grado di sfruttare l'energia dell'ambiente esterno per il loro movimento; per questo motivo sono stati sviluppati in diverse forme (con

---

<sup>4</sup>Una proteina transmembrana che permette il passaggio di ioni attraverso la membrana cellulare.

<sup>5</sup>Un dispositivo miniaturizzato composto da una molecola controllata elettricamente con lo scopo di compiere movimenti precisi in scala nanometrica.

geometrie sferiche, elicoidali o asimmetriche).

A seconda della tipologia di sorgente di alimentazione, necessaria per generare la forza motrice che permette il movimento controllato del nanorobot, si possono classificare i nanorobot in due categorie: quelli alimentati da un carburante chimico/biochimico (motori a carburante) e quelli alimentati da stimoli esterni come campo magnetico, campo elettrico, luce e ultrasuoni (motori senza carburante) [4].

### **Motori a carburante**

I motori a propulsione mediante carburante operano in virtù della presenza di un carburante specifico (in forma di soluzione acquosa), il quale consente a tali motori di generare spinta attraverso reazioni superficiali dipendenti dalla composizione del motore stesso. Il processo di propulsione intrinseca è vario e si basa su reazioni capaci di produrre gradienti locali di concentrazione, potenziale elettrico e la formazione di bolle.

Nonostante siano state ottenute diverse modalità di spostamento tramite questa tecnologia, la determinazione di una traiettoria precisa ha rappresentato una sfida significativa. L'abilità di navigare in modo preciso è stata realizzata grazie a fonti chimiche esterne; tuttavia, vista la limitata degradabilità di tali fonti nell'ambiente, la ricerca si è orientata verso l'utilizzo di carburanti biocompatibili, come il glucosio, l'acqua e l'acido.

Le interazioni tra il carburante e il motore generano energia chimica, la quale contribuisce alla spinta dei motori a propulsione chimica. Ciò avviene mediante l'impiego congiunto di un catalizzatore e di un materiale inerte. Il catalizzatore scompone il carburante, che agisce come fonte di energia per il nanorobot. Questo processo di autoelettroforesi implica la generazione di movimento senza l'ausilio di fattori esterni, grazie alla creazione di gradienti chimici all'interno del sistema, i quali generano un campo di spinta intrinseco. I nanomotori bimetallici, in particolare quelli realizzati in lega di oro e platino, sono particolarmente noti per utilizzare l'autoelettroforesi come meccanismo di spostamento.

Nel corso dell'evoluzione dei motori a propulsione chimica, sono stati implementati una serie di miglioramenti che hanno innalzato notevolmente le prestazioni di questa tecnologia. Le strategie di ottimizzazione hanno preso diverse direzioni, con scelte come l'adozione di configurazioni tubolari e l'impiego di leghe d'oro e argento in sostituzione dell'oro nella sezione catodica con l'obiettivo di potenziare la velocità di spostamento, migliorando l'efficienza complessiva. Un ulteriore

salto in avanti è stato realizzato grazie all'integrazione sinergica di nanofili e nanotubi di carbonio, un accoppiamento che ha innescato una notevole accelerazione nel movimento del motore, consentendo di raggiungere velocità impressionanti, toccando i 200 mm/s. In linea con tali miglioramenti, sono state sviluppate metodologie di controllo specifiche per motori tubolari, mediante la gestione di variabili quali temperatura e potenziale elettrico all'interno della piattaforma. L'attenzione è stata anche rivolta all'impiego di carburanti alternativi, come bromuro e ioduro, che hanno ampliato le prospettive di autopropulsione. Inoltre, ulteriori indagini hanno esplorato la correlazione tra la forma sferica dei motori e la loro velocità di spostamento, mettendo in evidenza come variabili quali concentrazione e diametro del carburante giochino un ruolo cruciale in questa dinamica.

Oltre ai motori a propulsione chimica, sono stati sviluppati motori sintetici basati sulla diffusioforesi e sulla generazione di bolle di gas tramite catalizzatori. Questi ultimi adottano diverse geometrie, tra cui motori Janus, micro/nanotubulari e micro/nanoshells, utilizzando materiali come platino, argento e diossido di manganese ( $\text{MnO}_2$ ) per la propulsione tramite bolle di perossido di idrogeno ( $\text{H}_2\text{O}_2$ ). Tuttavia, molti di questi motori dipendono da carburanti come il perossido di ossigeno, limitando l'applicazione biologica. Per superare questa limitazione, sono stati creati dei motori che sfruttano bolle d'acqua per generare la spinta attraverso la decomposizione del perossido. Sono stati anche impiegati motori a base di tessuti vegetali come tuberi di patata, funghi e radici di carota per l'autopropulsione grazie all'enzima della catalasi<sup>6</sup>, rappresentando un passo innovativo verso l'impiego di nanomotori biocompatibili in ambiti biomedici, come l'isolamento di catalizzatori e la somministrazione mirata di farmaci [4].

### **Motori senza carburante**

Il settore dei motori a carburante è progredito notevolmente, ma problematiche quali concentrazioni di combustibili, biocompatibilità, tossicità in vivo e capacità di ossidazione ne ostacolano l'applicazione, specialmente nel campo medico. Per mitigare questi problemi, sono stati creati dei motori senza carburante offrendo miglioramenti nel controllo di traiettoria, rotazione e orientamento grazie a fonti esterne come campi elettrici e magnetici, luce e ultrasuoni.

Questi motori propulsori senza carburante offrono vantaggi come il controllo del movimento su richiesta, la biocompatibilità, la lunga durata, la versatilità e la sostenibilità, grazie all'utilizzo di stimoli esterni biocompatibili.

---

<sup>6</sup>Un enzima presente nelle cellule degli organismi viventi che svolge il processo di decomposizione del perossido di idrogeno in acqua e ossigeno.

Il campo dei motori magnetici ha registrato notevoli progressi, trovando particolare utilità nelle applicazioni biomediche grazie alla loro bassa invasività e capacità di attraversare agevolmente i tessuti, senza ostacoli e senza venire assorbiti, attraverso campi magnetici. Il principio alla base delle eliche magnetiche, come le eliche elicoidali e i camminatori di superficie, è l'attivazione dei motori attraverso campi magnetici variabili e a bassa resistenza.

Un ostacolo cruciale nell'impiego dei nanorobot a propulsione magnetica è l'indebolimento del campo magnetico all'aumentare della distanza dalla sorgente, che può consistere in un elettromagnete o un potente magnete permanente. L'intensità del campo magnetico è influenzata da diversi fattori, tra cui le dimensioni dell'elettromagnete o del magnete permanente, che, a loro volta, sono direttamente proporzionali al costo del magnete stesso. L'investimento richiesto per l'impiego di magneti di notevoli dimensioni può raggiungere cifre dell'ordine delle centinaia di migliaia di dollari, risultando, quindi, poco conveniente per alcune applicazioni [4].

#### 1.2.4 Trasmissione dati

I telefoni cellulari stanno emergendo come dispositivi di comunicazione ampiamente adottati, presentando un'opzione altamente funzionale per la trasmissione senza fili di dati provenienti dai nanorobot medici che vengono incorporati nel corpo dei pazienti.

Questa tecnologia rivela un'elevata efficacia nel monitoraggio di parametri critici come i livelli di glucosio, che rappresentano elementi fondamentali nel trattamento di condizioni mediche quali il diabete. Grazie all'integrazione di nanosensori chimici all'interno dei nanorobot, è possibile effettuare un monitoraggio accurato di tali parametri, consentendo l'attivazione di allarmi tempestivi qualora fosse necessaria un'azione terapeutica immediata.

Attraverso l'impiego di onde radio elettromagnetiche e l'utilizzo di un sistema transponder, ovvero un dispositivo in grado di ricevere un segnale e trasmetterne uno nuovo in risposta, è possibile eseguire il tracciamento e il monitoraggio delle condizioni dei nanorobot all'interno del corpo. Le informazioni trasmesse da tali nanorobot vengono elaborate e immagazzinate su server locali o in ambiente cloud, assicurando la tutela della privacy attraverso controlli d'accesso accuratamente gestiti e solide misure di protezione dei dati. Nonostante l'affidabilità dei sistemi di sicurezza informatica, è importante riconoscere la necessità di ulteriori

misure per prevenire possibili violazioni in un contesto di archiviazione basato su cloud e server [4].

### 1.2.5 Monitoraggio

Il monitoraggio dei nanorobot è un compito essenziale che richiede l'integrazione di diverse tecnologie di imaging. Nonostante il progresso notevole nell'ambito dell'imaging, l'assenza di metodi ad alta risoluzione e precisi in vivo costituisce una sfida rilevante nell'applicazione clinica dei nanorobot.

L'attenta supervisione del nanorobot in un ambiente molto dinamico e complesso come i fluidi del corpo umano dipende dalla tecnica di imaging utilizzata, per cui nel corso degli anni sono state sviluppate diverse soluzioni [4].

L'impiego del **tracciamento ottico** per la localizzazione dei nanorobot richiede un'accurata calibrazione del sistema, offrendo vantaggi quali l'osservazione in tempo reale, attrezzature semplici, costi contenuti ed elevata risoluzione spaziale; tuttavia, la localizzazione tridimensionale dei microrobot attraverso il tracciamento ottico risulta tuttora una sfida ancora piuttosto complicata [4].

L'uso della **risonanza magnetica (MRI)** rappresenta un'opzione consolidata e non invasiva nell'ambito dell'imaging medico, caratterizzata da un'eccellente definizione del contrasto tissutale e una risoluzione spaziale elevata. A controbilanciare le innate capacità di localizzazione tridimensionale dei nanorobot e manipolazione attraverso campo magnetico offerte dall'MRI ci sono da considerare i costi elevati, la tempistica richiesta per l'acquisizione di immagini in tempo reale e il potenziale degrado delle immagini a causa di artefatti generati dai materiali magnetici [4].

L'**Emerging Magnetic Particle Imaging (MPI)** rappresenta un metodo emergente ancora in fase di sviluppo che sfrutta l'interazione tra campi magnetici tempo varianti e nanoparticelle superparamagnetiche e presenta prospettive interessanti per il tracciamento e la manipolazione dei nanorobot [4].

L'**imaging a raggi x** è una tecnica che si è ben consolidata negli anni e su cui si basano per esempio la tomografia computerizzata, la radiografia e la fluoroscopia. Quest'ultima si è dimostrata tra le migliori da utilizzare per la localizzazione dei nanorobot grazie all'imaging a tempo reale e alla sua elevata sensibilità. Il

principale svantaggio dei raggi X è la radiazione che provoca il cancro [4].

L'**ecografia** si caratterizza per la sua non invasività e l'effetto minimale sulla salute, sebbene la sua limitata penetrazione, la bassa risoluzione e la scarsa capacità di localizzazione tridimensionale possano presentare ostacoli per l'applicazione dei nanorobot [4].

Tutte queste tecniche di monitoraggio si stanno ancora evolvendo nel corso degli anni al fine di migliorarne le prestazioni, inoltre ciascuna di esse presenta vantaggi e svantaggi specifici che devono essere attentamente valutati in base allo scopo del nanorobot.



## Capitolo 2

# Studio del modello dinamico di un Nanorobot

In questo capitolo ci proponiamo di analizzare un modello semplificato di un Nanorobot in grado di viaggiare nel sangue con scopo medico basandoci sull'esempio proposto in Cavalcanti [5] ed illustrato nella seguente figura:

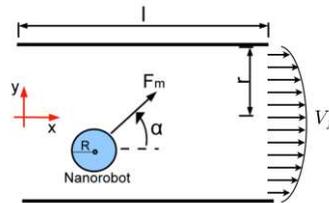


Figura 2.1: Modello di un Nanorobot

Nel sistema preso in considerazione il Nanorobot viene approssimato ad un corpo sferico di massa  $m$  e raggio  $R$ ; inoltre si suppone, per semplicità, che il fluido in cui è immerso sia di tipo Newtoniano, in modo tale da non considerare la dipendenza dalla forza applicata della viscosità, cioè la forza di attrito che si oppone al movimento all'interno del fluido.

