



# Università degli studi di Padova

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo  
Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

## Le oscillazioni acustiche nello spettro di potenza angolare della radiazione cosmica di fondo

**Relatore:**

Dr. Michele Liguori

**Corelatore**

Prof. Sabino Matarrese

**Laureando:** Luca Bonaldo

---

**Anno accademico 2014/2015**



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>v</b>
<b>1 Il fondo cosmico di microonde</b>	<b>1</b>
1.1 Universo in evoluzione . . . . .	1
1.2 Il fondo cosmico di microonde . . . . .	2
1.3 Dall'inflazione alla ricombinazione: le oscillazioni acustiche del plasma . . . . .	2
<b>2 Introduzione di nozioni necessarie per la comprensione del fenomeno delle oscillazioni acustiche</b>	<b>5</b>
2.1 Introduzione . . . . .	5
2.2 La teoria di Jeans . . . . .	5
2.2.1 Descrizione preliminare . . . . .	5
2.2.2 La lunghezza di Jeans . . . . .	6
2.3 Il fluido primordiale . . . . .	7
2.4 La materia oscura . . . . .	8
<b>3 L'inflazione</b>	<b>11</b>
3.1 Descrizione generale . . . . .	11
3.2 Implementazione con un campo scalare . . . . .	12
3.3 Inflazione e CMB . . . . .	13
<b>4 Lo spettro di potenza angolare</b>	<b>15</b>
4.1 Definizione dello spettro di potenza . . . . .	15
4.2 Le anisotropie di temperatura . . . . .	18
4.3 L'effetto Sachs-Wolfe . . . . .	19
<b>5 Le oscillazioni acustiche</b>	<b>23</b>
5.1 Descrizione generale . . . . .	23
5.2 L'approssimazione di tight coupling . . . . .	25
5.3 Tight coupling con forzante gravitazionale . . . . .	27
<b>6 Picchi dello spettro di potenza angolare</b>	<b>31</b>
6.1 Il primo picco . . . . .	31
6.2 Implicazioni della posizione del primo picco . . . . .	32
6.3 Il secondo picco . . . . .	33



# Introduzione

Lo scopo di questo lavoro di tesi è quello di studiare in modo introduttivo alcune proprietà del fondo cosmico di microonde e in particolare le oscillazioni acustiche visibili nel suo spettro angolare. Il lavoro è diviso nelle seguenti macrosezioni:

- Presentazione delle proprietà del fondo cosmico di microonde (CMB),
- Introduzione di alcuni concetti di cosmologia necessari per comprendere formazione e proprietà del CMB,
- Caratterizzazione delle anisotropie di temperatura,
- Spiegazione fisica e analisi del suo spettro di potenza.

Si tratta di un argomento particolarmente interessante in quanto, dallo spettro di potenza del CMB si possono ricavare parametri fondamentali per il modello standard della cosmologia quali la curvatura dell'universo, la percentuale di materia barionica e la densità di materia oscura oltre che essere un test sperimentale per gli attuali modelli inflazionari.



# Capitolo 1

## Il fondo cosmico di microonde

### 1.1 Universo in evoluzione

La storia termica dell'universo è uno dei campi di maggiore interesse e ricerca della fisica contemporanea. In seguito alla formulazione della teoria della relatività generale da parte di Einstein culminata nelle dieci leggi di campo, molti fisici si sono dedicati alla loro risoluzione così da determinare la dinamica dell'universo. Il primo scienziato che si accorse che in esse vi era intrinsecamente nascosta l'ipotesi di una non staticità fu il fisico e matematico Alexander Fridman. Egli risolse le equazioni di campo di Einstein e trovò tre soluzioni con il quale studiare la dinamica dell'universo:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3P}{c^2} \right) \quad (1.1)$$

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (1.2)$$

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{a}}{a} \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) \quad (1.3)$$

con  $a$  fattore di scala,  $\rho$  densità di energia,  $P$  pressione,  $k$  costante con valore  $-1,0,1$  a seconda della geometria dell'universo,  $G$  costante gravitazionale e  $c$  velocità della luce.

Friedman trovò anche l'equazione della metrica per un universo omogeneo e isotropo che risolve le equazioni del campo gravitazionale, la cosiddetta metrica di Friedman-Lemaître-Robertson-Walker:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kc^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (1.4)$$

Quasi parallelamente agli studi di Friedman, Hubble stava studiando il redshift delle galassie a spirale. Unendo le sue misure delle distanze delle galassie e le misure dei redshift scoprì una relazione di proporzionalità tra distanza della galassia e velocità di espansione. Nel 1929 Hubble, assieme a Milton Humason, formulò la legge empirica, oggi nota come legge di Hubble, che portò al concetto di universo in espansione e alla teoria del big bang. Il contributo fondamentale di Hubble fu quello di dimostrare la non staticità ma l'evoluzione dell'universo e in particolare il fatto che allo stato attuale l'universo è in espansione. In seguito a queste scoperte molti fisici cominciarono a dedicarsi allo studio della storia termica dell'universo.

## 1.2 Il fondo cosmico di microonde

Il fondo cosmico di microonde fu previsto nel 1948 dai fisici George Gamow, Ralph Alpher e Robert Herman, come quella radiazione elettromagnetica prodotta dal primo disaccoppiamento della materia con la radiazione in seguito all'espansione e quindi al raffreddamento del fluido composto da fotoni e barioni. Esso fu misurato per la prima volta nel 1965 da Arno Penzias e Robert Wilson.

Il CMB è una radiazione elettromagnetica con uno spettro di corpo nero ad una temperatura di 2,7 K, presenta quindi dei picchi nella zona delle microonde con una lunghezza d'onda di 1,9 millimetri. La radiazione è pressochè isotropa in tutte le direzioni. Dalle misure del satellite COBE, nel 1992, si scoprì che il campo scalare di temperatura del CMB presenta fluttuazioni di meno di una parte su 100.000.

Nell'epoca in cui è avvenuta l'emissione del CMB, l'universo era formato da un plasma molto caldo di fotoni, elettroni, e barioni. Gli elettroni agivano da collante tra le particelle di materia e di radiazione: protoni ed elettroni interagivano elettromagneticamente, mentre fotoni ed elettroni via scattering Thomson. La diffusione Thomson è un'approssimazione a basse temperature dell'effetto Compton e prevede che un'onda elettromagnetica incidente su una particella carica libera, provochi un moto di oscillazione di quest'ultima lungo la direzione del campo elettrico dell'onda incidente. A causa dell'accelerazione della particella carica, viene emessa radiazione elettromagnetica in tutte le direzioni, e per velocità non relativistiche, è emessa alla stessa frequenza dell'onda incidente. Una volta sottratto allo spettro della radiazione cosmica di fondo l'effetto doppler dovuto al moto relativo della nostra galassia rispetto ad essa, si riconoscono ulteriori fluttuazioni della temperatura ad ampiezze angolari inferiori. Queste fluttuazioni sono dovute alle oscillazioni acustiche del plasma di fotoni e barioni. Infatti, se da una parte la materia barionica e la gravità tendevano a comprimere il fluido in buche di potenziale, la radiazione di pressione dei fotoni si opponeva a tale compressione. Il fenomeno risultante di questi due effetti è l'oscillazione acustica del plasma primordiale. Per comprendere tale fenomeno è necessario ripercorrere brevemente la storia termica dell'universo.

## 1.3 Dall'inflazione alla ricombinazione: le oscillazioni acustiche del plasma

Il modello cosmologico attuale prevede che l'universo ha raggiunto pressochè le dimensioni attuali in seguito ad una espansione esponenziale cominciata quando l'universo aveva  $10^{-44}$  s e conclusa quando aveva  $10^{-34}$  s. Tale fenomeno, che prende il nome di inflazione cosmica, in primo luogo, avrebbe fatto sì che l'universo si sia sviluppato da una regione causalmente connessa, e in secondo luogo che le fluttuazioni quantistiche di densità nell'universo primordiale siano state portate su scala cosmica. Infatti, in seguito a questo fenomeno, regioni di alta densità andarono a formare buche di potenziale, mentre regioni di bassa densità andarono a generare zone a potenziale positivo. La gravità attirava il fluido primordiale verso il fondo della buca, mentre la pressione di radiazione tendeva a farlo espandere. Ad ogni compressione che avviene in una buca di potenziale corrisponde una rar-



efazione in una cresta di potenziale. Il risultato di questo fenomeno furono le oscillazioni acustiche del plasma che andò a formare anisotropie nello spettro della radiazione cosmica di fondo. Questo fenomeno interessò il plasma primordiale dai primi istanti dell'universo fino al momento della ricombinazione dell'idrogeno. Infatti, l'espansione dell'universo con il conseguente raffreddamento adiabatico, causò il raffreddamento del plasma fino a rendere possibile la combinazione degli elettroni con i protoni, e la formazione dei primi atomi di idrogeno. Questo evento, detto *ricombinazione* è avvenuto quando la temperatura era scesa a circa 3000 K, cioè quando l'età dell'universo era di circa 379 000 anni. Una volta formati gli atomi di idrogeno, la sezione d'urto di interazione fotone-atomo di idrogeno era molto più bassa di quella fotone-elettrone, i fotoni non interagirono più con la materia e cominciano a viaggiare liberamente nello spaziotempo. Questi fotoni sono quelli che noi osserviamo nello spettro del CMB e che portano con essi informazioni sull'ultimo scattering fotone-elettrone prima della ricombinazione.

In seguito all'espansione dell'universo la temperatura di colore del CMB è diminuita fino a raggiungere i 2,725 K attuali. La teoria del Big Bang sostiene che il CMB permei tutto lo spazio osservabile e che contenga la maggior parte della radiazione esistente, che costituisce circa il  $6 \cdot 10^{-5} \%$  della densità totale dell'Universo.



## Capitolo 2

# Introduzione di nozioni necessarie per la comprensione del fenomeno delle oscillazioni acustiche

### 2.1 Introduzione

Come descritto brevemente nel primo capitolo, la geometria FLRW descrive un universo omogeneo o isotropo. Questa descrizione è un'approssimazione matematica che non può ovviamente essere realistica almeno sulla piccola scala, dove lo spaziotempo è interessato dalle fluttuazioni quantistiche. Inoltre, andando a studiare la complessità dell'universo e in particolare la struttura degli ammassi di galassie, risulta subito chiaro che esso possiede fluttuazioni non-lineari di densità tra i vari punti dello spazio tempo. Con la l'aggettivo non-lineari si intendono fluttuazioni in cui la variazione rispetto alla media è molto maggiore dell'unità. Nel nostro caso della densità abbiamo che:  $\delta\rho/\bar{\rho} \gg 1$ . Quando ciò accade, la dinamica dell'universo non può essere spiegata ricorrendo ad una teoria perturbativa lineare della metrica di Robertson-Walker, ma bisogna introdurre termini non lineari alle equazioni di campo di Einstein. Tuttavia, a grandi scale, ovvero maggiori di centinaia di megaparsec, l'universo può essere approssimato da una teoria lineare in quanto riappare omogeneo e isotropo. Ciò che ci si aspetta, è che le fluttuazioni di densità al tempo della ricombinazione siano state lineari. Ciò lo si può dedurre dalle anisotropie di temperatura presenti nella radiazione cosmica di fondo, e si traduce nel dire che in quell'epoca:  $\delta\rho/\bar{\rho} \ll 1$ .

