UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA GESTIONALE

CALCOLO DEL TEMPO DI CICLO DI UN AS/RS TRIDIMENSIONALE DIVISO IN CLASSI

RELATORE: Prof. Mauro Gamberi

LAUREANDO: Filippo Trevisanato

ANNO ACCADEMICO: 2010/2011

INDICE

Sommario:.....3
Introduzione:.....4
Capitolo 1: I Magazzini Industriali.....6
Capitolo 2: Assunzioni e Modello Generale.....13
Capitolo 3: Proprietà e Modello Equivalente.....20
Capitolo 4: Esempi Pratici e Conclusione.....26
Bibliografia:.....31

SOMMARIO

La questione dell'immagazzinamento in generale e in particolare dei sistemi automatizzati di deposito/recupero AS/RS, ovvero Automated Storage/Retrieval Systems, sta ricevendo recentemente molte attenzioni da operazioni di ricerca del management.
Tra le molte strategie per gestire un magazzino automatico c'è quella basata sulla divisione in classi degli oggetti da stoccare. Secondo tale strategia, il magazzino è diviso in diversi settori in cui vengono depositate le diverse classi di oggetti. Questi gruppi di oggetti vengono assegnati alle varie aree in base alla loro domanda, ovvero tanto più è alto l'indice di ricambio di un certo gruppo, più sarà vicino al punto I/O (Input/Output).
Per una strategia basata sulla divisione in classi è fondamentale definire il limite delle varie aree in modo che minimizzino il tempo di viaggio atteso.
Andremo ad analizzare l'impatto del layout sul tempo di viaggio di un trasloelevatore, e scopriremo come dev'essere dimensionato un magazzino automatico affinché il tempo di ciclo sia il minore possibile, comparando il risultato con altri ottenuti seguendo altre strategie di immagazzinamento.

INTRODUZIONE

Compatti, tridimensionali, Automated Storage/Retrieval Systems (AS/RS) stanno diventando sempre più diffusi per l'immagazzinamento di prodotti con relativa bassa domanda per unità di carico.

Non esiste una formula per decidere se e quando è vantaggioso avere un magazzino completamente automatico. Ogni azienda ha le proprie esigenze e obiettivi legati al tipo di produzione. Il magazzino è dunque l'ultima fase della modernizzazione dell'azienda: più alto è il grado di automazione delle linee di produzione e più sarà sentito il problema dell'automazione dei trasporti interni e del magazzino. Ciò risulta tanto più vero quanto più i prodotti sono a basso costo e dunque l'incidenza dei tempi e quindi dei costi di trasporto può essere sensibile. Le esigenze più comuni che potrebbero consigliare di investire in un magazzino automatico sono:

- avere un'alta densità di riempimento di un locale, sfruttandone al meglio l'altezza;
- ridurre il numero di addetti al trasporto interno ed ottimizzare il flusso di merci in entrata e in uscita;
- aumentare qualità e quantità del picking, specialmente se il magazzino è del tipo interoperazionale, asservito alla produzione;
- conoscere quantità e disponibilità delle merci in giacenza e il loro grado di movimentazione nel tempo, fissando le regole per un controllo gestionale automatico.

Le tipiche operazioni di un trasloelevatore automatico sono:

1. prendere un contenitore e andare a riporlo in un vano assegnato;
2. andare a prelevare da un vano assegnato il relativo contenitore depositato e portarlo alla base di smistamento;
3. fare in sequenza le operazioni 1) e 2);
4. passare un contenitore da un vano assegnato ad un altro assegnato.

Nella gestione del magazzino intensivo si può avere:

- prelievo di unità complete di stoccaggio (ad esempio pallet);
- prelievo frazionato o parziale, ossia in quantità inferiori alla unità di stoccaggio (picking).

La struttura mobile di un trasloelevatore, detta piattaforma, può compiere contemporaneamente due movimenti, uno orizzontale ed uno verticale, a cui consegue un moto composto lungo un tragitto inclinato rispetto ai due movimenti di base. Ciò permette di indirizzare il trasloelevatore verso una qualunque posizione, esso provvede a depositare od a prelevare l'unità di carico. L'indirizzamento è ottenuto con dispositivi particolarmente precisi lungo gli assi x e y.

Oltre ai movimenti longitudinali del trasloelevatore, lungo l'asse x, e verticale del telaio mobile, lungo l'asse y, è da tenere presente il movimento trasversale lungo l'asse z delle forche telescopiche per introdurre il carico trasportato nello scaffale o per prelevarlo. Mentre i movimenti lungo gli assi x e y possono avere luogo contemporaneamente, quello lungo l'asse z ha luogo solo a macchina ferma e correttamente posizionata rispetto al vano dello scaffale od al punto di scarico/prelievo delle unità di carico in corrispondenza delle testate degli scaffali.

La fase preliminare del progetto di un magazzino automatizzato servito da trasloelevatori consiste nella stima dei tempi di ciclo. Dipende dalle velocità dei sistemi di movimentazione e dalla capacità, ma anche dalla dimensione del sistema, dal punto di partenza del trasloelevatore e dalla linea di gestione del deposito e del prelievo. Se nel caso di un sistema bidimensionale il problema è stato ampiamente affrontato, così non è nel caso avessimo a che fare con un magazzino tridimensionale. In questo caso le unità di carico vengono disposte secondo la frequenza di prelievo in maniera decrescente, ovvero quelle che più frequentemente vengono depositate/prelevate saranno poste vicino al punto I/O (Input/Output, punto di partenza e arrivo del trasloelevatore). Seguendo questa disposizione l'area della scaffalatura viene divisa in classi, definire i limiti delle varie aree in modo che minimizzino il tempo di viaggio atteso del mezzo di deposito è molto importante, e come tale ha attratto attenzione della letteratura riguardante lo studio dei magazzini automatizzati.

Data la complessità del modello, vengono effettuate alcune ipotesi preliminari senza perdere la soluzione ottima per dimostrare che la scaffalatura dev'essere square-in-time SIT (le due dimensioni orizzontale e verticale della scaffalatura sono uguali) e la lunghezza della corsia del trasportatore tra i corridoi dev'essere la più grande. Con queste assunzioni, il modello proposto viene semplificato in un equivalente modello di programmazione non lineare che può essere risolto numericamente per ottenere la soluzione ottima. Gli scaffali ottimali, con immagazzinamento basato sul turnover totale, possono ottenere significanti riduzioni (fino al 68%, dipende dalla ripidità della curva ABC) nel tempo di ciclo atteso rispetto a soluzioni che prevedono una strategia basata sull'immagazzinamento casuale.

CAPITOLO 1

I Magazzini Industriali

1.Il Ruolo del magazzino

Per magazzino si intende quella struttura logistica in grado di ricevere le merci, custodirle, conservarle e renderle disponibili per lo smaltimento e la consegna.
Negli anni il ruolo del magazzino è mutato molto, è infatti passato da essere uno dei tanti tasselli del sistema logistico ad essere centro fondamentale di tale sistema per far sì che quest'ultimo sia in grado di erogare prodotto giusto nel posto giusto, al momento giusto, e al costo giusto.
Il sistema magazzino può essere rappresentato come una black box che permette di svincolare, sia da un punto di vista quantitativo sia da un punto di vista qualitativo i flussi in ingresso dai flussi in uscita.
In questo modo è possibile generare economie sostanziali: svincolandosi temporalmente è possibile generare economie dal punto di vista degli approvvigionamenti (sconti, promozioni) o dell'ottimizzazione dei lotti di produzione, mentre svincolando i flussi da un punto di vista qualitativo è possibile effettuare operazioni di consolidamento dei carichi che permettono di ridurre notevolmente l'incidenza dei costi di trasporto.
Un magazzino può essere visto come un insieme integrato di aree funzionali, all'interno delle quali vengono svolte specifiche operazioni e processi. L'organizzazione e la progettazione razionale e coerente delle diverse aree e l'integrazione tra le stesse è la base che permette al magazzino di svolgere la sua funzione in maniera efficiente ed efficace.
Le principali aree che compongono un magazzino sono: ricevimento merce, stoccaggio, allestimento ordini e spedizione. L'importanza di ogni singola area dipende dal tipo di magazzino, in base a questo viene implementata la successione delle aree. Il layout è impostato in modo da minimizzare i costi di movimentazione del magazzino.

2.Tipologie di magazzino

Le configurazioni si sono evolute coi bisogni crescenti di avere a disposizione sempre più merci in tempi sempre più brevi.
Tra le prime soluzioni c'è il magazzino statico a catasta (Figura 1.1). In questa tipologia le unità di carico sono stoccate le une sulle altre costituendo delle cataste. I pallet devono essere reversibili e sovrapponibili, devono sostenere il carico senza schiacciarsi.

Figura 1.1: Magazzino a catasta.

