UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

DIMENSIONE TOPOLOGICA

RELATORE:
PROF.SSA ALESSANDRA BERTAPELLE

LAUREANDO: DARIO KEVIN BASILE
MATRICOLA: 1201687

16/12/2022

Introduzione

La dimensione topologica o di Lebesgue è uno dei tanti invarianti introdotti dai matematici all'inizio del Novecento per dare una definizione formale al concetto intuitivo di dimensione per spazi topologici. La branca della Topologia che si occupa di tali invarianti è la Teoria della dimensione. Tali studi, iniziati negli anni Venti, erano concentrati quasi del tutto sugli spazi metrici separabili e usavano principalmente la piccola dimensione induttiva ind, mentre la grande dimensione induttiva Ind e la dimensione topologica dim giocavano un ruolo ausiliario (le tre definizioni di dimensione vanno a coincidere nel caso degli spazi metrici separabili). La dimensione induttiva è definita induttivamente a partire dal vuoto, che ha dimensione -1, e poi nel caso della piccola dimensione induttiva $ind(X) \leq n$ se e solo se lo spazio X ammette una base di sottoinsiemi aperti $\mathcal{B}$ tale che $ind(\overline{U} \backslash U) \leq n-1$ per ogni $U \in \mathcal{B}$; nel caso della grande dimensione induttiva, $Ind(X) \leq n$ se e solo se, per ogni coppia di sottoinsiemi chiusi disguinti F, G esistono sottoinsiemi aperti disgiunti U, V di X tali che $F \subset U$, $G \subset V$ r $Ind(X \backslash (U \cup V)) \leq n-1$. La piccola dimensione induttiva era molto intuitiva e portava velocemente allo sviluppo di una elegante teoria per gli spazi metrici separabili. Tali sviluppi, riepilogati da W. Hurewicz e H. Wallman, in *Dimension Theory* del 1941 [3], in seguito si bloccarono per più di dieci anni. Una svolta è stata data all'inizio degli anni Cinquanta, quando è stato scoperto che molti risultati ottenuti per gli spazi metrici separabili potevano essere estesi a più ampie classi di spazi topologici, a condizione che il concetto di dimensione fosse propriamente definito. Fu scoperto infatti che in generale le dimensioni ind, Ind, e dim non coincidono per tutti i tipi di spazi topologici. Si trovarono esempi di spazi metrici per i quali $ind < dim = Ind$ e di spazi di Hausdorff compatti per i quali $ind < dim < Ind$. Da allora sono stati ottenuti molti risultati importanti sulla dimensione di spazi topologici che si basano principalmente sulla dimensione topologica dim.

In questa tesi studieremo la dimensione di Lebesgue seguendo il testo [1]. Nel primo capitolo verrà data la definizione di dimensione topologica e si studieranno alcune proprietà fondamentali riguardanti la dimensione topologica di diverse classi di spazi topologici. Nel secondo capitolo verranno approfonditi gli spazi topologici zero-dimensionali, tra cui l'insieme di Cantor, per arrivare ad una loro caratterizzazione in base alle ipotesi scelte. Il capitolo finale contiene la dimostrazione di alcuni interessanti risultati lasciati come esercizio in [1].

Indice

Capitolo 1

Prime definizioni

In questo capitolo, dopo alcune definizioni base di topologia generale, introdurremo la definizione di dimensione topologica, chiamata anche dimensione di Lebesgue, $dim(X)$ di uno spazio topologico X. In seguito studieremo alcune proprietà fondamentali riguardanti la dimensione di diversi tipi di spazi topologici tra i quali, dopo averli introdotti, gli spazi normali.

1.1 Definizione di dimensione topologica

Definizione 1.1. Sia X un insieme. Sia $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X con indici nell'insieme I. Per ogni $x \in X$ si definisce:

$$ord_x(\alpha) := -1 + \#\{i \in I \,|\, x \in A_i\}.$$

La quantità $ord_x(\alpha) \in \{-1\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ è detta *ordine* di α nel punto x.
Definiamo l'*ordine* (globale) della famiglia α, e lo indicheremo con $ord(\alpha) \in \{-1\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, come

$$ord(\alpha) := \sup_{x \in X} ord_x(\alpha).$$

Se X è l'insieme vuoto $\varnothing$, si adotta la convenzione $ord(\alpha) = -1$.
La definizione di ordine implica che $ord(\alpha)$ è il più grande intero n (o ∞ se un tale intero non esiste) tale che si possano trovare $n+1$ elementi distinti $i_0, i_1, ..., i_n \in I$ che soddisfano

$$A_{i_0} \cap A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_n} \neq \varnothing.$$

Definizione 1.2. Si dice che α è un *ricoprimento* di un insieme X (o che α *ricopre* X) se si ha:

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Si noti che α è un ricoprimento di X se e solo se si ha $ord_x(\alpha) \geq 0 \, \forall x \in X$.
Inoltre, se α è una *partizione* di X, ossia α è un ricoprimento di X e $A_i \cap A_j = \varnothing$ per ogni $i, j \in I$ con $i \neq j$, $ord_x(\alpha) = 0$ per ogni $x \in X$.

L'insieme dei ricoprimenti di un insieme ammette un preordine.

Definizione 1.3. Siano $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ e $\beta = (B_j)_{j \in J}$ due ricoprimenti di un insieme X.
Si dice che il ricoprimento β è *più fine* del ricoprimento α, e si scrive $\beta \succ \alpha$, se per ogni $j \in J$ esiste $i \in I$ tale che $B_j \subset A_i$.

Se α, β e γ sono ricoprimenti di un insieme X tali che $\gamma \succ \beta$ e $\beta \succ \alpha$, allora si ha $\gamma \succ \alpha$ ($\succ$ è transitivo). Si osservi che se $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ e $\beta = (B_i)_{i \in I}$ sono due ricoprimenti di X tali che $B_i \subset A_i$ per ogni $i \in I$, allora β è più fine di α.
Inoltre, per ogni $x \in X$, si ha:

$$\{i \in I \mid x \in B_i\} \subset \{i \in I \mid x \in A_i\}$$

e pertanto $ord_x(\beta) \leq ord_x(\alpha)$. Di conseguenza, si ha $ord(\beta) \leq ord(\alpha)$.

Iniziamo ora a considerare ricoprimenti di spazi topologici.
Si dice che il ricoprimento $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ di uno spazio topologico X è un *ricoprimento aperto* (risp. un *ricoprimento chiuso*) di X se A_i è aperto (risp. chiuso) in X per ogni $i \in I$.
Introduciamo un intero che mette in relazione l'ordine di un ricoprimento con quello dei suoi raffinamenti.

Definizione 1.4. Sia X uno spazio topologico. Sia $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto finito di X. Definiamo la quantità $D(\alpha)$ come

$$D(\alpha) := \min_{\beta} ord(\beta)$$

dove i β variano tra tutti i ricoprimenti aperti finiti di X più fini di α.

Dalla questa definizione seguono immediatamente i seguenti risultati:

1. Dato che $\alpha \succ \alpha$, si ha $D(\alpha) \leq ord(\alpha) \leq -1 + \#I$.

2. Si ha $D(\alpha) \in \{-1\} \cup \mathbb{N}$.

3. Si ha $D(\alpha) \leq n$ se e solo se esiste un ricoprimento aperto finito $\beta \succ \alpha$ tale che $ord(\beta) \leq n$.

Proposizione 1.5. *Sia X uno spazio topologico. Siano α e α' ricoprimenti aperti finiti di X tali che $\alpha \succ \alpha'$. Allora si ha $D(\alpha) \geq D(\alpha')$.*

Dim. Sia β un ricoprimento aperto finito di X tale che $\beta \succ \alpha$. Allora per la transitività della relazione $\succ$ si ha $\beta \succ \alpha'$. Pertanto abbiamo $D(\alpha) \geq D(\alpha')$. □

Lemma 1.6. *Sia X uno spazio topologico. Sia $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento di X e sia $\beta = (V_j)_{j \in J}$ un ricoprimento aperto di X tale che $\beta \succ \alpha$. Allora esiste un ricoprimento aperto $\gamma = (W_i)_{i \in I}$ di X tale che $ord_x(\gamma) \leq ord_x(\beta)$ per ogni $x \in X$ e $W_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$.*

Dim. Dato che β è più fine di α, esiste una mappa $\varphi : J \to I$ tale che $V_j \subset U_{\varphi(j)}$ per ogni $j \in J$. Si consideri la famiglia $\gamma = (W_i)_{i \in I}$ definita da

$$W_i := \bigcup_{j \in \varphi^{-1}(i)} V_j.$$

Ognuno dei W_i è unione di sottoisiemi aperti di X e, quindi, è aperto in X. Inoltre, si ha $W_i \subset U_i$ dato che $V_j \subset U_i$ per ogni $j \in \varphi^{-1}(i)$. Dato che $X = \bigcup_{j \in J} V_j$ e $V_j \subset W_{\varphi(j)}$ per ogni $j \in J$, si ha che $X = \bigcup_{j \in J} W_{\varphi(j)} = \bigcup_{i \in I} W_i$ e quindi γ è ricoprimento di X. Infine, si consideri un punto $x \in X$. Si ha che $x \in W_i$ se e solo se esiste un $j \in \varphi^{-1}(i)$ tale che $x \in V_j$. Ne consegue che φ induce una mappa suriettiva da $\{j \in J \mid x \in V_j\}$ su $\{i \in I \mid x \in W_i\}$. Questo implica che $ord_x(\gamma) \leq ord_x(\beta)$. □

Proposizione 1.7. *Sia X uno spazio topologico e sia $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto finito di X. Allora si ha*

$$D(\alpha) = \min_{\beta} ord(\beta),$$

dove i β variano tra tutti i ricoprimenti aperti (finiti e non) di X più fini di α.

Dim. Basta dimostrare che ogni ricoprimento aperto di X più fine di α ha ordine almeno $D(\alpha)$. Sia β un ricoprimento aperto di X tale che $\beta \succ \alpha$. Per il lemma 1.6 possiamo trovare un ricoprimento aperto finito $\gamma = (W_i)_{i\in I}$ tale che $ord(\gamma) \leq ord(\beta)$ e $W_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$. Dato che γ è un ricoprimento aperto finito più fine di α, si ha $D(\alpha) \leq ord(\gamma)$ e quindi $D(\alpha) \leq ord(\beta)$. □

Proposizione 1.8. *Sia X uno spazio topologico e sia $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ un ricoprimento aperto finito di X. Allora si ha*

$$D(\alpha) = \min_{\beta} ord(\beta),$$

dove i β variano tra tutti i ricoprimenti aperti finiti di X della forma $\beta = (V_i)_{i\in I}$ con $V_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$.

Dim. Dal Lemma 1.6 si ha che, per ogni ricoprimento aperto finito γ di X più fine di α, esiste un ricoprimento aperto finito $\beta = (V_i)_{i\in I}$ tale che $ord(\beta) \leq ord(\gamma)$ e $V_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$. □

Definizione 1.9. Sia X uno spazio topologico. La *dimensione topologica* $dim(X) \in \{-1\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ di X è la quantità definita come

$$dim(X) := \sup_{\alpha} D(\alpha),$$

dove gli α variano tra tutti i ricoprimenti aperti finiti di X.

La dimensione topologica $dim(X)$ è anche chiamata *dimensione di Lebesgue* di X.
È chiaro dalla sua definizione che la dimensione topologica è un invariante topologico, cioè se X e Y sono spazi topologici omeomorfi allora $dim(X) = dim(Y)$.

Esempio 1.10. Si ha $dim(X) = -1$ se e solo se $X = \varnothing$.

Esempio 1.11. Sia $X \neq \varnothing$ un insieme dotato della *topologia discreta*, cioè la topologia per cui tutti i sottoinsiemi di X sono aperti. Allora la famiglia $\beta = (\{x\})_{x\in X}$ è una partizione aperta di X. Dato che $\beta \succ \alpha$ per ogni ricoprimento α di X, dalla proposizione 1.7 segue che $D(\alpha) = 0$. Di conseguenza $dim(X) = 0$.

Proposizione 1.12. *Sia X uno spazio topologico e fissiamo $n \in \mathbb{N}$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) $dim(X) \leq n$*;*

(b) per ogni ricoprimento aperto finito α di X, esiste un ricoprimento aperto finito $\beta \succ \alpha$ tale che $ord(\beta) \leq n$;

(c) per ogni ricoprimento aperto finito α di X, esiste un ricoprimento aperto $\beta \succ \alpha$ tale che $ord(\beta) \leq n$;

(d) per ogni ricoprimento aperto finito $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ di X, esiste un ricoprimento aperto $\beta = (V_i)_{i \in I}$ di X tale che $ord(\beta) \leq n$ e $V_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$.

Dim. Questa è una conseguenza immediata delle Definizioni 1.4, 1.9, e Proposizioni 1.7, 1.8. □

1.2 Dimensione topologica di sottoinsiemi chiusi

Dato X spazio topologico e $Y \subset X$, Y è uno spazio topologico per la *topologia indotta*, ovvero la topologia per cui i sottoinsiemi aperti sono della forma $U = V \cap Y$ dove V è un sottoinsieme aperto di X. Vogliamo andare a studiare la relazione tra la dimensione topologica di uno spazio topologico e la dimensione topologica dei suoi sottoinsiemi. Per i sottoinsiemi chiusi si hanno i seguenti risultati generali.

