



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA GALILEO GALILEI

*CORSO DI LAUREA IN FISICA*

*TESI DI LAUREA*

## **MECCANICA STATISTICA DELL'ELIO 4 SUPERFLUIDO**

*RELATORE*

PROF. DR. LUCA SALASNICH  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

*LAUREANDO*

FRANCESCO MAINARDIS

*MATRICOLA*

2033721

*ANNO ACCADEMICO*

2023-2024







# Abstract

L'elio possiede due isotopi stabili,  ${}^3\text{He}$  ed  ${}^4\text{He}$ . Al contrario di tutte le altre sostanze essi rimangono nella fase liquida anche allo zero assoluto (a pressioni non troppo elevate,  $\leq 25\text{atm}$ ), e per questo esibiscono comportamenti quantistici macroscopici.

Il primo dei due possiede uno spin semintero a causa della disparità dei nucleoni che compongono il suo nucleo, ed è per questo un fermione, mentre il secondo è un bosone di spin zero: per questo le loro proprietà sono radicalmente diverse. La più affascinante di queste è la superfluidità, ovvero la completa assenza di viscosità. Mentre l'elio-4 esibisce questo comportamento al di sotto di  $2.17\text{K}$ , l'elio-3 diventa superfluido a temperature molto più basse, dell'ordine dei milliKelvin. A causa di ciò il primo superfluido ad essere stato scoperto e studiato negli anni '30 del secolo scorso fu proprio l'isotopo bosonico dell'elio.

In questa tesi noi ci concentreremo su quest'ultimo.

Per prima cosa spiegheremo l'intuizione di Landau sullo spettro energetico dell'elio-4 e sul modello a due fluidi: questo approccio ci permetterà di ricavare espressioni analitiche per le proprietà termodinamiche del sistema.

Indagheremo la frazione superfluida in funzione della temperatura, e infine vedremo come la condensazione di Bose-Einstein sia un fenomeno fondamentale nell'elio-4 liquido, e in generale in un qualunque fluido bosonico.



# Indice

ABSTRACT	v
1 PROPRIETÀ DELL'ELIO-4 LIQUIDO	1
1.o.1 La transizione lambda . . . . .	3
1.o.2 Lo spettro delle eccitazioni elementari . . . . .	4
2 IL MODELLO A DUE FLUIDI DI LANDAU	7
2.o.1 Criterio di Landau . . . . .	12
3 PROPRIETÀ TERMODINAMICHE	17
4 LA CONDENSAZIONE DI BOSE-EINSTEIN IN $^4\text{He}$	23
4.o.1 Il criterio di Penrose e Onsager . . . . .	23
4.o.2 Risultati sperimentali . . . . .	27
CONCLUSIONI	29
BIBLIOGRAFIA	31

# 1

## Proprietà dell'elio-4 liquido

L' $^4\text{He}$  fu per la prima volta liquefatto nel 1908 da Heike Kamerlingh Onnes, considerato come il padre della fisica delle basse temperature, che lo portò al di sotto di  $4.2\text{K}$ , temperatura di liquefazione.

Nel 1927, M. Wolfke e W. H. Keesom si accorsero che esiste un'altra transizione di fase ad una temperatura ancora più bassa,  $2.17\text{K}$ . A questa temperatura si manifesta una discontinuità del calore specifico, la cui forma ricorda la lettera  $\lambda$ : da qui il nome per questo punto di transizione, il "punto  $\lambda$ ". La fase dell'elio liquido prima del punto  $\lambda$  è detta elio I, quella dopo la transizione è detta elio II.

Nel 1938 Pyotr Kapitza a Mosca e indipendentemente John Allen e Don Misener a Cambridge scoprirono durante esperimenti di misura della viscosità dell'elio liquido che appena sceso sotto la temperatura  $\lambda$  il coefficiente di viscosità dell'elio diventava praticamente nullo.

Kapitza ottenne il premio Nobel nel 1978 per il suo esperimento nel quale mostrò come l'elio riuscisse a passare da un contenitore ad un altro connessi da uno stretto capillare (di diametro  $0.5\mu\text{m}$ ) solo se esso si trovava al di sotto del punto  $\lambda$ .

Fritz London, nel cercare di spiegare il fenomeno, propose di usare il background teorico sulla condensazione di Bose-Einstein, già noto dal 1924. Lev Landau e László Tisza avanzarono l'idea del modello a due fluidi, che vedremo in dettaglio nel capitolo 2.

Perché l'elio a temperature così basse, anche allo zero assoluto, non cristallizza anche se gli atomi si fermano quasi completamente?

Questa strana proprietà è spiegata dal principio di indeterminazione, secondo il quale gli atomi di elio, leggeri rispetto ad altri atomi che cristallizzano, avranno un moto di punto zero e quindi un'energia cinetica non nulla.

Il criterio di Lindemann afferma che i cristalli liquefano quando l'ampiezza delle oscillazioni termiche spontanee delle molecole è circa pari al 5% – 15% della spaziatura intermolecolare.

Nel caso dell'elio possiamo approssimare il potenziale di interazione tra gli atomi nei pressi della posizione di equi-



librio con un potenziale armonico

$$v(r) \simeq \frac{1}{2}k(r - r_0)^2, \quad (1.1)$$

con  $k = 1/2(d^2v(r)/dr^2) = 36\varepsilon/r_0^2$  ottenuta dal potenziale di Lennard Jones\* ( $\varepsilon = 1.03meV$  e  $r_0 = 2.65\text{\AA}$  per l'elio-4), e consideriamo  $r - r_0 = \delta x$ , l'ampiezza delle oscillazioni dell'atomo. Per il principio di indeterminazione

$$\Delta x \Delta p \approx \hbar, \quad (1.3)$$

e quindi l'atomo avrà un'energia cinetica

$$E_k \approx \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2}. \quad (1.4)$$

Usando la conservazione dell'energia si ottiene

$$18 \frac{\varepsilon}{r_0^2} (\delta x)^2 = \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} \quad (1.5)$$

e quindi

$$\frac{\delta x}{\Delta x} \approx \sqrt{\frac{\hbar^2}{36m\varepsilon(\Delta x)^2}}. \quad (1.6)$$

Tenendo presente che  $m = 6.6 \times 10^{-27} kg$  e  $\Delta x \approx r_0$  si ottiene

$$\frac{\delta x}{\Delta x} \approx 10\%. \quad (1.7)$$

Per il criterio di Lindemann esposto sopra allora l'elio non solidifica nemmeno a  $0K$ .

Gli altri gas nobili non rimangono gassosi fino allo zero assoluto a causa delle loro masse molto più grandi.

L'idrogeno invece, anche se molto più leggero dell'elio, solidifica a  $14K$  a pressione atmosferica a causa dell'interazione molecolare molto forte.

Sappiamo dalla meccanica statistica che gli effetti quantistici sono significativi quando la lunghezza d'onda termica è dell'ordine della distanza interatomica tra gli atomi della sostanza.

Per l'elio,

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}, \quad (1.8)$$

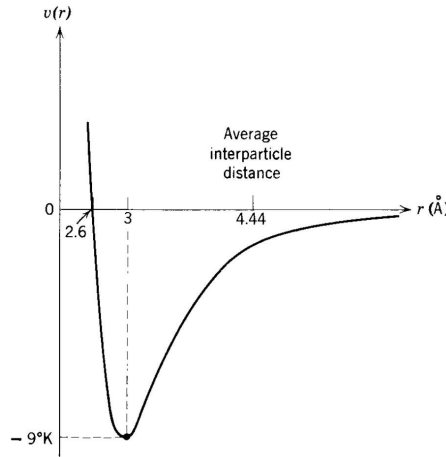
che a  $T \approx 4K$  (nei pressi della temperatura di liquefazione) è circa  $4\text{\AA}$ , ovvero più grande della distanza interatomica di  $n^{-1/3} = 3.5\text{\AA}$ , con  $n = 0.0216\text{\AA}^{-3}$  la densità dell'elio. Inoltre la buca di potenziale tra due atomi di elio è profonda circa un  $meV$  e la distanza di equilibrio tra di essi è  $2.65\text{\AA}$  come abbiamo detto sopra.

---

\*Il potenziale che descrive al meglio l'interazione tra due atomi di elio-4 non è quello di Lennard-Jones ma quello trovato da Slater e Kirkwood

$$v(r) = Ae^{-21.5(\frac{\varepsilon}{r})} - B\left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 \quad (1.2)$$

con  $A = (7.8 \times 10^{-17})J$ ,  $B = (1.5 \times 10^{-23})J$  e  $\sigma = 4.64\text{\AA}$  (l'andamento è proposto in figura 1.1).



**Figure 1.1:** Potenziale di Kirkwood-Slater, misurato in Kelvin, equazione 1.2. Figura da [16].

Per confronto, il neon ha una buca di potenziale profonda circa  $4meV$ , mentre la distanza di equilibrio è circa la stessa dell'elio ( $2.96\text{\AA}$ ). Questo significa che gli atomi di neon sono molto più legati tra di loro rispetto a quelli dell'elio. Inoltre la massa dell'elio è 5 volte più piccola rispetto a quella del neon, e quindi la lunghezza d'onda termica risulta più grande. L'incertezza sull'energia di un atomo di elio confinato in una posizione che avrà dimensioni confrontabili con quelle del raggio d'equilibrio del potenziale sarà quindi come la 1.4, ovvero

$$\Delta E \approx \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} \sim 10^{-3}eV, \quad (1.9)$$

valore che è confrontabile con la profondità della buca di potenziale: la localizzazione dell'atomo sarà quindi impossibile.

Tutti questi argomenti ci convincono quindi che gli effetti quanto-meccanici non siano affatto trascurabili nell'elio-4 liquido.

## 1.0.1 LA TRANSIZIONE LAMBDA

Dal diagramma di fase in figura 1.2 si vede che nella fase liquida è presente una transizione di fase del secondo ordine alla temperatura di  $2.17K$  e densità di  $0.0216\text{\AA}^{-3}$  che divide l'elio-4 liquido in He I ed He II. Il primo è un liquido ordinario mentre il secondo è quello che esibisce superfluidità. Questa transizione è caratterizzata da una divergenza descritta da una legge di potenza con un appropriato esponente critico  $\alpha \simeq -0.009$  (il che discende dalla teoria delle transizioni di fase del secondo ordine e dei fenomeni critici formulata per primo dallo stesso Landau)

$$C_V \sim |T - T_\lambda|^{-\alpha},$$

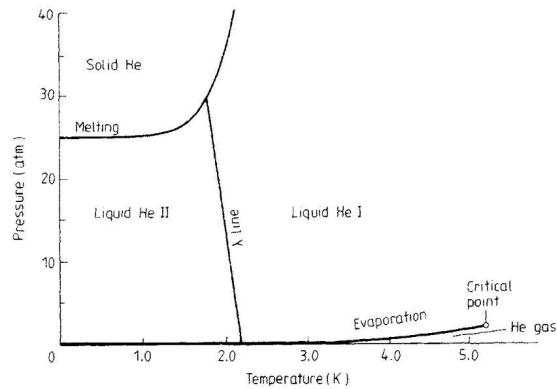


Figure 1.2: Diagramma di fase di  $^4\text{He}$ .

