

**UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria Industriale DII

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

**Analisi del comportamento meccanico delle
piastre usando modelli accoppiati
Peridinamica-FEM**

Relatore:

Prof. MIRCO ZACCARIOTTO

Correlatore:

Prof. UGO GALVANETTO

Laureando:

ANDREA CARCERERI

1241761

Anno Accademico 2021/2022

Sommario

In ambito aeronautico e aerospaziale risulta essenziale prevedere la propagazione del danneggiamento nelle strutture. A tale scopo è necessario effettuare delle analisi numeriche per individuare le condizioni che concorrono all'insorgenza di cricche e alla conseguente propagazione delle stesse nelle strutture.

Per affrontare tali problematiche, si ricorre alla teoria peridinamica, teoria del continuo non locale, specifica per la descrizione e la simulazione di fenomeni di formazione e propagazione di cricche nei materiali, nonostante presenti lo svantaggio di essere onerosa in termini computazionali.

L'integrazione con il metodo agli elementi finiti, tecnica avanzata e diffusa per la soluzione di problemi strutturali la quale permette di simulare la propagazione di fratture nei materiali tramite opportune accortezze, anche se comunque permangono alcune problematiche descritte nel capitolo successivo.

L'accoppiamento delle due teorie porta al superamento dei problemi relativi ad entrambi i metodi.

Nell'elaborato si analizza un modello di piastra a cinque gradi di libertà, costruita accoppiando mesh ad elementi finiti e griglie peridinamiche, mediante l'utilizzo di elementi ibridi.

Il comportamento di una generica piastra viene analizzato tramite l'implementazione di elementi FEM che uniscono la teoria membranale plane-stress e la teoria delle piastre di Mindlin, al fine di ottenere una piastra composta da elementi a cinque gradi di libertà per nodo.

Nell'elaborato verrà implementata la teoria peridinamica bond-based, opportunamente modificata in modo da ottenere gli stessi gradi di libertà degli elementi FEM. In particolare, al comportamento membranale definito nel piano, si aggiunge l'influenza della curvatura e dell'angolo di taglio, che rappresentano il contributo della teoria di Mindlin.

Inizialmente, verrà introdotta la teoria peridinamica e le equazioni che governano il comportamento della piastra in questa formulazione; si descriverà il metodo agli elementi finiti ed il calcolo della matrice di rigidezza per gli elementi utilizzati nella creazione della mesh; si riporterà la tecnica di accoppiamento utilizzata per la costruzione del modello e verrà effettuata una verifica per quanto riguarda l'equilibrio delle forze in prossimità dell'interfaccia tra zona FEM e zona peridinamica.

Viene illustrato, per concludere, uno studio preliminare di propagazione di una cricca

secondo il *Modo I* e *Modo III* su una piastra che implementa il modello accoppiato FEM-peridinamica.

Indice

1	Introduzione	17
1.1	Teoria classica della meccanica del continuo	18
1.2	Teorie non locali	18
1.3	Basi della teoria peridinamica	19
2	Teoria peridinamica	21
2.1	Teoria peridinamica del continuo	21
2.1.1	Deformazione e allungamento relativi	22
2.1.2	Vettore densità di forza	24
2.1.3	Stati peridinamici	24
2.1.4	Densità di energia di deformazione	24
2.1.5	Teoria bond-based e state-based	25
2.2	Teoria peridinamica bond-based discretizzata	27
2.2.1	Equazioni del moto	27
2.2.2	Condizioni al contorno	29
2.2.3	Limitazioni della teoria bond-based	30
2.2.4	Prototype Microelastic Brittle Material	32
2.2.5	Correzioni sull'orizzonte peridinamico	35
2.3	Equazioni peridinamiche del moto di una piastra	37
2.3.1	Cinematica della piastra	37
2.3.2	Equazioni del moto	38
2.3.3	Micromoduli di flessione e di taglio	40
2.3.4	Curvatura e angolo di taglio critici	41
2.4	Matrice di rigidezza peridinamica	44
3	Metodo agli elementi finiti per una piastra SHELL	47
3.1	Basi sul metodo degli elementi finiti	49
3.2	Teoria plane stress per elementi di tipo MEMBRANE	51
3.2.1	Vettore spostamento, deformazione e tensione	51
3.2.2	Funzioni di forma di un elemento isoparametrico MEMBRANE	52
3.2.3	Principio dei lavori virtuali	56
3.2.4	Integrazione con i punti di Gauss	57
3.3	Teoria delle piastre di Mindlin per elementi di tipo PLATE	59

3.3.1	Vettore delle deformazioni e delle tensioni	60
3.3.2	Funzioni di forma di un elemento isoparametrico PLATE	61
3.3.3	Principio dei lavori virtuali	63
3.4	Matrice di rigidezza dell'elemento SHELL	66
4	Accoppiamento teoria peridinamica - metodo degli elementi finiti	69
4.1	Matrice di rigidezza accoppiata	70
4.2	Accoppiamento di una mesh FEM ed una griglia PD	77
4.3	Piastra incastrata soggetta ad una forza in direzione z	79
4.3.1	Piastra con modello solo peridinamico	81
4.3.2	Piastra con zona peridinamica centrata	87
4.3.3	Piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo incastrato	90
4.3.4	Piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo caricato	94
4.4	Piastra incastrata soggetta ad un momento flettente lungo l'asse y	98
4.4.1	Piastra con modello solo peridinamico	99
4.4.2	Piastra con zona peridinamica centrata	102
5	Equilibrio delle forze nell'accoppiamento FEM-PD	107
5.1	Soluzione analitica	108
5.1.1	Coerenza tra modello bond-based PD e modello CCM nel piano fino al secondo ordine	108
5.1.2	Coerenza tra modello bond-based PD e modello CCM fuori dal piano fino al quarto ordine	111
5.2	Analisi numerica	118
5.2.1	Modello	118
5.2.2	Verifica dell'equilibrio per i gradi di libertà x e y	119
5.2.3	Verifica dell'equilibrio per il grado di libertà z	124
5.2.4	Verifica dell'equilibrio per il grado di libertà ϕ_x	130
5.2.5	Verifica dell'equilibrio per il grado di libertà ϕ_y	132
6	Analisi di propagazione della frattura	135
6.1	Sequentially linear analysis (SLA)	135
6.2	Analisi di propagazione della frattura in una piastra accoppiata	136
6.2.1	Modo I di propagazione della frattura	136
6.2.2	Modo III di propagazione della frattura	142
7	Conclusioni	145
	Bibliografia	147

Elenco delle figure

1.1	Relazione tra modello del continuo locale e non locale e modello della dinamica molecolare (immagine tratta da [18]).	18
1.2	Rappresentazione grafica delle interazioni tra punti nelle teorie locali (a sinistra) e non-locali (a destra).	19
2.1	Rappresentazione grafica del vettore posizione del punto k -esimo e dei suoi vettori spostamento e posizione nelle due configurazioni: indeformata e deformata.	21
2.2	Rappresentazione dell'orizzonte dei punti materiali \mathbf{x}_k e \mathbf{x}_j con rispettivi famiglie di nodi H_{x_k} e H_{x_j} (immagine tratta da [18]).	22
2.3	Configurazione indeformata (sinistra) e deformata (destra) (immagine tratta da [18]).	23
2.4	Rappresentazione dell'interazione tra due punti materiali, \mathbf{x}_k e \mathbf{x}_j , nella teoria peridinamica bond-based.	25
2.5	Rappresentazione schematica dei vettori densità di forza relativi nel caso della teoria bond-based, ordinary e non-ordinary state-based (immagine tratta da [17]).	26
2.6	Rappresentazione del nodo sorgente (in blu al centro) con i relativi bond che lo collegano ai nodi famiglia all'interno dell'orizzonte δ	27
2.7	Rappresentazione grafica delle regioni adibite all'applicazione delle condizioni di vincolo (R_c) e di carico (R_l).	30
2.8	Uniform normal strain (sinistra) e uniform shear strain (destra) (immagine tratta da [19]).	31
2.9	Dominio di integrazione per il calcolo dell'energia di frattura (immagine tratta da [37]).	34
2.10	Rappresentazione della forza f in un bond per un materiale PMB (immagine tratta da [37]).	35
2.11	(a) Rappresentazione della sfera d'influenza discretizzata del nodo \mathbf{x}_k e (b) del fattore β per i volumi sul bordo di δ (immagine tratta da [35]).	36
2.12	Configurazione iniziale e deformata della piastra (immagine tratta da [20])	37
2.13	Rappresentazione dello spostamento u lungo l'asse x , funzione della coordinata z e della rotazione ϕ_y	39

2.14	Rappresentazione dello spostamento v lungo l'asse y , funzione della coordinata z e della rotazione ϕ_x	39
2.15	Rappresentazione dell'interazione tra due punti materiali il cui bond passa attraverso la superficie di frattura (immagine tratta da [20]).	42
3.1	Rappresentazione grafica di una piastra.	47
3.2	Rappresentazione della mesh di una superficie quadrata dove sono identificati elementi e nodi.	49
3.3	Gradi di libertà dell'elemento MEMBRANE.	52
3.4	Rappresentazione dell'elemento isoparametrico nel sistema di riferimento locale ξ, η	53
3.5	Rappresentazione dei punti di integrazione su un elemento isoparametrico. A sinistra si hanno le coordinate isoparametriche dei 4 punti di Gauss con i relativi pesi.	58
3.6	Rappresentazione del punto di integrazione su un elemento isoparametrico. A sinistra si hanno le coordinate del punto di Gauss ed il relativo peso.	58
3.7	Rappresentazione degli spostamenti nel piano causati dalle rotazioni secondo la regola della mano destra.	59
3.8	Gradi di libertà dell'elemento PLATE.	61
4.1	Rappresentazione grafica di un modello bidimensionale accoppiato. I nodi neri identificano i nodi FEM, i nodi rossi identificano i nodi peridinamici. La numerazione degli elementi FEM è rappresentata da numeri romani verdi. In verde chiaro, è presente la numerazione locale dei nodi per il primo elemento FEM. In viola, sono raffigurate le interazioni peridinamiche che si creano tra il nodo sorgente (13) ed i rispettivi nodi famiglia.	70
4.2	Rappresentazione grafica di due elementi solo FEM.	71
4.3	Rappresentazione grafica di elementi FEM ibridi.	73
4.4	Piastra incastrata su un lato e carico distribuito sul lato opposto (immagine tratta da [20]).	79
4.5	Variazione di rotazione (a) e spostamento trasversale (b) lungo l'asse x nella piastra soggetta a un carico trasversale (immagine tratta da [20]).	80
4.6	Modello accoppiato con griglia peridinamica sull'intera piastra.	81
4.7	Deformata del modello solo PD (rosso) e modello solo FEM (verde).	81
4.8	Confronto spostamento fuori dal piano w tra modello solo peridinamico e modello solo FEM.	82
4.9	Confronto della variazione di ϕ_y tra modello solo peridinamico e modello solo FEM.	82
4.10	Distribuzione degli errori assoluti per le componenti w, ϕ_x e ϕ_y nel caso di zona peridinamica estesa a tutta la piastra.	83
4.11	Modello accoppiato con griglia peridinamica non estesa a tutta la piastra per mitigare l'effetto del softening.	84

4.12	Deformata del modello accoppiato con zona peridinamica (blu e rosso) e modello solo FEM (verde).	85
4.13	Confronto spostamento fuori dal piano w tra modello accoppiato e modello solo FEM.	85
4.14	Confronto della variazione di ϕ_y tra modello accoppiato e modello solo FEM.	86
4.15	Distribuzione degli errori assoluti per le componenti w , ϕ_x e ϕ_y nel caso di zona peridinamica non estesa a tutta la piastra per considerare l'effetto del softening.	87
4.16	Modello accoppiato della piastra con zona peridinamica centrata.	87
4.17	Deformata del modello accoppiato con zona peridinamica centrata (blu e rosso) e modello solo FEM (verde).	88
4.18	Confronto spostamento fuori dal piano w tra modello accoppiato e modello solo FEM per una piastra con zona peridinamica centrata.	88
4.19	Confronto della variazione di ϕ_y tra modello accoppiato e modello solo FEM per una piastra con zona peridinamica centrata.	89
4.20	Distribuzione degli errori assoluti per le componenti w , ϕ_x e ϕ_y nel caso di zona peridinamica centrata nella piastra.	90
4.21	Modello accoppiato della piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo incastrato della piastra.	91
4.22	Deformata del modello accoppiato con zona peridinamica non centrata (blu e rosso) e modello solo FEM (verde).	91
4.23	Confronto spostamento fuori dal piano w tra modello accoppiato e modello solo FEM per una piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo incastrato.	92
4.24	Confronto della variazione di ϕ_y tra modello accoppiato e modello solo FEM per una piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo incastrato.	92
4.25	Distribuzione degli errori assoluti per le componenti w , ϕ_x e ϕ_y nel caso di zona peridinamica in prossimità del bordo incastrato della piastra.	93
4.26	Modello accoppiato della piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo dove è applicato il carico.	94
4.27	Deformata del modello accoppiato con zona peridinamica non centrata (blu e rosso) e modello solo FEM (verde).	95
4.28	Confronto spostamento fuori dal piano w tra modello accoppiato e modello solo FEM per una piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo caricato.	95
4.29	Confronto della variazione di ϕ_y tra modello accoppiato e modello solo FEM per una piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo caricato.	96
4.30	Distribuzione degli errori assoluti per le componenti w , ϕ_x e ϕ_y nel caso di zona peridinamica in prossimità del bordo caricato della piastra.	97
4.31	Piastra incastrata su un lato e momento flettente sul lato opposto (immagine tratta da [20]).	98

4.32	Variazione di rotazione (a) e spostamento trasversale (b) lungo l'asse x nella piastra soggetta a un momento flettente (immagine tratta da [20]).	99
4.33	Deformata del modello solo PD (rosso) e modello solo FEM (verde).	99
4.34	Confronto spostamento fuori dal piano w tra modello solo PD e modello solo FEM.	100
4.35	Confronto della variazione di ϕ_y tra modello solo PD e modello solo FEM.	100
4.36	Distribuzione degli errori assoluti per le componenti w , ϕ_x e ϕ_y nel caso di zona peridinamica estesa a tutta la piastra incastrata e momento flettente applicato sul bordo opposto.	101
4.37	Deformata del modello accoppiato con zona peridinamica non centrata (blu e rosso) e modello solo FEM (verde).	102
4.38	Confronto spostamento fuori dal piano w tra modello accoppiato con zona peridinamica centrata e modello solo FEM.	103
4.39	Confronto della variazione di ϕ_y tra modello accoppiato con zona peridinamica centrata e modello solo FEM.	103
4.40	Distribuzione degli errori assoluti per le componenti w , ϕ_x e ϕ_y nel caso di zona peridinamica centrata nella piastra incastrata e momento flettente applicato sul bordo opposto.	104
5.1	Modello di piastra con zona peridinamica centrata (rosso), elementi ibridi (verde) ed elementi FEM (blu).	119
5.2	Rappresentazione dei parametri caratteristici del campo di spostamento descritto in tabella 5.3 (immagine tratta da [13]).	120
5.3	Campo di spostamento imposto di tipo bilineare all'interfaccia tra zona peridinamica e FEM.	120
5.4	Rappresentazione 3D del campo di spostamento bilineare imposto.	120
5.5	Rappresentazione dei parametri caratteristici del campo di spostamento descritto in tabella 5.5 (immagine tratta da [13]).	122
5.6	Campo di spostamento imposto di tipo quadratico all'interfaccia tra zona peridinamica e FEM.	122
5.7	Rappresentazione 3D del campo di spostamento quadratico imposto.	123
5.8	Rappresentazione della dipendenza di $\sum_{i=1}^N F_{2i}$ dal valore di δ	124
5.9	Rappresentazione della dipendenza di $\sum_{i=1}^N F_{3i}$ e $\sum_{i=1}^N F_{4i}$ dal valore di δ	126
5.10	Rappresentazione della dipendenza di $\sum_{i=1}^N F_{3i}$ e $\sum_{i=1}^N F_{4i}$ dal valore di δ	128
5.11	Rappresentazione 3D del campo di spostamento biquadratico imposto.	129
5.12	Rappresentazione della dipendenza di $\sum_{i=1}^N F_{3i}$ (sinistra) e $\sum_{i=1}^N F_{4i}$ (destra) dal valore di δ	131
5.13	Rappresentazione della dipendenza di $\sum_{i=1}^N F_{3i}$ (sinistra) e $\sum_{i=1}^N F_{4i}$ (destra) dal valore di δ	132

5.14	Rappresentazione della dipendenza di $\sum_{i=1}^N F_{5i}$ dal valore di δ	133
5.15	Rappresentazione della dipendenza di $\sum_{i=1}^N F_{5i}$ dal valore di δ	134
6.1	Modello di piastra accoppiata: regione FEM (grigio), regione peridinamica (blu), elementi di accoppiamento (verde).	137
6.2	Cricca iniziale localizzata nella zona peridinamica (linea rossa) e rappresentazione dei bond (verde).	137
6.3	Rappresentazione dei modi di propagazione di una frattura.	138
6.4	Rappresentazione dell'indice di danno nella propagazione della frattura (Modo I) all'aumentare delle iterazioni (sinistra) e bond interessati alla rottura (destra).	140
6.5	Rappresentazione dell'indice di danno nella propagazione della frattura all'aumentare delle iterazioni (sinistra) e bond interessati alla rottura (destra), nel caso di dimensione della piastra raddoppiata lungo x	141
6.6	Rappresentazione dell'indice di danno nella propagazione della frattura (Modo I) all'aumentare delle iterazioni, con $m = 4$ e vincolo di incastro ai due nodi immediatamente sopra e sotto la frattura sul lato destro della piastra.	141
6.7	Rappresentazione grafica di una piastra incastrata, sottoposta ad uno sforzo trasversale F_0 , in direzione z , ed uno sforzo $-F_0$ in direzione $-z$	142
6.8	Rappresentanza della deformata della piastra con cricca pre-esistente e forza imposta lungo l'asse z	143
6.9	Rappresentazione dell'indice di danno nella propagazione della frattura (Modo III) all'aumentare delle iterazioni e rappresentazione dei bond interessati alla rottura all'iterazione 500.	144

Elenco delle tabelle

4.1	Caratteristiche geometriche del modello di piastra utilizzato nell'articolo di Diyaroglu et al. [20].	77
4.2	Proprietà meccaniche del modello di piastra utilizzato nell'articolo di Diyaroglu et al. [20].	77
4.3	Risultati delle reazioni vincolari e forze applicate sulla piastra con modello solo FEM.	80
4.4	Risultati delle reazioni vincolari e forze applicate sulla piastra con zona peridinamica estesa a tutta la piastra.	84
4.5	Risultati delle reazioni vincolari e forze applicate sulla piastra con zona peridinamica non completamente estesa a tutta la piastra per considerare l'effetto del softening.	87
4.6	Risultati delle reazioni vincolari e forze applicate sulla piastra con zona peridinamica centrata nella piastra.	90
4.7	Risultati delle reazioni vincolari e forze applicate sulla piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo incastrato.	94
4.8	Risultati delle reazioni vincolari e forze applicate sulla piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo dove è presente il carico.	97
4.9	Risultati delle reazioni vincolari e forze applicate sulla piastra con modello solo FEM.	99
4.10	Risultati delle reazioni vincolari e forze applicate sulla piastra con zona peridinamica nella piastra incastrata e momento flettente applicato sul bordo opposto.	102
4.11	Risultati delle reazioni vincolari e forze applicate sulla piastra con zona peridinamica centrata nella piastra incastrata e momento flettente applicato sul bordo opposto.	105
5.1	Caratteristiche geometriche della piastra. L rappresenta la dimensione parallela all'asse x , W la dimensione parallela a y e h lo spessore.	118
5.2	Caratteristiche meccaniche della piastra.	118
5.3	Campo spostamento bilineare.	119
5.4	Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni x e y	121
5.5	Campo spostamento quadratico.	121
5.6	Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni x e y	123

5.7	Studio della dipendenza di δ per gli errori relativi nel bilanciamento delle forze di reazione per i gradi di libertà x e y , avendo applicato il carico di figura 5.5 sul grado di libertà y	124
5.8	Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo campo spostamento di tipo bilineare al grado di libertà z	125
5.9	Studio della dipendenza di δ per errori relativi nel bilanciamento delle forze di reazione per i gradi di libertà z , ϕ_x e ϕ_y , avendo applicato il carico di figura 5.2 sul grado di libertà z	125
5.10	Coefficienti correttivi da applicare nella definizione di c_s per la riduzione degli errori relativi $e_{r_z}, e_{r_{\phi_x}}$ e $e_{r_{\phi_y}}$	126
5.11	Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo campo spostamento di tipo bilineare al grado di libertà z , introdotto il coefficiente correttivo γ_z per il micromodulo c_s ($m = 3, \delta = 0.75$).	127
5.12	Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo campo spostamento di tipo quadratico al grado di libertà z ($m = 3, \delta = 0.75$).	127
5.13	Studio della dipendenza di δ per errori relativi nel bilanciamento delle forze di reazione per i gradi di libertà z , ϕ_x e ϕ_y , avendo applicato il carico di figura 5.5 sul grado di libertà z	127
5.14	Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo campo spostamento di tipo quadratico al grado di libertà z , introdotto il coefficiente correttivo γ_z per il micromodulo c_s ($m = 3, \delta = 0.75$).	128
5.15	Campo spostamento biquadratico.	128
5.16	Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo campo spostamento di tipo biquadratico al grado di libertà z ($m = 3, \delta = 0.75$).	129
5.17	Modello accoppiato FEM-PD: errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo campo spostamento di tipo lineare, quadratico e biquadratico al grado di libertà z ($m = 3, \delta = 0.75$).	130
5.18	Modello solo FEM: errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo campo spostamento di tipo lineare, quadratico e biquadratico al grado di libertà z ($m = 3, \delta = 0.75$).	130
5.19	Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo campo spostamento di tipo bilineare al grado di libertà ϕ_x	130
5.20	Studio della dipendenza di δ per errori relativi nel bilanciamento delle forze di reazione per i gradi di libertà z , ϕ_x e ϕ_y , avendo applicato il carico di figura 5.2 sul grado di libertà ϕ_x	131

5.21	Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo spostamento di tipo quadratico al grado di libertà ϕ_x	131
5.22	Studio della dipendenza di δ per errori relativi nel bilanciamento delle forze di reazione per i gradi di libertà z , ϕ_x e ϕ_y , avendo applicato il carico di figura 5.5 sul grado di libertà ϕ_x	132
5.23	Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo spostamento di tipo bilineare al grado di libertà ϕ_y	133
5.24	Studio della dipendenza di δ per errori relativi nel bilanciamento delle forze di reazione per i gradi di libertà z , ϕ_x e ϕ_y , avendo applicato il carico di figura 5.2 sul grado di libertà ϕ_y	133
5.25	Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo spostamento di tipo quadratico al grado di libertà ϕ_y	134
5.26	Studio della dipendenza di δ per errori relativi nel bilanciamento delle forze di reazione per i gradi di libertà z , ϕ_x e ϕ_y , avendo applicato il carico di figura 5.5 sul grado di libertà ϕ_y	134
6.1	Caratteristiche geometriche della piastra. L rappresenta la dimensione parallela all'asse x , W la dimensione parallela a y e h lo spessore.	136
6.2	Caratteristiche meccaniche della piastra.	136

Capitolo 1

Introduzione

Nell'analisi della propagazione delle fratture nei materiali, le principali tecniche computazionali, come il metodo degli elementi finiti, presentano alcune problematiche.

Il fondamento matematico, su cui si basano tutti questi metodi, presuppone che il corpo rimanga continuo mentre avviene la deformazione.

I metodi computazionali esistenti si basano su equazioni differenziali alle derivate parziali della meccanica classica del continuo. Questi metodi risentono del limite inerente alle derivate spaziali, richieste nelle equazioni differenziali, che non possono essere definite in prossimità delle fratture o lungo le superfici delle stesse. In questi casi, la struttura matematica non è più valida.

Impiegando la teoria della meccanica classica del continuo, le soluzioni al problema prevedono che vi sia uno stress infinito al vertice della cricca, come riportato nell'articolo di Griffith [1], che ha introdotto il concetto di *Linear Elastic Fracture Mechanics* (LEFM). Questo modello necessita la presenza di una cricca preesistente, dove l'inizio e la crescita della cricca sono trattate separatamente introducendo criteri esterni, come il criterio *critical energy release rate*, non compresi nelle equazioni che governano la teoria della meccanica classica del continuo. Inoltre, sono necessari altri requisiti sia per la crescita della cricca che per la direzione di propagazione.

Sono state sviluppate altre teorie nel tentativo di descrivere, in maniera accurata, il comportamento meccanico di strutture in presenza di fratture.

Gli approcci di maggior interesse, sviluppati negli ultimi anni risultano: *extended finite element method* [2][3], *element erosion* [4][5], *phase field model* [6][7], *interface elements with a cohesive zone model* [8][9][10] e *partition of unity finite element method* [11][12]. Mediante l'impiego di queste tecniche non vengono eliminate alcune problematiche, come riportato in [13].

I problemi inerenti a queste tecniche, che prevedono l'impiego della teoria classica della meccanica del continuo, possono essere superati impiegando le *Molecular Dynamics Simulations* (MDS) [14]. Le simulazioni a livello atomico sono certamente le più dettagliate e realistiche nell'analisi del comportamento di fratture nel materiale.

1.1 Teoria classica della meccanica del continuo

Nella teoria della meccanica classica del continuo si assume che un punto materiale interagisce con quelli immediatamente vicini, rappresentando quindi una teoria locale. Nella teoria classica della meccanica, quindi, la tensione in un punto dipende dalla deformazione del punto stesso.

La validità di quest'ultima affermazione dipende dalla scala di lunghezza presa in considerazione. In generale, a scala macroscopica, la validità di questa assunzione è accettabile. Tuttavia, ciò non viene sempre rispettato, come nel caso in cui piccoli dettagli o microstrutture influenzino l'intera macrostruttura.

Si assume la continuità della struttura anche nella configurazione deformata. In realtà, matematicamente, la teoria classica è formulata mediante l'impiego di equazioni differenziali alle derivate parziali spaziali, dove queste non sono definite in prossimità di discontinuità, quali le fratture.

1.2 Teorie non locali

La teoria non locale stabilisce la connessione tra la meccanica classica del continuo e le *Molecular Dynamics Simulations*. Le simulazioni a livello molecolare risultano le più dettagliate e realistiche tra tutti i modelli disponibili per descrivere il comportamento dei materiali, in particolare nel caso di fratture [15].

Nel caso del modello non locale del continuo, lo stato di un punto materiale è influenzato dai punti materiali localizzati in una regione di raggio finito. Ogni punto materiale \mathbf{x} interagisce con altri punti materiali compresi entro una distanza δ . Nel caso in cui $\delta \rightarrow 0$ le teorie non locali corrispondono alla teoria della meccanica classica del continuo, viceversa se $\delta \rightarrow \infty$ si ha una corrispondenza con la soluzione data dalla teoria della dinamica molecolare.

Le teorie non locali della meccanica del continuo sono particolarmente adatte per analizzare fenomeni sia nei casi di piccola e a grande scala di lunghezza.

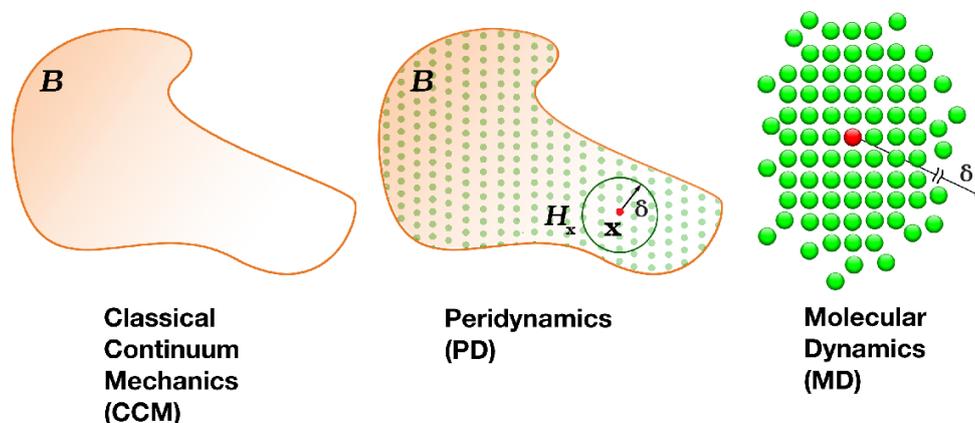


Figura 1.1: Relazione tra modello del continuo locale e non locale e modello della dinamica molecolare (immagine tratta da [18]).

Nel passato sono state introdotte varie teorie non locali della meccanica del continuo, ma nel 2000, Silling [16] ha proposto una teoria non locale dove non risultano necessarie derivate spaziali, definita come teoria peridinamica, portando così al superamento delle precedenti limitazioni.

1.3 Basi della teoria peridinamica

Data la non adeguatezza delle teorie locali e non locali introdotte in precedenza, la teoria peridinamica, teoria non locale, è adatta a descrivere il comportamento di un corpo in presenza di discontinuità. Rappresenta una riformulazione delle equazioni del moto che meglio si adattano alla modellazione di corpi con discontinuità, come nel caso specifico di una frattura. Vengono infatti implementate equazione spaziali integrali, definite anche in presenza di discontinuità, a differenza delle equazioni spaziali differenziali.

Attraverso la teoria peridinamica, il danneggiamento del materiale è definito nelle leggi costitutive del materiale. Questo permette l'analisi dal sorgere e in seguito della propagazione di una frattura in un percorso arbitrario.

La non località della teoria è dovuta al fatto che, queste interazioni, non sono presenti solamente con i punti materiali circostanti al punto di interesse, ma si presentano con tutti i punti contenuti all'interno di un certo spazio, chiamato *sfera d'influenza*.

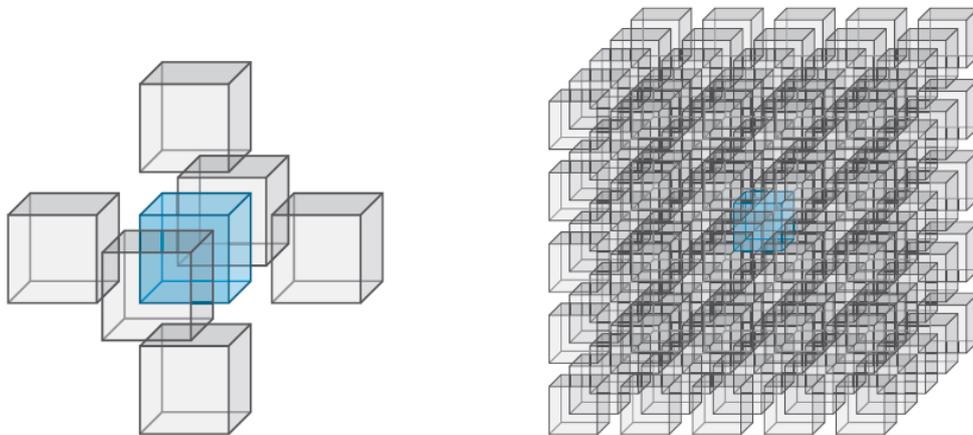


Figura 1.2: Rappresentazione grafica delle interazioni tra punti nelle teorie locali (a sinistra) e non-locali (a destra).

Introdotta per la prima volta da Silling [16], è definita come *teoria peridinamica bond-based* per via delle interazioni tra punti materiali chiamate *bond*, nella quali si instaura una certa forza peridinamica detta *pairwise force function*, funzione della deformazione del bond e delle proprietà del materiale.

Successivamente, Silling et al. [17] hanno introdotto una generalizzazione della teoria, chiamata *teoria peridinamica state-based* in cui le interazioni non sono più descritte tramite bond, non presentando più alcune limitazioni riconducibili alla teoria precedente.

Capitolo 2

Teoria peridinamica

In questo capitolo verranno presentati i principali aspetti teorici della peridinamica, nello specifico con riferimento alla teoria peridinamica bond-based.

Il contenuto di questo capitolo fa riferimento al libro di Madenci e Oterkus [18].

2.1 Teoria peridinamica del continuo

In un corpo indeformato, ogni punto materiale è definito dalle sue coordinate, \mathbf{x}_k con ($k = 1, 2, \dots, \infty$), a cui è associato un corrispondente volume, V_k , e una densità $\rho(\mathbf{x}_k)$. Ogni punto materiale può essere soggetto a carichi e spostamenti, determinando un moto e una deformazione del corpo.

Rispetto a un sistema di riferimento cartesiano, per un punto materiale \mathbf{x}_k soggetto a uno spostamento \mathbf{u}_k , può essere definito un nuovo vettore posizione \mathbf{y}_k :

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k \quad (2.1)$$

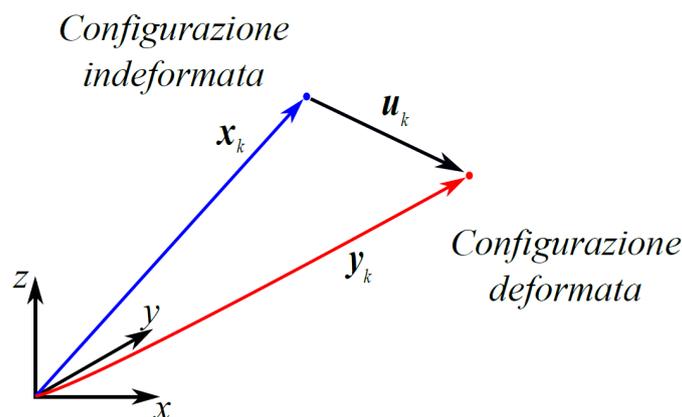


Figura 2.1: Rappresentazione grafica del vettore posizione del punto k-esimo e dei suoi vettori spostamento e posizione nelle due configurazioni: indeformata e deformata.

In accordo con la teoria peridinamica introdotta da Silling [16], il moto del corpo è analizzato considerando l'interazione del punto materiale, \mathbf{x}_k , con gli altri punti materiali,

\mathbf{x}_j , con $(k = 1, 2, \dots, \infty)$ nel corpo. Queste interazioni possono risultare infinite, tuttavia l'influenza dei punti materiali, che interagiscono con \mathbf{x}_k , può essere circoscritta entro una regione locale, chiamata *sfera d'influenza*, denotata da H_{x_k} , come mostrato in figura 2.2. In modo analogo, il punto materiale \mathbf{x}_j interagisce con i punti materiali compresi all'interno di una regione locale, H_{x_j} .

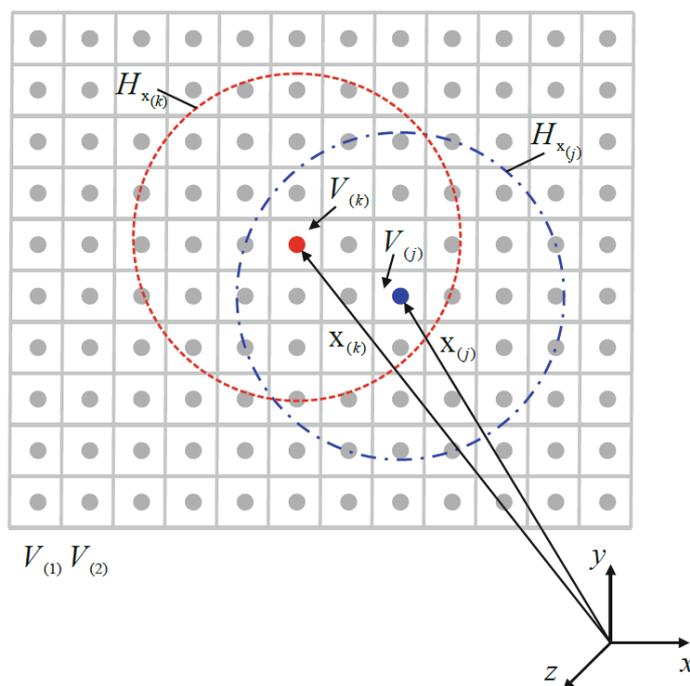


Figura 2.2: Rappresentazione dell'orizzonte dei punti materiali \mathbf{x}_k e \mathbf{x}_j con rispettive famiglie di nodi H_{x_k} e H_{x_j} (immagine tratta da [18]).

Il range di interazione del *nodo sorgente* \mathbf{x}_k è definito da δ , chiamato *orizzonte*. Quindi i punti materiali compresi nell'orizzonte δ di \mathbf{x}_k sono chiamati *nodi famiglia* di \mathbf{x}_k , il quale a sua volta rappresenta il *nodo sorgente*.

La località delle interazioni dipende dalla grandezza dell'orizzonte, e le interazioni diventano più locali al diminuire del valore dell'orizzonte, δ .

2.1.1 Deformazione e allungamento relativi

Il punto materiale \mathbf{x}_k interagisce con la sua famiglia di punti materiali, H_{x_k} , subendo l'influenza della deformazione di questi ultimi. Analogamente, per quanto riguarda il punto materiale \mathbf{x}_j .