Inoltre ci poniamo nella condizione di considerare un moto laminare stazionario, dove il moto avviene tramite lo scorrimento di strati sovrapposti senza alcun rimescolamento del fluido e con velocità costante nel tempo in ciascun punto. A causa della viscosità, per fare in modo tale che esista un flusso all'interno del condotto, bisogna considerare una differenza di pressione  $\Delta P$  fra le estremità di questo e la velocità del fluido  $v_f$  può essere descritta da un andamento parabolico con velocità nulle in prossimità delle pareti e crescenti avvicinandosi al centro del condotto, come illustrato in questa figura:

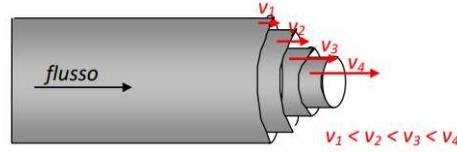


Figura 2.2: Andamento della velocità del fluido

Nel modello proposto il robot si muove all'interno di un condotto cilindrico di lunghezza  $l$  e raggio  $r$ , dove  $F_r v$  rappresenta il valore della forza di attrito viscoso che va ad opporsi al moto del robot, in cui  $F_r = 6\pi\eta R$  e  $\eta$  esprime la viscosità del fluido.

Consideriamo un sistema di riferimento  $xy$ , come indicato nella Figura 2.1, in modo tale che l'asse delle ascisse sia orientato nella direzione del flusso del fluido, mentre l'asse delle ordinate abbia la sua origine al centro del condotto. In questo modo quando il nanorobot si troverà in posizione equidistante dalle pareti del condotto secondo il modello bidimensionale preso in analisi la coordinata verticale sarà nulla.

Il sistema di equazioni che descrive tale modello matematico sarà:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -F_r(\dot{x} - v_f) + F_m \cos \alpha + f_d \\ m\ddot{y} = -F_r\dot{y} + F_m \sin \alpha \end{cases} \quad (2.1)$$

in cui  $F_m > 0$  rappresenta il valore della forza motrice del robot, l'angolo  $\alpha$  definisce la sua direzione e  $f_d$  è la forza di disturbo che agisce sul dispositivo.

In accordo all'andamento parabolico dello scorrimento del fluido, assumiamo la velocità del fluido  $v_f = \frac{\Delta P}{4\eta l}(r^2 - y^2)$ , assumendo una dipendenza quadratica dalla posizione rispetto al centro, con velocità nulla per  $y = r$  e massima al centro per  $y = 0$ , e una dipendenza dalla differenza della pressione  $\Delta P$  ai capi del condotto.

## 2.1 Punti di equilibrio ad ingresso costante

Supponiamo che, in assenza di forze di disturbo, il sistema sia controllato regolando unicamente la direzione della forza motrice attraverso l'angolo  $\alpha$  e andiamo a studiare la posizione del robot rispetto all'origine del sistema di riferimento.

Nella descrizione del modello deterministico preso in analisi sono coinvolte tre tipi di grandezze:

- il vettore di ingresso:  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ f_d \end{bmatrix}$ , costituito dagli ingressi del sistema;

- l'uscita del sistema  $\mathbf{y} = d = \sqrt{x^2 + y^2}$ , che descrive la distanza del centro di massa del robot dall'origine del sistema di riferimento;

- il vettore di stato  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$ , composto dalle variabili di stato.

Queste grandezze sono funzioni della variabile temporale  $t$  continua ( $t \in \mathbb{R}_+$ ).

In tal modo possiamo riscrivere il sistema di equazioni (2.1) sotto forma di un sistema di equazioni differenziali di primo ordine in modo tale da fornire la mappa di aggiornamento di stato del sistema. Questa mappa ci consente di descrivere l'evoluzione nel tempo delle variabili di stato coinvolte; inoltre, per una completa descrizione del modello di stato, determiniamo la mappa di uscita che descrive il legame tra il valore dell'uscita e i valori di ingresso e delle variabili di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{-6\pi\eta R}{m}x_3(t) + \frac{3\pi R\Delta P}{2lm}(r^2 - x_2^2(t)) + \frac{F_m}{m}\cos u_1(t) + \frac{1}{m}u_2(t) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{-6\pi\eta R}{m}x_4(t) + \frac{F_m}{m}\sin u_1(t) \\ \mathbf{y}(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} \end{cases} \quad (2.2)$$

Come possiamo notare dal sistema (2.2), la variabile di uscita  $\mathbf{y}(t)$  dipende soltanto dalle variabili di stato, ciò implica che la dipendenza dell'uscita dall'ingresso sia definita solo attraverso le equazioni di stato.

Possiamo riscrivere in modo compatto le equazioni del sistema nella forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \end{cases}$$

L'obiettivo che ci si pone in questa sezione è quello di individuare i punti di equilibrio ad ingresso costante del sistema, trattandosi di un sistema non lineare e non autonomo e quindi sollecitato da degli ingressi.

Per andare a cercare i punti di equilibrio ad ingresso costante analizziamo i punti in cui la traiettoria di stato, cioè la curva descritta dalle variabili di stato nello spazio di stato  $\mathbb{R}^n$  per  $t \geq 0$ , è puntiforme. Questo equivale a dire che, qualora

il sistema si trovi inizialmente nello stato  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_{\text{eq}}$  e ad esso venga applicato l'ingresso  $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$  costante per  $t \geq 0$ , allora il sistema rimane allo stato  $\mathbf{x}_{\text{eq}}$  per ogni valore di  $t \geq 0$ .

Quindi per andare a cercare i punti di equilibrio del sistema assumiamo l'ingresso costante, ponendo  $u_1 = \alpha = \bar{u}_1$  e  $u_2 = f_d = 0$  (per il calcolo dei punti di equilibrio si assume che non intervengano disturbi) e imponiamo che le derivate delle variabili di stato si annullino, poiché le variabili di stato assumono valore costante nei punti di equilibrio.

Pertanto i punti di equilibrio ad ingressi costanti sono le soluzioni del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 0 = x_3 \\ 0 = x_4 \\ 0 = \frac{-6\pi\eta R}{m}x_3 + \frac{3\pi R\Delta P}{2lm}(r^2 - x_2^2) + \frac{F_m}{m}\cos\bar{u}_1 \\ 0 = \frac{-6\pi\eta R}{m}x_4 + \frac{F_m}{m}\sin\bar{u}_1 \end{cases} \quad (2.3)$$

Dalla quarta equazione si ricava che  $\alpha = K\pi$  per  $K \in \mathbb{Z}$ , poiché  $F_m > 0$  per ipotesi.

Data la periodicità dell'angolo  $\alpha$  ci basterà analizzare le casistiche in cui  $\alpha$  assume i valori 0 e  $\pi$ :

- nel caso di  $\alpha = 0$ , dalla terza equazione si ottiene

$$y = \bar{x}_2 = \pm\sqrt{r^2 + \frac{2lF_m}{3\pi R\Delta P}} \quad (2.4)$$

- nel caso di  $\alpha = \pi$ , dalla terza equazione si ottiene

$$y = \bar{x}_2 = \pm\sqrt{r^2 - \frac{2lF_m}{3\pi R\Delta P}} \quad (2.5)$$

Dato che tutte le grandezze sotto le radici delle soluzioni trovate sono maggiori di zero per ipotesi, nel primo caso risulta che  $|y| > r$  ovvero il punto di equilibrio del sistema ci porta in una situazione tale per cui ci troviamo all'esterno del condotto e pertanto non è fisicamente ammissibile.

Perciò gli unici punti di equilibrio ammissibili fisicamente, poiché permettono di

mantenere il robot all'interno del condotto, sono quelli determinati per  $\alpha = \pi$  e definiti solo per  $r^2 \geq \frac{2lF_m}{3\pi R\Delta P}$  per cui il sistema (2.1) diventa

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -F_r(\dot{x} - v_f) - F_m \\ m\ddot{y} = -F_r\dot{y} \end{cases} \quad (2.6)$$

da cui possiamo vedere che la forza motrice  $F_m$  andrà ad opporsi alla spinta che il fluido imprime sul robot, denotata da  $F_r v_f$ .

Di conseguenza i punti di equilibrio ammissibili trovati per  $u_1 = \alpha = \pi$  sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{eq}}' &= [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4]^T = \left[ \bar{x}_1, +\sqrt{r^2 - \frac{2lF_m}{3\pi R\Delta P}}, 0, 0 \right]^T \\ \mathbf{x}_{\text{eq}}'' &= [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4]^T = \left[ \bar{x}_1, -\sqrt{r^2 - \frac{2lF_m}{3\pi R\Delta P}}, 0, 0 \right]^T \end{aligned}$$

dove  $\bar{x}_1$  è un arbitrario valore reale. Entrambi i punti risultano quindi indifferenti rispetto alla coordinata  $x$  e si può notare la perfetta simmetria delle due soluzioni rispetto all'asse delle ascisse, posizionato al centro del condotto, per cui di seguito tratteremo solamente il caso di  $\mathbf{x}_{\text{eq}}'$  che chiameremo per semplicità  $\mathbf{x}_{\text{eq}}$ .

## 2.2 Linearizzazione del sistema non lineare

Procediamo adesso con la linearizzazione del sistema in un intorno del punto di equilibrio  $\mathbf{x}_{\text{eq}}$  ad ingresso costante  $\bar{\mathbf{u}} = [\pi, 0]^T$ . In primis, facendo riferimento alla coppia  $(\mathbf{x}_{\text{eq}}, \bar{\mathbf{u}})$ , definiamo le perturbazioni del sistema:

- la perturbazione sullo stato ad un istante  $t$  rispetto al valore di equilibrio  $\mathbf{x}_{\text{eq}}$

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{\text{eq}}$$

- la perturbazione sull'ingresso all'istante  $t$  rispetto all'ingresso  $\bar{\mathbf{u}}$

$$\Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}$$

- la perturbazione sull'uscita all'istante  $t$  rispetto al valore  $\mathbf{y}_{\text{eq}}$  corrispondente

alle condizioni di equilibrio

$$\Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_{\text{eq}}$$

Per perturbazioni del sistema sufficientemente piccole, la dinamica del sistema non lineare nell'intorno di  $\mathbf{x}_{\text{eq}}$  per valori dell'ingresso vicini allo zero ( $\Delta \mathbf{u}$  piccolo) trova una buona approssimazione nelle equazioni del sistema lineare trovato tramite la linearizzazione.

Infatti se procediamo a linearizzare il sistema tramite lo sviluppo in serie di Taylor delle funzioni che esprimono le derivate delle componenti del vettore di stato e la variabile di uscita in corrispondenza dell'ingresso  $\Delta \mathbf{u}$  e nell'intorno dello stato di equilibrio  $\mathbf{x}_{\text{eq}}$ , e ci arrestiamo allo sviluppo di primo ordine, sfruttando la scrittura introdotta in (2.1) otteniamo:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}_{\text{eq}}, \Delta \mathbf{u}) \\ &\approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\text{eq}}, \bar{\mathbf{u}}) + \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{eq}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} \Delta \mathbf{x}(t) + \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{eq}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} \Delta \mathbf{u}(t) \\ &= \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{eq}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} \Delta \mathbf{x}(t) + \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{eq}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} \Delta \mathbf{u}(t) \\ \Delta \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\text{eq}} + \Delta \mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\text{eq}}) \\ &\approx \left[ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{eq}}} \Delta \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

Definiamo ora le matrici associate al sistema linearizzato:

$$F = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{eq}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} \quad G = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{eq}} \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}} \quad H = \left[ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{eq}}}$$

Le matrici  $F$  e  $G$  rappresentano rispettivamente le matrici jacobiane <sup>2</sup> di  $\mathbf{f}$  rispetto ad  $\mathbf{x}$  e rispetto ad  $\mathbf{u}$  valutate per  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{eq}}$  e  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ , mentre la matrice  $H$  rappresenta la matrice jacobiana di  $\mathbf{h}$  rispetto ad  $\mathbf{x}$  valutata per i medesimi valori.