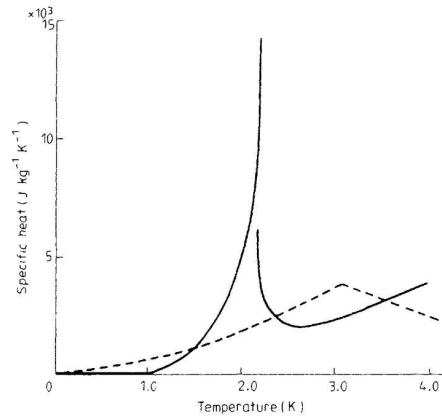


Figure 1.3: Il calore specifico di  $^4\text{He}$  (linea continua), confrontato con quello di un gas di Bose ideale con la stessa densità dell'elio-4 (linea tratteggiata).

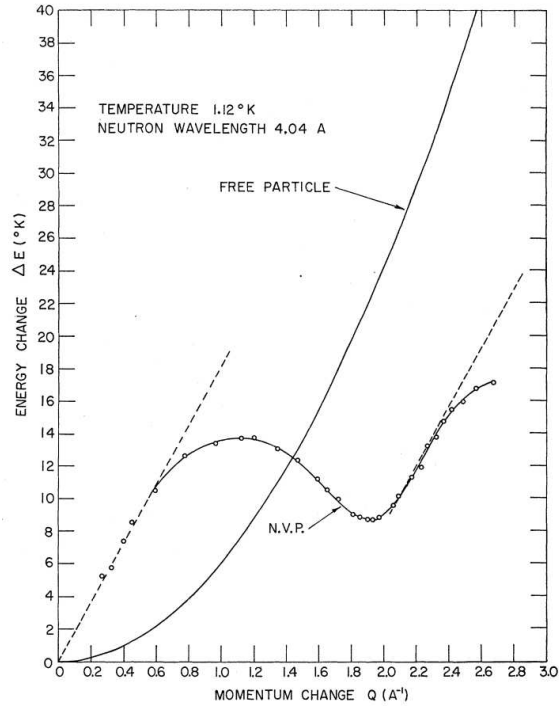
e la forma di questa curva ricorda la lettera greca  $\lambda$ , come si può vedere in figura 1.3. A basse temperature il calore specifico segue l'andamento

$$C_V \sim T^3$$

a differenza del caso del gas di Bose perfetto nel quale invece il calore specifico va come  $T^{3/2}$  per basse temperature e non presenta alcuna divergenza (ma solo una cuspidità in corrispondenza della temperatura critica).

### 1.0.2 LO SPETTRO DELLE ECCITAZIONI ELEMENTARI

Lev Landau ([19]) intuì che lo spettro delle eccitazioni elementari dell'elio-4 liquido dovesse possedere un andamento lineare per piccoli momenti, e un minimo vicino a un certo valore  $p_0$  del momento delle eccitazioni. La porzione di spettro lineare rappresenta i fononi, mentre il minimo corrisponde ai cosiddetti rotoni, i quali si comportano come particelle con una certa massa efficace che chiameremo  $m^*$  e necessitano di un'energia minima finita per essere eccitati, che chiameremo  $\Delta$ .



**Figure 1.4:** La relazione di dispersione delle quasi particelle in  ${}^4\text{He}$  misurata da Henshaw e Woods. La parabola rappresenta la relazione di dispersione per atomi di elio liberi senza interazione.

Tramite esperimenti di diffusione con neutroni si può sondare l'elio e ricavare sperimentalmente lo spettro delle eccitazioni elementari. Lo scattering dei neutroni provoca la creazione di una eccitazione con energia e impulso uguali a quelli che il neutrone trasferisce al sistema durante la sua diffusione.

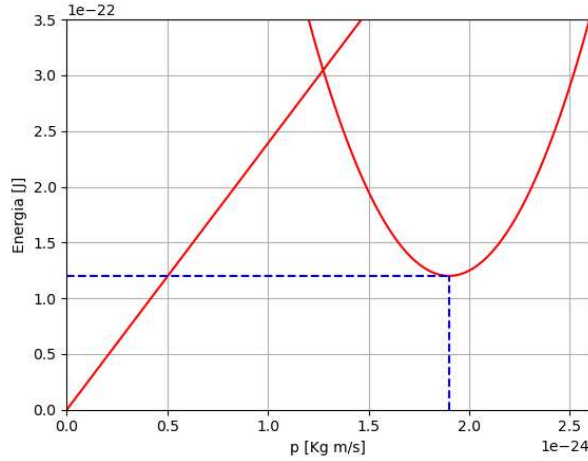
In figura 1.4 è riportato questo spettro misurato da Henshaw e Woods ([25]) usando neutroni con lunghezza d'onda di  $4.04\text{\AA}$ .

Le eccitazioni elementari nell' $\text{He}_4$  superfluido sono dunque considerabili come quasi-particelle ed obbediscono alla statistica di Bose-Einstein. Per piccoli impulsi  $p$  (cioè la lunghezza d'onda  $\frac{\hbar}{p}$  è grande rispetto alle distanze interatomiche) l'energia dei fononi come detto sopra avrà un andamento del tipo

$$\varepsilon_{\text{phon}}(p) = up \quad (1.10)$$

dove  $u = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T}$  è la velocità del suono nel liquido, ovvero la radice della derivata parziale della pressione del liquido rispetto alla sua densità, mantenendo costante la temperatura.

Man mano che l'impulso delle quasi particelle aumenta, la curva  $\varepsilon(p)$  devia dalla dipendenza lineare: prima raggiunge un massimo, poi decresce e giunge ad un minimo per uno specifico valore dell'impulso  $p_0$ . All'equilibrio termico le eccitazioni hanno energie negli intorno dei minimi di  $\varepsilon(p)$ , cioè nell'intorno di  $p = 0$  e in quello di  $p = p_0$ . Per il primo abbiamo già visto che la relazione di dispersione è lineare. Nel secondo minimo



**Figure 1.5:** Relazione di dispersione per fononi e rotoni da 1.10 e 1.11. Le linee blu tratteggiate identificano il minimo rotonico, dato da  $p_0 = 1.9 \times 10^{-24} \text{Kg} \times \text{m/s}$  e  $\Delta = 1.2 \times 10^{-22} \text{J}$ .

andiamo a sviluppare in serie di Taylor:

$$\varepsilon_{rot}(p) \simeq \varepsilon(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2m^*} \equiv \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2m^*} \quad (1.11)$$

In realtà, con tale spettro energetico, è impossibile parlare di fononi e rotoni come qualitativamente diversi tipi di eccitazioni elementari. E' più corretto parlare semplicemente di eccitazioni a onde lunghe (piccolo  $p$ ) e onde corte ( $p$  nell'intorno di  $p_0$ ). Dividere in questo modo lo spettro è però una ragionevole approssimazione in quanto ci permetterà di calcolare le proprietà termodinamiche del fluido.

I parametri che compaiono nella 1.10 e 1.11 sono determinati dai risultati sperimentali e si trova  $u = 238 \text{m/s}$ ,  $\varepsilon(p_0)/k_B = \Delta/k_B = 8.7 \text{K}$ ,  $p_0/\hbar = 1.9 \times 10^8 \text{cm}^{-1}$ ,  $m^* = 0.16 m_{He^4}$ .

Approssimando lo spettro in parte fononica e rotonica si ottiene l'andamento proposto in figura 1.5.

Per temperature molto basse il numero di eccitazioni elementari tende a zero, ed esse avranno una densità sufficientemente piccola per poterle supporre non interagenti e quindi descrivibili come un gas perfetto di Bose-Einstein. Dunque il valore di aspettazione del numero di occupazione dello stato di quasi particella di energia  $\varepsilon(p)$  è dato dalla distribuzione di Bose-Einstein<sup>†</sup>

$$\mathbb{E}[n(\varepsilon)] = \frac{1}{e^{\varepsilon(p)/k_B T} - 1} \quad (1.12)$$

<sup>†</sup>Vedremo nel prossimo capitolo perchè non c'è bisogno di inserire anche il potenziale chimico nella 1.12.

# 2

## Il modello a due fluidi di Landau

Nel 1941 Lev Landau da una parte e Laszlo Tisza dall'altra catturarono l'essenza dell'elio II nel loro "modello a due fluidi": secondo questo modello, l'elio II è considerato come un mix inseparabile di una componente viscosa (o normale) e una componente superfluida, in modo tale che la densità totale del liquido si possa esprimere come la somma dei due contributi  $\rho_n + \rho_s = \rho$ .<sup>\*</sup> Ciascuna componente possiede il suo campo di velocità, che chiameremo rispettivamente  $\mathbf{v}_n$  e  $\mathbf{v}_s$ . Vedremo che la componente superfluida aumenta man mano che la temperatura scende, fino ad arrivare a  $\rho_s/\rho = 1$  allo zero assoluto. A temperatura nulla quindi tutto l'elio sarà superfluido, e  $\rho_n/\rho = 0$ .

Partiamo considerando la densità di momento lineare, data da

$$\mathbf{g} \equiv \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n. \quad (2.1)$$

Ci mettiamo nel sistema di riferimento del superfluido: qui il fluido normale si muove a velocità  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ . La densità di momento in questo sistema di riferimento nel limite termodinamico è

$$\rho_n \mathbf{v} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} \mathbb{E}[n(\varepsilon(p)) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}] = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{p} \mathbb{E}[n(\varepsilon(p)) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}]$$

da cui ricaviamo

$$\rho_n = \frac{1}{v} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} \mathbb{E}[n(\varepsilon(p)) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}]. \quad (2.2)$$

(dove  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}/v$ ). Ricordando la descrizione dello spettro delle eccitazioni elementari affrontata nel capitolo precedente, possiamo dividere quest'ultimo in parte fononica e rotonica. Le grandezze caratteristiche dell'elio,

---

<sup>\*</sup>Indichiamo con  $\rho$  la densità volumetrica,  $\rho = mn$ , espressa in  $[g/cm^3]$

come appunto la densità, sono calcolabili dividendo il contributo fononico da quello rotonico.

Per il primo dei due poniamo quindi  $\varepsilon(p) = up$  e integriamo in coordinate polari sferiche:

$$\rho_{n,phon} = \frac{1}{v} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \int_0^{+\infty} dp \frac{p^2 \sin\theta}{(2\pi\hbar)^3} p \cos\theta \frac{1}{\exp(p(u - v\cos\theta)/k_B T) - 1}.$$

Sostituiamo  $x = \cos\theta$  e poi  $\xi = (u - vx)p/k_B T$  per ottenere

$$\rho_{n,phon} = \frac{1}{4\pi^2 v \hbar^3} \int_{-1}^1 dx \left( \frac{k_B T}{u - vx} \right)^4 x \int_0^{+\infty} d\xi \frac{\xi^3}{e^\xi - 1} = \frac{2\pi^2 (k_B T)^4}{45 \hbar^3 u^5} \left( 1 - \frac{v^2}{u^2} \right)^{-3} \quad (2.3)$$

dove abbiamo usato  $\int_{-1}^1 dx \frac{x}{(u - vx)^4} = \frac{8uv}{3(u^2 - v^2)^3}$  per  $v < u$ .