### 2.2 La teoria di Jeans

#### 2.2.1 Descrizione preliminare

Il meccanismo di instabilità gravitazionale di Jeans è una teoria che, nonostante sia approssimata, è in grado di dare una motivazione consistente per la crescita delle disomogeneità iniziali presenti nel fluido cosmico che poi hanno dato origine alle strutture non lineari che compongono l'universo attuale. L'idea è molto semplice: se in un fluido omogeneo si trova una regione di sovradensità, questa corrisponde ad

una buca di potenziale del campo gravitazionale, che attrae a se le particelle massive circostanti. Ciò farà aumentare la sovradensità e la profondità della buca. Qualora il fluido fosse un plasma di barioni e fotoni, questo collasso gravitazionale sarebbe contrastato dalla radiazione di pressione dei fotoni che a sua volta aumenterebbe, all'aumentare della densità del fluido. E' chiaro che il destino di queste regioni instabili dipende dal bilanciamento delle due forze: gravitazionale e di pressione. Qualora dominasse la gravità, le disomogeneità crescerebbero diventando non lineari e andando a formare strutture cosmiche. Qualora, invece, la pressione fosse in grado di resistere alla gravitazione, l'ampiezza delle disomogeneità comincerebbe ad oscillare, come descritto qualitativamente nella prima parte di questo lavoro. La dinamica dei due processi è discriminata da un parametro, detto lunghezza di Jeans  $\lambda_J$  funzione della densità e della velocità del suono nel fluido. Perturbazioni con lunghezza caratteristica maggiore di  $\lambda_J$  collasceranno, minore, oscilleranno. La teoria di Jeans è ovviamente di una teoria approssimata, una teoria completa dovrebbe riuscire a risolvere le equazioni di campo di Einstein perturbate.

### 2.2.2 La lunghezza di Jeans

Come visto, la teoria di Jeans si basa su un modello di fluido non relativistico in cui le perturbazioni di scala sono molto più piccole dell'orizzonte di Hubble. In questo caso possiamo approssimare le equazioni di campo di Einstein con la fisica classica e con il semplice potenziale Newtoniano  $\Phi$ . Nelle approssimazioni fatte, il nostro sistema può essere descritto dalle seguenti equazioni:

- Equazione di continuità:

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

in cui con  $\vec{v}$  si è indicato il campo di velocità del fluido e che rappresenta la conservazione della massa;

- Equazione di Eulero (Seconda legge di Newton)

$$\partial_{\vec{v}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \Phi = 0 \quad (2.2)$$

- Equazione di Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (2.3)$$

Per studiare la dinamica delle disomogeneità del fluido si deve, a questo punto, studiare la dinamica delle perturbazioni lineari di densità e velocità attorno alla configurazione di equilibrio. In particolare studiamo la configurazione di un fluido uniforme e statico. Questo implica  $\bar{\rho} = \text{cost}$ ,  $v_s = \text{cost}$  ( $v_s$  velocità del suono nel fluido)  $\vec{P} = \text{cost}$  e  $\delta P = v_s^2 \delta \rho$ . Procediamo quindi perturbando le equazioni del nostro modello arrestandoci al primo ordine perturbativo:

$$\partial_t \delta \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.4)$$

$$\partial_t \delta \vec{v} + \frac{v_s^2}{\bar{\rho}} \vec{\nabla} \delta \rho + \vec{\nabla} \delta \Phi = 0 \quad (2.5)$$

con il potenziale  $\Phi$  associato alla perturbazione e legato a  $\delta\rho$  dall'equazione:

$$\nabla^2\delta\Phi = 4\pi G\delta\rho \quad (2.6)$$

Prendendo la divergenza dell'equazione di Eulero perturbata e, sfruttando l'equazione di continuità e quella di Poisson, otteniamo un'equazione differenziale lineare del secondo ordine in  $\delta\rho$ :

$$\nabla_t^2\delta\rho - v_s^2\nabla^2\delta\rho - 4\pi G\bar{\rho}\delta\rho = 0 \quad (2.7)$$

Per quest'ultima equazione cerchiamo soluzioni del tipo di onde piane, ovvero prendiamo la rappresentazione della nostra funzione in serie di Fourier e studiamo il comportamento di un generico modo  $k$ . Questo è possibile in quanto siamo in approssimazione di perturbazioni lineari.

$$\delta\rho = \delta\rho_{in} \exp\left\{i\left[\frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}\cdot\vec{r} - \omega t\right]\right\}, \quad \delta\rho_{in} = \text{cost}, \quad (2.8)$$

dove  $\lambda$  e  $\omega$  rappresentano la lunghezza d'onda e la frequenza della generica onda piana avente numero d'onda  $k$ , mentre  $\vec{n}$  è il versore che indica la direzione di propagazione dell'onda. Sostituendo l'equazione (2.8) in (2.7) si ottiene la condizione per  $\omega$ :

$$\omega = \pm 2\pi\sqrt{\frac{v_s^2}{\lambda^2} - \frac{G\bar{\rho}}{\pi}} \quad (2.9)$$

Da questa relazione si vede che abbiamo due tipi possibili di soluzioni per  $\omega$  a seconda della lunghezza d'onda  $\lambda$  della nostra onda. Qualora essa sia sufficientemente piccola, la pulsazione è reale e la soluzione ad essa associata è oscillante. Matematicamente questa condizione si verifica quando:

$$\lambda < \lambda_J \equiv v_s\sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}} \quad (2.10)$$

Qualora invece la lunghezza d'onda  $\lambda$  sia maggiore della lunghezza di Jeans, la pulsazione  $\omega$  diventa un numero immaginario del tipo  $i\alpha$  e la corrispondente fluttuazione di densità  $\delta\rho$  collassa. Infatti, sostituendo  $\omega$  nell'equazione (2.8) si ottiene per  $\delta\rho$ :

$$\delta\rho = \delta\rho_{in} \exp\left\{\frac{2\pi i}{\lambda}\vec{n}\cdot\vec{r} + \alpha t\right\}. \quad (2.11)$$

Anche se il nostro modello si è basato sullo studio di un fluido statico e uniforme, si può dimostrare che aggiungendo il fattore di scala di espansione dell'universo nelle equazioni che descrivono la densità di energia, qualitativamente la lunghezza di Jeans mantiene la sua proprietà di essere il parametro che discrimina il regime oscillatorio dal collasso gravitazionale.

## 2.3 Il fluido primordiale

Come descritto nel primo capitolo di questo lavoro, dopo i primi minuti dall'inflazione fino alla ricombinazione dell'idrogeno, l'universo era composto di un fluido in cui

erano immersi barioni e fotoni, tenuti insieme dall'interazione con gli elettroni liberi. Introduciamo a questo punto alcune relazioni che descrivono un fluido perfetto, che useremo come approssimazione del fluido cosmico. Fisicamente un fluido perfetto non presenta viscosità o attriti interni, ovvero le interazioni tra le particelle che lo costituiscono sono trascurabili. Per descriverne in modo sistematico le sue proprietà si introduce il suo tensore energia impulso

$$T_{\mu}^{\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u^{\nu} - p\delta_{\mu}^{\nu} \quad (2.12)$$

oppure scritto in forma covariante:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} - pg_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

dove il campo di velocità  $u^{\mu}$  è riferito ad un osservatore fisico che si muove all'interno del cono di luce, ovvero vale la normalizzazione:

$$g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = 1 \quad (2.14)$$

Infine, si definisce *barotropico* un fluido la cui equazione di stato  $p = p(\rho)$  assume la forma di proporzionalità diretta:

$$\frac{p}{\rho} = w = \text{cost} \quad (2.15)$$

In particolare per un gas di particelle ultra-relativistiche il tensore energia-impulso è a traccia nulla e ha equazione di stato  $p = \rho/3$ . Si tratta quindi di un fluido barotropico con  $w = 1/3$ .

## 2.4 La materia oscura

Per comprendere a fondo l'origine delle oscillazioni acustiche nel fondo cosmico di microonde è fondamentale introdurre la materia oscura. Inoltre, senza introdurre questo secondo tipo di materia e tenendo un modello di universo composto solamente da radiazione e materia barionica, è impossibile spiegare l'esistenza e la formazione di galassie e ammassi di galassie che si possono invece osservare. All'epoca della ricombinazione dell'idrogeno, ovvero dell'emissione del CMB, barioni e fotoni erano molto legati tramite interazione colombiana e Thomson scattering. Dato il grande numero di fotoni, la pressione era molto elevata e contrastava fortemente il collasso gravitazionale, facendo sì che la lunghezza di Jeans era paragonabile alla dimensione dell'orizzonte cosmologico. Ciò comportava che le perturbazioni nella componente barionica della materia non avrebbero potuto collassare fino al momento del disaccoppiamento. Infatti queste fluttuazioni erano dello stesso ordine dell'intensità delle fluttuazioni di temperatura osservate nello spettro del CMB, ovvero:

$$\left. \frac{\delta\rho_b}{\rho_b} \right|_{dis} \simeq 4 \frac{\delta T}{T} \leq 10^{-4} \quad (2.16)$$

Ciò unito al fatto che durante l'era dominata dalla materia le perturbazioni crescevano linearmente con  $a$  avrebbe portato necessariamente al fatto che attualmente

---

non sarebbe ancora cominciata nessuna evoluzione di strutture non lineari. Questo tipo di paradosso si risolve introducendo un altro tipo di materia che, non interagendo con la radiazione (motivo per cui viene chiamata *dark matter*) può cominciare il collasso prima della materia barionica. Questo passaggio è fondamentale perché è ciò che ha permesso la formazione di quelle buche di potenziale che sono state i siti in cui il fluido cosmico ha compiuto le oscillazioni acustiche.





# Capitolo 3

## L'inflazione

### 3.1 Descrizione generale

Con il concetto di inflazione si intende la fase di espansione accelerata estremamente rapida che ha interessato l'universo poco dopo il big bang. Durante questa espansione, l'universo appena nato e delle dimensioni della lunghezza di Planck ( $l_P \simeq 1.7 \times 10^{-33} \text{ cm}$ ), raggiunse pressoché le dimensioni attuali e i vari punti dell'universo sarebbero stati allontanati ad un ritmo sempre più rapido fino a superare la velocità della luce.

Il modello inflazionario fu introdotto da Starobinski e Guth all'inizio degli anni '80 per risolvere alcune inconsistenze del modello cosmologico standard: alcune di queste sono il problema dell'orizzonte cosmologico, quello della piattezza dell'universo e l'invarianza di scala delle fluttuazioni nello spettro del CMB. In particolare, il primo problema consiste nel fatto che regioni differenti dell'universo, non entrate mai in contatto l'una con l'altra a causa della grande distanza tra esse, hanno proprietà fisiche pressoché identiche. Questo problema si basa principalmente sul postulato della relatività ristretta dell'impossibilità di trasmettere segnali a velocità maggiori di quella della luce: punti dell'universo posti ad una distanza maggiore di quella che la luce ha potuto percorrere dal big bang ad oggi, non possono essere mai stati connessi causalmente l'uno con l'altro. Ciò dovrebbe implicare che i due punti abbiano proprietà fisiche diverse e in generale quindi che l'universo abbia proprietà diverse nei suoi vari punti. Questo fatto è invece inaspettatamente messo in discussione dall'isotropia del CMB. Esso infatti ha pressoché la stessa temperatura in ogni punto dell'universo il che implica che tale radiazione era omogenea e isotropa nelle regioni interne alla superficie di ultimo scattering. Modi di oscillazione caratterizzati da un numero d'onda soddisfacente la relazione  $k\eta \ll 1$ , con  $\eta \equiv \int dt/a(t)$  l'orizzonte comovente, hanno lunghezza d'onda così grande che nessun processo fisico ha potuto interessarli.

Questo problema viene risolto affermando che in un primo momento tutti i punti dell'universo erano in connessione causale tra di loro. A questa prima fase si è susseguita una violenta espansione in cui l'universo ha raggiunto dimensioni molto maggiori dell'orizzonte delle particelle. Per questo, modi con  $k\eta \ll 1$  si dicono “congelati” alle condizioni iniziali. Poiché la lunghezza d'onda dei modi di oscillazione rimane costante, mentre il fattore di scala cresce, è solo nel momento in cui

essi entrano nell'orizzonte cosmologico che possono essere interessanti da processi fisici. Il fatto che fotoni fuori dall'orizzonte cosmologico non possono essere stati deviati da nessun effetto fisico, prende il nome di *freestreaming* ed è il fenomeno che caratterizza i fotoni del CMB misurati a grandi scale.