Definiamo adesso la rappresentazione matriciale del sistema lineare perturbato in

<sup>1</sup>In alcune di queste equazioni sono state omesse le dipendenze per non appesantire la notazione.

<sup>2</sup>Una matrice i cui elementi sono le derivate parziali prime della funzione considerata.

forma di stato:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= F\Delta\mathbf{x}(t) + G\Delta\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= H\Delta\mathbf{x}(t)\end{aligned}\quad (2.7)$$

in cui le rispettive matrici assumono i valori

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{6\pi R\Delta P}{2lm}\bar{x}_2 & -\frac{6\pi\eta R}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6\pi\eta R}{m} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{F_m}{m}\sin\bar{u}_1 & \frac{1}{m} \\ \frac{F_m}{m}\cos\bar{u}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}} & \frac{\bar{x}_2}{\sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.3 Analisi dei modi tramite la Forma di Jordan

Consideriamo ora i seguenti valori numerici per i parametri fisici in gioco:

$\eta = 0.00116$  Pa s;  $R = 10^{-7}$  m;  $\Delta P = 0.5$  Pa;  $m = 5 \cdot 10^{-10}$  Kg;  $l = 90 \cdot 10^{-6}$  m;  
 $r = 50 \cdot 10^{-5}$  m;  $F_m = 1.4 \cdot 10^{-12}$  N.

Andiamo adesso a linearizzare attorno ad un punto di equilibrio ad ingresso costante fisicamente ammissibile stando a quanto ricavato precedentemente, assumendo  $\bar{x}_1 = \bar{x} = 25 \cdot 10^{-6}$  m,  $\bar{x}_2 = \bar{y} \geq 0$  e  $u_2 = f_d = 0$ .

In queste condizioni il punto di equilibrio  $(\mathbf{x}_{\text{eq}}, \bar{\mathbf{u}})$  diventa:

$$\mathbf{x}_{\text{eq}} = [25 \cdot 10^{-6}, 4.9946 \cdot 10^{-4}, 0, 0]^T \quad \bar{\mathbf{u}} = [\pi, 0]^T \quad (2.8)$$

e dalla rappresentazione matriciale (2.7) si ottiene:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F\Delta\mathbf{x}(t) + G\Delta\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5230 & -4.373 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.373 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 10^{-9} \\ -0.0028 & 0 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = H\Delta\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.9987 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto vogliamo andare a calcolare la forma di *Jordan* della matrice  $F$ . Per farlo determiniamo prima di tutto gli autovalori della matrice, che corrispondono agli zeri del polinomio caratteristico:

$$\det(\lambda I - F) = 0 \implies \lambda^2(\lambda + 4.373)^2 = 0$$

Gli autovalori di  $F$  quindi sono  $\lambda_{1,2} = 0$  e  $\lambda_{3,4} = -4.3731$ , di conseguenza abbiamo che entrambi gli autovalori hanno molteplicità algebrica  $m_a = 2$ .

Andiamo adesso ad individuare gli autovettori linearmente indipendenti corrispondenti agli autovalori trovati; gli autovettori si ricavano risolvendo l'equazione  $(\lambda_i I - F)\mathbf{x} = 0$  che corrisponde a studiare la dimensione del nucleo  $\ker[\lambda_i I - F]$ . Per l'autovalore  $\lambda = 0$  otteniamo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove abbiamo ottenuto un solo vettore linearmente indipendente e vediamo che quindi la molteplicità geometrica  $m_g$ , definita come la dimensione del  $\ker[\lambda_i I - F]$  e il numero di autovettori linearmente indipendenti corrispondenti ad un autovalore, è pari a uno.

Per l'autovalore  $\lambda = -4.373$  si ottiene invece:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \\ -4.373 \bar{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove abbiamo ottenuto di nuovo un solo vettore linearmente indipendente, perciò anche in questo caso troviamo che  $m_g = 1$ .

Le molteplicità algebriche e geometriche appena trovate ci permettono di costruire la **Forma di Jordan** di  $F$ , infatti la molteplicità algebrica determina la dimensione della blocco corrispondente a quell'autovalore, mentre la molteplicità geometrica rappresenta il numero di miniblocchi relativi allo stesso autovalore che compaiono nella forma di Jordan.

Di conseguenza la forma di Jordan ricavata per la matrice  $F$  sarà costituita da due miniblocchi di dimensione 2, uno per ogni autovalore:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.373 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4.373 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Questa matrice ci permette adesso di studiare l'evoluzione libera del sistema, ovvero l'evoluzione nel tempo del sistema a partire da una certa condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  ed in corrispondenza all'ingresso  $\mathbf{u}$  nullo, scritta nella forma:

$$\mathbf{x}(t) = e^{Ft} \mathbf{x}_0$$

Infatti le funzioni elementari del parametro  $t$  che compaiono nella matrice  $e^{Ft}$  possono essere individuate effettuando un cambiamento di base dalla matrice  $F$  alla forma di Jordan corrispondente  $J$  attraverso la matrice  $T$  di cambio di base. Se infatti  $J = T^{-1}FT$  allora:

$$\mathbf{x}(t) = T e^{Jt} T^{-1} \mathbf{x}_0$$

Le funzioni continue del tempo  $t$  che si presentano nella matrice  $e^{Jt}$  prendono il nome di *modi del sistema*. Le componenti dell'evoluzione libera del sistema si possono quindi esprimere come combinazioni lineari di questi modi.

Dalla matrice  $J$  ne consegue che l'autovalore  $\lambda_{1,2}$  genera il modo costante 1 (vedi Figura 2.3(a)) e il modo  $t$  divergente con andamento lineare (vedi Figura 2.3(b)), mentre  $\lambda_{3,4}$  genera il modo  $e^{\lambda_3 t}$  convergente con andamento esponenziale (vedi Figura 2.3(c)) e il modo  $t e^{\lambda_4 t}$  convergente con andamento esponenziale e una fase di rapida crescita iniziale causata dal termine lineare  $t$  (vedi Figura 2.3(d)).

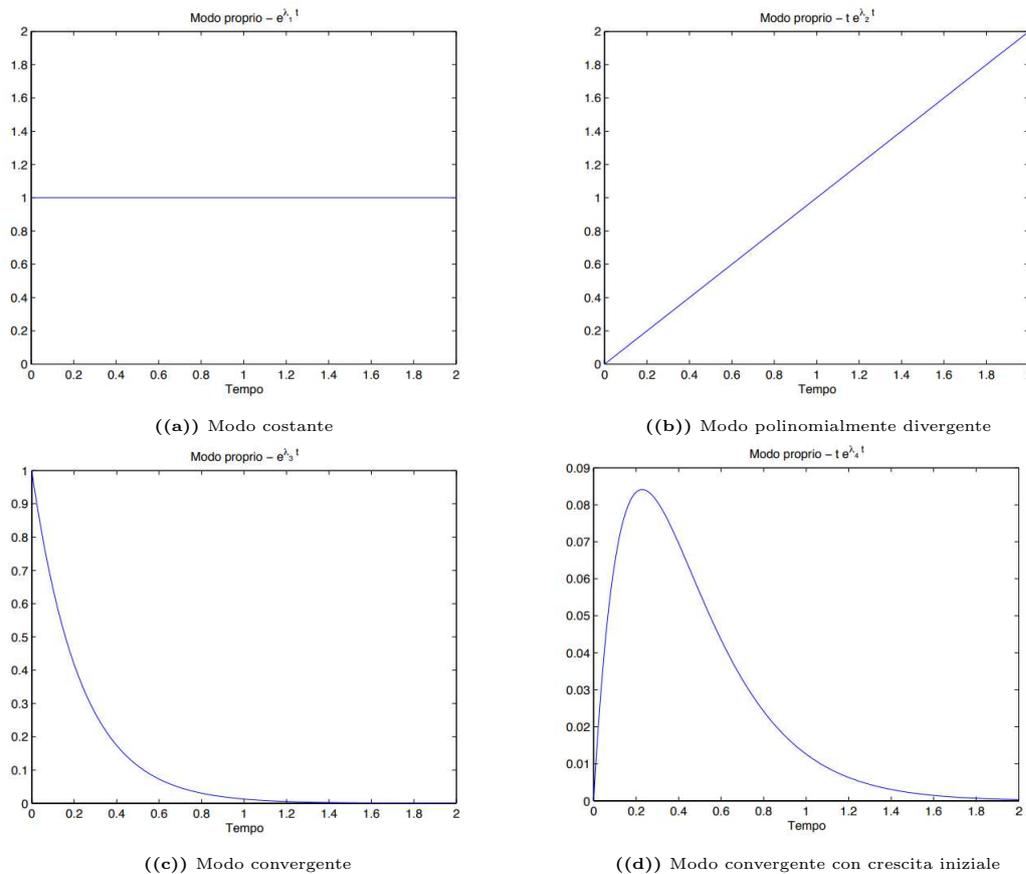


Figura 2.3: Modi propri del sistema

## 2.4 Funzione di trasferimento

Andiamo adesso ad analizzare l'evoluzione forzata del sistema lineare, ovvero l'evoluzione nel tempo del sistema a partire da condizioni iniziali nulle e un certo ingresso  $\mathbf{u}$ .

Per far ciò applichiamo la trasformata di Laplace<sup>3</sup> e la proprietà di linearità di questa al modello lineare definito in (2.7), da cui si ottiene:

$$\begin{cases} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = F\mathbf{X}(s) + G\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) = H\mathbf{X}(s) \end{cases} \quad (2.10)$$

Per ipotesi abbiamo assunto  $\mathbf{x}(0) = 0$ . Risolvendo adesso il sistema in modo da ottenere il legame tra la trasformata della risposta forzata e la trasformata

<sup>3</sup>Avremmo potuto utilizzare la trasformata di Laplace per spiegare anche l'evoluzione libera, ma si è preferito impiegare la matrice di Jordan per studiare direttamente il comportamento dei modi.

dell'ingresso abbiamo

$$\mathbf{Y}(s) = H(sI - F)^{-1}G\mathbf{U}(s)$$

Il rapporto tra queste due trasformate prende il nome di **Funzione di trasferimento**, una funzione razionale fratta che può essere propria o, come in questo caso, strettamente propria e che definiamo come:

$$G^*(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{G}(s)} = H(sI - F)^{-1}G$$

Dai valori delle matrici  $F, G$  e  $H$  precedentemente trovati possiamo quindi calcolare la funzione di trasferimento del sistema lineare in analisi. Si tratta di una matrice di dimensione  $1 \times 2$  le cui componenti rappresentano la *FDT* tra l'ingresso  $u_1 = \alpha$  e l'uscita  $\mathbf{y} = d$  e quella tra l'ingresso  $u_2 = f_d$  e l'uscita precedente. Se definiamo  $\mathbf{G}_1$  il vettore colonna che rappresenta la prima colonna della matrice  $G$  e  $\mathbf{G}_2$  quello che contiene invece la seconda colonna, possiamo determinare la *FDT* tra l'ingresso  $\alpha$  e l'uscita  $d$  come

$$G(s) = H(sI - F)^{-1}\mathbf{G}_1 = \frac{-0.0027965(s + 18.51)(s - 14.14)}{s^2(s + 4.373)^2} \quad (2.11)$$

e la *FDT* tra l'ingresso  $f_d$  e l'uscita  $d$  come

$$G_d(s) = H(sI - F)^{-1}\mathbf{G}_2 = \frac{99981957}{s(s + 4.373)} \quad (2.12)$$

## 2.5 Stabilità del sistema

L'analisi dell'evoluzione libera e forzata ci permette di studiare la stabilità del sistema lineare associato al modello in analisi; per poter caratterizzare il sistema andiamo prima ad introdurre le seguenti definizioni di stabilità:

**Definizione 2.5.1** Un sistema lineare a tempo continuo descritto da un modello ingresso/uscita (2.7) viene detto **asintoticamente stabile** se, in assenza di ingresso di controllo, le traiettorie di stato in evoluzione libera convergono asintoticamente a zero, in corrispondenza ad ogni possibile n-upla di condizioni iniziali [7].