Proposizione 1.13. *Sia X uno spazio topologico e sia $F \subset X$ un sottoinsieme chiuso. Allora si ha $dim(F) \leq dim(X)$.*

Dim. Sia $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto finito di F. Dalla definizione di topologia indotta per ogni $i \in I$ possiamo trovare $V_i \subset X$ sottoinsieme aperto tale che $U_i = V_i \cap F$. Si ha quindi che la famiglia $\beta := (V_i)_{i \in I} \cup \{X \backslash F\}$ è un ricoprimento aperto finito di X. Dunque esiste un ricoprimento aperto finito $\gamma = (W_j)_{j \in J}$ di X tale che $\gamma \succ \beta$ e $ord(\gamma) \leq dim(X)$. Definisco ora $\gamma' := (W_j \cap F)_{j \in J}$ che è un ricoprimento aperto finito di F. Da $\gamma \succ \beta$ ottengo $\gamma' \succ \alpha$. Inoltre, si ha $ord_x(\gamma') = ord_x(\gamma)$ per ogni $x \in F$ e di conseguenza $ord(\gamma') \leq ord(\gamma) \leq dim(X)$. Si conclude osservando che $D(\alpha) \leq ord(\gamma') \leq dim(X)$ e infine $dim(F) = \sup_{\alpha} D(\alpha) \leq dim(X)$. □

In generale, quando Y è un sottoinsieme di uno spazio topologico X, non sempre si ha $dim(Y) \leq dim(X)$. Un esempio in cui $Y \subset X$ ha $dim(Y) > dim(X)$ può essere dato partendo da uno spazio topologico Y, avente dimensione topologica positiva, per poi estenderlo ad uno spazio topologico X di dimensione zero come nel seguente esempio.

Esempio 1.14. Sia Y uno spazio topologico e sia $X := Y \cup \{x_0\}$ l'insieme ottenuto aggiungendo ad Y l'elemento $x_0 \notin Y$. Definisco su X una topologia per cui gli insiemi aperti sono X e tutti i sottoinsiemi $\Omega \subset Y$ aperti per la topologia di Y. Si noti che la topologia indotta da X su Y è la topologia di partenza di Y. Osserviamo ora che il ricoprimento aperto di X composto solo da X è più fine di ogni ricoprimento aperto di X dato che X è l'unico sottoinsieme aperto di X contenente x_0. Segue che $dim(X) = 0$.

Si osservi che lo spazio topologico X dell'esempio precedente non è mai Hausdorff per $Y \neq \varnothing$. Andiamo ora a studiare altri risultati per sottoinsiemi chiusi di spazi topologici.

Lemma 1.15. *Siano X uno spazio topologico e F un sottoinsieme chiuso di X. Sia $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ un ricoprimento aperto finito di X. Allora esiste un ricoprimento aperto $\beta = (V_i)_{i\in I}$ di X tale che $V_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$ e $ord_x(\beta) \leq dim(F)$ per ogni $x \in X$.*

Dim. La famiglia $\gamma := (F \cap U_i)_{i\in I}$ è un ricoprimento aperto finito di F. Dunque, si ha $D(\gamma) \leq dim(F)$. Per la Proposizione 1.8, si può trovare un ricoprimento aperto $\delta = (W_i)_{i\in I}$ di F tale che $W_i \subset F \cap U_i$ per ogni $i \in I$ e $ord(\delta) = D(\gamma) \leq dim(F)$. Dato che i sottoinsiemi W_i sono aperti in F, si ha che per ogni $i \in I$ esiste un sottoinsieme aperto $\Omega_i \subset X$ tale che $W_i = F \cap \Omega_i$. Definisco ora la famiglia $\beta = (V_i)_{i\in I}$ formata da sottoinsiemi di X della forma $V_i := (\Omega_i \cup (X \backslash F)) \cap U_i$ per ogni $i \in I$. Chiaramente β è un ricoprimento aperto di X che soddisfa $V_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$. Inoltre, si ha $F \cap V_i = F \cap \Omega_i = W_i$ per ogni $i \in I$. Segue che per ogni $x \in F$,

$$ord_x(\beta) = ord_x(\delta) \leq ord(\delta) \leq dim(F).$$

Questo mostra che il ricoprimento β ha le proprietà richieste. □

Proposizione 1.16. *Sia X uno spazio topologico. Siano F e G sottoinsiemi chiusi di X tali che $X = F \cup G$. Allora si ha*

$$dim(X) = max(dim(F), dim(G)).$$

Dim. Dalla Proposizione 1.13 otteniamo $dim(X) \geq dim(F)$ e $dim(X) \geq dim(G)$. Quindi basta dimostrare che $dim(X) \leq \max(dim(F), dim(G))$. Sia $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ un ricoprimento aperto finito di X. Per il Lemma 1.15 si può trovare un ricoprimento aperto $\beta = (V_i)_{i\in I}$ di X tale che $V_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$ e $ord_x(\beta) \leq dim(F)$ per ogni $x \in F$. Sempre usando il Lemma 1.15 possiamo trovare un ricoprimento aperto $\gamma = (W_i)_{i\in I}$ di X tale che $W_i \subset V_i$ per ogni $i \in I$ e

$$ord_x(\gamma) \leq dim(G) \text{ per ogni } x \in G. \tag{1.17}$$

Dato che $W_i \subset V_i$ per ogni $i \in I$, si ha $ord_x(\gamma) \leq ord_x(\beta)$ per ogni $x \in X$. Si deduce che

$$ord_x(\gamma) \leq ord_x(\beta) \leq dim(F) \text{ per ogni } x \in F. \tag{1.18}$$

Avendo $X = F \cup G$, le disuguaglianze 1.17 e 1.18 implicano che $ord(\gamma) \leq max(dim(F), dim(G))$. Dato che $W_i \subset V_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$ il ricoprimento γ è più fine di α. Ne consegue che

$$D(\alpha) \leq max(dim(F), dim(G)).$$

Si conclude osservando che $dim(X) = \sup_{\alpha} D(\alpha) \leq \max(dim(F), dim(G))$. $\square$

Usando la Proposizione 1.16 e procedendo per induzione sull'intero $n \geq 1$, si ottiene il seguente risultato.

Corollario 1.19. *Sia X uno spazio topologico e siano $F_1, \dots F_n$ $(n \geq 1)$ sottoinsiemi chiusi di X tali che*

$$X = \bigcup_{1\leq k\leq n} F_k.$$

Allora si ha

$$dim(X) = \max_{1\leq k\leq n} dim(F_k).$$

1.3 Dimensione topologica di spazi connessi

Si ricordi che uno spazio topologico X si dice *connesso* se i soli sottoinsiemi di X sia aperti che chiusi sono $\varnothing$ e X.

Definizione 1.20. Si dice che uno spazio topologico X è *accessibile* se per ogni $x \in X$ il singoletto $\{x\}$ è chiuso in X.

Gli spazi accessibili sono anche chiamati *spazi* T_1. Uno spazio topologico X è accessibile se e solo se, per ogni $x, y \in X$ con $x \neq y$, esiste un intorno di x che non contiene y. Ogni spazio di Hausdorff è anche uno spazio accessibile. L'implicazione inversa è invece falsa, come dimostrato nel seguente esempio.

Esempio 1.21. Sia X un insieme infinito dotato della *topologia cofinita*, cioè la topologia per cui gli insiemi aperti sono l'insieme vuoto e i sottoinsiemi $U \subset X$ con $X \backslash U$ finito. I sottoinsiemi chiusi di X sono X stesso e i suoi sottoinsiemi finiti. Dunque X è accessibile. Tuttavia X non è Hausdorff dato che l'intersezione di due sottoinsiemi aperti non vuoti di X non è mai vuota. Si noti inoltre che X è connesso e compatto.

Proposizione 1.22. *Sia X uno spazio topologico connesso e accessibile contenente più di un solo punto. Allora si ha $dim(X) \geq 1$.*

Dim. Siano $x, y \in X$ con $x \neq y$. Dato che X è accessibile, i sottoinsiemi $X \backslash \{x\}$ e $X \backslash \{y\}$ sono aperti in X. Si consideri il ricoprimento aperto $\alpha = \{X \backslash \{x\}, X \backslash \{y\}\}$. Dalla connessione di X otteniamo che ogni partizione aperta di X è banale, quindi $D(\alpha) \geq 1$. Concludiamo osservando che $dim(X) \geq D(\alpha)$ e di conseguenza $dim(X) \geq 1$. $\square$

La proposizione precedente risulta falsa nel caso si rimuova l'ipotesi di accessibilità. Infatti, dato un insieme X, avente almeno due punti distinti e dotato della *topologia banale*, cioè la topologia per cui gli unici aperti sono $\varnothing$ e X, si ha che X è connesso. Tuttavia $dim(X) = 0$ in quanto il ricoprimento banale $\{X\}$, che ha ordine 0, è più fine di ogni altro ricoprimento aperto di X.

1.4 Dimensione topologica di spazi metrici compatti

Sia (X, d) uno spazio metrico. Per $x \in X$ e $r > 0$, si denota con $B(x, r)$ la *palla aperta* di raggio r centrata in x. Il *diametro* $diam(Y)$ di un sottoinsieme $Y \subset X$ è definito come:

$$diam(Y) := \sup_{y_1, y_2 \in Y} d(y_1, y_2) \in [0, \infty].$$

Definizione 1.23. Si definisce *mesh* di un ricoprimento $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ di X come:

$$mesh(\alpha) := \sup_{i \in I} diam(A_i) \in [0, \infty].$$

Dalla definizione si ottiene immediatamente che, dati α e β ricoprimenti di uno spazio metrico tali che $\beta \succ \alpha$, $mesh(\beta) \leq mesh(\alpha)$.

Proposizione 1.24. *Sia $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di uno spazio metrico compatto X. Allora esiste un numero reale $\lambda > 0$ che soddisfa la seguente proprietà: per ogni sottoinsieme $Y \subset X$ tale che $diam(Y) \leq \lambda$, esiste un $i \in I$ tale che $Y \subset U_i$.*

Dim. Per ogni $x \in X$ scegliamo un indice $i(x) \in I$ tale che $x \in U_{i(x)}$. Dato che gli $U_{i(x)}$ sono aperti, possiamo trovare $r_x > 0$ tale che la palla aperta $B(x, 2r_x)$ sia tutta contenuta in $U_{i(x)}$. Le palle aperte $B(x, r_x)$, $x \in X$ formano un ricoprimento aperto di X. Dalla compattezza di X segue che esiste un sottoinsieme finito $A \subset X$ tale che le palle $B(x, r_x)$, $x \in A$ ricoprono X. Si ponga $\lambda := min_{x \in A} r_x > 0$. Supponiamo che $Y \subset X$ soddisfi $diam(Y) \leq \lambda$ e scegliamo un punto arbitrario $y \in Y$. Si può allora trovare un punto $a \in A$ tale che $d(a, y) < r_a$. Usando la disuguaglianza triangolare si ottiene

$$Y \subset B(a, r_a + \lambda) \subset B(a, 2r_a) \subset U_{i(a)}.$$

Di conseguenza, λ ha la proprietà richiesta. □

Un numero reale $\lambda > 0$ che soddisfa la condizione della Proposizione precedente è detto *numero di Lebesgue* del ricoprimento aperto α.

Corollario 1.25. *Sia α un ricoprimento aperto di uno spazio metrico compatto X. Allora esiste un numero reale $\lambda > 0$ tale che ogni ricoprimento β di X con $mesh(\beta) \leq \lambda$ soddisfi $\beta \succ \alpha$.*

Dim. Si può scegliere λ come uno dei numeri di Lebesgue di α. □

Proposizione 1.26. *Sia X uno spazio metrico compatto e sia $n \in \mathbb{N}$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) $dim(X) \leq n$;

(b) *per ogni* $\varepsilon > 0$*, esiste un ricoprimento aperto finito* α *di* X *tale che* $mesh(\alpha) \leq \varepsilon$ *e* $ord(\alpha) \leq n$*;*

(c) *esiste una successione* $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *di ricoprimenti aperti finiti di* X *tali che* $\lim_{k\to\infty} mesh(\alpha_k) = 0$ *e* $ord(\alpha_k) \leq n$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$*.*

Dim. Le condizioni (b) e (c) sono banalmente equivalenti.
Sia $\varepsilon > 0$. La famiglia $\alpha := (B(x, \varepsilon/2))_{x\in X}$ è un ricoprimento aperto di X. Dato che X è compatto, possiamo trovare un insieme finito $A \subset X$ tale che $\alpha' := (B(x, \varepsilon/2))_{x\in A}$ è un ricoprimento aperto finito di X. Se $dim(X) \leq n$, per la Proposizione 1.12 si può trovare un ricoprimento aperto finito $\beta \succ \alpha'$ con $ord(\beta) \leq n$. Si ha allora $mesh(\beta) \leq mesh(\alpha') \leq \varepsilon$. Questo mostra che (a) implica (b).
Viceversa, si supponga (b). Sia α un ricoprimento aperto finito di X. Sia $\lambda > 0$ un numeri di Lebesgue per α. Dato che la condizione (b) è soddisfatta, esiste un ricoprimento aperto finito β di X tale che $mesh(\beta) \leq \lambda$ e $ord(\beta) \leq n$. Questo implica che $\beta \succ \alpha$ e quindi $D(\alpha) \leq n$. Si deduce che $dim(X) \leq n$. Questo mostra che (b) implica (a). □

Usiamo i risultati ottenuti finora per andare a calcolare la dimensione topologica del segmento unitario $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Si noti che ogni segmento di $\mathbb{R}$, e, più in generale, ogni segmento di uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff, è omeomorfo a $[0, 1]$ e quindi ha la stessa dimensione, dato che la dimensione topologica è un invariante topologico.