Questa soluzione è caratterizzata da un elevato sfruttamento superficiale e volumetrico, costi ridotti ed è altamente riconfigurabile senza il bisogno di troppi oneri.
D'altra parte però essa possiede bassa selettività (unità di carico direttamente accessibili), bassa ricettività (quantità complessivamente stoccata) e esigua potenzialità di movimentazione (unità di carico movimentate nell'unità di tempo, calcolata in [u.d.c/ora]).
Un secondo esempio di magazzino statico è quello a scaffalatura, di tipo drive in o drive through (Figura 1.2).

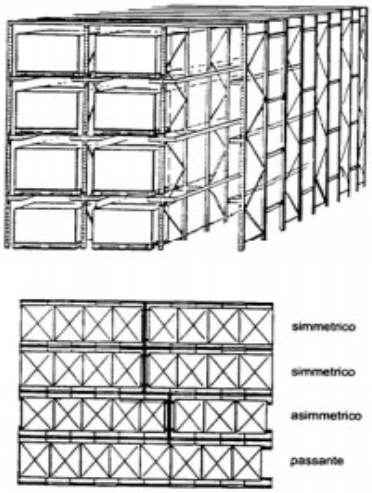

Figura 1.2: Magazzino drive in o drive through.

Il magazzino a scaffalatura viene utilizzato quando le unità di carico non sono direttamente sovrapponibili e quindi vengono poste in scaffalature metalliche.
Si distingue la tipologia drive in dalla drive through a seconda che l'immissione o estrazione del pallet avvenga dallo stesso lato o dal lato opposto; nel primo caso, drive in, si avrà una gestione LIFO (Last In First Out) (Figura 1.3), mentre nell'altro, drive through, si ha una gestione FIFO (First In First Out) delle movimentazioni.
Magazzini drive in o drive through sono caratterizzati da un maggior utilizzo volumetrico rispetto alla catasta (vengono raggiunte altezze maggiori) e da costi più elevati a causa delle scaffalature. La selettività rimane ridotta come nella configurazione precedente.

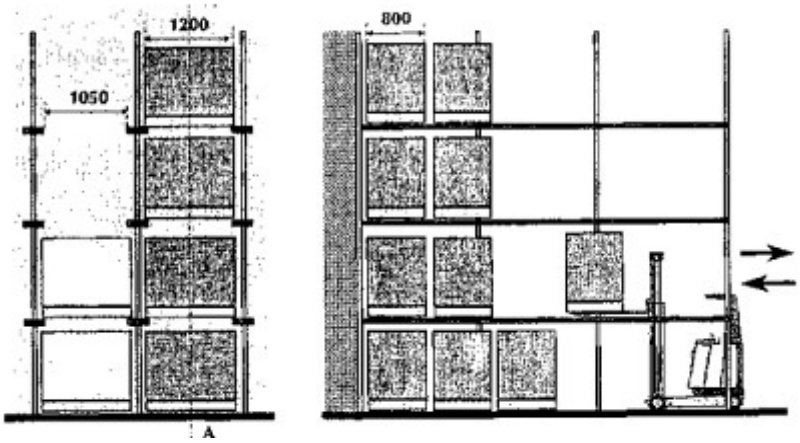

Figura 1.3: Magazzino drive in.

I magazzini con scaffalature bifrontali (Figura 1.4) si distinguono dai precedenti in quanto i correnti sono dei veri e proprio ripiani. Sono sempre magazzini statici, ma con selettività unitaria: tutte le unità di carico sono direttamente accessibili per le operazioni di prelievo.

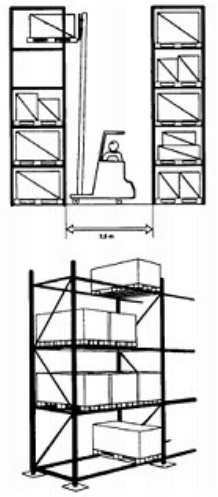

Figura 1.4: Magazzini a scaffalature bifronti

Sotto questo punto di vista è una soluzione più efficiente, però è accompagnata da costi più elevati e da un coefficiente di utilizzazione superficiale e uno volumetrico ridotti.
Col tempo si è passati da queste soluzioni statiche (che però non sono state abbandonate, anzi) ad altre dette dinamiche.
Una prima tipologia è a scaffali traslanti, la cui schematizzazione è data in Figura 1.5.

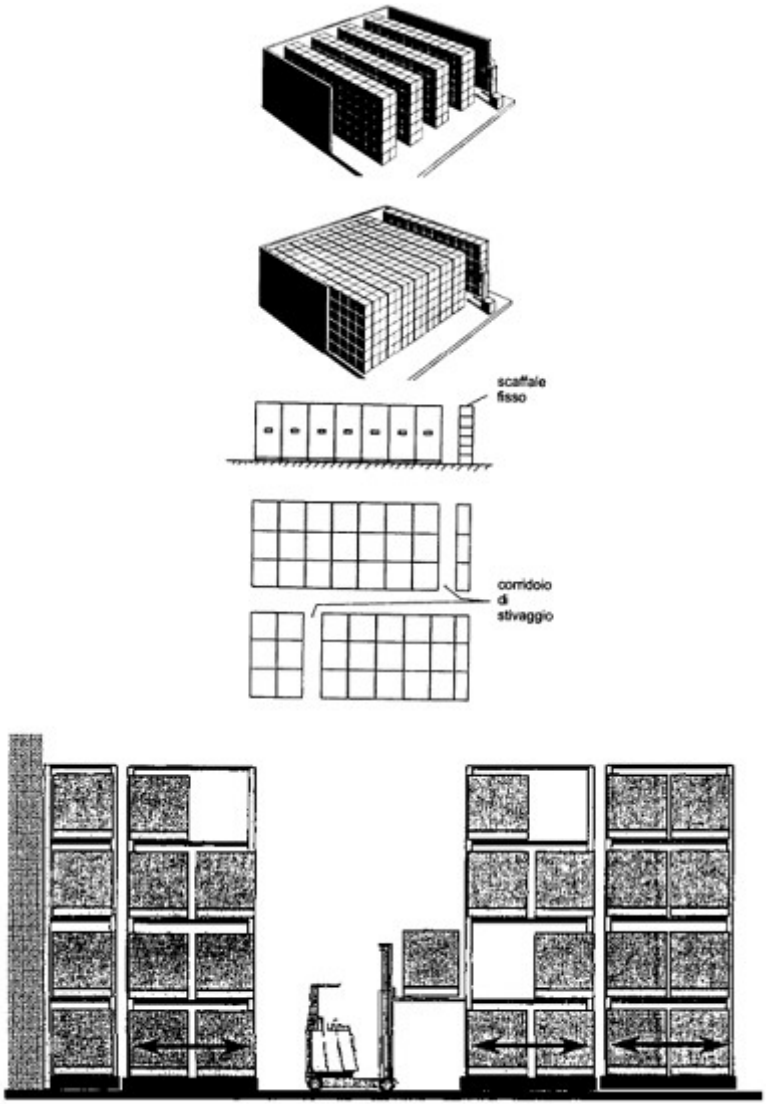

Figura 1.5: Magazzini a scaffalature mobili.

Tale soluzione è consigliata quando abbiamo a che fare con unità di carico con movimentazioni ridotte. Inoltre i costi di investimento sono elevati. Di contro però questo tipo di soluzione permette di ottenere elevati valori dei coefficienti di utilizzazione superficiale e volumetrico, infatti questa soluzione si rivela vincente in spazi ridotti. Anche la selettività rimane ridotta.

Particolarmente adatto alla gestione FIFO delle unità di carico sono i magazzini dinamici live storage. In questo caso le scaffalature sono inclinate e su di esse vengono fatte scorrere i pallet, per facilitare tale operazione vengono installati dei rulli sul piano di scorrimento, così come mostrato in Figura 1.6. Le operazioni di stoccaggio e prelievo vengono effettuate da parti opposte.

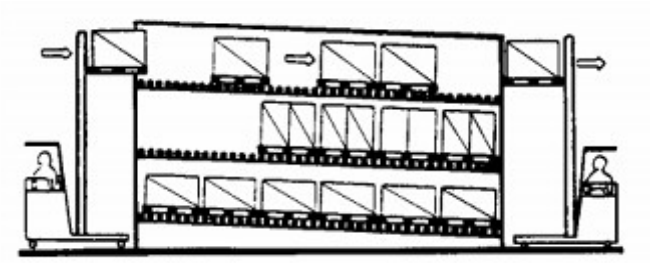

Figura 1.6: Magazzino dinamico live storage.

Ad ogni canale delle scaffalature è assegnato una ben precisa linea d'ordine, in questo modo la selettività è elevata a livello di gruppo ma è ridotta se valutata per singola unità.
Tale soluzione è efficace solamente in caso avessimo un elevato numero di codici stoccati per ogni gruppo.
Le stesse considerazioni fatte per i magazzini dinamici live storage vengono riportate per i magazzini dinamici in contropendenza (Figura 1.7). L'unica differenza è rappresentata dalla diversa gestione della movimentazione, infatti essendo che le operazioni di prelievo e stoccaggio vengono effettuate dalla stessa parte, tale configurazione è indicata per una gestione LIFO delle scorte.