Nella configurazione deformata, i punti \mathbf{x}_k e \mathbf{x}_j sono soggetti ad uno spostamento, \mathbf{u}_k e \mathbf{u}_j , rispettivamente, come mostrato in figura 2.3.

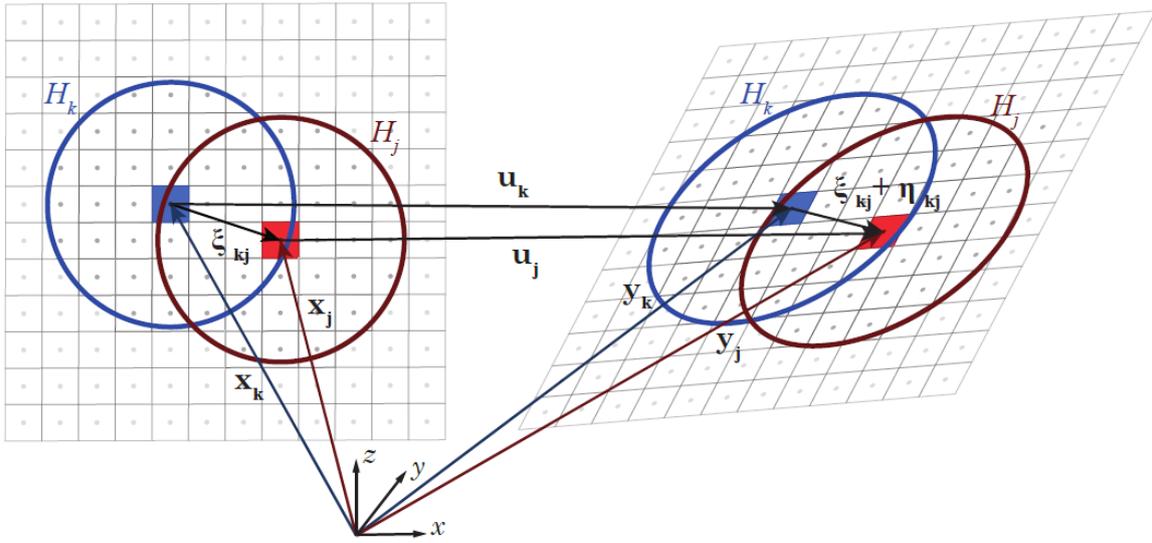


Figura 2.3: Configurazione indeformata (sinistra) e deformata (destra) (immagine tratta da [18]).

La posizione iniziale relativa prima della deformazione ($\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k$), diventa ($\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k$) dopo la deformazione.

L'allungamento relativo, o *stretch* s_{kj} si definisce come:

$$s_{kj} = \frac{(|\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k| - |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|} \quad (2.2)$$

Lo stretch s_{kj} rappresenta la variazione di posizione dei punti materiali, in termini relativi, tra configurazione indeformata e deformata.

Si precisa che:

$$s_{kj} = s_{jk} \quad (2.3)$$

Associato al punto \mathbf{x}_k , tutti i vettori della posizione relativa nella configurazione deformata, $(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k)$ con $j = 1, 2, \dots, \infty$, possono essere raggruppati in un vettore di dimensione infinita, vettore $\underline{\mathbf{Y}}$ denominato *deformation vector state*:

$$\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_k, t) = \left\{ \begin{array}{c} (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k) \\ \vdots \\ (\mathbf{y}_\infty - \mathbf{y}_k) \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

2.1.2 Vettore densità di forza

Come già detto, il punto \mathbf{x}_k interagisce con la sua famiglia di punti materiali, essendo influenzato dalla deformazione di questi, genera un vettore *force density vector*, \mathbf{t}_{kj} , agente su \mathbf{x}_k . Allo stesso modo per quanto riguarda \mathbf{x}_j si ha \mathbf{t}_{jk} .

Associato al punto materiale \mathbf{x}_k , tutti i vettori densità di forza, \mathbf{t}_{kj} con $j = 1, 2, \dots, \infty$, posso essere raggruppati in un unico vettore di dimensione infinita, chiamato *force vector state* $\underline{\mathbf{T}}$:

$$\underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_k, t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{k1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{k\infty} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

2.1.3 Stati peridinamici

Dai vettori $\underline{\mathbf{Y}}$ e $\underline{\mathbf{T}}$, riportati in 2.4 e 2.5 si ricavano le seguenti relazioni.

Il vettore posizione relativa $(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k)$ può essere ottenuto operando il *deformation vector state* $\underline{\mathbf{Y}}$ sul vettore pozione relativa $(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)$, come di seguito:

$$(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k) = \underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_k, t) \langle \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k \rangle \quad (2.6)$$

Allo stesso modo, per il vettore densità di forza \mathbf{t}_{kj} , che il punto \mathbf{x}_j esercita su \mathbf{x}_k espresso come di seguito:

$$\mathbf{t}_{kj}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) = \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_k, t) \langle \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k \rangle \quad (2.7)$$

Si ha che il vettore $\underline{\mathbf{Y}}$ è dipendente dal vettore $\underline{\mathbf{T}}$:

$$\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_k, t) = \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_k, t)) \quad (2.8)$$

2.1.4 Densità di energia di deformazione

Per poter descrivere le interazioni che si creano tra punti materiali si introduce il concetto di *micropotenziale*.

Il micropotenziale rappresenta una funzione scalare che dipende dalle proprietà del materiale e dal valore dello stretch relativo tra \mathbf{x}_k e tutta la corrispondente famiglia di punti. Si ha che $w_{jk} \neq w_{kj}$, perchè \mathbf{x}_k dipende dallo stato dei nodi famiglia del punto \mathbf{x}_j . Questi micropotenziali possono essere espressi come:

$$w_{kj} = w_{kj}(\mathbf{y}_{1^k} - \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{2^k} - \mathbf{y}_k, \dots) \quad (2.9)$$

$$w_{jk} = w_{jk}(\mathbf{y}_{1^j} - \mathbf{y}_j, \mathbf{y}_{2^j} - \mathbf{y}_j, \dots) \quad (2.10)$$

dove \mathbf{y}_k è il vettore posizione di \mathbf{x}_k nella configurazione deformata e \mathbf{y}_{1^k} è il vettore posizione del primo punto materiale che interagisce con \mathbf{x}_k .

Si definisce la densità di energia di deformazione, W_k , o *stain energy density*, del punto \mathbf{x}_k , come la somma dei micropotenziali, w_{kj} derivanti dall'interazione del punto materiale

\mathbf{x}_k e degli altri punti \mathbf{x}_j , compresi nell'orizzonte, come:

$$W_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(w_{kj}(\mathbf{y}_{1^k} - \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{2^k} - \mathbf{y}_k, \dots) + w_{jk}(\mathbf{y}_{1^j} - \mathbf{y}_j, \mathbf{y}_{2^j} - \mathbf{y}_j, \dots) \right) V_j \quad (2.11)$$

con $w_{kj} = 0$ per $k = j$.

2.1.5 Teoria bond-based e state-based

La teoria peridinamica può essere suddivisa in: *bond-based* e *state-based*, classificate in base alla direzione e moduli delle forze agenti tra due punti materiali.

La teoria peridinamica bond-based [16] ipotizza che i *vettori densità di forza relativi* \mathbf{t}_{kj} e \mathbf{t}_{jk} , che si instaurano tra due punti, siano uguali in modulo, opposti in verso e che si trovino sulla linea direttrice data dal vettore delle posizioni relative in configurazione deformata, come mostrato in figura 2.4.

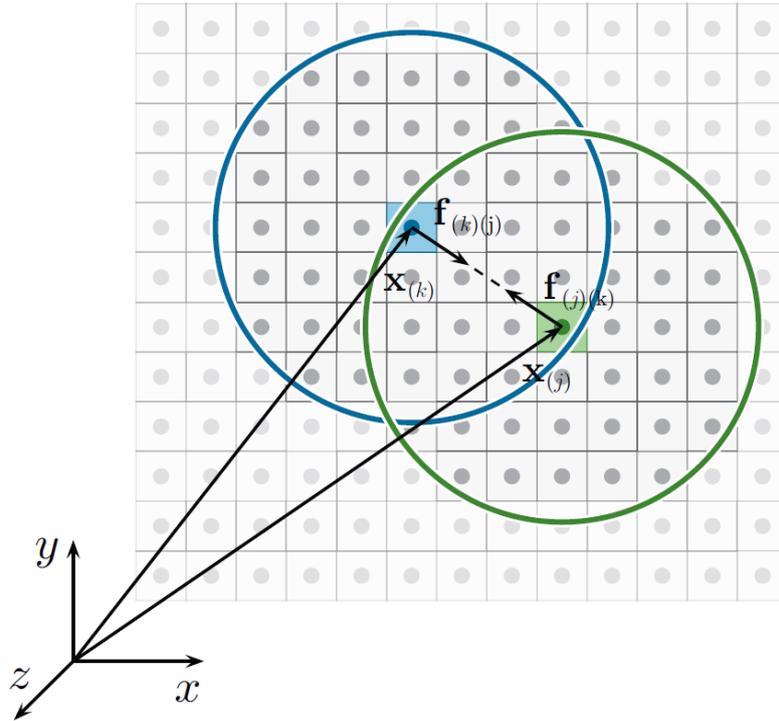


Figura 2.4: Rappresentazione dell'interazione tra due punti materiali, \mathbf{x}_k e \mathbf{x}_j , nella teoria peridinamica bond-based.

Tale approccio soddisfa la conservazione del momento angolare.

L'interazione tra due punti materiali può essere espressa come:

$$\mathbf{t}_{kj}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) = \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) \quad (2.12)$$

$$\mathbf{t}_{jk}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_j, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j, t) = -\frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_j, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j, t) \quad (2.13)$$

La teoria peridinamica bond-based rappresenta un caso particolare della teoria peridinamica state-based [17].

Inoltre, la teoria peridinamica state-based può essere divisa in *teoria peridinamica state-based ordinaria* e *teoria peridinamica state-based non ordinaria*.

Nel primo caso, i vettori densità di forza relativi, che si instaurano tra due punti materiali, sono di verso opposto e giacciono sulla linea direttrice data dal vettore delle posizioni relative in configurazione deformata, ma possono differire in modulo.

Nel secondo caso si ha che i vettori densità di forza relativi possono avere direzioni e moduli diversi.

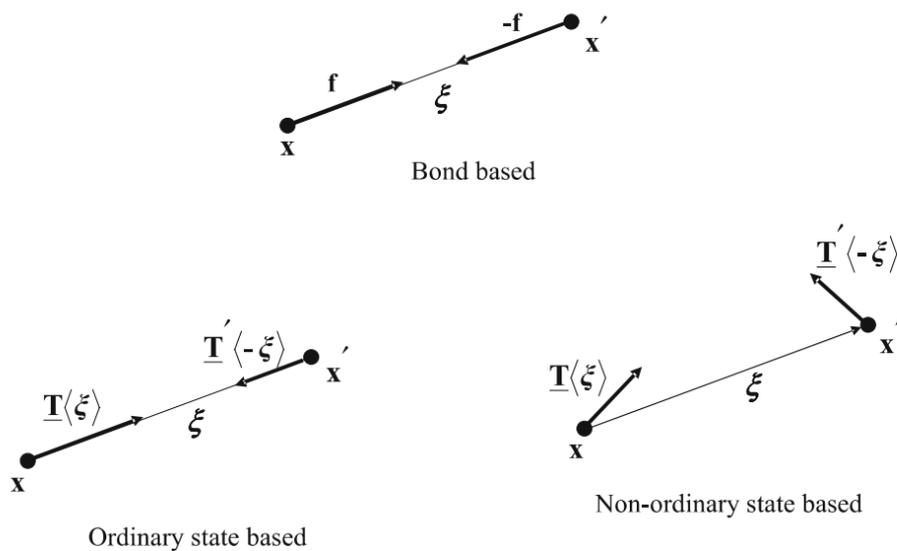


Figura 2.5: Rappresentazione schematica dei vettori densità di forza relativi nel caso della teoria bond-based, ordinary e non-ordinary state-based (immagine tratta da [17]).

2.2 Teoria peridinamica bond-based discretizzata

Come già riportato, la teoria peridinamica bond-based prevede che i vettori densità di forza tra due punti materiali siano allineati con la loro congiungente, di verso opposto e uguale modulo.

I bond presentano una similitudine con le "molle" che collegano il punto \mathbf{x}_k con gli altri punti materiali all'interno della sfera di influenza H_{x_k} .

In questa sezione viene sviluppata una trattazione discreta della teoria peridinamica bond-based, dove sono presenti un numero finito di punti materiali, chiamati *nodi*. Come riportato nella sezione 2.1, in figura 2.6 il punto centrale della sfera d'influenza è chiamato *nodo sorgente*, mentre gli altri punti contenuti nell'orizzonte rappresentano i *nodi famiglia*.

Il comportamento del nodo sorgente è influenzato solamente dai nodi famiglia contenuti nell'orizzonte δ , quindi si può affermare che la teoria peridinamica rappresenta una teoria non locale.

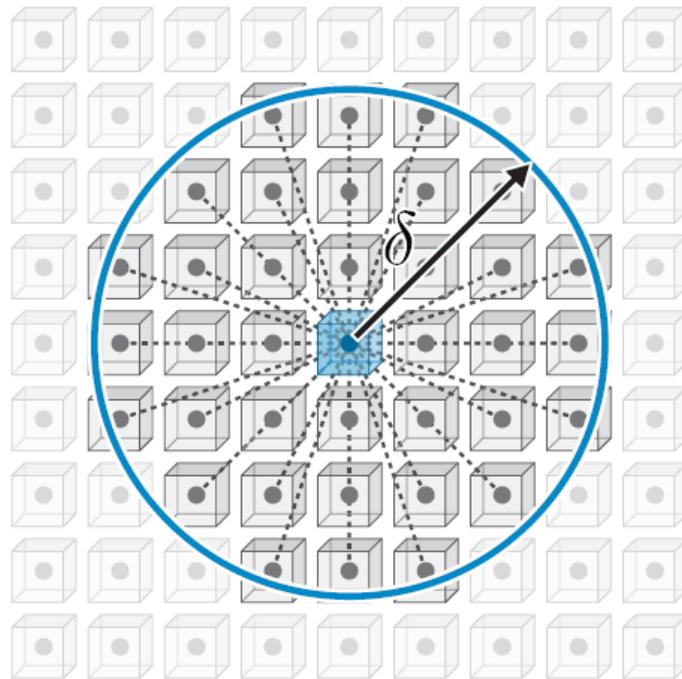


Figura 2.6: Rappresentazione del nodo sorgente (in blu al centro) con i relativi bond che lo collegano ai nodi famiglia all'interno dell'orizzonte δ .

2.2.1 Equazioni del moto

Le equazioni del moto peridinamiche per il punto \mathbf{x}_k possono essere ricavate applicando il principio dei lavori virtuali:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0 \quad (2.14)$$

dove T e U rappresentano, rispettivamente, l'energia cinetica totale e l'energia potenziale totale del corpo.

Questo principio è soddisfatto dall'equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}_k} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_k} \right) = 0 \quad (2.15)$$

dove il *Lagrangiano* L è definito come:

$$L = T - U \quad (2.16)$$

L'energia cinetica totale e l'energia potenziale totale del corpo possono essere ottenute dalla somma dell'energia cinetica e potenziale di tutti i punti materiali:

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \rho_k \dot{\mathbf{u}}_k \cdot \dot{\mathbf{u}}_k V_k \quad (2.17)$$

$$U = \sum_{k=1}^n W_k V_k - \sum_{k=1}^n (\mathbf{b}_k \cdot \dot{\mathbf{u}}_k) V_k \quad (2.18)$$

dove n è il numero totale di nodi del corpo discretizzato.

Inserendo l'espressione della densità di energia di deformazione 2.11, si ottiene:

$$U = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \left[w_{kj}(\mathbf{y}_{1k} - \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{2k} - \mathbf{y}_k, \dots) + w_{jk}(\mathbf{y}_{1j} - \mathbf{y}_j, \mathbf{y}_{2j} - \mathbf{y}_j, \dots) \right] V_j - (\mathbf{b}_k \cdot \dot{\mathbf{u}}_k) \right\} V_k \quad (2.19)$$

dove m indica il numero totale di nodi appartenenti alla sfera d'influenza H_k .

Sostituendo nell'espressione 2.15 e risolvendo si ottiene l'equazione del moto per il nodo \mathbf{x}_k :

$$\begin{aligned} \rho_k \ddot{\mathbf{u}}_k V_k + \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial w_{kj}}{\partial (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k)} V_j \right) \frac{\partial (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k)}{\partial \mathbf{u}_k} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial w_{jk}}{\partial (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_j)} V_j \right) \frac{\partial (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_j)}{\partial \mathbf{u}_k} - \mathbf{b}_k \right) V_k = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

oppure

$$\rho_k \ddot{\mathbf{u}}_k = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial w_{ki}}{\partial (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k)} V_j \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial w_{ik}}{\partial (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_j)} V_j \right) + \mathbf{b}_k \quad (2.21)$$

Basandosi su un'analisi dimensionale dell'equazione, è evidente come $\sum_{j=1}^m \frac{V_j \partial w_{kj}}{\partial (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k)}$ rappresenta la densità di forza che il punto \mathbf{x}_j esercita sul punto \mathbf{x}_k e come $\sum_{j=1}^m \frac{V_j \partial w_{jk}}{\partial (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_j)}$ rappresenta la densità di forza che il punto \mathbf{x}_k esercita sul punto \mathbf{x}_j .

Si può quindi riscrivere l'espressione 2.21 come:

$$\rho_k \ddot{\mathbf{u}}_k = \sum_{j=1}^m [\mathbf{t}_{kj}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) - \mathbf{t}_{jk}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_j, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j, t)] V_j + \mathbf{b}_k \quad (2.22)$$

dove

$$\mathbf{t}_{kj}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) = \frac{1}{2} \frac{1}{V_j} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial w_{kj}}{\partial (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k)} V_j \right) \quad (2.23)$$

e

$$\mathbf{t}_{jk}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_j, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j, t) = \frac{1}{2} \frac{1}{V_j} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial w_{jk}}{\partial (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_j)} V_j \right) \quad (2.24)$$

Ricordando l'equazione 2.7 si può scrivere:

$$\rho_k \ddot{\mathbf{u}}_k = \sum_{j=1}^m [\underline{\mathbf{T}}(x_k, t) \langle \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k \rangle - \underline{\mathbf{T}}(x_k, t) \langle \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j \rangle] V_j + \mathbf{b}_k \quad (2.25)$$

Introducendo il concetto di *pairwise force function* (vedi paragrafo 2.1.5) è possibile definire l'equazione 2.22 come:

$$\rho_k \ddot{\mathbf{u}}_k = \sum_{j=1}^m \mathbf{f}(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) V_j + \mathbf{b}_k \quad (2.26)$$

2.2.2 Condizioni al contorno

Le equazioni peridinamiche del moto rappresentano delle equazioni integro-differenziali, non lineari, funzione dello spazio e del tempo.

Si deve notare come non contengono derivate spaziali degli spostamenti e, quindi, siano valide in tutto il dominio in cui è definito il corpo, anche in presenza di discontinuità come precedentemente illustrato.

Le equazioni peridinamiche si risolvono integrandole nel tempo e nello spazio, imponendo le condizioni iniziali sugli spostamenti, sulle velocità ed eventualmente condizioni di vincolo e di carico. Queste condizioni possono essere applicate in particolari regioni lungo i bordi del corpo. Tali regioni vengono aggiunte esternamente al corpo e, per questo motivo, si definiscono *regioni fittizie*.

Macek e Silling, nel loro articolo [21], basandosi su esperimenti numerici, hanno stabilito che la regione fittizia di spazio adibita all'applicazione dei vincoli debba corrispondere ad un bordo pari all'orizzonte δ , affinché le condizioni di vincolo siano applicabili correttamente al corpo.

Per questo motivo, come si può vedere nella figura 2.7, viene introdotta, esternamente alla regione del corpo R , una regione fittizia R_c per imporre i vincoli, larga δ .

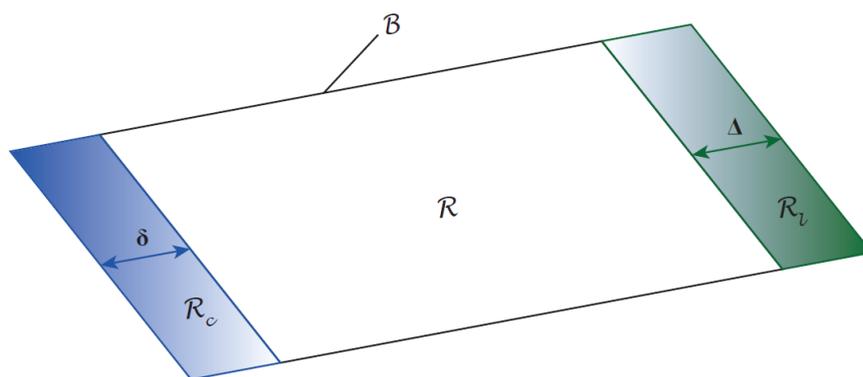


Figura 2.7: Rappresentazione grafica delle regioni adibite all'applicazione delle condizioni di vincolo (R_c) e di carico (R_l)

L'accoppiamento tra teoria peridinamica e FEM risulta vantaggioso in quanto non sono necessarie delle zone aggiuntive al modello per poterlo vincolare. Infatti, i vincoli imposti nelle prove effettuate in seguito verranno applicati esclusivamente a nodi degli elementi FEM.

Sui nodi peridinamici verranno imposte esclusivamente le condizioni iniziali di spostamento 2.27 e velocità 2.28 ed eventuali condizioni di carico.

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{x}_k, t = 0) = \mathbf{u}_k^*(\mathbf{x}_k) \quad (2.27)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x}_k, t = 0) = \dot{\mathbf{u}}_k^*(\mathbf{x}_k) \quad (2.28)$$

2.2.3 Limitazioni della teoria bond-based

La principale limitazione della teoria peridinamica bond-based è da ricercare nel valore che può assumere il coefficiente di Poisson, in quanto può essere pari a $\frac{1}{4}$ nel caso 2D *plane strain* e nel caso 3D, pari $\frac{1}{3}$ nel caso 2D *plane stress*, come viene descritto nell'articolo di Trageser et al. [19].

Per dedurre tali restrizioni, si eguaglia la densità di energia di deformazione, considerando un modello 2D, materiale isotropo per il modello peridinamico bond-based, e la densità di energia di deformazione di un materiale isotropo lineare per la teoria classica, per due stati di deformazione: *uniform normal strain* (vedi figura 2.8),

$$\xi_{11} = \xi_{22} = s_0, \quad \xi_{12} = 0 \quad (2.29)$$

e *uniform shear strain* (vedi figura 2.8),

$$\xi_{11} = -\xi_{22} = s_0, \quad \xi_{12} = 0 \quad (2.30)$$

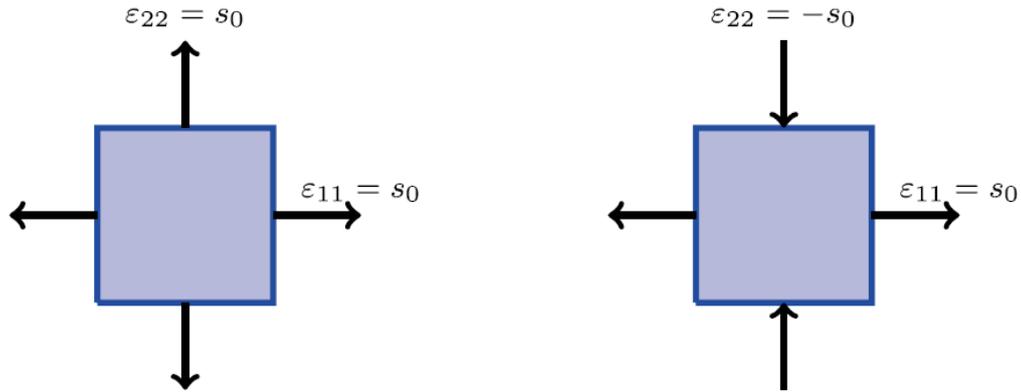


Figura 2.8: Uniform normal strain (sinistra) e uniform shear strain (destra) (immagine tratta da [19]).

La densità di energia di deformazione nella teoria classica è:

$$W^C = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \xi_{ij} \quad (2.31)$$

dove σ_{ij} indica le componenti del tensore delle tensioni e ξ_{ij} le componenti del tensore delle deformazioni.

Per la teoria peridinamica bond-based, considerando un materiale isotropo *Prototype Microelastic Brittle (PMB)* (vedi paragrafo 2.2.4), la densità di energia di deformazione risulta:

$$W^P = \frac{1}{4} \int_H c s^2 ||\boldsymbol{\xi}|| d\boldsymbol{\xi} \quad (2.32)$$

dove c rappresenta la costante di rigidità microelastica, s rappresenta lo stretch definito nell'espressione 2.2.

Considerando una *uniform normal strain* per un materiale isotropo, la densità di energia di deformazione per il caso plane strain, plane stress, e per il caso peridinamico bond-based 2D, sono rispettivamente:

$$W_1^{C\varepsilon} = \frac{E s_0^2}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.33)$$

$$W_1^{C\sigma} = \frac{E s_0^2}{1 - \nu} \quad (2.34)$$

$$W_1^P = \frac{c \pi \delta^3 s_0^2}{6} \quad (2.35)$$

Allo stesso modo per una *uniform shear strain* per un materiale isotropo, la densità di energia di deformazione per il caso plane strain, plane stress, e per il caso peridinamico

bond-based 2D, sono espresse di seguito:

$$W_2^{C\varepsilon} = \frac{Es_0^2}{1+\nu} \quad (2.36)$$

$$W_2^{C\sigma} = \frac{Es_0^2}{1+\nu} \quad (2.37)$$

$$W_2^P = \frac{c\pi\delta^3s_0^2}{12} \quad (2.38)$$

Al fine di garantire la congruenza tra modello classico isotropo plane strain e modello bond-based peridinamico 2D, si eguaglia $W_1^{C\varepsilon}$ e W_1^P , come $W_2^{C\varepsilon}$ e W_2^P per trovare, rispettivamente:

$$c = \frac{6E}{\pi(1+\nu)(1-2\nu)\delta^3} \quad (2.39)$$

e

$$c = \frac{12E}{\pi(1+\nu)\delta^3} \quad (2.40)$$

ricavando infine che $\nu = \frac{1}{4}$.

In modo analogo, per garantire la congruenza tra modello classico isotropo plane stress e modello bond-based peridinamico 2D, si eguaglia $W_1^{C\sigma}$ e W_1^P , come $W_2^{C\sigma}$ e W_2^P per trovare, rispettivamente:

$$c = \frac{6E}{\pi(1-\nu)\delta^3} \quad (2.41)$$

e

$$c = \frac{12E}{\pi(1+\nu)\delta^3} \quad (2.42)$$

ricavando infine che $\nu = \frac{1}{3}$.

Definito il modello, il coefficiente di Poisson si mantiene costante per ogni configurazione deformata, per tutti i materiali impiegati anche se differenti:

- $\nu = \frac{1}{3}$ per modelli 2D con configurazione *plane stress*;
- $\nu = \frac{1}{4}$ per modelli 2D e 3D con configurazione *plane strain*.

Questa condizione identifica una limitazione per la simulazione di diversi fenomeni fisici reali, si supera quindi il problema con l'introduzione della teoria peridinamica state-based [17].

I modelli implementati di seguito riguardano una piastra nella configurazione plane stress, la cui parte peridinamica fa riferimento alla teoria bond-based. Si assume quindi un coefficiente di Poisson pari a $\nu = \frac{1}{3}$. Tale valore è da interpretare non come una limitazione data dal tipo di teoria utilizzata, ma come una scelta arbitraria di progetto.

2.2.4 Prototype Microelastic Brittle Material

Nella teoria peridinamica bond-based viene spesso utilizzato un modello semplice per introdurre una legge costitutiva del materiale, modello chiamato *Prototype Microelastic*

Brittle (PMB) constitutive model. I bond peridinamici sono assimilabili a delle molle nella teoria classica della meccanica. In questo modello, la forza peridinamica rappresenta una funzione lineare della rigidezza dei bond, chiamata *spring stiffness*, c , e si presenta come una funzione variabile della posizione relativa ξ . Il rapporto tra il vettore forza f e la rigidezza della molla c determina l'allungamento relativo o *bond stretch*, s . Si arriva alla rottura del bond nel momento in cui quest'ultimo valore supera s_c , chiamato *critical stretch*. Dopo la rottura, il bond non viene più preso in considerazione, seguendo così un processo irreversibile, trasformandosi in un modello *history dependent*.

L'allungamento relativo o stretch in 2.2 può essere riscritto come:

$$s = \frac{|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}| - \xi}{|\boldsymbol{\xi}|} \quad (2.43)$$

dove s assume un valore positivo quando il bond risulta in tensione.

Per un materiale PMB si ricava la seguente relazione per la *pairwise force vector*:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = c(\boldsymbol{\xi})\mu(\boldsymbol{\xi})s \frac{\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}|} \quad (2.44)$$

dove con $\mu(\boldsymbol{\xi})$ si considera lo stato di rottura del bond:

$$\mu(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1 & \text{se } s < s_c \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.45)$$

Se il bond è integro la funzione $\mu(\boldsymbol{\xi})$ assume un valore unitario, conseguentemente la pairwise force function f risulta proporzionale allo stretch s . Se invece il valore di s è maggiore dello stretch critico, il bond raggiunge il punto di rottura, $\mu(\boldsymbol{\xi})$ si annulla così come il valore di \mathbf{f} .

Il valore dello stretch critico s_c si ricava dall'energia di rottura rilasciata durante la creazione delle due superfici di separazione conseguente all'apertura della cricca. Da Silling e Askari [37] l'energia di frattura G_{Ic} necessaria per rompere tutti i bond per un'unità di area di frattura, riferita al primo modo di apertura, si calcola attraverso un integrale che ha come dominio una superficie sferica con raggio pari all'orizzonte δ :

$$G_{Ic} = \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1}\frac{z}{\xi}} \frac{1}{2} c s_c^2 \xi^3 \sin\phi d\phi d\xi d\theta dz \quad (2.46)$$

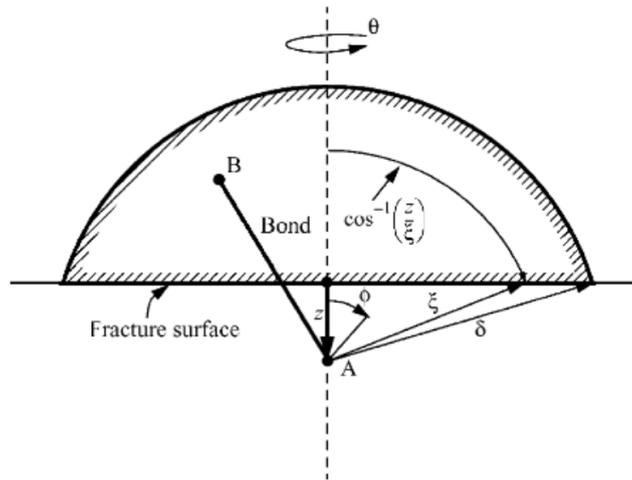


Figura 2.9: Dominio di integrazione per il calcolo dell'energia di frattura (immagine tratta da [37]).

Per il modello bidimensionale l'energia di frattura risulta:

$$G_{Ic} = \frac{1}{2} c s_c^2 \left(\frac{h \delta^4}{2} \right) \quad (2.47)$$

Invertendo 2.47 si ricava lo stretch critico s_c in funzione dell'energia di frattura di apertura G_{Ic} , del micromodulo c e dell'orizzonte peridinamico δ .

$$s_c = \sqrt{\frac{4G_{Ic}}{ch\delta^4}} \quad (2.48)$$

Considerando la rigidità del bond nel caso bidimensionale:

$$c = \frac{12E}{\pi h \delta^3 (1 + \nu)} \quad (2.49)$$

con $\nu = \frac{1}{3}$, sostituendo 2.49 in 2.48 si ricava:

$$s_c = \sqrt{\frac{4\pi G_{Ic}}{9E\delta}} \quad (2.50)$$

Da notare che per un materiale isotropo non vi è una dipendenza di f dalla direzione di ξ .

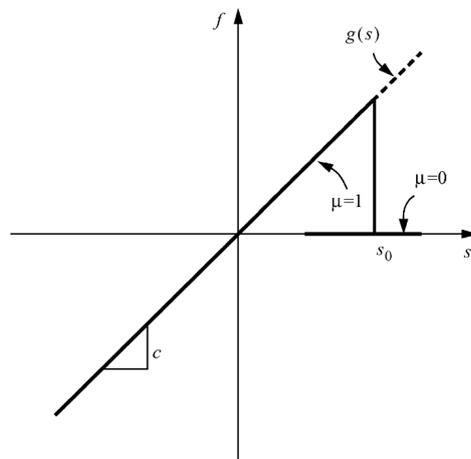


Figura 2.10: Rappresentazione della forza f in un bond per un materiale PMB (immagine tratta da [37]).

Si introduce il concetto di *danno locale* $\varphi(\mathbf{x}_k, t)$ risultante dal rapporto tra il numero di bond rotti ed il numero di interazioni iniziali con i punti della propria sfera di influenza H .

$$\varphi(\mathbf{x}_k, t) = 1 - \frac{\int_H \mu(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) dV_j}{\int_H dV_j} \quad (2.51)$$

dove \mathbf{x} è incluso nell'argomento di μ in quanto è funzione della posizione nel corpo.

Si nota che $0 \leq \varphi \leq 1$, dove 0 rappresenta un danno locale nullo, dove tutti i bond risultano integri, mentre è uguale a 1 in presenza della rottura di tutte le interazioni con i nodi famiglia. E' quindi possibile utilizzare il valore del danno locale come indicatore di propagazione della cricca. Inizialmente tutti i bond, essendo integri, il valore del danno è nullo. In seguito all'insorgere di una cricca, il valore del danno cresce. La propagazione della cricca, oltre alla rottura dei bond, porta ad una redistribuzione del carico sui restanti bond integri. Tale redistribuzione comporta inevitabilmente un maggior carico sui bond integri, aumentando così la loro probabilità di rottura.

Man mano che la cricca si propaga, un numero sempre maggiore di bond si indebolisce fino alla rottura, creando un effetto a cascata di indebolimento-rottura e causando una propagazione "naturale" della cricca.

2.2.5 Correzioni sull'orizzonte peridinamico

E' presente una carenza nell'implementazione numerica della teoria peridinamica che può portare a risultati poco accurati e consistenti.

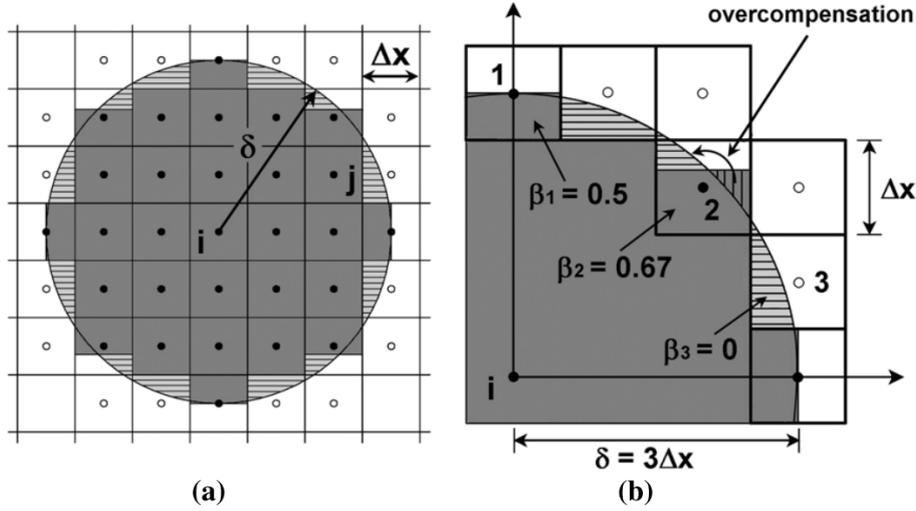


Figura 2.11: (a) Rappresentazione della sfera d'influenza discretizzata del nodo \mathbf{x}_k e (b) del fattore β per i volumi sul bordo di δ (immagine tratta da [35]).

Tutti i punti materiali compresi nell'orizzonte sono inclusi nel calcolo della forza peridinamica. L'implementazione, tuttavia, valuta ogni cella come completamente dentro o fuori dall'orizzonte, creando di fatto una inaccuratezza.

Considerando una griglia con $\Delta x = \delta/3$. La figura 2.11 mostra tutta la famiglia nodi (punti pieni) contati dall'implementazione esistente, in una vista di proiezione, in cui il cerchio rappresenta la sfera dell'orizzonte δ .

Solo le celle con il loro nodo centrale compreso nell'orizzonte sono considerati nodi famiglia, mentre le aree parziali delle celle che hanno il nodo centrale all'esterno dell'orizzonte, non sono considerati.

I volumi omessi contenenti i punti materiali che fanno comunque parte dell'orizzonte, non vengono inseriti nel calcolo.

Solo un raffinamento della griglia può ridurre l'errore, ma il problema persiste.