Proposizione 1.27. *Il segmento unitario* $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ *ha dimensione topologica* $dim([0, 1]) = 1$*.*

Dim. Dato che $[0, 1]$ è connesso, per la Proposizione 1.22 si ha che $dim([0, 1]) \geq 1$. Sia $k \geq 2$ un intero. Si considerino i punti $x_i \in [0, 1]$ definiti come

$$x_i = \frac{i}{2k} \text{ per ogni } i \in \{0, 1, \dots, 2k\}.$$

Sia α_k il ricoprimento aperto finito di $[0, 1]$ formato dagli intervalli $[x_0, x_2)$, $(x_{2k-2}, x_{2k}]$ e da tutti gli intervalli della forma (x_i, x_{i+2}) per $i \in \{1, 2, \dots, 2k-3\}$. Si può vedere che $ord(\alpha_k) = 1$ e, inoltre, che $mesh(\alpha_k) = 1/k \to 0$ per $k \to \infty$. Usando la Proposizione 1.26 possiamo quindi concludere che $dim([0, 1]) \leq 1$. Abbiamo così dimostrato che $dim([0, 1]) = 1$. □

1.5 Spazi normali

In questa sezione verrà introdotta un'importante classe di spazi topologici, quella degli spazi topologici normali. Si vedrà in particolare che tutti gli spazi metrizzabili e tutti gli spazi di Hausdorff compatti sono normali.

Definizione 1.28. Uno spazio topologico X viene detto *normale* se, dati $A, B \subset X$ due sottoinsiemi chiusi di X tali che $A \cap B = \varnothing$, esistono due sottoinsiemi aperti $U, V \subset X$ tali che $U \cap V = \varnothing$ e $A \subset U$, $B \subset V$.

Si noti che ogni spazio normale e accessibile è Hausdorff. Gli spazi normali di Hausdorff vengono anche chiamati *spazi* T_4.

Proposizione 1.29. *Sia X uno spazio topologico. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) X è normale;

(b) per ogni sottoinsieme chiuso $A \subset X$ e ogni sottoinsieme aperto $U \subset X$ tali che $A \subset U$, esiste un sottoinsieme aperto $V \subset X$ tale che $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$ (con $\overline{V}$ si indica la chiusura di V).

Dim. $(a) \Rightarrow (b)$. Siano X uno spazio normale. Sia A un sottoinsieme chiuso e U un sottoinsieme aperto con $A \subset U$. Allora l'insieme $B = X \backslash U$ è chiuso in X e $A \cap B = \varnothing$. Dunque si possono trovare sottoinsiemi aperti disgiunti V e W di X tali che $A \subset V$ e $B \subset W$. L'insieme V è contenuto nel sottoinsieme chiuso $X \backslash W$ e, dunque, $\overline{V} \subset X \backslash W \subset U$. Questo mostra che X soddisfa (b).
$(b) \Rightarrow (a)$. Viceversa si supponga che X soddisfi (b). Prendiamo A e B, sottoinsiemi di X chiusi e disgiunti. Allora il sottoinsieme aperto $U := X \backslash B$ soddisfa $A \subset U$. Per (b) esiste un sottoinsieme aperto $V \subset X$ tale che $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Si osservi ora che i sottoinsiemi aperti V e $X \backslash \overline{V}$ sono disgiunti, aperti e contengono rispettivamente A e B. Questo mostra che X è normale. $\square$

Proposizione 1.30. *Ogni spazio metrizzabile è normale.*

Dim. Sia (X, d) uno spazio metrico.
Sia $Y \neq \varnothing$ un sottoinsieme di X. La distanza di un punto $x \in X$ da Y è

$$dist(x, Y) := \inf_{y \in Y} d(x, y).$$

Segue dalla disuguaglianza triangolare che la mappa $x \mapsto dist(x, Y)$ è 1-Lipshitz e quindi continua su X. Inoltre si ha $dist(x, Y) = 0$ se e solo so $x \in \overline{Y}$. Siano ora $A, B \neq \varnothing$ due sottoinsiemi chiusi di X. La mappa $f \colon X \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := dist(x, A) - dist(x, B)$$

è continua. I sottoinsiemi aperti $U := \{x \in X \mid f(x) < 0\}$ e $V := \{x \in X \mid f(x) > 0\}$ sono disgiunti e contengono rispettivamente A e B . DI conseguenza lo spazio X è normale. □

Proposizione 1.31. *Ogni spazio di Hausdorff compatto è normale.*

Dim. Siano A e B sottoinsiemi chiusi disiunti di uno spazio di Hausdorff compatto X. Gli insiemi A e B sono compatti in quanto sottoinsiemi chiusi di uno spazio compatto. Dimostriamo che esistono $U, V \subset X$ sottoinsiemi aperti disgiunti tali che $A \subset U$ e $B \subset V$.
Consideriamo prima il caso in cui $B = \{y\}$. Dato che X è Hausdorff, per ogni $x \in X$ si possono trovare U_x, V_x sottoinsiemi disgiunti tali che $x \in U_x$ e $y \in V_x$. Per la compattezza di A esistono finiti punti $x_1, \ldots, x_n$ in A tali che $A \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. Allora i sottoinsiemi aperti $U := U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$ e $V := V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$ hanno le proprietà richieste.
Dimostriamo ora il caso generale. Dalla prima parte della dimostrazione, per ogni $y \in B$ possiamo trovare U_y, V_y sottoinsiemi disgiunti tali che $A \subset U_y$ e $\{y\} \subset V_y$. Per la compattezza di B esistono finiti punti $y_1, \ldots, y_n$ in B tali che $B \subset V_{y_1}, \cup \cdots \cup V_{y_n}$. Allora i sottoinsiemi aperti $U := U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ e $V := V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$ hanno le proprietà richieste. □

Osservazione 1.32. *Esistono spazi compatti e accessibili che non sono normali. Infatti, si consideri un insieme infinito X dotato della topologia cofinita. Allora X è compatto e accessibile ma non Hausdorff. Dunque X non è normale dato che ogni spazio normale e accessibile è Hausdorff.*

Si noti che un sottospazio di uno spazio normale potrebbe non essere normale. Ciononostante si ha il seguente risultato.

Proposizione 1.33. *Ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio normale è normale.*

Dim. Siano X uno spazio normale e $F \subset X$ un sottoinsieme chiuso. Siano $A, B \subset F$ sottoinsiemi chiusi e disgiunti. Dato che F è chiuso in X, gli insiemi A, B sono chiusi in X. Dato che X è normale, si possono trovare $U, V \subset X$ sottoinsiemi disgiunti tali che $A \subset U$ e $B \subset V$. Allora gli insiemi $U \cap F$ e $V \cap F$ sono digiunti, aperti in F e contengono A e B rispettivamente. Di conseguenza lo spazio F è normale. □

1.6 Dimensione topologica di spazi normali

Due famiglie di insiemi $(E_i)_{i\in I}$ e $(F_i)_{i\in I}$, con indici nell'insieme I, sono dette *combinatoriamente equivalenti* se, per ogni sottoinsieme $J \subset I$, si ha

$$\bigcap_{i\in J} E_i \neq \varnothing \iff \bigcap_{i\in J} F_i \neq \varnothing.$$

Osservazione 1.34. *Se $\alpha = (E_i)_{i\in I}$ e $\beta = (F_i)_{i\in I}$ sono famiglie combinatoriamente equivalenti di insiemi e $\gamma = (G_i)_{i\in I}$ è una famiglia di insiemi tale che $E_i \subset G_i \subset F_i$ per ogni $i \in I$, allora γ è combinatoriamente equivalente a α e β.*

Osservazione 1.35. *Date $\alpha = (A_i)_{i\in I}$ e $\beta = (B_i)_{i\in I}$ famiglie di sottoinsiemi di un insieme X combinatoriamente equivalenti, si ha che $ord(\alpha) = ord(\beta)$.*

Proposizione 1.36. *Sia X uno spazio normale. Siano $(F_i)_{i\in I}$ una famiglia finita di sottoinsiemi chiusi di X e $(U_i)_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi aperti di X tale che $F_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$. Allora esiste una famiglia $(V_i)_{i\in I}$ di sottoinsiemi aperti di X che soddisfa le seguenti condizioni:*

(i) $F_i \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$ per ogni $i \in I$;

(ii) le famiglie $(F_i)_{i\in I}, (V_i)_{i\in I}$ e $(\overline{V_i})_{i\in I}$ sono combinatoriamente equivalenti.

Dim. Dato che $(F_i)_{i\in I}$ è una famiglia finita, si può assumere $I = \{1, \ldots, n\}$.
Poniamo $\alpha = (F_1, \ldots, F_n)$ e proviamo l'esistenza, per ogni $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, di una famiglia

$$\alpha^{(k)} = (A_1^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)})$$

di sottoinsiemi di X con le seguenti proprietà:

(C1) per ogni $i \leq k$ l'insieme $A_i^{(k)}$ è aperto in X e si ha

$$F_i \subset A_i^{(k)} \subset \overline{A_i^{(k)}} \subset U_i;$$

(C2) per ogni $i \geq k+1$, si ha $A_i^{(k)} = F_i$;

(C3) le famiglie di insiemi α e $\overline{\alpha^{(k)}}$, dove

$$\overline{\alpha^{(k)}} := (\overline{A_1^{(k)}}, \ldots, \overline{A_n^{(k)}})$$

sono combinatoriamente equivalenti.

Allora la famiglia $\alpha^{(n)}$ avrà le proprietà richieste, cioè, basterà prendere $V_i := A_i^{(n)}$ per ogni $i \in I$.

Proviamo ora l'esistenza di $\alpha^{(k)}$ per induzione su k. Per $k = 0$, prendiamo $\alpha^{(0)} := \alpha$, cioè, $A^{(0)} := F_i$ per ogni $i \in I$. Allora $\alpha^{(0)}$ banalmente soddisfa (C1), (C2) e (C3). Si supponga ora che la famiglia $\alpha^{(k-1)}$ sia già stata costruita per un $k \leq n$. Definiamo allora la famiglia $\alpha^{(k)}$ nel seguente modo. Per ogni $i \in I$ tale che $i \neq k$, prendiamo

$$A_i^{(k)} := A_i^{(k-1)}.$$

Rimane solamente da definire $A_k^{(k)}$. Denotiamo ora con $\mathcal{E}$ l'insieme composto da tutti i sottoinsiemi $J \subset \{1, \ldots, n\} \backslash \{k\}$ tali che

$$F_k \cap \left(\bigcap_{i \in J} \overline{A_i^{(k-1)}} \right) = \varnothing.$$

L'insieme

$$\Phi = \bigcup_{J \in \mathcal{E}} \left(\bigcap_{i \in J} \overline{A_i^{(k-1)}} \right)$$

è chiuso in X dato che è unione finita di sottoinsiemi chiusi. Abbiamo che $F_k \subset X \backslash \Phi$ per definizione di J. Dato che X è normale, segue dalla Proposizione 1.29 che possiamo trovare un sottoinsieme aperto $W \subset X$ tale che

$$F_k \subset W \subset \overline{W} \subset (X \backslash \Phi) \cap U_k.$$

Prendiamo $A_k^{(k)} := W$. Allora la famiglia

$$\alpha^{(k)} := (A_1^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)})$$

soddisfa chiaramente le condizioni (C1) e (C2). Proviamo ora che le famiglie $\overline{\alpha^{(k-1)}}$ e $\overline{\alpha^{(k)}}$ sono combinatoriamente equivalenti. Dato che $\overline{A_i^{(k-1)}} = \overline{A_i^{(k)}}$ per ogni $i \neq k$ e $\overline{A_k^{(k-1)}} = F_k \subset \overline{A_k^{(k)}}$ per costruzione, basta verificare che, per ogni sottoinsieme $J \subset \{1, \ldots, n\backslash\}\{k\}$ tale che

$$\overline{A_k^{(k-1)}} \cap \left(\bigcap_{i \in J} \overline{A_i^{(k-1)}} \right) = \varnothing,$$

si ha

$$\overline{A_k^{(k)}} \cap \left(\bigcap_{i \in J} \overline{A_i^{(k)}} \right) = \varnothing.$$

Dato che $A_k^{(k-1)} = F_k$ e $A_i^{(k-1)} = A_i^{(k)}$ per ogni $i \neq k$, dobbiamo verificare che

$$\overline{A_k^{(k)}} \cap \left(\bigcap_{i \in J} \overline{A_i^{(k-1)}} \right) = \varnothing$$

per ogni $J \in \mathcal{E}$. Questo è conseguenza immediata del fatto che $\overline{A_k^{(k)}} = \overline{W} \subset X \backslash \Phi$. Deduciamo che le famiglie $\overline{\alpha^{(k-1)}}$ e $\overline{\alpha^{(k)}}$ sono combinatoriamente equivalenti. Di conseguenza, la famiglia $\alpha^{(k)}$ soddisfa (C3). □

Andiamo ora a dimostrare alcuni risultati riguardanti i ricoprimenti di spazi normali.

Corollario 1.37. *Sia X uno spazio normale e sia $(U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto finito di X. Allora esiste un ricoprimento aperto $(V_i)_{i \in I}$ di X tale che $\overline{V_i} \subset U_i$ per ogni $i \in I$.*

Dim. I sottoinsiemi $F_i = X \backslash U_i$ sono chiusi in X e soddisfano $\bigcap_{i \in I} F_i = \varnothing$. Usando la Proposizione 1.36, possiamo trovare dei sottoinsiemi aperti $W_i \subset X$, $i \in I$, tali che $F_i \subset W_i$ e $\bigcap_{i \in I} \overline{W_i} = \varnothing$. I sottoinsiemi $V_i = X \backslash \overline{W_i}$ sono aperti in X e ricoprono X. Si ha inoltre che $V_i \subset X \backslash W_i$. Dato che $X \backslash W_i$ è chiuso in X, segue che

$$\overline{V_i} \subset X \backslash W_i \subset X \backslash F_i = U_i.$$

Dunque, i sottoinsiemi V_i hanno le propriea richieste □

Proposizione 1.38. *Sia X uno spazio normale e sia α un ricoprimento aperto finito di X. Allora si ha*

$$D(\alpha) = \min_{\gamma} ord(\gamma),$$

dove γ varia tra tutti i ricoprimenti chiusi finiti di X più fini di α.