**Definizione 2.5.2** Un sistema lineare a tempo continuo descritto da un modello ingresso/uscita (2.7) viene detto **BIBO (bounded input/bounded out-**

**put) stabile** se, a partire da condizioni iniziali nulle, il sistema risponde ad ogni ingresso causale limitato con un'uscita (causale) limitata [7].

Definite queste nozioni, consideriamo i modi del sistema trovati nella sezione 2.3 da cui possiamo immediatamente vedere che, a causa della presenza di modi che non convergono a zero, esisteranno, per certe condizioni iniziali, delle traiettorie di stato che non andranno a convergere asintoticamente a zero. Da questa analisi si può quindi concludere che il sistema non sarà asintoticamente stabile. Per quanto riguarda invece la BIBO stabilità, la condizione di bound tra ingresso limitato ed uscita limitata equivale<sup>4</sup> ad avere tutti i poli della  $FDT$  nel semipiano sinistro aperto  $Re(s) < 0$ ; stando alle funzioni di trasferimento trovate nella sezione 2.4 entrambe presentano dei poli nell'origine e di conseguenza il sistema non è neanche BIBO stabile.

## 2.6 Risposta al gradino

L'analisi della risposta al gradino risulta rilevante al fine di trovare soluzioni accettabili per soddisfare gli obiettivi di progettazione richiesti; tra questi uno dei più rilevanti è quello di portare l'uscita a regime ad un desiderato valore costante, impostato tramite la sollecitazione del sistema con un opportuno ingresso costante.

Andiamo ad analizzare il comportamento del sistema in assenza di disturbi impostando un ingresso costante, cioè il gradino unitario ( $u_1(t) = \delta_{-1}(t)$ ), e definiamo con il simbolo  $w_{-1}(t)$  la risposta al gradino del sistema.

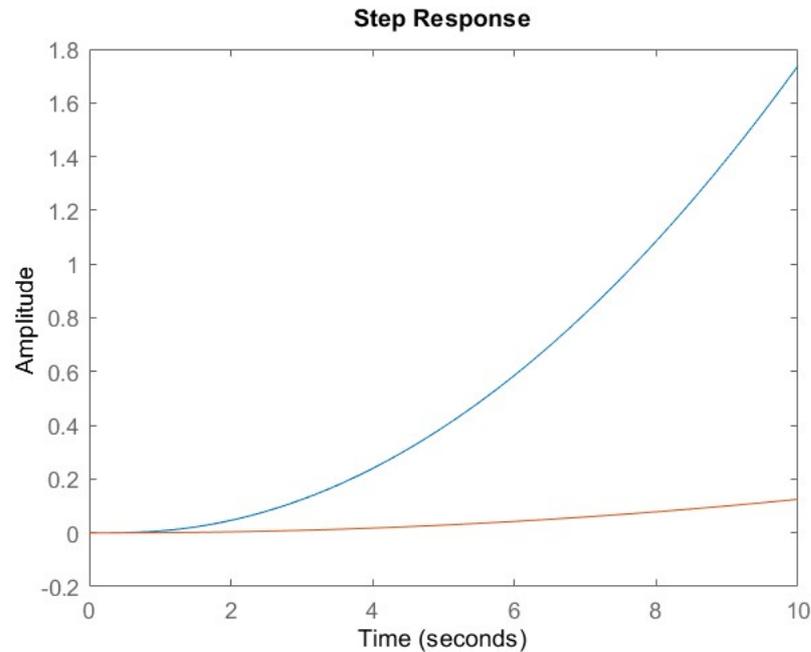
Innanzitutto definiamo i parametri che caratterizzano il comportamento della risposta al gradino nel dominio del tempo:

- $t_r =$  **tempo di salita (rise-time)** è il tempo necessario perché l'uscita entri per la prima volta in un intorno fissato del valore finale  $w_{-1}(+\infty)$ ;
- $t_s =$  **tempo di assestamento (settling-time)** è il tempo necessario perché l'uscita si assesti definitivamente in un intorno fissato del valore finale  $w_{-1}(+\infty)$ ;
- $S =$  **sovraelongazione (overshoot)** è il massimo scostamento positivo che l'uscita presenta rispetto al valore finale  $w_{-1}(+\infty)$ .

---

<sup>4</sup>Si veda *Bisiacco M.; Valcher M.E., Controlli Automatici, Libreria Progetto, 2015 pp. 81-82.*

Successivamente, attraverso il comando *Matlab* `step( )`, ricaviamo l'andamento della risposta al gradino  $w_{-1}(t)$ :



**Figura 2.4:** Risposta al gradino di  $G(s)$

Attraverso l'analisi della *FDT*  $G(s)$  (precedentemente definita possiamo trarre direttamente delle conclusioni sul comportamento della risposta al gradino evidenziata in blu nella Figura 2.4.

L'effetto dei poli fa riferimento ai modi evidenziati nella Figura 2.3, infatti il polo multiplo nell'origine porta la risposta a crescere indefinitamente a cui si va a sommare/sottrarre il contributo dei rimanenti poli.

La presenza dello zero stabile velocizza il sistema, mentre la presenza dello zero instabile e il valore negativo del *guadagno di Evans* di  $G(s)$ , pari a  $K_E = -0.0027965$ , portano ad un doppio ribaltamento della risposta riportandola a crescere indefinitamente, ma più velocemente rispetto ad una situazione di assenza di zero instabile e  $K_E > 0$  (vedi grafico in arancione nella Figura 2.4).

Dall'analisi della risposta al gradino di  $G(s)$  possiamo concludere che l'instabilità del sistema (più di preciso l'assenza di BIBO stabilità) non ci permette di definire i valori dei parametri della risposta al gradino, impedendone di conseguenza la regolazione.

Nel prossimo capitolo vedremo come, a partire dalle funzioni di trasferimento

prese in analisi, riportarci in una situazione di stabilità e in condizioni tali da poter soddisfare dei requisiti di progetto.

# Capitolo 3

## Controllo in retroazione

Consideriamo ora il sistema lineare tempo invariante a tempo continuo MISO con ingresso di controllo  $u(t)$ , che si riferisce ad  $\alpha$ , ingresso di disturbo  $d(t)$ , che si riferisce a  $f_d$ , e uscita  $y(t)$ , descritto dalle funzioni di trasferimento  $G(s)$  e  $G_d(s)$ . Ci proponiamo di progettare un controllore in retroazione  $C(s)$  in modo che il sistema controllato connesso in retroazione unitaria negativa (cioè il segnale di uscita viene riportato in ingresso non riscalato e con segno invertito) soddisfi la condizione di BIBO stabilità ed altre specifiche che vedremo nel dettaglio in seguito.

Pur essendo MISO e non SISO, data la presenza di più ingressi e una sola uscita, grazie alla linearità del sistema è possibile analizzare separatamente l'effetto dei vari ingressi sull'uscita riportandoci a studiare dei sistemi SISO; l'uscita complessiva del sistema retroazionato (o a catena chiusa) sarà la somma delle uscite dovute all'effetto dei singoli ingressi.

In Figura 3.1 vediamo quindi lo schema a blocchi che rappresenta il sistema in retroazione a partire dal sistema preso in analisi:

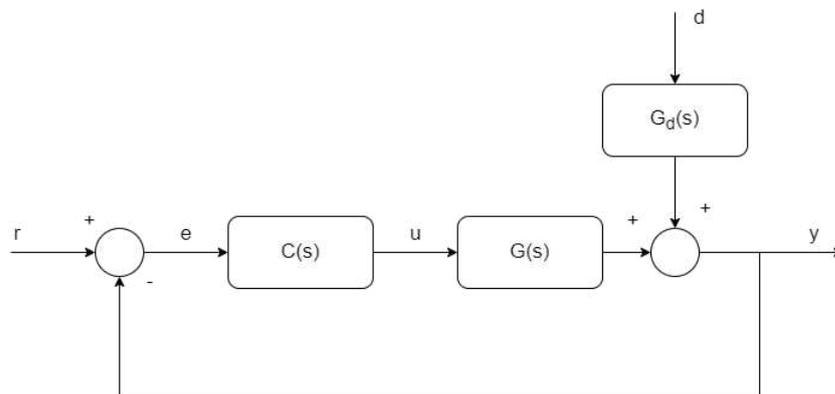


Figura 3.1: Schema di controllo in retroazione con ingresso di disturbo

dove  $r(t)$  rappresenta l'ingresso esterno di riferimento, mentre la differenza  $e(t) = r(t) - y(t)$  rappresenta l'effettivo segnale di ingresso al sistema in catena aperta  $C(s)G(s)$  e l'errore che il sistema compie cercando di fare in modo che il segnale di uscita  $y(t)$  insegua il segnale di riferimento  $r(t)$ .

Il sistema complessivo in catena chiusa si può quindi descrivere attraverso le trasformate di Laplace, andando a determinare il legame tra le trasformate di Laplace di uscita  $Y(s)$ , del riferimento  $R(s)$  e del disturbo  $D(s)$ :

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}R(s) + \frac{G_d(s)}{1 + C(s)G(s)}D(s) \quad (3.1)$$

e quindi la funzione di trasferimento del sistema retroazionato dal segnale di riferimento all'uscita risulta

$$W(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1 + \tilde{G}(s)} \quad (3.2)$$

dove definiamo  $\tilde{G}(s) = C(s)G(s)$ .

Di seguito studieremo la BIBO stabilità del sistema in retroazione e nell'eventualità che non lo sia vedremo come realizzare un controllore in modo da rendere il risultante sistema retroazionato BIBO stabile.

## 3.1 Stabilità del sistema retroazionato

In questa sezione andremo a vedere come, attraverso diversi metodi, sia possibile valutare la BIBO stabilità della *FDT*  $W(s)$  del sistema retroazionato andando a studiare il comportamento della *FDT*  $\tilde{G}(s)$  del sistema in catena aperta.

In primo luogo ci riduciamo ad analizzare il sistema in catena aperta con, semplicemente, la *FDT*  $\tilde{G}(s) = G(s)$  ed in seguito vedremo come la presenza di controllore proporzionale del tipo  $C(s) = K$  può alterare il comportamento del sistema.

### 3.1.1 Criterio di Bode

Innanzitutto definiamo la risposta in frequenza  $G(j\omega)$  del sistema in catena aperta, che non è che la funzione di trasferimento  $G(s)$  valutata per  $s = j\omega$ .

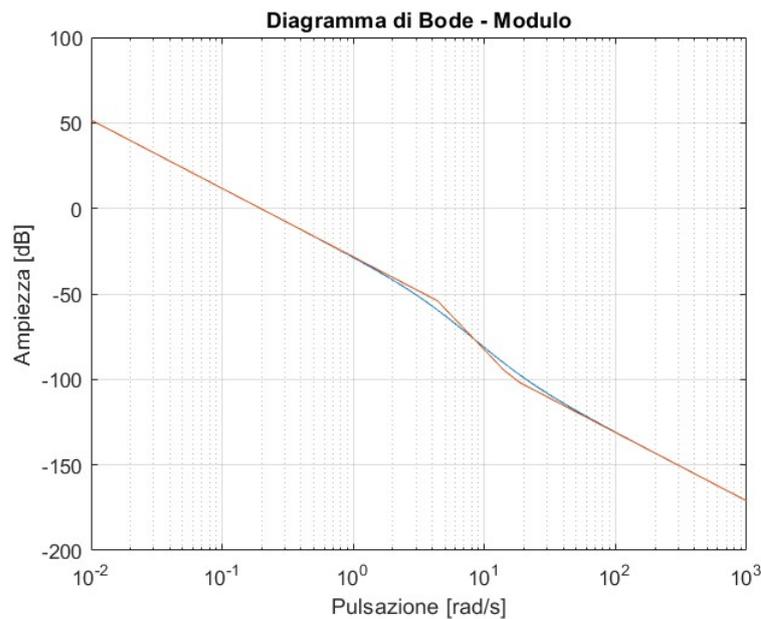
Andiamo adesso a studiare come attraverso la rappresentazione grafica ottenuta tramite i *diagrammi di Bode* sia possibile trarre delle conclusioni sulla stabilità

del sistema ad anello chiuso.