Riprendendo le equazioni di Friedman, si vede che per avere un universo accelerato è necessario che ci sia una pressione negativa che faccia espandere lo spazio. Infatti:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3P}{c^2} \right). \quad (3.1)$$

Affinché ci sia un'espansione è necessario che  $\ddot{a} > 0$ . La condizione necessaria per l'inflazione è quindi che:

$$P < -\frac{\rho}{3}. \quad (3.2)$$

Essendo la densità una quantità positiva, la pressione deve essere necessariamente negativa.

## 3.2 Implementazione con un campo scalare

L'idea è quella di elaborare una teoria di campo che spighi il fenomeno dell'inflazione, ovvero trovare un campo scalare il cui effetto sullo spazio-tempo sia quello di generare la pressione negativa che, come abbiamo appena dimostrato, è la condizione necessaria per avere l'espansione accelerata.

Costruiamo quindi un campo scalare  $\phi(\vec{x}, t)$ , tale che dia  $\rho + P < 0$ . Scriviamo innanzitutto il tensore energia-momento per il campo  $\phi$ :

$$T^\alpha{}_\beta = g^{\alpha\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} - g^\alpha{}_\nu \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} + V(\phi) \right]. \quad (3.3)$$

dove  $V(\phi)$  rappresenta il potenziale associato al nostro campo. Si è usata la segnatura (3,1) per lo spazio di Minkowski.

Assumiamo che il campo sia pressoché omogeneo, ovvero che non dipenda da  $\vec{x}$  ma solo dal tempo e prendiamo il tensore energia-impulso all'ordine zero:

$$T^{(0)\alpha}{}_\beta = -g^\alpha{}_0 g^0{}_\beta \left( \frac{d\phi^{(0)}}{dt} \right)^2 + g^\alpha{}_\beta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi^{(0)}}{dt} \right)^2 - V(\phi^{(0)}) \right]. \quad (3.4)$$

A questo punto possiamo ricavare la densità di energia che sappiamo essere l'opposto della componente tempo-tempo  $T^{(0)0}{}_0$ :

$$\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi^{(0)}}{dt} \right)^2 + V(\phi^{(0)}). \quad (3.5)$$

Il primo termine è il termine cinetico del campo, il secondo è la densità di energia potenziale.

Per la pressione vale invece:

$$P = T^{(0)i}{}_i = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi^{(0)}}{dt} \right)^2 - V(\phi^{(0)}). \quad (3.6)$$

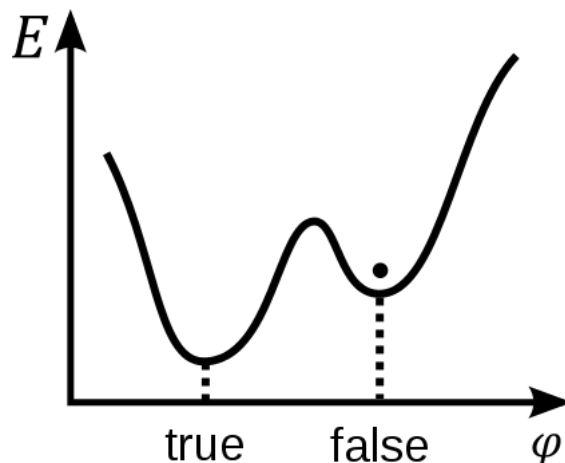


Figura 3.1: Campo scalare intrappolato in un falso vuoto

Affinché valga la condizione (3.2), l'energia potenziale del nostro campo deve essere maggiore della sua energia cinetica. Un esempio di questo è un potenziale intrappolato in un falso vuoto come mostrato nella figura 3.1. In questa configurazione il campo  $\phi$  ha energia cinetica molto bassa e potenziale diversa da zero. Poiché abbiamo assunto  $\dot{\phi}^{(0)}$  costante, la sua densità di energia, unicamente potenziale, rimane costante. Ciò implica che:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}} = \text{costante}. \quad (3.7)$$

Usando l'approssimazione che  $H$  sia costante durante l'inflazione, integrando  $da/a = Hdt$ , ottenendo  $a(t)$  e sostituendolo nell'equazione per l'orizzonte comovente otteniamo infine:

$$\eta_{prim} = \frac{1}{H_e a_e} \left( e^{H(t_e - t_b)} - 1 \right) \quad (3.8)$$

dove  $t_b$  è il momento in cui finisce l'inflazione. Imponendo che il campo scalare sia stato intrappolato nel falso vuoto per un tempo tale che valga  $H(t_e - t_b) > 60$ , il problema dell'orizzonte cosmologico è risolto.

### 3.3 Inflazione e CMB

Alcuni aspetti previsti dalla teoria dell'inflazione hanno conseguenze molto forti sul CMB, per questo lo studio delle sue proprietà viene utilizzato come test per i modelli inflazionari. Innanzitutto la teoria inflazionaria fissa le condizioni iniziali. Questo fatto è molto importante ad esempio per spiegare l'esistenza delle oscillazioni acustiche del CMB. In particolare la teoria dell'inflazione prevede che lo spettro di potenza primordiale  $P(k)$ :

$$\langle \Phi(\vec{k}) \Phi^*(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3 P_\Phi(k) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (3.9)$$

sia "nearly scale-invariant", ovvero che le fluttuazioni abbiano la stessa ampiezza a tutte le scale. Questo avviene se:

$$P_\Phi(k) = Ak^{n-4}, \quad (3.10)$$

e se  $n = 1$  lo spettro di potenza è perfettamente scale-invariant. Questo risultato è fondamentale, in quanto, come si vedrà più avanti, lo spettro di potenza primordiale è un ingrediente fondamentale nello studio delle anisotropie del CMB.

Infine, un secondo aspetto fondamentale della teoria dell'inflazione per la formazione del CMB è il fatto che essa prevede che le fluttuazioni siano pressoché gaussiane a media nulla. Questo fatto è importantissimo perché permette di usare lo spettro di potenza del CMB come unico correlatore statistico.

## Capitolo 4

# Lo spettro di potenza angolare

### 4.1 Definizione dello spettro di potenza

Raccogliendo i dati sulle anisotropie di temperatura del CMB possiamo costruire una mappa dell'universo associando ad ogni direzione spaziale la corrispondente fluttuazioni di temperatura in quel punto. Sappiamo che la teoria inflazionaria prevede che le fluttuazioni quantistiche di densità nei primi istanti dell'universo siano fluttuazioni gaussiane. Ciò implica che tutta l'informazione statica del CMB che vogliamo studiare è contenuta nella funzione di correlazione angolare:

$$\xi(\hat{n}, \hat{n}')_{\Delta T} = \left\langle \frac{\Delta T}{T}(\hat{n}) \frac{\Delta T}{T}(\hat{n}') \right\rangle \quad (4.1)$$

dove le parentesi rappresentano il valore medio statico della funzione che descrive la variazione relativa di temperatura e inoltre si è supposto che la  $\xi$  sia valutata allo stesso istante  $\eta_0$ .

A questo punto interviene un ingrediente fondamentale del nostro modello cosmologico che ci permette di ottenere in modo più immediato la funzione di correlazione: l'isotropia dell'universo del nostro modello. Ciò, infatti, implica che la funzione di correlazione angolare dipende solo dal coseno dell'angolo tra le due direzioni per le quali stiamo studiando la correlazione, ed è quindi invariante per rotazioni. Di conseguenza la funzione di correlazione possiamo rappresentarla come la trasformata di Legendre dello spettro di potenza angolare, ovvero:

$$\xi(\hat{n}, \hat{n}')_{\Delta T} = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos(\hat{n} \cdot \hat{n}')) \quad (4.2)$$

dove con  $P_l$  si sono indicati i polinomi di Legendre di argomento  $(\hat{n}, \hat{n}')$  e con  $C_l$  lo spettro di potenza dipendente dal numero angolare  $l$ .

Per dimostrare questa relazione cominciamo con il dire che per una funzione definita in una sfera, esiste un analogo dell'espansione in serie di Fourier, che è l'espansione in armoniche sferiche. Le armoniche sferiche sono funzioni delle coordinate sferiche a raggio costante e sono definite nel seguente modo:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (4.3)$$

in cui  $P_l^m$  sono i polinomi di Legendre associati, con  $l$  e  $m$  numeri interi,  $l \geq 0$  e  $|m| \leq l$ . Le armoniche sferiche formano una base completa e ortonormale per lo spazio della superficie sferica. Vale infatti la relazione di ortonormalità:

$$\int Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (4.4)$$

dove l'asterisco indica il complesso coniugato, la  $\delta$  indica la delta di Krönecker e si è usata la notazione  $d\Omega$  per indicare l'angolo solido infinitesimo:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi \quad (4.5)$$

Inoltre possiamo rappresentare il versore  $\hat{n}$  in coordinate sferiche come segue:

$$\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (4.6)$$

Per la validità della relazione (4.4) si possono espandere funzioni  $L^2(S^2)$  (“ $L^2$  sommabili sulla superficie sferica”) in armoniche sferiche. Questo è l'analogo della rappresentazione in serie di Fourier di funzioni definite sulla sfera unitaria. Essendo la funzione che descrive le fluttuazioni di temperatura  $\Theta(\hat{n}) \equiv \frac{\Delta T(\hat{n})}{T}$  una funzione definita sulla sfera, possiamo espanderla in armoniche sferiche come segue:

$$\Theta(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (4.7)$$

e sfruttando la relazione di completezza (4.4) si può vedere che per i coefficienti  $a_{lm}$  vale la seguente relazione:

$$a_{lm} \equiv \int Y_{lm}^*(\theta, \phi) \Theta(\theta, \phi) d\Omega \quad (4.8)$$

Infine, per ottenere la relazione iniziale (4.2) sfruttiamo il *teorema dell'addizione* per le armoniche sferiche:

$$\sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\hat{n}) Y_{lm}(\hat{n}') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\hat{n} \cdot \hat{n}') \quad (4.9)$$

dove i  $P_l$  sono i polinomi di Legendre di indice  $l$ . Sfruttando l'ipotesi di omogeneità e isotropia dello spazio, sappiamo che i coefficienti  $a_{lm}$  possono dipendere solo da  $l$  e non da  $m$  e  $l'$ . Si definisce quindi lo spettro di potenza come:

$$\langle a_{lm}^* a_{l'm'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l \quad (4.10)$$

con la quale si ottiene nuovamente la relazione (4.2):

$$\begin{aligned} \xi(\hat{n}, \hat{n}')_{\Delta T} &= \sum_{l=0}^{+\infty} C_l \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\hat{n}) Y_{lm}^*(\hat{n}') \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} C_l (2l+1) P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (4.11)$$

si noti che nell'ultimo passaggio è stato utilizzato il teorema dell'addizione per le

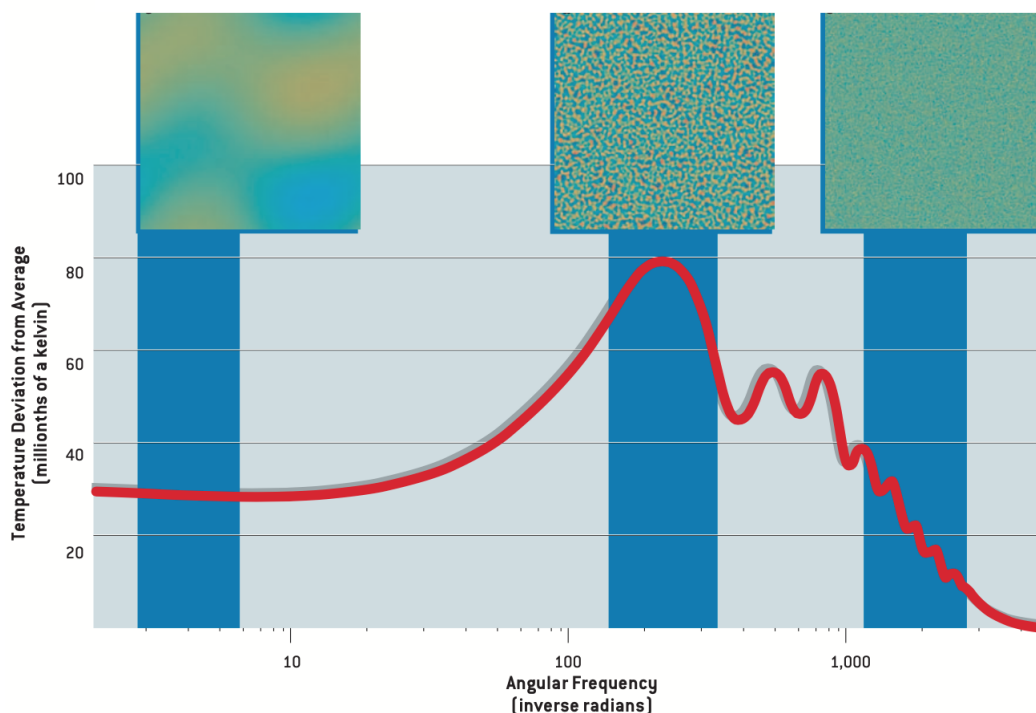


Figura 4.1: Lo spettro di potenza angolare

armoniche sferiche.