Kebing [35] introducendo un coefficiente β , chiamato *fattore di riduzione volumetrica*, da inserire nell'equazione del moto discretizzata 2.26, permette di affinare il calcolo delle porzioni di volume V_j di ogni nodo famiglia contenuto in δ .

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{con } |\xi| \leq \delta - 0.5\Delta x \\ \frac{\delta + 0.5\Delta x - |\xi|}{\Delta x} & \delta - 0.5\Delta x < |\xi| \leq \delta + 0.5\Delta x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.52)$$

L'equazione del moto diventa:

$$\rho_k \ddot{\mathbf{u}}_k = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_k, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) \cdot (\beta \Delta x^3) + \mathbf{b}(\mathbf{x}_k, t) \quad (2.53)$$

2.3 Equazioni peridinamiche del moto di una piastra

Facendo riferimento all'articolo di Diyaroglu et al. [20], in questa sezione viene presentata una nuova formulazione per descrivere la cinematica di una piastra. Si tratterà il comportamento di piastre sottili nelle quali si considerano le deformazioni a taglio lungo lo spessore. Si integrerà la teoria di Mindlin con la teoria peridinamica bond-based.

2.3.1 Cinematica della piastra

Come illustrato in figura 2.12, ϕ_j e ϕ_k rappresentano le rotazioni rispetto alla linea d'azione tra il punto materiale j e k .

Considerando il punto k come quello di interesse, la curvatura, k_{kj} , rispetto alla linea d'azione tra i punti j e k , può essere definita come:

$$k_{kj} = \frac{\phi_j - \phi_k}{\xi_{jk}} \quad (2.54)$$

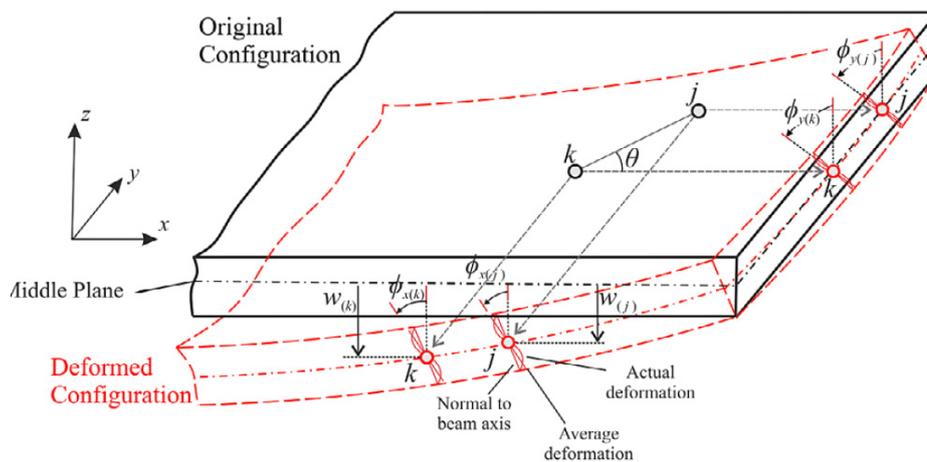


Figura 2.12: Configurazione iniziale e deformata della piastra (immagine tratta da [20])

Tramite trasformazione di coordinate, le rotazioni e la curvatura possono essere decomposte:

$$\phi_j = \phi_{x_j} \cos(\theta) + \phi_{y_j} \sin(\theta) \quad (2.55)$$

$$\phi_k = \phi_{x_k} \cos(\theta) + \phi_{y_k} \sin(\theta) \quad (2.56)$$

e si ricava:

$$k_{kj} = \left(\frac{\phi_{x_j} - \phi_{x_k}}{x_j - x_k} \right) \cos^2(\theta) + \left(\frac{\phi_{y_j} - \phi_{y_k}}{y_j - y_k} \right) \sin^2(\theta) \quad (2.57)$$

dove $x_j - x_k = \xi_{jk} \cos(\theta)$ e $y_j - y_k = \xi_{jk} \sin(\theta)$, con ξ_{jk} che rappresenta la distanza tra i punti j e k . La pendenza rispetto alla linea che collega i punti j e k viene espresso come:

$$\theta_{kj} = \frac{w_j - w_k}{\xi_{jk}} \quad (2.58)$$

dove w_j e w_k rappresentano lo spostamento fuori dal piano di j e k .

Come riportato in figura 2.12 l'angolo di taglio trasversale per i punti j e k , può essere espresso come:

$$\varphi_j = \theta_{kj} - \phi_j \quad (2.59)$$

$$\varphi_k = \theta_{kj} - \phi_k \quad (2.60)$$

Considerando il punto k di interesse, l'angolo di taglio trasversale, φ_{kj} , tra il punto j e k si può definire l'angolo di taglio medio tra questi due punti materiali come:

$$\varphi_{kj} = \frac{w_j - w_k}{\xi_{jk}} - \frac{\phi_j + \phi_k}{2} \quad (2.61)$$

oppure

$$\varphi_{kj} = \frac{w_j - w_k}{\xi_{jk}} - \frac{(\phi_{x_j} \cos(\theta) + \phi_{y_j} \sin(\theta)) + (\phi_{x_k} \cos(\theta) + \phi_{y_k} \sin(\theta))}{2} \quad (2.62)$$

Quando si considera il punto j di interesse, l'angolo di taglio trasversale e la curvatura dovute all'interazione tra il punto j e k diventano:

$$\varphi_{jk} = \frac{w_k - w_j}{\xi_{jk}} - \left(-\frac{\phi_k + \phi_j}{2} \right) \quad (2.63)$$

e

$$k_{jk} = \frac{\phi_k - \phi_j}{\xi_{jk}} \quad (2.64)$$

Si può notare che $\varphi_{jk} = -\varphi_{kj}$ e $k_{jk} = -k_{kj}$.

2.3.2 Equazioni del moto

Riprendendo le equazioni:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0 \quad (2.65)$$

$$(2.66)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_k} = 0 \quad (2.67)$$

$$(2.68)$$

$$\mathcal{L} = T - U \quad (2.69)$$

L'energia cinetica totale del sistema dovuta alla deformazione flessionale e di taglio trasversale, viene espressa come:

$$T = \frac{1}{2} \rho \sum_{k=1}^{\infty} \left[\dot{u}_k^2 + \dot{v}_k^2 + \dot{w}_k^2 \right] V_k \quad (2.70)$$

Nella teoria della piastre di Mindlin, a cui si fa riferimento, gli spostamenti nel piano della piastra sono funzioni delle rotazioni come riportato nelle figure 2.13-2.14.

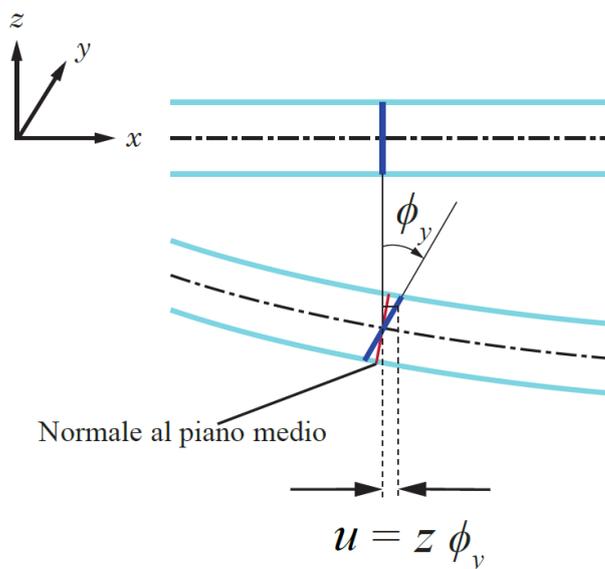


Figura 2.13: Rappresentazione dello spostamento u lungo l'asse x , funzione della coordinata z e della rotazione ϕ_y .

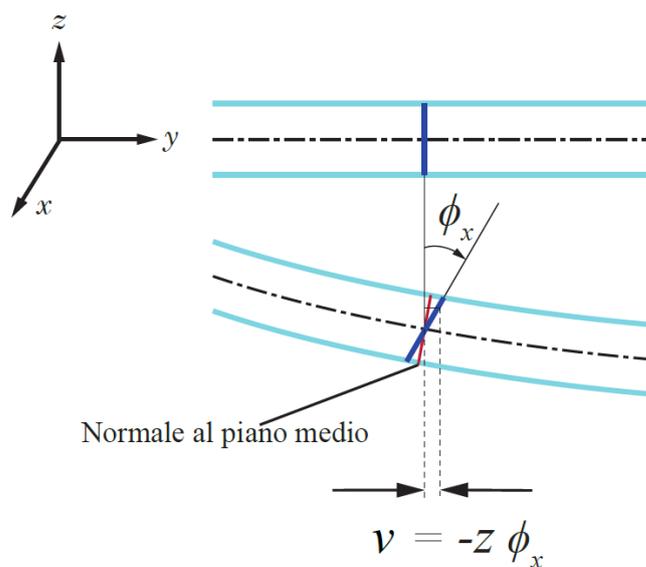


Figura 2.14: Rappresentazione dello spostamento v lungo l'asse y , funzione della coordinata z e della rotazione ϕ_x .

Si ha che $u_k = -z\phi_{x_k}$ e $v_k = -z\phi_{y_k}$ e eseguendo l'integrazione lungo lo spessore della piastra, si ottiene:

$$T = \frac{1}{2}\rho \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-h/2}^{h/2} [\dot{w}_k^2 + z^2 \dot{\phi}_{x_k}^2 + z^2 \dot{\phi}_{y_k}^2] dz \right) A_k \quad (2.71)$$

oppure

$$T = \frac{1}{2}h\rho \sum_{k=1}^{\infty} \left(\dot{w}_k^2 + \frac{h^2}{12} \dot{\phi}_{x_k}^2 + \frac{h^2}{12} \dot{\phi}_{y_k}^2 \right) A_k \quad (2.72)$$

dove A_k rappresenta l'area infinitesima di ogni punto e h è lo spessore della piastra.

L'energia potenziale totale della piastra si può ottenere dalla somma dei micropoten- ziali, $\tilde{w}_{kj}(k_{kj})$ e $\hat{w}_{kj}(\varphi_{kj})$:

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} [\tilde{w}_{kj}(k_{kj}) + \tilde{w}_{jk}(k_{kj})] V_j - \frac{\hat{b}_{\alpha k}}{h} \phi_{\alpha k} \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} [\hat{w}_{kj}(\varphi_{kj}) + \hat{w}_{jk}(\varphi_{jk})] V_j - \frac{\tilde{b}_{\alpha k}}{h} \phi_k \right\} \quad (2.73)$$

dove $\tilde{b}_{\alpha k}$ e \hat{b}_k rappresentano la risultante del momento e della forza sul punto k . La variabile indipendente è la deflessione fuori dal piano e le rotazioni, w_k e $\phi_{\alpha k}$.

Le equazioni di Lagrange sono:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{w}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_k} = 0 \quad (2.74)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{\alpha k}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha k}} = 0 \quad (2.75)$$

con $\alpha = x, y$.

Da cui si ricava si può ricavare:

$$\rho h \ddot{w}_k = c_s \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{w_j - w_k}{\xi_{jk}} - \frac{\phi_{x_j} + \phi_{x_k}}{2} \cos(\theta) - \frac{\phi_{y_j} + \phi_{y_k}}{2} \sin(\theta) \right) V_j + \hat{b}_k \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_{x_k} &= c_b \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\phi_{x_j} - \phi_{x_k}}{\xi_{jk}} \right) \cos(\theta) + \left(\frac{\phi_{y_j} - \phi_{y_k}}{\xi_{jk}} \right) \sin(\theta) \right] \cos(\theta) V_j + \\ &+ \frac{1}{2} c_s \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{jk} \left(\frac{w_j - w_k}{\xi_{jk}} - \frac{\phi_{x_j} + \phi_{x_k}}{2} \cos(\theta) - \frac{\phi_{y_j} + \phi_{y_k}}{2} \sin(\theta) \right) \cos(\theta) V_j + \tilde{b}_{x_k} \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_{y_k} &= c_b \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\phi_{x_j} - \phi_{x_k}}{\xi_{jk}} \right) \cos(\theta) + \left(\frac{\phi_{y_j} - \phi_{y_k}}{\xi_{jk}} \right) \sin(\theta) \right] \sin(\theta) V_j + \\ &+ \frac{1}{2} c_s \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{jk} \left(\frac{w_j - w_k}{\xi_{jk}} - \frac{\phi_{x_j} + \phi_{x_k}}{2} \cos(\theta) - \frac{\phi_{y_j} + \phi_{y_k}}{2} \sin(\theta) \right) \sin(\theta) V_j + \tilde{b}_{y_k} \end{aligned} \quad (2.78)$$

2.3.3 Micromoduli di flessione e di taglio

Le deformazioni applicabili alla piastra di Mindlin introducono la necessità di definire delle rigidezze ulteriori nei bond, in modo che possano rispondere alle nuove tipologie di sollecitazione a flessione e a taglio.

Si determinano il micromodulo per la deformazione a flessione c_b ed il micromodulo per la deformazione a taglio c_s , già introdotti precedentemente e presenti nelle equazioni

del moto. Come per il micromodulo c relativo allo stretch del bond, i micromoduli c_b e c_s sono rispettivamente relativi alla curvatura k e all'angolo di taglio φ e permettono di definire l'interazione peridinamica tra due nodi, quantificata dalle proprietà del materiale con cui è definita la piastra. Per un materiale con comportamento lineare, possiamo definire la *pairwise force function* dell'interazione peridinamica a flessione (\tilde{f}) e a taglio (\hat{f}) nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= \frac{c_b}{h}k \\ \hat{f} &= \frac{c_s}{h}\varphi\end{aligned}\tag{2.79}$$

Diyaroglu et al. [20] calcolano questi coefficienti eguagliando le equazioni peridinamiche del moto (2.76 2.77 2.78) con le equazioni del moto della teoria classica e ottengono:

$$c_s = \frac{9E}{4\pi\delta^3}k^2\tag{2.80}$$

$$c_b = \frac{E}{\pi\delta} \left(\frac{3h^2}{4\delta^2} + \frac{27}{80}k^2 \right)\tag{2.81}$$

dove k^2 è il fattore di correzione a taglio pari a:

$$k^2 = \frac{\pi^2}{12}\tag{2.82}$$

I parametri c_b e c_s sono determinati per un punto materiale che possiede un orizzonte completo. Si introduce il fattore correttivo k^2 per i punti vicino ai bordi del corpo che non posseggono un orizzonte completo.

2.3.4 Curvatura e angolo di taglio critici

Per includere il fallimento nella risposta del materiale vengono introdotti i concetti di curvatura critica k_c e di angolo di taglio critico φ_c . Come riportato nell'articolo di Diyaroglu et al. [20] la funzione di risposta nelle equazioni della piastra possono essere modificate, introducendo una funzione a valore scalare *history-dependent*, $H(x_j - x_k, t)$, come:

$$\hat{f}_{kj} = c_s H(x_j - x_k)(\varphi_{kj})\tag{2.83}$$

$$\tilde{f}_{kj} = c_b H(x_j - x_k)(k_{kj})\tag{2.84}$$

dove:

$$H(x_j - x_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } |k_{kj}| < k_c \quad \text{e} \quad |\varphi_{kj}| < \varphi_c \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}\tag{2.85}$$

Il bond risulta completamente integro se $H(x_j - x_k)$ è unitario.

I valori della curvatura critica e dell'angolo di taglio critico possono essere espressi in termini del tasso critico di rilascio di energia di deformazione. Per ricavare queste relazioni, l'energia totale di deformazione richiesta per rimuovere tutte le interazioni in

corrispondenza della nuova superficie di frattura, A , come mostrato in figura 2.15, deve essere determinata ed eguagliata al corrisponde valore di tasso di energia di deformazione critico.

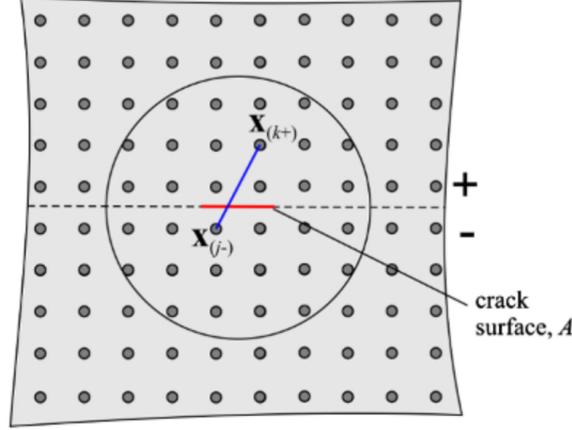


Figura 2.15: Rappresentazione dell'interazione tra due punti materiali il cui bond passa attraverso la superficie di frattura (immagine tratta da [20]).

L'energia di deformazione a flessione totale richiesta per rimuovere tutte le interazioni attraverso la nuova di superficie di frattura A è:

$$W_b^c = \sum_{k=1}^{k^+} \sum_{j=1}^{j^-} \frac{1}{2} c_b (k_c)^2 (|\mathbf{x}_{j^-} - \mathbf{x}_{k^+}|) V_{k^+} V_{j^-} \quad (2.86)$$

L'energia di deformazione a flessione totale, W_b^c , può essere eguagliata al tasso di energia di deformazione del modo I, G_{Ic} , per determinare il valore della curvatura a flessione critica come:

$$G_{Ic} = \frac{\frac{1}{2} c_b (k_c)^2 \sum_{k=1}^{k^+} \sum_{j=1}^{j^-} (|\mathbf{x}_{j^-} - \mathbf{x}_{k^+}|) V_{k^+} V_{j^-}}{A} \quad (2.87)$$

Basandosi sulle espressioni derivate da Silling e Askari [37] e Madenci e Oterkus [18] per il tasso di energia rilasciato, è evidente che:

$$\frac{\sum_{k=1}^{k^+} \sum_{j=1}^{j^-} (|\mathbf{x}_{j^-} - \mathbf{x}_{k^+}|) V_{k^+} V_{j^-}}{A} = \frac{h\delta^4}{2} \quad (2.88)$$

alla fine, si ricava la curvatura critica:

$$k_c = \sqrt{\frac{4G_{Ic}}{c_b h \delta^4}} \quad (2.89)$$

Allo stesso modo, l'energia di taglio totale richiesta per rimuovere tutte le interazioni attraverso la nuova superficie di frattura A è:

$$W_s^c = \sum_{k=1}^{k^+} \sum_{j=1}^{j^-} \frac{1}{2} c_s (\varphi_c)^2 (|\mathbf{x}_{j^-} - \mathbf{x}_{k^+}|) V_{k^+} V_{j^-} \quad (2.90)$$

Questa energia di taglio totale, W_s^c , può essere eguagliata al tasso di energia critica rilasciata per il modo III, G_{IIIc} , per ricavare il valore dell'angolo di taglio critico.

$$G_{IIIc} = \frac{\frac{1}{2}c_s(\varphi_c)^2 \sum_{k=1}^{k^+} \sum_{j=1}^{j^-} (|\mathbf{x}_{j^-} - \mathbf{x}_{k^+}|) V_{k^+} V_{j^-}}{A} \quad (2.91)$$

Usando la relazione 2.88, si ricava l'angolo di taglio critico:

$$\varphi_c = \sqrt{\frac{4G_{IIIc}}{c_s h \delta^4}} \quad (2.92)$$

2.4 Matrice di rigidezza peridinamica

Al fine di costruire un modello accoppiato tra griglie peridinamiche ed elementi finiti, risulta necessario determinare la matrice di rigidezza del modello peridinamico.

A tale scopo si accoppiano due matrici di rigidezza: una relativa agli spostamenti nel piano u, v e una relativa alla formulazione peridinamica di una piastra di Mindlin, cioè con spostamenti fuori dal piano w e rotazioni relative agli assi nel piano ϕ_{x_k}, ϕ_{x_j} . La matrice di rigidezza di un bond si presenta quindi come una matrice con $2n$ righe e $2n$ colonne, dove n indica il numero di gradi di libertà di un nodo, per un totale di 5 gradi di libertà per nodo.

La matrice relativa agli spostamenti nel piano è composta da termini associabili a delle vere e proprie rigidzze, tanto che è possibile considerare i bond come delle molle meccaniche. Come riportato nell'articolo di Prakash e Stewart [36] nella 2.93 si illustra la matrice di rigidezza di un bond per i gradi di libertà u e v .

$$\frac{cV_k V_j \beta}{\xi_{jk}} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (2.93)$$

Per quanto riguarda la matrice relativa agli spostamenti fuori dal piano, si fa riferimento all'equazione 2.76, in cui viene descritta l'equazione del moto per il grado di libertà w_k . Per semplicità, si trascurano i termini relativi alle inerzie ed alle forze esterne. Si prendono in considerazione solo due nodi: il nodo sorgente k ed un nodo famiglia j .

I termini relativi alla rigidezza possono essere riscritti in forma matriciale, come di seguito:

$$\frac{c_s V_k V_j \beta}{h} \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & -\cos\theta & 1 & \sin\theta & -\cos\theta \\ \xi_{kj} & 2 & 2 & \xi_{kj} & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_k \\ \phi_{x_k} \\ \phi_{y_k} \\ w_j \\ \phi_{x_j} \\ \phi_{y_j} \end{Bmatrix} \quad (2.94)$$

L'equazione 2.94 rappresenta la rigidezza del bond tra il nodo sorgente k ed un nodo famiglia j , considerando il grado di libertà w_k . Per ottenere la matrice di rigidezza per il nodo k , considerando tutti i suoi nodi famiglia j , risulta necessario impiegare la sommatoria presente nell'equazione 2.76.

La matrice di rigidezza, quindi, si trasforma in una matrice che presenta un numero di colonne pari a $3(n+1)$ dove n sono i nodi famiglia totali per il nodo k .

Si sottolinea che l'angolo θ è l'angolo tra la congiungente dei nodi k e j che si forma con l'asse x , come si può osservare in figura 2.12. Tale angolo varia a seconda di quale nodo famiglia j si prende in considerazione. Pertanto, non mantiene un valore costante all'interno della sommatoria nell'equazione 2.76. Inoltre, il coefficiente β è sempre presente insieme al volume del nodo famiglia V_j così da definire la precisa quantità di volume che influenzerà il moto del nodo sorgente k .

Analogamente a quanto effettuato per l'equazione 2.76, è possibile calcolare la matrice di rigidezza per il singolo bond anche per gli altri due gradi di libertà ϕ_{x_k} e ϕ_{x_j} a partire dalle equazioni 2.77 e 2.78 e, successivamente, la matrice di rigidezza per il nodo sorgente k , considerando tutti i nodi appartenenti alla sua sfera d'influenza.

Considerando tutti e tre i gradi di libertà in gioco, per la teoria delle piastre di Mindlin, la matrice di rigidezza per un singolo bond si ottiene unendo le tre matrici di rigidezza calcolate in maniera analoga all'equazione 2.94. Nell'equazione 2.96 sono riportate, in forma matriciale, le equazioni del moto per un nodo sorgente k avente un singolo bond con un nodo famiglia j . Semplificando si è utilizzata la seguente notazione:

$$\xi_{kj} = \xi \quad \cos\theta = l_x \quad \sin\theta = l_y \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned}
& V_k \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \frac{h^2}{l^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \frac{h^2}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \frac{h^2}{l^2} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{u}_k \\ \ddot{v}_k \\ \ddot{w}_k \\ \ddot{\phi}_{x_k} \\ \ddot{\phi}_{y_k} \end{Bmatrix} + \\
& V_k V_j \beta \begin{bmatrix} \xi l_x^2 & \xi l_x l_y & 0 & 0 & -\xi l_x^2 & -\xi l_x l_y \\ \xi l_x l_y & \xi l_y^2 & 0 & 0 & -\xi l_x l_y & \xi l_y^2 \\ 0 & 0 & \frac{C_s}{h\xi} & \frac{C_s l_y}{2h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_s l_y}{2h} & \frac{C_s l_y}{h\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C_s l_x}{2h} & -\frac{C_s l_y}{h\xi} & -\frac{C_s l_x}{2h} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C_s l_x}{2h} & -\frac{C_s l_y}{h\xi} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \phi_{y_k} \\ u_j \\ \phi_{x_k} \\ v_j \\ w_j \\ \phi_{x_j} \\ \phi_{y_j} \end{Bmatrix} \\
& = \begin{Bmatrix} \frac{b_{u_k} V_k}{h} \\ \frac{b_{v_k} V_k}{h} \\ \frac{\tilde{b}_{u^x} V_k}{h} \\ \frac{\tilde{b}_{v^x} V_k}{h} \\ \frac{\tilde{b}_{y_k} V_k}{h} \end{Bmatrix} \tag{2.96}
\end{aligned}$$

Capitolo 3

Metodo agli elementi finiti per una piastra SHELL

Una struttura piana si definisce tale quando una delle sue dimensioni è trascurabile rispetto alle altre due, come in figura 3.1, alla quale viene attribuita comunemente il termine di *piastra*.

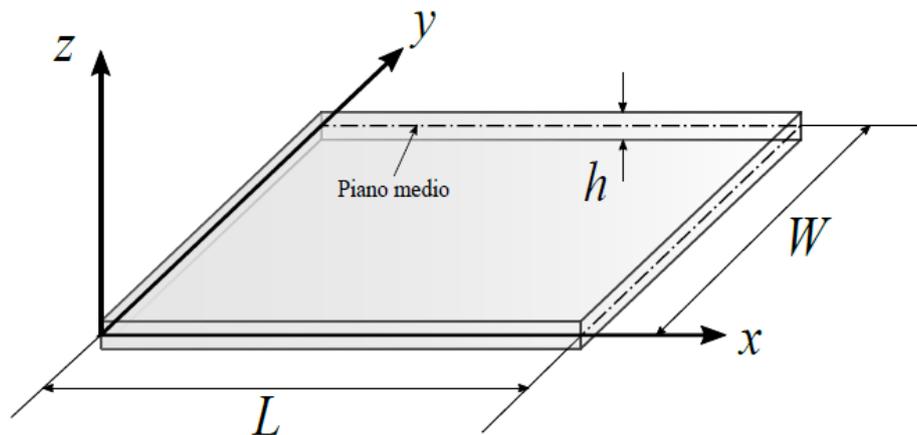


Figura 3.1: Rappresentazione grafica di una piastra.

Le dimensioni che identificano una piastra sono la lunghezza L , la larghezza W e lo spessore h . Può essere caratterizzata dal termine "sottile" o "spessa" a seconda del valore dello spessore h , precisamente si definisce sottile se $h \ll L, W$. La teoria utilizzata per definire la piastra viene scelta in base alle sollecitazioni a cui viene sottoposta. Il nome *piastra* è un termine generico che raggruppa in esso una serie di strutture con proprietà diverse a seconda del numero gradi di libertà gestiti. Di seguito verranno trattati alcuni esempi di nomenclatura per le piastre facendo riferimento alla funzionalità e all'impiego.

MEMBRANE

La *membrana* è una tipologia di piastra che analizza unicamente le tensioni nel piano, impiegando una formulazione di tipo *plane stress* [31] [33] [34]. I gradi di libertà ammessi interessano solo le traslazioni nel piano u lungo la direzione x e la traslazione v lungo la direzione y .

PLATE

PLATE si traduce come *piastra* e rappresenta una struttura modellata per sollecitazioni trasversali, flessionali e di taglio. Per definire queste tipologie di piastre sono disponibili la teoria di Kirchhoff-Love e la teoria di Mindlin [31] [32] [33] [34]. Quest'ultima essendo un'elaborazione della prima, consente di prendere in considerazione anche le deformazioni a taglio lungo lo spessore.

In questo elaborato, impiegando la teoria delle piastre di Mindlin, è possibile gestire i gradi di libertà di traslazione fuori dal piano w lungo la direzione z e le rotazioni ϕ_x e ϕ_y , rispettivamente attorno agli assi x e y .

SHELL

Letteralmente *conchiglia* o *guscio*, SHELL è una piastra dove si valutano sia le sollecitazioni nel piano sia le sollecitazioni trasversali, flessionali e di taglio lungo lo spessore. Sono quindi ammesse tutte le traslazioni e le rotazioni ad eccezione del drilling, precisamente la rotazione attorno all'asse perpendicolare al piano della piastra, cioè l'asse z .

Sono disponibili varie formulazioni per definire una piastra SHELL, il modo più semplice è costruirla accoppiando la teoria di una piastra MEMBRANE con la teoria di una piastra PLATE, ottenendo così una piastra con la possibilità di gestire 5 gradi di libertà: u , v , w , ϕ_x e ϕ_y .

Grazie alla formulazione *plane stress* e alla teoria delle piastre di Mindlin, rispettivamente trattate nelle sezioni 3.2 e 3.3, si sviluppa la parte FEM del modello di piastra SHELL.

3.1 Basi sul metodo degli elementi finiti

Il metodo degli elementi finiti rappresenta uno step essenziale nella progettazione e modellazione per affrontare un problema strutturale.

I valori del campo delle variabili in un corpo continuo cambiano da punto a punto, ottenendo quindi un numero infinito di soluzioni. Il metodo degli elementi finiti conduce a una semplificazione riducendo i gradi di libertà a un numero finito, dividendo il dominio in *elementi* ed esprimendo il campo delle variabili incognite in termini di funzioni assunte approssimate all'interno di ogni elemento. Tali funzioni, denominate *funzioni di forma*, risultano definite da valori del campo delle variabili in punti specifici, chiamati *nodi*. I nodi si trovano solitamente lungo i confini degli elementi e collegano gli elementi adiacenti. Questo determina una semplificazione del problema permettendo il calcolo degli spostamenti e delle forze agenti solo sui nodi, mentre per gli altri punti intermedi, si ottengono, attraverso un'interpolazione, dei risultati sulla superficie degli elementi scelti tramite le funzioni di forma.

Il metodo, quindi, prevede la decomposizione o discretizzazione (*mesh*) del dominio in un numero finito di *elementi*, connessi tra loro dai *nodi*.

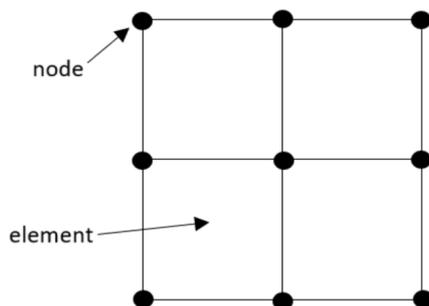


Figura 3.2: Rappresentazione della mesh di una superficie quadrata dove sono identificati elementi e nodi.

L'elemento FEM è rappresentato da una matrice di rigidezza dove risultano, al suo interno, definite tutte le proprietà elastiche e strutturali dell'elemento, consentendo, in seguito, la determinazione della matrice di rigidezza globale della struttura. Attraverso essa, il problema strutturale si risolve ricavando gli spostamenti o le forze agenti su ogni nodo.

In notazione matriciale, il sistema globale è definito come:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.1)$$

dove \mathbf{K} è la matrice di rigidezza globale, \mathbf{u} è il vettore degli spostamenti e \mathbf{F} il vettore delle forze. A seconda della natura del sistema, \mathbf{K} può dipendere da \mathbf{u} , $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{u})$ e \mathbf{F} può dipendere dal tempo, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$.

In conclusione, il metodo degli elementi finiti prevede i seguenti passaggi:

1. Discretizzazione del dominio in numero finito di elementi;
2. Definizione delle funzioni di interpolazione o di forma;
3. Costruzione della matrice di rigidezza del singolo elemento;
4. Assemblaggio delle singoli matrici degli elementi per ottenere la matrice di rigidezza globale;
5. Imposizione delle condizioni al contorno;
6. Soluzione dell'equazione 3.1.

3.2 Teoria plane stress per elementi di tipo MEMBRANE

Considerando una piastra di spessore costante, sottile, omogenea e isotropa, come rappresentato in figura 3.1, tutte le condizioni di carico e di vincolo sono applicate sul piano medio di riferimento.

Per rispettare la condizione di plane stress caratteristica dell'elemento MEMBRANE si ipotizzano le tensioni ortogonali al piano medio della piastra pari a zero.

$$\sigma_z = 0 \quad (3.2)$$

3.2.1 Vettore spostamento, deformazione e tensione

La teoria plane stress considera due spostamenti globali, u e v , definiti lungo l'asse x e y , rispettivamente.

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Le deformazioni si ottengono dalla derivazione degli spostamenti:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Assumendo un materiale lineare elastico, è possibile calcolare le tensioni dalle leggi di Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_x \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (3.5)$$

dove E è il modulo di Young del materiale, ν il coefficiente di Poisson e G il modulo di taglio pari a $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Invertendo le equazioni delle deformazioni si ottengono le tensioni normali σ_x , σ_y e la tensione di taglio τ_{xy} :

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_x - \nu\varepsilon_y) \quad \sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_y - \nu\varepsilon_x) \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (3.6)$$

La legge di Hooke per il caso plane stress in forma matriciale risulta quindi:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

da cui si evidenzia la matrice costante del materiale:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

3.2.2 Funzioni di forma di un elemento isoparametrico MEMBRANE

La mesh della piastra viene suddivisa in elementi quadrati, definiti da 4 nodi. Ogni nodo è composto da un numero definito di gradi di libertà a seconda del tipo di elemento prescelto. Prendendo in considerazione l'elemento MEMBRANE, i gradi di libertà rappresentano la traslazione u parallela all'asse x e la traslazione v parallela all'asse y , come mostrato in figura 3.3.

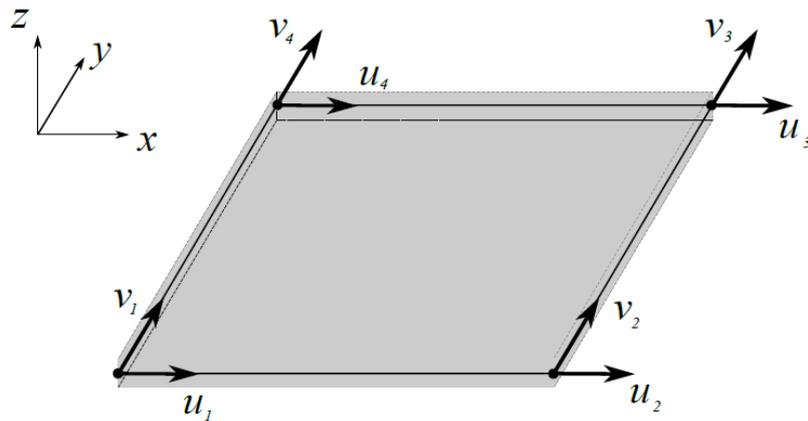


Figura 3.3: Gradi di libertà dell'elemento MEMBRANE.

I gradi di libertà nei rispettivi nodi risultano:

$$\text{nodi 1: } \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad \text{nodi 2: } \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad \text{nodi 3: } \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad \text{nodi 4: } \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Il vettore degli spostamenti nodali risulta:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Introducendo il concetto di elemento isoparametrico, definito come un elemento semplice all'interno di uno spazio locale (ξ, η, ζ) , questo può assumere forme complesse all'interno dello spazio cartesiano (x, y, z) .

Nello spazio tridimensionale valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \\ z &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i \end{aligned} \quad (3.10)$$

x , y e z sono le coordinate nello spazio cartesiano di un qualsiasi punto dell'elemento, x_i , y_i e z_i (con $i = 1, 2, \dots, n$) sono le coordinate cartesiane degli n nodi dell'elemento ed $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ sono le funzioni di forma definite nel sistema locale. Sono legate singolarmente ad ogni nodo dell'elemento isoparametrico ed il loro valore può variare da 0 a 1: la funzione di forma N_i assume valore unitario in corrispondenza del nodo i di coordinate (x_i, y_i, z_i) , mentre le altre funzioni di forma N_j con $j \neq i$ si annullano.

In ogni punto vale la seguente relazione:

$$\sum_{i=1}^n N_i = 1 \quad (3.11)$$

Si definisce quindi l'elemento isoparametrico in figura 3.4 e le funzioni di forma nelle relazioni 3.12:

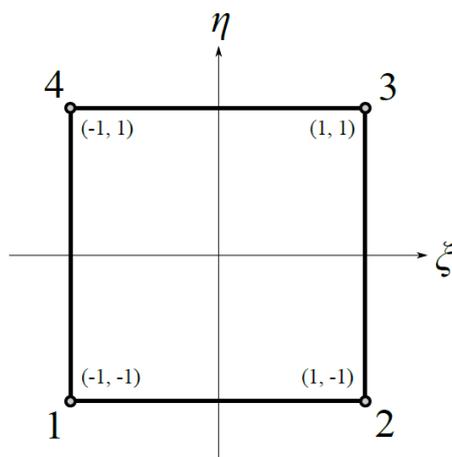


Figura 3.4: Rappresentazione dell'elemento isoparametrico nel sistema di riferimento locale ξ, η .

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\
N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\
N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\
N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Il vettore delle funzioni di forma \mathbf{N} è dato da:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

e la matrice delle derivate delle funzioni di forma $d\mathbf{N}$ in funzione delle coordinate isoparametriche (ξ, η) risulta:

$$d\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1 - \eta) & -(1 - \xi) \\ (1 - \eta) & -(1 + \xi) \\ (1 + \eta) & (1 + \xi) \\ -(1 + \eta) & (1 - \xi) \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

La formulazione degli elementi nello spazio cartesiano, necessita del vettore delle derivate delle funzioni di forma in funzione delle coordinate cartesiane (x, y) .