Poi prendiamone il limite per velocità relativa tra parte superfluida e parte normale piccola e otteniamo

$$\rho_{n,phon} = \frac{2\pi^2 (k_B T)^4}{45 \hbar^3 u^5}. \quad (2.4)$$

L'equazione appena ricavata è stata verificata senza correzioni ulteriori costruendo una teoria microscopica del liquido attraverso le funzioni di Green nel lavoro di Kehr del 1967 ([13]).

Per il contributo dei rotoni teniamo in considerazione il fatto che  $k_B T \ll \Delta$ . Poniamo sempre  $x = \cos\theta$  e sviluppiamo alla fine per piccole velocità relative ottenendo

$$\rho_{n,rot} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 v} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \int_0^{+\infty} dp \frac{p^2 \sin\theta p \cos\theta}{\exp[(\Delta + \frac{(p-p_0)^2}{2m^*} - p v \cos\theta)/k_B T] - 1} \quad (2.5)$$

$$\simeq \frac{e^{-\Delta/k_B T}}{4\pi^2 \hbar^3 v} \int_0^{+\infty} dp p^3 e^{-(p-p_0)^2/2m^* k_B T} \int_{-1}^1 dx x e^{p v x / k_B T} \simeq \sqrt{\frac{m^*}{2k_B \pi^3}} \frac{e^{-\Delta/k_B T} p_0^4}{2\hbar^3 T^{1/2}}. \quad (2.6)$$

I contributi fononico e rotonico alla densità normale sono rappresentati in Figure 2.1. Si vede come i fononi contribuiscono maggiormente alla densità per temperature basse, dove infatti essi prevalgono nello spettro delle eccitazioni elementari. Man mano che la temperatura aumenta vengono eccitati anche i rotoni, il cui contributo alla densità normale sovrasta quello fononico a partire da circa 0.57K.

Possiamo ora calcolare la densità del fluido normale mettendo insieme i due contributi. Sappiamo che a  $T = T_\lambda$  tutta la massa del liquido è normale, non è presente la parte superfluida: allora, data la densità dell'elio liquido,  $\rho$ , si può trovare la temperatura critica risolvendo numericamente l'equazione  $\rho = \rho_{n,phon}(T_c) + \rho_{n,rot}(T_c)$ .

Con la densità dell'elio-4 liquido data da  $\rho = 0.147 \text{g/cm}^3$  si ottiene (nel limite di moto relativo nullo  $v \rightarrow 0$ )  $T_c \simeq 2.52 \text{K}$ , come si vede in figura 2.2.

La discrepanza dal valore 2.17K si può spiegare col fatto che, nel nostro modello, si sono separati i contributi fononici e rotonici, i quali in realtà fanno parte di uno spettro di eccitazioni elementari continuo. Inoltre un contributo significativo alla discrepanza verrà dal fatto che i fononi e i rotoni si sono supposti non interagenti (cosa che funziona bene solo a temperature molto basse).

La frazione superfluida si ottiene semplicemente con  $1 - (\rho_{n,phon} + \rho_{n,rot})/\rho$ , e il suo andamento in funzione della temperatura è mostrato in figura 2.3 insieme ad un fit ([24]) fatto sui dati sperimentali di Maynard del 1976.

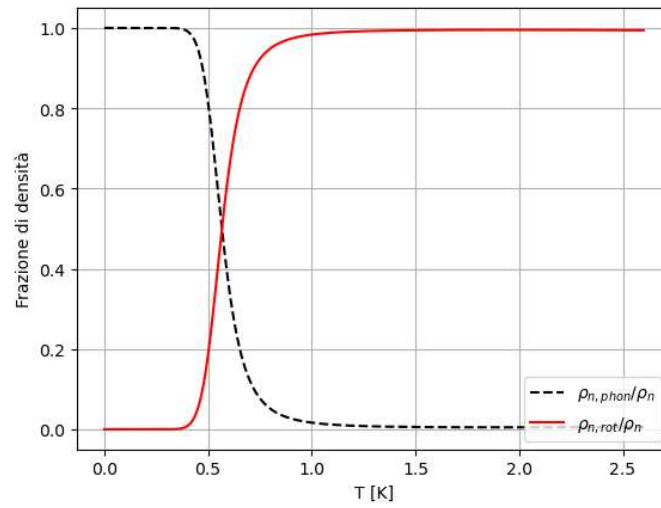


Figure 2.1: Contributo fononico (linea tratteggiata) e rotonico (linea continua) alla densità normale dell'elio liquido.

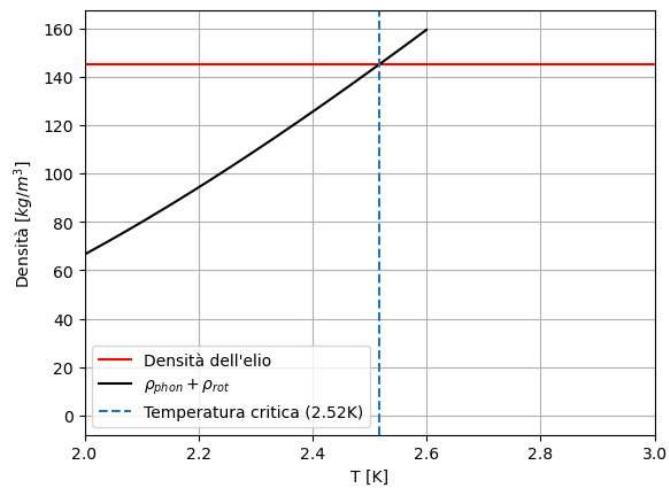
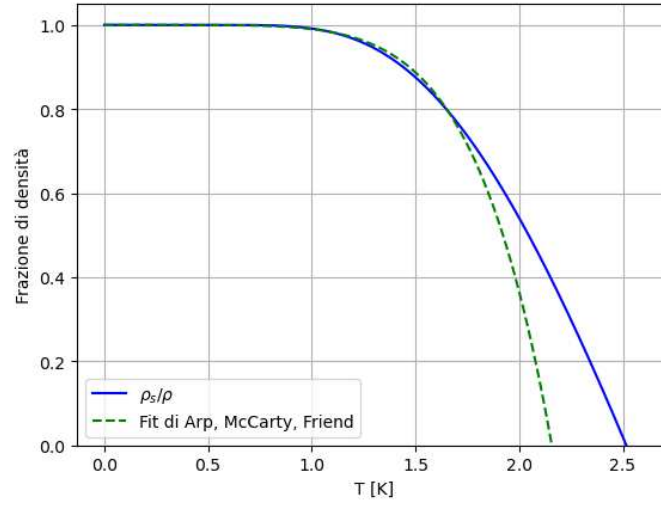


Figure 2.2: Stima della temperatura critica. Si va a trovare l'ascissa del punto di intersezione tra la densità normale, calcolata sommando il contributo fononico e rotonico, e la densità dell'elio liquido.





**Figure 2.3:** Frazione superfluida in elio-4 liquido in funzione della temperatura calcolata con la teoria di Landau (in blu) e confronto con il fit di Arp, McCarty e Friend [24] (linea tratteggiata). Notiamo come la curva ricavata teoricamente funziona bene fino a circa  $1.6K$ , poi il fit devia rispetto ad essa e va a toccare l'asse delle ascisse in  $2.17K$ , mentre la predizione di Landau giunge a zero a  $2.52K$ .

Come vediamo, il dividere lo spettro nei due contributi fononico e rotonico è un'approssimazione che sovrastima la temperatura critica dell'elio e funziona molto bene solo per temperature abbastanza basse, dove le uniche eccitazioni sono appunto fononi e rotoni ed esse non interagiscono tra loro. Possiamo pensare quindi che per migliorare i risultati teorici si dovrebbe mantenere l'intera espressione analitica dello spettro durante lo svolgimento degli integrali. Essa si può riprodurre abbastanza fedelmente tramite un polinomio di settimo ordine, che si ottiene con un fit sui dati sperimentali di Henshaw e Woods e risulta (figura 2.4)

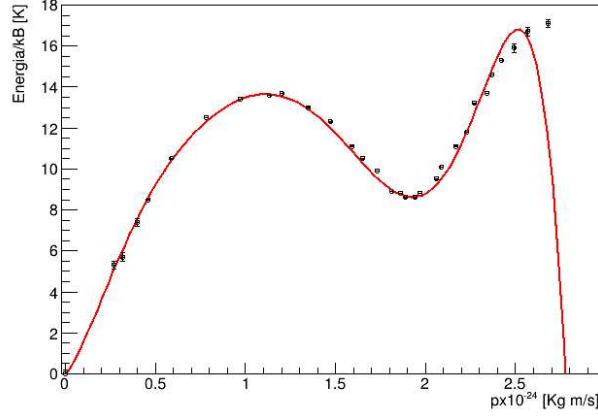
$$\varepsilon(p) = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + Ep^4 + Fp^5 + Gp^6 + Hp^7, \quad (2.7)$$

con i parametri del fit (eseguito con il software ROOT) nella tabella sottostante.