Il risultato (4.10) è sorprendente e fondamentale. Esso spiega il motivo per cui conviene passare dallo studio delle fluttuazioni nello spazio ordinario a quello armonico. Infatti, l'isotropia statistica, che nello spazio ordinario si traduceva nella dipendenza della funzione di correlazione dal solo angolo tra le due direzioni scelte, nello spazio armonico si traduce in una diagonalizzazione della matrice di correlazione. Gli unici valori non nulli di tale matrice sono quelli sulla diagonale e che corrispondono alla varianza  $C_l$ . Questo diminuisce drasticamente il calcolo dei coefficienti della matrice di correlazione ed è il motivo per cui in cosmologia si lavora spesso sullo spazio armonico.

Questo risultato è fondamentale perché ci dice che ogni diverso  $l$  è scorrelato dagli altri e può quindi essere studiato singolarmente. Inoltre, poiché per un dato  $l$ , ogni  $a_{lm}$  corrispondente ha la stessa varianza, abbiamo  $2l + 1$  valori di  $a_{lm}$  rappresentati dalla stessa distribuzione di probabilità. Ciò comporta che per grandi valori di  $l$  l'incertezza associata alla varianza diventa molto piccola, mentre per valori piccoli di  $l$ , l'informazione sulla varianza è molto piccola e l'errore molto grande. Questo risultato mostra che esiste un limite intrinseco nelle misure di accuratezza per un dato  $C_l$  e prende il nome di *varianza cosmica*. Quantitativamente, andando ad applicare la definizione di varianza al coefficiente  $C_l$  si ottiene la seguente nota formula:

$$\left(\frac{\Delta C_l}{C_l}\right)_{CV} = \sqrt{\frac{2}{2l+1}} \quad (4.12)$$

Il significato della varianza cosmica si basa sul fatto che per le nostre misure di fluttuazioni del campo di temperatura e dei rispettivi coefficienti  $a_{lm}$ , abbiamo a

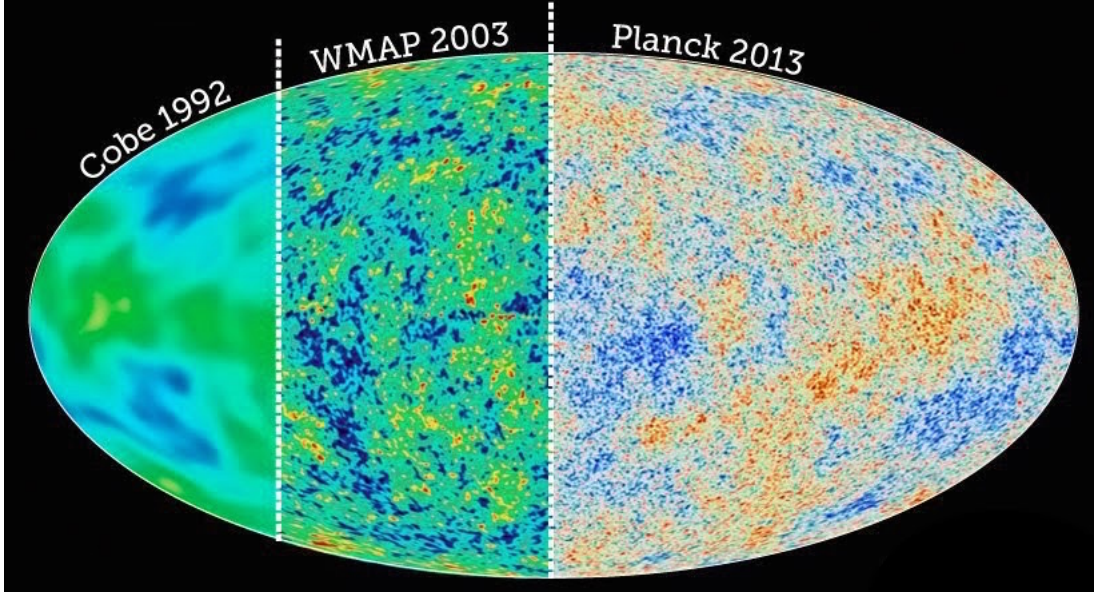


Figura 4.2: Le anisotropie del CMB

disposizione un solo campione di misure, ovvero un solo universo su cui raccoglierle.

## 4.2 Le anisotropie di temperatura

Nello spettro del CMB si possono riconoscere fluttuazioni del campo scalare di temperatura che possono essere suddivise in due gruppi: anisotropie primarie e secondarie. Si definiscono primarie quelle fluttuazioni già presenti al momento dell'emissione del CMB ovvero al momento della ricombinazione, mentre quelle secondarie sono dovute a variazioni di temperatura in seguito a processi a cui sono stati sottoposti i fotoni durante il loro percorso dall'istante di emissione fino alla loro osservazione.

Le anisotropie primarie sono dovute principalmente a tre cause. In primo luogo esse sono generate dalle fluttuazioni di densità del plasma al momento del freeze-out. In questo caso, con fluttuazioni, si intendono le compressioni e le rarefazioni a cui è stato sottoposto il fluido a causa delle interazioni tra fotoni, barioni ed elettroni. La seconda causa della presenza di anisotropie primarie è l'effetto doppler dato dal moto relativo della nostra galassia rispetto al CMB, variazione descritta dalla formula:

$$T(\theta) = T_0 \left( 1 + \frac{\Delta T_D}{T_0} \cos \theta \right) \quad (4.13)$$

dove con  $T_0$  si è indicata la temperatura media del CMB e con  $\Delta T_D$  la variazione di temperatura di dipolo. L'ampiezza massima dell'anisotropia di dipolo è circa  $\Delta T_d/T_0 \simeq 10^{-3} \simeq v/c$ , dove  $v$  è la velocità della nostra galassia rispetto al CMB e vale circa  $600 \text{ km s}^{-1}$ . Il terzo effetto è dovuto alle perturbazioni del potenziale gravitazionale ed è spiegato dal noto *effetto Sachs-Wolfe* (SW): fotoni che al momento della ricombinazione si trovavano su buche di potenziale appaiono più freddi di quelli che si trovavano su cresta di potenziale, in quanto hanno dovuto spendere



energia per uscire dalla buca.

Un primo contributo alle anisotropie secondarie viene dall'*effetto Sachs-Wolfe integrato* (ISW) che corrisponde all'effetto Sachs-Wolfe in cui però il fotone ha risentito delle perturbazioni del potenziale gravitazionale durante la sua propagazione dopo la ricombinazione. Un'altra sorgente di anisotropie secondarie è la riionizzazione, che è quel periodo della storia termica dell'universo in cui, in seguito alla formazione delle prime stelle, si ebbe un'emissione di radiazione UV nell'universo che riionizzò l'idrogeno e l'elio che componevano l'universo (circa  $z \sim 6$ ). I fotoni quindi poterono interagire via scattering Compton con gli elettroni liberi presenti andando a variare la propria energia e quindi la propria temperatura. Un'ultima importante causa di anisotropie secondarie è l'effetto Sunyaev-Zel'dovich, che spiega lo scattering tra i fotoni liberi del CMB con gli elettroni liberi presenti nel mezzo intergalattico.

### 4.3 L'effetto Sachs-Wolfe

In questo paragrafo svolgiamo i conti per calcolare lo spettro di potenza dell'effetto Sachs-Wolfe, risultato che si sarà molto utile per ricavare una relazione fondamentale usata nei plot dello spettro di potenza.

Dopo aver studiato la dinamica delle perturbazioni scalari della metrica e delle sorgenti nei primi istanti dopo il big bang e la loro amplificazione inflazionaria, una volta imposte le condizioni iniziali adiabatiche, si ottiene un'espressione generale per le fluttuazioni di temperatura in funzione della direzione spaziale, numero d'onda  $\vec{k}$  e tempo conforme  $\eta_0$ :

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{n}, \vec{k}, \eta_0) = \frac{1}{3} \Psi_{k0} \cos(k c_s \eta_{rec}) e^{i\hat{n} \cdot \vec{k}(\eta_0 - \eta_{rec})} \quad (4.14)$$

dove con  $\Psi_{k0}$  si è indicata l'ampiezza del potenziale iniziale che fornisce le appropriate condizioni iniziali per le perturbazioni geometriche responsabili dell'anisotropia del CMB, con  $c_s$  la velocità del suono nel mezzo, e con  $\eta_{rec}$  il valore del tempo conforme al momento della ricombinazione e si sono infine trascurati i contributi tensoriali all'effetto Sachs-Wolfe integrato.

A questo punto possiamo espandere l'esponenziale in onde sferiche per potere sfruttare i risultati del paragrafo 4.1:

$$e^{i\hat{n} \cdot \vec{k}(\eta_0 - \eta_{rec})} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(k\eta_0 - k\eta_{rec}) P_l(\hat{k} \cdot \hat{n}) \quad (4.15)$$

dove  $\hat{k} = \vec{k}/k$  e  $k = |\mathbf{k}|$  mentre con  $P_l$  si sono indicati, come di consueto i polinomi di Legendre, con  $j_l$  le funzioni di Bessel sferiche di indice  $l$  e argomento  $x = k\eta_0 - k\eta_{rec}$ , per cui vale la seguente relazione con le ordinarie funzioni di Bessel  $J(x)$ :

$$j_l = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad (4.16)$$

Utilizzando questo risultato, possiamo riscrivere le fluttuazioni di temperatura nella seguente forma:

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{n}, \vec{k}, \eta_0) = \sum_l \Delta_l(k, \eta_0) P_l(\hat{k} \cdot \hat{n}) \quad (4.17)$$

dove  $\Delta_l$  è l'ampiezza spettrale del termine  $l$ -esimo dello sviluppo multipolare:

$$\Delta_l(k, \eta_0) = \frac{i^l}{3}(2l+1)\psi_{k0} \cos(kc_s\eta_{rec})j_l(k\eta_0 - k\eta_{rec}) \quad (4.18)$$

A questo punto, costruiamo la funzione di correlazione a due punti (4.1)  $\xi(\hat{n}, \hat{n}')_{\Delta T}$ :

$$\begin{aligned} \xi(\hat{n}, \hat{n}')_{\Delta T} &= \frac{1}{V} \int d^3x \frac{\Delta T}{T}(\hat{n}, \vec{x}) \frac{\Delta T}{T}(\hat{n}', \vec{x}) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\Delta T}{T}(\hat{n}, \vec{k}) \frac{\Delta T}{T}(\hat{n}', \vec{k}) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{l,l'} \Delta_l(k) \Delta_{l'}^*(k) P_l(\hat{k} \cdot \hat{n}) P_{l'}^*(\hat{k} \cdot \hat{n}') \end{aligned} \quad (4.19)$$

Sfruttando il teorema di addizione per le armoniche sferiche e la loro ortonormalità, otteniamo la seguente equivalenza per la funzione di correlazione termica:

$$\begin{aligned} \xi(\hat{n}, \hat{n}')_{\Delta T} &= \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^{\infty} k^2 dk \frac{|\Delta_l(k)|^2}{(2l+1)^2} Y_{lm}^*(\hat{n}) Y_{lm}(\hat{n}') \\ &\equiv \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_l Y_{lm}^*(\hat{n}) Y_{lm}(\hat{n}') \end{aligned} \quad (4.20)$$

Abbiamo così ricavato la relazione tra funzione di correlazione di temperatura e lo spettro di potenza delle anisotropie.