Si può scrivere per una generica funzione di forma N_i :

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \tag{3.16}$$

in forma matriciale risultano essere:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

La matrice al secondo membro dell'equazione 3.17 è lo *Jacobiano* \mathbf{J} e permette la trasformazione da coordinate cartesiane (x, y) a coordinate isoparametriche (ξ, η) .

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Invertendo l'equazione 3.17 si ottengono le derivate delle funzioni di forma in funzione delle coordinate cartesiane:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Una volta note le derivate delle funzioni di forma in coordinate cartesiane, è possibile calcolare la matrice di deformazione ε dell'elemento.

Per prima cosa si definiscono gli spostamenti dell'elemento in funzione degli spostamenti dei nodi dello stesso e delle funzioni di forma. In questo caso, per un elemento MEMBRANE, gli spostamenti sono u e v :

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i \quad (3.20)$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i \quad (3.21)$$

Sostituendo questi risultati nell'equazione 3.4:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^4 N_i u_i \\ \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^4 N_i v_i \\ \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^4 N_i u_i + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^4 N_i v_i \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

ed esplicitando i termini si ottiene l'equazione in forma matriciale della deformazione dell'elemento MEMBRANE:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

In forma breve si può scrivere come:

$$\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (3.24)$$

dove \mathbf{B} è la matrice deformazione-spostamento e \mathbf{u} è il vettore degli spostamenti dei nodi dell'elemento.

3.2.3 Principio dei lavori virtuali

Per calcolare la matrice di rigidezza plane stress dell'elemento MEMBRANE si utilizza *Principio dei Lavori Virtuali* secondo cui il lavoro delle forze esterne virtuali è pari al lavoro delle forze interne virtuali:

$$\mathcal{L}_{v_e} = \mathcal{L}_{v_i} \quad (3.25)$$

Si introduce il vettore delle forze nodali che, in questo caso, avrà due componenti per nodo:

$$\text{nodi 1: } \begin{Bmatrix} F_{u_1} \\ F_{v_1} \end{Bmatrix} \quad \text{nodi 2: } \begin{Bmatrix} F_{u_2} \\ F_{v_2} \end{Bmatrix} \quad \text{nodi 3: } \begin{Bmatrix} F_{u_3} \\ F_{v_3} \end{Bmatrix} \quad \text{nodi 4: } \begin{Bmatrix} F_{u_4} \\ F_{v_4} \end{Bmatrix}$$

e quindi il vettore delle forze nodali risulta:

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{u_1} \\ F_{v_1} \\ F_{u_2} \\ F_{v_2} \\ F_{u_3} \\ F_{v_3} \\ F_{u_4} \\ F_{v_4} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

In riferimento alla figura 3.1, dove si suppone che la piastra venga sottoposta a forze di superficie \mathbf{f} e a forze di volume \mathbf{X} .

Immaginando uno spostamento virtuale $\delta\mathbf{u}$, la deformazione virtuale risulta:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\mathbf{u} \quad (3.27)$$

mentre le tensioni in forma matriciale sono:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.28)$$

I lavori delle forze esterne ed interne virtuali diventano:

$$\mathcal{L}_{v_e} = \int_V (\delta\mathbf{d}^T \mathbf{X}) dV + \int_S (\delta\mathbf{d}^T \mathbf{f}) dA \quad (3.29)$$

$$\mathcal{L}_{v_i} = \int_V (\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}) dV \quad (3.30)$$

dove il vettore degli spostamenti virtuali $\delta\mathbf{d}$, associato alle forze di volume e di superficie, è definito attraverso le funzioni di forma:

$$\delta\mathbf{d} = \mathbf{N}\delta\mathbf{u} \quad (3.31)$$

Il lavoro delle forze virtuali esterne diventa:

$$\mathcal{L}_{v_e} = \int_V (\delta\mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{X}) dV + \int_S (\delta\mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{f}) dA \quad (3.32)$$

Sostituendo le equazioni 3.27 e 3.28 all'interno dell'equazione 3.30, ed espandendo i vari termini, l'equazione del lavoro delle forze virtuali interne è espressa con:

$$\mathcal{L}_{v_i} = \int_V (\mathbf{B}^T \delta \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}) dV \quad (3.33)$$

Si eguagliano le equazioni 3.32 e 3.33 e si semplifica il termine $\delta \mathbf{u}^T$:

$$\int_V \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{f} dA = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u} dV \quad (3.34)$$

A primo membro dell'equazione 3.34 sono presenti le trasformate dei vettori delle forze di volume e di superficie, \mathbf{X} e \mathbf{f} , ottenute tramite le funzioni di forma. Il primo membro equivale al vettore delle forze nodali F riportato nell'equazione 3.26.

A secondo membro, invece, portando all'esterno dell'integrale il vettore degli spostamenti nodali \mathbf{u} si ottiene la matrice di rigidezza \mathbf{K}_{memb} dell'elemento MEMBRANE:

$$\mathbf{K}_{memb} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (3.35)$$

che si può integrare lungo z poiché nessun termine dell'integrale dipende dallo spessore h :

$$\mathbf{K}_{memb} = h \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \quad (3.36)$$

Si può riscrivere l'integrale in funzione delle coordinate isoparametriche (ξ, η) , ottenendo:

$$\mathbf{K}_{memb} = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi, \eta) |\mathbf{J}(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (3.37)$$

3.2.4 Integrazione con i punti di Gauss

Per ottenere in modo semplice e preciso la soluzione dell'integrale dell'equazione 3.37 si adotta la *quadratura di Gauss*. Tale metodo di integrazione numerica permette di risolvere l'integrale in una serie di punti, chiamati *punti di Gauss*, che vengono sommati attribuendo loro un opportuno peso. L'integrale si trasforma così in una sommatoria.

Scegliendo di utilizzare un'integrazione con 4 punti di Gauss, come in figura 3.5, l'integrale della 3.37 diventa:

$$\mathbf{K}_{memb} = h \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}^T(\xi_i, \eta_i) \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi_i, \eta_i) |\mathbf{J}(\xi_i, \eta_i)| \Delta\xi \Delta\eta \quad (3.38)$$

dove $\Delta\xi$ e $\Delta\eta$ rappresentano i pesi.

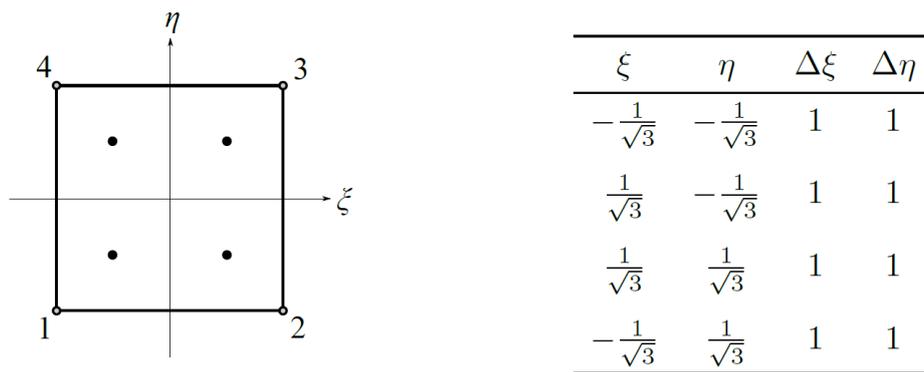


Figura 3.5: Rappresentazione dei punti di integrazione su un elemento isoparametrico. A sinistra si hanno le coordinate isoparametriche dei 4 punti di Gauss con i relativi pesi.

In alternativa al posto dell'integrazione con 4 punti, è possibile procedere con l'integrazione ridotta, che utilizza un solo punto di integrazione, come mostrato in figura 3.6. La precisione risulta inferiore, ma consente il calcolo della matrice di rigidità di taglio \mathbf{K}_s , che verrà determinata nel successivo paragrafo 3.3, per evitare il fenomeno dello *shear locking*.

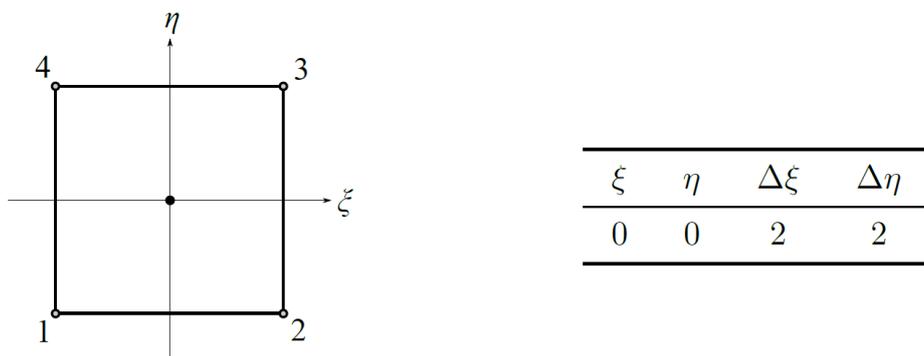


Figura 3.6: Rappresentazione del punto di integrazione su un elemento isoparametrico. A sinistra si hanno le coordinate del punto di Gauss ed il relativo peso.

3.3 Teoria delle piastre di Mindlin per elementi di tipo PLATE

Considerata una piastra omogenea ed isotropa, è valida l'ipotesi di *plane stress*, ossia con tensione nulla lungo l'asse z . Inoltre, si assumono non nulle le tensioni di taglio τ_{xz} e τ_{yz} .

$$\sigma_z = 0 \quad (3.39)$$

$$\tau_{xz} \neq 0 \quad \tau_{yz} \neq 0 \quad (3.40)$$

Assume importanza anche l'ipotesi dei piccoli spostamenti, poichè permette di gestire i fenomeni flessionali ed i fenomeni di taglio separatamente.

Essendo che, nella teoria delle piastre di Mindlin, gli effetti membranali non vengono presi in considerazione, e che tutte le deformazioni della piastra sono da attribuirsi allo spostamento w lungo z fuori dal piano medio ed alle rotazioni attorno agli assi x e y , rispettivamente ϕ_x e ϕ_y .

Nonostante ciò, sono presenti comunque delle deformazioni nel piano medio della piastra causate dalle rotazioni, come già illustrato nel capitolo precedente con le seguenti figure:

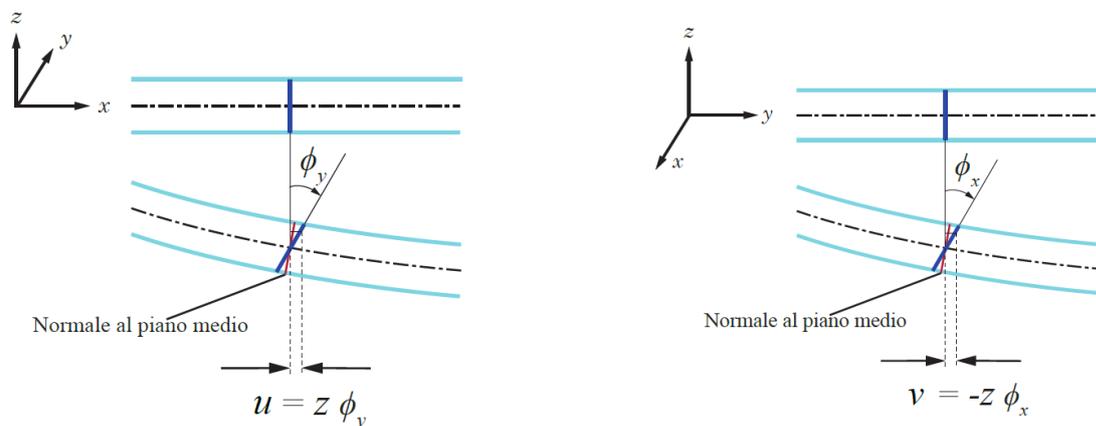


Figura 3.7: Rappresentazione degli spostamenti nel piano causati dalle rotazioni secondo la regola della mano destra.

Una sezione perpendicolare al piano medio nella configurazione indeformata è una linea retta, e rimane tale a seguito di una deformazione, subendo tuttavia una rotazione rispetto alla normale al piano medio secondo la regola della mano destra.

Un elemento con tali caratteristiche viene chiamato elemento PLATE.

3.3.1 Vettore delle deformazioni e delle tensioni

Gli spostamenti globali della teoria di Mindlin sono definiti dal vettore \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\phi_y \\ -z\phi_x \\ w \\ \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Dalle derivate degli spostamenti si calcolano le deformazioni, che si suddividono in deformazioni flessionali $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ e deformazioni per sforzi di taglio $\boldsymbol{\varepsilon}_s$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\frac{\partial\phi_y}{\partial x} \\ -z\frac{\partial\phi_x}{\partial y} \\ z\left(-\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + \frac{\partial\phi_y}{\partial y}\right) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\phi_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Dalle leggi di Hooke si ottiene il vettore delle tensioni $\boldsymbol{\sigma}_b$ per deformazioni flessionali:

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

ed il vettore delle tensioni $\boldsymbol{\sigma}_s$ per gli sforzi di taglio:

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = kG \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

dove E è il modulo di Young del materiale, ν è il coefficiente di Poisson, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ è il modulo di taglio e k è il fattore di correzione di taglio pari a $k = \frac{\pi^2}{12}$.

Si evidenziano le due matrici del materiale riferite alla deformazione flessionale \mathbf{D}_b e alla deformazione a taglio \mathbf{D}_s :

$$\mathbf{D}_b = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{D}_s = kG \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

3.3.2 Funzioni di forma di un elemento isoparametrico PLATE

Come per l'elemento MEMBRANE, anche per l'elemento PLATE si considerano elementi quadrati definiti da 4 nodi. Ogni nodo possiede i gradi di libertà caratteristici dell'elemento PLATE, mostrati in figura 3.8.

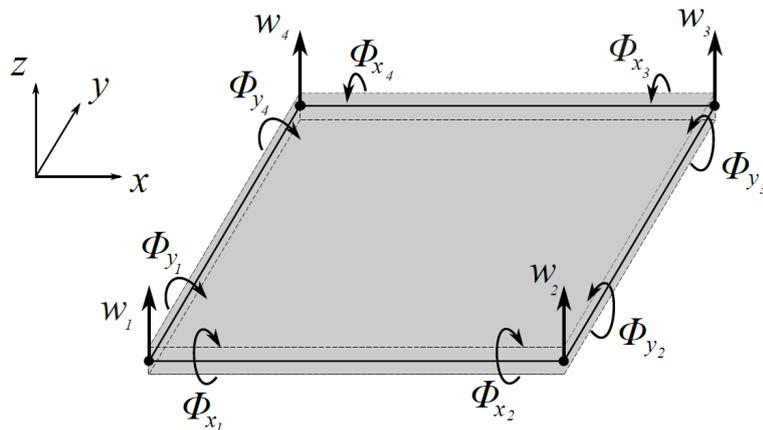


Figura 3.8: Gradi di libertà dell'elemento PLATE.

I gradi di libertà per i rispettivi nodi sono:

$$\text{nodi 1: } \begin{Bmatrix} w_1 \\ \phi_{x_1} \\ \phi_{y_1} \end{Bmatrix} \quad \text{nodi 2: } \begin{Bmatrix} w_2 \\ \phi_{x_2} \\ \phi_{y_2} \end{Bmatrix} \quad \text{nodi 3: } \begin{Bmatrix} w_3 \\ \phi_{x_3} \\ \phi_{y_3} \end{Bmatrix} \quad \text{nodi 4: } \begin{Bmatrix} w_4 \\ \phi_{x_4} \\ \phi_{y_4} \end{Bmatrix}$$

e quindi il vettore degli spostamenti nodali dell'elemento PLATE risulta:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \phi_{x_1} \\ \phi_{y_1} \\ w_2 \\ \phi_{x_2} \\ \phi_{y_2} \\ w_3 \\ \phi_{x_3} \\ \phi_{y_3} \\ w_4 \\ \phi_{x_4} \\ \phi_{y_4} \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

Il concetto di *elemento isoparametrico* è lo stesso introdotto nel paragrafo 3.2.2, con la stessa numerazione dei nodi (figura 3.4) e quindi le stesse funzioni di forma, riportate di

seguito:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\
 N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\
 N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Si definisce, come fatto in precedenza, il vettore delle funzioni di forma \mathbf{N} e la matrice delle derivate $d\mathbf{N}$ in funzione delle coordinate isoparametriche (ξ, η) :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \quad d\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

Infine, si trasformano le derivate delle funzioni di forma in funzione delle coordinate cartesiane (x, y) tramite lo *Jacobiano* definito dalla 3.18:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

Gli spostamenti dei nodi dell'elemento PLATE in funzione delle funzioni di forma sono:

$$\begin{aligned}
 w &= \sum_{i=1}^4 N_i w_i \\
 \phi_x &= \sum_{i=1}^4 N_i \phi_{x_i} \\
 \phi_y &= \sum_{i=1}^4 N_i \phi_{y_i}
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Sostituendo questi risultati nelle equazioni 3.42 e 3.43 si ottengono i vettori di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_s$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{bmatrix} z \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^4 N_i \phi_{y_i} \\ -z \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^4 N_i \phi_{x_i} \\ z \left(-\frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^4 N_i \phi_{x_i} + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^4 N_i \phi_{y_i} \right) \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 N_i \phi_{y_i} + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^4 N_i w_i \\ - \sum_{i=1}^4 N_i \phi_{x_i} + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^4 N_i w_i \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Esplicitandone i termini, le equazioni in forma matriciale delle deformazioni flessionali e delle deformazioni di taglio dell'elemento PLATE diventano:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = z \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3.55)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & N_2 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & N_3 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & N_4 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & -N_1 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & -N_2 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & -N_3 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & -N_4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3.56)$$

dove \mathbf{u} è il vettore degli spostamenti nodali esplicitato in 3.48.

In forma breve si possono scrivere come:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = z \mathbf{B}_b \mathbf{u} \quad (3.57)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = z \mathbf{B}_s \mathbf{u} \quad (3.58)$$

Le matrici \mathbf{B}_b e \mathbf{B}_s sono, rispettivamente, la matrice delle funzioni di forma flessionale e la matrice delle funzioni di forma di taglio.

3.3.3 Principio dei lavori virtuali

Anche in questo caso, applicando il principio dei lavori virtuali per il calcolo della matrice di rigidezza dell'elemento PLATE. Essa è composta dalla somma di due diverse matrici di rigidezza ricavate singolarmente: la matrice di rigidezza flessionale \mathbf{K}_b e la matrice di rigidezza degli sforzi di taglio \mathbf{K}_s .

Si introduce il vettore delle forze nodali, dove ogni nodo presenta 3 componenti:

$$\text{nodi 1: } \begin{Bmatrix} F_{w_1} \\ M_{x_1} \\ M_{y_1} \end{Bmatrix} \quad \text{nodi 2: } \begin{Bmatrix} F_{w_2} \\ M_{x_2} \\ M_{y_2} \end{Bmatrix} \quad \text{nodi 3: } \begin{Bmatrix} F_{w_3} \\ M_{x_3} \\ M_{y_3} \end{Bmatrix} \quad \text{nodi 4: } \begin{Bmatrix} F_{w_4} \\ M_{x_4} \\ M_{y_4} \end{Bmatrix}$$

e quindi il vettore delle forze nodali risulta:

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{w_1} \\ M_{x_1} \\ M_{y_1} \\ F_{w_2} \\ M_{x_2} \\ M_{y_2} \\ F_{w_3} \\ M_{x_3} \\ M_{y_3} \\ F_{w_4} \\ M_{x_4} \\ M_{y_4} \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

Dato uno spostamento virtuale $\delta \mathbf{u}$, si definiscono le deformazioni virtuali relative alla flessione $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_b$ e agli sforzi di taglio $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_s$:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_b = \mathbf{B}_b \delta \mathbf{u} \quad (3.60)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{B}_s \delta \mathbf{u} \quad (3.61)$$

mentre le tensioni flessionali $\boldsymbol{\sigma}_b$ e di taglio risultano $\boldsymbol{\sigma}_s$:

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \mathbf{D}_b \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b \quad (3.62)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{D}_s \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (3.63)$$

Il principio dei lavori virtuali afferma che il lavoro delle forze esterne virtuali è pari al lavoro delle forze interne virtuali:

$$\mathcal{L}_{v_e} = \mathcal{L}_{v_i} \quad (3.64)$$

e, assumendo che la piastra in figura 3.1 sia sottoposta a forze di superficie \mathbf{f} e di volume \mathbf{X} , i lavori delle forze virtuali esterne ed interne sono definiti rispettivamente come:

$$\mathcal{L}_{v_e} = \int_V (\delta \mathbf{d}^T \mathbf{X}) dV + \int_S (\delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}) dA \quad (3.65)$$

$$\mathcal{L}_{v_i} = \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \boldsymbol{\sigma}_b) dV + \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \boldsymbol{\sigma}_s) dV \quad (3.66)$$

Utilizzando le funzioni di forma, il vettore degli spostamenti virtuali $\delta \mathbf{d}$ diventa:

$$\delta \mathbf{d} = \mathbf{N} \delta \mathbf{u} \quad (3.67)$$

Sostituendo la 3.67 nella 3.65 e le 3.60, 3.61, 3.62, 3.63, nella 3.66, le equazioni dei lavori virtuali diventano:

$$\mathcal{L}_{v_e} = \int_V (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{X}) dV + \int_S (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{f}) dA \quad (3.68)$$

$$\mathcal{L}_{v_i} = \int_V z^2 \mathbf{B}_b^T \delta \mathbf{u}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b \mathbf{u} dV + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s \mathbf{u} dV \quad (3.69)$$

Eguagliando le due espressioni 3.68 e 3.69, e semplificando $\delta \mathbf{u}^T$, si ottiene l'equazione:

$$\int_V \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{f} dA = \int_V z^2 \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b \mathbf{u} dV + \int_V \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s \mathbf{u} dV \quad (3.70)$$

A primo membro vi sono le trasformate, tramite le funzioni di forma, delle forze di superficie \mathbf{f} e delle forze di volume \mathbf{X} , che corrispondono al vettore delle forze nodali \mathbf{F} della 3.59.

A secondo membro si evidenziano la matrice di rigidezza flessionale \mathbf{K}_b e la matrice di rigidezza dovuta agli sforzi di taglio \mathbf{K}_s :

$$\mathbf{K}_b = \int_V z^2 \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dV \quad (3.71)$$

$$\mathbf{K}_s = \int_V \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s dV \quad (3.72)$$

che, integrando lungo Z nell'intervallo dello spessore $(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})$, diventano:

$$\mathbf{K}_b = \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b d\Omega \quad (3.73)$$

$$\mathbf{K}_s = h \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s d\Omega \quad (3.74)$$

Passando alle coordinate isoparametriche (ξ, η) i due integrali assumono la forma:

$$\mathbf{K}_b = \frac{h^3}{12} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_b^T(\xi, \eta) \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b(\xi, \eta) |\mathbf{J}(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (3.75)$$

$$\mathbf{K}_s = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_s^T(\xi, \eta) \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s(\xi, \eta) |\mathbf{J}(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (3.76)$$

Gli integrali si risolvono numericamente tramite integrazione con punti di Gauss, trattata nella sezione 3.2.4.

In particolare, l'integrale della matrice di rigidezza flessionale \mathbf{K}_b si risolve utilizzando i 4 punti di Gauss della figura 3.5, trasformando così l'integrale in una sommatoria:

$$\mathbf{K}_b = \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_b^T(\xi_i, \eta_i) \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b(\xi_i, \eta_i) |\mathbf{J}(\xi_i, \eta_i)| \Delta\xi \Delta\eta \quad (3.77)$$

Invece, per la risoluzione dell'integrale di \mathbf{K}_s si utilizza un'integrazione ridotta con un solo punto di Gauss, come illustrato in figura 3.6. Questo tipo di integrazione permette di evitare il fenomeno dello *shear locking*, per non incorrere in una sovrastima della rigidezza di taglio dell'elemento.

L'espressione dell'integrale di \mathbf{K}_s diventa:

$$\mathbf{K}_s = h \mathbf{B}_s^T(\xi = 0, \eta = 0) \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s(\xi = 0, \eta = 0) |\mathbf{J}(\xi = 0, \eta = 0)| \Delta\xi \Delta\eta \quad (3.78)$$

con i pesi $\Delta\xi = 2$ e $\Delta\eta = 2$.

In conclusione, la matrice di rigidezza per l'elemento PLATE è data dalla somma dei termini flessionali e di taglio:

$$\mathbf{K}_{plate} = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s \quad (3.79)$$

3.4 Matrice di rigidezza dell'elemento SHELL

La matrice di rigidezza dell'elemento SHELL, come già accennato, si costruisce accoppiando le matrici di rigidezza di un elemento MEMBRANE e di un elemento PLATE.

In questo modo, l'elemento risultante è in grado di gestire 5 gradi di libertà per nodo: con il contributo dell'elemento MEMBRANE si gestiscono le deformazioni nel piano date da u e v , mentre con il contributo dell'elemento PLATE si includono le deformazioni fuori dal piano w e le rotazioni ϕ_x e ϕ_y , rispettivamente attorno all'asse X e Y secondo la regola della mano destra.

Per prima cosa si definiscono le due equazioni statiche del moto, trascurando quindi le inerzie e gli smorzamenti. L'equazione statica del moto di un elemento MEMBRANE è:

$$\begin{bmatrix} k_{m1,1} & k_{m1,2} & \dots & k_{m1,8} \\ k_{m2,1} & k_{m2,2} & \dots & k_{m2,8} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m8,1} & k_{m8,2} & \dots & k_{m8,8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{u_1} \\ F_{v_1} \\ F_{u_2} \\ F_{v_2} \\ F_{u_3} \\ F_{v_3} \\ F_{u_4} \\ F_{v_4} \end{Bmatrix} \quad (3.80)$$

dove la matrice con i termini k_{mij} è la matrice di rigidezza dell'elemento MEMBRANE \mathbf{K}_{memb} , ricavata con la 3.38.

Invece, per l'elemento PLATE, l'equazione statica del moto risulta:

$$\begin{bmatrix} k_{p1,1} & k_{p1,2} & \dots & k_{p1,12} \\ k_{p2,1} & k_{p2,2} & \dots & k_{p2,12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{p12,1} & k_{p12,2} & \dots & k_{p12,12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \phi_{x1} \\ \phi_{y1} \\ w_2 \\ \phi_{x2} \\ \phi_{y2} \\ w_3 \\ \phi_{x3} \\ \phi_{y3} \\ w_4 \\ \phi_{x4} \\ \phi_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{w1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ F_{w2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ F_{w3} \\ M_{x3} \\ M_{y3} \\ F_{w4} \\ M_{x4} \\ M_{y4} \end{Bmatrix} \quad (3.81)$$

e la matrice con i termini k_{pij} è la matrice di rigidezza dell'elemento PLATE \mathbf{K}_{plate} , determinata con la 3.81.

La modalità di costruzione della matrice di rigidezza SHELL \mathbf{K}_{shell} prevede semplicemente la sua composizione unendo e ordinando i vettori dei gradi di libertà dei due elementi, e di conseguenza assemblando la matrice. La matrice risulta con 20 righe e 20 colonne, espressa nell'equazione statica del moto di un elemento SHELL 3.82.

$$\begin{bmatrix}
 k_{m1,1} & k_{m1,2} & 0 & 0 & 0 & k_{m1,3} & k_{m1,4} & 0 & \dots & k_{m1,8} & 0 & 0 & 0 \\
 k_{m2,1} & k_{m2,2} & 0 & 0 & 0 & k_{m2,3} & k_{m2,4} & 0 & \dots & k_{m2,8} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & k_{p1,1} & k_{p1,2} & k_{p1,3} & 0 & 0 & k_{p1,4} & \dots & 0 & k_{p1,10} & k_{p1,11} & k_{p1,12} \\
 0 & 0 & k_{p2,1} & k_{p2,2} & k_{p2,3} & 0 & 0 & k_{p2,4} & \dots & 0 & k_{p2,10} & k_{p2,11} & k_{p2,12} \\
 0 & 0 & k_{p3,1} & k_{p3,2} & k_{p3,3} & 0 & 0 & k_{p3,4} & \dots & 0 & k_{p3,10} & k_{p3,11} & k_{p3,12} \\
 k_{m3,1} & k_{m3,2} & 0 & 0 & 0 & k_{m3,3} & k_{m3,4} & 0 & \dots & k_{m3,8} & 0 & 0 & 0 \\
 k_{m4,1} & k_{m4,2} & 0 & 0 & 0 & k_{m4,3} & k_{m4,4} & 0 & \dots & k_{m4,8} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & k_{p4,1} & k_{p4,2} & k_{p4,3} & 0 & 0 & k_{p4,4} & \dots & 0 & k_{p4,10} & k_{p4,11} & k_{p4,12} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 k_{m8,1} & k_{m8,2} & 0 & 0 & 0 & k_{m8,3} & k_{m8,4} & 0 & \dots & k_{m8,8} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & k_{p10,1} & k_{p10,2} & k_{p10,3} & 0 & 0 & k_{p10,4} & \dots & 0 & k_{p10,10} & k_{p10,11} & k_{p10,12} \\
 0 & 0 & k_{p11,1} & k_{p11,2} & k_{p11,3} & 0 & 0 & k_{p11,4} & \dots & 0 & k_{p11,10} & k_{p11,11} & k_{p11,12} \\
 0 & 0 & k_{p12,1} & k_{p12,2} & k_{p12,3} & 0 & 0 & k_{p12,4} & \dots & 0 & k_{p12,10} & k_{p12,11} & k_{p12,12}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 v_1 \\
 w_1 \\
 \phi_{x1} \\
 \phi_{y1} \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 w_2 \\
 \phi_{x2} \\
 \phi_{y2} \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 w_3 \\
 \phi_{x3} \\
 \phi_{y3} \\
 u_4 \\
 v_4 \\
 w_4 \\
 \phi_{x4} \\
 \phi_{y4}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F_{u1} \\
 F_{v1} \\
 F_{w1} \\
 M_{x1} \\
 M_{y1} \\
 F_{u2} \\
 F_{v2} \\
 F_{w2} \\
 M_{x2} \\
 M_{y2} \\
 F_{u3} \\
 F_{v3} \\
 F_{w3} \\
 M_{x3} \\
 M_{y3} \\
 F_{u4} \\
 F_{v4} \\
 F_{w4} \\
 M_{x4} \\
 M_{y4}
 \end{bmatrix}
 \quad (3.82)$$

Capitolo 4

Accoppiamento teoria peridinamica - metodo degli elementi finiti

La teoria peridinamica, applicata all'analisi strutturale, permette di descrivere in modo ottimale le deformazioni di corpi nei quali siano presenti delle discontinuità.

Tuttavia, si notano delle criticità non indifferenti: ad esempio, nell'imposizione delle condizioni di vincolo (si veda paragrafo 2.2.2) che, come dimostrato nell'articolo [21], prevede la creazione di una regione fittizia dedicata. Inoltre, a causa della non-località della teoria, la risoluzione numerica del problema strutturale diventa un'operazione onerosa dal punto di vista computazionale, dato che i nodi peridinamici interagiscono con numerosi nodi famiglia. Tutte queste problematiche non influenzano il metodo agli elementi finiti, che utilizza un approccio locale, dove ogni nodo interagisce solamente con i nodi circostanti tramite gli elementi, e permette di definire le condizioni di vincolo in maniera più semplice.

Articoli e studi sull'accoppiamento tra elementi finiti e griglie peridinamiche sono numerosi. Il primo tra questi è lo studio di Macek e Silling [21] nel quale l'accoppiamento viene effettuato includendo i nodi peridinamici all'interno di elementi FEM.

Un metodo alternativo è stato fornito da Kilic e Madenci [22] i quali hanno realizzato, nei loro modelli, una zona in cui vengono utilizzate entrambe le equazioni, peridinamiche e del metodo agli elementi finiti, per realizzare l'accoppiamento; utilizzando le funzioni di forma, i valori degli spostamenti vengono interpolati tra i nodi peridinamici, inclusi all'interno degli elementi FEM, ed i nodi FEM stessi.

Alcuni studi [23][24] propongono un diverso approccio in cui l'accoppiamento tra elementi finiti e griglie peridinamiche avviene attraverso una zona di transizione progressiva.

Infine, Seleson et al. [25][26][27] introducono un metodo per l'accoppiamento tra elementi finiti e griglie peridinamiche per modellare strutture in cui siano presenti fratture.

Nel presente elaborato, si utilizza la tecnica di accoppiamento, presentata da Zaccariotto et al. nell'articolo [30]. Tale metodo rappresenta lo sviluppo dei precedenti studi [28][29].

In questo capitolo viene quindi illustrato l'accoppiamento tra la teoria peridinamica bond-based e il metodo agli elementi finiti, con l'obiettivo di sfruttare al meglio le po-

tenzialità di entrambe le formulazioni. La zona peridinamica così modellata sarà definita a priori, e sarà completamente contenuta all'interno della piastra FEM. La griglia peridinamica ed i nodi FEM utilizzeranno la stessa spaziatura, ottenendo una continuità nella discretizzazione.

4.1 Matrice di rigidezza accoppiata

Si vuole definire la matrice di rigidezza accoppiata per un modello bidimensionale. Si seguirà l'approccio illustrato nell'articolo di Zaccariotto et al. [30] per un modello monodimensionale.

Si osservi la figura 4.1:

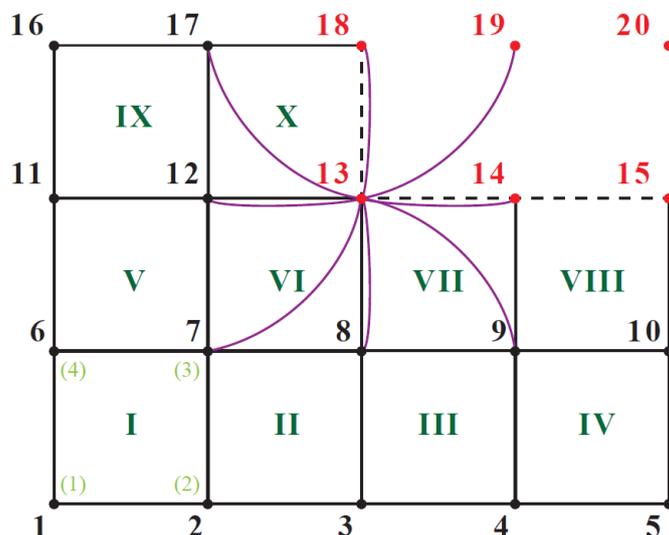


Figura 4.1: Rappresentazione grafica di un modello bidimensionale accoppiato. I nodi neri identificano i nodi FEM, i nodi rossi identificano i nodi peridinamici. La numerazione degli elementi FEM è rappresentata da numeri romani verdi. In verde chiaro, è presente la numerazione locale dei nodi per il primo elemento FEM. In viola, sono raffigurate le interazioni peridinamiche che si creano tra il nodo sorgente (13) ed i rispettivi nodi famiglia.

In figura 4.1, è rappresentato una porzione del modello di piastra in cui è presente un accoppiamento tra mesh FEM ed una griglia peridinamica. I nodi presenti sono sia FEM (in nero) che peridinamici (in rosso) e non esiste una zona nel modello in cui essi non siano prettamente distinti.

Si può definire una zona di transizione nella quale interagiscono le forze interagiscono tra le due porzioni, FEM e peridinamica, del modello: ad esempio, osservando la figura 4.1, le forze nei bond del nodo peridinamico 13 vengono calcolate considerando gli spostamenti dei nodi FEM 7 – 8 – 9 – 12 – 17 ed anche gli spostamenti dei nodi peridinamici 14 – 18 – 19; analogamente, le forze nell'elemento FEM VI vengono calcolate utilizzando gli spostamenti del nodo peridinamico 13.

Per il metodo di accoppiamento si ipotizza che la discretizzazione della mesh FEM sia pari al passo di griglia per la zona peridinamica. Tale limitazione è stata superata come viene esplicitato in [29]; nel presente elaborato, tuttavia, si è scelto di mantenere l'uniformità del passo di discretizzazione per la mesh FEM e per la griglia peridinamica.

La tecnica di accoppiamento presuppone che le forze interne che agiscono su un nodo siano della stessa natura del nodo stesso: su un nodo FEM agiscono solo forze interne calcolate con il metodo FEM; per un nodo peridinamico, agiscono solamente forze interne che derivano dalla teoria peridinamica. Quindi, nella zona ad elementi finiti, in cui sono presenti elementi FEM con soli nodi FEM, e nella zona peridinamica, in cui un nodo peridinamico ha tutti i suoi nodi famiglia di tipo peridinamico, le forze risultano calcolate utilizzando la relativa teoria appropriata.

Elementi FEM

Considerando la figura 4.2, particolare della figura 4.1, gli elementi FEM I e II sono elementi che posseggono tutti i nodi di tipo FEM.