In primis vediamo che la rappresentazione di  $G(s)$  in (2.11) è conosciuta come *rappresentazione di Evans*, a partire da questa possiamo ricondurci ad un'altra, nota con il nome di *rappresentazione di Bode*, che ci permetterà di procedere con la costruzione dei diagrammi di Bode di  $G(s)$ :

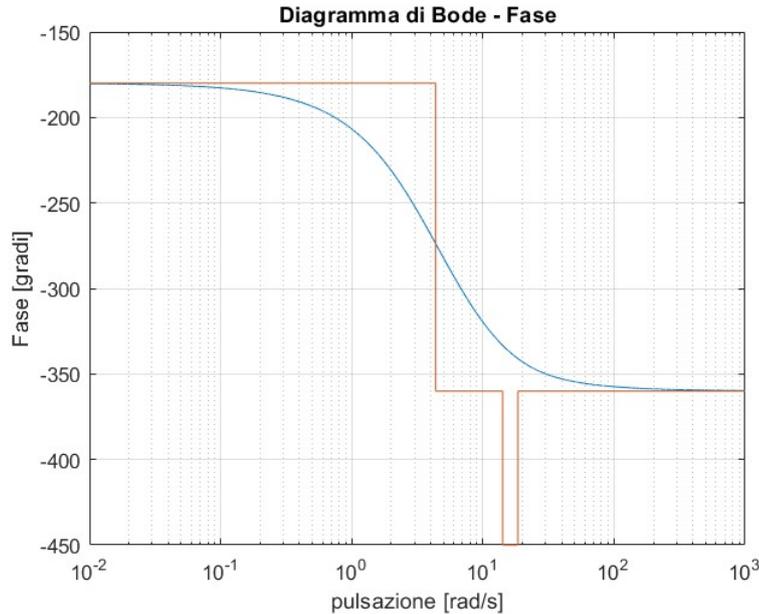
$$G(s) = 0.0382747 \frac{\left(1 + \frac{s}{18.51}\right) \left(1 - \frac{s}{14.14}\right)}{s^2 \left(1 + \frac{s}{4.373}\right)^2} \quad (3.3)$$

dove il valore costante  $K_B(G) = 0.0382747$  prende il nome di *guadagno di Bode*. Andando a valutare  $G(s)$  per  $s = j\omega$  vediamo che  $G(j\omega)$  è una funzione complessa della pulsazione  $\omega$  e una sua completa rappresentazione avrebbe bisogno di uno spazio tridimensionale, soluzione abbastanza complicata da realizzare. Una delle soluzioni proposte per la sua rappresentazione sono appunto i diagrammi di Bode di  $G(j\omega)$ : il diagramma delle ampiezze, che permette di analizzare il comportamento del logaritmo del modulo al variare della pulsazione, e il diagramma delle fasi, che invece permette di studiare l'argomento della risposta in frequenza in funzione della pulsazione.<sup>1</sup>



**Figura 3.2:** Diagramma di Bode delle ampiezze di  $G(s)$

<sup>1</sup>Poiché lavoriamo con sistemi reali, che godono della proprietà di simmetria Hermitiana, consideriamo i grafici di  $G(j\omega)$  solo per  $\omega \in [0, +\infty)$ .



**Figura 3.3:** Diagramma di Bode delle fasi di  $G(s)$

Definiamo ora dei parametri che ci permetteranno di studiare la stabilità di  $W(s)$  a partire dallo studio dei diagrammi di Bode di  $G(j\omega)$ :

- $\omega_A =$  **pulsazione di attraversamento** di  $G(j\omega)$  è quella pulsazione non negativa, se esiste ed è unica, per cui  $|G(j\omega_A)| = 1$  o, nel diagramma delle ampiezze di  $G(j\omega)$ , in corrispondenza alla quale  $|G(j\omega_A)|_{dB} = 0$ ;
- $m_\psi =$  **marginale di fase** di  $G(j\omega)$  è definita, se  $\omega_A$  esiste, come

$$m_\psi = \arg(G(j\omega_A)) + 180^\circ.$$

In seguito andiamo ad enunciare il *Criterio di Bode*, fondamentale per analizzare la stabilità del sistema in catena chiusa  $W(s)$  a partire dai parametri precedentemente definiti per il sistema in catena aperta  $G(s)$ .

Secondo questo criterio, sia  $G(s) \in \mathbb{R}[s]$  una funzione di trasferimento strettamente propria, priva di poli a parte reale positiva e con  $K_B(G) > 0$ , allora, se esiste  $\omega_A$  e di conseguenza  $m_\psi$ , allora il risultante sistema retroazionato  $W(s)$  è BIBO stabile se e solo se  $m_\psi > 0$ .

Dai diagrammi di Bode di *FDT*  $G(s)$  (vedi Figura 3.2 e Figura 3.3) possiamo vedere che, in corrispondenza della pulsazione di attraversamento  $\omega_A$ , il margine di fase  $m_\psi$  è negativo ( $\arg(G(j\omega_A)) < 180^\circ$ ) e di conseguenza per il criterio di Bode il sistema in catena chiuso non sarà BIBO stabile.

Inoltre possiamo già dire che l'introduzione di un semplice controllore proporzionale del tipo  $C(s) = K$  non rende comunque possibile la stabilità del sistema, poiché per ipotesi del criterio di Bode vogliamo mantenere il guadagno di Bode del sistema in catena aperta  $K_B(C)K_B(G)$  (dove  $K_B(C) = K$  in questo caso) positivo e una semplice modifica del guadagno del sistema non altera il diagramma delle fasi, non riuscendo perciò a portarci in una situazione per cui  $m_\psi > 0$ .

### 3.1.2 Criterio di Nyquist

Data la funzione di trasferimento  $\tilde{G}(s) = G(s)$  e conoscendone il relativo diagramma completo di Nyquist (ovvero della  $G(j\omega) \forall \omega \in \mathbb{R}$ ) possiamo applicare il *Criterio di Nyquist*.

Questo criterio suppone di conoscere appunto il diagramma di Nyquist completo della  $G(j\omega)$  e il numero di poli a parte reale positiva di  $G(s)$  che indicheremo con  $n_{G+}$ ; inoltre si suppone che:

- il diagramma di Nyquist della  $G(j\omega)$  rimanga al finito  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ ;
- il diagramma di Nyquist non passi né al finito ( $\omega \in \mathbb{R}$ ) né all'infinito ( $\omega = \pm\infty$ ) per il punto critico  $-1 + j0$ .

Sotto queste ipotesi indichiamo con  $N$  il numero di giri che il diagramma di Nyquist compie attorno a  $-1 + j0$  quando  $\omega$  varia da  $-\infty$  a  $+\infty$  contati con segno positivo se descritti in verso antiorario e con segno negativo se descritti in verso orario.

Allora vale

$$N = n_{G+} - n_{W+}$$

dove  $n_{W+}$  rappresenta il numero di poli a parte reale positiva di  $W(s)$ .

Pertanto  $W(s)$  è BIBO stabile  $\iff N = n_{G+}$ . Vediamo quindi il diagramma di Nyquist per la  $G(s)$  presa in analisi:

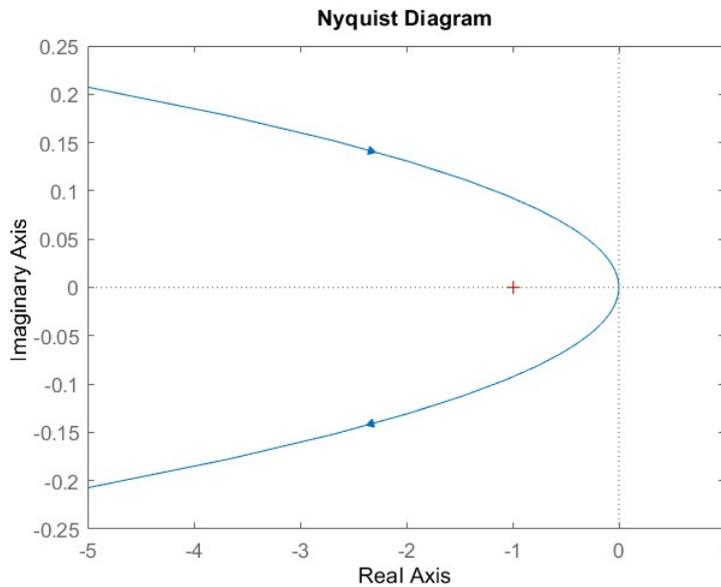


Figura 3.4: Diagramma di Nyquist di  $G(s)$

Come è possibile evidenziare dalla Figura 3.4 il diagramma di Nyquist non resta al finito, andando a contraddire una delle ipotesi fatte in precedenza. Questo comportamento è motivato dalla presenza di poli a parte reale nulla in  $G(s)$  e non impedisce a priori che la  $W(s)$  sia BIBO stabile, ma rende impossibile il calcolo di  $N$  per come abbiamo definito il criterio in precedenza.

Per ovviare a ciò ricorriamo al *percorso di Nyquist modificato*, infatti considerando il diagramma di Nyquist di  $G(j\omega)$  come l'immagine secondo  $G(j\omega)$  dell'asse immaginario, possiamo ricondurci ad una situazione tale da aggirare i poli sull'asse immaginario (in questo caso i poli nell'origine) tracciando una semicirconfenza in verso antiorario e di raggio  $\epsilon$ , assunto molto piccolo, in modo tale da assimilare i poli immaginari a poli a parte reale negativa. In tal modo nell'immagine, cioè il diagramma di Nyquist, è possibile raccordare attraverso una semicirconfenza di raggio molto grande, inversamente proporzionale ad  $\epsilon^\nu$ , dove  $\nu$  rappresenta la molteplicità dei poli sull'asse immaginario, i tratti della curva aperta  $G(j\omega)$  descrivendo un angolo di  $\nu\pi$  radianti in verso orario, in questo caso  $\nu = 2$ .

Di conseguenza, andando a tracciare il diagramma di Nyquist modificato di  $G(j\omega)$  otteniamo approssimativamente una curva circolare che, descrivendo un angolo di  $2\pi$  in questo caso, compie un giro in senso orario partendo dal tratto di curva nel terzo quadrante per poi ricongiungersi con il tratto di curva nel secondo quadrante.

In questo modo riusciamo adesso a determinare  $N$  per il diagramma modificato;

poiché il diagramma di Nyquist modificato di  $G(s)$  compie 2 giri in verso orario attorno al punto critico  $-1 + j0$ , perciò  $N = -2$  ed essendo  $n_{G^+} = 0$  si otterrà che  $n_{W^+} = 2$ , implicando che il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha due poli a parte reale positiva.

In presenza di un controllore proporzionale del tipo  $C(s) = K$  vediamo perché non sarebbe comunque possibile portare il sistema retroazionato in una condizione di stabilità. Infatti andando ad analizzare il sistema in catena aperta del tipo  $KG(j\omega)$  possiamo osservare che il numero di giri che la curva compie attorno al punto critico  $-1 + j0$  è lo stesso che  $G(j\omega)$  compie attorno al punto critico “mobile”  $-\frac{1}{K} + j0$ .

Invero andando ad analizzare il sistema in catena aperta del tipo  $KG(j\omega)$  possiamo ricondurci allo studio della posizione del punto critico “mobile”  $-\frac{1}{K} + j0$  rispetto al diagramma di Nyquist di  $G(j\omega)$  al fine di studiare, al variare di  $K$ , il numero  $n_{W^+}$  di poli a parte reale positiva e, di conseguenza, la stabilità del sistema in catena aperta  $\tilde{G}(s)$  in presenza di un controllore proporzionale del tipo  $C(s) = K$ .