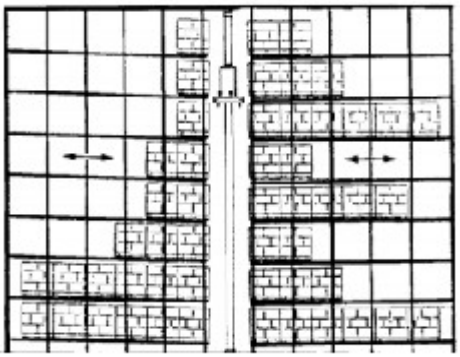

Figura 1.7: Magazzini dinamici con canali in contropendenza.

3.Magazzini Automatizzati

I magazzini automatici sono una particolare tipologia di magazzini statici. Essi sono magazzini bifrontali in cui i carrelli a forche utilizzati per le operazioni di carico e scarico sono sostituiti da trasloelevatori che si muovono lungo le corsie come mostrato in Figura 1.8.

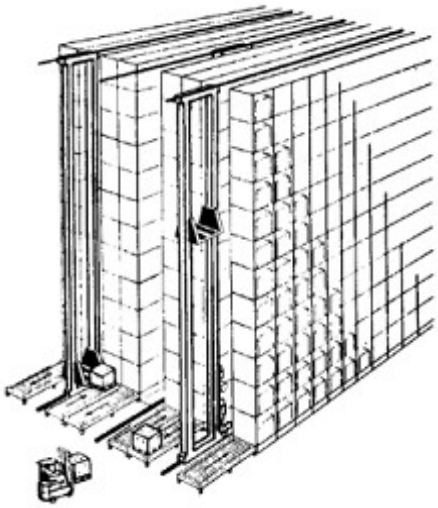

Figura 1.8: Magazzini automatici serviti da trasloelevatori.

In alcuni casi il trasloelevatore serve un solo corridoio, in altri invece si può muovere tra le varie corsie tramite un binario trasversale posto in testa al magazzino.
Si tratta di sistemi a selettività unitaria, dal momento che ogni vano è direttamente accessibile, i quali si prestano ad essere gestiti automaticamente tramite una unità computerizzata centrale. Il sistema di controllo gestisce il magazzino e organizza le movimentazioni sulla base di specifiche politiche impostate dall'esterno (FIFO, LIFO, ecc.), ottimizzando le variabili di processo (es. percorrenze).
Il sistema consente di ottenere ottimizzazione dei processi di movimentazione, di stoccaggio dinamico e di preparazione degli ordini, ed inoltre:

- miglioramento della qualità del prodotto finito.
- Integrità dei dati identificativi del prodotto.
- Nessun problema di commistione dei lotti di prodotto.
- Agevole gestione del sempre maggiore numero di referenze di prodotti nella preparazione degli ordini e delle unità di imballo.
- Piena tracciabilità del prodotto, migliorando anche il servizio post-vendita.

- Gestione logistica in tempo reale, piena integrazione con i sistemi informatizzati del cliente.
- Layout compatto, viene ottimizzato l'uso dello spazio disponibile.
- Operatività garantita anche in gravose condizioni ambientali.
- Eliminazione del lavoro fisico ripetitivo.
- Maggiore sicurezza operativa.
- Riduzione dei costi di manodopera e degli oneri operativi con un rapido ritorno dell'investimento.

Il limite è rappresentato dall'elevato costo connesso alla struttura del magazzino e al sistema di movimentazione e controllo, che rende di fatto questi sistemi convenienti solo nel caso sia richiesta una ricettività ed una potenzialità di movimentazione particolarmente elevata. Il sistema inoltre è particolarmente rigido, dal momento che riconfigurazioni del magazzino sono possibili solo a fronte di modifiche onerose dal punto di vista economico.
Quest'ultima considerazione ne ha limitato l'espansione in Italia, in molti casi i magazzini automatizzati sono stati riconvertiti a magazzini tradizionali oppure l'uso è stato limitato alla gestione di una parte dei flussi di codici.

CAPITOLO 2

Assunzioni e Modello Generale

2.1 Assunzioni

Il sistema studiato è identico a quello analizzato da Le-Duc et al. (2005). Vengono seguite le assunzioni di Le-Duc et al. (2005) (vedi anche Hausman et al. 1976, Bozer and White 1984, 1990, 1996 Ashayeri et al. 2002, Foley et al. 2004):

- lo scaffale in 3D è considerato avere una facciata rettangolare continua, in cui il punto I/O è allocato nel più basso angolo sinistro dello scaffale.
- La macchina S/R (storage/retrieval) è capace di muoversi simultaneamente in direzione orizzontale e verticale a velocità costanti. Perciò, il tempo richiesto per raggiungere qualsiasi punto dello scaffale è rappresentato nella metrica di Chebyshev.
- Il nastro trasportatore può muovere i carichi in profondità lungo una direzione ortogonale, indipendentemente dal movimento della macchina S/R, a velocità costante.
- La macchina S/R opera in base ad un solo comando (più fermate lungo la corsia non sono autorizzate), ovvero può effettuare un solo deposito o un singolo ritiro in un viaggio di andata e ritorno dal punto I/O.
- Ogni pallet tiene un tipo di oggetto. Tutti i vani di deposito e i pallet hanno la stessa dimensione. Quindi tutti i vani possono essere usati per depositare un pallet. Gli oggetti sono riforniti in accordo al modello EOQ (Economic Order Quantity).
- Seguendo Hausman et al. (1976), assumiamo che il pick-up/deposit (P/D) time del trasloelevatore per prelevare o depositare un pallet può essere ignorato. Questo è giustificato se il P/D time è trascurabile confrontato al tempo di ciclo totale.
- Viene utilizzata una strategia di deposito basata sul turnover totale. Con essa, la posizione in cui verrà depositato ogni pallet è determinata dalla sua relativa attività tra tutti i pallet dello scaffale, distribuiti dai pallet più attivi a quelli meno attivi partendo dal punto I/O. Un tipo di oggetto può avere più pallet.

2.2 Notazioni e Modello Generale

Il sistema che andremo ad analizzare è come quello descritto in Figura 2.1. Esso consiste di una scaffalatura tridimensionale, del punto I/O, di una macchina S/R, e di un meccanismo di trasporto con nastri trasportatori, responsabili del movimento in profondità, operanti in coppie in congiunzione con un meccanismo elevante. I pallet entrano e lasciano il sistema attraverso il punto I/O e vengono immagazzinati nello scaffale. La macchina S/R può muoversi nel piano e contemporaneamente alzarsi occupandosi dei movimenti nelle direzioni verticale e orizzontale. Alle spalle dello scaffale un semplice, economico montacarichi solleva il pallet verso i nastri trasportatori attraverso cui fluisce verso il limite frontale dello scaffale. Conseguentemente, le unità di carico possono ruotare ed essere recuperate individualmente dalla macchina S/R.

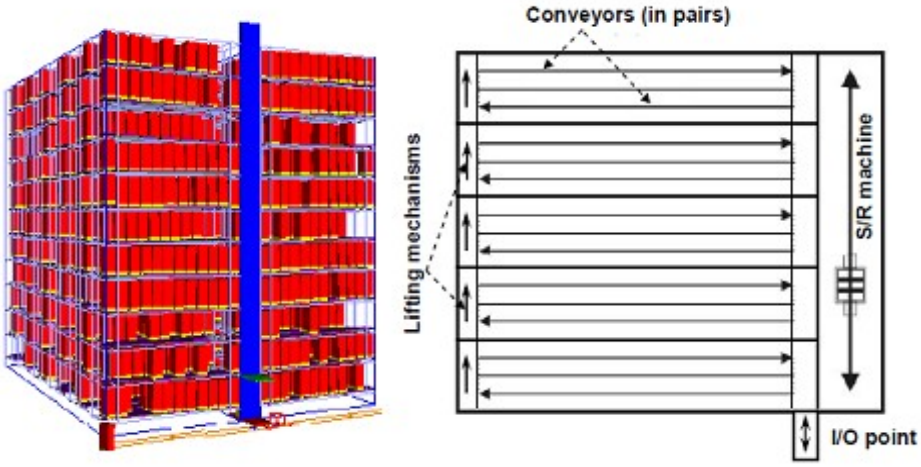

Figura 2.1: Un compatto AS/RS con nastri trasportatori per i movimenti in profondità

La lunghezza (L), l'altezza (H) dello scaffale, e il perimetro (di lunghezza 2P) del nastro trasportatore sono le tre dimensioni ortogonali del sistema, in cui la velocità del trasportatore e le velocità del trasloelevatore in direzione orizzontale e verticale sono s_c, s_h, s_v rispettivamente.

Per standardizzare il sistema, definiamo le seguenti quantità:

$t_c = \frac{2*P}{s_c}$: lunghezza (in tempo) del nastro trasportatore.

$t_h = \frac{L}{s_h}$: lunghezza (in tempo) dello scaffale;

$t_v = \frac{H}{s_v}$: altezza (in tempo) dello scaffale.