L'effetto Sachs-Wolfe corrisponde al limite dell'espressione (4.14) per  $k\eta \ll 1$ . Calcoliamo i coefficienti  $a_{lm}^{SW}$ :

$$a_{lm}^{SW} = (4\pi)(-i)^l \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Psi(\vec{k}) Y_{l_1 m_1}^*(\hat{k}) \frac{1}{3} j_l(k s_*) \quad (4.21)$$

Da questa espressione si ricava:

$$\begin{aligned} \langle a_{l_1 m_1}^* a_{lm} \rangle &= (16\pi^2) \frac{1}{9} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle \Psi(\vec{k}) \Psi(\vec{k}_1) \rangle Y_{l_1 m_1}^*(\hat{k}_1) Y_{lm}^*(\hat{k}) j_l(k s_*) j_{l_1}(k s_*) \\ &= (16\pi^2) \frac{1}{9} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 P(k) \delta(\vec{k} + \vec{k}_1) Y_{l_1 m_1}^*(\hat{k}_1) Y_{lm}^*(\hat{k}) j_l(k s_*) j_{l_1}(k s_*) \\ &= (16\pi^2) \frac{1}{9} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(k) j_l(k s_*) j_{l_1}(k s_*) \delta_l^{l_1} \delta_m^{m_1} \\ &= \left[ \frac{2}{9\pi} \int dk k^2 A k^{n-4} j_l^2(k s_*) \right] \delta_l^{l_1} \delta_m^{m_1}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ricordando la definizione di spettro di potenza, e riscrivendo l'ultima equazione usando la funzione  $\Gamma$  di Eulero, otteniamo:

$$C_l^{SW} \propto \frac{\Gamma\left[\frac{3-n}{2}\right] \Gamma\left[\frac{l+(n-1)}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{4-n}{2}\right] \Gamma\left[\frac{l+(5-n)}{2}\right]}, \quad (4.23)$$

e imponendo la condizione di scale-invariant  $n = 1$  otteniamo infine:

$$\frac{l(l+1)}{2\pi}C_l = \text{cost.} \quad (4.24)$$

La funzione a sinistra dell'ultima equazione è la funzione che normalmente si trova plottata in funzione di  $l$  nei risultati sperimentali e che rappresenta lo spettro di potenza. In particolare, nel caso studiato dell'effetto Sachs-Wolfe, abbiamo ottenuto il risultato del Sachs-Wolfe Plateau. Per usare la funzione nel range delle oscillazioni acustiche, si deve mantenere il termine oscillante presente nell'equazione (4.14), calcolare il valore medio dei coefficienti  $a_{lm}$ , sostituire lo spettro di potenza primordiale e calcolare  $C_l$ . Nel prossimo capitolo si approfondiranno le oscillazioni acustiche e le si studierà con un modello semplificato di fluido composto di barioni e fotoni fortemente accoppiati.



# Capitolo 5

## Le oscillazioni acustiche

### 5.1 Descrizione generale

In questo paragrafo approfondiamo le oscillazioni acustiche del fluido di fotoni e barioni, oscillazioni che poi verranno studiate quantitativamente nei prossimi paragrafi. Come già approfondito nei capitoli precedenti, attualmente si spiega l'esistenza delle fluttuazioni di temperatura e in particolare della regolarità dello spettro di potenza, assumendo che nei primi istanti l'universo sia stato interessato da un'epoca di violenta espansione, che ha portato il fattore di scala dell'Universo a ad essere maggiore dell'orizzonte cosmologico. Durante questa espansione, fluttuazioni quantistiche sono state portate a scala cosmica, innescando oscillazioni del plasma primordiale. Si assume che queste fluttuazioni iniziali godano dell'invarianza di scala, ovvero abbiano la stessa ampiezza sia a piccole che a grandi scale. Si assume inoltre che ogni oscillazione oscilli con fase uguale, ovvero le oscillazioni siano sincronizzate. Questa ipotesi è confermata dalla regolarità dello spettro di potenza.

La dinamica del fluido di barioni e fotoni, dalle fine dell'inflazione alla ricombinazione, determina variazioni di temperatura a diverse scale dell'universo. Per questo le anisotropie primarie, ovvero quelle originate sulla superficie di ultimo scattering (LSS), si possono suddividere in due gruppi, a seconda che la scala considerata sia maggiore o minore dell'orizzonte cosmologico  $R_H$  alla ricombinazione, che corrisponde ad una scala angolare di circa un grado.

Lo spettro di potenza caratterizza l'ampiezza delle fluttuazioni in funzione della scala angolare. Considerando grandi scale ( $\geq 1^\circ$ ), le fluttuazioni rientrano nell'orizzonte in un'epoca successiva alla ricombinazione e non subiscono quindi oscillazioni acustiche nel fluido di barioni-fotoni che si sono già disaccoppiati e sono quindi congelate ("frozen") nelle loro condizioni iniziali. In questo caso domina l'effetto Sachs-Wolfe e che forma il *Sachs-Wolfe Plateau*. Queste scale sono così grandi che non è trascorso abbastanza tempo da permettere all'universo di evolvere, e quindi quelle che si misurano sono le fluttuazioni iniziali, o condizioni iniziali dell'universo. Con la sua risoluzione angolare di  $7^\circ$ , il satellite COBE ha potuto vedere solo questa prima parte dello spettro di potenza. Infatti, il cielo coperto è composto di  $4\pi$  steradiani  $\simeq 41\,000 \text{ gradi}^2$ , quindi ci sono 840 pixel con un'area di  $(7^\circ)^2$ . Questo significa che questo esperimento raccoglieva 840 informazioni indipendenti. Traducendo le misure in pixels nello spettro di potenza, avremo un  $l_{max}$  per il quale non c'è più nes-

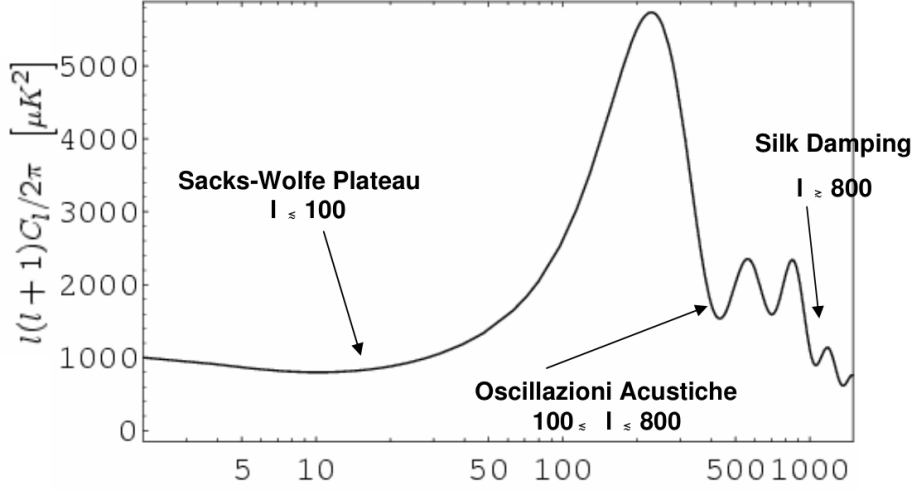


Figura 5.1: I diversi effetti che determinano le anisotropie nello spettro di potenza

suna informazione. Un modo semplice per determinare  $l_{max}$  è quello di determinare il numero totale di  $a_{lm}$  ottenibili dalle misure:  $\sum_{l=0}^{l_{max}} (2l+1) = (l_{max}+1)^2 = 840$ . Risolvendo questa equazione otteniamo che l'informazione sullo spettro del campo di temperatura può essere caratterizzato specificando tutti i coefficienti  $a_{lm}$  fino ad  $l_{max} = 28$ . Seguendo questo ragionamento, possiamo comprendere come mai, negli esperimenti successivi in cui si è potuto avere una risoluzione maggiore di  $7^\circ$  si è potuto misurare lo spettro di potenza fino ad  $l_{max} \sim 10^4$ .

Andando invece a studiare le fluttuazioni del CMB su scale  $\leq 1^\circ$ , consideriamo regioni situate all'interno dell'orizzonte cosmologico e quindi casualmente connesse. Dagli istanti successivi alla fine dell'inflazione, fino alla ricombinazione, i fotoni erano strettamente accoppiati con i barioni tramite scattering Thomson, e la pressione del plasma era quindi data principalmente dalla radiazione. Come visto in precedenza, al momento della ricombinazione, la lunghezza di Jeans del fluido di barioni e fotoni era confrontabile con l'orizzonte cosmologico. Questo significa, che tutte le perturbazioni dentro questo orizzonte erano di tipo oscillante. I fotoni e i barioni, strettamente accoppiati e disposti sulle buche i potenziale gravitazionale, oscillano periodicamente, seguendo fasi di compressione e rarefazione. La velocità del suono è data dalla relazione  $c_s = \sqrt{\dot{p}/\dot{\rho}}$ . I picchi acustici che si riconoscono nello spettro di potenza corrispondono a quei modi di oscillazioni che al momento della ricombinazione erano ad un massimo o ad un minimo di oscillazione. La compressione e l'oscillazione del plasma genera regioni più o meno dense, in particolare, ad ogni compressione di plasma in una buca di potenziale, corrisponde una rarefazione in una cresta di potenziale. Variazioni di densità di energia implicano variazioni di temperatura. Al momento della formazione dell'atomo di idrogeno i fotoni, liberi di propagarsi, mantengono l'energia da quel momento fino al loro rilevando. Ecco quindi che le oscillazioni acustiche del plasma sono visibili come piccole anisotropie nello spettro della radiazione cosmica di fondo.

Infine, a scale molto piccole ( $l \geq 800$ ) il fenomeno che interessa il plasma prende il

nome di *silk damping* dovuto al fatto che il fluido di barioni e fotoni non è un fluido perfetto. Andando a scale molto piccole, infatti, raggiungiamo dimensioni compatibili con la distanza che il fotone percorre durante il processo della ricombinazione. La ricombinazione, non è stata infatti un processo avvenuto istantaneamente. In questo intervallo di tempo, i fotoni hanno potuto rimbalzare tra i barioni presenti percorrendo un percorso casuale. Se il cammino percorso è confrontabile con la lunghezza d'onda della perturbazione, fotoni caldi e freddi si mescolano e la fluttuazione di temperatura crolla. Ecco che quindi le oscillazioni acustiche vengono esponenzialmente smorzate a scale più piccole della distanza che il fotone percorre durante la ricombinazione. Lo studio di questo effetto è molto importante perché permette di ottenere informazioni sulla curvatura dell'universo. Infatti il libero cammino medio dei fotoni è determinato dalla quantità di barioni presenti nel plasma. Il momento della ricombinazione influisce sulla distanza percorsa dal fotone una volta che non ha più interagito con la materia. Dato che, come verrà approfondito più avanti, questa distanza è un parametro fondamentale per la determinazione della curvatura dell'universo, si possono usare la posizione e l'altezza dei picchi come test della curvatura dell'universo.