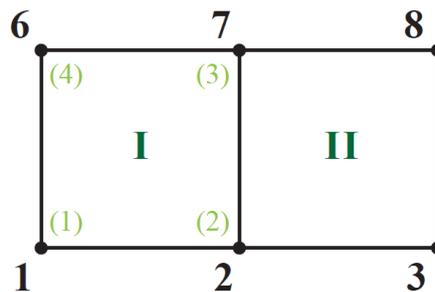


Figura 4.2: Rappresentazione grafica di due elementi solo FEM.

Gli elementi considerati sono elementi di tipo SHELL, i cui nodi presentano i cinque gradi di libertà descritti nel paragrafo 3.3.2: u_i , v_i , w_i , ϕ_{x_i} e ϕ_{y_i}

La matrice di rigidezza del singolo elemento, calcolata nel paragrafo 3.3.3, è identificata con \mathbf{K} .

Risulta utile esplicitare la matrice di rigidezza \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{K}_{42} & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

in cui le matrici \mathbf{K}_{ij} , con $i, j = 1, \dots, 4$ sono matrici $[3 \times 3]$.

Il vettore degli spostamenti u può anch'esso esplicitato come:

$$\mathbf{u} = \left. \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

in cui, ad esempio, il vettore $\mathbf{1}$ è composto dai cinque gradi di libertà u_1, v_1, w_1, ϕ_{x1} e ϕ_{y1} relativi al nodo locale 1 dell'elemento.

Le forze interne quindi vengono calcolate con la seguente metodologia:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{K}_{42} & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} \end{array} \right] \left. \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

La matrice di rigidezza dei due elementi FEM I e II, si ottiene assemblando le due matrici di rigidezza dei singoli elementi, prestando attenzione alla numerazione globale dei nodi.

Le forze interne per i due elementi risultano:

$$\mathbf{K}^I \mathbf{u}^I = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{K}_{11}^I & \mathbf{K}_{12}^I & \mathbf{K}_{13}^I & \mathbf{K}_{14}^I \\ \mathbf{K}_{21}^I & \mathbf{K}_{22}^I & \mathbf{K}_{23}^I & \mathbf{K}_{24}^I \\ \mathbf{K}_{31}^I & \mathbf{K}_{32}^I & \mathbf{K}_{33}^I & \mathbf{K}_{34}^I \\ \mathbf{K}_{41}^I & \mathbf{K}_{42}^I & \mathbf{K}_{43}^I & \mathbf{K}_{44}^I \end{array} \right] \left. \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{6} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{K}^{II} \mathbf{u}^{II} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{K}_{11}^{II} & \mathbf{K}_{12}^{II} & \mathbf{K}_{13}^{II} & \mathbf{K}_{14}^{II} \\ \mathbf{K}_{21}^{II} & \mathbf{K}_{22}^{II} & \mathbf{K}_{23}^{II} & \mathbf{K}_{24}^{II} \\ \mathbf{K}_{31}^{II} & \mathbf{K}_{32}^{II} & \mathbf{K}_{33}^{II} & \mathbf{K}_{34}^{II} \\ \mathbf{K}_{41}^{II} & \mathbf{K}_{42}^{II} & \mathbf{K}_{43}^{II} & \mathbf{K}_{44}^{II} \end{array} \right] \left. \begin{array}{c} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{8} \\ \mathbf{7} \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

Procedendo all'assemblaggio delle due matrici si ottiene:

$$\begin{bmatrix}
 K_{11}^I & K_{12}^I & 0 & 0 & 0 & K_{14}^I & K_{13}^I & 0 \\
 K_{21}^I & K_{22}^I + K_{11}^{II} & K_{12}^{II} & 0 & 0 & K_{24}^I & K_{23}^I + K_{14}^{II} & K_{13}^{II} \\
 0 & K_{21}^{II} & K_{22}^{II} & 0 & 0 & 0 & K_{24}^{II} & K_{23}^{II} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{41}^I & K_{42}^I & 0 & 0 & 0 & K_{44}^I & K_{43}^I & 0 \\
 K_{31}^I & K_{32}^I + K_{41}^{II} & K_{42}^{II} & 0 & 0 & K_{34}^I & K_{33}^I + K_{44}^{II} & K_{43}^{II} \\
 0 & K_{31}^I & K_{32}^{II} & 0 & 0 & 0 & K_{34}^{II} & K_{33}^{II}
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6 \\
 7 \\
 8
 \end{pmatrix}
 \quad (4.5)$$

In 4.5 si rappresenta la matrice di rigidezza assemblata per i due elementi FEM I e II; tale matrice, moltiplicata per il vettore degli spostamenti, genera il vettore delle forze interne.

In maniera analoga a quanto fatto per gli elementi FEM I e II, è possibile assemblare la matrice di rigidezza per gli elementi solo FEM dell'intera struttura.

Elementi FEM ibridi

Si osservi la figura 4.3, particolare della figura 4.1. Gli elementi FEM VI, VII, VIII e X sono elementi che presentano almeno un nodo peridinamico.

Tali elementi vengono denominati *elementi FEM ibridi*.

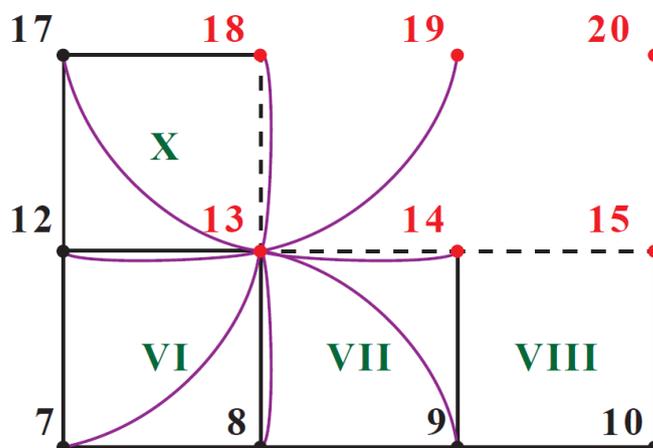


Figura 4.3: Rappresentazione grafica di elementi FEM ibridi.

Per i nodi peridinamici, la matrice di rigidezza di ogni singolo bond è elaborata dall'equazione 2.96.

Per semplicità, è utile riportare tale matrice \mathbf{K}_{bond} :

$$\mathbf{K}_{\text{bond}} = [\mathbf{K}_{\mathbf{kj}} \quad \mathbf{K}_{\mathbf{jk}}] \quad (4.6)$$

in cui le matrici $\mathbf{K}_{\mathbf{kj}}$ e $\mathbf{K}_{\mathbf{jk}}$ sono matrici $[5 \times 5]$.

La matrice di rigidezza di un elemento FEM ibrido viene costruita con il seguente metodo: si consideri la matrice di rigidezza dell'elemento FEM, equazione 4.3, in cui le righe che si riferiscono ad un nodo peridinamico vengono sostituite con i termini calcolati tramite la matrice di rigidezza peridinamica.

Preso come nodo sorgente il nodo peridinamico 13, in figura 4.3, i suoi nodi famiglia sono i nodi FEM 7 – 8 – 9 – 12 – 17 ed i nodi peridinamici 14 – 18 – 19.

La matrice di rigidezza peridinamica del nodo in esame, pertanto, sarà così composta:

$$[\mathbf{K}_{7_{13}} \quad \mathbf{K}_{8_{13}} \quad \mathbf{K}_{9_{13}} \quad \mathbf{K}_{12_{13}} \quad \mathbf{K}_{13}^{\text{PD}} \quad \mathbf{K}_{14_{13}} \quad \mathbf{K}_{17_{13}} \quad \mathbf{K}_{18_{13}} \quad \mathbf{K}_{19_{13}}] \quad (4.7)$$

in cui con $\mathbf{K}_{13}^{\text{PD}}$ si intende:

$$\mathbf{K}_{13}^{\text{PD}} = \sum_j \mathbf{K}_{13_j} = \mathbf{K}_{13_7} + \mathbf{K}_{13_8} + \dots \quad (4.8)$$

Presi come riferimento gli elementi FEM VI e VII in figura 4.3, la matrice di rigidezza assemblata per questi elementi risulta:

In 4.9 si rappresenta la matrice di rigidezza assemblata per i due elementi FEM ibridi VI e VII. Tale matrice, moltiplicata per il vettore degli spostamenti, genera il vettore delle forze interne.

La matrice di rigidezza per gli elementi FEM ibridi dell'intera struttura può essere ricavata come effettuato per i due elementi FEM VI e VII.

Infine, la matrice di rigidezza globale della struttura si ottiene sommando i contributi delle matrici di rigidezza per le diverse regioni: elementi solo FEM, elementi FEM ibridi e zona solo peridinamica.

4.2 Accoppiamento di una mesh FEM ed una griglia PD

Nell'articolo di Diyaroglu et al. [20], sono presenti le equazioni peridinamiche del moto secondo la teoria delle piastre di Mindlin. Nello specifico sono riportati due casi di studio di una piastra soggetta ad una forza e ad un momento esterno applicato, per il confronto tra modello solo FEM e modello accoppiato FEM-PD.

Si vogliono confrontare i risultati presenti nell'articolo [20] con i risultati ottenuti dalle simulazioni su un modello solo FEM e su un modello discretizzato tramite mesh FEM e griglia peridinamica. Inoltre si effettua una simulazione su un modello discretizzato, ma solamente con una griglia peridinamica (modello solo PD), al fine di replicare i risultati ottenuti nell'articolo [20]. Infine, si riportano altri casi in cui la regione peridinamica viene posizionata in diverse zone della piastra.

La piastra modellata per effettuare le analisi presenta le caratteristiche geometriche e le proprietà meccaniche riportate, rispettivamente, nelle tabelle 4.1 e 4.2:

Caratteristiche geometriche	Valore [m]
L	1
W	1
h	0.1

Tabella 4.1: Caratteristiche geometriche del modello di piastra utilizzato nell'articolo di Diyaroglu et al. [20].

Proprietà meccaniche	Valore
E	200 GPa
ρ	7850 kg/m ³
ν	0.3333

Tabella 4.2: Proprietà meccaniche del modello di piastra utilizzato nell'articolo di Diyaroglu et al. [20].

Si implementa una discretizzazione uniforme $\Delta x = \Delta y = 0.01 m$, dove Δx e Δy rappresentano la spaziatura della griglia nelle direzioni x e y , rispettivamente. Si considera un orizzonte peridinamico pari a $\delta = 0.03 m$ ($m = \delta/\Delta x = 3$).

Verranno riportate alcune verifiche della correttezza del modello di accoppiamento, analizzando le deformate dei rispettivi modelli e verificando le equazioni di equilibrio della piastra.

Un corpo rigido si trova in equilibrio quando risultano verificate due relazioni vettoriali indipendenti. La somma vettoriale di tutte le forze applicate al corpo assume un valore

nullo:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (4.10)$$

La somma vettoriale dei momenti applicati al corpo, calcati rispetto ad un punto qualsiasi, è nulla:

$$\sum \vec{M}_O = 0 \quad (4.11)$$

Nello spazio tridimensionale queste due equazioni possono essere riscritte come:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}_x = 0 \\ \sum \vec{F}_y = 0 \\ \sum \vec{F}_z = 0 \end{array} \right. \quad (4.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{M}_{Ox} = 0 \\ \sum \vec{M}_{Oy} = 0 \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Infatti, il numero di equazioni per l'equilibrio corrisponde a numero di gradi di libertà da bloccare affinché sia verificato l'equilibrio.

Per eseguire un confronto degli spostamenti e rotazioni tra modello accoppiato e modello solo FEM si introduce il concetto di *errore assoluto* definito come:

$$\begin{aligned} e_{a,w} &= w_{ACC} - w_{FEM} \\ e_{a,\phi_x} &= \phi_{x_{ACC}} - \phi_{x_{FEM}} \\ e_{a,\phi_y} &= \phi_{y_{ACC}} - \phi_{y_{FEM}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Tutte le precedenti verifiche sono eseguite spostando la zona peridinamica nel modello accoppiato in varie posizioni all'interno della piastra e considerando diverse dimensioni della stessa.

4.3 Piastra incastrata soggetta ad una forza in direzione z

Sul modello solo FEM e sul modello accoppiato, le condizioni di vincolo e di carico vengono applicate solamente sui nodi FEM dei bordi della piastra. La condizione di carico applicata è pari a $P = 5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ che, facendo riferimento alla discretizzazione implementata, equivale ad una forza nodale $\hat{b} = 5 \cdot 10^4 \text{ N}$.

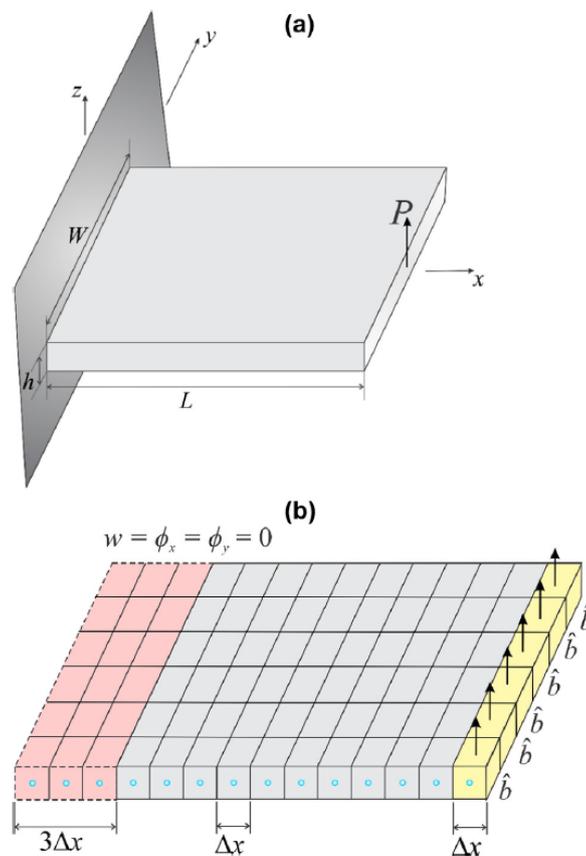


Figura 4.4: Piastra incastrata su un lato e carico distribuito sul lato opposto (immagine tratta da [20]).

Quindi si effettua un confronto qualitativo con i risultati presentati nell'articolo [20], come riportato nei due grafici relativi allo spostamento in direzione z ed alla rotazione attorno all'asse y , rappresentati in figura 4.5, a seguito della condizione di carico applicata.

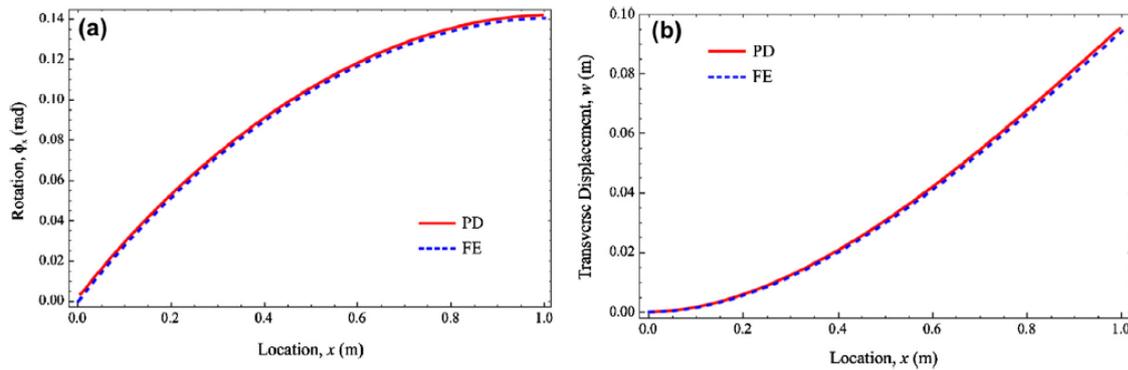


Figura 4.5: Variazione di rotazione (a) e spostamento trasversale (b) lungo l'asse x nella piastra soggetta a un carico trasversale (immagine tratta da [20]).

Si precisa che il sistema di riferimento applicato risulta diverso da quello utilizzato da Diyaroglu et al. nell'articolo [20]. Si fa presente, quindi, che i gradi di libertà rotazionali utilizzati nella ricerca ϕ_x^m e ϕ_y^m corrispondono ai seguenti gradi di libertà usati: $\phi_x^m = -\phi_y$ e $\phi_y^m = \phi_x$

Per quanto riguarda il modello solo FEM si ricavano i seguenti valori di risultanti delle reazioni vincolari e forze applicate:

	Risultante reazione vincolare	Forza
F_{w_z}	$-5.00 \cdot 10^6 \text{ N}$	$5.00 \cdot 10^6 \text{ N}$
M_{ϕ_y}	$5.00 \cdot 10^6 \text{ Nm}$	$5.00 \cdot 10^6 \text{ Nm}$

Tabella 4.3: Risultati delle reazioni vincolari e forze applicate sulla piastra con modello solo FEM.

4.3.1 Piastra con modello solo peridinamico

Si considera un modello accoppiato dove la zona peridinamica si estende a tutta la piastra, ottenendo una piastra descritta solamente da un modello peridinamico:

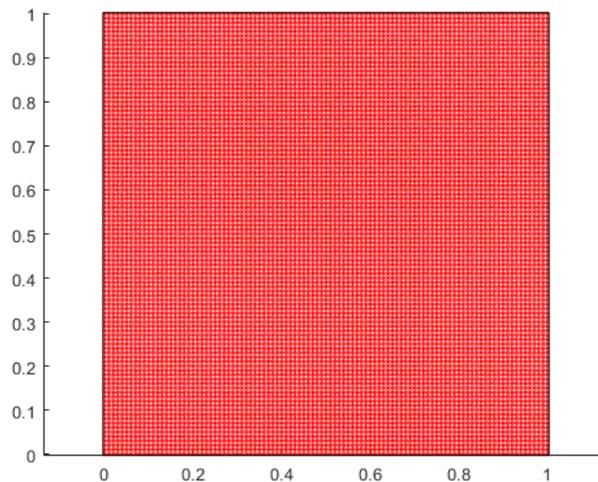


Figura 4.6: Modello accoppiato con griglia peridinamica sull'intera piastra.

Le coordinate della zona peridinamica sono:

$$\overline{x_{min} = 0 \text{ m} \quad y_{min} = 0 \text{ m} \quad x_{max} = 1 \text{ m} \quad y_{max} = 1 \text{ m}}$$

Si ricavano le seguenti deformate, per modello solo PD e solo FEM:

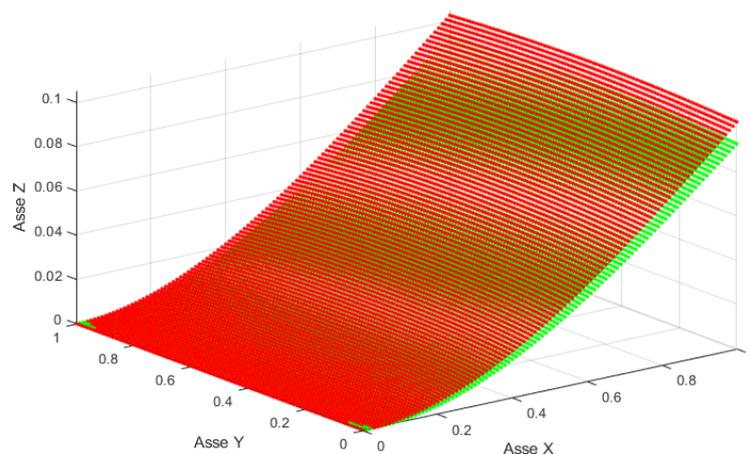


Figura 4.7: Deformata del modello solo PD (rosso) e modello solo FEM (verde).

Nelle figure 4.8 e 4.9, vengono riportate le variazioni sugli spostamenti w e sulle rotazioni ϕ_y lungo l'asse x dalla piastra con i due diversi modelli. In figura 4.9, in particolare,

sono riportati i valori assoluti degli andamenti delle rotazioni ϕ_y , al fine di rendere i risultati più facilmente confrontabili con quelli forniti in figura 4.5(b).

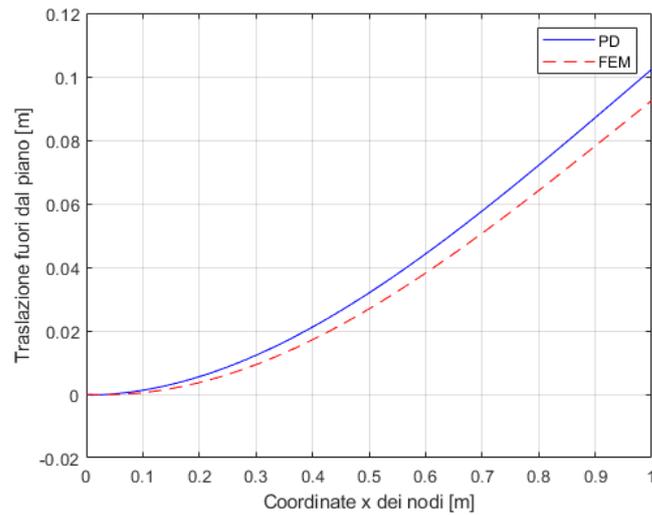


Figura 4.8: Confronto spostamento fuori dal piano w tra modello solo peridinamico e modello solo FEM.

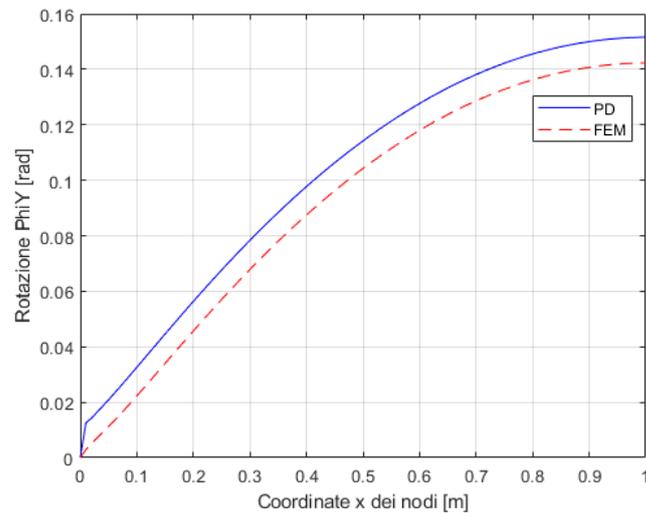


Figura 4.9: Confronto della variazione di ϕ_y tra modello solo peridinamico e modello solo FEM.

Per analizzare le differenze tra modello solo peridinamico e solo FEM si riportano i seguenti grafici raffiguranti gli errori assoluti:

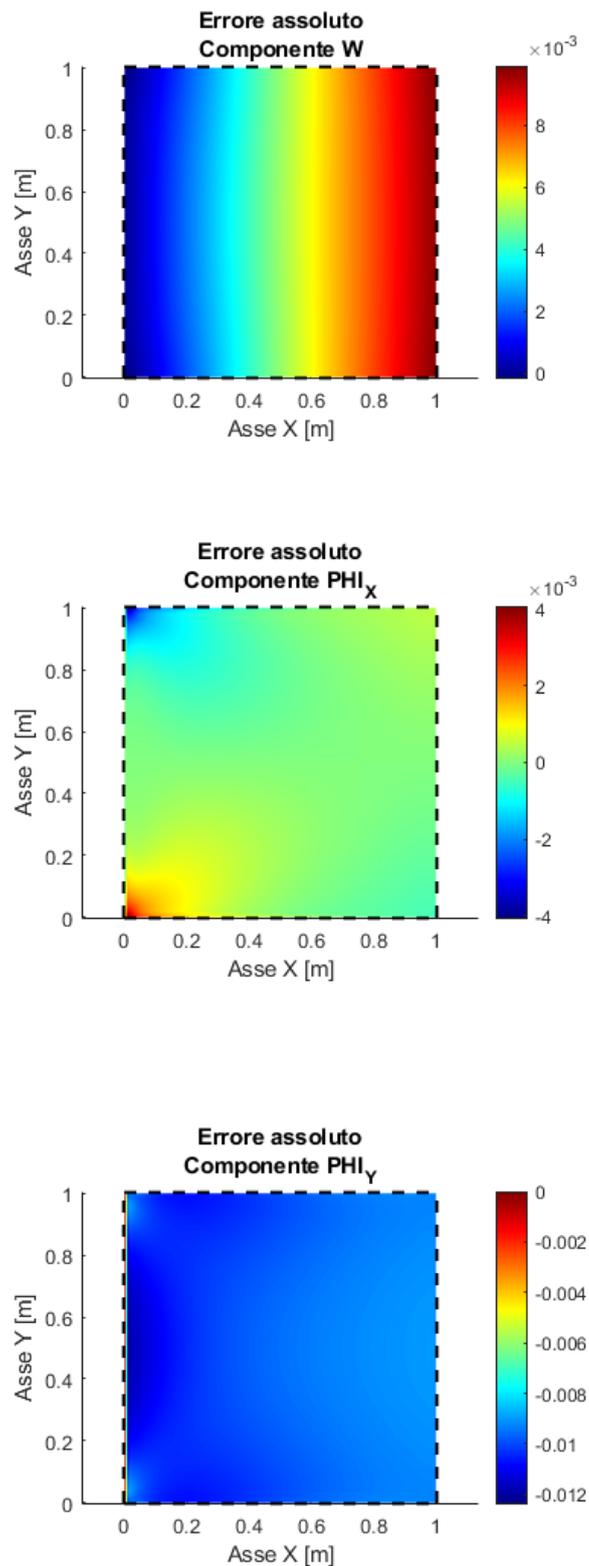


Figura 4.10: Distribuzione degli errori assoluti per le componenti w , ϕ_x e ϕ_y nel caso di zona peridinamica estesa a tutta la piastra.

Per quanto riguarda l'equilibrio del sistema si trovano i risultati di tabella 4.4:

	Risultante reazione vincolare	Forza
F_{w_z}	$-5.00 \cdot 10^6 N$	$5.00 \cdot 10^6 N$
M_{ϕ_y}	$5.00 \cdot 10^6 Nm$	$5.00 \cdot 10^6 Nm$

Tabella 4.4: Risultati delle reazioni vincolari e forze applicate sulla piastra con zona peridinamica estesa a tutta la piastra.

Prendendo in considerazione i dati nelle figure 4.8 e 4.9, si può osservare come l'andamento degli spostamenti fuori dal piano e delle rotazioni sui modelli solo PD e solo FEM presentino delle similitudini. Le differenze riscontrate derivano dalla non considerazione del problema del *softening* nel modello solo PD.

Il problema del softening è causato ad una maggior cedevolezza della struttura discretizzata con soli nodi PD, in quanto la rispettiva sfera d'influenza dei nodi di bordo non risulta interamente contenuta all'interno della regione reale discretizzata.

Per ovviare a questo problema, per questi nodi peridinamici, si ricorre ad alcuni fattori correttivi da applicare ai micromoduli c_b e c_s . Tali fattori, utilizzati da Diyaroglu et al. nell'articolo [20], non sono stati implementati nelle simulazioni effettuate. Tuttavia, si può notare come gli andamenti delle deformate su spostamenti fuori dal piano e sulle rotazioni siano del tutto paragonabili.

Per mitigare il problema del softening si considera il modello di figura 4.11, dove la zona peridinamica è limitata a una distanza pari a due orizzonti $\delta = 0.06 m$ dai bordi della piastra e la restante regione è modellata con il modello FEM.

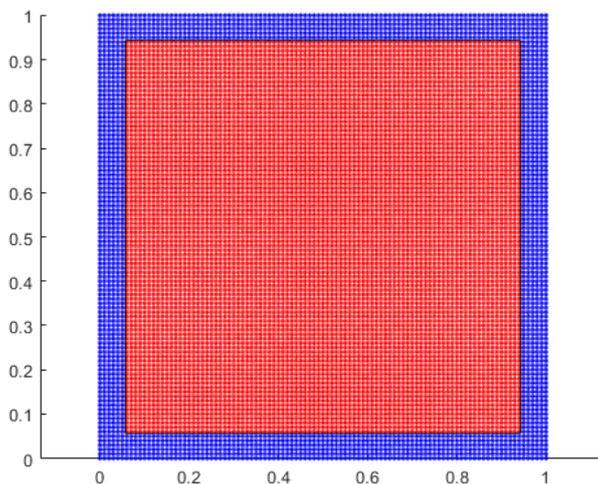


Figura 4.11: Modello accoppiato con griglia peridinamica non estesa a tutta la piastra per mitigare l'effetto del softening.

Le coordinate della zona peridinamica risultano:

$$\overline{x_{min} = 0.06 m \quad y_{min} = 0.06 m \quad x_{max} = 0.94 m \quad y_{max} = 0.94 m}$$

Si ricavano la seguenti deformate, per modello accoppiato e solo FEM, simili al caso precedente:

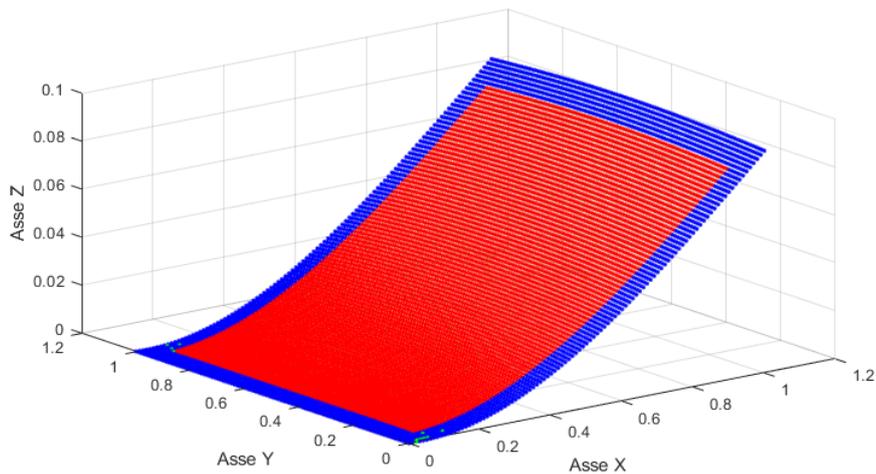


Figura 4.12: Deformata del modello accoppiato con zona peridinamica (blu e rosso) e modello solo FEM (verde).

Nelle figure 4.13 e 4.14, vengono riportate gli andamenti dello spostamento w e della rotazione ϕ_y lungo x con i due diversi modelli:

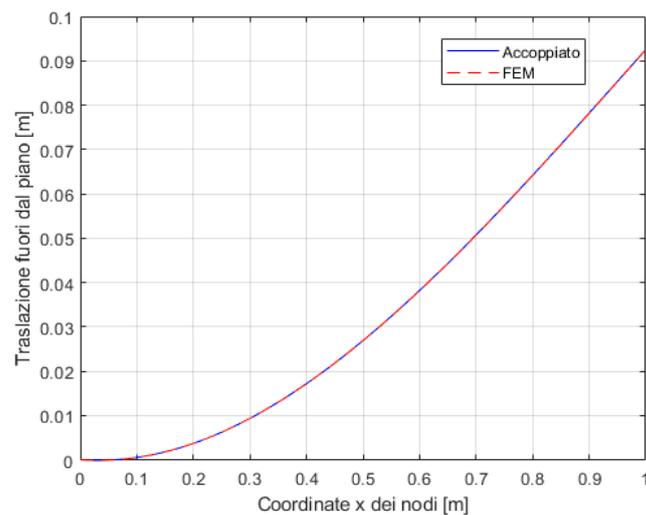


Figura 4.13: Confronto spostamento fuori dal piano w tra modello accoppiato e modello solo FEM.

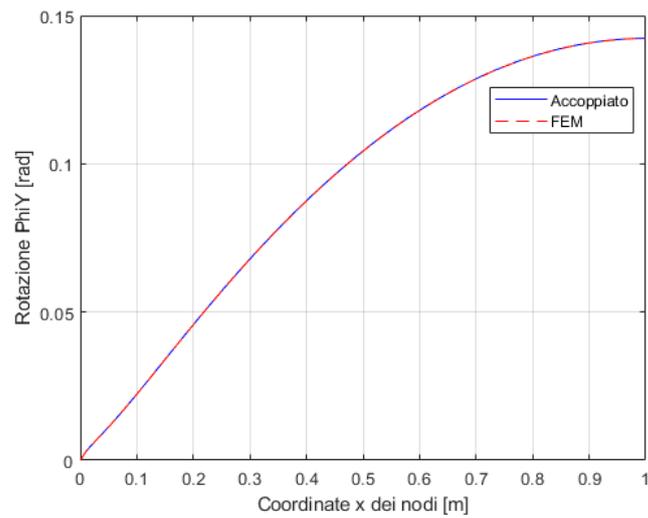
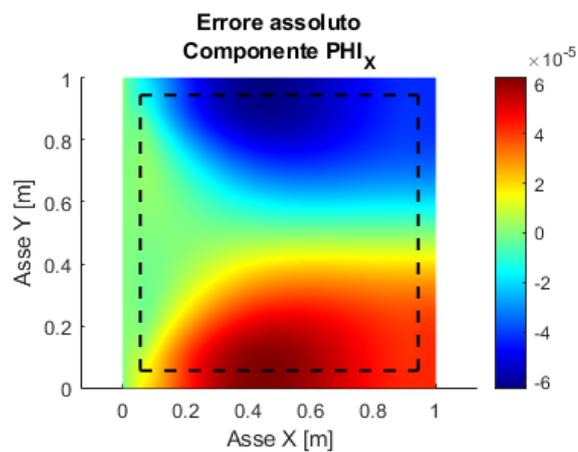
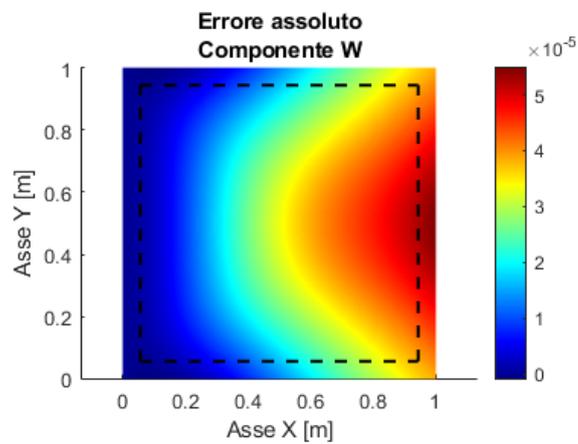


Figura 4.14: Confronto della variazione di ϕ_y tra modello accoppiato e modello solo FEM.

Per analizzare le differenze tra modello accoppiato e solo FEM si riportano i seguenti grafici che rappresentano gli errori assoluti:



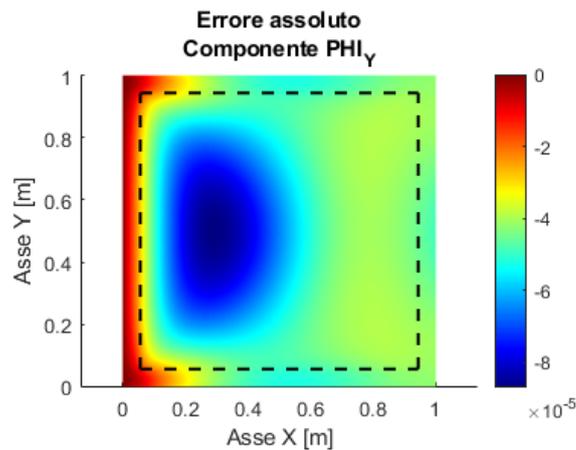


Figura 4.15: Distribuzione degli errori assoluti per le componenti w , ϕ_x e ϕ_y nel caso di zona peridinamica non estesa a tutta la piastra per considerare l'effetto del softening.

Per quanto riguarda l'equilibrio del sistema si trovano i seguenti risultati:

	Risultante reazione vincolare	Forza
F_{w_z}	$-4.98 \cdot 10^6 \text{ N}$	$4.98 \cdot 10^6 \text{ N}$
M_{ϕ_y}	$5.01 \cdot 10^6 \text{ Nm}$	$5.01 \cdot 10^6 \text{ Nm}$

Tabella 4.5: Risultati delle reazioni vincolari e forze applicate sulla piastra con zona peridinamica non completamente estesa a tutta la piastra per considerare l'effetto del softening.

4.3.2 Piastra con zona peridinamica centrata

Si considera la seguente piastra dove è presente una regione peridinamica centrata al suo interno:

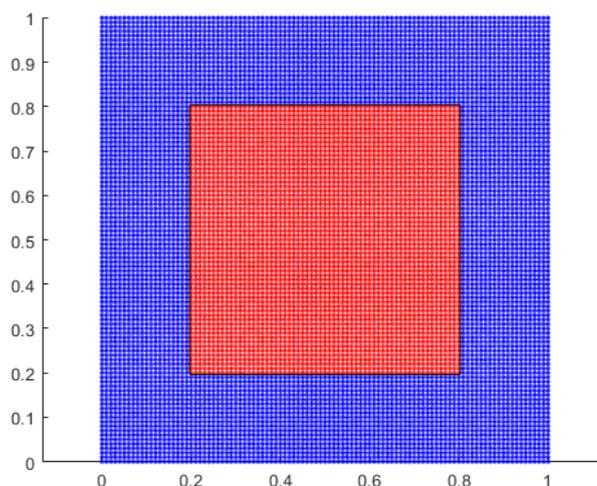


Figura 4.16: Modello accoppiato della piastra con zona peridinamica centrata.