Facendo quindi variare la posizione del punto critico sull’asse reale al variare di  $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  possiamo studiare l’effetto del controllore proporzionale sul sistema. Osservando la Figura 3.4 possiamo direttamente concludere che per valori positivi di  $K$  avremo sempre  $n_{W^+} = 2$ , mentre per valori negativi di  $K$  avremo sempre  $n_{W^+} = 1$ .<sup>2</sup>

A seguito di ciò possiamo affermare che il semplice impiego di un controllore proporzionale non è in grado di risolvere l’instabilità del sistema.

### 3.1.3 Luogo delle radici

Vediamo adesso un metodo grafico che ci permette, a partire dal sistema in catena aperta  $\tilde{G}(s) = KG(s)$  di studiare la BIBO stabilità del sistema retroazionato al variare di  $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Questo metodo, che prende il nome di *luogo delle radici*, ci permette non solo di studiare la stabilità del sistema e stabilire la collocazione dei poli rispetto all’asse immaginario, ma ci permette di studiare l’andamento e la posizione dei poli di  $W(s)$  al variare di  $K$ .

Secondo questo metodo, se  $\tilde{G}(s) = KK_E \frac{n(s)}{d(s)}$  è una rappresentazione irriducibile

<sup>2</sup>Non consideriamo il caso di  $K = 0$  per cui  $W(s)$  diventa la funzione nulla e sempre BIBO stabile.

con  $n(s)$  e  $d(s)$  monici<sup>3</sup>,  $K_E$  guadagno di Evans di  $G(s)$  e  $K$  parametro variabile, i poli di  $W(s)$  coincidono con gli zeri del polinomio

$$p(s) = d(s) + KK_E n(s) \quad (3.4)$$

Chiamiamo *luogo delle radici* l'insieme di punti  $s \in \mathbb{C}$  che annullano il polinomio (3.4) al variare di  $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

I punti che soddisfano l'equazione  $p(s) = 0$  per  $KK_E > 0$  ( $K < 0$ ) costituiscono il *luogo positivo* delle radici, mentre quelli che la soddisfano per  $KK_E < 0$  ( $K > 0$ ) formano il *luogo negativo*.

Vediamo che  $G(s)$  è già in forma irriducibile nella rappresentazione in forma di Evans in (2.11), quindi procediamo direttamente a tracciare il luogo positivo e negativo per  $G(s)$ .

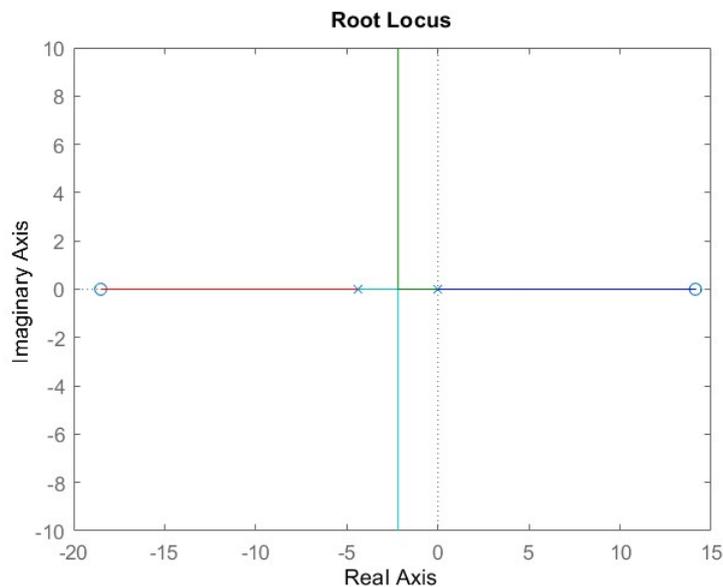


Figura 3.5: Luogo delle radici positivo per  $\tilde{G}(s)$

<sup>3</sup>Il coefficiente numerico del monomio di grado massimo è 1.

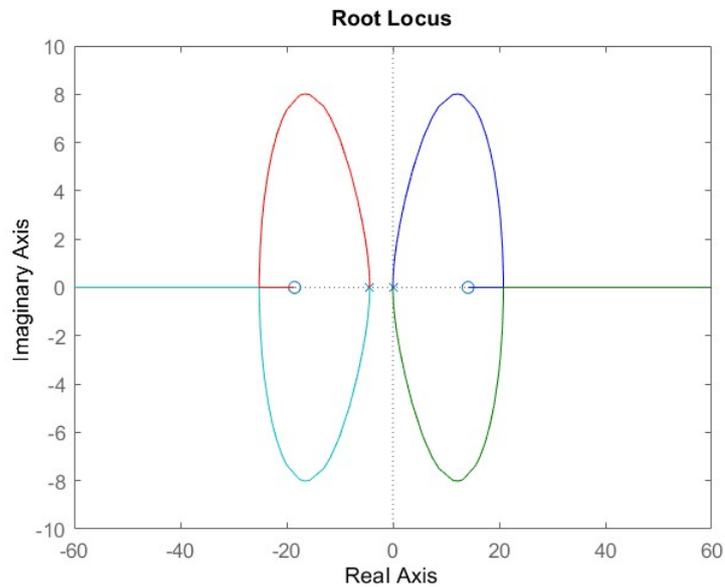


Figura 3.6: Luogo delle radici negativo per  $\tilde{G}(s)$

Analizzando il luogo delle radici dalla Figura 3.5 e dalla Figura 3.6 possiamo osservare che per qualsiasi valore assunto da  $K$  saranno presenti dei poli a parte reale positiva in  $W(s)$ , rendendo perciò inefficace l'introduzione di un controllore proporzionale del tipo  $C(s) = K$ .

### 3.1.4 Ipotesi su controllore stabilizzante

Come abbiamo potuto vedere in precedenza, l'impiego di un semplice controllore proporzionale non ci porta fuori dalla condizione di instabilità di  $W(s)$ .

Possiamo però concludere dalle precedenti analisi che l'introduzione di uno zero stabile vicino all'asse immaginario tramite il controllore potrebbe permettere di alzare il margine di fase e di traslare verso sinistra il luogo delle radici (positivo o negativo) così da risultare una possibile soluzione per il raggiungimento della stabilità del sistema retroazionato  $W(s)$ .

In tal caso per rendere il controllore  $C(s)$  proprio è necessario introdurre anche un polo negativo e di valore assoluto abbastanza elevato da non alterare significativamente il comportamento del sistema, ma trascurabile nell'analisi dei poli dominanti<sup>4</sup>. In questo modo il polo in alta frequenza non andrà ad alterare in maniera apprezzabile il diagramma nell'intorno della pulsazione di attraversa-

<sup>4</sup>I poli dominanti sono i poli stabili più vicini all'asse immaginario associati ad una costante di tempo più grande e che vanno ad incidere maggiormente sulla risposta al gradino essendo i più lenti.

mento, così da non andare a modificare in maniera sostanziale né il margine di fase né la pulsazione di attraversamento, richiesti dalle specifiche e ottenuti con l'introduzione dello zero, né l'andamento del modulo a bassa frequenza (rilevante per la reiezione dei disturbi che vedremo in seguito).

## 3.2 Specifiche di progetto

In questa sezione andremo ad analizzare le specifiche di progetto richieste per il sistema e come queste si traducano nella progettazione di  $W(s)$  e di conseguenza del controllore  $C(s)$ .

Vogliamo quindi realizzare un controllore in grado di far soddisfare le seguenti specifiche al sistema retroazionato:

- il robot, a partire dall'origine del sistema di riferimento, deve giungere ad un valore a regime  $y(t) = \bar{y}$  riuscendo a rimanere all'interno dell'intervallo  $[0.95\bar{y}, 1.05\bar{y}]$  in un tempo non superiore a 10s e senza mai oltrepassare il valore limite di  $1.1\bar{y}$ ;
- ipotizzando che la forza  $f_d$  di disturbo agente sul robot sia

$$f_d = \bar{f}_d + F_d \sin(\omega t) \quad \text{con} \quad 0 \leq F_d \leq 10^{-16} N, \quad \omega_d \leq 0.01 \text{ rad/s}$$

costituita dalla somma di una componente costante di valore  $\bar{f}_d$  generico e una componente variabile sinusoidale, si deve garantire che lo scostamento indotto dalla componente costante  $\bar{f}_d$  del disturbo sulla posizione del robot rispetto al valore a regime  $\bar{y}$  venga completamente annullato e che la variazione indotta dalla componente sinusoidale su  $y(t)$  sia inferiore a  $10^{-8}m$ .

### 3.2.1 Errore a regime

La prima richiesta impone errore nullo a regime per l'inseguimento a segnali costanti  $r(t) = \bar{r}$ , mentre il primo requisito sulla componente di disturbo richiede che l'effetto della componente costante sia completamente annullato.

Analizziamo ora  $E(s)$  la trasformata di Laplace dell'errore  $e(t)$  e vediamo come può aiutarci a soddisfare le specifiche indicate:

$$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{1}{1 + \tilde{G}(s)} R(s) - \frac{G_d(s)}{1 + \tilde{G}(s)} D(s) \quad (3.5)$$

Applicando il teorema del valore finale<sup>5</sup> si ottiene che l'errore a regime vale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + \tilde{G}(s)} R(s) - \frac{sG_d(s)}{1 + \tilde{G}(s)} D(s) \quad (3.6)$$

Essendo il sistema lineare è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti; perciò possiamo studiare separatamente gli effetti del riferimento  $R(s)$  e del disturbo  $D(s)$ .

Andando ad analizzare il solo effetto a regime del riferimento, se si impone un errore nullo per l'inseguimento di segnali costanti, allora si vuole andare a considerare l'errore quando il riferimento  $r(t)$  è un gradino<sup>6</sup> (senza perdita di generalità assumiamo che sia un gradino unitario).

La trasformata del segnale di riferimento a gradino unitario è  $R(s) = \frac{1}{s}$  e la relazione (3.6) diventa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + \tilde{G}(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \tilde{G}(s)} \quad (3.7)$$

da cui è possibile dedurre che se la *FDT* ad anello aperto  $\tilde{G}(s)$  presenta uno o più poli nell'origine allora l'errore a regime è nullo.

Vediamo adesso l'effetto di un disturbo costante, perciò sempre un gradino, sul sistema a partire da (3.6):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{sG_d(s)}{1 + \tilde{G}(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{G_d(s)}{1 + \tilde{G}(s)} \quad (3.8)$$

che vediamo quindi annullarsi quando  $\tilde{G}(s)$  possiede almeno un polo nell'origine in più rispetto a  $G_d(s)$ .

Prendendo in considerazione la *FDT*  $G(s)$  vediamo che questa presenta già due poli nell'origine<sup>7</sup>, mentre  $G_d(s)$  ne possiede soltanto uno, di conseguenza le specifiche per l'errore a regime sono automaticamente soddisfatte.

<sup>5</sup>Sempre applicabile a funzioni razionali in  $\mathbb{R}(s)$  che in una rappresentazione irriducibile non presentano zeri nell'origine e poli a parte reale non negativa.

<sup>6</sup>Stiamo lavorando per  $t \geq 0$ , perciò quando si parla di segnali costanti si intende che sono costanti per  $t \geq 0$ , cioè segnali a gradino.

<sup>7</sup>Si assume che il controllore  $C(s)$  non possa effettuare cancellazioni con poli a parte reale non negativa al fine di effetti indesiderati.

### 3.2.2 Massima sovraelongazione e tempo di assestamento

Spesso quando si trattano sistemi di ordine elevato è possibile notare che essi assumono comportamenti dinamici simili a quelli di sistemi del primo o del secondo ordine dal punto di vista dell'andamento della loro risposta al gradino.

Coerentemente la *FDT* in anello chiuso  $W(s)$  può essere approssimata da una funzione di trasferimento con un solo polo dominante o con una coppia di poli complessi coniugati dominanti.