Concludiamo questo paragrafo sottolineando che la presenza di oscillazioni acustiche nelle buche di potenziale mostra che prima della ricombinazione la distruzione di temperatura variava da punto a punto. Una volta avvenuta la ricombinazione i fotoni hanno cominciato a propagarsi verso di noi, da tutti i punti dell'universo, e noi li rileviamo come piccole variazioni angolari.

## 5.2 L'approssimazione di tight coupling

Una soluzione esatta per l'evoluzione delle perturbazioni cosmologiche del plasma primordiale implica la risoluzione delle equazioni accoppiate che descrivono l'evoluzione di tutte i componenti dell'universo presenti. Studiando queste equazioni si ottengono una serie di equazioni differenziali non risolubili analiticamente ma solo per integrazione numerica. Si può a questo paragonare il nostro modello con i dati ottenuti per verificarne la bontà. Infatti, fino alla ricombinazione, sia i neutrini che la dark matter non interagiscono con fotoni e barioni gravitazionalmente, mentre questi ultimi sono strettamente accoppiati (*tightly coupled*) via scattering Compton. Queste considerazioni ci indicano a supporre che sia possibile descrivere l'universo studiando l'evoluzione di un unico fluido di barioni e fotoni strettamente accoppiati (*tightly coupled baryon-photon fluid*) in buche di potenziale generate dalle altre componenti presenti.

Procediamo quindi sviluppando un modello di fluido ideale per il nostro plasma, ovvero un fluido a densità costante e viscosità nulla, che non presenta cioè sforzi di taglio. Nel nostro caso trascuriamo la presenza dei barioni e consideriamo quindi un fluido di soli fotoni. Intuitivamente possiamo rappresentare il nostro sistema con una massa legata ad una molla posta su un piano orizzontale. Una volta applicata una perturbazione alla condizione di equilibrio, la massa comincia ad oscillare per effetto della forza elastica. Nel nostro modello, la forza elastica che tende ad opporsi all'inerzia della massa è rappresentata dalla pressione della radiazione. Se trascuriamo gli effetti gravitazionali, le due equazioni classiche che ci permettono di studiare

il comportamento del nostro fluido sono l'equazione di continuità e l'equazioni di Eulero.

Prima di ottenere le equazioni che descrivono il fluido primordiale, sottolineiamo che lo studio delle oscillazioni acustiche verrà condotto nello spazio dei vettori d'onda  $\vec{k}$  nei quali si scompongono le componenti di Fourier delle funzioni che vogliamo studiare. A questo punto, poiché, come vedremo le equazioni che descrivono la dinamica del plasma sono lineari, approssimazione possibile in quanto le perturbazioni che vogliamo studiare sono molto piccole, ciascuna componente di Fourier evolve in modo indipendente. Infine, il nostro sistema gode della simmetria per rotazioni, una funzione dipenderà dalla variabile  $\vec{k}$  solo attraverso il suo modulo  $k$ . La prima equazione fondamentale per la nostra analisi è quella che descrive le perturbazioni di temperatura nello spazio di Fourier:

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{3}kv_\gamma \quad (5.1)$$

Questa equazione, che risulta simile alla più nota equazione di continuità, si ottiene studiando l'equazione di Einstein-Boltzmann nell'approssimazione di tight coupling del nostro fluido di barioni e fotoni. Per una comprensione qualitativa della stessa, si può riconoscere che, nello spazio di Fourier, ad una divergenza  $\nabla_x$  nello spazio ordinario, corrisponde il prodotto scalare del vettore l'onda  $k$ . Inoltre, la derivata temporale  $\dot{\Theta}$  si suppone presa rispetto al tempo conforme  $\eta \equiv \int dt/a(t)$ . Lavorando in unità naturali, in cui la velocità della luce è normalizzata,  $\eta$  corrisponde alla massima distanza comovente che una particella può avere percorso da un tempo  $t = 0$  detto *orizzonte delle particelle*. E infine, si è implicitamente usata l'approssimazione che la velocità dei fotoni abbia la stessa direzione  $\vec{k}$  e in particolare abbia espressione:  $\vec{v} = -iv_\gamma\vec{k}$ . Il coefficiente numerico  $1/3$  deriva dalla proporzionalità tra la densità numerica di fotoni  $n_\gamma$  e il cubo della temperatura  $T$ .

La seconda importante equazione che descrive la dinamica del fluido ideale è l'equazione di Eulero, approssimazione per un fluido non viscoso delle equazioni di Navier-Stokes che rappresentano analiticamente la conservazione del momento in fluidodinamica. Essa ha la forma dell'espressione (2.2). Nel nostro caso, la densità di momento dei fotoni corrisponde a  $(\rho_\gamma + p_\gamma)v_\gamma$  e vale l'equazione di stato  $p_\gamma = \rho_\gamma/3$ . Sfruttando il fatto che stiamo trascurando l'effetto della gravità e in assenza di forze viscosi, il gradiente della pressione presente nell'equazione di Eulero si riferisce alla sola pressione di radiazione e vale che  $\nabla p_\gamma = \nabla \rho_\gamma$ . Infine, ricordando che  $\rho_\gamma \propto T^4$  si ottiene l'equazione di Eulero:

$$\dot{v}_\gamma = k\Theta. \quad (5.2)$$

Differenziando l'equazione di continuità (5.1) e sostituendo al posto di  $\dot{v}_\gamma$  l'equazione di Eulero, otteniamo un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo grado a coefficienti costanti, la classica equazione che mi descrive un oscillatore armonico:

$$\ddot{\Theta} + c_s^2 k^2 \Theta = 0 \quad (5.3)$$

dove con  $c_s$  si è indicata la velocità del suono nel fluido, ovvero la velocità con cui si propagano le oscillazioni acustiche nel nostro modello di fluido a barioni liberi (barino-free fluid) e che vale  $c_s \equiv \sqrt{\dot{p}/\dot{\rho}} = 1/\sqrt{3}$ .



Nel nostro modello, quindi, il gradiente di pressione di radiazione esercitata dai fotoni tende a far tornare il plasma nella configurazione di equilibrio del sistema in opposizione ad una qualche perturbazione iniziale. Fisicamente, queste oscillazioni di temperatura sono rappresentate dal riscaldamento o raffreddamento del plasma che rispettivamente si comprime o dilata a passaggio dell'onda acustica.

Assumendo trascurabile la perturbazione alla velocità iniziale, abbiamo che al momento della ricombinazione, la distribuzione di temperatura soddisfa la seguente equazione, soluzione della (5.3):

$$\Theta(\eta_*) = \Theta(0) \cos(ks_*), \quad (5.4)$$

dove  $s = \int c_s d\eta \approx \eta/\sqrt{3}$  è la distanza che il suono ha percorso in un intervallo di tempo  $\eta$ . Il pedice  $*$  indica variabili calcolate al momento della ricombinazione dell'idrogeno. Da questa semplice equazione possiamo già riconoscere due punti molto importanti: la prima è che nel limite  $ks \ll 1$ , ovvero nel limite di grandi scale, la perturbazione tende alle condizioni iniziali del plasma (che mostra che sfruttando i dati del satellite COBE sulle anisotropie a grandi scale, abbiamo una misura diretta delle condizioni iniziali dell'universo). Il secondo aspetto che si può ricavare da questa, pur molto semplificata equazione, è che, a scale inferiori, l'ampiezza delle componenti di Fourier con cui abbiamo sviluppato le fluttuazioni di temperatura, oscillano nel tempo. Abbiamo ottenuto come risultato quando descritto in precedenza: modi di oscillazione che al momento della ricombinazione erano al loro massimo o minimo di oscillazione corrispondono a picchi dello spettro di potenza misurato dal CMB. La condizione di minimo o massimo per l'equazione (5.4) corrisponde a valori di  $k$  per cui:

$$k_n = \frac{n\pi}{s_*} \quad (5.5)$$

con  $n$  numero naturale.

Questa ultima equazione è molto importante e mostra che i picchi seguono una legge armonica, in cui al raddoppiare di  $k$  l'onda acustica ha oscillato ad una frequenza doppia. Vale infatti la consueta legge di dispersione:

$$\omega = kc_s. \quad (5.6)$$

### 5.3 Tight coupling con forzante gravitazionale

Nel precedente paragrafo è stato modellizzato il plasma primordiale nell'approssimazione del fluido perfetto e in assenza di forze esterne. Questo modello è chiaramente non realistico ma ci ha permesso di ottenere informazioni importanti almeno sul primo picco dello spettro di potenza. Per studiare i successivi picchi è necessario aggiungere nuovi parametri che rendono più realistico il nostro modello.

Per visualizzare il modello che andiamo a realizzare, possiamo immaginare di prendere il sistema massa molla del precedente paragrafo, e metterlo in verticale. Ora sulla massa agisce sia la tensione della molla che la forza di gravità. L'introduzione della forzante va a cambiare il punto di equilibrio, ovvero l'estensione massima della molla. Come si vede nella foto, introducendo l'interazione gravitazionale, i fotoni e i barioni oscillano immersi in buche di potenziale. I barioni tendono a cadere verso il

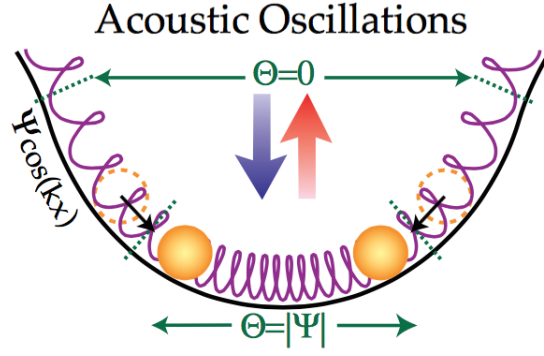


Figura 5.2: Oscillazioni del fluido in buche di potenziale

punto di equilibrio del potenziale gravitazionale mentre la radiazione dei fotoni tende a far espandere il fluido. Come spiegato nel paragrafo sull'inflazione, le fluttuazioni scalari durante l'inflazione sono state convertite in anisotropie di temperatura dalla presenza dell'interazione gravitazionale. Tuttavia, l'effetto gravitazionale sulle fluttuazioni di temperatura non si riduce a questo. Infatti, studiando le interazioni tra barioni e fotoni nel plasma primordiale, vediamo che il potenziale newtoniano e la curvatura spaziale alterano le oscillazioni acustiche. Questo fenomeno può essere rappresentato aggiungendo al precedente modello di oscillatore armonico, una forzante  $F$  data dall'interazione gravitazionale.

Per caratterizzare il nostro sistema introduciamo quindi l'equazione di Boltzmann che descriverà poi il comportamento di ciascuna specie presente e interagente:

$$\frac{df}{dt} = C[f]. \quad (5.7)$$

Nella parte destra dell'equazione di Boltzmann sono raccolte tutte le possibili collisioni tra le componenti del sistema e ovviamente avrà un'espressione in generale molto complessa. Il suo sviluppo può essere trovato in molti lavori (si veda ad esempio [2]), l'equazione finale che si ottiene, e che descrive il nostro sistema è la seguente:

$$\dot{\Theta} + ik\mu(\Theta + \Psi) = -\dot{\Phi} + \dot{\tau} \left[ \Theta_0 - \Theta - i\mu v_b - \frac{1}{10} P_2(\mu) \Theta_2 \right] \quad (5.8)$$

Dove abbiamo indicato l' $l$ -esimo momento di multipolo del campo di temperatura definito come segue:

$$\Theta_l \equiv \frac{1}{(-l)!} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} P_l(\mu) \Theta(\mu) \quad (5.9)$$

Anche in questo caso, la derivata è fatta rispetto al tempo conforme  $\eta$ ,  $\mu$  è definito dalla seguente relazione:

$$\mu = \frac{\vec{k} \cdot \hat{p}}{k} \quad (5.10)$$

da cui si vede che  $\mu$  rappresenta il coseno dell'angolo compreso tra il vettore di propagazione  $\vec{k}$  e la direzione dei fotoni  $\hat{p}$ .  $\mu$  rappresenta quindi la direzione di propagazione dei fotoni.  $\dot{\tau}$  è il cammino ottico differenziale associato allo scattering

Thomson che descrive le collisioni del nostro sistema.  $\Phi$  rappresenta le perturbazioni intrinseche della metrica,  $\Psi$  il potenziale Newtoniano.