Le coordinate della zona peridinamica sono:

$$\underline{x_{min} = 0.2 \text{ m} \quad y_{min} = 0.2 \text{ m} \quad x_{max} = 0.8 \text{ m} \quad y_{max} = 0.8 \text{ m}}$$

Si ricavano la seguenti deformate, per modello accoppiato e solo FEM:

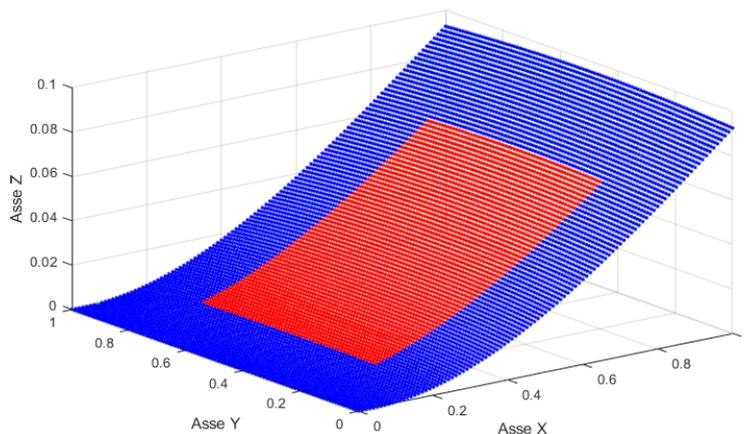


Figura 4.17: Deformata del modello accoppiato con zona peridinamica centrata (blu e rosso) e modello solo FEM (verde).

Nelle figure 4.18 e 4.19, vengono riportate gli andamenti dello spostamento w e della rotazione ϕ_y lungo x con i due diversi modelli:

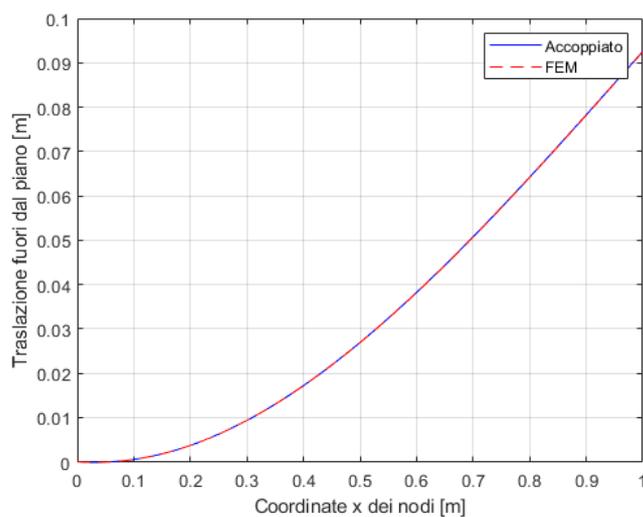


Figura 4.18: Confronto spostamento fuori dal piano w tra modello accoppiato e modello solo FEM per una piastra con zona peridinamica centrata.

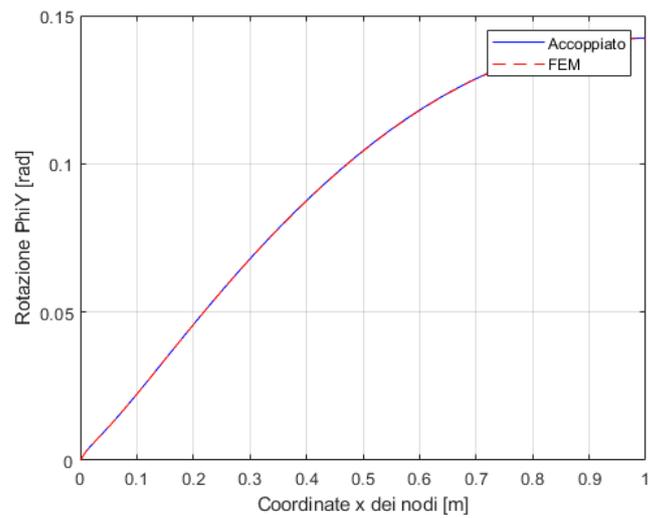
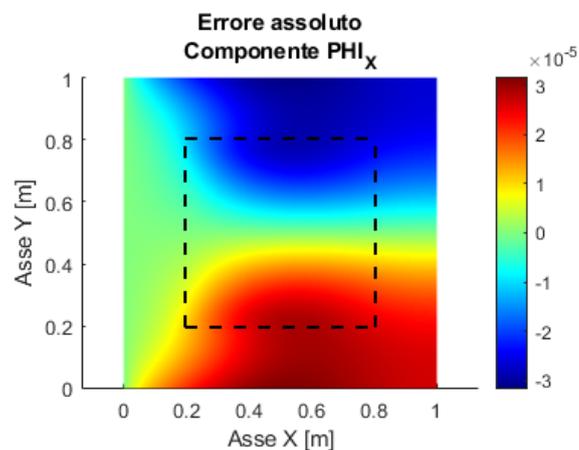
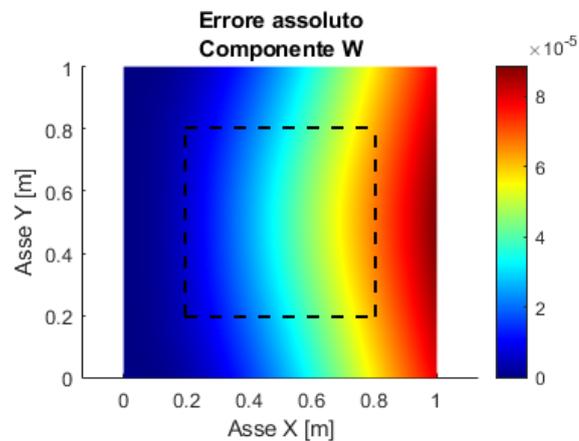


Figura 4.19: Confronto della variazione di ϕ_y tra modello accoppiato e modello solo FEM per una piastra con zona peridinamica centrata.

Per analizzare le differenze tra modello accoppiato e solo FEM si riportano i seguenti grafici che rappresentano gli errori assoluti:



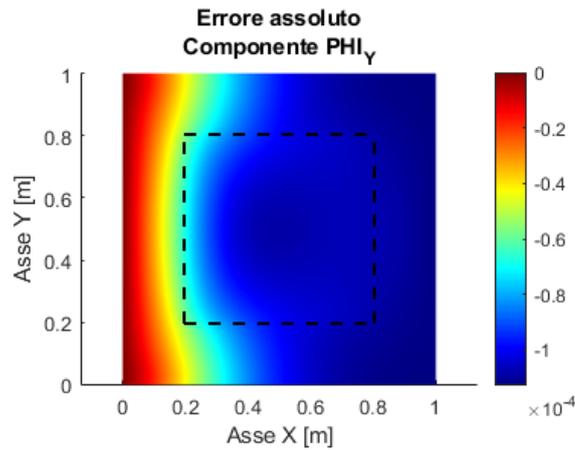


Figura 4.20: Distribuzione degli errori assoluti per le componenti w , ϕ_x e ϕ_y nel caso di zona peridinamica centrata nella piastra.

Per quanto riguarda l'equilibrio del sistema trovano i seguenti risultati:

	Risultante reazione vincolare	Forza
F_{w_z}	$-4.99 \cdot 10^6 \text{ N}$	$4.99 \cdot 10^6 \text{ N}$
M_{ϕ_y}	$5.005 \cdot 10^6 \text{ Nm}$	$5.005 \cdot 10^6 \text{ Nm}$

Tabella 4.6: Risultati delle reazioni vincolari e forze applicate sulla piastra con zona peridinamica centrata nella piastra.

4.3.3 Piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo incastrato

Si considera il seguente modello accoppiato con zona peridinamica localizzata in prossimità del bordo incastrato della piastra:

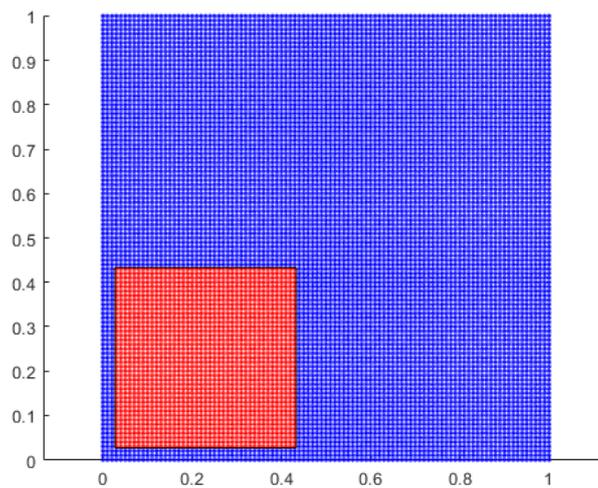


Figura 4.21: Modello accoppiato della piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo incastrato della piastra.

Le coordinate della zona peridinamica risultano:

$$\underline{x_{min} = 0.03 \text{ m} \quad y_{min} = 0.03 \text{ m} \quad x_{max} = 0.43 \text{ m} \quad y_{max} = 0.43 \text{ m}}$$

Si ricavano la seguenti deformate, per modello accoppiato e solo FEM:

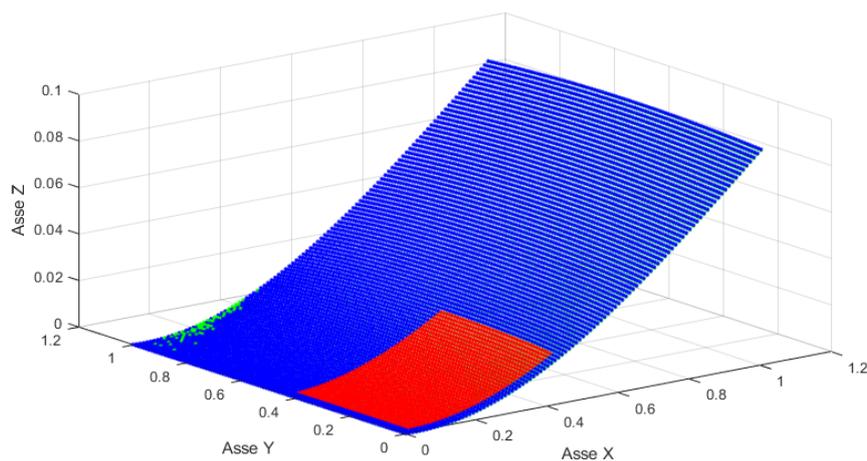


Figura 4.22: Deformata del modello accoppiato con zona peridinamica non centrata (blu e rosso) e modello solo FEM (verde).

Nelle figure 4.23 e 4.24, vengono riportati gli andamenti dello spostamento w e della rotazione ϕ_y lungo x con i due diversi modelli:

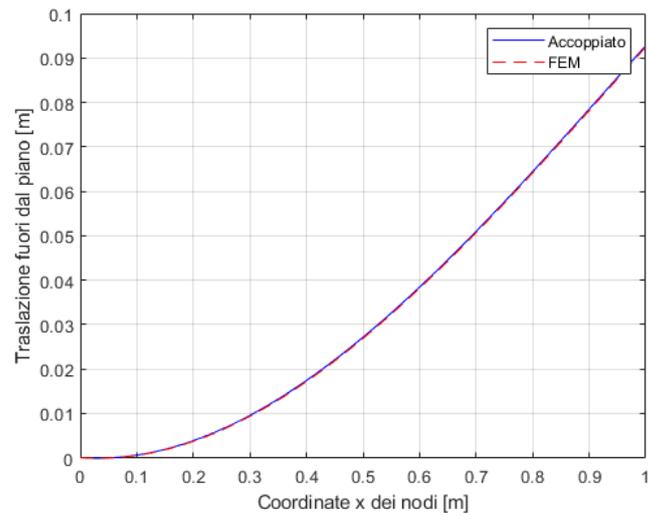


Figura 4.23: Confronto spostamento fuori dal piano w tra modello accoppiato e modello solo FEM per una piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo incastrato.

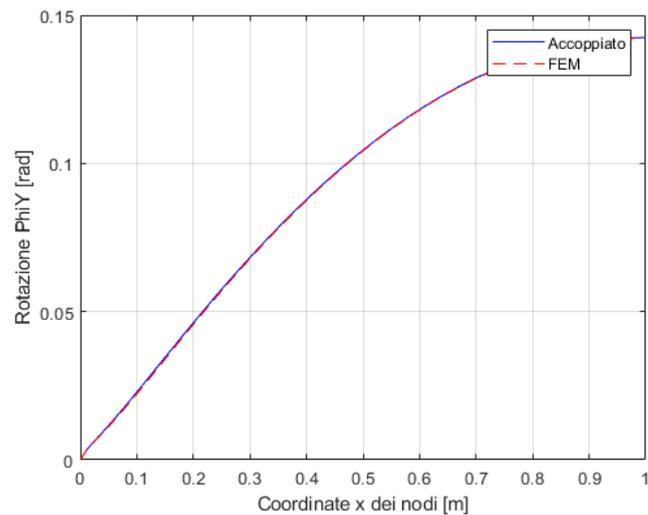


Figura 4.24: Confronto della variazione di ϕ_y tra modello accoppiato e modello solo FEM per una piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo incastrato.

Per analizzare le differenze tra modello accoppiato e solo FEM si riportano i seguenti grafici che rappresentano gli errori assoluti:

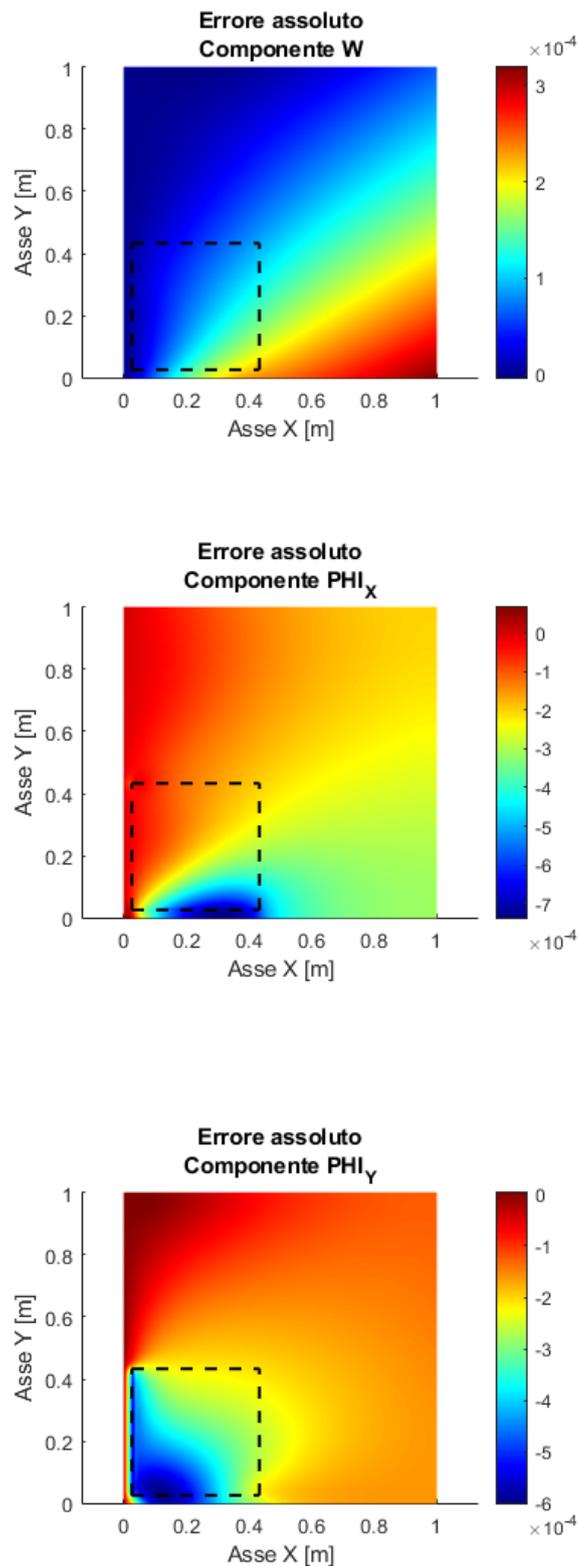


Figura 4.25: Distribuzione degli errori assoluti per le componenti w , ϕ_x e ϕ_y nel caso di zona peridinamica in prossimità del bordo incastrato della piastra.

Per quanto riguarda l'equilibrio del sistema si trovano i seguenti risultati:

	Risultante reazione vincolare	Forza
F_{w_z}	$-5.03 \cdot 10^6 \text{ N}$	$5.03 \cdot 10^6 \text{ N}$
M_{ϕ_y}	$5.15 \cdot 10^6 \text{ Nm}$	$5.15 \cdot 10^6 \text{ Nm}$

Tabella 4.7: Risultati delle reazioni vincolari e forze applicate sulla piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo incastrato.

4.3.4 Piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo caricato

Si considera la seguente piastra accoppiata con zona peridinamica localizzata in prossimità del bordo dove è presente il carico P :

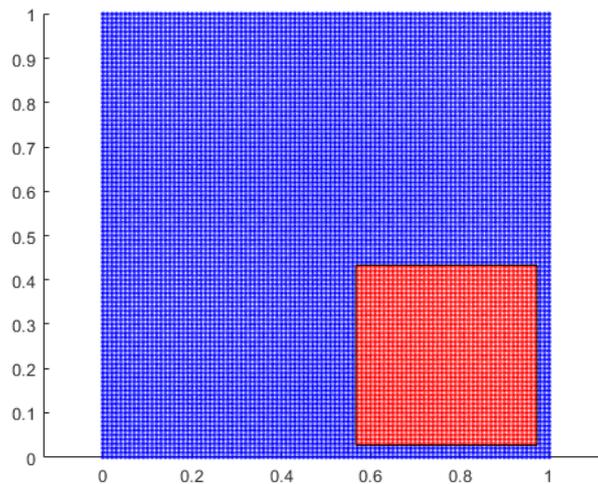


Figura 4.26: Modello accoppiato della piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo dove è applicato il carico.

Le coordinate della zona peridinamica risultano:

$$\underline{x_{min} = 0.57 \text{ m} \quad y_{min} = 0.03 \text{ m} \quad x_{max} = 0.97 \text{ m} \quad y_{max} = 0.43 \text{ m}}$$

Si ricavano la seguenti deformate, per modello accoppiato e solo FEM:

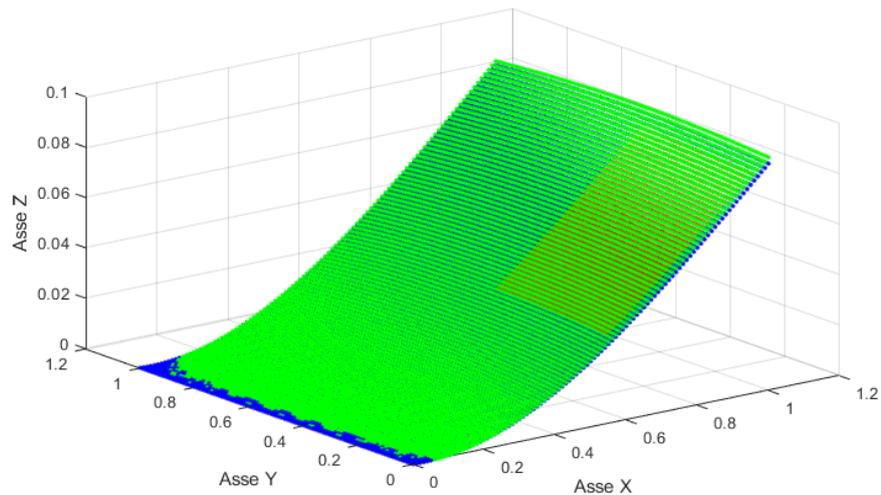


Figura 4.27: Deformata del modello accoppiato con zona peridinamica non centrata (blu e rosso) e modello solo FEM (verde).

Nelle figure 4.28 e 4.29, vengono riportati gli andamenti dello spostamento w e della rotazione ϕ_y lungo x con i due diversi modelli:

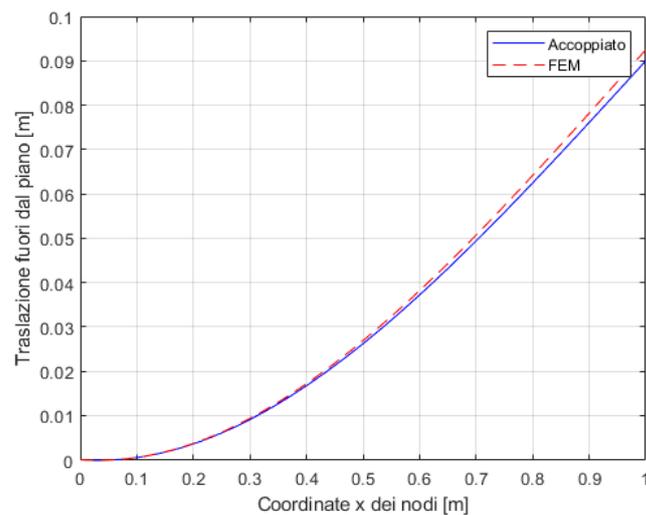


Figura 4.28: Confronto spostamento fuori dal piano w tra modello accoppiato e modello solo FEM per una piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo caricato.

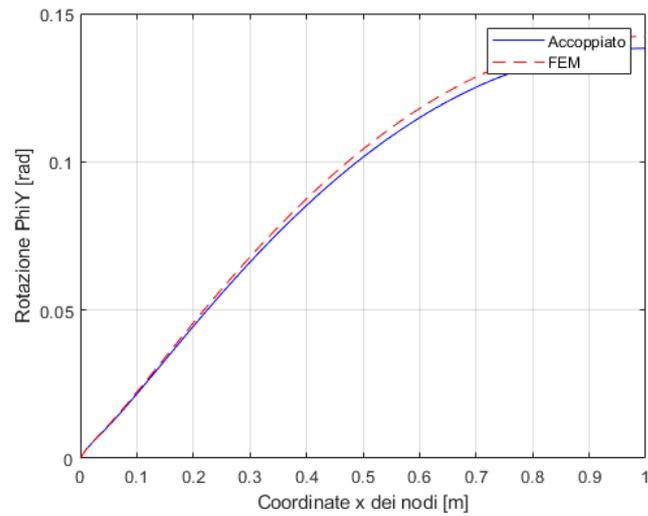
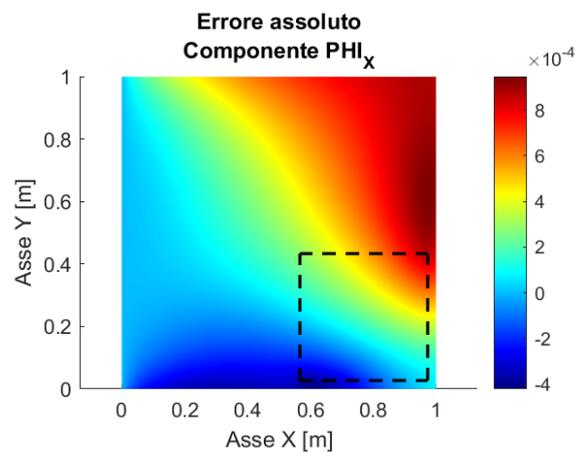
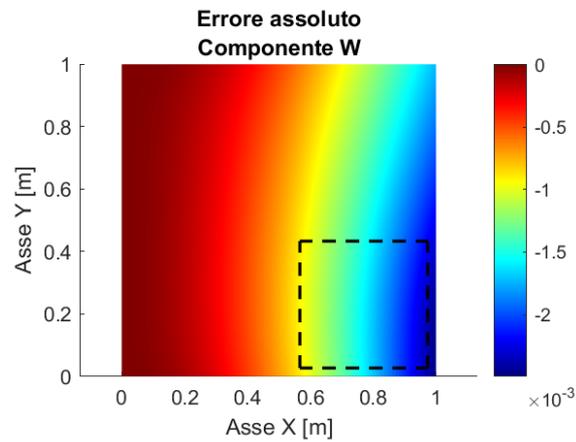


Figura 4.29: Confronto della variazione di ϕ_y tra modello accoppiato e modello solo FEM per una piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo caricato.

Per analizzare le differenze tra modello accoppiato e solo FEM si riportano i seguenti grafici che rappresentano gli errori assoluti:



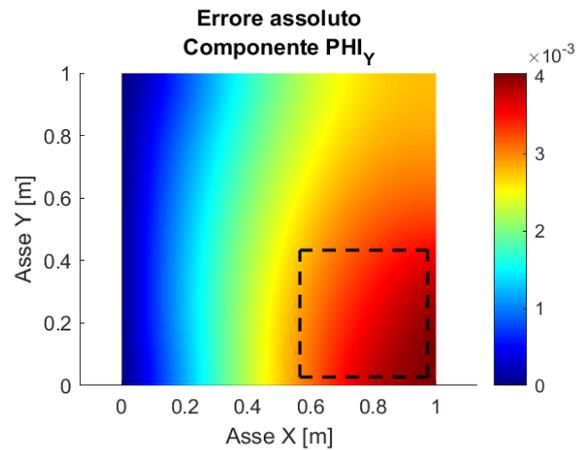


Figura 4.30: Distribuzione degli errori assoluti per le componenti w , ϕ_x e ϕ_y nel caso di zona peridinamica in prossimità del bordo caricato della piastra.

Per quanto riguarda l'equilibrio del sistema trovano i seguenti risultati:

	Risultante reazione vincolare	Forza
F_{w_z}	$-4.90 \cdot 10^6 \text{ N}$	$4.90 \cdot 10^6 \text{ N}$
M_{ϕ_y}	$4.89 \cdot 10^6 \text{ Nm}$	$4.89 \cdot 10^6 \text{ Nm}$

Tabella 4.8: Risultati delle reazioni vincolari e forze applicate sulla piastra con zona peridinamica in prossimità del bordo dove è presente il carico.

4.4 Piastra incastrata soggetta ad un momento flettente lungo l'asse y

Sul modello solo FEM e sul modello accoppiato, le condizioni di vincolo e di carico vengono applicate solamente sui nodi FEM dei bordi della piastra. La condizione di carico applicata risulta pari a $M_y = -3.33 \cdot 10^6 \text{ Nm}$.

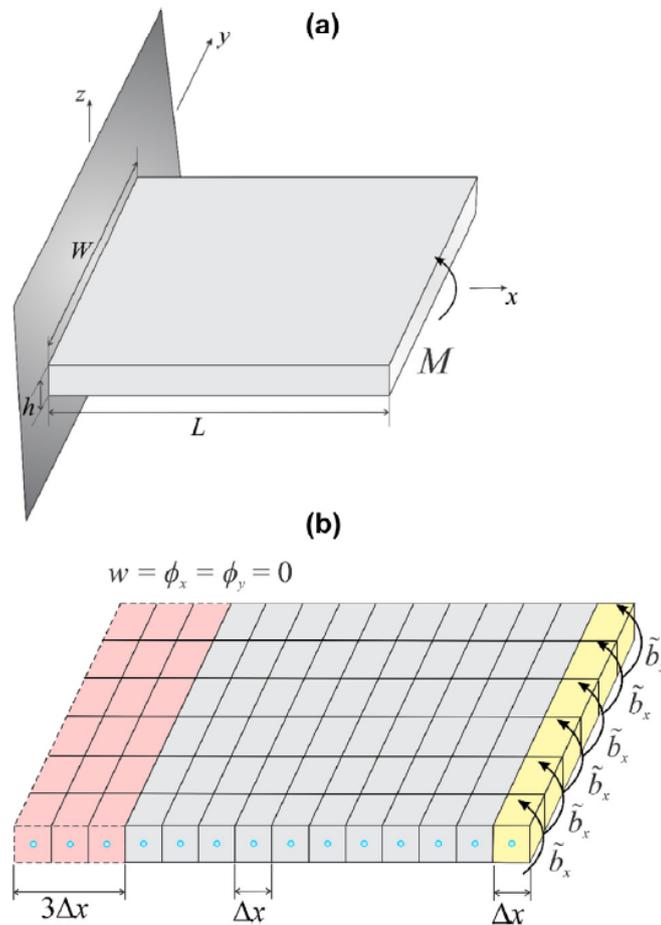


Figura 4.31: Piastra incastrata su un lato e momento flettente sul lato opposto (immagine tratta da [20]).

Come nel caso precedente, si effettua un confronto qualitativo con i risultati presentati nell'articolo [20], come i due grafici relativi alla variazione dello spostamento in direzione z ed alla rotazione attorno all'asse y lungo l'asse x , riportati in figura 4.32, a seguito della condizione di carico applicato.

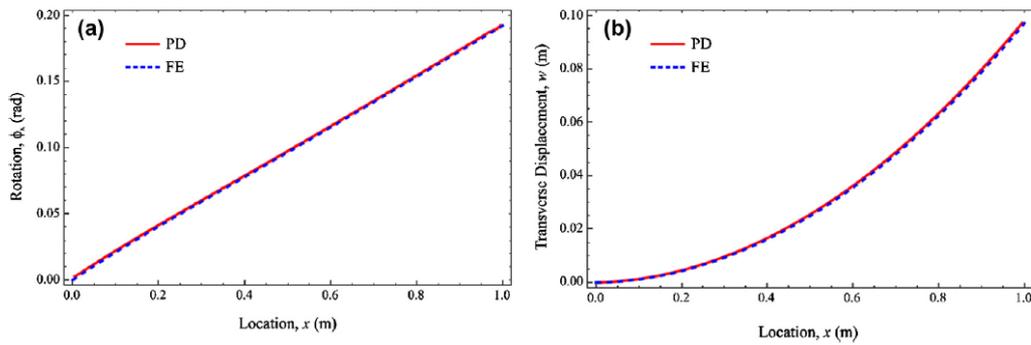


Figura 4.32: Variazione di rotazione (a) e spostamento trasversale (b) lungo l'asse x nella piastra soggetta a un momento flettente (immagine tratta da [20]).

Si prenderanno in esame solamente i casi riportati nell'articolo [20], riportando le stesse verifiche eseguite nella precedente sezione 4.2.

Per quanto riguarda il modello solo FEM si sono trovati i seguenti valori di risultanti delle reazioni vincolari e forze applicate:

	Risultante reazione vincolare	Forza
F_{w_z}	$6.39 \cdot 10^{-4} N$	$6.39 \cdot 10^{-4} N$
M_{ϕ_y}	$3.33 \cdot 10^6 Nm$	$3.33 \cdot 10^6 Nm$

Tabella 4.9: Risultati delle reazioni vincolari e forze applicate sulla piastra con modello solo FEM.

4.4.1 Piastra con modello solo peridinamico

Si considera la piastra di figura 4.6.

Si ricavano le seguenti deformate, per modello solo PD e solo FEM:

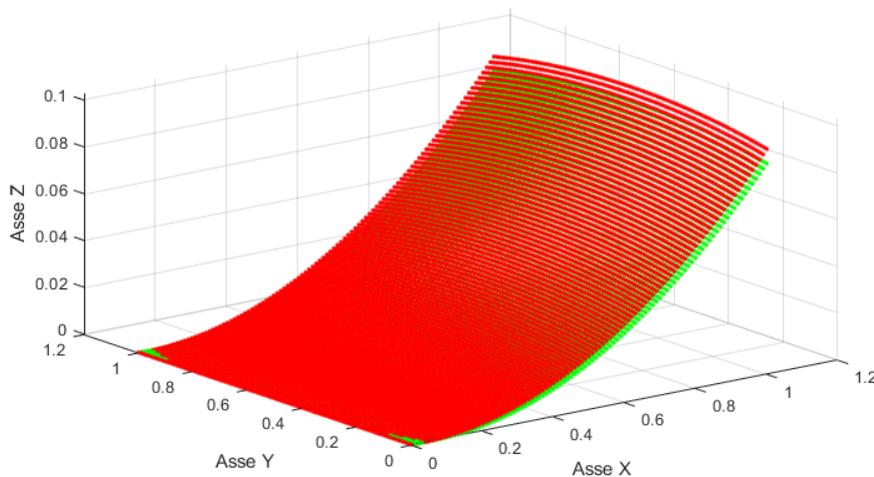


Figura 4.33: Deformata del modello solo PD (rosso) e modello solo FEM (verde).

Nelle figure 4.34 e 4.35, vengono riportati gli andamenti dello spostamento w e della rotazione ϕ_y lungo x con i due diversi modelli:

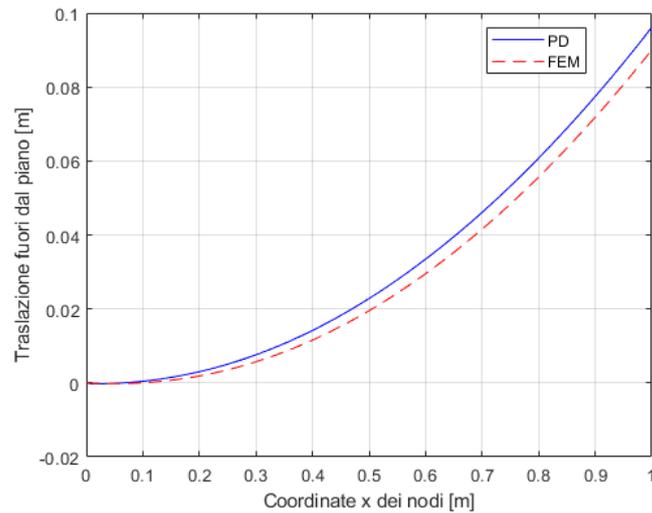


Figura 4.34: Confronto spostamento fuori dal piano w tra modello solo PD e modello solo FEM.

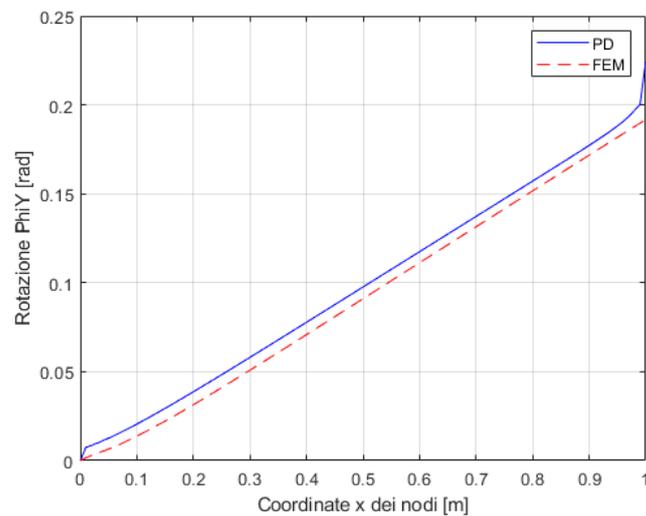


Figura 4.35: Confronto della variazione di ϕ_y tra modello solo PD e modello solo FEM.

Per analizzare le differenze tra modello solo PD e solo FEM si riportano i seguenti grafici che rappresentano gli errori assoluti:

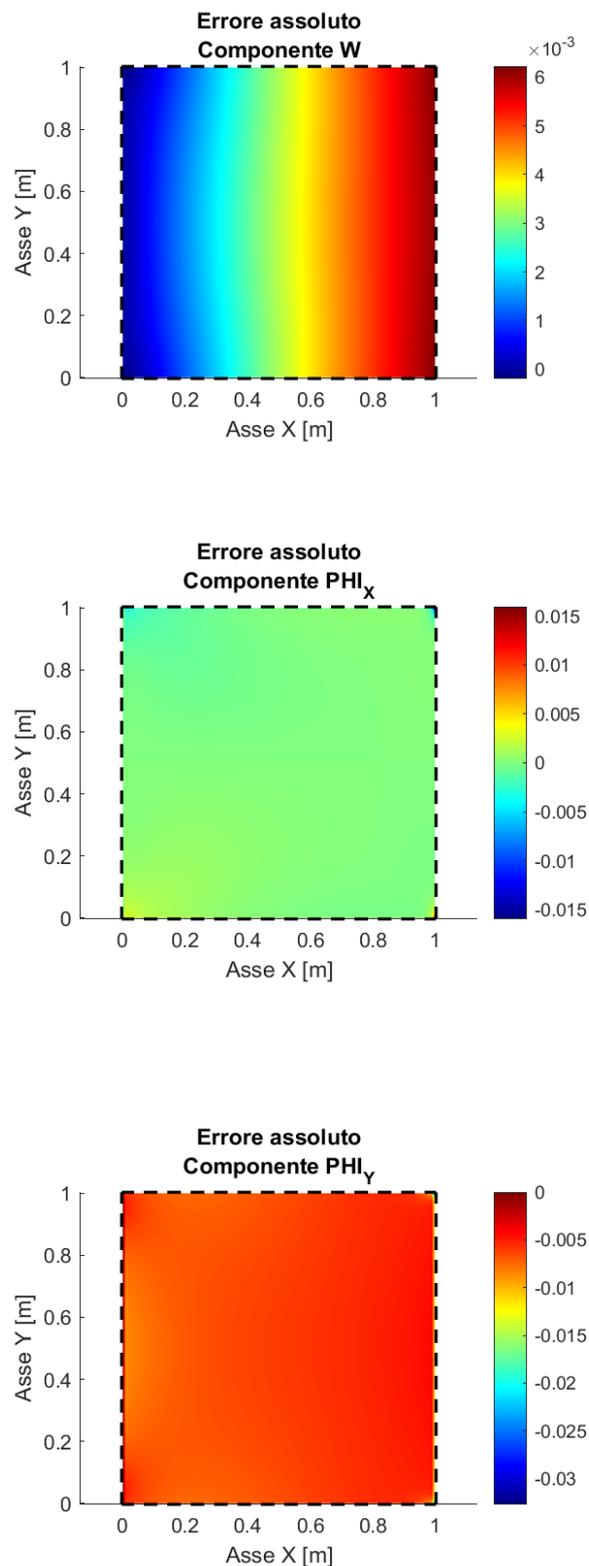


Figura 4.36: Distribuzione degli errori assoluti per le componenti w , ϕ_x e ϕ_y nel caso di zona peridinamica estesa a tutta la piastra incastrata e momento flettente applicato sul bordo opposto.