Dim. Supponiamo $\alpha = (U_i)_{i \in I}$. Sia γ un ricoprimento chiuso finito di X più fine di α. Ciò vuol dire che esiste una mappa $\varphi\colon J \to I$ tale che $F_j \subset U_{\varphi(j)}$ per ogni $j \in J$. Usando la Proposizione 1.36, possiamo trovare una famiglia $\beta = (V_j)_{j \in J}$ di sottoinsiemi aperti di X che è combinatoriamente equivalente a γ e soddisfa

$$F_j \subset V_j \subset U_{\varphi(j)} \tag{1.39}$$

per ogni $j \in J$. Da 1.39 si deduce che β è un ricoprimento aperto finito di X più fine di α. Per la definizione di $D(\alpha)$ abbiamo quindi che $D(\alpha) \leq ord(\beta)$. Essendo γ e β ricoprimenti combinatoriamente equivalenti si ha che $ord(\gamma) = ord(\beta)$, questo implica che $D(\alpha) \leq ord(\gamma)$. Viceversa, si supponga ora che $\beta = (V_j)_{j \in J}$ sia un ricoprimento aperto finito di X più fine di α che soddisfa $D(\alpha) = ord(\beta)$. Per il Corollario 1.37, esiste un ricoprimento chiuso $\gamma = (F_j)_{j \in J}$ di X tale che $F_j \subset V_j$ per ogni $j \in J$. Tale ricoprimento è più fine di β e quindi, per la transitività di $\succ$, più fine di α. Inoltre, soddisfa $ord_x(\gamma) \leq ord_x(\beta)$ per ogni $x \in X$. Possiamo quindi concludere che $ord(\gamma) \leq ord(\beta) = D(\alpha)$. □

Corollario 1.40. *Sia X uno spazio normale e sia $n \in \mathbb{N}$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) $dim(X) \leq n$;

(b) per ogni ricoprimento aperto finito α di X, esiste un ricoprimento chiuso finito $\beta \succ \alpha$ tale che $ord(\beta) \leq n$.

Dim. Questa è una conseguenza immediata della Proposizione 1.38 dato che, dalla definizione, si ha che

$$dim(X) = \sup_{\alpha} D(\alpha),$$

dove α varia tra tutti i ricoprimenti aperti finiti di X. □

Corollario 1.41. *Sia X uno spazio metrico compatto e sia $n \in \mathbb{N}$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) $dim(X) \leq n$;

(b) per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un ricoprimento chiuso finito α di X tale che $mesh(\alpha) \leq \varepsilon$ e $ord(\alpha) \leq n$;

(c) esiste una successione $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di ricoprimenti chiusi finiti di X tali che $\lim\limits_{k\to\infty} mesh(\alpha_k) = 0$ e $ord(\alpha_k) \leq n$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Dim. Le condizioni (b) e (c) sono chiaramente equivalenti.
Sia $\varepsilon > 0$. Se $dim(X) \leq n$, segue dalla Proposizione 1.26 che esiste un ricoprimento aperto finito β di X con $ord(\beta) \leq n$ e $mesh(\beta) \leq \varepsilon$. Si ha allora $D(\beta) \leq ord(\beta) \leq n$. Dato che X è normale, si deduce dalla Proposizione 1.40 che esiste un ricoprimento chiuso α di X tale che $\alpha \succ \beta$ e $ord(\alpha) \leq n$. Questo mostra che (a) implica (b).
Viceversa, supponiamo (b). Sia α un ricoprimento aperto finito di X. Sia $\lambda > 0$ un numero di Lebesgue di α. Dato che la condizione (b) è soddisfatta, esiste un ricoprimento chiuso finito β di X tale che $mesh(\beta) \leq \lambda$ e $ord(\beta) \leq n$. Questo implica che $\beta \succ \alpha$ e quindi $D(\alpha) \leq n$ per la Proposizione 1.40. Di conseguenza, si ha che $dim(X) \leq n$. Questo mostra che (b) implica (a). $\square$

Capitolo 2

Spazi topologici zero-dimensionali

In questo capitolo andremo ad approfondire gli spazi topologici zero-dimensionali. Come conseguenza di quanto visto nel capitolo 1, gli spazi zero-dimensionali devono ammettere partizioni aperte arbitrariamente fini, e quindi, dato che ogni partizione aperta è formata da sottoinsiemi chiuso-aperti, gli spazi zero-dimensionali devono contenere molti sottoinsiemi chiuso-aperti, rivelando così la loro natura di spazi molto disconnessi. Andremo a vedere la relazione tra classi di spazi topologici zero-dimensionali e altre classi di spazi molto disconnessi, tra i quali gli spazi scattered, la classe degli spazi totalmente disconnessi, e la classe degli spazi totalmente separati.

2.1 L'insieme di Cantor

In questa sezione descriveremo la costruzione dell'insieme di Cantor, un esempio fondamentale di spazio metrizzabile compatto con dimensione topologica zero.
Siano a e b numeri reali con $a < b$. L'intervallo aperto

$$\left(a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3}\right) = \left(\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}\right)$$

è chiamato il *terzo centrale* del segmento $[a, b]$. Denotiamo con $T([a, b])$ l'insieme ottenuto eliminando dal segmento $[a, b]$ il suo terzo centrale, ottenendo così

$$T([a,b]) := \left[a, a + \frac{b-a}{3}\right] \cup \left[b - \frac{b-a}{3}, b\right] = \left[a, \frac{2a+b}{3}\right] \cup \left[\frac{a+2b}{3}, b\right].$$

Più in generale, per ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$, unione di una famiglia finita $([a_i, b_i])_{1 \leq i \leq k}$ di segmenti a due a due disgiunti, definiamo

$$T(A) := \bigcup_{i=1}^{k} T([a_i, b_i]).$$

Definiamo ora una successione decrescente rispetto all'inclusione $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi chiusi di $[0, 1]$ ponendo

$$K_0 := [0, 1],$$
$$K_{n+1} := T(K_n) \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Abbiamo quindi

$$K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$
$$K_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right],\ K_3 = \dots.$$

Si osservi che l'insieme K_n è l'unione di 2^n segmenti a due a due disgiunti di lunghezza $1/3^n$. Questi segmenti sono le componenti connesse di K_n.
L'insieme

$$K := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

è chiamato *insieme ternario di Cantor* o semplicemente *insieme di Cantor*. Uno spazio topologico omeomorfo all'insieme di Cantor è chiamato *spazio di Cantor*.

Proposizione 2.1. *L'insieme di Cantor K è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$ con interno vuoto.*

Dim. Dato che gli insiemi K_n sono chiusi in $[0, 1]$, e che l'intersezione di insiemi chiusi è chiusa, l'insieme di Cantor è chiuso in $[0, 1]$ ed è di conseguenza compatto.
Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ tale che $I \subset K$. Il fatto che I è connesso implica che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme I sia contenuto in una delle 2^n componenti connesse di K_n. Dato che ognuna delle componenti connesse di K_n ha lunghezza $1/3^n$ e che I è sottoinsieme di una di tali componenti connesse, si ha che I ha lunghezza minore o uguale a $1/3^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Osservando che $\lim_{n\to\infty} 1/3^n = 0$, otteniamo che anche I ha lunghezza zero e, dunque, è vuoto oppure ridotto ad un singolo punto. Questo mostra che K ha interno vuoto. $\square$

Proposizione 2.2. *L'insieme di Cantor ha dimensione topologica $dim(K) = 0$.*

Dim. L'insieme K_n è l'unione disgiunta di 2^n segmenti $\Sigma_n(i), 1 \leq i \leq 2^n$ chiuso-aperti in K_n. Definiamo l'insieme $U_n(i) := K \cap \Sigma_n(i)$. La famiglia $\alpha_n := (U_n(i))_{1 \leq i \leq 2^n}$ è una partizione aperta finita di K. Dunque si ha $ord(\alpha_n) = 0$. Dato che $mesh(\alpha_n) = 1/3^n$ tende a 0 per $n \to \infty$, deduciamo, usando la Proposizione 1.26, che $dim(K) = 0$. Si osservi che $K \neq \varnothing$ dato che $0 \in K$. □

Si ricordi che ogni numero reale ammette una *espansione ternaria*, cioè una successione $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ tale che

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{3^{k+1}}.$$

Scriveremo questa uguaglianza anche nella forma

$$x = \overline{0, u_0 u_1 u_2 \dots u_k \dots}.$$

Quando x non è un numero razionale della forma $n/3^m$ con $n, m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq n \leq 3^m - 1$, tale espansione è unica. Quando lo è, il numero x ammette due espansioni: la prima chiamata *espansione ternaria propria* di x, che termina con infiniti 0 consecutivi e l'altra, chiamata *espansione ternaria impropria*, che termina con infiniti 2 consecutivi. Per esempio si ha

$$\frac{1}{4} = \overline{0, 0202020202\dots}$$

e

$$\frac{7}{9} = \overline{0, 2100000\dots} = \overline{0, 202222\dots}.$$

L'insieme K_n è composto da tutti i numeri $x \in [0, 1]$ che ammettono un'espansione ternaria $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $u_k \in \{0, 2\}$ per ogni $k \leq n - 1$. Si deduce che l'insieme di Cantor K è l'insieme composto dai numeri $x \in [0, 1]$ che ammettono un'espansione ternaria i cui termini appartengono all'insieme $\{0, 2\}$. Quindi, le espansioni ternarie date sopra mostrano che sia $1/4$ che $7/9$ appartengono a K.

Andiamo ora a dimostrare che l'insieme di Cantor K è omeomorfo all'insieme $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Proposizione 2.3. *La mappa* $\varphi\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to K$ *definita da*

$$\varphi(u) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2u_k}{3^{k+1}}$$

per ogni $u = (u_k) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *è un omeomorfismo dallo spazio prodotto* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *sull'insieme di Cantor* K*.*

Dim. Dalle osservazioni precedenti otteniamo che la mappa φ è ben definita e biiettiva. Fissiamo una successione $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Per ogni intero $n \geq 0$, l'insieme $V_n(u) \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ composto da tutte le successioni v tali che $v_k = u_k$ per ogni $k \leq n$ è un intorno aperto di u. Per ogni $v \in V_n(u)$, abbiamo che

$$|\varphi(u) - \varphi(v)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{1}{3^{n+1}}.$$

Dato che $\lim_{n\to\infty} 1/3^{n+1} = 0$, possiamo dedurre che φ è continua. Lo spazio $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ è prodotto di spazi compatti e quindi per il teorema di Tichonov è compatto. Possiamo dunque concludere che φ è un omeomorfismo. □

Osservando che l'insieme $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ha la cardinalità del continuo otteniamo il seguete risultato.

Corollario 2.4. *L'insieme di Cantor non è numerabile.*

Introduciamo ora la nozione di spazio topologico perfetto.

Definizione 2.5. Sia X uno spazio topologico. Un punto $x \in X$ è detto *isolato* se il singoletto $\{x\}$ è aperto in X.
Uno spazio topologico è detto *perfetto* se non contiene punti isolati.

Corollario 2.6. *L'insieme di Cantor è perfetto.*

Dim. Sia $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Si considerino i sottoinsiemi aperti

$$V_n(u) := \{v \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} | v_k = u_k \text{ per ogni } k \leq n\} \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

Per la definizione di topologia prodotto, ogni intorno di u in $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ contiene gli insiemi $V_n(u)$ per n abbastanza grande. Dato che l'insieme $V_n(u)$ è infinito per ogni n, si deduce che u non è isolato. Questo mostra che lo spazio $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ è perfetto. Dato che K è omeomorfo a $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, si ha che anche K è perfetto. □

2.2 Scattered spaces

In questa sezione introduciamo la classe degli *spazi scattered*. Proveremo che uno spazio topologico accessibile X è scattered se e solo se esiste un insieme E tale che X è omeomorfo ad un sottospazio dello spazio prodotto $\{0,1\}^E$.
Diamo ora delle definizioni fondamentali di topologia generale che serviranno per definire gli spazi scattered.

Definizione 2.7. Sia X uno spazio topologico. Una *base* dello spazio topologico X è un insieme $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi aperti di X tale che ogni sottoinsieme aperto di X può essere scritto come unione di elementi di $\mathcal{B}$.
Un insieme $\mathcal{N}$ di intorni di un punto $x \in X$ è chiamato *base di intorni* di x se, per ogni intorno aperto V di x, esiste un $N \in \mathcal{N}$ tale che $N \subset V$. Si osservi che un insieme $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi aperti di X è una base di X se e solo se, per ogni $x \in X$, l'insieme

$$\mathcal{B}_x := \{B \in \mathcal{B} | x \in B\}$$

è una base di intorni del punto x.

Se $\mathcal{B}$ è una base di uno spazio topologico X , allora $\mathcal{B}$ soddisfa le seguenti condizioni:

(B1) gli elementi di $\mathcal{B}$ ricoprono X;

(B2) se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$, allora esiste $B_3 \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Viceversa, se X è un insieme e $\mathcal{B}$ è un insieme di sottoinsiemi di X che soddisfa le condizioni (B1) e (B2), allora esiste un'unica topologia su X che ammette $\mathcal{B}$ come base.

Esempio 2.8. Sia X uno spazio metrico. Allora l'insieme composto da tutte le palle aperte $B(x, 1/n)$, dove $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, è una base di X.

Ricordiamo che un sottoinsieme di uno spazio topologico X viene detto *chiuso-aperto* se è sia aperto che chiuso in X. Si noti che i sottoinsiemi chiuso-aperti di uno spazio topologico sono i sottoinsiemi aventi frontiera vuota.