Parametri	A	B	C	D	E	F	G	H
Valore	-0.05	11.5	59.7	-159.75	187.84	-119.16	38.150	-4.758
Errore	0.10	0.1	0.1	0.03	0.01	0.01	0.002	0.001

Per ottenere i soli integrali unidimensionali in  $dp$ , senza integrazione sull'angolo solido come invece sono quelli 2.3 e 2.5, possiamo sviluppare per piccola velocità relativa  $\mathbf{v}$  prima di fare l'integrale:

$$\mathbb{E}[n(\varepsilon(p) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v})] \simeq \mathbb{E}[n(\varepsilon(p))] - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\mathbf{v}=0} \quad (2.8)$$



**Figure 2.4:** Punti sperimentali ottenuti da Henshaw e Woods e fit polinomiale di ordine 7. Notiamo come il range dove il fit è in buon accordo con i dati sperimentali è per impulsi da 0 fino a circa  $2.6 \times 10^{-24} \text{Kg} \times \text{m/s}$ .

e in questo modo la 2.2 diventa

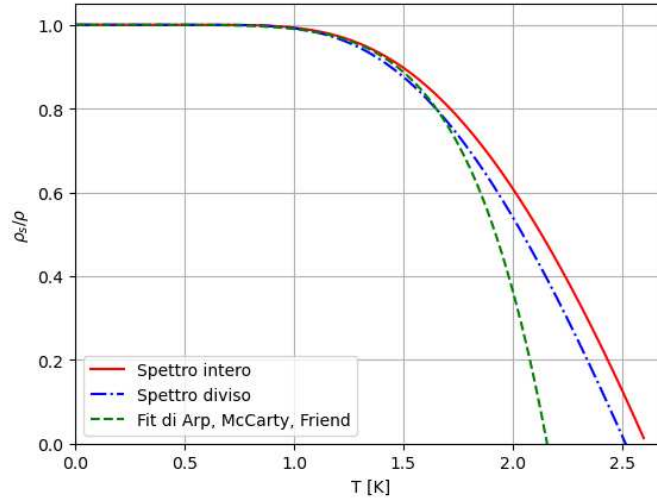
$$\rho_n = \frac{1}{v} \left( \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{p} \mathbb{E}[n(\varepsilon(p))] - \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} v(\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{p})^2 \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \varepsilon} \Big|_{v=0} \right). \quad (2.9)$$

Il primo integrale svanisce in quanto  $\int_0^\pi \sin\theta \cos\theta d\theta = 0$ , mentre integrando sull'angolo solido il secondo risulta

$$\rho_n = -\frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} p^2 \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \varepsilon} \Big|_{v=0} = \frac{1}{6\pi^2 \hbar^3 k_B T} \int_0^{+\infty} \frac{p^4 e^{\varepsilon(p)/k_B T}}{(e^{\varepsilon(p)/k_B T} - 1)^2} dp. \quad (2.10)$$

Svolgendo numericamente l'integrale della 2.10 usando lo spettro completo 2.7 (avendo cura di troncare l'integrazione per  $p = 2.6 \times 10^{-24} \text{Kg} \times \text{m/s}$ , punto dopo il quale il fit non riproduce più i dati sperimentali), si ottiene la frazione superfluida mostrata in rosso in figura 2.5.

Notiamo con sorpresa che usare lo spettro intero al posto di quello diviso in parte fononica e rotonica sovrastima ancora di più la temperatura critica. L'andamento è pressoché lo stesso tranne appunto per il fatto che la frazione superfluida calcolata con  $\varepsilon(p)$  dato dalla 2.7 raggiunge l'asse delle ascisse a temperatura maggiore rispetto ai  $2.52 \text{K}$  trovati in precedenza. Possiamo quindi concludere che l'approssimazione che fa discostare di più i valori teorici da quelli sperimentali non è l'aver suddiviso lo spettro in parte fononica e rotonica, ma l'aver supposto le quasi-particelle non interagenti tra di loro: a temperature maggiori di circa un Kelvin e mezzo esse iniziano ad interagire a causa dell'aumento del loro numero. Il gas di quasi particelle non può più essere considerato abbastanza diluito da poter trascurare i termini di interazione.



**Figure 2.5:** Frazione superfluida ottenuta dalla 2.10 con la relazione di dispersione 2.7 in rosso (linea continua), in blu (linea punto-trattino) quella ottenuta separando i contributi fononici e rotonici e in verde (linea tratteggiata) il fit di Arp et al. discusso in precedenza.

Per misurare sperimentalmente la frazione superfluida Hess e Fairbank usarono un recipiente cilindrico che può ruotare attorno al proprio asse riempito di elio I liquido ([6]). A temperatura maggiore di  $2.17K$  l'elio ruota uniformemente in modo classico assieme al contenitore, con momento angolare  $L = I_{class}\Omega$ ,  $I_{class}$  momento d'inerzia. Raffreddando il campione di elio fin sotto la temperatura critica invece si osserva un trasferimento di momento angolare dall'elio al contenitore proporzionale a  $\rho_s/\rho$ , visto che la parte superfluida smette di ruotare a causa dell'impossibilità di trasferimento di impulso tra parte normale e parte superfluida (non c'è attrito tra le due, si compenetrano). Il liquido quindi ruoterà con un momento di inerzia ridotto, che sarà pari a

$$I(T) = \frac{\rho_n}{\rho} I_{class} < I_{class}. \quad (2.11)$$

A  $T = 0K$  si avrà  $I = 0$ : sta ruotando solo la componente normale del fluido, mentre la componente superfluida rimane stazionaria nel sistema di riferimento del laboratorio. Hess e Fairbank misurarono la variazione di momento angolare e calcolarono la frazione superfluida per varie temperature, ottenendo un andamento molto simile a quello del fit di Arp, McCarty e Friend.

### 2.0.1 CRITERIO DI LANDAU

Per spiegare la superfluidità dobbiamo spiegare come l'elio possa trasportare massa senza attrito. Landau giunse ad una condizione verificata la quale si ha superfluidità anche in presenza di eccitazioni elementari, le quali in linea di principio potrebbero dissipare energia.

Senza perdita di generalità consideriamo un fluido bosonico a temperatura nulla il cui spettro delle eccitazioni

elementari è dato dalla curva  $\varepsilon(p)$ .

Consideriamo il fluido passante attraverso un capillare alla velocità  $\mathbf{v}$ . Chiamiamo  $\mathcal{S}$  il sistema di riferimento del laboratorio, dove le pareti del capillare sono a riposo e il fluido si sta muovendo a velocità  $\mathbf{v}$ . Sia invece  $\mathcal{S}'$  il sistema di riferimento del fluido, nel quale le pareti del capillare si muovono a velocità  $-\mathbf{v}$ .

Il sistema sarà invariante sotto trasformazioni di Galileo

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}' + \mathbf{v}t \\ \mathbf{P} &= \mathbf{P}' + M\mathbf{v}, \\ E &= E' + \mathbf{P}' \cdot \mathbf{v} + \frac{Mv^2}{2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

dove le quantità con l'apice si riferiscono al sistema  $\mathcal{S}'$  e  $M$  è la massa totale del fluido.

Quindi per un fluido a riposo in  $\mathcal{S}'$  si avrà

$$\begin{aligned} E' &= \varepsilon_0 & \mathbf{P}' &= 0 \\ E &= \varepsilon_0 + \frac{1}{2}Mv^2 & \mathbf{P} &= M\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

dove abbiamo chiamato  $\varepsilon_0$  l'energia intrinseca del fluido in  $\mathcal{S}'$ . Se esso si trova nello stato fondamentale questa quantità sarà nulla.

Se il fluido ha viscosità non nulla, l'attrito con le pareti del tubo e l'attrito interno al fluido causano una dissipazione dell'energia cinetica del fluido stesso, diminuendone la velocità in  $\mathcal{S}$ . Invece, nel sistema  $\mathcal{S}'$ , il fluido acquisirà energia cinetica grazie all'attrito: infatti esso comincerebbe a muoversi, venendo trascinato dalle pareti. Tuttavia questo moto di trascinamento non può muovere il fluido come se fosse un tutt'uno, un unico corpo. Invece, dovranno comparire dei graduali movimenti interni, cioè nascono delle eccitazioni elementari nel liquido.

Supponiamo dunque che si crei un'eccitazione elementare di impulso  $\mathbf{p}$  e energia data dallo spettro  $\varepsilon(p)$ . L'energia  $E'$  del liquido nel sistema di riferimento in cui esso è in quiete sarà uguale alla sua energia intrinseca dello stato fondamentale più l'energia dell'eccitazione elementare, e il suo impulso sarà uguale a quello dell'eccitazione. Invece, nel sistema del laboratorio, l'energia del liquido sarà data dalla somma dell'energia del suo stato fondamentale, dell'energia dell'eccitazione, dell'energia cinetica totale del liquido e dell'energia cinetica dell'eccitazione. Possiamo quindi riscrivere il sistema 2.13 come

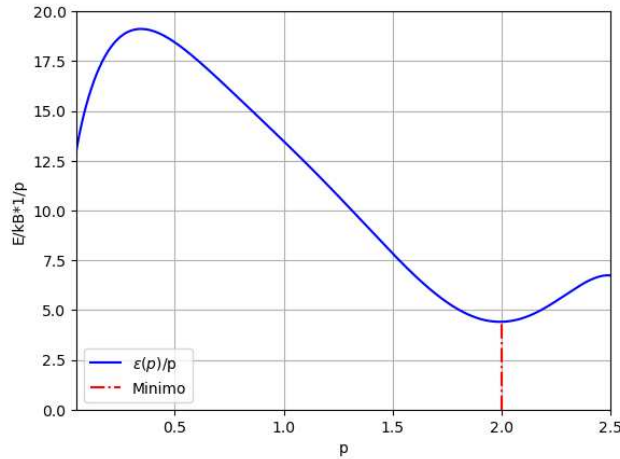
$$\begin{aligned} E' &= \varepsilon_0 + \varepsilon(p) & \mathbf{P}' &= -\mathbf{p} \\ E &= \varepsilon_0 + \varepsilon(p) + \frac{1}{2}Mv^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{P} &= -\mathbf{p} + M\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Vediamo come, a causa della viscosità e della conseguente comparsa dell'eccitazione elementare, l'energia del fluido in  $\mathcal{S}$  cambia di una quantità

$$\varepsilon(p) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.15)$$

Ovviamente questa variazione deve essere negativa essendo generata da un effetto dissipativo, e quindi l'energia del liquido deve diminuire. Dunque

$$\varepsilon(p) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} < 0,$$



**Figure 2.6:** Spettro delle eccitazioni elementari diviso per il momento  $p$ , linea blu continua. La linea rossa tratteggiata indica la posizione del minimo, il cui valore definisce la 2.17.

che implica

$$v > \frac{\varepsilon(p)}{p} \quad (2.16)$$

Si identifica quindi una velocità minima

$$v_{min} = \min_p \frac{\varepsilon(p)}{p} \quad (2.17)$$

oltre la quale si potranno generare delle eccitazioni elementari con impulso  $\mathbf{p}$ . Oppure, equivalentemente, per velocità del liquido inferiori a  $\varepsilon(p)/p$ , non possono crearsi eccitazioni elementari con impulso  $\mathbf{p}$ , e questo significa che il flusso non rallenterà e quindi il liquido sarà superfluido. Questo risultato è noto con il nome di "criterio di Landau".

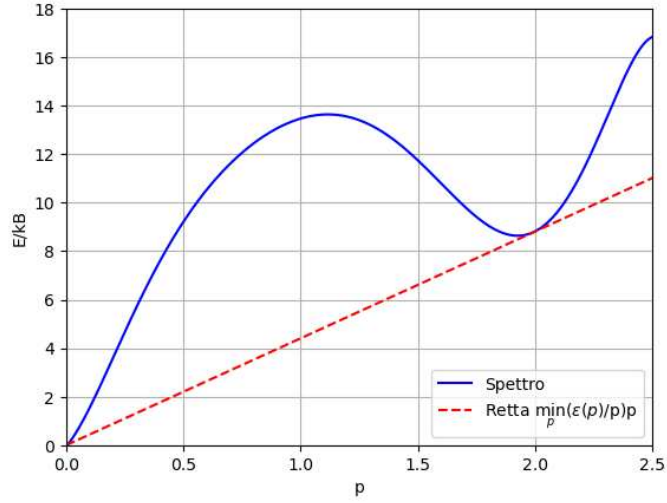
Dividendo lo spettro completo 2.7 per  $p$  si ottiene la curva blu continua in figura 2.6, di cui si può identificare il minimo, segnalato dalla linea rossa attorno a  $p = 2 \times 10^{-24} \text{ Kg} \cdot \text{m/s}$ . Abbiamo quindi un valore per la 2.17 nel caso dell'elio-4 liquido: circa  $60 \text{ m/s}$ .