Per quanto riguarda l'equilibrio del sistema trovano i seguenti risultati:

	Risultante reazione vincolare	Forza
F_{w_z}	$5.55 \cdot 10^3 N$	$-4.61 \cdot 10^4 N$
M_{ϕ_y}	$3.33 \cdot 10^6 Nm$	$-3.33 \cdot 10^6 Nm$

Tabella 4.10: Risultati delle reazioni vincolari e forze applicate sulla piastra con zona peridinamica nella piastra incastrata e momento flettente applicato sul bordo opposto.

4.4.2 Piastra con zona peridinamica centrata

Si considera la piastra di figura 4.16.

Si ricavano le seguenti deformate, per modello solo PD e solo FEM:

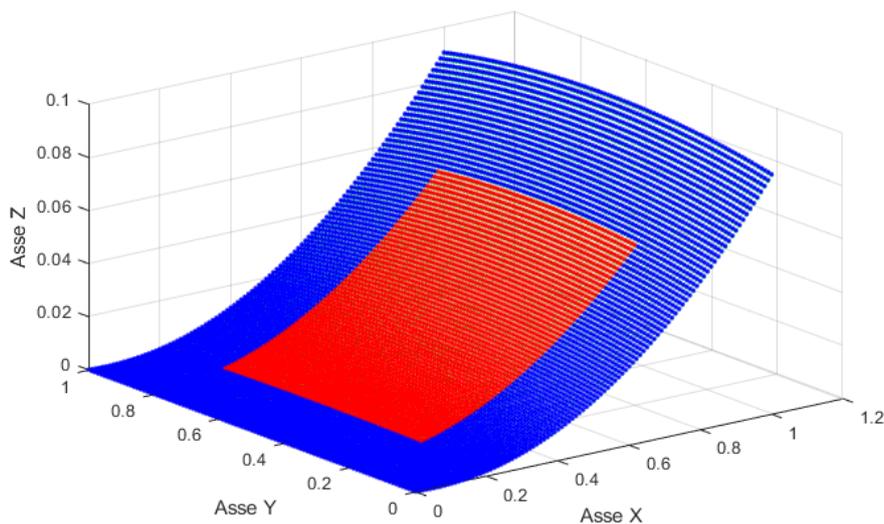


Figura 4.37: Deformata del modello accoppiato con zona peridinamica non centrata (blu e rosso) e modello solo FEM (verde).

Nelle figure 4.38 e 4.39, vengono riportati gli andamenti dello spostamento w e della rotazione ϕ_y lungo x con i due diversi modelli:

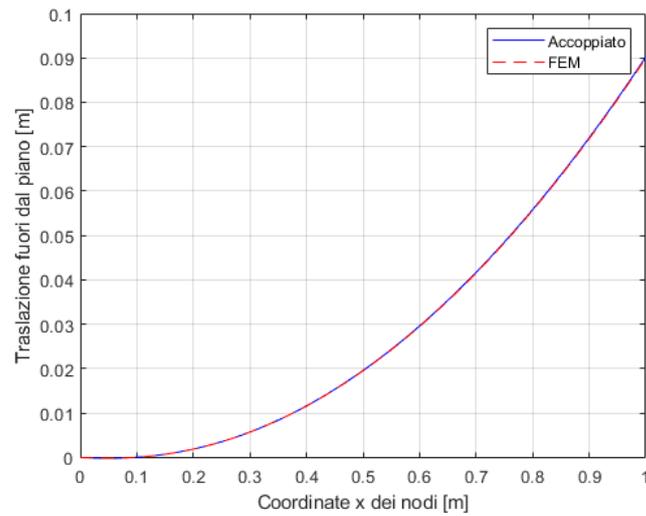


Figura 4.38: Confronto spostamento fuori dal piano w tra modello accoppiato con zona peridinamica centrata e modello solo FEM.

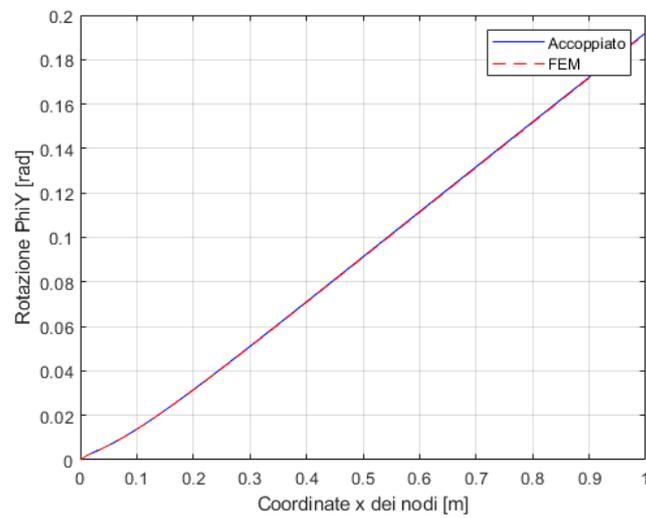


Figura 4.39: Confronto della variazione di ϕ_y tra modello accoppiato con zona peridinamica centrata e modello solo FEM.

Per analizzare le differenze tra modello accoppiato e solo FEM si riportano i seguenti grafici che rappresentano gli errori assoluti:

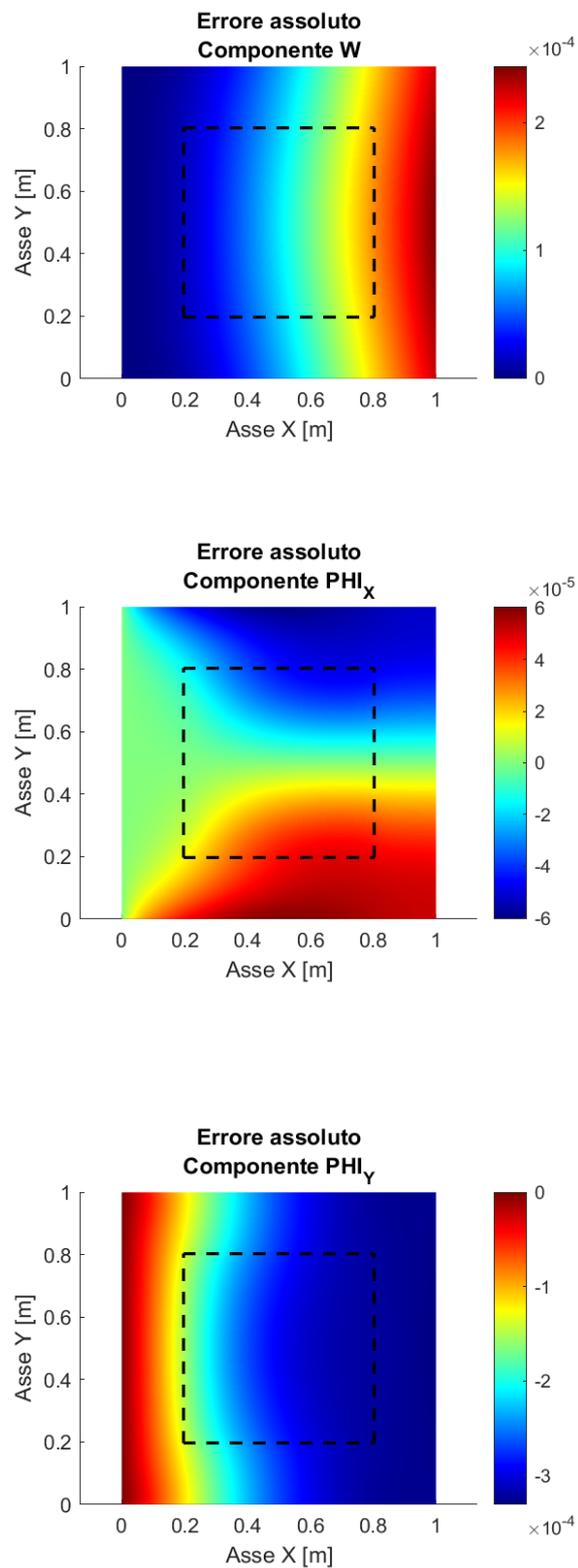


Figura 4.40: Distribuzione degli errori assoluti per le componenti w , ϕ_x e ϕ_y nel caso di zona peridinamica centrata nella piastra incastrata e momento flettente applicato sul bordo opposto.

Per quanto riguarda l'equilibrio del sistema trovano i seguenti risultati:

	Risultante reazione vincolare	Forza
F_{w_z}	$1.98 \cdot 10^5 N$	$-4.61 \cdot 10^4 N$
M_{ϕ_y}	$3.34 \cdot 10^6 Nm$	$-3.34 \cdot 10^6 Nm$

Tabella 4.11: Risultati delle reazioni vincolari e forze applicate sulla piastra con zona peridinamica centrata nella piastra incastrata e momento flettente applicato sul bordo opposto.

Conclusioni

Eseguendo un'analisi dei risultati ottenuti, si deduce come la modellazione di piastre tramite elementi finiti e griglie peridinamiche sia ben rappresentativa del comportamento statico delle piastre, quando sottoposte a condizioni di carico.

Nonostante ciò, si sono comunque riscontrati alcuni scostamenti di entità trascurabile tra i due modelli, come emerge nei precedenti grafici, che rappresentano le variazioni lungo l'asse x dello spostamento fuori dal piano z e della rotazione ϕ_y . Allo stesso modo, le tabelle mostrano le differenze nell'equilibrio tra le risultanti delle forze di reazione e delle risultanti delle forze e momenti esterni applicati alla piastra.

Nel capitolo 5 si pone l'attenzione sul motivo della mancanza dell'equilibrio nella piastra con accoppiamento tra teoria peridinamica e teoria della meccanica classica del continuo.

Capitolo 5

Equilibrio delle forze nell'accoppiamento FEM-PD

In questa sezione, inizialmente, per via analitica, viene riportata la dimostrazione di un problema di coerenza tra modello modello peridinamico e modello della meccanica del continuo, secondo l'articolo di Ongaro et al. [13]. Si è assunto un campo di spostamento nel piano per u_1 e u_2 , introducendo l'espansione in serie di Taylor fino al secondo ordine.

Mediante successive analisi numeriche, come riportato nella sezione 5.2, che imponendo delle condizioni di spostamento imposto di tipo quadratico, emergono degli errori non trascurabili riguardanti le forze di reazione.

In questo capitolo verrà adottato lo stesso metodo di analisi in riferimento allo spostamento fuori dal piano w e per le rotazioni, ϕ_x e ϕ_y , considerando più termini dell'espansione in serie di Taylor.

Come riportato nell'articolo, si considera una zona peridinamica quadrata con lunghezze pari a $L_{PD_x} = L_{PD_y} = 10 \text{ m}$. La rimanente parte del dominio rappresenta la regione FEM, discretizzata usando elementi FEM quadrati a quattro nodi per elemento. Si implementa una discretizzazione uniforme $\Delta x = \Delta y = 0.25 \text{ m}$, dove Δx e Δy rappresentano la spaziatura della griglia nelle direzioni x e y , rispettivamente. Ulteriori parametri geometrici e del materiale sono: $L_x = L_y = 24 \text{ m}$ (dimensioni piastra), $E = 1 \text{ Pa}$ (Modulo di Young), $\nu = \frac{1}{3}$ (rapporto di Poisson) e $h = 1 \text{ m}$ (spessore piastra). Si considera un orizzonte peridinamico pari a $\delta = 0.75 \text{ m}$ ($m = \delta/\Delta x = 3$).

5.1 Soluzione analitica

5.1.1 Coerenza tra modello bond-based PD e modello CCM nel piano fino al secondo ordine

In questa sezione si fa riferimento all'articolo di Ongaro et al. [13].

Si assume un dominio $B \subset \mathbb{R}^2$ e si considera un modello PD bond-based 2D lineare:

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{H_x} \lambda(\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|)(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \times (\mathbf{x}' - \mathbf{x})(\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))d\mathbf{x}' + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (5.1)$$

dove ρ è la densità, $\ddot{\mathbf{u}}$ è la derivata seconda nel tempo dello campo spostamento \mathbf{u} , $\lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|)$ è la funzione micromodulo con $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$. L'equazione 5.1 diventa:

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|)\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\xi}(\mathbf{u}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))d\boldsymbol{\xi} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (5.2)$$

dove

$$H := \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{\xi}\| \leq \delta\} \quad (5.3)$$

Si vuole stabilire una connessione tra modello peridinamico 5.2 e un modello 2D plane stress lineare elastico dato da:

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{u}_1(\mathbf{x}, t) = \frac{9E}{8} \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(\mathbf{x}, t) + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}(\mathbf{x}, t) \right] + b_1(\mathbf{x}, t) \quad (5.4)$$

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{u}_2(\mathbf{x}, t) = \frac{9E}{8} \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(\mathbf{x}, t) + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}(\mathbf{x}, t) \right] + b_2(\mathbf{x}, t) \quad (5.5)$$

dove E è il modulo di Young e si assume il rapporto di Poisson pari a $\nu = \frac{1}{3}$.

Si assume un campo spostamento e si implementa l'espansione in serie di Taylor di $\mathbf{u}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t)$ rispetto \mathbf{x} :

$$\begin{aligned} u_j(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) = & u_j(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}, t)\xi_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l}(\mathbf{x}, t)\xi_k \xi_l + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m}(\mathbf{x}, t)\xi_k \xi_l \xi_m \\ & + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m \partial x_n}(\mathbf{x}, t)\xi_k \xi_l \xi_m \xi_n + \dots, j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.6)$$

Implementando 5.6 per la componente i -esima dell'equazione 5.2, si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x})\ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) = & \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|)\xi_i \xi_j (u_j(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) - u_j(\mathbf{x}, t))d\boldsymbol{\xi} + b_i(\mathbf{x}, t) \\ = & \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|)\xi_i \xi_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}, t)\xi_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l}(\mathbf{x}, t)\xi_k \xi_l + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m}(\mathbf{x}, t)\xi_k \xi_l \xi_m \right. \\ & \left. + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m \partial x_n}(\mathbf{x}, t)\xi_k \xi_l \xi_m \xi_n + \dots \right) d\boldsymbol{\xi} + b_i(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Si può notare che i termini numero di componenti di $\boldsymbol{\xi}$ dispari possono essere eliminati per l'antisimmetria e simmetria del dominio di integrazione. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x})\ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) &= \left[\frac{1}{2} \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|) \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l d\boldsymbol{\xi} \right] \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l}(\mathbf{x}, t) \\ &+ \left[\frac{1}{4!} \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|) \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l \xi_m \xi_n d\boldsymbol{\xi} \right] \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m \partial x_n}(\mathbf{x}, t) + \dots + b_i(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Assumendo che le derivate spaziali degli spostamenti di ordine quattro e maggiore siano trascurabili, si ottiene:

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{1}{2} \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|) \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l d\boldsymbol{\xi} \right] \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l}(\mathbf{x}, t) + b_i(\mathbf{x}, t) \quad (5.9)$$

Introducendo le coordinate polari, $\xi_1 = r \cos(\theta)$ e $\xi_2 = r \sin(\theta)$, si ricavano i seguenti integrali:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|) \xi_1^4 d\boldsymbol{\xi} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\delta \lambda(r) (r \cos(\theta))^4 r dr d\theta \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_0^\delta \lambda(r) r^5 dr \right) \int_0^{2\pi} \cos^4(\theta) d\theta = \Lambda \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|) \xi_1^2 \xi_2^2 d\boldsymbol{\xi} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\delta \lambda(r) (r \cos(\theta))^2 (r \sin(\theta))^2 r dr d\theta \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_0^\delta \lambda(r) r^5 dr \right) \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) d\theta = \frac{\Lambda}{3} \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|) \xi_2^4 d\boldsymbol{\xi} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\delta \lambda(r) (r \sin(\theta))^4 r dr d\theta \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_0^\delta \lambda(r) r^5 dr \right) \int_0^{2\pi} \sin^4(\theta) d\theta = \Lambda \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\frac{1}{2} \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|) \xi_1^3 \xi_2 d\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2} \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|) \xi_1 \xi_2^3 d\boldsymbol{\xi} = 0 \quad (5.13)$$

dove

$$\Lambda := \frac{3\pi}{4} \left(\frac{1}{2} \int_0^\delta \lambda(r) r^5 dr \right) \quad (5.14)$$

Sostituendo 5.13 in 5.9, si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x})\ddot{u}_1(\mathbf{x}, t) &= \left[\frac{1}{2} \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|) \xi_1 \xi_j \xi_k \xi_l d\boldsymbol{\xi} \right] \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l}(\mathbf{x}, t) + b_1(\mathbf{x}, t) \\ &= \left[\frac{1}{2} \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|) \xi_1^4 d\boldsymbol{\xi} \right] \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(\mathbf{x}, t) + \left[\frac{1}{2} \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|) \xi_1^2 \xi_2^2 d\boldsymbol{\xi} \right] \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}(\mathbf{x}, t) + \\ &+ 2 \left[\frac{1}{2} \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|) \xi_1^2 \xi_2^2 d\boldsymbol{\xi} \right] \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}, t) + b_1(\mathbf{x}, t) \\ &= \Lambda \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(\mathbf{x}, t) + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}(\mathbf{x}, t) \right] + b_1(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbf{x})\ddot{u}_2(\mathbf{x}, t) &= \left[\frac{1}{2} \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|) \xi_2 \xi_j \xi_k \xi_l d\boldsymbol{\xi} \right] \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l}(\mathbf{x}, t) + b_2(\mathbf{x}, t) \\
&= \left[\frac{1}{2} \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|) \xi_2^4 d\boldsymbol{\xi} \right] \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(\mathbf{x}, t) + \left[\frac{1}{2} \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|) \xi_1^2 \xi_2^2 d\boldsymbol{\xi} \right] \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}(\mathbf{x}, t) + \\
&+ 2 \left[\frac{1}{2} \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|) \xi_1^2 \xi_2^2 d\boldsymbol{\xi} \right] \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}, t) + b_1(\mathbf{x}, t) \\
&= \Lambda \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(\mathbf{x}, t) + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}(\mathbf{x}, t) \right] + b_2(\mathbf{x}, t)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Eguagliando 5.15 e 5.4 oppure 5.16 e 5.5 si ottiene:

$$\Lambda = \frac{9E}{8} \tag{5.17}$$

Si conclude che per un campo di spostamento regolare, se i termini maggiori del quarto ordine possono essere trascurati l'equazione della peridinamica 5.1 si riduce all'equazione della CCM 5.4 e 5.5, assunta la relazione 5.17.

Per caratterizzare il modello di discrepanza tra modello PD e CCM, si assume una particolare funzione di micromodulo:

$$\lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|) = \frac{c}{\|\boldsymbol{\xi}\|^\alpha} \tag{5.18}$$

con c costante e $\alpha < 6$.

Si può calcolare Λ in 5.14:

$$\Lambda = \frac{3\pi}{4} \left(\frac{1}{2} \int_0^\delta cr^{5-\alpha} dr \right) = c \frac{3\pi}{8} \frac{\delta^{6-\alpha}}{6-\alpha} \tag{5.19}$$

Uguagliando 5.19 e 5.17, si ottiene:

$$c = \frac{3(6-\alpha)E}{\pi\delta^{6-\alpha}} \tag{5.20}$$

Impiegando le coordinate polari, si possono esprimere i coefficienti delle derivate del quarto ordine in 5.8 come:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4!} \int_H \lambda(\|\boldsymbol{\xi}\|) \xi_i \xi_j \xi_l \xi_m \xi_n d\boldsymbol{\xi} &= \frac{1}{4!} \int_0^{2\pi} \int_0^\delta \lambda(r) (r \cos(\theta))^a (r \sin(\theta))^{6-a} r dr d\theta \\
&= \frac{1}{4!} \left(\int_0^\delta \lambda(r) r^7 dr \right) \int_0^\pi (\cos(\theta))^a (\sin(\theta))^{6-a} d\theta
\end{aligned} \tag{5.21}$$

da cui inserendo l'equazione 5.18 si ottiene:

$$\int_0^\delta \lambda(r) r^7 dr = \int_0^\delta cr^{7-\alpha} dr = c \frac{\delta^{8-\alpha}}{8-\alpha} = \frac{3}{\pi} \frac{6-\alpha}{8-\alpha} E \delta^2 \tag{5.22}$$

Per $\delta \rightarrow 0$, 5.8:

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{u}_1(\mathbf{x}, t) = \frac{9E}{8} \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(\mathbf{x}, t) + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}(\mathbf{x}, t) \right] + O(\delta^2) + b_1(\mathbf{x}, t) \tag{5.23}$$

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{u}_2(\mathbf{x}, t) = \frac{9E}{8} \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}(\mathbf{x}, t) + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(\mathbf{x}, t) \right] + O(\delta^2) + b_2(\mathbf{x}, t) \tag{5.24}$$

Quindi il modello PD 5.2 converge al modello 5.45.5 a meno di termini di ordine $O(\delta^2)$.

5.1.2 Coerenza tra modello bond-based PD e modello CCM fuori dal piano fino al quarto ordine

Partendo dalle equazione della peridinamica lungo z nel caso della formulazione sviluppata per le piastre:

$$\rho h \ddot{w}_k = c_s h \int_H \left(\frac{w_j - w_k}{\xi_{jk}} - \frac{\phi_{x_j} - \phi_{x_k}}{2} \cos(\theta) - \frac{\phi_{y_j} - \phi_{y_k}}{2} \sin(\theta) \right) d\xi + \hat{b}_k \quad (5.25)$$

Introducendo l'espansione in serie di Taylor fino al quarto ordine:

$$\begin{aligned} w_j = & w_k + \frac{\partial w_k}{\partial x} r \cos(\theta) + \frac{\partial w_k}{\partial y} r \sin(\theta) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} r^2 \cos^2(\theta) + \frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial y} r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} r^2 \sin^2(\theta) + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 w_k}{\partial x^3} r^3 \cos^3(\theta) + 3 \frac{\partial^3 w_k}{\partial x^2 \partial y} r^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \right. \\ & + 3 \frac{\partial^3 w_k}{\partial x \partial y^2} r^3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + \left. \frac{\partial^3 w_k}{\partial y^3} r^3 \sin^3(\theta) \right) + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^4 w_k}{\partial x^4} r^4 \cos^4(\theta) + \right. \\ & + 4 \frac{\partial^4 w_k}{\partial x^3 \partial y} r^4 \cos^3(\theta) \sin(\theta) + 6 \frac{\partial^4 w_k}{\partial x^2 \partial y^2} r^4 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + 4 \frac{\partial^4 w_k}{\partial x \partial y^3} r^4 \cos(\theta) \sin^3(\theta) + \\ & \left. + \frac{\partial^4 w_k}{\partial y^4} r^4 \sin^4(\theta) \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Sostituendo 5.26 in 5.25, sapendo che per antisimmetria e per simmetria risulta:

$$\begin{aligned} \int_H \cos(\theta) &= 0 \\ \int_H \sin(\theta) &= 0 \\ \int_H \cos(\theta) \sin(\theta) &= 0 \\ \int_H \cos^3(\theta) &= 0 \\ \int_H \cos^2(\theta) \sin(\theta) &= 0 \\ \int_H \cos(\theta) \sin^2(\theta) &= 0 \\ \int_H \sin^3(\theta) &= 0 \\ \int_H \cos^3(\theta) \sin(\theta) &= 0 \\ \int_H \cos(\theta) \sin^3(\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Introducendo l'espansione in serie di Taylor 5.26 e considerando 5.27, si ottiene 5.30 pagina 113.

Considerando l'equazione della peridynamica per le rotazioni attorno l'asse x :

$$\begin{aligned} \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_{x_k} = c_b h \int_H \left[\left(\frac{\phi_{x_j} - \phi_{x_k}}{\xi_{jk}} \cos^2(\theta) \right) + \left(\frac{\phi_{y_j} - \phi_{y_k}}{\xi_{jk}} \cos(\theta) \sin(\theta) \right) \right] d\xi + \\ + \frac{1}{2} c_s h \int_H \xi_{jk} \left[\left(\frac{w_j - w_k}{\xi_{jk}} \cos(\theta) \right) - \left(\frac{\phi_{x_j} + \phi_{x_k}}{2} \cos^2(\theta) \right) - \left(\frac{\phi_{y_j} - \phi_{y_k}}{2} \cos(\theta) \sin(\theta) \right) \right] d\xi \end{aligned} \quad (5.28)$$

Considerando l'espansione in serie di Taylor 5.26 dove al posto di w_k si sostituisce ϕ_{x_k} ed eseguendo le opportune semplificazioni riportata nelle equazioni 5.27 si ottiene l'equazione 5.31 a pagina 113.

Considerando, infine, l'equazione della peridynamica per le rotazioni attorno l'asse y :

$$\begin{aligned} \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_{y_k} = c_b h \int_H \left[\left(\frac{\phi_{x_j} - \phi_{x_k}}{\xi_{jk}} \cos(\theta) \sin(\theta) \right) + \left(\frac{\phi_{y_j} - \phi_{y_k}}{\xi_{jk}} \sin^2(\theta) \right) \right] d\xi + \\ + \frac{1}{2} c_s h \int_H \xi_{jk} \left[\left(\frac{w_j - w_k}{\xi_{jk}} \sin(\theta) \right) - \left(\frac{\phi_{x_j} + \phi_{x_k}}{2} \cos(\theta) \sin(\theta) \right) - \left(\frac{\phi_{y_j} - \phi_{y_k}}{2} \sin^2(\theta) \right) \right] d\xi \end{aligned} \quad (5.29)$$

Considerando l'espansione in serie di Taylor 5.26 dove al posto di w_k si sostituisce ϕ_{y_k} ed eseguendo le opportune semplificazioni riferite alle equazioni 5.27 si ottiene l'equazione 5.32 a pagina 113.

$$\rho h \ddot{w}_k = \frac{c_s}{h} \left[\frac{\pi \delta^3}{6} \left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} \right) + \frac{\pi}{160} \delta^5 \left(\frac{\partial^4 w_k}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_k}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_k}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w_k}{\partial y^4} - 2 \frac{\partial^3 \phi_{xk}}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 \phi_{xk}}{\partial x^2 \partial y} + 2 \frac{\partial^3 \phi_{yk}}{\partial x \partial y^2} + 2 \frac{\partial^3 \phi_{yk}}{\partial x^3} \right) \right] + \hat{b} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_{xk} &= \frac{c_b}{h} \left[\frac{\pi}{8} \delta^3 \frac{\partial^2 \phi_{xk}}{\partial x^2} + \frac{\pi}{24} \delta^3 \frac{\partial^2 \phi_{xk}}{\partial y^2} + \frac{\pi}{192} \delta^5 \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x^4} + \frac{\pi}{160} \delta^5 \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\pi}{960} \delta^5 \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial y^4} + \frac{\pi}{12} \delta^3 \frac{\partial^2 \phi_{xk}}{\partial x \partial y} + \frac{\pi}{240} \delta^5 \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\pi}{240} \delta^5 \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x \partial y^3} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{c_s}{h} \left[\frac{\pi}{3} \delta^3 \frac{\partial w_k}{\partial x} + \frac{\pi}{40} \delta^5 \frac{\partial^3 w_k}{\partial x^3} + \frac{\pi}{40} \delta^5 \frac{\partial^3 w_k}{\partial x \partial y^2} + \frac{\pi}{3} \delta^3 \phi_{xk} - \frac{3\pi}{80} \delta^5 \frac{\partial^2 \phi_{xk}}{\partial x^2} - \frac{5\pi}{2688} \delta^7 \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x^4} - \frac{\pi}{448} \delta^7 \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\pi}{2688} \delta^7 \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial y^4} - \frac{\pi}{40} \delta^5 \frac{\partial^2 \phi_{yk}}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{672} \delta^7 \frac{\partial^4 \phi_{yk}}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\pi}{672} \delta^7 \frac{\partial^4 \phi_{yk}}{\partial x \partial y^3} \right] + \tilde{b}_x \quad (5.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_{xk} &= \frac{c_b}{h} \left[\frac{\pi}{8} \delta^3 \frac{\partial^2 \phi_{yk}}{\partial x^2} + \frac{\pi}{24} \delta^3 \frac{\partial^2 \phi_{xk}}{\partial y^2} + \frac{\pi}{192} \delta^5 \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x^4} + \frac{\pi}{160} \delta^5 \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\pi}{960} \delta^5 \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial y^4} + \frac{\pi}{12} \delta^3 \frac{\partial^2 \phi_{xk}}{\partial x \partial y} + \frac{\pi}{240} \delta^5 \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\pi}{240} \delta^5 \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x \partial y^3} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{c_s}{h} \left[\frac{\pi}{3} \delta^3 \frac{\partial w_k}{\partial x} + \frac{\pi}{40} \delta^5 \frac{\partial^3 w_k}{\partial x^3} + \frac{\pi}{40} \delta^5 \frac{\partial^3 w_k}{\partial x \partial y^2} + \frac{\pi}{3} \delta^3 \phi_{xk} - \frac{3\pi}{80} \delta^5 \frac{\partial^2 \phi_{xk}}{\partial x^2} - \frac{5\pi}{2688} \delta^7 \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x^4} - \frac{\pi}{448} \delta^7 \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\pi}{2688} \delta^7 \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial y^4} - \frac{\pi}{40} \delta^5 \frac{\partial^2 \phi_{yk}}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{672} \delta^7 \frac{\partial^4 \phi_{yk}}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\pi}{672} \delta^7 \frac{\partial^4 \phi_{yk}}{\partial x \partial y^3} \right] + \tilde{b}_y \quad (5.32) \end{aligned}$$

Assumendo che i termini con derivate di ordine tre o maggiore siano trascurabili, le equazioni 5.30, 5.31 e 5.32 diventano:

$$\rho h \ddot{w} = \frac{\pi}{2} c_s h \frac{\delta^3}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \hat{b} \quad (5.33)$$

$$\rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_x = \frac{\pi}{16} h \delta^3 \left(c_b \frac{2}{3} - c_s \frac{\delta^2}{10} \right) \left[3 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right] - \frac{\pi}{2} c_s h \frac{\delta^3}{3} \left(\phi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \tilde{b}_x \quad (5.34)$$

$$\rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_y = \frac{\pi}{16} h \delta^3 \left(c_b \frac{2}{3} - c_s \frac{\delta^2}{10} \right) \left[3 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right] - \frac{\pi}{2} c_s h \frac{\delta^3}{3} \left(\phi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \tilde{b}_y \quad (5.35)$$

Dall'articolo di Diyaroglu et al. [20] per la teoria classica di Mindlin si hanno le seguenti equazioni del moto:

$$\rho h \ddot{w} = h k^2 G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \hat{b} \quad (5.36)$$

$$\rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_x = \left[D \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{D}{2} (1 - \nu) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{D}{2} (1 + \nu) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right] - k^2 h G \left(\phi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \tilde{b}_x \quad (5.37)$$

$$\rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_y = \left[D \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{D}{2} (1 - \nu) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{D}{2} (1 + \nu) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right] - k^2 h G \left(\phi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \tilde{b}_y \quad (5.38)$$

dove $k^2 = \frac{\pi^2}{12}$ è un coefficiente correttivo introdotto in quanto le tensioni di taglio non sono costanti lungo lo spessore della piastra.

I parametri D e G rappresentano la rigidità flessionale e il modulo di taglio, rispettivamente, così definiti:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (5.39)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (5.40)$$

Considerando $\nu = \frac{1}{3}$ si ottiene:

$$\rho h \ddot{w} = \frac{3}{8} E h k^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \hat{b} \quad (5.41)$$

$$\rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_x = \frac{3}{32} E h^3 \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - \frac{3}{8} E h k^2 \left(\phi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \tilde{b}_x \quad (5.42)$$

$$\rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_y = \frac{3}{32} E h^3 \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) - \frac{3}{8} E h k^2 \left(\phi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \tilde{b}_y \quad (5.43)$$

Uguagliando le equazioni della teoria di Mindlin nella formulazione peridynamica 5.33, 5.34 e 5.35, con quelle della meccanica classica 5.41, 5.42 e 5.43, si ricavano i parametri c_s e c_b :

$$c_s = \frac{9E}{4\pi\delta^3} k^2 \quad (5.44)$$

$$c_b = \frac{E}{\pi\delta} \left(\frac{3h^2}{4\delta^2} + \frac{27}{80} k^2 \right) \quad (5.45)$$

Quindi inserendo queste due relazioni nelle equazioni peridinamiche del moto 5.33, 5.34 e 5.34, si ottengono le equazioni della teoria classica 5.41, 5.42 e 5.43, eliminando la dipendenza dall'orizzonte δ .

Considerando più termini nell'espansione in serie di Taylor, come risulta nello svolgimento delle equazioni 5.30, 5.31 e 5.32, inserendo le espressioni 5.44 e 5.45, rispettivamente del micromodulo per la deformazione a taglio c_s e del micromodulo per la deformazione a flessione c_b e prendendo $\nu = \frac{1}{3}$, si ottiene:

$$\rho h \ddot{w}_k = \frac{3}{8} E h k^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \frac{9}{640} E h k^2 \delta^2 \left(\frac{\partial^4 w_k}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_k}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_k}{\partial y^4} - 2 \frac{\partial^3 \phi_{xk}}{\partial x^3} - 2 \frac{\partial^3 \phi_{xk}}{\partial x \partial y^2} - 2 \frac{\partial^3 \phi_{yk}}{\partial x^2 \partial y} - 2 \frac{\partial^3 \phi_{yk}}{\partial y^3} \right) + \hat{b} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_{xk} &= \frac{3}{32} E h^3 \left(\frac{\partial^2 \phi_{xk}}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \phi_{xk}}{\partial y^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \phi_{yk}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{3}{8} E h k^2 \left(\phi_{xk} - \frac{\partial w_k}{\partial x} \right) + \left(\frac{3}{128} E h^2 \delta^2 + \frac{27}{2560} E k^2 \delta^4 \right) \left[\frac{1}{6} \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x^4} + \frac{1}{5} \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{30} \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial y^4} + \frac{2}{15} \frac{\partial^4 \phi_{yk}}{\partial x^3 \partial y} + \frac{2}{15} \frac{\partial^4 \phi_{yk}}{\partial x \partial y^3} \left. \right] + \frac{9}{320} E h k^2 \delta^2 \left(\frac{\partial^3 w_k}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_k}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{9}{1792} E h k^2 \delta^4 \left(\frac{5}{12} \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x^4} + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial y^4} + \frac{1}{3} \frac{\partial^4 \phi_{yk}}{\partial x^3 \partial y} + \frac{1}{3} \frac{\partial^4 \phi_{yk}}{\partial x \partial y^3} \left. \right) + \tilde{b}_{xk} \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\phi}_{yk} &= \frac{3}{32} E h^3 \left(\frac{\partial^2 \phi_{yk}}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \phi_{yk}}{\partial x^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \phi_{xk}}{\partial x \partial y} \right) - \frac{3}{8} E h k^2 \left(\phi_{yk} - \frac{\partial w_k}{\partial y} \right) + \left(\frac{3}{128} E h^2 \delta^2 + \frac{27}{2560} E k^2 \delta^4 \right) \left[\frac{1}{6} \frac{\partial^4 \phi_{yk}}{\partial y^4} + \frac{1}{5} \frac{\partial^4 \phi_{yk}}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{30} \frac{\partial^4 \phi_{yk}}{\partial x^4} + \frac{2}{15} \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x \partial y^3} + \frac{2}{15} \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x^3 \partial y} \left. \right] + \frac{9}{320} E h k^2 \delta^2 \left(\frac{\partial^3 w_k}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w_k}{\partial x^2 \partial y} \right) - \frac{9}{1792} E h k^2 \delta^4 \left(\frac{5}{12} \frac{\partial^4 \phi_{yk}}{\partial y^4} + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 \phi_{yk}}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \phi_{yk}}{\partial x^4} + \frac{1}{3} \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x \partial y^3} + \frac{1}{3} \frac{\partial^4 \phi_{xk}}{\partial x^3 \partial y} \left. \right) + \tilde{b}_{yk} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Dalle relazioni 5.46, 5.47 e 5.48, al limite di $\delta \rightarrow 0$, si ottengono le equazioni della teoria classica 5.41, 5.42 e 5.43.