$T = max\{t_h, t_v, t_c\}$

$b = min\left\{\frac{t_h}{T}, \frac{t_v}{T}, \frac{t_c}{T}\right\}$. $0 < b \leq 1$ Quindi $b = 1$ se $t_h = t_v = t_c$.

a è l'elemento rimanente (compreso tra *b* e 1) del set $\left\{\frac{t_h}{T}, \frac{t_v}{T}, \frac{t_c}{T}\right\}$,

quindi $0 < b \leq a \leq 1$.

Per determinare le dimensioni ottime della scaffalatura, supponiamo che *H*L*P* sia costante. Ne risulta quindi che $t_h t_v t_c = V$ ed è positivo e costante.

Assumiamo che la locazione richiesta della macchina S/R è rappresentata da (*x, y, z*), e *X,Y* e *Z* riferiscono alle direzioni di movimento di tale macchina o del nastro trasportatore: la lunghezza maggiore è imputata alla direzione *Z*, la più corta alla dimensione *Y* e la rimanente alla direzione *X*. Il tempo di viaggio di una macchina S/R per un ciclo semplice (ESC) è composto dai seguenti componenti:

- Tempo necessario per andare dal punto I/O alla posizione in cui dobbiamo prelevare o scaricare l'unità di carico e per attendere che il pallet, carico o vuoto, sia disponibile (se il tempo di circolazione del nastro trasportatore è maggiore rispetto al tempo di viaggio della macchina S/R), *W.* In altre parole *W,* nella metrica di Chebyshev, è il massimo delle seguenti tre quantità:
  - tempo necessario per viaggiare orizzontalmente dal punto I/O fino a destinazione;
  - tempo necessario per viaggiare verticalmente dal punto I/O a destinazione;
  - tempo necessario al nastro per portare il pallet dalla posizione corrente fino a destinazione.
- Tempo necessario alla macchina S/R per tornare dalla posizione richiesta al punto I/O, *U*.

Indi, il tempo di viaggio atteso può essere espresso come:

$$ESC = E(W) + E(U). \quad (1)$$

Per calcolare ESC nel caso di una strategia basata sul turnover totale, si sfrutta i risultati raggiunti da Hausman et al. (1976). Nella loro pubblicazione, modellano la ben conosciuta curva ABC come:

$$G(i) = i^{\delta}, \; 0 < \delta \leq 1, \quad (2)$$

dove *i* è la percentuale di oggetti inventariati, con $0 < i \leq 1$, δ è la pendenza della curva

ABC, e G(*i*) è la percentuale cumulata di domanda misurata in pallet caricati pieni. Dato il turnover totale, per una percentuale *i* degli oggetti, derivano il tempo di viaggio atteso di andata per il viaggio del trasloelevatore dal punto I/O ad una casuale posizione P/D (pick/drop) come:

$$T'_T = \frac{\int_{j=0}^{1} \lambda(j) y(j) dj}{\int_{j=0}^{1} \lambda(j) dj} \tag{3}$$

In cui *λ(j)* è il turnover del j-esimo pallet nello scaffale, e

$$\lambda(j) = \left(\frac{2*\delta}{K}\right)^{1/2} j^{\frac{\delta-1}{\delta+1}}, 0 < j \leq 1, \tag{4}$$

dove K è il rapporto tra costo dell'ordinare e costo del tenere, che viene assunto essere uguale per tutti gli oggetti. *y(j)* è il tempo per un solo viaggio che impiega il trasloelevatore per viaggiare dal punto I/O alla locazione *j* e $0 < y(j) \leq 1$. Per scaffali bidimensionali SIT, *y(j)* è uguale a $j^{1/2}$ (Figura 2.2). Infatti, consideriamo una locazione nel j-esimo frattile o percentile della distribuzione della distanza. Queste locazioni *j%* devono essere sistemate in un quadrato, quindi il tempo impiegato dal trasloelevatore per andare dal punto I/O a qualsiasi punto (x_1, x_2) dello scaffale è $Max[x_1, x_2]$. Le dimensioni di questo quadrato devono quindi essere $j^{1/2}$ per $j^{1/2}$, in modo che l'area totale sia *j*. Quindi la distanza (nella metrica di Chebyshev) della locazione sotto considerazione dev'essere pari a $j^{1/2}$. Dunque, in generale il tempo di viaggio per raggiungere la locazione nel j-esimo percentile è:

$$y(j) = j^{1/2}, \quad \text{con} \quad 0 < j \leq 1.$$

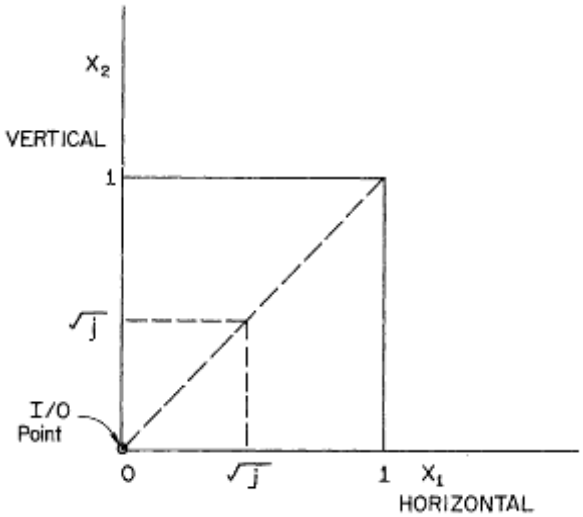

Figura 2.2: Rappresentazione continua di uno scaffale bidimensionale

Invece per i magazzini tridimensionali, essendo $W = max\{t_h, t_v, t_c\}$ e $0 < b \leq a \leq 1$, il calcolo di *y(j)* dev'essere classificato in tre casi (vedi Figura 2.3).

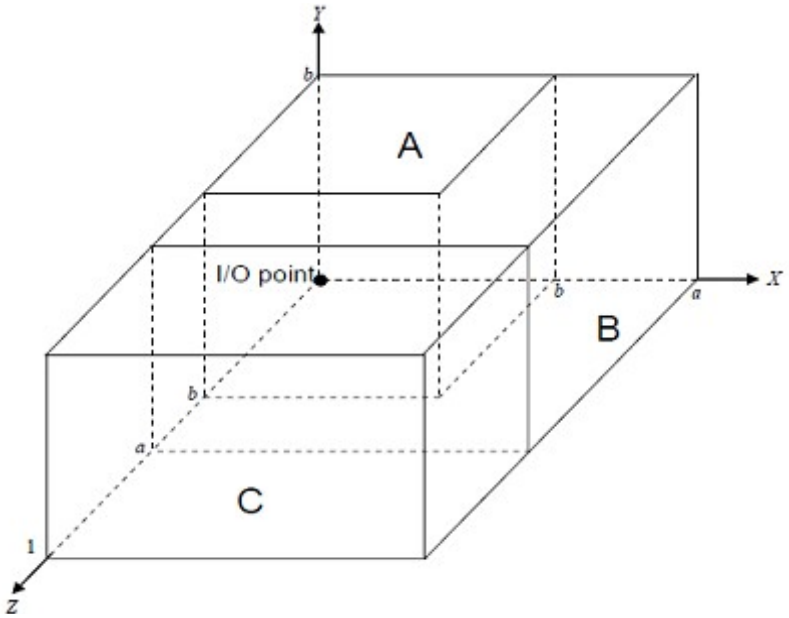

Figura 2.3: Divisione in tre classi di un magazzino tridimensionale

Caso 1: Poniamo $j \leq b^3/(ab) = b^2/a$; oppure $0 < W \leq b$. Consideriamo un punto (*x, y, z*) nel j-esimo frattile o percentile nella regione A di Figura 2.3. Dalla definizione che abbiamo dato della distribuzione, queste locazioni sono quelle più vicine al punto I/O. Esse devono essere sistemate in un cubo nel tempo (essendo usata la metrica di Chebyshev). Quindi, dato che l'area totale del magazzino è *ab*, il volume di questo cubo è *j* moltiplicato per l'area totale, ovvero *abj*. Dunque, per $j \leq b^2/a$, il tempo di viaggio dal punto I/O alla locazione del j-esimo percentile è

$$y(j) = (abj)^{1/3} \quad . \tag{5}$$

Caso 2: Un punto (*x, y, z*) ubicato nella regione B (Figura 2.3) soddisfa il percentile $j \geq b^3/(ab) = b^2/a$ e $j \leq a^2 b/(ab) = a$, oppure $b \leq W \leq a$ dove $W = max(x, y)$. Le locazioni devono essere ordinate in un blocco rettangolare nel tempo con $\sqrt{aj} * b * \sqrt{aj}$ in orizzontale, verticale e in profondità (cosicché il volume totale sia *abj* e $\sqrt{aj} \geq b$). Quindi, per $b^2/a \leq j \leq a$, il tempo di viaggio dal punto I/O alla locazione del j-esimo percentile è

$$y(j) = \sqrt{aj}. \tag{6}$$

Caso 3: Qualsiasi punto (*x, y, z*) allocato nella regione C (Figura 2.3) soddisfa $a \le j \le 1$ oppure $a \le W \le 1$ dove W = z . Le locazioni del j-esimo percentile devono essere sistemate in un blocco rettangolare nel tempo con $a * b * j$ in orizzontale, verticale e in profondità (cosicché il volume totale sia *abj*). Quindi per $a \le j \le 1$, il tempo di viaggio dal punto I/O alla locazione del j-esimo percentile è

$$y(j) = j. \tag{7}$$

Considerando le Equazioni (5), (6) e (7) otteniamo che *y(j)* risulta essere

$$y(j) = \begin{cases} (abj)^{1/3} & 0 < j \le b^2/a \\ (aj)^{1/2} & b^2/a < j \le a \\ j & a < j \le 1 \end{cases}. \tag{8}$$