Definizione 2.9. Uno spazio topologico X è detto *scattered* se ammette una base composta da sottoinsiemi chiuso-aperti di X.

Uno spazio topologico X è scattered se e solo se ogni punto di X ammette una base di intorni composta da sottoinsiemi chiuso-aperti.

Esempio 2.10. Ogni insieme dotato della topologia discreta è scattered.

Osservazione 2.11. *Uno spazio connesso X è scattered se e solo se la topologia su X è quella banale.*

Si noti che uno spazio scattered potrebbe non essere accessibile. Per esempio, ogni insieme X dotato della topologia banale è scattered. Tuttavia, tale spazio X non è accessibile se X contiene più di un punto.

Proposizione 2.12. *Ogni spazio scattered accessibile è uno spazio di Hausdorff.*

Dim. Sia X uno spazio scattered accessibile. Prendiamo $x, y \in X$ con $x \neq y$. Dato che X è accessibile, l'insieme $X \backslash \{y\}$ è un intorno aperto di x e, dato che X è scattered, possiamo trovare un intorno chiuso-aperto V di x contenuto in $X \backslash \{y\}$. Gli insiemi V e $X \backslash V$ sono quindi sottoinsiemi aperti disgiunti di X che contengono x e y rispettivamente. Questo mostra che X è Hausdorff. $\square$

Proposizione 2.13. *Ogni sottospazio di uno spazio scattered è scattered.*

Dim. Siano X uno spazio scattered e $Y \subset X$. Se $\mathcal{B}$ è una base per X composta da sottoinsiemi chiuso-aperti, allora la famiglia $\mathcal{B}'$ formata dagli insiemi $Y \cap B$, dove $B \in \mathcal{B}$, è una base di Y composta da sottoinsiemi chiuso-aperti e di conseguenza Y è scattered. $\square$

Proposizione 2.14. *Il prodotto di spazi scattered è scattered.*

Dim. Sia $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia di spazi scattered e si consideri il loro prodotto diretto $X := \prod_{i \in I} X_i$. Per ogni $i \in I$ sia $\mathcal{B}_i$ una base di X_i composta da insiemi chiuso-aperti. Si può assumere $X_i \in \mathcal{B}_i$. Allora l'insieme dei prodotti $\prod_{i \in I} U_i$, dove $U_i \in \mathcal{B}_i$ per ogni $i \in I$ e $U_i = X_i$ per tutti tranne un numero finito di $i \in I$, sono chiuso-aperti in X e formano una base per la topologia prodotto. Di conseguenza X è scattered. $\square$

Nello spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$ ogni palla aperta è connessa. Di conseguenza, ogni sottoinsieme scattered di $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ deve avere interno vuoto. Per i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ è possibile dimostrare anche l'inverso.

Proposizione 2.15. *Sia X un sottoinsieme della retta reale $\mathbb{R}$. Allora X è scattered se e solo se ha interno vuoto.*

Dim. Abbiamo già visto che la condizione è necessaria. Mostriamo che è anche sufficiente. Si supponga X con interno vuoto. Siano $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Dato che X ha interno vuoto, possiamo trovare due numeri reali $a, b \notin X$ tali che $x - \varepsilon < a < x < b < x + \varepsilon$. Allora l'insieme $V := (a, b) \cap X = [a, b] \cap X$ è un intorno chiuso-aperto di x in X che soddisfa $V \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Questo mostra che X è scattered. □

Come conseguenza della Proposizione precedente possiamo vedere che l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri irrazionali $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ e l'insieme di Cantor K sono scattered, in quanto sottoinsiemi della retta reale aventi dimensione topologica 0.

Proposizione 2.16. *Sia X uno spazio accessibile. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) lo spazio X è scattered;

(b) esiste un insieme E tale che X è omeomorfo ad un sottoinsieme dello spazio prodotto $\{0, 1\}^E$.

Dim. Dato un insieme E, usando la Proposizione 2.14 possiamo vedere che lo spazio $\{0, 1\}^E$ è scattered dal momento che è prodotto di spazi discreti. Dato che ogni sottoinsieme di uno spazio scattered è scattered per la proposizione 2.13, questo mostra che (b) implica (a).
Viceversa, si supponga che X sia uno spazio scattered. Sia E una base di X composta da sottoinsiemi chiuso-aperti. Si consideri la mappa $\varphi \colon X \to \{0, 1\}^E$ definita da $\varphi(x) = (\chi_B((x))_{B \in E}$, dove $\chi_B \colon X \to \{0, 1\}$ è la mappa caratteristica di B. Dato che B è chiuso-aperto in X, la mappa χ_B è continua per ogni $B \in E$. Di conseguenza anche φ è continua. D'altra parte, dato che X è accessibile, se $x, y \in X$ con $x \neq y$, allora $X \backslash \{x\}$ è un intorno aperto di y. Dunque, esiste un intorno $B_0 \in E$ di y tale he $B_0 \subset X \backslash \{x\}$. Questo implica $\chi_{B_0}(x) \neq \chi_{B_0}(y)$ e quindi $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Ne consegue che φ è iniettiva. Abbiamo che $\varphi(B) = \varphi(X) \cap \pi_B^{-1}(1)$, dove $\pi_B \colon \{0, 1\}^E \to \{0, 1\}$ è la mappa proiezione sul B-fattore di $\{0, 1\}^E$. Questo mostra che $\varphi(B)$ è aperto in $\varphi(X)$ per ogni $B \in E$. Dato che E è base di X, deduciamo che l'immagine per φ

di ogni sottoinsieme aperto di X è aperto in $\varphi(X)$. Possiamo quindi concludere che φ induce un omeomorfismo da X su $\varphi(X)$. Dunque, lo spazio X soddisfa (b). □

2.3 Spazi zero-dimensionali scattered

In questa sezione daremo una caratterizzazione degli spazi topologici zero-dimensionali. Questa caratterizzazione mostrerà che ogni spazio accessibile zero-dimensionale è scattered.

Teorema 2.17. *Sia $X \neq \varnothing$ uno spazio topologico. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) $dim(X) = 0$;

(b) per ogni coppia di sottoinsiemi chiusi disgiunti $A, B \subset X$, esistono sottoinsiemi aperti disgiunti $U, V \subset X$ tali che $X = U \cup V$, $A \subset U$ e $B \subset V$;

(c) per ogni sottoinsieme chiuso $A \subset X$ e ogni sottoinsieme aperto $U \subset X$ tali che $A \subset U$, esiste un sottoinsieme chiuso-aperto $V \subset X$ tale che $A \subset V \subset U$.

Dim. Si supponga che $dim(X) = 0$. Siano $A, B \subset X$ sottoinsiemi chiusi disgiunti. Si consideri il ricoprimento aperto $\alpha = \{X \backslash A, X \backslash B\}$. Dato che $dim(X) = 0$, esiste una partizione aperta finita β di X tale che $\beta \succ \alpha$. Dalla scelta di α abbiamo che nessun elemento di β può intersecare sia A che B. Denotiamo con U l'unione di tutti gli elementi di β che intersecano A e sia $V := X \backslash U$. Gli insiemi U e V formano una partizione aperta di X. Inoltre, abbiamo che $A \subset U$ e $B \subset V$. Questo mostra che (a) implica (b).
Mostriamo ora che (b) implica (c). Sia supponga che X soddisfi (b). Siano A un sottoinsieme chiuso di X e U un sottoinsieme aperto di X tali che $A \subset U$. Allora $B := X \backslash U$ è un sottoinsieme chiuso che non interseca A. Per (b), segue che esiste una partizione di X in due sottoinsiemi aperti V e W tali che $A \subset V$ e $B \subset W$. Allora l'insieme V è chiuso-aperto in X e abbiamo $A \subset V \subset U$. Questo mostra che X soddisfa (c).
Proviamo infine che (c) implica (a). Si supponga che X soddisfi (c). Sia $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto finito di X. Dato che X soddisfa (c), segue dalla proposizione 1.29 che X è normale. Applicando il corollario 1.37, deduciamo che esiste un ricoprimento chiuso $(F_i)_{i \in I}$

di X tale che $F_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$. Dato che X soddisfa (c), possiamo trovare, per ogni $i \in I$, un sottoinsieme chiuso-aperto V_i di X tale che $F_i \subset V_i \subset U_i$. Senza perdita di generalità, possiamo assumere che $I = \{1, \ldots, n\}$. Si consideri la famiglia $\beta = (W_i)_{i \in I}$ di sottoinsiemi di X definita da $W_1 := V_1$ e

$$W_i := V_i \backslash (V_1 \cup \cdots \cup V_{i-1})$$

per ogni $i \in \{2, \ldots, n\}$. Chiaramente $\beta := (W_i)_{i \in I}$ è una partizione di X. Inoltre abbiamo che $\beta \succ \alpha$ dato che $W_i \subset V_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$. Questo mostra che $dim(X) = 0$. □

Corollario 2.18. *Ogni spazio topologico X avente $dim(X) = 0$ è normale.*

Dim. Uno spazio topologico X avente $dim(X) = 0$ soddisfa la condizione (b) del teorema precedente ed è quindi normale. □

Corollario 2.19. *Ogni spazio accessibile X avente $dim(X) = 0$ è scattered.*

Dim. Sia X uno spazio accessibile con $dim(X) = 0$. Sia V un intorno di un punto $x \in X$. Dato che X è accessibile, il singoletto $\{x\}$ è chiuso in X. Inoltre, dato che $dim(X) = 0$, lo spazio X soddisfa la condizione (c) del teorema precedente . Dunque esiste $U \subset X$ chiuso-aperto tale che $x \in U \subset V$. Di conseguenza ogni punto di X ammette una base di intorni composta da sottoinsiemi chiuso-aperti di X. Possiamo quindi concludere che X è scattered. □

Corollario 2.20. *Se X è uno spazio topologico accessibile con $dim(X) = 0$, allora X è di Hausdorff.*

Dim. Ogni spazio scattered accessibile è Hausdorff per la Proposizione 2.12. □

Osservazione 2.21. *Il Corollario 2.20 può anche essere dedotto dal Corollario 2.18 dato che, come già osservato nella sezione 1.5, ogni spazio normale accessibile è Hausdorff.*

2.4 Spazi di Lindelöf

In questa sezione introdurremo la classe degli spazi di Lindelöf e proveremo che ogni spazio di Lindelöf non vuoto e scattered ha dimensione topologica 0.

Definizione 2.22. Uno spazio topologico X è chiamato *spazio di Lindelöf* se ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento numerabile.

Vediamo ora qualche esempio di spazi di Lindelöf.

Esempio 2.23. Ogni spazio topologico numerabile è di Lindelöf. Infatti si supponga che X sia uno spazio topologico numerabile. Sia $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X. Si scelga, per ogni $x \in X$, un indice $i(x) \in I$ tale che $x \in U_{i(x)}$. Sia $J := \{i(x)|x \in X\}$. Allora $\beta := (U_i)_{i\in J}$ è un sottoricoprimento numerabile di α.

Esempio 2.24. Ogni spazio compatto è uno spazio di Lindelöf. Infatti, per la definizione di compattezza, uno spazio topologico X è compatto se e solo se ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito.

Esempio 2.25. Ogni spazio topologico che è unione numerabile di una famiglia di sottoinsiemi Lindelöf (per la topologia indotta) è Lindelöf. In particolare, ogni spazio $\sigma-$ *compatto* è Lindelöf (si ricordi che uno spazio topologico è detto $\sigma-$*compatto* se è l'unione di una famiglia numerabile di sottoinsiemi compatti). Dato che lo spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$ è $\sigma-$*compatto*, otteniamo che è anche Lindelöf per ogni intero $n \geq 1$.

Esempio 2.26. Se un insieme non numerabile X è dotato della sua topologia discreta, allora X non è Lindelöf. Infatti, il ricoprimento aperto $\alpha := (\{x\})_{x\in X}$ non ammette sottoricoprimenti numerabili. Si noti però che X è metrizzabile (una metrica che induce questa topologia è data da $d(x, y) = 0$ se $x = y$ e $d(x, y) = 1$ altrimenti) e localmente compatto.

Un sottoinsieme di uno spazio di Lindelöf non è necessariamente di Lindelöf. Tuttavia si ha il seguente risultato.

Proposizione 2.27. *Ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio di Lindelöf è di Lindelöf.*

Dim. Siano X uno spazio di Lindelöf e F un sottoinsieme chiuso di X. Prendiamo un ricoprimento aperto $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ di F. Allora, per ogni $i \in I$, possiamo trovare un sottoinsieme aperto $V_i \subset X$ tale che $U_i = V_i \cap F$. Dato che la famiglia $(V_i)_{i\in I} \cup \{X\backslash F\}$ è un ricoprimento aperto di X e X è Lindelöf, esiste un sottoinsieme numerabile $J \subset I$ tale che la famiglia $(V_j)_{j\in J} \cup \{X\backslash F\}$ ricopre X. Allora la famiglia $(U_j)_{j\in J}$ è un sottoricoprimento numerabile di α. Questo mostra che F è Lindelöf. $\square$

Tuttavia si osservi che il prodotto di due spazi di Lindelöf potrebbe non essere Lindelöf.

Definizione 2.28. Uno spazio topologico è detto *secondo numerabile* se ammette una base numerabile.

Per esempio, lo spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$ è secondo numerabile dal momento che le palle aperte $B(x, 1/m)$, dove $x \in \mathbb{Q}^n$ e $m \geq 1$ è un intero, formano una base numerabile di $\mathbb{R}^n$.
Uno spazio topologico X è detto *primo numerabile* se ogni punto di X ammette una base numerabile di intorni. Chiaramente ogni spazio topologico secondo numerabile è anche primo numerabile. Tuttavia, un spazio primo numerabile non è necessariamente secondo numerabile. Per esempio, un insieme non numerabile dotato della topologia discreta è primo numerabile ma non secondo numerabile.
Vediamo ora alcune proprietà degli spazi secondo numerabili.