A questa equazione sono associate l'equazione di continuità e l'equazione di Eulero per i barioni presenti nel fluido. Prima della ricombinazione, il cammino ottico differenziale  $\hat{\tau}$  è molto elevato, questo implica che lo scattering Thomson è estremamente rapido ed efficace, dove con efficace si intende che è molto più rapido dei tempi caratteristici degli effetti gravitazionali. Nell'approssimazione tight coupling del fluido, abbiamo quindi che lo scattering è isotropo e questo comporta che le equazioni di Boltzmann ed Eulero diventano:

$$\Theta_0(\eta) = \Theta(\eta, \mu) + i\mu\Theta_1(\eta) \quad (5.11)$$

$$\Theta_1 = v_b \quad (5.12)$$

$$\Theta_l = 0 \quad , \quad \text{per } l \geq 2 \quad (5.13)$$

$$\dot{\Delta}_b = \frac{3}{4}\dot{\Delta}_\gamma \quad (5.14)$$

dove  $\Delta = \delta\rho/\rho$  per i vari costituenti del plasma. Queste equazioni mostrano che la radiazione è isotropa rispetto al sistema di riferimento dei barioni.

Sostituendo nuovamente quanto appena ottenuto nelle equazioni di Boltzmann ed Eulero, otteniamo:

$$\dot{\Theta}_0 = \frac{k}{3}\Theta_1 - \dot{\Phi} \quad (5.15)$$

$$\dot{\Theta}_1 = -\frac{\dot{R}}{1+R}\Theta_1 + \frac{1}{1+R}k\Theta_0 + k\Psi \quad (5.16)$$

dove  $R$  è il rapporto tra la densità dei barioni e quella dei fotoni  $R = 3\rho_b/4\rho_\gamma$ . Queste sono le due nuove equazioni di continuità e di Eulero per il nostro fluido sottoposto all'azione della gravità. Per una comprensione qualitativa, riconosciamo che la prima equazione è consistente con l'equazione ottenuta nel capitolo precedente con l'aggiunta del termine  $-\dot{\Phi}$  che deriva da un'effetto di redshift dato dalla perturbazione del fattore di scala da parte del potenziale Newtoniano.

Per quanto riguarda l'equazione di Eulero, vediamo subito che nell'approssimazione in cui la componente di barioni è trascurabile ( $R = 0$ ), essa coincide a quella del precedente paragrafo, con l'aggiunta di un nuovo termine dal gradiente del potenziale  $k\Psi$ . Questo mostra che l'effetto della gravità sulle oscillazioni acustiche è quello di contrastare il gradiente di pressione  $k\Theta$  agendo da forzante sull'oscillatore armonico. Le due forze sono in equilibrio quando  $\Theta + \Psi = 0$ .

Unendo i due risultati si ottiene una nuova equazione per l'oscillatore armonico che descrive le oscillazioni acustiche del fluido di cui stiamo studiando la dinamica (si omette il pedice 0 per indicare la fluttuazione di temperatura):

$$\ddot{\Theta} + c_s^2 k^2 \Theta = -\frac{k^2}{3}\Psi - \ddot{\Phi}. \quad (5.17)$$

In uno spazio piatto  $\Psi$  e  $\Phi$  sono costanti. Sfruttando nuovamente che  $R = 0$ , otteniamo per la velocità del suono  $c_s^2 = 1/3$ . Il nuovo oscillatore è allora identico a

quello precedente in cui  $\Theta$  è stato sostituito con  $\Theta + \Psi$ .

La soluzione per un'epoca dominata dalla materia è allora:

$$\begin{aligned} [\Theta + \Psi](\eta) &= [\Theta + \Psi](\eta_{md}) \cos(ks) \\ &= \frac{1}{3} \Psi(\eta_{md}) \cos(ks), \end{aligned} \quad (5.18)$$

dove  $\eta_{md}$  indica l'inizio dell'era dominata dalla materia.

Per capire l'ultimo passaggio, è necessario fare una breve parentesi sulle condizioni iniziali del plasma. Sappiamo infatti che la teoria dell'inflazione prevede fluttuazioni di curvatura scale-invariant. Ciò che vogliamo fare è correlare questo fatto alle fluttuazioni iniziali di temperatura. Iniziamo riprendendo l'equazione di Poisson per il potenziale gravitazionale  $k^2\Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho$  che ci dice che a grandi scale, ovvero piccoli valori di  $k$ , le fluttuazioni di densità, e quindi di temperatura, diventerebbero trascurabili rispetto al potenziale Newtoniano. Si è implicitamente usata l'approssimazione di campo debole  $\Psi \approx -\Phi$  e le relazioni per la metrica  $g_{\mu\nu}$  perturbata al primo ordine. In queste condizioni, la relatività generale prevede che, a causa della fluttuazione della parte temporale della metrica, si verifichi uno shift temporale dato da  $\delta t/t = \Psi$ . Sappiamo che per un corpo nero la densità di energia è proporzionale a  $T^4$ . In un universo in espansione con fattore di scala  $a$ , abbiamo che  $\rho \propto a^{-4}$  il che implica che la temperatura del CMB varia con l'inverso del fattore di scala. Ma quest'ultimo è funzione del tempo secondo la relazione  $a \propto t^{2/[3(1+P/\rho)]}$ . Si ottiene quindi che la frazione di temperatura del CMB data dalla variazione del potenziale Newtoniano è:

$$\Theta = -\frac{\delta a}{a} = -\frac{2}{3} \left(1 + \frac{p}{\rho}\right)^{-1} \frac{\delta t}{t} \quad (5.19)$$

In conclusione quindi, per un'epoca dominata dalla materia, si ottiene che uno shift temporale produce una variazione di temperatura di:

$$\Theta = -\frac{2}{3} \Psi \quad (5.20)$$

Da queste brevi considerazioni qualitative, abbiamo ottenuto l'importante risultato che le perturbazioni iniziali al campo di temperatura sono strettamente connesse con le perturbazioni primordiali del potenziale gravitazionale. La teoria dell'inflazione prevede l'invarianza di scala sia per le fluttuazioni di temperatura che di curvatura spaziale. Infine, sostituendo l'ultima equazione trovata nella prima delle (6.18) otteniamo la soluzione finale.

Guardando il risultato finale ottenuto (5.18), ci si accorge che la quantità che oscilla è la somma  $[\Theta + \Psi]$ . Essa allora può essere pensata come una *temperatura efficace* che ci dice che, una volta avvenuta la ricombinazione, i fotoni devono uscire dalle buche di potenziale, e nel fare ciò subiscono una variazione di temperatura dovuta al redshift pari a  $\Delta T/T = \Psi$ . Prendendo il limite per grandi scale dell'equazione (5.18) ritroviamo il noto effetto Sachs-Wolfe, in cui la variazione di temperatura efficace vale  $\Psi/3$  e che spiega come mai a regioni molto dense corrispondano punti più freddi del cielo. Infatti, per  $\Psi < 0$ , anche se  $\Theta$  è positivo,  $\Theta + \Psi$  è negativo.

## Capitolo 6

# Picchi dello spettro di potenza angolare

### 6.1 Il primo picco

Il primo picco è sicuramente il più evidente dello spettro di potenza del CMB. Per molti anni molti esperimenti hanno condotto misure per determinare con precisione i suoi parametri, come la sua posizione e la sua altezza. Nonostante alcune difficoltà nel confrontare risultati di esperimenti con diverse calibrazioni, nel 2000 gli esperimenti Boomerang e Maxima riuscirono ad ottenere risultati soddisfacenti misurando l'intero primo picco. Fu localizzata la posizione del primo picco nello spettro di potenza a  $l \sim 200$ .

Per quanto discusso nel precedente paragrafo, sappiamo che il primo picco corrisponde a quel modo normale di oscillazione in cui il fluido è stato sottoposto ad una compressione in cui massimo è avvenuto al momento della ricombinazione.

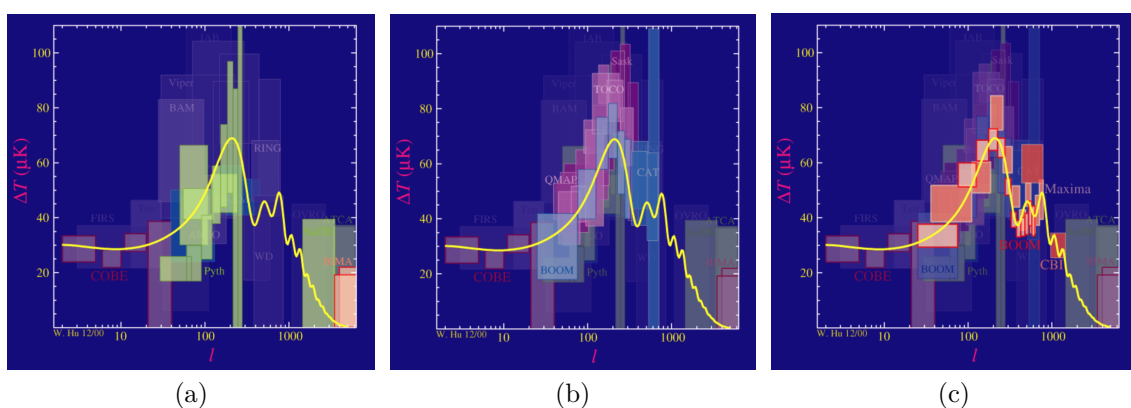


Figura 6.1: Progressione delle misure del primo picco

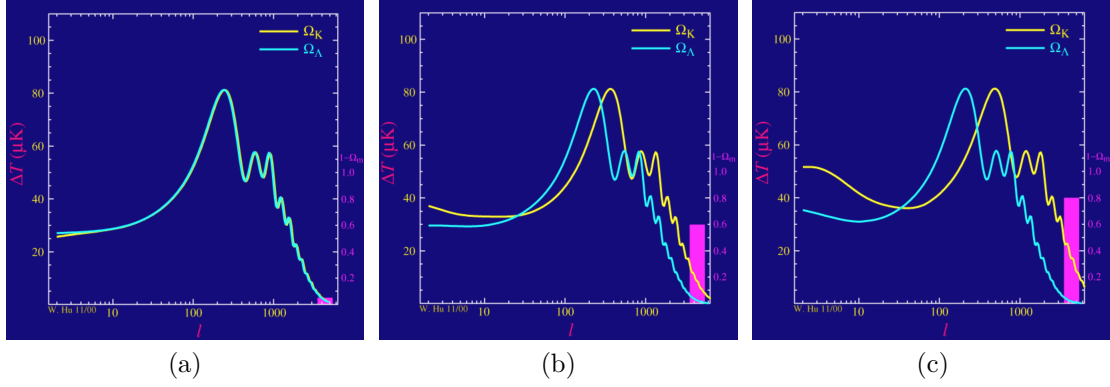


Figura 6.2: Posizione del primo picco al variare della curvatura

## 6.2 Implicazioni della posizione del primo picco

La determinazione della posizione del primo picco è importantissima, in quanto essa ha delle implicazioni fondamentali nel modello cosmologico standard. Essa infatti dipende sensibilmente dalla curvatura spaziale dell'universo. Una curvatura negativa implicherebbe che la posizione del primo picco dovrebbe localizzarsi ad angoli più piccoli e quindi ad  $l$  maggiori e ad angoli maggiori ed  $l$  minori se l'universo fosse chiuso.