Sostituendo (8) in (3), e moltiplicando il risultato per *T*, otteniamo

$$E(W) = T\,x \frac{\int_{j=0}^{b^2/a} \lambda(j) \sqrt[3]{abj}\, dj + \int_{j=b^2/a}^{a} \lambda(j) \sqrt{aj}\, dj + \int_{j=a}^{1} \lambda(j)\, j dj}{\int_{j=0}^{1} \lambda(j) dj}$$

$$\Rightarrow \quad E(W) = T\left(\frac{s\, b^{2s+1}}{(2s+1)(3s+1)a^s} + \frac{s\, a^{s+1}}{(s+1)(2s+1)} + \frac{s}{s+1} \right) \tag{9}$$

dove $s = 2\delta/(1+\delta)$.

E(U) può essere ottenuto in modo simile negando il movimento in profondità.

Senza perdere generalità, supponiamo $t_h \ge t_v$. Poniamo $\beta = t_v / t_h$, che rappresenta la forma dello scaffale nelle direzioni di movimento del trasloelevatore. Standardizzando $t_h = 1$, e con una procedura simile a quella usata per ottenere (8), abbiamo

$$y(j) = \begin{cases} (\beta j)^{1/2} & 0 < j \le \beta \\ j & \beta < j \le 1 \end{cases} \tag{10}$$

Sostituendo (10) in (3) e moltiplicando il risultato per T, *E(U)* è ottenuto come

$$E(U)=\frac{\int_{j=0}^{\beta}\lambda(j)(\beta j)^{1/2}dj+\int_{j=\beta}^{1}\lambda(j)j\,dj}{\int_{j=0}^{1}\lambda(j)dj}t_h=\frac{s\left(2s+1+\beta^{s+1}\right)}{(s+1)(2s+1)}t_h, \tag{11}$$

Dalle formule (1), (9) e (11), il modello matematico per determinare il magazzino ottimale può essere determinato seguendo il modello generale (denotato come GM, General Model).

2.2.1. Modello GM

Minimizzare

$$ESC(a,b,T)=E(U)+E(W)$$
$$=\frac{s\left(2s+1+\beta^{s+1}\right)}{(s+1)(2s+1)}t_h+\left(\frac{sb^{2s+1}}{(s+1)(3s+1)a^s}+\frac{sa^{s+1}}{(s+1)(2s+1)}+\frac{s}{s+1}\right)T$$

soggetta a $abT^3=V$ (12)

$$\beta=\begin{cases} b/a & se\ \ t_c=T \\ b & se\ \ t_c=aT \\ a & se\ \ t_c=bT \end{cases}$$

$$t_h=\begin{cases} aT & se\ \ t_c=T \\ T & se\ \ t_c=aT \\ T & se\ \ t_c=bT \end{cases}$$

dove $T > 0$ e $0 < b \leq a \leq 1$.

Quando i valori ottimale delle variabili a, b, T del modello GM possono essere determinati, il tempo di viaggio per una certa capacità dello scaffale V è minimizzato. Per trovare queste soluzioni ottime, distinguiamo i seguenti tre casi:

- la lunghezza del nastro trasportatore è la dimensione maggiore (indicata con CL), oppure $t_c=T$ e $t_v:t_h:t_c\equiv b:a:1;$
- la lunghezza del nastro è la dimensione media (indicata con CM), oppure $t_c=aT$ e $t_v:t_h:t_c\equiv b:1:a;$
- la lunghezza del nastro è la dimensione più corta (indicata con CS), oppure $t_c=bT$ e $t_v:t_h:t_c\equiv a:1:b.$

CAPITOLO 3

Proprietà e modello equivalente

3.1 Modello equivalente

Risolvere il modello GM basandosi sui tre casi CL, CM, e CS è difficile. Quindi si sfruttano alcuni teoremi per semplificarli. Il Teorema 2 dimostra che i casi CS e CM possono essere trascurati. Il Teorema 3 dimostra che la forma ottima del magazzino è SIT. Questi Teoremi ci lasciano un modello equivalente non lineare più facile da risolvere rispetto al modello GM.
Per prima cosa, riformuliamo il modello GM per i tre casi: CL, CM e CS rispettivamente.
Per il caso CL, $t_c = T$ e il corrispondente modello può essere presentato come:

Minimizzare

$$\mathrm{ESC}_{CL}(a,b) = \frac{V^{1/3} a^{-s} s}{(1+s)(1+2s)(1+3s)(ab)^{1/3}} \left(a^s + a^{1+s} + a^{1+2s} + b^{1+s} + b^{1+2s} + 5a^s s + 5a^{1+s} s + 3a^{1+2s} s + 3b^{1+s} s + b^{1+2s} s + 6a^s s^2 + 6a^{1+s} s^2 \right) \tag{13}$$

con $0 < b \le a \le 1$.
Per il caso CM, $t_c = aT$ e il corrispondente modello diventa:

Minimizzare

$$\mathrm{ESC}_{CM}(a,b) = \frac{V^{1/3} a^{-s} s}{(1+s)(1+2s)(1+3s)(ab)^{1/3}} \left(2a^s + a^{1+2s} + a^s b^{1+s} + b^{1+2s} + 10a^s s + 3a^{1+2s} s + 3a^s b^{1+s} s + b^{1+2s} s + 12a^s s^2 \right) \tag{14}$$

con $0 < b \le a \le 1$.
Per il caso CS, $t_c = bT$ e il modello corrispondente diventa:

Minimizzare

$$\mathrm{ESC}_{CS}(a,b) = \frac{V^{1/3} a^{-s} s}{(1+s)(1+2s)(1+3s)(ab)^{1/3}} \left(2a^s + 2a^{1+2s} + b^{1+2s} + 10a^s s + 6a^{1+2s} s + b^{1+2s} s + 12a^s s^2 \right) \tag{15}$$

con $0 < b \le a \le 1$.

Indichiamo (a_l, b_l), (a_m, b_m) e (a_s, b_s) i valori delle variabili all'ottimo dei Modelli (13), (14) e (15), in cui la funzione obiettivo raggiunge i valori minimi indicati con $ESC^*_{CL}(a_l, b_l)$, $ESC^*_{CM}(a_m, b_m)$, e $ESC^*_{CS}(a_s, b_s)$, rispettivamente.

Il valore ottimo di (a, b), indicato con (a^*, b^*), del Modello GM soddisfa la seguente condizione:

$$(a^*, b^*) = \arg\min_{a,b} \{ESC^*_{CS}(a_s, b_s), ESC^*_{CM}(a_m, b_m), ESC^*_{CL}(a_l, b_l)\}. \tag{16}$$

Il valore obiettivo minimo del Modello GM è $ESC^*(a^*, b^*, T^*)$ dove $T^* = V^{1/3}/(a^* b^*)^{1/3}$.

3.2 Teoremi per la semplificazione del Modello GM

Teorema 1. Il valore minimo della funzione obiettivo $ESC^*_{CM}(a_m, b_m)$ del modello (14) è:

i. uguale al valore minimo della funzione obiettivo $ESC^*_{CS}(a_s, b_s)$ del modello (15) se $a_s = b_s = a_m = b_m$.

ii. minore del valore minimo della funzione obiettivo $ESC^*_{CS}(a_s, b_s)$ negli altri casi.