Proposizione 2.29. *Ogni sottoinsieme di uno spazio topologico secondo numerabile è secondo numerabile.*

Dim. Se X è uno spazio topologico che ammette una base numerabile $\mathcal{B}$ e $Y \subset X$, allora l'insieme composto da tutti i sottoinsiemi del tipo $Y \cap B$, dove $B \in \mathcal{B}$, è chiaramente una base numerabile di Y. □

Proposizione 2.30. *Ogni prodotto numerabile di spazi secondo numerabili è secondo numerabile.*

Dim. Sia $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia numerabile di spazi secondo numerabili e si consideri il loro prodotto diretto $X := \prod_{i \in I} X_i$. Per ogni $i \in I$ sia $\mathcal{B}_i$ una base numerabile di X_i. Possiamo assumere che $X_i \in \mathcal{B}_i$. Allora gli insiemi della forma $\prod_{i \in I} U_i$, dove $U_i \in \mathcal{B}_i$ per ogni $i \in I$ e $U_i = X_i$ per tutti tranne un numero finito di $i \in I$, formano una base numerabile per la topologia prodotto. Dunque X è secondo numerabile. □

Proposizione 2.31 (Lindelöf)**.** *Ogni spazio topologico secondo numerabile è Lindelöf.*

Dim. Siano X uno spazio topologico che ammette una base numerabile $\mathcal{B}$ e $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Si denoti con $\mathcal{B}'$ l'insieme composto da tutti i $B \in \mathcal{B}$ tali che esiste

$i \in I$ che soddisfa $B \subset U_i$. Definiamo la mappa $\varphi\colon \mathcal{B}' \to I$ scegliendo, per ogni $B \in \mathcal{B}'$, un indice $\varphi(B) \in I$ tale che $B \subset U_{\varphi(B)}$. Allora l'immagine $J = \varphi(\mathcal{B}') \subset I$ è numerabile. Sia $x \in X$. Dato che α ricopre X, possiamo trovare un indice $i(x) \in I$ tale che $x \in U_{i(x)}$. Dato che $\mathcal{B}$ è una base di X, esiste un sottoinsieme aperto $B(x) \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B(x) \subset U_{i(x)}$. Abbiamo che $B(x) \in \mathcal{B}'$, per definizione di $\mathcal{B}'$, e $x \in B(x) \subset U_{\varphi(B(x))}$. Segue che $(U_i)_{i \in J}$ è un ricoprimento aperto di X. Questo mostra che X è di Lindelöf. □

Definizione 2.32. Uno spazio topologico è detto *separabile* se ammette un sottoinsieme numerabile denso.

Lo spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ è separabile dato che $\mathbb{Q}^n$ è un suo sottoinsieme numerabile denso.

Proposizione 2.33. *Ogni spazio topologico secondo numerabile è separabile.*

Dim. Siano X uno spazio topologico e $\mathcal{B}$ una base di X. Per ogni $B \in \mathcal{B}$ con $B \neq \varnothing$ scegliamo un punto $x_B \in B$ e denotiamo con Y l'insieme composto da tali punti x_B. Dato che $\mathcal{B}$ è una base per X, ogni sottoinsieme aperto non-vuoto di X contiene un sottoinsieme $B \in \mathcal{B}$ e quindi un punto di Y. Di conseguenza Y è denso in X. Dato che, per ipotesi, $\mathcal{B}$ è numerabile, abbiamo che anche Y è numerabile e quindi X è separabile. □

Dalle Proposizioni 2.29, 2.31 e 2.33, si deduce immediatamente il seguente risultato.

Corollario 2.34. *Ogni sottoinsieme di uno spazio secondo numerabile è separabile e Lindelöf. In particolare, ogni sottoinsieme dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$ è separabile e Lindelöf.*

Il seguente esempio mostra che uno spazio di Hausdorff separabile e compatto può non essere primo numerabile.

Esempio 2.35. Sia X l'insieme formato da tutte le mappe da $\mathbb{R}$ sul segmento unitario $[0, 1]$. Dotiamo X della topologia della convergenza uniforme. Lo spazio X può quindi essere identificato con lo spazio prodotto $[0, 1]^{\mathbb{R}}$ ed è uno spazio di Hausdorff compatto per il teorema di Tichonov. Sia $f \in X$. Per la definizione della topologia della convergenza puntuale, per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni sottoinsieme finito $A \subset \mathbb{R}$, l'insieme

$$V(f, \varepsilon, A) := \{g \in X \mid |f(x) - g(x)| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in A\}$$

è un intorno aperto di f. Inoltre, gli insiemi $V(f,\varepsilon,A)$, dove $\varepsilon > 0$ e $A \subset \mathbb{R}$ è un sottoinsieme finito, formano una base di intorni di f. Denotiamo con D il sottoinsieme di X composto da tutte le combinazioni lineari finite con coefficienti razionali di mappe caratteristiche di segmenti di $\mathbb{R}$ con estremi razionali. Chiaramente D è denso in X. Dato che D è numerabile, questo mostra che X è separabile. Tuttavia, X non è primo numerabile. Altrimenti, ogni $f \in X$ ammetterebbe una base numerabile di intorni $W_n, n \in \mathbb{N}$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esisterebbero $\varepsilon_n > 0$ e dei sottoinsiemi finiti $A_n \subset \mathbb{R}$ tali che $V(f,\varepsilon_n,A_n) \subset W_n$. L'insieme $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ sarebbe numerabile e quindi avremmo $\mathbb{R}\backslash E \neq \varnothing$. Prendendo un punto $x_0 \in \mathbb{R}\backslash E$, ogni mappa $g\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ tale che $g(x_0) \neq f(x_0)$ e $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$ soddisferebbe $g \in W_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dato che X è Hausdorff, questo implicherebbe $g = f$, che contraddice $g(x_0) \neq f(x_0)$. Di conseguenza X non è primo numerabile e quindi neanche secondo numerabile.

Osservazione 2.36. *Lo spazio topologico nell'esempio precedente non è metrizzabile. Infatti, ogni spazio metrizzabile è primo numerabile dato che, in uno spazio metrico X, ogni punto $x \in X$ ammette una base di intorni numerabile, ovvero quella formata dalle palle aperte $B(x,1/n), n \geq 1$.*

Per gli spazi metrizzabili, abbiamo le seguenti condizioni equivalenti.

Proposizione 2.37. *Sia X uno spazio metrizzabile. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) X è secondo numerabile;

(b) X è Lindelöf;

(c) X è separabile;

(d) X è omeomorfo ad un sottoinsieme del cubo di Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

Dim. Il fatto che (a) implichi (b) è conseguenza della Proposizione 2.31.
Fissiamo su X una metrica d compatibile con la sua topologia.
Si supponga (b). Dato un intero $n \geq 1$, si consideri il ricoprimento di X formato dalle palle aperte $B(x,1/n), x \in X$. Dato che X è Lindelöf, esiste un sottoinsieme numerabile $Y_n \subset X$

tale che le palle $B(y, 1/n), y \in Y_n$, ricoprono X. L'insieme $Y := \bigcup_{n\geq 1} Y_n$ è numerabile e denso in X. Di conseguenza X è separabile. Questo mostra che (b) implica (c).
Il segmento unitario $[0,1] \subset \mathbb{R}$ è secondo numerabile. Dunque la condizione (d) implica (a) dato che ogni prodotto numerabile di spazi topologici secondo numerabili è secondo numerabile per la Proposizione 2.30 e ogni sottoinsieme di spazi secondo numerabili è secondo numerabile per la Proposizione 2.29.
Per completare la dimostrazione, basta provare che (c) implica (d). Si supponga (c). Sia $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ un sottoinsieme denso e numerabile di X. Dopo aver eventualmente rimpiazzato la metrica $d(x, y)$ con la metrica $\min(d(x, y), 1)$, che è compatibile con la topologia su X, possiamo assumere che $diam(X) \leq 1$. Si consideri la mappa $F \colon X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ definita da

$$F(x) = (d(x, a_n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

La mappa F è continua dato che tutte le mappe $x \mapsto d(x, a_n)$ sono continue. Dal momento che ogni punto di X è il limite di una successione di punti di A, segue che F è iniettiva (unicità del limite negli spazi di Hausdorff). Siano ora $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$. Dato che A è denso in X, esiste un intero $n_0 \geq 0$ tale che $d(x_0, a_{n_0}) < \varepsilon/2$. Allora il sottoinsieme $U \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ formato delle successioni $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ tali che $u_{n_0} < \varepsilon/2$ è un intorno aperto di $F(x_0)$. Se $x \in X$ è tale che $F(x) \in U$, allora x soddisfa $d(x, a_{n_0}) < \varepsilon/2$ e quindi

$$d(x, x_0) \leq d(x, a_{n_0}) + d(x_0, a_{n_0}) < \varepsilon,$$

applicando la disuguaglianza triangolare. Di conseguenza abbiamo che

$$F^{-1}(U) \subset B(x_0, \varepsilon).$$

Deduciamo che F induce un omeomorfismo da X su $F(X)$. Questo mostra che X soddisfa (d) □

Dato che ogni spazio compatto è Lindelöf, abbiamo il seguente risultato.

Corollario 2.38. *Ogni spazio compatto e metrizzabile è secondo numerabile e quindi separabile.*

Come conseguenza del Corollario 2.19 abbiamo che ogni spazio topologico accessibile X avente $dim(X) = 0$ è scattered. Il seguente teorema afferma che anche l'inverso è vero nella classe degli spazi di Lindelöf. Questo risulta molto utile per mostrare che certi spazi sono zero-dimensionali.

Teorema 2.39. *Sia $X \neq \varnothing$ uno spazio di Lindelöf scattered. Allora si ha $dim(X) = 0$.*

Dim. Dato che X è scattered, X ammette una base $\mathcal{B}$ composta da sottoinsiemi chiuso-aperti. Si consideri un ricoprimento aperto finito $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ di X. Per ogni $x \in X$, possiamo trovare un indice $i(x) \in I$ tale che $x \in U_{i(x)}$. Dato che $\mathcal{B}$ è una base di X, esiste un $B(x) \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B(x) \subset U_{i(x)}$. I sottoinsiemi $B(x)$, $x \in X$ formano un ricoprimento aperto di X. Dato che X è Lindelöf, questo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento numerabile. Pertanto esiste un ricoprimento $\beta = (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di X tale che $\beta \succ \alpha$ e $B_n \in \mathcal{B}$ per ogni n.
Si consideri la successione $\gamma = (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di sottoinsiemi di X definita da $C_0 := B_0$ e

$$C_n := B_n \backslash (B_o \cup \cdots \cup B_{n-1})$$

per ogni intero $n \geq 1$. Dato che i sottoinsiemi B_n sono chiuso-aperti e ricoprono X, è chiaro che γ è una partizione aperta di X. D'altra parte abbiamo che $\gamma \succ \beta \succ \alpha$. Usando la Proposizione 1.7, deduciamo che $D(\alpha) = 0$. Quindi si ha $dim(X) = \sup_\alpha D(\alpha) = 0$. □

Per il corollario 2.19, ogni spazio accessibile X con $dim(X) = 0$ è scattered. Combinando questo risultato con il teorema precedente, abbiamo il seguente risultato.

Corollario 2.40. *Sia X uno spazio accessibile di Lindelöf (cioè uno spazio metrizzabile e separabile o uno spazio di Hausdorff compatto) con $X \neq \varnothing$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) $dim(X) = 0$;

(b) X è scattered.

Esempio 2.41. Dal Corollario precedente e dalla Proposizione 2.15 deduciamo che un sottoinsieme non vuoto $X \subset \mathbb{R}$ soddisfa $dim(X) = 0$ se e solo se X ha interno vuoto in $\mathbb{R}$. Questo mostra in particolare che l'insieme $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ dei numeri irrazionali soddisfa $dim(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) = 0$.

Come conseguenza immediata del Corollario precedente abbiamo i seguenti risultati.

Corollario 2.42. *Sia $(X_i)_{i\in I}$ una famiglia di spazi di Hausdorff compatti con $dim(X_i) = 0$ per ogni $i \in I$. Allora lo spazio prodotto $X := \prod_{i\in I} X_i$ soddisfa $dim(X) = 0$.*

Dim. Per la proposizione 2.14, lo spazio X è scattered dato che è il prodotto di spazi scattered. D'altra parte, X è il prodotto di spazi di Hausdorff compatti e quindi è uno spazio di Hausdorff compatto. □

Corollario 2.43. *Sia $(X_i)_{i\in I}$ una famiglia di spazi discreti finiti e non vuoti. Allora lo spazio prodotto $X := \prod_{i\in I} X_i$ soddisfa $dim(X) = 0$.*

Dim. Questo segue direttamente dal Corollario 2.42 dato che ogni X_i è uno spazio di Hausdorff compatto con dimensione $dim(X_i) = 0$. □

Prendendo $X_i = \{0, 1\}$ per ogni $i \in I$ nel corollario 2.4.43, otteniamo il seguente risultato.

Corollario 2.44. *Si ha $dim(\{0, 1\}^E) = 0$ per ogni insieme E.*

Esempio 2.45. Abbiamo $dim(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}) = 0$. Dato che $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ è omeomorfo all'insieme di Cantor K per la Proposizione 2.3 si ottiene che $dim(K) = 0$ (come già dimostrato nella Proposizione 2.2).