Se si considera la  $\tilde{G}(s)$  senza poli a parte reale positiva e assumendo che il sistema in catena aperta mantenga un diagramma di Bode delle ampiezze che attraversa solo una volta l'asse in  $0dB$ , possiamo osservare che per  $\omega \ll \omega_A$  si ha  $|1 + \tilde{G}(j\omega)| \simeq |\tilde{G}(j\omega)|$  e per  $\omega \gg \omega_A$  si ha  $|1 + \tilde{G}(j\omega)| \simeq 1$ , perciò  $W(j\omega)$  si approssima a:

$$\begin{aligned} |W(j\omega)| &= \frac{|\tilde{G}(j\omega)|}{|1 + \tilde{G}(j\omega)|} \simeq 1 & \text{per } \omega \leq \omega_A \\ |W(j\omega)| &= \frac{|\tilde{G}(j\omega)|}{|1 + \tilde{G}(j\omega)|} \simeq |\tilde{G}(j\omega)| & \text{per } \omega > \omega_A \end{aligned} \quad (3.9)$$

che si può considerare una buona approssimazione se si è distanti dalla pulsazione di attraversamento  $j\omega_A$ .

Dalla specifica sulla sovraelongazione, si deduce che un sistema con due poli dominanti possa risultare una buona approssimazione del sistema in anello chiuso. Grazie a quest'approssimazione possiamo ricavare alcune relazioni importanti che ci permettono di legare i concetti di sovraelongazione  $S$  e tempo di assestamento  $t_s$  caratteristici della risposta al gradino con la pulsazione di attraversamento  $\omega_A$  e il margine di fase  $m_\psi$  della *FDT* in anello aperto  $\tilde{G}(s)$ :

$$\begin{aligned} S &\simeq e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \\ \omega_A &\simeq \frac{3}{\delta t_s} \\ \delta &\simeq \frac{m_\psi}{100} \end{aligned} \quad (3.10)$$

andando adesso a sostituire le specifiche richieste per sovraelongazione ( $S \leq 10\%$ ) e tempo di assestamento ( $t_s < 10s$ ) otteniamo:

$$\begin{aligned}\omega_A^* &\simeq 0.51 \text{ rad/s} \\ m_{\psi}^* &\simeq 59.12^\circ\end{aligned}$$

che saranno quindi la pulsazione di attraversamento e il margine di fase desiderati per il sistema in anello aperto  $\tilde{G}(s)$ .<sup>8</sup>

Tale operazione, che vedremo in pratica nella fase di progettazione, può essere realizzata inserendo opportunamente uno zero stabile prima della pulsazione di attraversamento  $\omega_A$  di  $G(s)$ .

### 3.2.3 Reiezione dei disturbi a bassa frequenza

Prendiamo adesso in considerazione l'ultima specifica che riguarda la presenza di un disturbo sinusoidale  $\tilde{f}_d = F_d \sin(\omega_d t)$  con  $0 \leq F_d \leq 10^{-16} N$  a bassa frequenza ( $\omega_d \leq 0.01 \text{ rad/s}$ ). In questa situazione lo scopo del sistema in anello chiuso sarà quello di limitare in uscita l'ampiezza delle oscillazioni causate appunto dal disturbo al di sotto del valore di soglia  $\bar{y}_d = 10^{-8} m$ .

Applicando il teorema della risposta armonica<sup>9</sup> alla  $FDT$  che lega l'uscita  $Y(s)$  e il disturbo  $D(s)$  (in condizioni di BIBO stabilità e ingresso di riferimento nullo)

$$W_d(s) = \frac{G_d(s)}{1 + \tilde{G}(s)} \quad (3.11)$$

otteniamo

$$y(t) = |W_d(j\omega_d)| F_d \sin(\omega_d t + \arg(W_d(j\omega_d))) \quad (3.12)$$

In questo caso ci proponiamo di ottenere  $|y(t)| < \bar{y}_d$  per pulsazioni  $\omega_d \leq 0.01 \text{ rad/s}$ ; facendo riferimento al caso peggiore, in cui  $F_d = 10^{-16}$  e  $\sin(\cdot) = 1$ , si ottiene

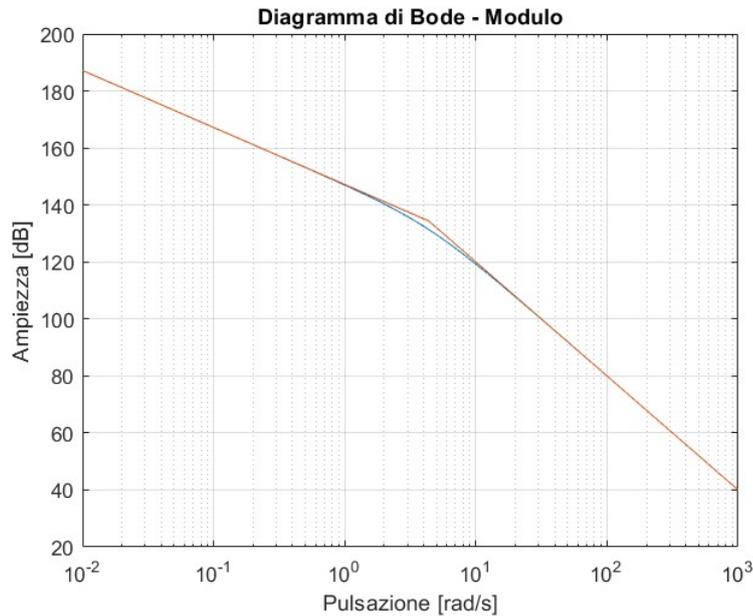
$$|W_d(j\omega_d)| < 10^8$$

per cui

$$|G_d(j\omega_d)| < 10^8 \cdot |1 + \tilde{G}(j\omega_d)| \quad (3.13)$$

<sup>8</sup>In realtà per i vincoli proposti le condizioni trovate rappresentano dei limiti inferiori, di conseguenza come vedremo in seguito anche per valori superiori a questi le specifiche risultano soddisfatte.

<sup>9</sup>Assumiamo la stabilità di  $W_d(s)$  poiché presenta gli stessi poli di  $W(s)$ , che miriamo a stabilizzare con il controllore  $C(s)$ .



**Figura 3.7:** Diagramma di Bode delle ampiezze di  $G_d(s)$

Grazie allo studio del diagramma di Bode delle ampiezze di  $G_d(j\omega_d)$  (vedi Figura 3.7) vediamo che nelle frequenze di interesse ( $\omega_d < 0.01 \text{ rad/s}$ ) si ha  $|G_d(j\omega_d)|_{dB} > 187dB$  e vale l'approssimazione  $|1 + \tilde{G}(j\omega_d)| \simeq |\tilde{G}(j\omega_d)|$ , perciò analizzando la (3.13) convertita in Decibel si ottiene

$$|\tilde{G}(j\omega_d)|_{dB} > 27dB \quad (3.14)$$

per pulsazioni inferiori a  $\omega_d \leq 0.01 \text{ rad/s}$ .

### 3.3 Progettazione del controllore

A partire dalle specifiche richieste ne consegue che nel sistema in catena aperta  $\tilde{G}(s) = G(s)$  la pulsazione di attraversamento si trova alla sinistra della pulsazione di attraversamento desiderata ( $\omega_A < \omega_A^*$ ) e il margine di fase corrispondente a quest'ultima pulsazione è inferiore al margine di fase desiderato ( $m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^*$ ). Al fine di risolvere questa situazione avremo bisogno di “sollevare” entrambi i diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi di  $G(s)$  in modo da ottenere i diagrammi di Bode di  $\tilde{G}(s)$  che soddisfino le richieste indicate.

Per fare ciò andiamo a realizzare un controllore  $C(s)$  costituito da una *rete anticipatrice*, che presenta uno zero reale negativo, vicino al doppio polo nell'origine, al fine di alzare i diagrammi (azione anticipatrice) e un polo reale negativo collo-

cato molto a destra nel diagramma di Bode così da non alterare l'operazione di sollevamento e ripristinare la fisica realizzabilità del controllore.

In seguito ad una sintesi per tentativi otteniamo il seguente controllore in grado di soddisfare le specifiche richieste

$$C(s) = 1800 \frac{s + 0.025}{s + 76} \quad (3.15)$$

da cui otteniamo la funzione in catena chiusa

$$W(s) = \frac{-5.0337(s + 18.51)(s - 14.14)(s + 0.025)}{(s + 76.07)(s + 6.093)(s + 0.02572)(s^2 + 2.561s + 2.763)} \quad (3.16)$$

che risulta stabile, data la presenza di tutti poli nel semipiano sinistro aperto  $Re(s) < 0$ .<sup>10</sup>

Infatti possiamo subito notare dalla *FDT* che l'assenza di zeri nell'origine in  $C(s)$  permette di non alterare le condizioni sull'errore a regime, già soddisfatte a priori, e andando a studiare i diagrammi di Bode relativi al sistema in anello aperto  $\tilde{G}(j\omega) = C(j\omega)G(j\omega)$  (vedi Figura 3.8 e Figura 3.9) otteniamo che i parametri della risposta in frequenza assumono i valori:

$$\omega_A \simeq 0.875 \text{ rad/s}$$

$$m_\psi \simeq 64^\circ$$

---

<sup>10</sup>Attraverso la regola dei segni di Cartesio vediamo che al polinomio di secondo grado al denominatore corrispondono due poli complessi coniugati a parte reale negativa.