Dimostrazione. Affinché la soluzione ottima del modello (15) sia (a_s, b_s), il valore della sua funzione obiettivo è

$$\begin{aligned} \mathrm{ESC}^*_{CS}(a_s, b_s) = \frac{V^{1/3} a_s^{-s} s}{(1+s)(1+2s)(1+3s)(a_s b_s)^{1/3}} \big(&2a_s^s + 2a_s^{1+2s} + b_s^{1+2s} \\ &+ 10a_s^s s + 6a_s^{1+2s} s + b_s^{1+2s} s + 12a_s^s s^2\big) \end{aligned} \tag{17}$$

I vincoli sono gli stessi per i modelli (14) e (15), quindi (a_s, b_s), è una soluzione accettabile del modello (14), e il valore corrispondente della funzione obiettivo del modello (14) è

$$\begin{aligned} \mathrm{ESC}_{CM}(a_s, b_s) = \frac{V^{1/3} a_s^{-s} s}{(1+s)(1+2s)(1+3s)(a_s b_s)^{1/3}} \big(&2a_s^s + a_s^{1+2s} + a_s^s b_s^{1+s} + b_s^{1+2s} + 10a_s^s s \\ &+ 3a_s^{1+2s} s + 3a_s^s b_s^{1+s} s + b_s^{1+2s} s + 12a_s^s s^2\big) \end{aligned} \tag{18}$$

Dalle equazioni (17) e (18), abbiamo che $ESC^*_{CS}(a_s, b_s) - ESC_{CM}(a_s, b_s)$ risulta essere:

$$\Rightarrow \quad \frac{V^{1/3} a_s^{-s} s}{(1+s)(1+2s)(1+3s)(a_s b_s)^{1/3}} \left(a_s^{1+2s} - a_s^s b_s^{1+s} + 3a_s^{1+2s} s - 3a_s^s b_s^{1+s} s\right). \tag{19}$$

Inoltre, essendo *a,b,s,* e $V > 0$, abbiamo

$$\frac{V^{1/3} a_s^{-s} s}{(1+s)(1+2s)(1+3s)(a_s b_s)^{1/3}} > 0. \tag{20}$$

Quando $b_s = a_s$ per a e b nei modelli (14) e (15), $a_s^{1+2s} - a_s^s b_s^{1+s} = 0$ e $3a_s^{1+2s} s - 3a_s^s b_s^{1+s} s = 3a_s^s s\left(a_s^{1+s} s\right) = 0$. Considerando le equazioni (20) e (19), abbiamo $ESC_{CS}^*(a_s, b_s) - ESC_{CM}(a_s, b_s) = 0$. Se (a_s, b_s) è uguale a (a_m, b_m) e $b_s = a_s$, allora (a_s, b_s) è anche la soluzione ottima del Modello (14) e $ESC_{CM}^*(a_m, b_m) = ESC_{CM}(a_s, b_s)$. In questo caso $ESC_{CM}^*(a_m, b_m) = ESC_{CS}^*(a_s, b_s)$ è valido. (i) è provato.

Se invece $b_s < a_s$, nella Equazione (19), $a_s^{1+2s} - a_s^s b_s^{1+s} = a_s^s\left(a_s^{1+s} + b_s^{1+s}\right) > 0$ e $3a_s^{1+2s} s - 3a_s^s b_s^{1+s} s = 3a_s^s s\left(a_s^{1+s} s\right) > 0$. Considerando le Equazioni (20) e (19), abbiamo $ESC_{CS}^*(a_s, b_s) - ESC_{CM}(a_s, b_s) > 0$. Affinché (a_m, b_m) sia la soluzione ottima del Modello (14) $ESC_{CM}^*(a_m, b_m) \leq ESC_{CM}(a_s, b_s)$. Quindi $ESC_{CS}^*(a_s, b_s) - ESC_{CM}(a_m, b_m) > 0$. (ii) è provato.

(i) rappresenta la situazione in cui la dimensione y dello scaffale ottimale (b_s) eguaglia la dimensione x (a_s) nel caso CS. Questa configurazione dello scaffale è inclusa nel caso CM se $b_m = a_m$. Dal Teorema 1 concludiamo:

"Il caso CS nel Modello GM può essere trascurato nel calcolo della soluzione ottima del Modello GM."

Il Teorema 2 è simile al Teorema 1. Dimostra che il caso CM può essere trascurato nel calcolo della soluzione ottima del Modello GM.

Teorema 2. Il valore minimo della funzione obiettivo $ESC_{CL}^*(a_l, b_l)$ del modello (13) è:

i. uguale al valore minimo della funzione obiettivo $ESC_{CM}^*(a_m, b_m)$ del modello (14) se $a_l = b_l = a_m = b_m = 1$.
ii. minore del valore ottimale della funzione obiettivo $ESC_{CM}^*(a_m, b_m)$ altrimenti.

Dai Teorema 1 e 2, concludiamo:

"Tutte le soluzioni ottime del Modello GM si trovano nel caso CL. Il modello (10) è equivalente al modello GM."

È ovvio che trovare il tempo di viaggio ottimo del Modello (13) è più semplice rispetto al Modello GM. Tuttavia è ancora abbastanza complicato, con il Teorema 3 proviamo che lo scaffale ottimale tridimensionale dev'essere SIT.

Teorema 3. Per il magazzino tridimensionale, il tempo di viaggio con strategia basata sul turnover totale verrà minimizzato solo quando lo scaffale è SIT e la lunghezza del nastro

trasportatore è la dimensione maggiore.

Dimostrazione. Dai Teoremi 1 e 2, abbiamo scoperto che il risultato ottimo del Modello GM lo troviamo nel caso CL, dove la lunghezza del nastro trasportatore è la maggiore. Quindi, se proviamo che il magazzino tridimensionale dev'essere SIT per ESC_{CL} affinché sia minimizzato, il Teorema 3 è dimostrato. Per convenienza, usiamo una versione equivalente del modello, differente dal Modello (13) solo nella forma.

Minimizzare

$$\begin{aligned}\mathrm{ESC}_{CL}(a,b,t_c)=&\frac{a^{-s}st_c}{(1+s)(1+2s)(1+3s)}\big(a^s+a^{1+s}+a^{1+2s}+b^{1+s}+b^{1+2s}\\&+5a^ss+5a^{1+s}s+3a^{1+2s}s+3b^{1+s}s+b^{1+2s}s+6a^ss^2+6a^{1+s}s^2\big)\end{aligned}$$

con $abt_c^3=V$ (21)

$0<b\leq a\leq 1$

$t_c>0$

Dimostriamo per assurdo che il magazzino tridimensionale ottimo è SIT quando ESC_{CL} è minimizzato.

Supponiamo, quindi, che lo scaffale ottimo non sia SIT per CL. Poniamo $(\bar{a},\bar{b},\bar{t}_c)$ e $\overline{ESC}_{CL}$ come soluzione ottima e valore ottimale della funzione obiettivo del Modello (24). Perciò abbiamo $\bar{a}>\bar{b}$, e $\overline{ESC}_{CL}\leq ESC_{CL}$.

Essendo $abt_c^3=V$, risulta che $\bar{a}\bar{b}=V/\bar{t}_c^3$. Poniamo $\bar{a}\bar{b}=V/\bar{t}_c^3=k$, con k costante e positiva. Possiamo designare la nuova soluzione: $a=b=k^{1/2}$, e $t_c=\bar{t}_c=\sqrt[3]{V/(\bar{a}\bar{b})}=\sqrt[3]{V/k}$.

Essa stabilisce che il magazzino tridimensionale sia SIT.

Allora otteniamo che $\overline{ESC}_{CL}(\bar{a},\bar{b},\bar{t}_c)-ESC_{CL}(k^{1/2},k^{1/2},\bar{t}_c)$ risulta essere:

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad&\frac{\bar{a}^{-(1+3s)}sV^{1/3}}{(1+s)(1+2s)(1+3s)k^{1/3}}\big(\bar{a}^{2+3s}+\bar{a}^{2+4s}-2\bar{a}^{1+3s}\sqrt{k}-2\bar{a}^{1+3s}\sqrt{k^{1+s}}+\bar{a}^sk^{1+s}\\&+k^{1+2s}+5\bar{a}^{2+3s}s+3\bar{a}^{2+4s}s-8\bar{a}^{1+3s}s\sqrt{k}-4\bar{a}^{1+3s}s\sqrt{k^{1+s}}+3\bar{a}^sk^{1+s}s\\&+k^{1+2s}s+6\bar{a}^{2+3s}s^2-6\bar{a}^{1+3s}\sqrt{k}s^2\big)\end{aligned}\tag{22}$$

Essendo $\bar{a},s,k$ e $V>0$, abbiamo che $\dfrac{\bar{a}^{-(1+3s)}sV^{1/3}}{(1+s)(1+2s)(1+3s)k^{1/3}}>0$.

Definiamo:

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x)=&x^{2+3s}+x^{2+4s}-2x^{1+3s}\sqrt{k}-2x^{1+3s}\sqrt{k^{1+s}}+x^sk^{1+s}+k^{1+2s}+5x^{2+3s}s+3x^{2+4s}s\\&-8x^{1+3s}\sqrt{k}-4x^{1+3s}s\sqrt{k^{1+s}}+3x^sk^{1+s}s+k^{1+2s}s+6x^{2+3s}s^2-6x^{1+3s}s^2\sqrt{k}.\end{aligned}\tag{23}$$

Quindi per verificare che $\overline{ESC}_{CL}(\bar{a},\bar{b},\bar{t}_c)-ESC_{CL}(k^{1/2},k^{1/2},\bar{t}_c)$ sia minore di zero o meno, cerchiamo quando $f(\bar{a})<0$ con $\bar{a}\neq k^{1/2}$.