Corollario 2.46. *Sia $(X_i)_{i\in I}$ una famiglia numerabile di spazi metrizzabili e separabili tali che $dim(X_i) = 0$ per ogni $i \in I$. Allora lo spazio prodotto $X := \prod_{i\in I} X_i$ soddisfa $dim(X) = 0$.*

Dim. Per la Proposizione 2.14, lo spazio X è scattered dato che è prodotto di spazi scattered. D'altra parte, X è prodotto numerabile di spazi metrizzabili e separabili e quindi anche X è metrizzabile e separabile. □

2.5 Spazi totalmente disconnessi

Sia X uno spazio topologico. Si ricordi che la *componente connessa* di un punto $x \in X$ è l'unione di tutti i sottoinsiemi aperti di X che contengono x. Le componenti connesse dei punti di X formano una partizione di X. Inoltre, ogni componente connessa è chiusa e connessa in X.

Definizione 2.47. Si dice che uno spazio topologico X è *totalmente disconnesso* se le componenti connesse di ogni punto $x \in X$ sono i singoletti $\{x\}$.

In altre parole, uno spazio topologico X è totalmente disconnesso se e solo se i soli sottoinsiemi non vuoti e connessi di X sono i singoletti.

Esempio 2.48. Ogni spazio discreto è totalmente disconnesso.

Esempio 2.49. Gli unici sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$ sono gli intervalli. Segue che un sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}$ è totalmente disconnesso se e solo se X ha interno vuoto.

Proposizione 2.50. *Ogni sottoinsieme di uno spazio totalmente disconnesso è totalmente disconnesso.*

Dim. Questo segue immediatamente dall'osservazione che, se Y è un sottoinsieme di uno spazio topologico X e $y \in Y$, allora la componente connessa di y in Y è contenuta nella componente connessa di y in X. $\square$

Proposizione 2.51. *Ogni prodotto di spazi totalmente disconnessi è totalmente disconnesso.*

Dim. Sia $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia di spazi totalmente disconnessi e si consideri il loro prodotto diretto $X := \prod_{i \in I} X_i$. Sia $C \neq \varnothing$ un sottoinsieme di X. Dato che per funzioni continue l'immagine di uno spazio connesso è connessa, la proiezione di C su ogni X_I è connessa e quindi ridotta ad un singolo punto dato che ogni X_i è totalmente disconnesso. Questo implica che C stesso è composto da un singolo punto. $\square$

Proposizione 2.52. *Ogni spazio totalmente disconnesso è accessibile.*

Dim. In uno spazio topologico ogni componente connessa è chiusa. Di conseguenza se X è totalmente disconnesso si ha che $\{x\}$ è chiuso in X per ogni $x \in X$. $\square$

Il seguente esempio mostra che uno spazio totalmente disconnesso può non essere Hausdorff.

Esempio 2.53. Sia X un insieme infinito. Fissiamo $a, b \in X$ distinti e sia $Y := X \setminus \{a, b\}$. Sia $\mathcal{T}$ l'insieme composto da tutti gli $U \subset X$ che soddisfano una delle seguenti condizioni:

1. $U \subset Y$;

2. $U = U_1 \cup U_2$, dove U_1 è un sottoinsieme non vuoto di $\{a, b\}$ e $U_2 \subset Y$ è tale che $Y \backslash U_2$ è un insieme finito.

È facile dimostrare che $\mathcal{T}$ è l'insieme dei sottoinsiemi aperti per una topologia su X. Assegniamo ad X questa topologia. Si supponga che $A \subset X$ abbia più di un punto. Se si può trovare un punto $y_0 \in A \cap Y$, allora il singoletto $\{y_0\}$ è chiuso-aperto in A. Segue che A non è connesso. Per questo lo spazio X è totalmente disconnesso. Tuttavia, X non è Hausdorff dato che ogni intorno aperto di a interseca ogni intorno aperto di b.

2.6 Spazi totalmente separati

In questa sezione introduciamo la classe degli spazi totalmente separati. Proviamo prima che ogni spazio totalmente separato è totalmente disconnesso e che ogni spazio scattered accessibile è totalmente separato.

Definizione 2.54. Sia X uno spazio topologico. La *quasi-componente* di un punto $x \in X$ è l'intersezione di tutti gli intorni chiuso-aperti di X che contengono x. Si noti che la quasi-componente di ogni punto $x \in X$ è un sottoinsieme chiuso di X contenente x.

Definizione 2.55. Si dice che uno spazio topologico X è *totalmente separato* se la quasi-componente di ogni punto $x \in X$ è il singoletto $\{x\}$.

Osservazione 2.56. *Uno spazio topologico X è totalmente separato se e solo se soddisfa la seguente condizione: per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$, esiste una partizione di X in due sottoinsiemi aperti U e V tali che $x \in U$ e $y \in V$.*

Proposizione 2.57. *Ogni spazio totalmente separato è Hausdorff.*

Dim. Questo segue immediatamente dall'osservazione precedente. □

Proposizione 2.58. *Siano X uno spazio topologico e $x \in X$. Allora la componente connessa di x è contenuta nella quasi-componente di x.*

Dim. Si denoti con C_x la componente connessa di x e con Q_x la sua quasi-componente. Si consideri un intorno chiuso-aperto V di x in X. Allora $C_x \cap V$ è un sottoinsieme chiuso-aperto di C_x non vuoto e contenente x. Per la connessione di C_x, deduciamo che $C_x \cap V = C_x$, che significa $C_x \subset V$. Da questo segue che $C_x \subset Q_x$. □

Corollario 2.59. *Ogni spazio totalmente separato è totalmente disconnesso.*

Uno spazio totalmente disconnesso non è necessariamente totalmente separato. Infatti nell'esempio 2.53 è descritto uno spazio totalmente disconnesso che non è Hausdorff. Tale spazio non è totalmente separato dato che, per la Proposizione 2.57, ogni spazio totalmente separato è Hausdorff.

Proposizione 2.60. *Ogni spazio scattered accessibile è totalmente separato e quindi totalmente disconnesso.*

Dim. Sia X uno spazio scattered accessibile. Sia $\mathcal{B}$ una base di X composta da sottoinsiemi chiuso-aperti di X. Si consideri un punto $x \in X$. Dato che $\mathcal{B}$ è una base di X, l'insieme $\mathcal{B}_x$ composto dagli elementi di $\mathcal{B}$ contenenti x è una base di intorni di x. L'intersezione di tutti gli intorni di x è il singoletto $\{x\}$ dato che X è accessibile. Questo implica che l'intersezione degli elementi di $\mathcal{B}_x$ è $\{x\}$. Di conseguenza, la quasi-componente di x è il singoletto $\{x\}$. Questo mostra che X è totalmente separato. □

L'ipotesi di accessibilità nella Proposizione 2.60 non può essere rimossa. Infatti un insieme avente più di un punto dotata della sua topologia banale è scattered ma non totalmente separabile (non è neanche totalmente disconnessa).

Lemma 2.61. *Siano X uno spazio di Hausdorff compatto e $x \in X$. Allora la componente connessa di x coincide con la sua quasi-componente.*

Dim. Si denoti con C_x la componente connessa di x e con Q_x la sua quasi-componente. Si ha che $C_x \subset Q_x$ per la Proposizione 2.58. Quindi basta provare che Q_x è connesso. Siano A e B sottoinsiemi disgiunti di Q_x tali che $A \cup B = Q_x$. Si può assumere che $x \in A$. Dato che Q_x è chiuso in X, gli insiemi A e B sono chiusi in X. D'altra parte, dato che X è compatto e Hausdorff, è normale per la Proposizione 1.31. Di conseguenza esistono $V, W \subset X$ sottoinsiemi aperti disgiunti tali che $A \subset V$ e $B \subset W$. Si denoti con $\mathcal{E}$ l'insieme composto da tutti gli intorni chiuso-aperti di x in X. Abbiamo che

$$\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U = Q_x \subset V \cup W.$$

Pertanto, i sottoinsiemi aperti $X \backslash U, U \in \mathcal{E}$, ricoprono $X \backslash (V \cup W)$. Dato che $X \backslash (V \cup W)$ è compatto, esiste una successione finita $U_1, \ldots, U_n$ di elementi di $\mathcal{E}$ tali che

$$X \backslash (V \cup W) \subset (X \backslash U_1) \cup \cdots \cup (X \backslash U_n).$$

Ponendo $\Omega := U_1 \cap \cdots \cap U_n$ si ha che $\Omega \subset V \cup W$. Dato che V e W sono disgiunti, si deduce che $\Omega \cap V = \Omega \backslash U$. Di conseguenza l'insieme $\Omega \cap V$ è un intorno chiuso-aperto di x in X. Segue che $Q_x \subset \Omega \cap V$. Dunque si ha che $Q_x = A$. Questo mostra che Q_x è connesso. □

Proposizione 2.62. *Sia X uno spazio di Hausdorff localmente compatto. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) X è scattered;

(b) X è totalmente separato;

(c) X è totalmente disconnesso.

Dim. Il fatto che (a) implichi (b) segue dalla proposizione 2.13. D'altra parte il Corollario 2.59 mostra che (b) implica (c).

Si supponga X totalmente disconnesso. Sia $x \in X$ e sia V un intorno di x. Dato che X è localmente compatto, esiste un intorno compatto W di x tale che $W \subset V$. Si denoti con U l'interno d W in X e con $\mathcal{E}$ l'insieme composto da tutti gli intorni chiuso-aperti di x in W. Dato che W è totalmente disconnesso per la Proposizione 2.50, segue dal Lemma 2.61 che $\{x\} = \bigcap_{F \in \mathcal{E}} F$. Questo implica che la famiglia

$$\alpha := \{U\} \cup \{W \backslash F | \, F \in \mathcal{E}\}$$

è un ricoprimento aperto di W. Dato che W è compatto, α ammette un sottoricoprimento finito. Questo implica che esiste una successione finita $F_1, \ldots, F - n \in \mathcal{E}$ tali che l'insieme $A := F_1 \cap \cdots \cap F_n$ soddisfa $A \subset U$. Ogni $F_i, 1 \leq i \leq n$, è chiuso in W e quindi in X dato che W è chiuso in X. D'altra parte, A è aperto in U e quindi aperto in X. Segue che A è chiuso-aperto in X. Dato che $x \in A \subset V$, deduciamo che gli intorni di x che sono chiuso-aperti in X formano una base di intorni di x. Questo mostra che X è scattered. Pertanto (c) implica (a). □

2.7 Spazi di Hausdorff compatti zero-dimensionali

Mettendo insieme i risultati ottenuti nelle sezioni precedenti, otteniamo la seguente caratterizzazione degli spazi di Hausdorff zero-dimensionali.

Teorema 2.63. *Sia X uno spazio topologico non vuoto. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) X è uno spazio di Hausdorff compatto con $dim(X) = 0$;

(b) X è uno spazio di Hausdorff compatto e scattered;

(c) X è uno spazio di Hausdorff compatto totalmente separato;

(d) X è uno spazio di Hausdorff compatto totalmente disconnesso;

(e) esiste un insieme E tale che X è omeomorfo ad un sottoinsieme chiuso dello spazio prodotto $\{0, 1\}^E$.

Dim. Le condizioni (a) e (b) sono equivalenti per il Corollario 2.40. D'altra parte, le condizioni $(b), (c)$ e (d) sono equivalenti per la Proposizione 2.62. Infine l'equivalenza tra (b) ed (e) è una conseguenza immediata della Proposizione 2.16 dato che lo spazio prodotto $\{0, 1\}^E$ è uno spazio di Hausdorff compatto per ogni insieme E per il Teorema di Tichonov. □

2.8 Spazi metrizzabili separabili zero-dimensionali

Otteniamo inoltre la seguente caratterizzazione degli spazi metrizzabili e separabili zero-dimensionali.

Teorema 2.64. *Sia X uno spazio topologico non vuoto. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) X è uno spazio metrizzabile e separabile con $dim(X) = 0$;

(b) X è uno spazio metrizzabile e separabile scattered;

(c) X è uno spazio metrizzabile e separabile che ammette una base numerabile composta da sottoinsiemi chiuso-aperti;

(d) *X è omeomorfo ad un sottoinsieme di* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$*;*

(e) *X è omeomorfo ad un sottoinsieme dell'insieme di Cantor.*

Dim. Le condizioni (a) e (b) sono equivalenti per il Corollario 2.40.
Si supponga che X sia uno spazio metrico separabile scattered. Sia $\mathcal{B}$ una base di X composta da sottoinsiemi chiuso-aperti. Dato che X è separabile, possiamo trovare un sottoinsieme numerabile Y denso in X. Per ogni $y \in Y$ ed ogni intero $n \geq 1$, scegliamo un intorno $B_{y,n} \in \mathcal{B}$ di y contenuto nella palla aperta di raggio $1/y$ centrata in y. Allora i sottoinsiemi $B_{y,n}$ formano una base numerabile di X. Questo mostra che (b) implica (c).
Mostriamo ora che (c) implica (d). Si supponga che X sia uno spazio metrico separabile e che $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una base di X composta da sottoinsiemi chiuso-aperti. Sia $\chi_n\colon X \to \{0,1\}$ la mappa caratteristica di B_n. Si consideri la mappa $\varphi\colon X \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ definita da $\varphi(x) = (\chi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ per ogni $x \in X$. Dato che B_n è chiuso-aperto, la mappa χ_n è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo implica che φ è continua. Dato che X è Hausdorff, l'iniettività di φ segue dal fatto che i sottoinsiemi $B_n, n \in \mathbb{N}$ formano una base di X. Abbiamo che $\varphi(B_n) = \varphi(X) \cap \pi_n^{-1}(1)$, dove $\pi_n\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$ è la proiezione sul n-fattore di $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Questo mostra che $\varphi(B_n)$ è aperto in $\varphi(X)$. Dato che i sottoinsiemi B_n formano una base di X, deduciamo che l'immagine attraverso φ di un qualunque sottoinsieme aperto di X è aperta in $\varphi(X)$. Di conseguenza, φ induce un omeomorfismo da X su $\varphi(X)$. Questo mostra che X soddisfa (d).
Per completare la dimostrazione basta osservare che (d) implica (b) per la Proposizione 2.16 e che (d) ed (e) sono equivalenti dato che lo spazio $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ è omeomorfo all'insieme di Cantor per la Proposizione 2.3. □

2.9 Spazi metrizzabili compatti zero-dimensionali

Ogni spazio metrizzabile compatto è sia Hausdorff che separabile. Combinando i Teoremi 2.63 e 2.64, otteniamo il seguente risultato.