Se un sistema ha  $v_{min} = 0$ , esso non può sostenere la superfluidità: sarà un fluido ordinario che dissipa energia. Ad esempio, un gas di Bose non interagente ha come relazione di dispersione

$$\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m}, \quad (2.18)$$

e quindi  $\varepsilon(p)/p = p/2m$  che implica  $v_{min} = \min_p (p/2m) = 0$ : concludiamo quindi che un gas di Bose perfetto non può essere superfluido.

Graficamente, si può prendere una retta orizzontale che passa per l'origine nel piano  $\varepsilon - p$  e ruotarla in senso antiorario, verso l'alto. Se si può fare questo senza intersecare la curva di dispersione  $\varepsilon(p)$  per almeno un angolo finito, allora il sistema può supportare la superfluidità: la pendenza della retta quando essa è tangente alla curva di dispersione rappresenta la velocità critica, oltre la quale la superfluidità è distrutta. Si capisce subito come per



**Figure 2.7:** Spettro delle eccitazioni elementari di  ${}^4\text{He}$  e retta con coefficiente angolare pari a  $v_{min}$  passante per l'origine.

lo spettro 2.18 non sia possibile tracciare una retta con coefficiente angolare diverso da zero senza intersecare la relazione di dispersione.

Questo metodo grafico per l'elio-4 è riportato in figura 2.7, dove vediamo in questo caso come la retta con coefficiente angolare 2.17 risulta tangente allo spettro delle eccitazioni elementari.

Il criterio di Landau funziona anche considerando un oggetto esterno di massa molto maggiore rispetto a quella di un atomo di elio-4 che si muove all'interno del fluido bosonico a temperatura nulla. Esso può perdere quantità di moto se riesce a creare delle eccitazioni elementari. Dalla conservazione dell'energia e della quantità di moto, detta  $m_{ext}$  la massa dell'oggetto in questione si ha

$$\frac{1}{2}m_{ext}v^2 = \frac{1}{2}m_{ext}v_{fin}^2 + \varepsilon(p) \quad m_{ext}\mathbf{v} = m_{ext}\mathbf{v}_{fin} + \mathbf{p}. \quad (2.19)$$

Ricavando  $\mathbf{v}_{fin}$  dalla seconda e inserendola nella prima si arriva a, essendo  $m_{ext}$  molto grande:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{p} = \varepsilon(p) + \frac{p^2}{2m_{ext}} \simeq \varepsilon(p), \quad (2.20)$$

cioè, chiamando  $\alpha$  l'angolo tra  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{p}$

$$v = \frac{1}{\cos(\alpha)} \frac{\varepsilon(p)}{p}. \quad (2.21)$$

Quest'uguaglianza è verificata solo se  $v$  è maggiore del minimo di  $\varepsilon(p)/p$  per ogni  $p$ , e ritroviamo di conseguenza il criterio di Landau 2.16. Quindi il corpo esterno si potrà muovere senza attrito all'interno dell'elio-II solo se la sua velocità non eccede  $v_{min}$ .

In realtà a temperature finite c'è attrito viscoso anche per velocità più piccole di  $v_{min}$ , dovuto all'effetto della componente normale del fluido (ovvero delle eccitazioni elementari già esistenti nel liquido che generano fenomeni di

scattering con il corpo esterno). Nonostante ciò ci aspettiamo comunque che la resistenza aumenti drasticamente appena superata  $v_{min}$ . Questa predizione è stata verificata sperimentalmente tramite esperimenti di mobilità degli ioni all'interno dell'elio superfluido.

# 3

## Proprietà termodinamiche

Passiamo ora a calcolare le proprietà termodinamiche del fluido con le tecniche che abbiamo adottato finora. Come abbiamo visto mantenere lo spettro completo e calcolare numericamente i valori delle grandezze di interesse non migliora i risultati: separeremo quindi le grandezze termodinamiche in parte fononica e rotonica, in modo da poter trovare un'espressione approssimata ma analitica ed evidenziare le dipendenze dalla temperatura.

Lavoriamo nell'ensemble gran canonico visto che il numero di quasi particelle non è fissato, ma dipende dalla temperatura. Il gran potenziale è dato da

$$\mathcal{G} = -k_B T \ln(\mathcal{Z}) \quad (3.1)$$

e  $\mathcal{Z}$  è la funzione di partizione gran canonica definita come

$$\mathcal{Z} = \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}}), \quad (3.2)$$

con  $\beta = (k_B T)^{-1}$  e  $\hat{H}$  è l'hamiltoniana del sistema di quasi particelle (supposte come già detto non interagenti):

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(\mathbf{p}) \hat{n}_{\mathbf{p}} \simeq \sum_{\text{phon}} (u\mathbf{p}) \hat{n}_{\mathbf{p}} + \sum_{\text{rot}} \left( \Delta + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^2}{2m^*} \right) \hat{n}_{\mathbf{p}} \quad (3.3)$$

dove abbiamo chiamato  $\hat{n}_{\mathbf{p}}$  l'operatore numero che conta il numero di quasi-particelle con impulso  $\mathbf{p}$ , il quale agisce sugli stati di seconda quantizzazione come

$$\hat{n}_{\mathbf{p}'} |n_{\mathbf{p}'}, n_{\mathbf{p}''}, \dots\rangle = n_{\mathbf{p}'} |n_{\mathbf{p}'}, n_{\mathbf{p}''}, \dots\rangle$$

$$\hat{n}_{\mathbf{p}''} |n_{\mathbf{p}'}, n_{\mathbf{p}''}, \dots\rangle = n_{\mathbf{p}''} |n_{\mathbf{p}'}, n_{\mathbf{p}''}, \dots\rangle$$

...



dove appunto il ket  $|n_{\mathbf{p}'}, n_{\mathbf{p}''}, \dots\rangle$  rappresenta lo stato con  $n_{\mathbf{p}'}$  quasi-particelle con impulso  $\mathbf{p}'$ ,  $n_{\mathbf{p}''}$  quasi-particelle con impulso  $\mathbf{p}''$  e così via. I numeri di occupazione  $n_{\mathbf{p}'}, n_{\mathbf{p}''}, \dots$  variano da zero a infinito essendo le quasi-particelle di natura bosonica.

Chiamando  $N_{qp}$  il numero totale di quasi-particelle e  $\mu$  il loro potenziale chimico, la funzione di partizione gran canonica risulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \sum_{N_{qp}=0}^{\infty} e^{\beta\mu N_{qp}} \sum_{n_{\mathbf{p}'}, n_{\mathbf{p}''}, \dots} ' e^{-\beta \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} \varepsilon(\mathbf{p})} \\
&= \sum_{N_{qp}=0}^{\infty} \sum_{n_{\mathbf{p}'}, n_{\mathbf{p}''}, \dots} ' e^{-\beta \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} (\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu)} \\
&= \sum_{N_{qp}=0}^{\infty} \sum_{n_{\mathbf{p}'}, n_{\mathbf{p}''}, \dots} ' \prod_{\mathbf{p}} \left[ e^{-\beta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu)} \right]^{n_{\mathbf{p}}} \\
&= \sum_{n_{\mathbf{p}'}}^{\infty} \left[ e^{-\beta(\varepsilon(\mathbf{p}') - \mu)} \right]^{n_{\mathbf{p}'}} \sum_{n_{\mathbf{p}''}=0}^{\infty} \left[ e^{-\beta(\varepsilon(\mathbf{p}'') - \mu)} \right]^{n_{\mathbf{p}''}} \dots \quad (3.4)
\end{aligned}$$

dove la sommatoria primata indica che essa deve essere svolta tenendo conto del fatto che  $\sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} = N_{qp}$ . Infine, usando la serie geometrica si arriva a\*

$$\mathcal{Z} = \prod_{\mathbf{p}} \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu)}}. \quad (3.5)$$

Il logaritmo della 3.5 è pari a

$$\ln(\mathcal{Z}) = - \sum_{\mathbf{p}} \ln(1 - e^{-\beta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu)}). \quad (3.6)$$

Il potenziale chimico delle quasi particelle è però nullo, in accordo con il fatto che il numero di eccitazioni elementari non è costante e viene determinato esso stesso dalla temperatura. Infatti la condizione di equilibrio termodinamico del sistema coincide con lo stato a energia libera  $F$  minima intesa come funzione di  $N_{qp}$  a temperatura e volume costanti, cioè  $(\partial F / \partial N_{qp})_{T,V} = 0$ . Ma questa derivata parziale altro non è che il potenziale chimico delle quasi particelle (da non confondere con il potenziale chimico del liquido, definito come  $(\partial F / \partial N)_{T,V}$ , con  $N$  il numero di atomi di elio-4, che risulta sperimentalmente pari a circa  $-7.16K$  a  $T = 0$ ).

Quindi la 3.6 diventa

$$\ln(\mathcal{Z}) = - \sum_{\mathbf{p}} \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon(\mathbf{p})}). \quad (3.7)$$

Ricordando la relazione di Eulero (che vale per sistemi omogenei, quale è l'elio che stiamo considerando)

$$U = TS - PV + \mu N = TS - PV, \quad (3.8)$$

dove  $U$  è l'energia interna del gas di quasi-particelle e  $S$  la sua entropia, ricaviamo che il gran potenziale si può

---

\*Perchè la serie geometrica converga si deve avere che  $e^{-\beta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu)} < 1$  per ogni  $\mathbf{p}$ , cioè  $\mu < \min_{\mathbf{p}} \varepsilon(\mathbf{p})$ . Come vedremo tra un attimo questa condizione è sempre soddisfatta per il potenziale chimico delle quasi-particelle.

scrivere come

$$\mathcal{G} = -PV = -k_B T \ln(\mathcal{Z}). \quad (3.9)$$

Otteniamo quindi l'equazione di stato

$$P(T, V) = k_B T \frac{\ln(\mathcal{Z})}{V} = -k_B T \frac{\sum_{\mathbf{p}} \ln(1 - e^{-\beta \varepsilon(\mathbf{p})})}{V}. \quad (3.10)$$

Nel limite termodinamico operiamo la solita sostituzione  $\sum_{\mathbf{p}} \rightarrow V/(2\pi\hbar)^3 \int d^3\mathbf{p}$  ottenendo

$$P = -k_B T \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \ln(1 - e^{-\varepsilon(\mathbf{p})/k_B T}) = -k_B T \int_0^{+\infty} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \ln(1 - e^{-\varepsilon(p)/k_B T}),$$

e integrando per parti si arriva a

$$P = \frac{1}{3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} p \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \mathbb{E}[n(\varepsilon)]. \quad (3.11)$$

Calcoliamo quindi il contributo fononico alla pressione: in questo caso  $\varepsilon(p) = up$ , e

$$P_{phon} = \frac{4\pi u}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{+\infty} dp \frac{p^3}{e^{up/k_B T} - 1}.$$

Usiamo la sostituzione  $\xi = \frac{u}{k_B T} p$  e il fatto che  $\int_0^{+\infty} \xi^3 / (e^\xi - 1) d\xi = \pi^4/15$ :

$$P_{phon} = \frac{\pi^2 k_B^4}{90 u^3 \hbar^3} T^4. \quad (3.12)$$

Da qui si ricavano l'entropia specifica, il calore specifico a volume costante e l'energia libera di Helmholtz, oltre a tutte le altre possibili grandezze termodinamiche legate a queste ultime tramite le relazioni di Maxwell:

$$s_{phon} = \frac{\partial P_{phon}}{\partial T} = \frac{2\pi^2 k_B^4}{45 u^3 \hbar^3} T^3,$$

$$C_{V,phon} = T \frac{\partial s_{phon}}{\partial T} = \frac{2\pi^2 k_B^4}{15 u^3 \hbar^3} T^3 = 3s_{phon},$$

$$P = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \Rightarrow F_{phon} = -V \frac{\pi^2 k_B^4}{90 u^3 \hbar^3} T^4.$$

Notiamo che la teoria riproduce bene l'andamento  $T^3$  del calore specifico, come mostrato precedentemente in figura 1.3.