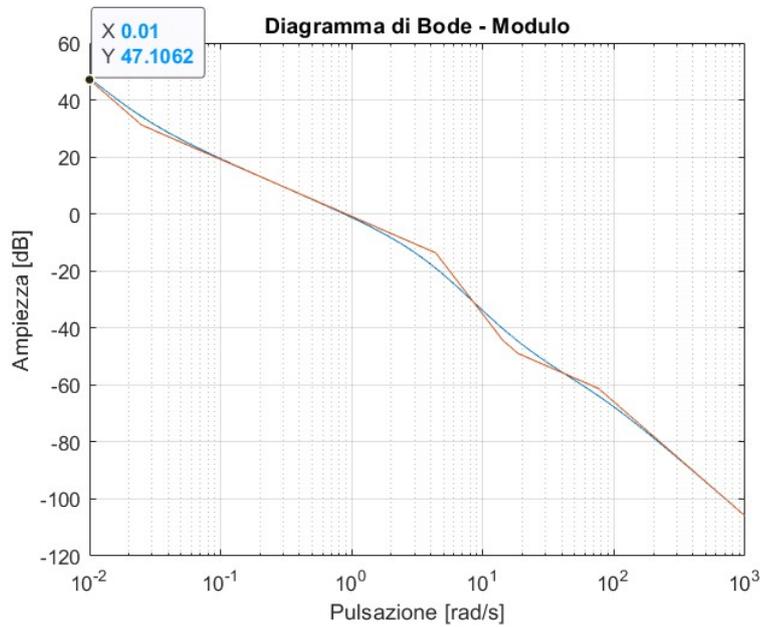


Figura 3.8: Diagramma di Bode delle ampiezze di  $\tilde{G}(s)$

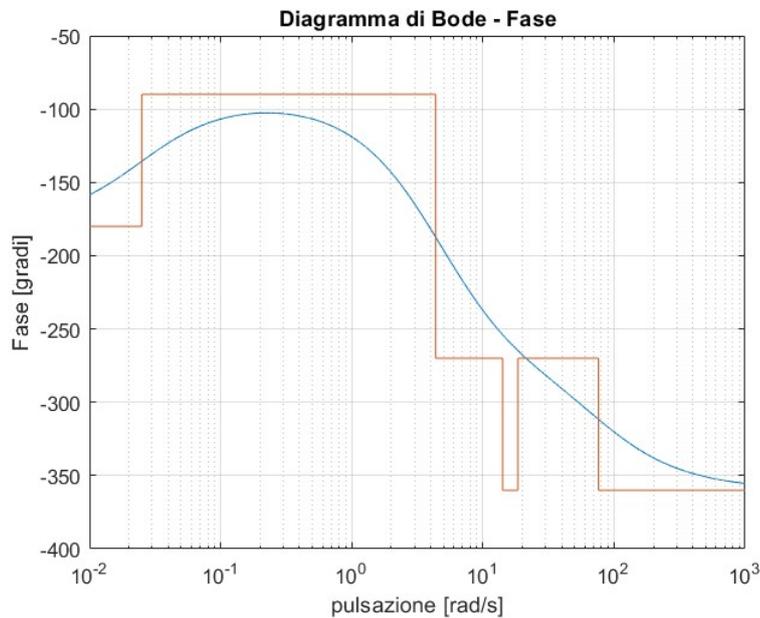


Figura 3.9: Diagramma di Bode delle fasi di  $\tilde{G}(s)$

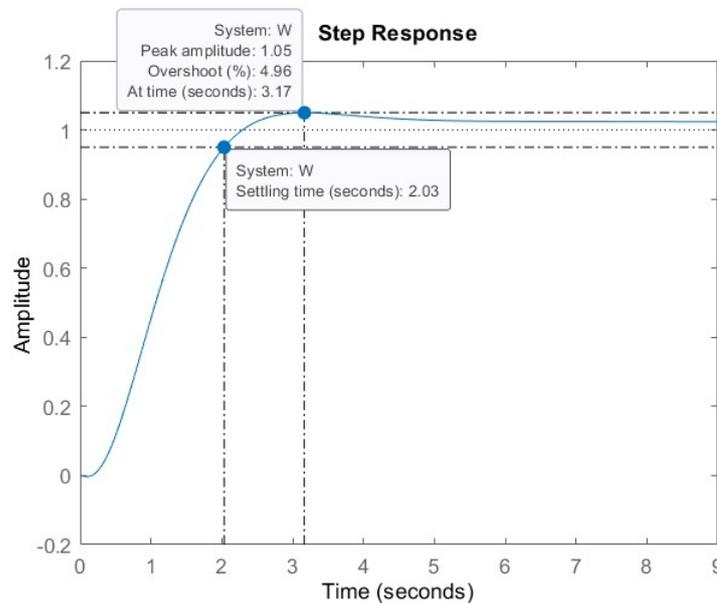
Vedremo adesso come per questi parametri sulla  $FDT$  in anello aperto risultano soddisfatte le specifiche sul tempo di assestamento e la sovraelongazione. Andando a studiare la risposta al gradino del sistema in anello chiuso  $W(s)$  è possibile evidenziare nella Figura 3.10 il valore dei parametri a cui sono applicate

le specifiche, che varranno rispettivamente:

$$t_s \simeq 2.03s$$

$$S \simeq 4.96\%$$

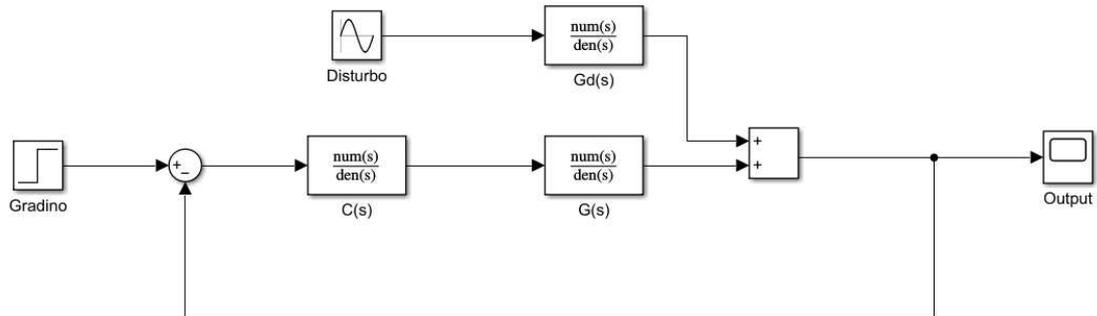
andando a soddisfare le specifiche indicate nella sezione 3.2 e ottenendo inoltre un tempo di assestamento e una sovraelongazione parecchio inferiori alle specifiche richieste.



**Figura 3.10:** Risposta al gradino di  $W(s)$

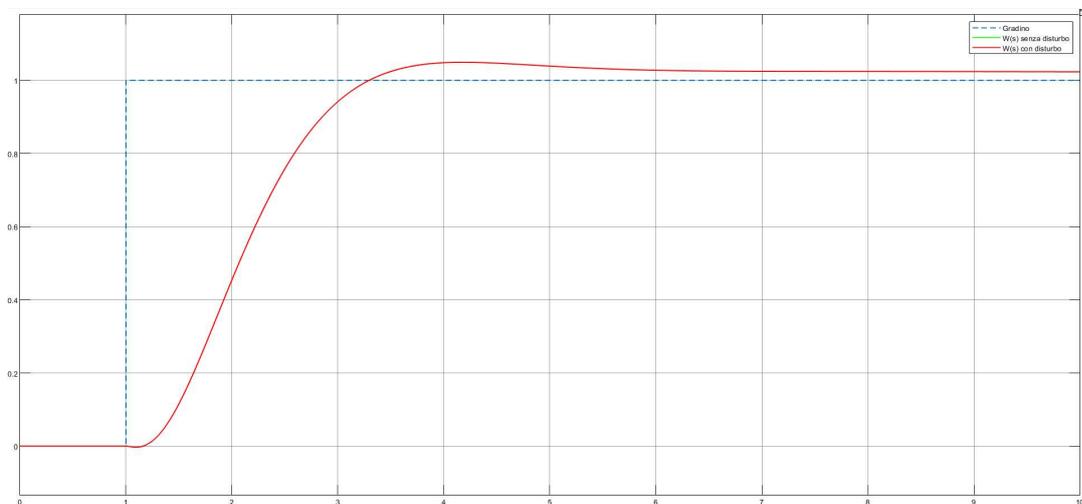
Dal diagramma di Bode delle ampiezze del sistema in anello aperto (vedi Figura 3.8) possiamo inoltre studiare il valore che assume la  $\tilde{G}(s)$  per  $\omega \leq 0.01 \text{ rad/s}$ ; vediamo che in  $\omega = 0.01 \text{ rad/s}$  si ha  $|\tilde{G}(j\omega)|_{dB} \simeq 47.1dB$  e, poiché il diagramma delle ampiezze ha un andamento strettamente decrescente, possiamo concludere che anche per  $\omega < 0.01 \text{ rad/s}$  si ha  $|\tilde{G}(j\omega_d)|_{dB} > 27dB$ , andando così a soddisfare le specifiche richieste sull'effetto del disturbo.

Per concludere andiamo ad analizzare l'andamento della risposta al gradino attraverso *Simulink*, un software destinato alla modellazione ed analisi del comportamento di sistemi dinamici.

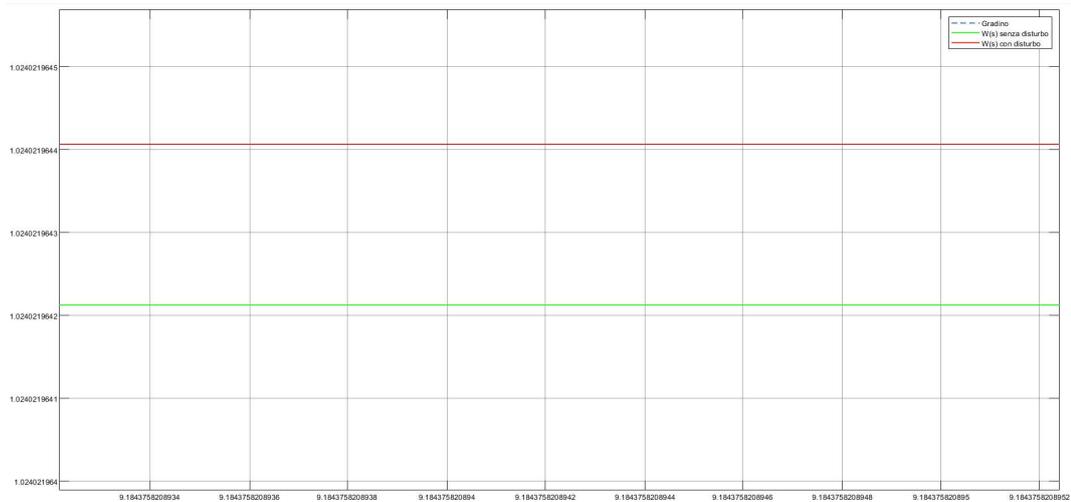


**Figura 3.11:** Schema a blocchi del sistema retroazionato  $W(s)$  in Simulink

Innanzitutto è stato rappresentato nell'ambiente Simulink lo schema a blocchi del sistema in presenza del disturbo (vedi Figura 3.11) ed in seguito è stato simulato l'andamento della risposta al gradino con e senza disturbi.



**Figura 3.12:** Confronto tra le risposte al gradino in Simulink



**Figura 3.13:** Zoom del confronto tra le risposte al gradino in Simulink

Come è possibile vedere da un'analisi preliminare della Figura 3.12 l'andamento della risposta al gradino in presenza di disturbi non sembrerebbe affatto differire da quello in assenza di disturbi; andando ad esaminare più nel dettaglio il confronto tra le evoluzioni temporali della risposta al gradino possiamo notare nelle Figura 3.13 che la variazione indotta dal disturbo sinusoidale è nell'ordine di  $10^{-9}$ , al di sotto quindi del vincolo richiesto dalle specifiche andando a confermare l'efficienza del controllore  $C(S)$  impiegato nel sistema retroazionato.



# Capitolo 4

## Conclusione

Lo scopo di questa tesi era quello di analizzare un modello per il controllo di un Nanorobot al fine di sintetizzarne un controllore attraverso le metodologie acquisite nei corsi di *Sistemi e Modelli* e *Controlli automatici*.

Innanzitutto si è partiti dal determinare le equazioni che governano la dinamica del movimento del robot nel sangue ed è stata ricavata tramite linearizzazione una rappresentazione linearizzata del sistema in forma di stato attorno ad una traiettoria di equilibrio ad ingresso costante.

In seguito alla verifica dell'instabilità del sistema lineare ottenuto si è ricorso ad un sistema connesso in retroazione unitaria negativa; successivamente è stato progettato un controllore in grado di garantire al sistema retroazionato la condizione di stabilità e il soddisfacimento di alcuni requisiti specifici.

Grazie all'ausilio dei software *MATLAB* e *Simulink* è stato possibile analizzare agevolmente le funzioni di trasferimento relative al sistema permettendo così un'efficiente realizzazione del controllore in modo da soddisfare le specifiche richieste.



# Bibliografia

- [1] Rahul V. A., *A Brief Review on Nanorobots. SSRG-IJME*, 2017, 4, 15-21.  
<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:42975628>
- [2] Freitas R. A., *Current status of nanomedicine and medical nanorobotics. Journal of computational and theoretical nanoscience*, 2005, 2.1, 1-25.
- [3] Saadeh Y., Vyas D., *Nanorobotic Applications in Medicine: Current Proposals and Designs. American journal of robotic surgery*, 2014, 1.1, 4–11.  
<https://doi.org/10.1166/ajrs.2014.1010>
- [4] Giri G., Maddahi Y., Zareinia K., *A Brief Review on Challenges in Design and Development of Nanorobots for Medical Applications. Appl. Sci.*, 2021, 11, 10385. <https://doi.org/10.3390/app112110385>
- [5] Cavalcanti A., Shirinzadeh B., Zhang M., Kretly L.C., *Nanorobot Hardware Architecture for Medical Defense. Sensors*, 2008, 8, 2932-2958.
- [6] Sowa Y., Berry R. M., *Bacterial Flagellar Motor. Quarterly Reviews of Biophysics*, 2008, 41.2 , 103–132.
- [7] Bisiacco M., Valcher M.E., *Controlli Automatici, 2.ed., Libreria Progetto*, 2015
- [8] Bicchi A., Greco G., *Fondamenti di Automatica - I Parte, Il progetto del controllore*. <http://www.centropiaggio.unipi.it/sites/default/files/course/material/gg-progetto-controllore.pdf>