Con *x, s* e *k* > 0, abbiamo

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}=\frac{x^{-3(1+s)}s}{1+2s}(2x^s k^{1+s}+2k^{1+2s}+x^{2(1+2s)}s+4x^s k^{1+s}s+3k^{1+2s}s)>0 \qquad (24)$$

L'Equazione (24) mostra che *f(x)* è funzione strettamente convessa in *x*. Quindi esiste almeno un punto critico, il quale soddisfa

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\frac{x^{-3(1+s)}s}{1+2s}(x^{2+3s}+x^{2+4s}-x^s k^{1+s}-k^{1+2s}+2x^{2+3s}s+x^{2+4s}s-2x^s k^{1+s}s-k^{1+2s}s)=0. \qquad (25)$$

Se il punto esiste, il corrispondente valore di *f(x)* dev'essere il punto di minimo assoluto. Infatti troviamo che $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ calcolato in $x=\sqrt{k}$ è uguale a zero, $\sqrt{k}$ è il punto critico. In tale punto: min $f(x)=f(\sqrt{k})=0$. quindi avremo $f(x)>0$ per ogni $x\neq\sqrt{k}$.

Essendo lo scaffale ottimale non SIT in CL, e $\bar{a}\bar{b}=k>0$, abbiamo $\bar{a}>\sqrt{k}>\bar{b}$ (qui $\bar{a}\neq\sqrt{k}$), e quindi $f(\sqrt{k})<f(\bar{a})$. Di conseguenza $f(\bar{a})>0$, il che implica che $\overline{ESC}_{CL}(\bar{a},\bar{b},\bar{t}_c)-ESC_{CL}(k^{1/2},k^{1/2},\bar{t}_c)>0$, contraddicendo il fatto che $(\bar{a},\bar{b},\bar{t}_c)$ sia soluzione ottima del Modello (21). Da ciò, è dimostrato il Teorema 3.

3.3 L'equivalente del Modello GM e sua soluzione

Dal Teorema 3, concludiamo che la soluzione ottima del Modello GM ha le seguenti proprietà: $T=t_c$, $a=b$ (quindi $\beta=1$), $t_h=t_v=a t_c$, e $a^2 t_c^3=V$. Dunque, seguendo i vincoli dettati dall'ottimizzazione, l'equivalente al Modello GM può essere scritto così:

Minimizzare

$$ESC(a)=\frac{V^{1/3}s}{(1+s)(1+2s)(1+3s)a^{2/3}}\left(1+2a+2a^{1+s}+5s+8as+4a^{1+s}s+6s^2+6as^2\right) \qquad (26)$$

con $D=\{a|0<a\leq 1\}$.

Essendo $\frac{d^2 ESC(a)}{d\,a^2}=\frac{2sV^{1/3}}{9a^{8/3}(1+s)(1+2s)}(5-2a-2a^{1+s}+10s-2as-a^{1+s}s+6a^{1+s}s^2)>0$ e il vincolo *D* lineare, il problema è strettamente convesso.

A questo punto, se il punto critico a^* di equazione $\frac{dESC(a)}{da}=0$ è in *D*, abbiamo trovato il valore minimo della funzione obiettivo $ESC(a^*)$, dove

$$\frac{d\,ESC(a)}{da}=\frac{2sV^{1/3}}{3a^{5/3}(1+s)(1+2s)}(-1+a+a^{1+s}-2s+as+2a^{1+s}s). \qquad (27)$$

Infatti, essendo $\lim_{a\to 0}\frac{d\,ESC(a)}{da}=-\infty$, $\left.\frac{d\,ESC(a)}{da}\right|_{a=1}=2V^{1/3}s/(3(1+2s))>0$, e $\frac{d\,ESC(a)}{da}$ continua, l'unico punto critico a^* dev'essere in D.

L'equazione $\frac{dESC(a)}{da}=0$ può essere risolta numericamente per ogni *s* dato. Inoltre, dato che $a^2t_c^3=V$, abbiamo che $t_c^*=V^{1/3}/a^{*2/3}$. Di nuovo, essendo $t_h=t_v=a\,t_c$, otteniamo che $t_v^*=t_h^*=(a^*V)^{1/3}$.

Dalle suddette analisi, siamo arrivati ai seguenti risultati per il Modello GM:

(a) Per una scaffalatura tridimensionale con capacità totale di immagazzinamento pari a V, il tempo di viaggio atteso del trasloelevatore verrà minimizzato se $t_v^*=t_h^*=(a^*V)^{1/3}$ e $t_c^*=V^{1/3}/a^{*2/3}$ $\left(\text{ovvero}\, t_v^*:t_h^*:t_c^*=a^*:a^*:1\right)$. Il tempo di viaggio ottimale per il ciclo semplice è $ESC(a^*)$ dove $ESC(a)$ è la funzione obiettivo del Modello (26) e a^* è la soluzione dell'equazione $\frac{dESC(a)}{da}=0$.

(b) Il rapporto ottimale delle tre dimensioni $t_v^*:t_h^*:t_c^*$ è indipendente dalla capacità dello scaffale $V > 0$.

CAPITOLO 4

Esempi Pratici e Conclusione

4.1 Confronto dei risultati con quelli di Le-Duc et al. (2005)

Le-Duc et al. (2005) considera randomizzato il modo di immagazzinamento, quindi qualsiasi punto dentro il magazzino può essere egualmente destinato a essere dedicato per il deposito o per il prelievo. Il loro problema corrisponde al nostro per δ = 1 oppure s = 1. Dunque, poniamo s = 1, la funzione obiettivo del Modello GM diventa:

$$ESC(a,b,T)=\left(\frac{\beta^2}{6}+\frac{1}{2}\right)t_h+T\left(\frac{b^3}{12a}+\frac{a^2}{6}+\frac{1}{2}\right), \tag{28}$$

che è la stessa trovata da Le-Duc et al. (2005). La soluzione ottima per un immagazzinamento randomizzato viene esplicitato da Le-Duc et al. (2005) come: $t_h^*=t_v^*=0.90\,V^{1/3}$, $T=t_c^*=1.24\,V^{1/3}$ e $ESC^*=1.38\,V^{1/3}$.

Nel nostro caso, usando la soluzione raggiunta nel paragrafo 3.3, possiamo trovare la soluzione ottima e il corrispettivo tempo di viaggio per un sistema tridimensionale AS/RS per ogni valore della pendenza di una particolare curva ABC. Dall'Equazione (2) troviamo che la notazione *i / G(i)* denota che una frazione *i* di oggetti inventariati rappresenta una frazione *G(i)* della domanda totale. Per una data combinazione *i / G(i)* possiamo ottenere δ dall'Equazione (2) risolvendo $\delta=\ln G(i)/\ln i$. In accordo con la relazione tra s e δ, il corrispondente s può essere determinato come $s=\delta/(2-\delta)$.

La Tabella 1 cataloga i valori delle soluzioni ottime per differenti combinazioni *i / G(i)* e i loro corrispondenti valori di s o δ per un dato V. In questa tabella i valori di tempo per t_h^*, t_v^*, t_c^* e ESC^* sono espresse nelle quantità $V^{1/3}$. Nella Figura 4.1 il tempo di viaggio atteso nella nostra strategia di immagazzinamento basato sul turnover totale è comparato con quello trovato da Le-Duc et al. (2005), per diverse curve ABC, e mostra il corrispondente miglioramento del tempo di viaggio. In questa Figura, le Distribuzioni $"ESC_{FT}"$, $"ESC_{RAN}"$ e "Time saved" rappresentano rispettivamente il valore ottimo ESC^* nel nostro caso, il valore ottimo ESC^* di Le-Duc et al. (2005), e la percentuale di miglioramento data da:

$(ESC_{FT}-ESC_{RAN})/ESC_{RAN}\,\mathrm{x}\,100\%$.

δ	s	ABC Curve	a^*	b^*	t_h^*	t_v^*	t_c^*	ESC^*
1.00	1.00	20%/20%	0.72	0.72	0.90	0.90	1.24	1.38
0.75	0.86	20%/30%	0.70	0.70	0.89	0.89	1.27	1.31
0.57	0.73	20%/40%	0.68	0.68	0.88	0.88	1.29	1.24
0.43	0.60	20%/50%	0.66	0.66	0.87	0.87	1.31	1.15
0.32	0.48	20%/60%	0.64	0.64	0.86	0.86	1.35	1.05
0.22	0.36	20%/70%	0.61	0.61	0.85	0.85	1.38	0.91
0.14	0.24	20%/80%	0.58	0.58	0.84	0.84	1.43	0.72
0.07	0.12	20%/90%	0.55	0.55	0.82	0.82	1.50	0.45

Tabella 1: Soluzioni ottime per differenti valori della pendenza (curve ABC)