Inoltre l'entropia specifica, essendo anch'essa proporzionale al cubo della temperatura a temperature basse, allo zero assoluto sarà nulla in accordo con il postulato di Nernst. Come abbiamo visto sopra allo zero assoluto tutto l'elio è superfluido, e quindi possiamo concludere che la parte superfluida del liquido non trasporta entropia: quest'ultima grandezza è una proprietà esclusiva della parte normale.

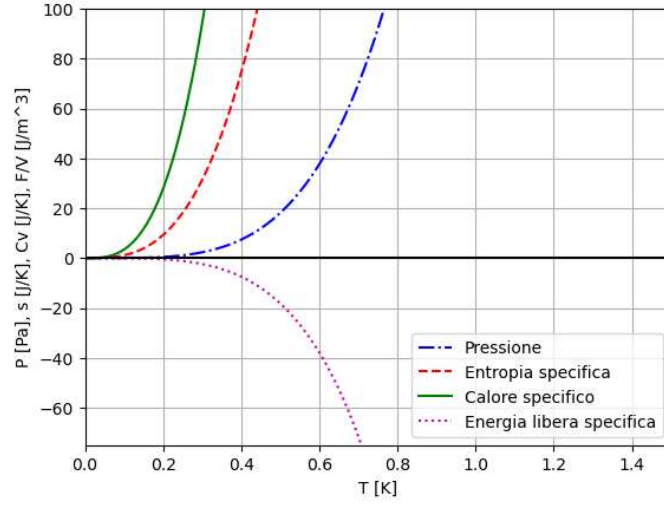


Figure 3.1: Grandezze termodinamiche calcolate sommando i rispettivi contributi fononici e rotonici.

Passiamo alla parte rotonica:

$$P_{rot} = \frac{4\pi}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{+\infty} dp p^3 \frac{p - p_0}{m^*} \frac{1}{e^{\Delta/(k_B T)} e^{(p-p_0)^2/2m^*k_B T} - 1}.$$

Sfruttiamo il fatto che  $\Delta \gg k_B T$  e sostituiamo  $\xi = (p - p_0)/\sqrt{2m^*k_B T}$ :

$$P_{rot} \simeq \frac{4\pi 2k_B T e^{-\Delta/k_B T}}{3(2\pi\hbar)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi p_0^3 \left(1 + \frac{\sqrt{2m^*k_B T}}{p_0} \xi\right)^3 e^{-\xi^2} d\xi.$$

Ora sviluppiamo il cubo che diventa  $\simeq 1 + 3\sqrt{2m^*k_B T}\xi/p_0$ : l'integrale  $\int \xi e^{-\xi^2} d\xi$  svanisce in quanto integriamo su tutto l'asse reale una funzione dispari, mentre  $\int \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}/2$ . Risulta infine:

$$P_{rot} \simeq \left(\frac{m^* k_B^3}{2\pi^3}\right)^{1/2} \frac{p_0^2}{\hbar^3} T^{3/2} e^{-\Delta/k_B T}. \quad (3.13)$$

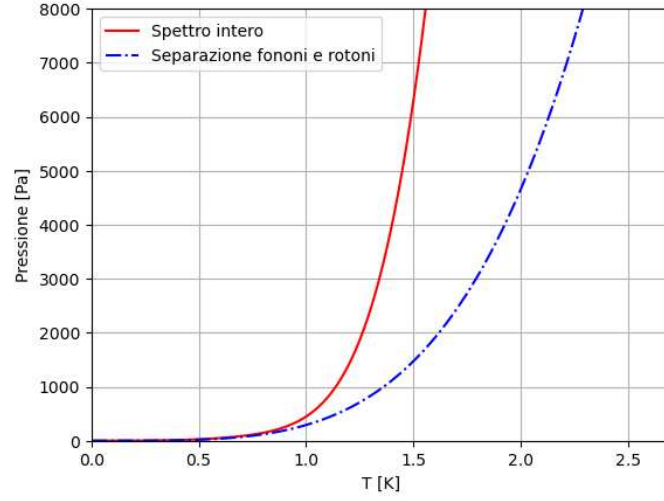
Da questo si trova:

$$s_{rot} = \left(\frac{m^* k_B}{2\pi^3}\right)^{1/2} \frac{p_0^2}{\hbar^3} \frac{\Delta}{T^{1/2}} e^{-\Delta/k_B T},$$

$$C_{V,rot} = \left(\frac{m^*}{2k_B \pi^3}\right)^{1/2} \frac{p_0^2}{\hbar^3} \frac{\Delta^2}{T^{3/2}} e^{-\Delta/k_B T},$$

$$F_{rot} = -V \left(\frac{m^* k_B^3}{2\pi^3}\right)^{1/2} \frac{p_0^2}{\hbar^3} T^{3/2} e^{-\Delta/k_B T}.$$

Gli andamenti della pressione, dell'entropia specifica, del calore specifico e dell'energia libera specifica in funzione della temperatura sono riportati in figura 3.1.



**Figure 3.2:** Andamento della pressione in funzione della temperatura calcolato separando il contributo fononico e rotonico (linea punto-tratteggio) e con lo spettro completo (linea continua).

Per confronto possiamo usare la 3.11 tenendo per  $\varepsilon(p)$  il polinomio di settimo grado, e vedere l'effetto della separazione dei contributi fononici e rotonici sull'andamento della pressione in funzione della temperatura. Quindi

$$P = \frac{1}{6\pi^2\hbar^3} \int_0^{+\infty} p^3 \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \mathbb{E}[n(\varepsilon)] dp, \quad (3.14)$$

con

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} = B + 2Cp + 3Dp^2 + 4Ep^3 + 5Fp^4 + 6Gp^5 + 7Hp^6, \quad (3.15)$$

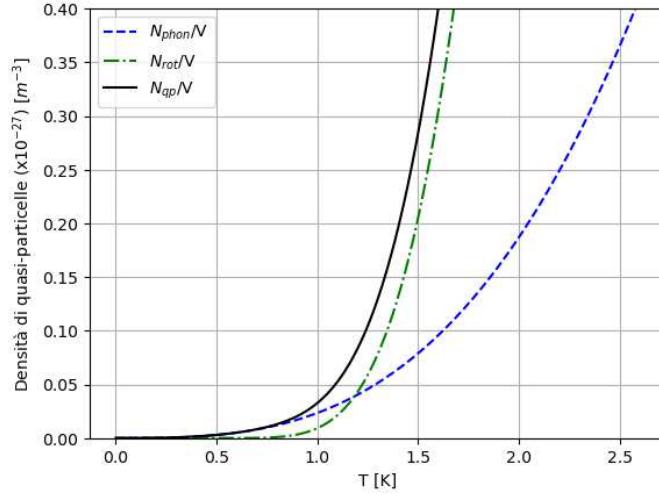
e integrando numericamente si ottiene il risultato in figura 3.2. Notiamo anche in questo caso come l'approssimazione di separare il contributo dovuto ai fononi da quello dovuto ai rotoni funziona bene fino a circa un Kelvin, poi le due curve iniziano a discostarsi.

Consideriamo ora il numero totale di eccitazioni elementari. Come abbiamo sottolineato prima esso non è costante ma va determinato imponendo la minimizzazione dell'energia libera del gas di quasi particelle. Formalmente questa quantità è data da

$$N_{qp} = \sum_{\mathbf{p}} \mathbb{E}[n(\varepsilon)] = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{e^{\varepsilon(p)/k_B T} - 1}. \quad (3.16)$$

Per basse temperature solo la parte fononica e rotonica dello spettro contribuiranno significativamente a questo valore e quindi possiamo scrivere

$$N_{qp} \simeq N_{pbon} + N_{rot} = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \left( \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{e^{up} - 1} dp + \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{e^{(\Delta+(p-p_0)/2m^*)/k_B T} - 1} dp \right).$$



**Figure 3.3:** Densità delle quasi particelle misurata in metri<sup>-3</sup>, riscalata per un fattore 10<sup>-27</sup>, in funzione della temperatura.

Ricordando che  $\int_0^{+\infty} x^2 dx / (e^x - 1) = 2\zeta(3) \simeq 2.4$ , con  $\zeta$  la funzione di Riemann, si ottiene

$$N_{qp} = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} V \left( \frac{k_B T}{\hbar u} \right)^3 + \frac{2Vp_0^2}{(2\pi)^{3/2} \hbar} (m^* k_B T)^{1/2} e^{-\Delta/k_B T}. \quad (3.17)$$

In figura 3.3 è mostrata la densità di quasi-particelle al variare della temperatura. Vediamo come il contributo fononico domina fino a circa 1.3K.

Abbiamo visto nella figura 2.5 come il nostro calcolo teorico della frazione superfluida si distaccava dai valori sperimentali a partire da circa un Kelvin e mezzo a causa dell'interazione tra le quasi-particelle. A questa temperatura, guardando figura 3.3, si vede che la densità di quasi-particelle risulta essere circa  $0.28 \times 10^{21} cm^{-3}$ : possiamo quindi affermare che oltre questa densità le quasi-particelle non possono più essere considerate come un gas di Bose diluito. Per fare un confronto, la densità numerica dell'elio-4 è di circa  $21.6 \times 10^{21} cm^{-3}$ . Pertanto la densità "critica" delle quasi particelle è di circa una ogni 100 atomi di <sup>4</sup>He.