Per capire il perché di questo fatto, si ricordi che disomogeneità spaziali di temperatura della CMB di lunghezza d'onda  $\lambda$  corrispondono ad anisotropie angolari proiettate sulla sfera dell'osservatore di scala angolare

$$\theta \approx \frac{\lambda}{D} \approx \frac{\lambda}{\eta_0} \quad (6.1)$$

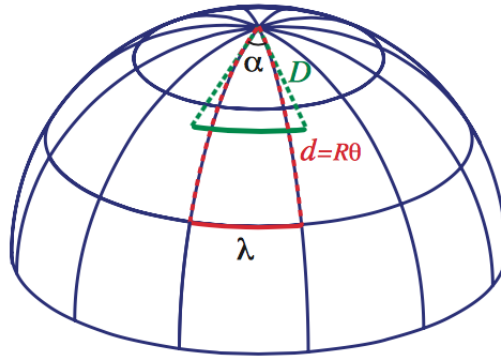
dove con  $D(z)$  si è indicato il diametro angolare comoviente, ovvero la distanza tra l'osservatore e il punto di redshift  $z$ , mentre per la seconda approssimazione, si è sfruttato che in un universo spazialmente piatto vale l'approssimazione per la distanza comoviente tra l'osservatore e la superficie  $D_* = \eta_0 - \eta_* \approx \eta_0$  con  $\eta_0 \equiv \eta(z=0)$ . Di conseguenza, quando espandiamo il campo di temperatura in multipoli di momento  $l$  nella superficie sferica, allora ad una scala angolare  $\theta$  corrisponde circa ad un multipolo  $l \sim 1/\theta$ . Abbiamo dunque:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \simeq \frac{2\pi}{\theta D_*} \simeq \frac{l}{D_*} \quad (6.2)$$

Sfruttando questo risultato, ricordando la relazione per  $k_n$  (5.5), si ottiene la seguente relazione approssimata per le posizioni dei picchi sullo spettro di potenza angolare:

$$l_n \simeq D_* k_n \equiv \frac{n\pi D_*}{s_*} \quad (6.3)$$

In un universo piatto dominato dalla materia, abbiamo che  $\eta \propto (1+z)^{-1/2}$ . Essendo  $\eta_*/\eta_0 \approx 1/30 \approx 2^\circ$ , otteniamo per la posizione del primo picco  $l_1 \sim 200$ .



In uno spazio curvo il diametro angolare non coincide più con la distanza coordinata, rendendo il primo picco sensibile alla curvatura dell'universo. Supponiamo innanzitutto che l'universo sia chiuso con raggio di curvatura  $R = H_0^{-1} |\Omega_{tot} - 1|^{-1/2}$ . Supponiamo di essere sulla superficie sferica con l'osservatore situato su un polo. La luce viaggia lungo i meridiani. In questo spazio, una scala  $\lambda$  ad una latitudine fissata data dall'angolo polare  $\theta$ , sottende un angolo  $\alpha = \lambda/R \sin \theta$ . Per  $\alpha \ll 1$ , in uno spazio euclideo,  $D = R \sin \theta$ , anche se la distanza coordinata lungo l'arco è  $d = \theta R$ . Ma allora:

$$D = R \sin(d/R). \quad (6.4)$$

Questo risultato ci fa capire che oggetti in un'universo chiuso sono più lontani di quello che appaiono. Infatti, la stessa scala comovente, sottende un angolo maggiore per un'universo chiuso rispetto ad uno piatto. Lo stesso ragionamento si può condurre per universi aperti, sostituendo il seno con il seno iperbolico e si otterrà che oggetti in questo universo sono più vicini di quello che appaiono.

### 6.3 Il secondo picco

Il secondo picco nello spettro di potenza del CMB corrisponde ad un modo normale che ha compiuto una compressione e una rarefazione prima della ricombinazione dell'idrogeno. Anche il suo studio permette di ottenere risultati molto interessanti. Cominciamo con l'osservare che la sua posizione armonica rispetto al primo picco è una conseguenza immediata del fatto che l'esistenza del primo picco sia dovuto ad onde sonore date dalle perturbazioni del potenziale gravitazionale nell'universo primordiale. Il principale contributo al modello cosmologico che deriva dallo studio del secondo picco è la misura della quantità di materia ordinaria presente nell'universo. Infatti, i barioni del plasma tendono a cadere verso il punto di equilibrio della buca di potenziale in cui sono immersi andando ad aggiungere massa inerziale al sistema oscillante. Per comprendere le conseguenze di questo fatto, torniamo alla rappresentazione massa-molla del nostro modello. Se aggiungiamo massa al nostro corpo sospeso in verticale e vincolato ad una molla, esso cadrà maggiormente verso il basso prima di rimbalzare in alto, raggiungendo però lo stesso punto di minima estensione, dato dalle condizioni iniziali. Essendo che i picchi dispari sono associati alla compressione del plasma, essi hanno un'altezza maggiore, data da questo effetto dei barioni. I picchi pari invece sono associati alla rarefazione del plasma. Inoltre, sem-

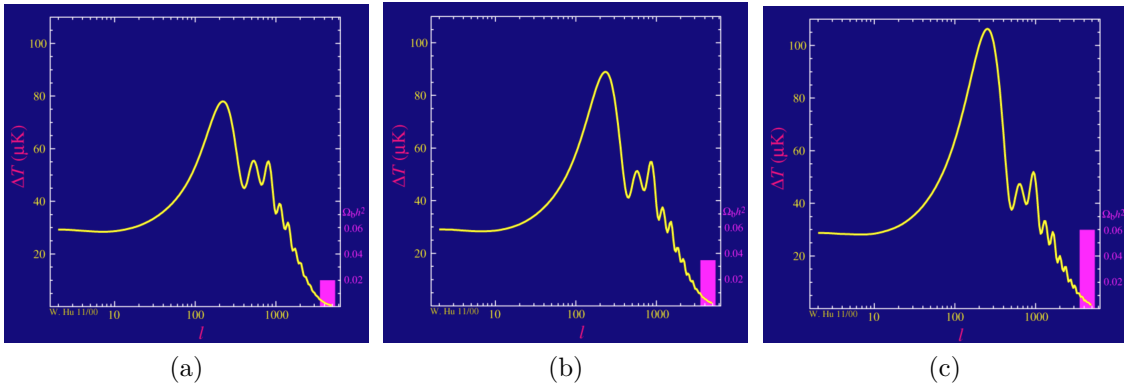
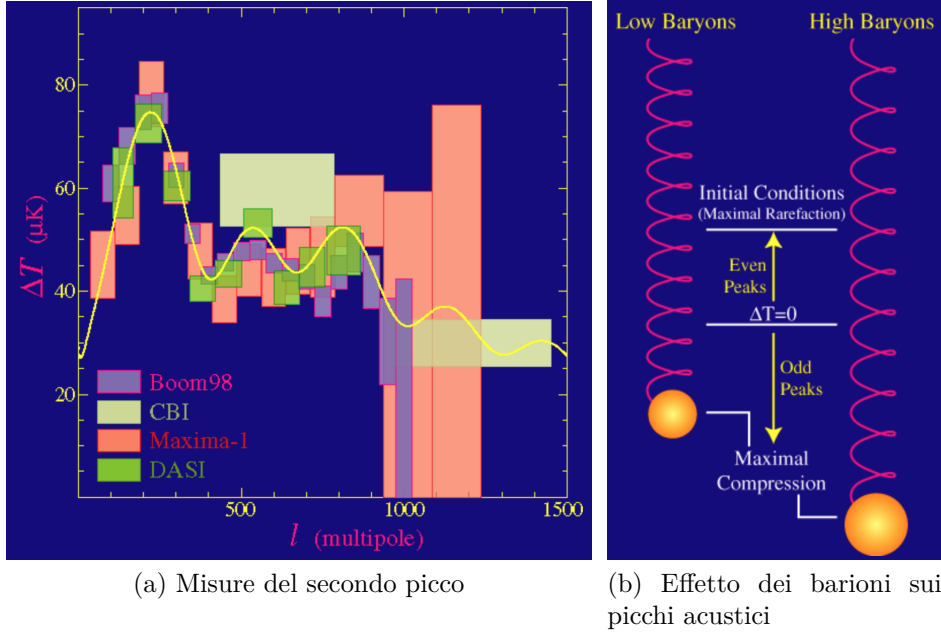


Figura 6.3: Variazione dei picchi all'aumentare della densità di barioni

pre pensando al sistema massa-molla, vediamo che aggiungendo massa l'oscillazione non è più simmetrica rispetto a sistema con la massa precedente, ma risulta shiftato: durante la fase di compressione si avrà una variazione di temperatura maggiore rispetto al momento di rarefazione. Essendo che lo spettro di potenza è sensibile solo al valore assoluto delle fluttuazioni di temperatura, capiamo come mai il primo e il terzo picco sono maggiori del secondo. Questo ragionamento mostra che il secondo picco permette di determinare la densità barionica dell'universo.

Un'altra conseguenza della presenza dei barioni è la diminuzione della frequenza di oscillazione a causa dell'aumento della massa. Questo comporta uno shift della posizione dei picchi verso multipoli ad  $l$  maggiore.

La densità di barioni è una delle quantità che grazie ai dati del CMB si possono misurare con maggiore precisione. I dati attuali mostrano che la densità di barioni è  $\Omega_b h^2 \simeq 0,02$ , dove con  $\Omega_b$  si definisce la frazione rispetto alla densità critica  $\Omega_{crit}$  che vale 1 per un universo piatto.



# Bibliografia

- [1] Wayne Hu and Scott Dodelson, “*Cosmic Microwave Background Anisotropies*” arXiv:astro-ph/0110414 doi: 10.1146/annurev.astro.40.060401.093926.
- [2] W. Hu, N. Sugiyama, “*Anisotropies in the cosmic microwave background: an analytic approach*” 1995. Ap. J. **444**:489-506. doi: 10.1086/175624.
- [3] Peter Coles, Francesco Lucchin “*Cosmology The Origin and Evolution of Cosmic Structure Second Edition*” John Wiley and Sons, Ltd Baffins Lane, Chichester, West Sussex PO19 1UD, England ISBN 0 471 48909 3.
- [4] Francesco Lucchin “*Introduzione alla cosmologia*”, (1990) Nicola Zanichelli S.p.A., Bologna, ISBN: 9788808012432.
- [5] Scott Dodelson “*Modern Cosmology*”, (2003) ACADEMIC PRESS, Elsevier Inc., San Diego, ISBN-13: 978-0-12-219141-1, ISBN-10: 0-12-219141-2.
- [6] Pijush K. Kundu, Ira M. Cohen and David R. Dowling “*Fluid Mechanics (Fifth Edition)*”, (2012) ACADEMIC PRESS, Elsevier Inc., Oxford UK, ISBN: 978-0-12-382100-3.
- [7] Giovanni Montani, Marco Valerio Battisti, Riccardo Benini, Giovanni Imponente, “*Primordial Cosmology*”, (2011) World Scientific Pub Co Inc, ISBN-10: 9814271004, ISBN-13: 978-9814271004.
- [8] Maurizio Gasperini “*Lezioni di cosmologia teorica*”, (2012) Springer-Verlag Italia S.r.l, Milano, ISBN: 978-88-470-2483-0.
- [9] Hu Wayne’s Tutorials: <http://background.uchicago.edu/index.html>.
- [10] Wayne Hu and Martin White “*The Cosmic Symphony*” Scientific American 290N2 **44** (2004).