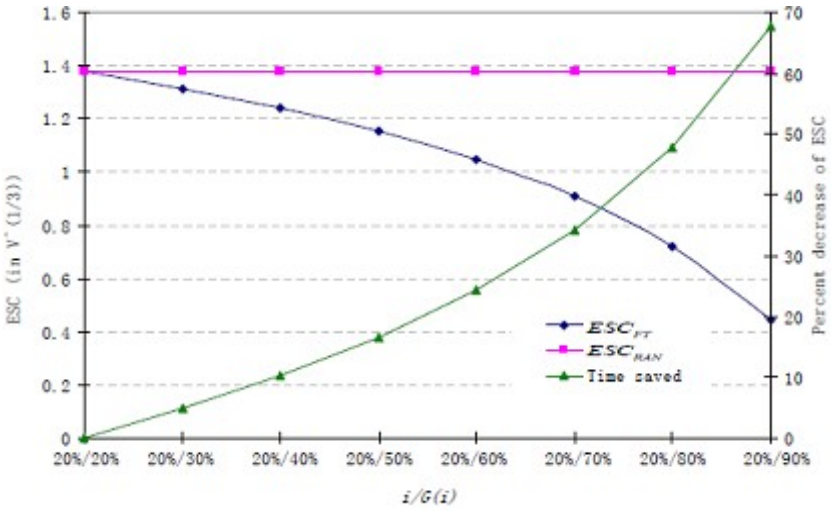

Figura 4.1: Riduzione di ESC della strategia di immagazzinamento basata sul turnover totale comparata con quella randomizzata per diversi *i / G(i)*

Dalla Tabella 1 e dalla Figura 4.1, si può notare che

(1) Quando $0 < \delta < 1$, il miglioramento del tempo di viaggio rispetto a quello di Le-Duc et al. (2005) è evidente. La percentuale di riduzione dipende dalla ripidità della curva ABC. Per una curva ABC 20%/90% con $\delta = 0.07$, il miglioramento è significante e la percentuale di tempo di viaggio risparmiato è pari a 67.68%.

(2) Quando $\delta = 1$, il nostro risultato è lo stesso di Le-Duc et al. (2005).

(3) Per una strategia di immagazzinamento basata sul turnover totale, tanto minore è il parametro δ della pendenza della curva ABC, tanto più è sensibile la variazione del tempo di viaggio atteso. Per esempio quando δ decresce da 1 a 0.86, il relativo ESC decresce di $\frac{1.38V^{1/3}-1.31V^{1/3}}{1-0.75}=0.26\,V^{1/3}$, tuttavia quando δ passa da 0.24 a 0.12,

il relativo ESC decresce di una quantità pari a $\frac{0.72V^{1/3}-0.45V^{1/3}}{0.14-0.07}=3.74\,V^{1/3}$, che è molto maggiore di $0.26V^{1/3}$.

4.2 Un Esempio

Come esempio illustrativo, assumiamo di dover progettare un sistema compatto tridimensionale con i dati forniti dalla Tabella 2. Il layout di riferisce ad un sistema come quello illustrato nella Figura 2.1.

Il problema consiste nel trovare le dimensioni ottimali approssimate del sistema cosicché il tempo di viaggio atteso sia minimizzato per le due curve ABC considerate in Tabella 2.

Total system capacity (V)		2000 pallets
Storage policy		Full turnover-based storage
Pallet size in seconds (width x length x height)	Net	0.4 x 0.4 x 2
	Gross	0.5 x 0.5 x 2.17
S/R machine	Operating policy	Single-command cycle
	Vertical speed (s_v)	0.8 (meter per second)
	Horizontal speed (s_h)	2.8 (meter per second)
Conveyor speed (s_c)		1.6 (meter per second)
Cases of ABC curve considered		20%/20% and 20%/90%

Tabella 2: Parametri del sistema

Il magazzino dovrebbe avere una capacità sufficiente a contenere 2000 pallet, il che significa che il magazzino dovrebbe avere almeno V = 0.5 x 0.5 x 2.17 x 2000 = 1085 (secondi^3).

Richiamando la conclusione ottenuta nel Paragrafo 3.3, otteniamo le soluzioni ottime per un sistema di scaffalature continuo:

(1) per la curva ABC 20%/20%, $t_c^*=1.24\sqrt[3]{V}=12.78$ (secondi), $t_h^*=t_v^*=0.72t_c^*=9.21$ (secondi) e il tempo di viaggio ottimale $ESC^*=1.38\sqrt[3]{V}=14.20$ (secondi);

(2) per la curva ABC 20%/90%, $t_c^*=1.50\sqrt[3]{V}=15.37$ (secondi), $t_h^*=t_v^*=0.55t_c^*=8.40$ e il tempo di viaggio ottimale $ESC^*=0.45\sqrt[3]{V}=4.59$ (secondi).

Tuttavia, nel mondo reale, i sistemi AS/RS sono discreti. Quindi, scegliamo le dimensioni "pratiche ottimali" in modo che siano più vicine possibili alle corrispondenti dimensioni trovate con una capacità di immagazzinamento di almeno 2000 pallet.

Otteniamo le seguenti dimensioni pratiche ottimali approssimate e il tempo di viaggio atteso per entrambe le curve ABC:

(1) per la curva ABC 20%/20%, $\overline{t_h}^* = 9$ secondi (18 pallet), $\overline{t_v}^* = 8.68$ secondi (4 pallet), $\overline{t_c}^* = 14$ secondi (28 pallet), il tempo di viaggio ottimale approssimato è pari a $\overline{ESC}^* = 14.24$ secondi, con una capacità reale del magazzino pari a 2016 pallet;

(2) per la curva ABC 20%/90%, $\overline{t_h}^* = 8.5$ secondi (17 pallet), $\overline{t_v}^* = 8.68$ secondi (4 pallet), $\overline{t_c}^* = 15$ secondi (30 pallet), il tempo di viaggio ottimale approssimato $\overline{ESC}^* = 4.64$ secondi, e la capacità reale del magazzino è di 2040 pallet. Dai suddetti risultati troviamo che la deviazione delle soluzioni ottimali approssimate dalle soluzioni ottime è abbastanza piccola: in percentuale ($(\overline{ESC}^* - ESC^*)/ESC^* \, x \, 100\%$) sono rispettivamente 0.27% e 0.66%. Da notare che le dimensioni ottimale risultanti non differiscono molto tra loro.

4.3 Conclusioni

Fino ad ora abbiamo discusso a proposito del progetto di un sistema compatto AS/RS tridimensionale con strategia di immagazzinamento basata sul turnover totale. Dai risultati ottenuti, troviamo che:

1) Il rapporto ottimale tra le tre dimensioni $t_c^* : t_h^* : t_v^*$ è indipendente dalla capacità di immagazzinamento dello scaffale V, ma varia al variare della pendenza δ della curva ABC. Per δ decrescente, oppure crescente frequenza di turnover per una data percentuale di oggetti inventariati nello scaffale, il rapporto ottimale t_c^*/t_h^* oppure t_c^*/t_v^* incrementa. Il problema con strategia di immagazzinamento randomizzata discusso da Le-Duc et al. (2005) è un caso speciale del nostro problema con pendenza pari a δ = 1.

2) Per un magazzino tridimensionale, il tempo di viaggio viene minimizzato solo quando lo scaffale è SIT nelle direzioni orizzontale e verticale.

3) La strategia di immagazzinamento basata sul turnover totale è una buona regola per migliorare la performance del tempo atteso di una macchina S/R per il ciclo semplice. Tanto più è inclinata la curva ABC (δ piccolo), maggiore è il tempo risparmiato rispetto alla strategia utilizzata da Le-Duc et al. (2005). Ad esempio, per δ = 0.07, (una curva ABC 20%/90%), il tempo risparmiato è pari al 67.68%.

4) Dall'esempio pratico spiegato nel Paragrafo 4.2, si è potuto vedere come l'approssimazione dell'AS/RS ad una distribuzione continua è d'aiuto per trovale la soluzione ottimale in esempi pratici.

Bibliografia

Yu Yugang, M.B.M De Koster, 2006,"Optimal Torage Rack Design for a 3D Compact AS/RS with Full Turnover-Based Storage", Rotterdam School of Management, Erasmus University Rotterdam, the Netherlands.

Le-Duc Tho, De Koster R., e Yu Yugang, 2005, "Optimal Storage Rack Design for a 3-dimensional Compact AS/RS", *International Journal of Production Research*.

Le-Duc Tho, 2005, Design and control of efficient order picking process, PhD thesis, Rotterdam School of Management, Erasmus University Rotterdam, the Netherlands.

P. Kouvelis, V Papanicolaou, 2005, "Expected Travel Time and Optimal Boundary Formulas for a Two-class-based Automated Storage/Retrieval System", *International Journal of Production Research,* Vol. 33,No. 10,pp 2889-2905.

Warren H. Hausman, Leroy B. Schwarz, Stephen C. Graves, 1976, "Optimal Storage Assignement in Automatic Warehousing Systems", *Management Science,* Vol, 22, No.6, pp 629-638.

A. Pareschi, A. Persona, E.Ferrari, A. Regattieri, Progetto Leonardo 2002, *Logistica Integrata e Flessibile*, cap 10 Magazzini Intensivi Automatizzati, pp 240-249.

T. Murino, R. De Carlini, Appunti per il Corso di Logistica Integrata, cap 7, pp 225-244.