Siamo riusciti quindi a determinare tutta la termodinamica dell'elio-4 liquido partendo dallo spettro delle eccitazioni elementari e considerando le sole quasi particelle come "generatrici" delle proprietà termodinamiche in virtù del modello di Landau. Nonostante il modello a due fluidi sia molto utile per capire il comportamento fisico dell'elio o in generale di qualsiasi fluido bosonico a basse temperature che manifesta superfluidità, in realtà le due componenti che abbiamo chiamato parte normale e parte superfluida non sono fisicamente separabili. Invece, dobbiamo vedere il fluido come capace di eseguire due diversi moti contemporaneamente: il flusso superfluido non viscoso che interessa una percentuale  $\rho_s/\rho$  del fluido da una parte e un flusso normale viscoso che interessa una percentuale  $1 - \rho_s/\rho = \rho_n/\rho$  del fluido dall'altra.

A diverse temperature il fluido mostra comportamenti differenti visto che le due frazioni variano: quella superfluida va da  $\rho_s/\rho = 1$  allo zero assoluto fino a 0 alla temperatura di transizione, mentre quella normale al contrario va da 0 a temperatura nulla fino a 1 al punto  $\lambda$ .

# 4

## La condensazione di Bose-Einstein in ${}^4\text{He}$

### 4.0.1 IL CRITERIO DI PENROSE E ONSAGER

L'analogia tra l'elio-4 liquido e un gas di Bose Einstein è stata per la prima volta ipotizzata da London ([5]), proponendo l'analogia tra il punto lambda dell'elio e la temperatura critica di un condensato di Bose.

Però, mentre in un gas di Bose ideale a temperatura nulla tutte le particelle occupano lo stato di singola particella a momento nullo, nell'elio solo una frazione (circa un decimo) degli atomi esibisce condensazione. Appare quindi evidente che la parte condensata è tutt'altra cosa rispetto alla componente superfluida che abbiamo discusso sopra.

La definizione di condensazione di Bose-Einstein come occupazione macroscopica dello stato fondamentale di particella singola vale solo quando il gas è ideale e in equilibrio termodinamico. Infatti i livelli energetici di particella singola non sono definiti in un sistema di particelle interagenti quale è l'elio. Vogliamo quindi estendere la condensazione di Bose-Einstein anche per sistemi interagenti, e trovare un criterio che ci permetta di stabilire se in un dato sistema vi è o meno condensazione. La soluzione di questo problema venne formulata da Oliver Penrose e Lars Onsager nel loro famoso lavoro del 1956.

Per prima cosa, il numero di atomi di elio  $N$  sarà sempre considerato molto grande, quindi diremo che una qualche grandezza  $A$  è finita quando  $N \gg 1$  se  $A = e^{o(1)}$  (dove ovviamente  $o(1)$  rappresenta un infinitesimo di ordine 1). Per un gas di Bose perfetto la condensazione si può quindi esprimere come

$$\frac{\langle n_0 \rangle_{Av}}{N} = e^{o(1)} \iff \text{c'è condensazione} \quad (4.1)$$

dove  $\langle n_0 \rangle_{Av}$  è il numero medio di particelle nello stato di particella singola più basso. Per generalizzare il tutto a un sistema interagente introduciamo la matrice densità del sistema  $\hat{\rho}$ : essa è definita a partire dagli stati puri del

sistema, che indicizziamo con  $\alpha$ , nel modo seguente:

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha} p_{\alpha} |\Psi_{\alpha}\rangle \langle \Psi_{\alpha}|, \quad (4.2)$$

dove  $p_{\alpha}$  è la probabilità che il sistema si trovi nello stato  $|\Psi_{\alpha}\rangle$ , e quindi  $\sum_{\alpha} p_{\alpha} = 1$ . Nella rappresentazione delle coordinate, detto  $\mathbf{r}_i$  la posizione dell' $i$ -esima particella,

$$\rho(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N) \equiv \langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \hat{\rho} | \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N \rangle = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \Psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N), \quad (4.3)$$

dove  $\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \Psi_{\alpha} \rangle$ .

A partire da questo definiamo l'operatore densità ridotto, o "one body density matrix" (OBDM) come

$$\hat{\rho}_1 = N \text{Tr}_{2, \dots, N} \hat{\rho}, \quad (4.4)$$

ovvero la traccia presa su tutte le particelle esclusa la prima. Questo significa che stiamo facendo la media su tutte le configurazioni delle varie  $N - 1$  particelle tranne che sulla prima. In rappresentazione coordinata

$$\rho_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = N \sum_{\alpha} p_{\alpha} \int d^3 \mathbf{r}_2 \dots d^3 \mathbf{r}_N \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \Psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (4.5)$$

Questa quantità rappresenta l'ampiezza di probabilità di trovare una particella in  $\mathbf{r}$  moltiplicata per l'ampiezza di probabilità di trovarla in  $\mathbf{r}'$ , mediata sul comportamento delle altre  $N - 1$  particelle. Ponendo  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  si ottengono gli elementi diagonali di  $\rho_1$  che rappresentano la densità di probabilità di trovare una particella in  $\mathbf{r}$ , sempre mediata su tutte le altre particelle\*.

$\rho_1$  è hermitiana,  $\rho_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \rho_1^*(\mathbf{r}', \mathbf{r})$  e di conseguenza è un osservabile: i suoi autovalori saranno reali ed essa sarà diagonalizzabile. Chiamano  $n_i$  l'autovalore  $i$ -esimo di  $\rho_1$  associato all'autofunzione  $|\Xi_i\rangle$  possiamo scrivere la decomposizione spettrale

$$\rho_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_i n_i \Xi_i(\mathbf{r}) \Xi_i^*(\mathbf{r}'). \quad (4.6)$$

Nel caso di un gas di Bose perfetto, gli autostati  $\Xi_i$  sono gli stati stazionari di particella singola e i corrispettivi autovalori  $n_i$  sono i numeri medi di occupazione dei precedenti autostati.

Il criterio di Penrose e Onsager generalizza tutto ciò affermando che se gli autovalori sono infinitesimi rispetto al numero di particelle totale  $N$ , cioè se  $n_i/N = o(1) \forall i$ , allora il sistema non esibisce condensazione. Se invece c'è un singolo autovalore  $n_M$  dello stesso ordine di  $N$ , ovvero  $n_M/N = e^{o(1)}$ , il sistema presenta condensazione di Bose-Einstein nell'autostato relativo a  $n_M^{\dagger}$ .

---

\*Si vede proprio da questo la natura quantistica del sistema: infatti  $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  rappresenta l'interferenza quantistica tra la posizione  $\mathbf{r}$  e la posizione  $\mathbf{r}'$ , vale a dire la sovrapposizione quantistica dello stato in cui la particella è in  $\mathbf{r}$  e di quello che rappresenta la particella in  $\mathbf{r}'$ . Se il sistema fosse classico i termini fuori dalla diagonale della OBDM sarebbero tutti nulli, in quanto ogni particella avrebbe una posizione spaziale ben definita ad ogni istante.

†Se sono presenti due o più autovalori dello stesso ordine di  $N$  si può presentare la condensazione di Bose-Einstein frammentata, ovvero l'occupazione macroscopica di più di un autostato di  $\rho_1$ . Non considereremo questa possibilità, in quanto si può dimostrare essere energeticamente sfavorita.

In questo modo possiamo stabilire se è presente condensato anche in sistemi interagenti oltre che nel solo gas ideale. Fisicamente, questo criterio implica che una frazione finita di particelle occupa uno stato di singola particella,  $\Xi_M$ . Inoltre questo  $\Xi_M$  non deve essere per forza lo stato a energia più bassa, ma può essere uno stato qualsiasi: la definizione di condensazione di Bose Einstein data è quindi molto generale.

Possiamo riassumere la teoria di Penrose e Onsager tramite il concetto di "Off diagonal long range order" (ODLRO). Per prima cosa ridefiniamo la matrice densità ridotta (one particle density matrix, OPDM) tramite il linguaggio della seconda quantizzazione

$$\rho_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \equiv \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r}') \rangle \quad (4.7)$$

(dove  $\langle \rangle$  indica la media di ensemble). Usando le definizioni per gli operatori di campo si ottiene

$$\rho_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}' - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}} \rangle. \quad (4.8)$$

Notiamo che  $\langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}} \rangle = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \rangle$ , visto che, se i due stati di vettore d'onda  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{q}$  hanno  $\mathbf{k}$  diverso da  $\mathbf{q}$  producono una media di ensemble nulla.

Poi ricordiamo che l'operatore numero nello spazio dei vettori d'onda è  $\hat{n}_{\mathbf{k}} \equiv \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}$  e la funzione di distribuzione dei vettori d'onda è la sua media di ensemble,  $n_{\mathbf{k}} \equiv \langle \hat{n}_{\mathbf{k}} \rangle$ . Quindi la matrice densità ridotta è semplicemente la trasformata di Fourier della distribuzione dei momenti.

Supponiamo che sia presente un numero macroscopico ( $e^{o(1)}$ ) di particelle nello stato di vettore d'onda nullo, cioè la OBDM ha l'autovalore relativo a zero macroscopicamente grande rispetto a tutti gli altri ( $e^{o(1)}$  vs  $o(1)$ , criterio di Penrose-Onsager). Allora si avrà

$$n_{\mathbf{k}} = N_0 \delta(\mathbf{k}) + f(\mathbf{k}), \quad (4.9)$$

dove il termine con la delta di Dirac corrisponde alla probabilità finita che la particella abbia impulso nullo<sup>‡</sup> e con  $f(\mathbf{k})$  che sarà una funzione (liscia) che descrive la distribuzione delle particelle con vettore d'onda  $\mathbf{k}$  diverso da zero. A causa di ciò nel limite termodinamico si ottiene

$$\rho_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{N_0}{V} + \frac{1}{V} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} f(\mathbf{k}) \quad (4.10)$$

e, eseguendo l'integrazione sull'angolo solido (scrivendo  $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos\theta$ ) si arriva a

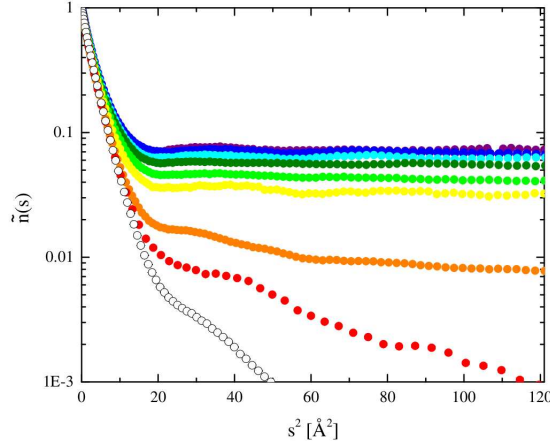
$$\rho_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{N_0}{V} + \frac{1}{\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int_0^{+\infty} k f(\mathbf{k}) \sin(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dk. \quad (4.11)$$

La funzione  $f(\mathbf{k})$ , come abbiamo detto sopra, sarà una funzione liscia che tende a zero abbastanza velocemente all'infinito (come una gaussiana, per maggiori dettagli si veda [3]), visto che non possono esserci particelle con