Teorema 2.65. *Sia X uno spazio topologico non vuoto. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) *X è uno spazio metrizzabile compatto con $dim(X) = 0$;*

(b) X *è uno spazio metrizzabile compatto e scattered;*

(c) X *è uno spazio metrizzabile compatto totalmente separato;*

(d) X *è uno spazio metrizzabile compatto totalmente disconnesso;*

(e) X *è uno spazio metrizzabile compatto che ammette una base numerabile composta da sottoinsiemi chiuso-aperti;*

(f) X *è omeomorfo ad un sottoinsieme chiuso di* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$*;*

(g) X *è omeomorfo ad un sottoinsieme chiuso dell'insieme di Cantor.*

Capitolo 3

Alcune interessanti dimostrazioni

3.1 Dimostrazione di Furstenberg dell'infinità dei numeri primi

Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi dotato della sua topologia profinita ossia la topologia che ha come base $\mathcal{B}$, cioè la famiglia di sottoinsiemi del tipo $n\mathbb{Z} + k$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ e di $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Allora si ha che:

(a) Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{Z}$;

(b) Ogni sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ che è aperto e non vuoto è infinito;

(c) Sia $\mathcal{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ l'insieme dei numeri primi. Allora $\mathcal{P}$ è infinito.

(a) L'insieme $A := \bigcup_{k=1}^{n-1}(n\mathbb{Z} + k)$ è aperto in quanto unione di sottoinsiemi aperti di $\mathbb{Z}$. Questo implica che $n\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \setminus A$ è chiuso in $\mathbb{Z}$.
(b) Sia $X \subset \mathbb{Z}$ un sottoinsieme aperto non vuoto e prendiamo un $x \in X$. Dato che $\mathcal{B}$ è base della topologia profinita su $\mathbb{Z}$, posso trovare $B_x \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_x \subset X$. Osservando che ognuno dei $B \in \mathcal{B}$ è infinito si ottiene che anche X è infinito. Inoltre, da questo segue che un insieme chiuso non può essere il complementare di un insieme finito.
(c) Dato $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ si ha che x può essere fattorizzato in modo unico come $x = sgn(x)p_1p_2 \dots p_k$ con $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k$ e $p_i \in \mathcal{P}$ per ogni $1 \leq i \leq k$. Segue che per ogni $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ esiste $p \in \mathcal{P}$ tale che $x \in p\mathbb{Z}$ e quindi $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} p\mathbb{Z}$.
Supponiamo ora per assurdo che $\mathcal{P}$ sia finito. Dato che gli insiemi $p\mathbb{Z}$ sono chiusi e $\mathcal{P}$ è finito,

abbiamo che $\bigcup_{p\in\mathcal{P}} p\mathbb{Z}$ è chiuso in quanto l'unione finita di insiemi chiusi è chiusa. D'altra parte $\mathbb{Z}\backslash\{-1,1\}$ non può essere chiuso poiché, come visto in (b), un sottoinsieme proprio chiuso non può essere il complementare di un insieme finito. Questa contraddizione mostra che l'insieme $\mathcal{P}$ dei numeri primi è infinito.

3.2 Spazi ultrametrici e numeri p-adici

Introduciamo ora gli *spazi ultrametrici*, degli speciali spazi metrici che soddisfano una versione rinforzata della disuguaglianza triangolare.

Definizione 3.1. Uno spazio metrico (X, d) è detto *spazio ultrametrico* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(y, z))$$

Sia (X, d) uno spazio ultrametrico non vuoto, dimostriamo i seguenti risultati:

(a) Siano A un sottoinsieme chiuso di X e $\rho > 0$. Allora l'insieme $\mathcal{C}_\rho := \{x \in X \mid dist(x, A) = \rho\}$ è un sottoinsieme chiusoaperto di X;

(b) Siano A e B sotttoinsiemi chiusi disgiunti di X. Allora l'insieme $\Omega := \{x \in X \mid dist(x, A) \leq dist(x, B)\}$ è un sottoinsieme chiusoaperto di X;

(c) $dim(X) = 0$;

(d) Anche il completamento metrico (X', d') di (X, d) è uno spazio ultrametrico.

Cominciamo dimostrando che dati $x, y, z \in X$ tali che $d(x, y) > d(x, z)$ si ha che $d(x, y) = d(z, y)$. Questo è dovuto alla disuguaglianza triangolare stretta per cui, sapendo che $d(x, z) < d(x, y)$, si ha $d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y)) = d(z, y)$ e $d(z, y) \leq \max(d(y, x), d(x, z)) = d(x, y)$ e di conseguenza $d(x, y) = d(z, y)$.
(a) Dimostriamo che $\mathcal{C}_\rho$ è aperto. Fissiamo $x \in \mathcal{C}_\rho$, vogliamo dimostrare che esiste $\varepsilon > 0$ tale che la palla aperta $B(x, \varepsilon)$ è contenuta in $\mathcal{C}_\rho$. Scegliamo un $0 < \varepsilon < \rho$ e prendiamo $z \in B(x, \varepsilon)$ che quindi soddisfa $d(x, z) < \varepsilon < \rho$. Per quanto dimostrato in precedenza, dato che $d(x, z) < \rho \leq d(x, a)$ per ogni $a \in A$, abbiamo che

$$dist(z, A) = \inf_{a \in A} d(z, a) = \inf_{a \in A} d(x, a) = dist(x, A) = \rho$$

Ne consegue che $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{C}_\rho$ e quindi l'insieme $\mathcal{C}_\rho$ è aperto.

Allo stesso modo dimostriamo che gli insiemi $\mathcal{U}_\rho^- := \{x \in X \mid dist(x, A) < \rho\}$ e $\mathcal{U}_\rho^+ := \{x \in X \mid dist(x, A) > \rho\}$ sono aperti. Fissiamo $x \in \mathcal{U}_\rho^-$ e $0 < \varepsilon < \rho$. Prendiamo $z \in B(x, \varepsilon)$ che soddisfa $d(x, z) < \varepsilon < \rho$. Si ha quindi

$$dist(z, A) = \inf_{a \in A} d(z, a) = \inf_{a \in A} d(x, a) = dist(x, A) < \rho.$$

Dunque $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}_\rho^-$ per cui $\mathcal{U}_\rho^-$ è aperto. Similmente fissiamo $x \in \mathcal{U}_\rho^+$ e $0 < \varepsilon < \rho$. Prendiamo $z \in B(x, \varepsilon)$ che soddisfa $d(x, z) < \varepsilon < \rho$. Si ha quindi

$$dist(z, A) = \inf_{a \in A} d(z, a) = \inf_{a \in A} d(x, a) = dist(x, A) > \rho$$

e $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}_\rho^+$ per cui $\mathcal{U}_\rho^+$ è aperto. Deduciamo dunque che $\mathcal{C}_\rho = X \backslash (\mathcal{U}_\rho^- \cup \mathcal{U}_\rho^+)$ è un sottoinsieme chiuso di X.

(b) Fissiamo $x \in \Omega$ tale che $dist(x, A) = \rho \leq dist(x, B)$. Prendiamo $0 < \varepsilon < \rho$ e $z \in B(x, \varepsilon)$. Allora, osservando che $d(x, z) < \varepsilon < \rho$, si ottiene

$$\begin{aligned} dist(z, A) &= \inf_{a \in A} d(z, a) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \rho \\ dist(z, B) &= \inf_{b \in B} d(z, b) = \inf_{b \in B} d(x, b) \geq \rho \end{aligned}$$

dunque $z \in \Omega$ e $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$. Di conseguenza Ω è aperto.

Allo stesso modo si può dimostrare che l'insieme $\Omega' := \{x \in X \mid dist(x, B) < dist(x, A)\}$ è aperto e, dunque, che l'insieme $\Omega = X \backslash \Omega'$ è chiuso.

(c) Dati $A, B \subset X$ sottoinsiemi chiusi disgiunti, gli insiemi Ω, Ω', definiti come prima, sono due sottoinsiemi aperti tali che $X = \Omega \cup \Omega'$ e $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega'$. Usando il Teorema 2.17 possiamo concludere che $dim(X) = 0$.

(d) Ricordiamo che il completamento metrico (X', d') di (X, d) è dato dall'insieme X' delle classi di equivalenza delle successioni di Cauchy in X rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ definita da

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0$$

e dalla distanza d' tale che

$$d'([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}],[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$$

Se (X,d) è uno spazio metrico allora anche (X',d') è uno spazio metrico, quindi basta dimostrare che anche per (X',d') vale la disuguaglianza triangolare stretta. Prendiamo $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, $[(z_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in X'$, allora abbiamo che:

$$d'([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}],[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) \leq \lim_{n\to\infty} \max(d(x_n,z_n),d(z_n,y_n)) =$$
$$max(\lim_{n\to\infty} d(x_n,z_n), \lim_{n\to\infty} d(z_n,y_n)) = max(d'([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}],[(z_n)_{n\in\mathbb{N}}]), d'([(z_n)_{n\in\mathbb{N}}],[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]))$$

quindi (X',d') è uno spazio ultrametrico.

3.2.1 Numeri p-adici

Introduciamo ora il sistema dei *numeri p-adici*. Fissato un numero primo p, esso sarà un completamento dell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ diverso rispetto all'usuale completamento dei numeri razionali dato dai numeri reali $\mathbb{R}$.

Definizione 3.2. Sia p un numero primo. Ogni numero razionale $q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ può essere espresso nella forma $q = p^n\frac{a}{b}$, dove $n \in \mathbb{Z}$ e $a, b \in \mathbb{Z}\backslash p\mathbb{Z}$ sono interi non divisibili per p. L'intero $v_p(q) := n \in \mathbb{Z}$ è ben definito ed è chiamato *p-valutazione* di q.

Definiamo la mappa $d : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ come

$$d(x,y) := \begin{cases} p^{-v_p(x-y)} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ e dimostriamo le seguenti affermazioni:

(a) $(\mathbb{Q},d)$ è uno spazio ultrametrico;

(b) Il completamento metrico $\mathbb{Q}_p$ di $(\mathbb{Q},d)$ soddisfa $dim(\mathbb{Q}_p) = 0$.

Prendiamo $x, y \in \mathbb{Q}$ con $x = p^{n_x}\frac{a_x}{b_x}$ e $y = p^{n_y}\frac{a_y}{b_y}$. Supponiamo di avere $n_x \leq n_y$, e osserviamo che

$$x - y = p^{n_x}\frac{a_x}{b_x} - p^{n_y}\frac{a_y}{b_y} = p^{n_x}(\frac{a_xb_y + p^{n_y-n_x}a_yb_x}{b_xb_y})$$

avente numeratore e denominatore non divisibili per p. Otteniamo dunque che $v_p(x-y) = \min(v_p(x), v_p(y))$.

(a) Dimostriamo che d è una *ultrametrica* sull'insieme $\mathbb{Q}$:

1. $d(x,y) = p^{-v_p(x-y)} > 0$ per ogni $x \neq y$ e $d(x,y) = 0 \iff x = y$;

2. $v_p(x-y) = \min(v_p(x), v_p(y)) = v_p(y-x) \implies d(x,y) = d(y,x)$;

3. tralasciando il caso in cui almeno due tra x, y, z sono uguali, dove la disuguaglianza triangolare stretta è banalmente vera, consideriamo il caso in cui x, y, z sono a due a due diversi ed otteniamo

$$d(x,y) = p^{-v_p(x-y)} = p^{-\min(v_p(x),v_p(y))} \leq p^{-\min(v_p(x),v_p(y),v_p(z))} =$$
$$\max(p^{-\min(v_p(x),v_p(z))}, p^{-\min(v_p(y),v_p(z))}) = \max(p^{-v_p(x-z)}, p^{-v_p(y-z)}) = \max(d(x,z), d(y,z))$$

Di conseguenza $(\mathbb{Q}, d)$ è uno spazio ultrametrico.

(b) Dato che $(\mathbb{Q}, d)$ è uno spazio ultrametrico, per quanto dimostrato in precedenza, si ha che anche il suo completamento metrico $\mathbb{Q}_p$ è uno spazio ultrametrico e quindi soddisfa $dim(\mathbb{Q}_p) = 0$. L'insieme $\mathbb{Q}_p$ è l'insieme dei numeri p-adici.

Ringraziamenti

Per prima cosa vorrei ringraziare la mia relatrice, la professorressa Alessandra Bertapelle per la sua disponibilità e per il suo aiuto. Vorrei poi ringraziare mia madre perché sempre pronta a dirmi di studiare. Ringrazio mio padre per il sostegno morale, economico e gastronomico. Ringrazio mio fratello per il suoi parchi ma preziosi consigli sull'università. Ringrazio anche i miei zii e cugini, pronti a fare su e giù per l'Italia. Infine ringrazio i miei coinquilini che mi hanno sopportato e supportato in questo intenso periodo di scrittura.

Bibliografia

[1] M. Coornaert, *Topological Dimension and Dynamical Systems*, Springer (Universitext), 2015

[2] R. Engelking, *Dimension Theory*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978. Translated from the Polish and revised by the author, North-Holland Mathematical Library, vol. 19

[3] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton Mathematical Series, vol. 4 (Princeton University Press, Princeton, 1941)