---

<sup>‡</sup>Se il liquido non fosse omogeneo e/o fosse in condizioni non stazionarie, non si potrebbe affermare che la condensazione avviene nello stato con momento nullo. Non ci addenteremo in queste possibilità.  $\delta$





**Figure 4.1:** One body density matrix di  ${}^4\text{He}$  liquido calcolata con metodi Quantum Monte Carlo per diverse temperature: da  $1.09\text{K}$  in viola fino a  $2.10\text{K}$  in giallo per simulare il comportamento sotto  $T_\lambda$ , mentre da  $2.65\text{K}$  in arancione fino a  $4.2\text{K}$  in bianco per simulazioni sopra a  $T_\lambda$ .

momento arbitrariamente grande. Allora si avrà

$$\left| \int_0^{+\infty} kf(\mathbf{k})\sin(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)dk \right| \leq \left| \int_0^{+\infty} kf(\mathbf{k})dk \right| \leq +\infty \quad (4.12)$$

e nel limite "long range", ovvero  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ , il secondo termine a destra della 4.11 quindi scompare e otteniamo

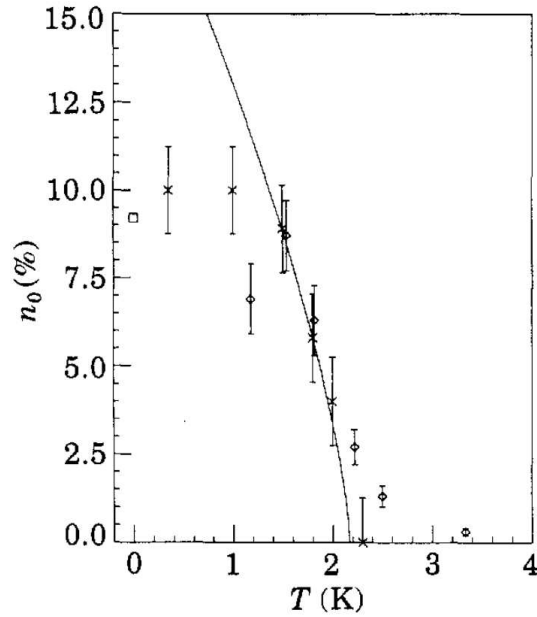
$$\rho_1(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \xrightarrow{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \rightarrow \infty} \frac{N_0}{V} = n_0 \quad (4.13)$$

Questo andamento asintotico si può verificare calcolando la OBDM con metodi Monte Carlo, vedi figura 4.1. Grazie a tutto questo si spiega l'esistenza nel liquido superfluido di un "ordine distante" assente nei liquidi normali.

L'interpretazione fisica dell'ODLRO è la seguente: ricordando che  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}')$  distrugge una particella in  $\mathbf{r}'$  (in questo caso è come se venisse "inglobata" nel condensato) mentre il suo operatore aggiunto  $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$  la crea in  $\mathbf{r}$ , se la media di ensemble della concatenazione di questi due operatori,  $\langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r}') \rangle$ , non è nulla anche nel limite di distanza infinito tra i due punti  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  in questione, allora significa che il processo di creazione e distruzione della particella ha un'ampiezza di probabilità (nel senso quantistico) non nulla a causa della coerenza del condensato. Ora, visto che  $\langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r}') \rangle$  è costante anche quanto i due punti sono infinitamente distanti, è ragionevole trattare il suo limite,  $n_0$ , come statisticamente indipendente dai punti presi in considerazione. Questo significa che la media di ensemble del prodotto dei due operatori di campo può essere spezzata in due medie

$$\langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r}') \rangle \xrightarrow{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \rightarrow \infty} \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \rangle \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \rangle. \quad (4.14)$$

Possiamo quindi affermare che la fase II dell'elio liquido è caratterizzata dalla presenza di ODLRO nella OBDM  $\rho_1$ : questo ODLRO è definito dalla 4.13.



**Figure 4.2:** Frazione di condensato in elio-4 in funzione della temperatura, da *W. M. Snow et al, 1992 EPL 19 403*: risultati sperimentali (crocette) e valori ottenuti con metodi Monte Carlo (diamanti e quadrati).

#### 4.0.2 RISULTATI SPERIMENTALI

Grazie allo scattering di neutroni si è sondato l'elio a varie temperature (sopra e sotto il punto  $\lambda$ ). Per esempio, Glyde et al. (2000) sono riusciti a stimare il valore della frazione di condensato in funzione della temperatura, che consiste nella seguente espressione:

$$\frac{n_0}{N} = A \left( 1 - \left( \frac{T}{T_\lambda} \right)^\gamma \right), \quad (4.15)$$

con  $A = (7.25 \pm 0.75)\%$  e  $\gamma = 5.5 \pm 1.0$ . Altri lavori invece (Snow e Sokol, 1992) restituiscono una frazione di condensato a temperatura nulla pari a circa il 10% (vedi figura 4.2). Grazie poi a simulazioni basate sul metodo Monte-Carlo si è arrivati a valori consistenti con quello di Glyde (Moroni et al., 1997).



# Conclusioni

In questa tesi sono state indagate a fondo le proprietà dell'elio-4 a basse temperature. A partire dallo spettro delle eccitazioni elementari, ovvero la relazione di dispersione del liquido, sono state ricavate tutte le proprietà termodinamiche del sistema. Grazie alla teoria dei due fluidi è possibile considerare queste ultime come generate dalle quasi particelle, che altro non sono che eccitazioni collettive degli atomi di elio.

Il modello di Landau dunque permette di suddividere il sistema in parte normale e parte superfluida: il gas di quasi particelle costituisce la parte normale e, a basse temperature, può essere considerato come un gas ideale degenere di Bose-Einstein, di cui si riescono a trovare analiticamente tutte le proprietà.

Si apprezza quindi l'enorme utilità del concetto di quasi particella, ampiamente utilizzato nella fisica della materia condensata e non solo.

Si è visto poi come la condensazione di Bose-Einstein sia un fenomeno fondamentale alla base della superfluidità. Però queste due non si implicano a vicenda: mentre tutti i sistemi bosonici superfluidi hanno una componente condensata, non tutti i condensati di Bose possono essere superfluidi (un esempio lampante di ciò è il gas di Bose ideale, che non può sostenere superfluidità come abbiamo visto nel capitolo 2. Altri esempi emergono quando si considera gas di Bose interagenti ma in dimensione due o uno).

Un nuovo traguardo da raggiungere in lavori futuri sarebbe quello di ricavare la frazione condensata dell'elio-4 in funzione della temperatura dallo spettro delle eccitazioni elementari, in analogia con quanto fatto per la frazione superfluida. Le difficoltà appaiono subito evidenti: se per la frazione superfluida si è potuto sfruttare il modello di Landau e quindi usare un gas di quasi particelle non interagenti, la frazione condensata invece riguarda direttamente gli atomi di elio, che sono tutt'altro che non interagenti. La formulazione di una teoria microscopica di un sistema bosonico a molti corpi con interazioni significative (non trattabili come piccole perturbazioni nell'hamiltoniana) è di fondamentale importanza per il raggiungimento dell'obiettivo sopra menzionato.

Per concludere ci tengo a ringraziare il professor Salasnich per la sua disponibilità e per i suoi puntuali consigli.



# Bibliografia

- [1] N. N. Bogoliubov, *On the theory of superfluidity*, J. Phys. (1947), 11, 23
- [2] A. J. Leggett, *Quantum Liquids*, Oxford Graduate Texts, (2006)
- [3] T. R. Prisk, M. S. Bryan, P. E. Sokol, G. E. Granroth, S. Moroni, M. Boninsegni, *The Momentum Distribution of Liquid  $^4\text{He}$* , J. Low Temp. Phys. (2017), 189, 158
- [4] C. N. Yang, *Concept of Off-Diagonal Long-Range Order and the Quantum Phases of Liquid He and of Superconductors*, Rev. Mod. Phys. (1962), 34, 694
- [5] F. London, *On the Bose-Einstein Condensation*, Phys. Rev. (1938), 54, 947
- [6] G. B. Hess, W. M. Fairbank, *Measurements of angular momentum in superfluid helium*, Phys. Rev. Lett. (1967), 19, 216
- [7] O. Penrose, *Bose-Einstein Condensation in Liquid Helium*, Nuovo Cim. (1958), Vol. IX, S. X, 256
- [8] R. P. Feynman, *Atomic Theory of Liquid Helium Near Absolute Zero*, Phys. Rev. (1953), 91, 1301
- [9] O. Penrose, L. Onsager, *Bose-Einstein Condensation and Liquid Helium*, Phys. Rev. (1956), 104, 576
- [10] C. N. Yang, *Imperfect Bose System*, Physica (1960), 26 49-57
- [11] J. F. Annett, *Superconductivity, Superfluids and Condensates*, Oxford University Press (2004)
- [12] W. Gotze, H. Wagner, *On the  $T^3$ -law for the Specific Heat of Bose Liquids*, Physica (1965), 31 475-492
- [13] K. Kehr, *On the  $T^4$  law for the density of the normal component in Bose liquids*, Physica (1967), 33 620
- [14] I. M. Khalatnikov, *An Introduction to the Theory of Superfluidity*, CRC Press, (2019)
- [15] A. Miller, D. Pines, *Elementary Excitations in Liquid Helium*, Phys. Rev. (1962), 127, 1452

- [16] K. Huang, *Meccanica statistica*, Zanichelli (1997)
- [17] A. L. Fetter, J. D. Walecka, *Quantum theory of Many-Particle systems*, Dover Publications (1971)
- [18] L. D. Landau, E. M. Lifshits, *Fisica teorica IX: Fisica statistica parte seconda, Teoria dello stato condensato*, Editori riuniti (2010)
- [19] L. D. Landau, *On the theory of superfluidity of helium II*, J. Phys. (1947), 11, 91
- [20] M. Rossi, L. Salasnich, *Path-Integral Ground-State and Superfluid Hydrodynamics of a Bosonic Gas of Hard Spheres*, Phys. Rev. (2013), 88, 053617
- [21] H. Hess, *Angular Momentum of Superfluid Helium in a Rotating Cylinder*, Phys. Rev. (1967), 161, 189
- [22] P. C. Hohenberg, P. C. Martin, *Microscopic Theory of Superfluid Helium*, Annals of Physics 281, 636-705 (2000)
- [23] A. Tononi, A. Cappellaro, L. Salasnich, *Condensation and superfluidity of dilute Bose gases with finite-range interaction*, New J. Phys. (2018), 20, 125007
- [24] V. D. Arp, R. D. McCarty, D. G. Friend, *Thermophysical Properties of Helium-4 from 0.8 to 1500 K with Pressures to 2000 MPa*, NIST Technical Note 1334 (1998)
- [25] D. G. Henshaw, A. D. B. Woods, *Modes of Atomic Motions in Liquid Helium by Inelastic Scattering of Neutrons*, Phys. Rev. (1961), 121, 1266