Si può notare come l'equazione 5.46 si differenzia da 5.41 per il termine:

$$\frac{9}{640}Ehk^2\delta^2\left(\frac{\partial^4 w_k}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_k}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w_k}{\partial y^4} - 2\frac{\partial^3 \phi_{x_k}}{\partial x^3} - 2\frac{\partial^3 \phi_{x_k}}{\partial x\partial y^2} - 2\frac{\partial^3 \phi_{y_k}}{\partial x^2\partial y} - 2\frac{\partial^3 \phi_{y_k}}{\partial y^3}\right) \quad (5.49)$$

dove questo termine dipende da δ^2 , dalle derivate di ordine 4 degli spostamenti fuori dal piano z e dalle derivate di ordine 3 delle rotazioni ϕ_x e ϕ_y .

Per quanto riguarda l'equazione 5.47 si differenzia da 5.42 per i termini:

$$\begin{aligned} & \delta^2 \left\{ \left(\frac{3}{128}Eh^2 + \frac{27}{2560}Ek^2\delta^2 \right) \left[\frac{1}{6}\frac{\partial^4 \phi_{x_k}}{\partial x^4} + \frac{1}{5}\frac{\partial^4 \phi_{x_k}}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{1}{30}\frac{\partial^4 \phi_{x_k}}{\partial y^4} + \frac{2}{15}\frac{\partial^4 \phi_{y_k}}{\partial x^3\partial y} + \frac{2}{15}\frac{\partial^4 \phi_{y_k}}{\partial x\partial y^3} \right] + \right. \\ & + \frac{9}{320}Ehk^2 \left(\frac{\partial^3 w_k}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_k}{\partial x\partial y^2} \right) - \frac{9}{1792}Ehk^2\delta^2 \left(\frac{5}{12}\frac{\partial^4 \phi_{x_k}}{\partial x^4} + \frac{1}{2}\frac{\partial^4 \phi_{x_k}}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{1}{12}\frac{\partial^4 \phi_{x_k}}{\partial y^4} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{3}\frac{\partial^4 \phi_{y_k}}{\partial x^3\partial y} + \frac{1}{3}\frac{\partial^4 \phi_{y_k}}{\partial x\partial y^3} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.50)$$

dove per il primo dipende da δ^2 e δ^4 e dalle derivate di ordine 4 delle rotazioni ϕ_x e ϕ_y . Il secondo termine dipende da δ^2 e dalle derivate di ordine 3 degli spostamenti fuori dal piano z . Infine il terzo termine dipende da δ^4 e dalle derivate di ordine 4 delle rotazioni ϕ_x e ϕ_y .

L'equazione 5.48 si differenzia da 5.43 per i termini:

$$\begin{aligned} & \delta^2 \left\{ \left(\frac{3}{128}Eh^2 + \frac{27}{2560}Ek^2\delta^2 \right) \left[\frac{1}{6}\frac{\partial^4 \phi_{y_k}}{\partial y^4} + \frac{1}{5}\frac{\partial^4 \phi_{y_k}}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{1}{30}\frac{\partial^4 \phi_{y_k}}{\partial x^4} + \frac{2}{15}\frac{\partial^4 \phi_{x_k}}{\partial x\partial y^3} + \frac{2}{15}\frac{\partial^4 \phi_{x_k}}{\partial x^3\partial y} \right] + \right. \\ & + \frac{9}{320}Ehk^2 \left(\frac{\partial^3 w_k}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w_k}{\partial x^2\partial y} \right) - \frac{9}{1792}Ehk^2\delta^2 \left(\frac{5}{12}\frac{\partial^4 \phi_{y_k}}{\partial y^4} + \frac{1}{2}\frac{\partial^4 \phi_{y_k}}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{1}{12}\frac{\partial^4 \phi_{y_k}}{\partial x^4} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{3}\frac{\partial^4 \phi_{x_k}}{\partial x\partial y^3} + \frac{1}{3}\frac{\partial^4 \phi_{x_k}}{\partial x^3\partial y} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.51)$$

dove per il primo dipende da δ^2 e δ^4 e dalle derivate di ordine 4 delle rotazioni ϕ_x e ϕ_y . Il secondo termine dipende da δ^2 e dalle derivate di ordine 3 degli spostamenti fuori dal piano z . Infine il terzo termine dipende da δ^4 e dalle derivate di ordine 4 delle rotazioni ϕ_x e ϕ_y .

5.2 Analisi numerica

In riferimento all'articolo di Ongaro et al. [13], in questa sezione viene verificato, tramite analisi numerica, l'equilibrio delle forze di reazione per i 5 gradi di libertà della piastra, x , y , z , ϕ_x e ϕ_y , quando viene imposto un campo di spostamento lineare o quadratico all'interfaccia tra zona peridinamica e FEM (vedi figura 5.3 e 5.6). Si verificherà inoltre la dipendenza dell'errore dal valore dell'orizzonte δ .

Le seguenti analisi sono realizzate mediante codici Matlab.

5.2.1 Modello

Come nell'articolo di Ongaro et al. [13], la piastra in esame presenta le caratteristiche geometriche e meccaniche riportate rispettivamente nelle tabelle 5.1 e 5.2.

Caratteristiche geometriche	Valore [m]
L	24
W	24
h	1

Tabella 5.1: Caratteristiche geometriche della piastra. L rappresenta la dimensione parallela all'asse x , W la dimensione parallela a y e h lo spessore.

Proprietà meccaniche	Valore
E	1 Pa
ρ	1 kg/m ³
ν	0.3333

Tabella 5.2: Caratteristiche meccaniche della piastra.

Alcune caratteristiche riguardanti la geometria e la discretizzazione del modello sono riportate al paragrafo 5. La regione peridinamica è posta al centro della piastra con coordinate $x_{min} = 7 m$, $x_{max} = 17 m$, $y_{min} = 7 m$ e $y_{max} = 17 m$.

In figura 5.1 è rappresentato il modello di piastra utilizzato nelle successive simulazioni.

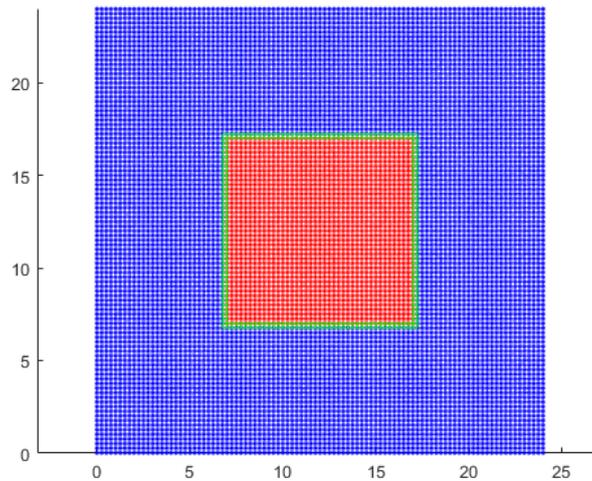


Figura 5.1: Modello di piastra con zona peridinamica centrata (rosso), elementi ibridi (verde) ed elementi FEM (blu).

Successivamente, si esegue la verifica dell'equilibrio delle forze di reazione per i 5 gradi di libertà della piastra.

5.2.2 Verifica dell'equilibrio per i gradi di libertà x e y

Spostamento imposto con andamento bilineare

Si è imposto un campo spostamento come quello riportato in tabella 5.3 e rappresentato in figura 5.2.

Tipo spostamento	Equazione campo spostamento	Dominio
Costante	$u_1(x, y) = 0$	$(x, y) \in B$
Bilineare	$u_2(x, y) = d \frac{x - X_1}{X_B - X_1}$	$(x, y) \in B_1$
	$u_2(x, y) = d \left(1 - \frac{x - X_B}{X_2 - X_B} \right)$	$(x, y) \in B_2$
Costante	$u_2(x, y) = 0$	$(x, y) \in B / (B_1 \cup B_2)$

Tabella 5.3: Campo spostamento bilineare.

La porzione di dominio, nel caso di applicazione di uno spostamento imposto con andamento bilineare, è identificata in una zona rettangolare:

$$\begin{aligned}
 B_1 &:= \{(x, y) \in B : x \in (X_1, X_2) \wedge y \in (Y_1, Y_B)\} \\
 B_2 &:= \{(x, y) \in B : x \in (X_1, X_2) \wedge y \in (Y_B, Y_2)\}
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

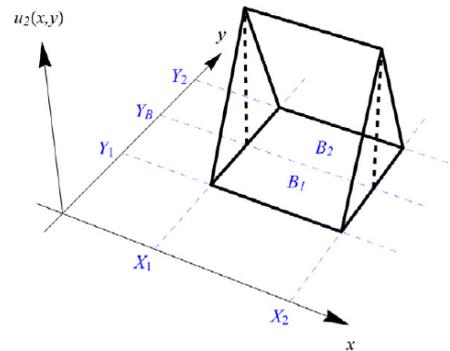


Figura 5.2: Rappresentazione dei parametri caratteristici del campo di spostamento descritto in tabella 5.3 (immagine tratta da [13]).

Nelle seguenti figure 5.3 e 5.4 si riporta il campo spostamento imposto sulla piastra, all'interfaccia tra zona peridinamica e FEM.

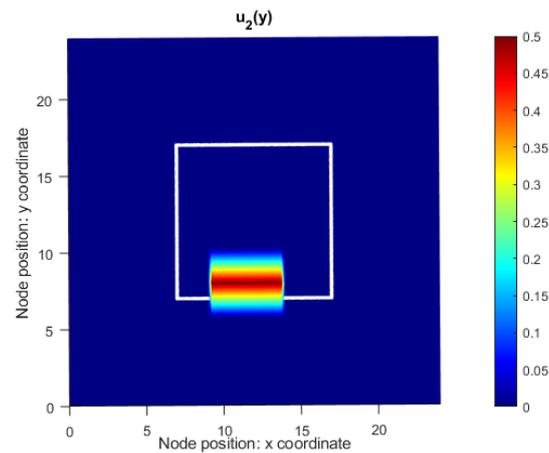


Figura 5.3: Campo di spostamento imposto di tipo bilineare all'interfaccia tra zona peridinamica e FEM.

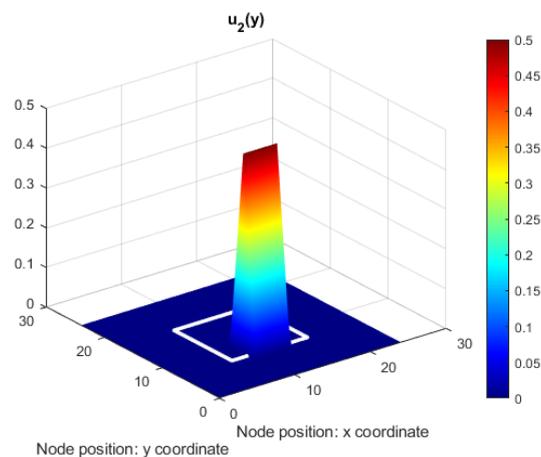


Figura 5.4: Rappresentazione 3D del campo di spostamento bilineare imposto.

Si è imposto uno spostamento nullo, lungo la direzione x , per tutti i nodi peridinamici e FEM. Infine per tutti i nodi, al di fuori della regione dove è presente lo spostamento bilineare, si è imposto uno spostamento nullo lungo la direzione y .

Si valuta l'errore relativo delle forze di reazione per la componenti x e y . In caso di equilibrio la somma del vettore forza risulta nulla per ogni componente, con conseguente errore relativo nullo.

Si è valutato l'errore relativo come:

$$e_{r_x} := \frac{\left| \sum_{i=1}^N F_{1i} \right|}{\sum_{i=1}^N |F_{1i}|} \quad (5.53)$$

$$e_{r_y} := \frac{\left| \sum_{i=1}^N F_{2i} \right|}{\sum_{i=1}^N |F_{2i}|} \quad (5.54)$$

dove N è il numero totale di nodi e F_{1i} e F_{2i} rappresentano le forze di reazione lungo le direzioni x e y , rispettivamente, generate dal nodo i imposto il campo di spostamento.

Inoltre, si specifica che, per le simulazioni nel piano, come riportato nell'articolo di Ongaro et al. [13], si introduce un fattore correttivo γ nella definizione del micromodulo:

$$c = \frac{9E}{\pi\delta^3}\gamma \quad (5.55)$$

dove $\gamma = 0.9784710341$ nel caso $m = 3$.

In tabella 5.4 sono riportati i risultati ottenuti per quanto riguarda l'errore relativo allo sbilanciamento delle forze lungo la direzioni x e y , ottenuti dalle relazioni 5.53 e 5.54 rispettivamente.

e_{r_x}	e_{r_y}
1.1066×10^{-17}	1.6122×10^{-16}

Tabella 5.4: Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni x e y .

Spostamento imposto con andamento quadratico

In questo caso si verifica l'equilibrio imponendo un campo spostamenti come quello riportato in tabella 5.5, dove $q = 15$.

Tipo spostamento	Equazione campo spostamento	Dominio
Costante	$u_2(x, y) = 0$	$(x, y) \in B$
Quadratico	$u_2(x, y) = \frac{-(x-X_Q)^2 - (y-Y_Q)^2 + R^2}{q^2}$	$(x, y) \in Q$
Costante	$u_1(x, y) = 0$	$(x, y) \in B/Q$

Tabella 5.5: Campo spostamento quadratico.

La porzione di dominio, nella quale si applica uno spostamento imposto con andamento quadratico, si identifica come una zona di forma circolare:

$$Q := \{(x, y) \in B : (x - X_Q)^2 + (y - Y_Q)^2 \leq R^2\} \quad (5.56)$$

dove X_Q e Y_Q sono le coordinate x e y, rispettivamente del centro del dominio Q e il raggio vale R .

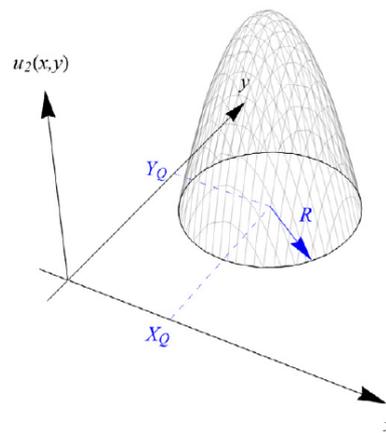


Figura 5.5: Rappresentazione dei parametri caratteristici del campo di spostamento descritto in tabella 5.5 (immagine tratta da [13]).

Nelle seguenti figure 5.6 e 5.7 si riporta il campo spostamento imposto sulla piastra, all'interfaccia tra zona peridinamica e FEM.

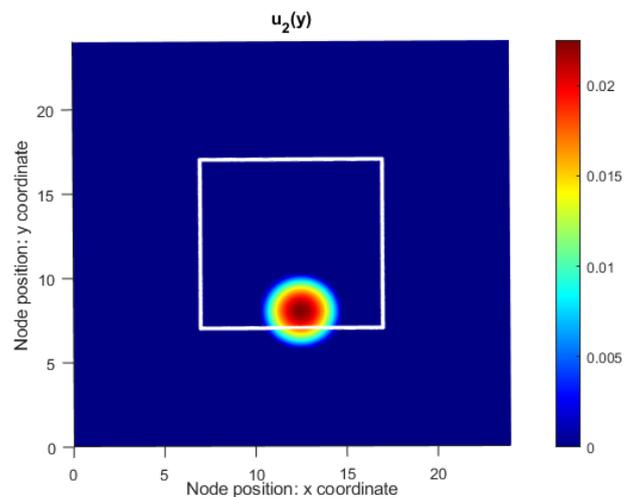


Figura 5.6: Campo di spostamento imposto di tipo quadratico all'interfaccia tra zona peridinamica e FEM.

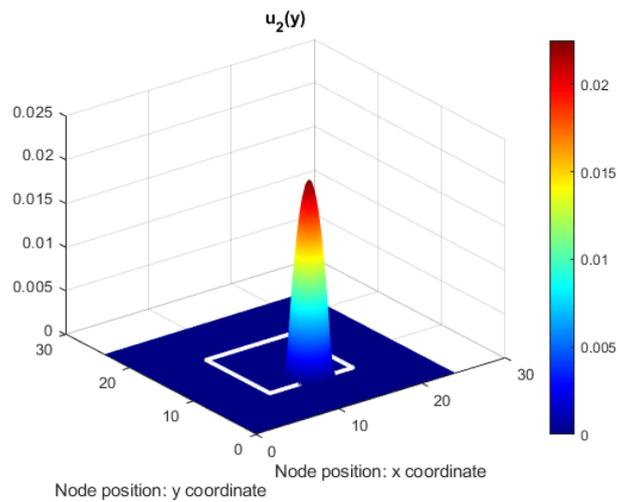


Figura 5.7: Rappresentazione 3D del campo di spostamento quadratico imposto.

Anche in questo caso nella definizione del micromodulo 5.55, si introduce il coefficiente correttivo $\gamma = 0.9784710341$.

La tabella 5.6 riporta i risultati ottenuti per quanto riguarda l'errore relativo allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni x e y , ottenuti dalle relazioni 5.53 e 5.54 rispettivamente.

e_{r_x}	e_{r_y}
2.8303×10^{-16}	4.9986×10^{-4}

Tabella 5.6: Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni x e y .

Si è effettuata la verifica per il grado di libertà y e, analogamente, può essere effettuata per il grado di libertà x , ottenendo gli stessi risultati.

I risultati ottenuti sono paragonabili a quelli dell'articolo [13].

Come si può notare dalla tabella 5.6, applicando uno spostamento imposto con andamento quadratico, non si ottiene un corretto bilanciamento delle forze lungo la direzione y .

Si è mantenuto $m = 3$ come compromesso tra il costo computazionale e accuratezza della soluzione numerica. I risultati relativi al bilanciamento delle forze sono rappresentati nella tabella 5.7, dove risulta mancante la verifica dell'equilibrio lungo la direzione y .

Per verificare la dipendenza dal valore dell'orizzonte δ , sempre in tabella 5.7, viene riportata la somma delle forze di reazione lungo la direzione y , $\sum_{i=1}^N F_{2i}$, scalate il valore di δ .

	e_{r_x}	e_{r_y}	$(\sum_{i=1}^N F_{2i}/\delta)$
$m = 3, \delta = 0.75$	2.8303×10^{-16}	4.9986×10^{-4}	-2.8461×10^{-4}
$m = 3, \delta = 0.375$	3.4209×10^{-16}	3.0417×10^{-4}	-2.0365×10^{-4}
$m = 3, \delta = 0.1875$	2.1951×10^{-15}	7.866×10^{-5}	-1.5981×10^{-4}

Tabella 5.7: Studio della dipendenza di δ per gli errori relativi nel bilanciamento delle forze di reazione per i gradi di libertà x e y , avendo applicato il carico di figura 5.5 sul grado di libertà y .

Si ha una dipendenza circa lineare di $\sum_{i=1}^N F_{2i}$ dal valore di δ , come mostrato in figura 5.8.

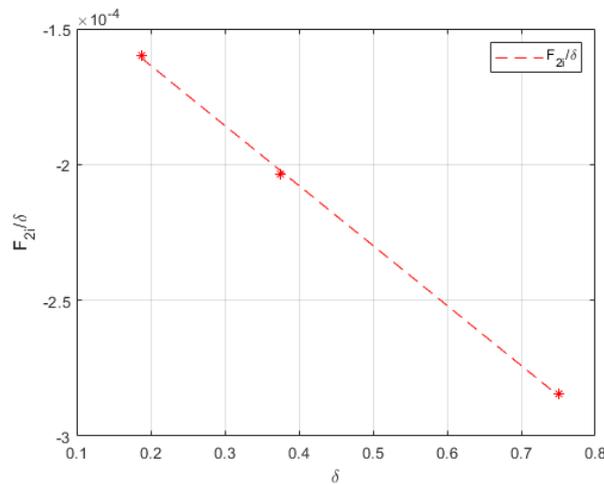


Figura 5.8: Rappresentazione della dipendenza di $\sum_{i=1}^N F_{2i}$ dal valore di δ .

In figura 5.8 si precisa che gli asterischi rappresentano la soluzione esatta dei risultati mostrati in tabella 5.7, mentre la linea tratteggiata rappresenta la curva di interpolazione.

5.2.3 Verifica dell'equilibrio per il grado di libertà z

Spostamento imposto con andamento bilineare

Utilizzando il campo spostamento riportato in tabella 5.3 e figura 5.2, si procede alla verifica dell'equilibrio delle forze per il grado di libertà z .

Gli errori relativi per verifica del bilancio delle forze generalizzate per i gradi di libertà fuori dal piano, cioè per z , ϕ_x e ϕ_y , risultano:

$$e_{r_z} := \frac{\left| \sum_{i=1}^N F_{3i} \right|}{\sum_{i=1}^N |F_{3i}|} \quad (5.57)$$

$$e_{r_{\phi_x}} := \frac{\left| \sum_{i=1}^N F_{4i} \right|}{\sum_{i=1}^N |F_{4i}|} \quad (5.58)$$

$$e_{r_{\phi_y}} := \frac{\left| \sum_{i=1}^N F_{5i} \right|}{\sum_{i=1}^N |F_{5i}|} \quad (5.59)$$

In tabella 5.8 sono riportati i risultati ottenuti per quanto riguarda l'errore relativo allo sbilanciamento delle forze lungo la direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , ottenuti dalle relazioni 5.57, 5.58 e 5.59 rispettivamente.

e_{r_z}	$e_{r_{\phi_x}}$	$e_{r_{\phi_y}}$
9.453×10^{-4}	3.8723×10^{-3}	2.7137×10^{-17}

Tabella 5.8: Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo campo spostamento di tipo bilineare al grado di libertà z .

In tabella 5.9 si riporta un'analisi di δ -convergenza, valutando anche la sommatoria delle forze di reazione per i gradi di libertà z e ϕ_x , $\sum_{i=1}^N F_{3i}$ e $\sum_{i=1}^N F_{4i}$, scalati il valore di δ .

	e_{r_z}	$e_{r_{\phi_x}}$	$e_{r_{\phi_y}}$	$(\sum_{i=1}^N F_{3i}/\delta)$	$(\sum_{i=1}^N F_{4i}/\delta)$
$m = 3, \delta = 0.75$	9.453×10^{-4}	3.8723×10^{-3}	2.7137×10^{-17}	0.0060424	0.0067978
$m = 3, \delta = 0.375$	5.2268×10^{-4}	3.849×10^{-3}	1.6637×10^{-17}	0.011767	0.013973
$m = 3, \delta = 0.1875$	2.7685×10^{-4}	3.8383×10^{-3}	8.4288×10^{-19}	0.023216	0.028294

Tabella 5.9: Studio della dipendenza di δ per errori relativi nel bilanciamento delle forze di reazione per i gradi di libertà z , ϕ_x e ϕ_y , avendo applicato il carico di figura 5.2 sul grado di libertà z .

Si ha una dipendenza quadratica di $\sum_{i=1}^N F_{3i}$ e $\sum_{i=1}^N F_{4i}$ dal valore di δ , come mostrato in figura 5.9.

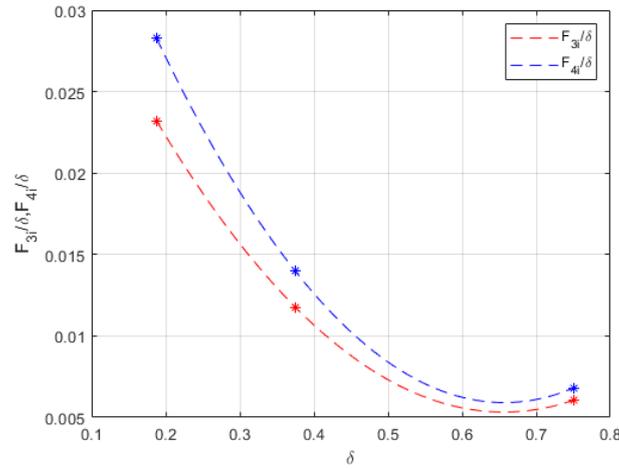


Figura 5.9: Rappresentazione della dipendenza di $\sum_{i=1}^N F_{3i}$ e $\sum_{i=1}^N F_{4i}$ dal valore di δ .

Da tabella 5.8 e 5.9 si evidenziano come gli errori relativi delle forze non siano trascurabili. Come riportato nel caso piano, si introduce un coefficiente correttivo γ per il caso di spostamento fuori dal piano, γ_z .

Da un'analisi di convergenza numerica, imposto un coefficiente correttivo iniziale, si arriva a definire un coefficiente correttivo finale γ_z , tale per cui gli errori relativi assumono un errore relativamente piccolo.

E' sufficiente infatti definire solamente un coefficiente correttivo γ_z , inserito nella definizione del micromodulo c_s , come riportato nella relazione 5.60, in quanto nella definizione dello spostamento fuori dal piano non compare la dipendenza dal micromodulo c_b .

$$c_s = \frac{9E}{4\pi\delta^3} k^2 \gamma_z \quad (5.60)$$

dove $\gamma_z = 0.986270975552506$ nel caso $m = 3$.

Allo stesso modo, impiegando un'analisi di convergenza numerica per gli errori relativi, si è ricavato un coefficiente correttivo per $m = 4, 5, 6$.

$m = 4$	$\gamma_z = 0.992038044090110$
$m = 5$	$\gamma_z = 1.008047838790040$
$m = 6$	$\gamma_z = 1.049939201780150$

Tabella 5.10: Coefficienti correttivi da applicare nella definizione di c_s per la riduzione degli errori relativi $e_{r_z}, e_{r_{\phi_x}}$ e $e_{r_{\phi_y}}$.

Si precisa che è stata svolta una convergenza numerica per gli errori, ma sono necessarie ulteriori analisi per la valutazione di γ_z , in modo analogo a quanto è stato eseguito nell'articolo [13].

Introducendo il fattore correttivo γ_z , in tabella 5.11 sono riportati i risultati ottenuti per quanto riguarda l'errore relativo allo sbilanciamento delle forze lungo la direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , ottenuti dalle relazioni 5.57, 5.58 e 5.59 rispettivamente.

e_{r_z}	$e_{r_{\phi_x}}$	$e_{r_{\phi_y}}$
6.5732×10^{-16}	1.1763×10^{-15}	3.5467×10^{-17}

Tabella 5.11: Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo campo spostamento di tipo bilineare al grado di libertà z , introdotto il coefficiente correttivo γ_z per il micromodulo c_s ($m = 3$, $\delta = 0.75$).

Spostamento imposto con andamento quadratico

Utilizzando il campo spostamento riportato in tabella 5.5 e figura 5.5, si procede alla verifica dell'equilibrio delle forze lungo il grado di libertà z .

In tabella 5.12 sono riportati i risultati ottenuti per quanto riguarda l'errore relativo allo sbilanciamento delle forze lungo la direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , ottenuti dalle relazioni 5.57, 5.58 e 5.59 rispettivamente.

e_{r_z}	$e_{r_{\phi_x}}$	$e_{r_{\phi_y}}$
1.0816×10^{-3}	1.1474×10^{-3}	2.9477×10^{-17}

Tabella 5.12: Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo campo spostamento di tipo quadratico al grado di libertà z ($m = 3$, $\delta = 0.75$).

In tabella 5.13 si riporta un'analisi di δ -convergenza, valutando anche la sommatoria delle forze di reazione per i gradi di libertà z e ϕ_x , $\sum_{i=1}^N F_{3i}$ e $\sum_{i=1}^N F_{4i}$, scalati il valore di δ .

	e_{r_z}	$e_{r_{\phi_x}}$	$e_{r_{\phi_y}}$	$(\sum_{i=1}^N F_{3i}/\delta)$	$(\sum_{i=1}^N F_{4i}/\delta)$
$m = 3, \delta = 0.75$	1.0816×10^{-3}	1.1474×10^{-3}	2.9477×10^{-17}	1.7787×10^{-4}	6.2609×10^{-5}
$m = 3, \delta = 0.375$	1.3074×10^{-3}	3.0609×10^{-3}	9.9724×10^{-18}	5.0519×10^{-4}	3.4075×10^{-4}
$m = 3, \delta = 0.1875$	9.5183×10^{-4}	4.4155×10^{-3}	1.8034×10^{-17}	8.0218×10^{-4}	9.8778×10^{-4}

Tabella 5.13: Studio della dipendenza di δ per errori relativi nel bilanciamento delle forze di reazione per i gradi di libertà z , ϕ_x e ϕ_y , avendo applicato il carico di figura 5.5 sul grado di libertà z .

Si riscontra una dipendenza quadratica di $\sum_{i=1}^N F_{3i}$ e $\sum_{i=1}^N F_{4i}$ dal valore di δ , come mostrato in figura 5.10.

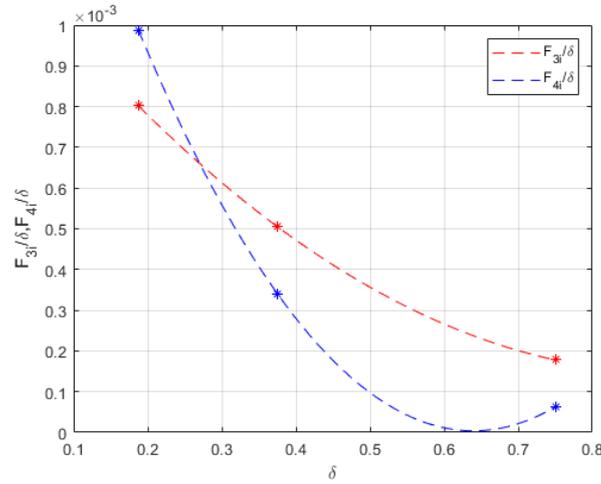


Figura 5.10: Rappresentazione della dipendenza di $\sum_{i=1}^N F_{3i}$ e $\sum_{i=1}^N F_{4i}$ dal valore di δ .

Come nel caso di spostamento imposto bilineare, introducendo il micromodulo c_s della relazione 5.60, in tabella 5.14 sono riportati i risultati ottenuti per quanto riguarda l'errore relativo allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , ottenuti dalle relazioni 5.57, 5.58 e 5.59 rispettivamente.

e_{r_z}	$e_{r_{\phi_x}}$	$e_{r_{\phi_y}}$
2.4221×10^{-4}	5.6999×10^{-3}	1.0886×10^{-16}

Tabella 5.14: Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo spostamento di tipo quadratico al grado di libertà z , introdotto il coefficiente correttivo γ_z per il micromodulo c_s ($m = 3$, $\delta = 0.75$).

Spostamento imposto con andamento biquadratico

Utilizzando il campo spostamento riportato in tabella 5.15 e figura 5.11, si esegue la verifica dell'equilibrio delle forze lungo il grado di libertà z .

Tipo spostamento	Equazione campo spostamento	Dominio
Costante	$u_2(x, y) = 0$	$(x, y) \in B$
Quadratico	$u_2(x, y) = \frac{-(x-X_Q)^4 - (y-Y_Q)^4 + R^4}{q^4}$	$(x, y) \in Q$
Costante	$u_1(x, y) = 0$	$(x, y) \in B/Q$

Tabella 5.15: Campo spostamento biquadratico.

La porzione di dominio, dove viene applicato uno spostamento imposto con andamento biquadratico, è una zona rettangolare:

$$Q := \{(x, y) \in B : X_1 < x < X_2, Y_1 < y < Y_2\} \quad (5.61)$$

dove $X_1 = 10.25$, $X_2 = 14.75$, $Y_1 = 5.75$ e $Y_2 = 10.25$.

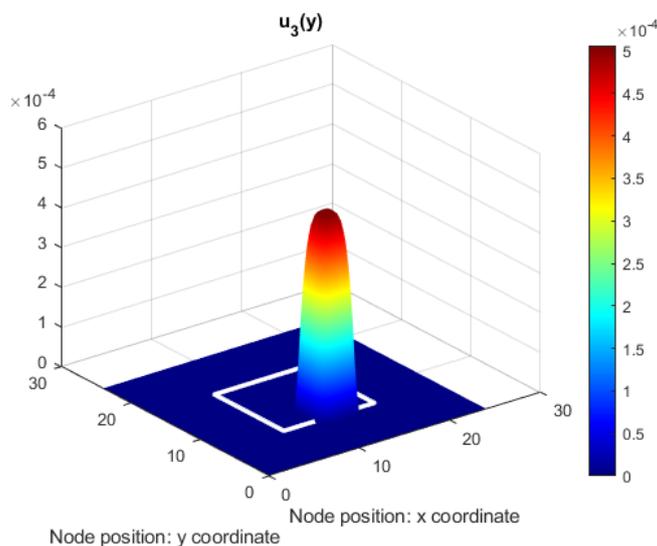


Figura 5.11: Rappresentazione 3D del campo di spostamento biquadratico imposto.

In tabella 5.16 sono riportati i risultati ottenuti per quanto riguarda l'errore relativo allo sbilanciamento delle forze lungo la direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , ottenuti dalle relazioni 5.57, 5.58 e 5.59 rispettivamente, considerato il micromodulo c_s riportato in 5.60.

e_{r_z}	$e_{r_{\phi_x}}$	$e_{r_{\phi_y}}$
2.4569×10^{-3}	0.012754	8.4833×10^{-17}

Tabella 5.16: Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo spostamento di tipo biquadratico al grado di libertà z ($m = 3$, $\delta = 0.75$).

Imponendo una funzione biquadratica, cioè di ordine quattro, nelle relazioni 5.46 5.47 5.48 fa sì che la derivata parziale di ordine quattro risulti diversa da zero. Dalla tabella 5.16 a confronto con la tabella 5.12, si può ottenere una stima, in termini di errore relativo, dell'importanza dei termini del quarto ordine rispetto alle equazioni del moto della teoria classica di Mindlin 5.415.425.43.

In tabella 5.17 si riporta un riepilogo dei risultati ottenuti per quanto riguarda gli errori relativi sullo sbilanciamento delle forze imposto un campo spostamento con andamento lineare, quadratico e biquadratico. Inoltre, in tabella 5.18 si riportano gli stessi risultati considerando lo stesso modello composto solamente da elementi FEM.

	$e_{r_{zPD}}$	$e_{r_{\phi_x PD}}$	$e_{r_{\phi_y PD}}$
Caso lineare	6.5732×10^{-16}	1.1763×10^{-15}	3.5467×10^{-17}
Caso quadratico	2.4221×10^{-4}	5.6999×10^{-3}	1.0886×10^{-16}
Caso biquadratico	2.4569×10^{-3}	0.012754	8.4833×10^{-17}

Tabella 5.17: Modello accoppiato FEM-PD: errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo campo spostamento di tipo lineare, quadratico e biquadratico al grado di libertà z ($m = 3$, $\delta = 0.75$).

	$e_{r_{zFEM}}$	$e_{r_{\phi_x FEM}}$	$e_{r_{\phi_y FEM}}$
Caso lineare	2.9349×10^{-16}	7.8163×10^{-16}	0
Caso quadratico	9.4075×10^{-17}	4.703×10^{-17}	4.0453×10^{-18}
Caso biquadratico	3.9463×10^{-17}	2.1406×10^{-16}	6.722×10^{-18}

Tabella 5.18: Modello solo FEM: errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo campo spostamento di tipo lineare, quadratico e biquadratico al grado di libertà z ($m = 3$, $\delta = 0.75$).

Nelle equazioni 5.46, 5.47 e 5.48, considerate le derivate spaziali degli spostamenti fino al primo ordine, si ha una corrispondenza tra modello accoppiato e modello solo FEM, in termini di errore relativo sulle forze. Introducendo le derivate spaziali degli spostamenti fino al secondo ordine, applicando uno spostamento imposto quadratico, si può notare come vi sia un errore relativo maggiore sullo sbilanciamento delle forze. Così come, considerando le derivate spaziali sugli spostamenti fino al quarto ordine, si nota come l'errore risulti ancora progressivamente maggiore.

5.2.4 Verifica dell'equilibrio per il grado di libertà ϕ_x

Spostamento imposto con andamento bilineare

Utilizzando il campo spostamento riportato in tabella 5.3 e figura 5.2, si esegue la verifica dell'equilibrio delle forze lungo il grado di libertà ϕ_x .

In tabella 5.19 sono riportati i risultati ottenuti per quanto riguarda l'errore relativo allo sbilanciamento delle forze lungo la direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , ottenuti dalle relazioni 5.57, 5.58 e 5.59 rispettivamente.

e_{r_z}	$e_{r_{\phi_x}}$	$e_{r_{\phi_y}}$
0.0038723	0.69274	6.9431×10^{-16}

Tabella 5.19: Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo campo spostamento di tipo bilineare al grado di libertà ϕ_x .

In tabella 5.20 si riporta un'analisi di δ -convergenza, valutando anche la sommatoria delle forze di reazione per i gradi di libertà z e ϕ_x , $\sum_{i=1}^N F_{3i}$ e $\sum_{i=1}^N F_{4i}$, scalati il valore di δ .

	e_{r_z}	$e_{r_{\phi_x}}$	$e_{r_{\phi_y}}$	$(\sum_{i=1}^N F_{3i}/\delta)$	$(\sum_{i=1}^N F_{4i}/\delta)$
$m = 3, \delta = 0.75$	0.0038723	0.69274	6.9431×10^{-16}	-0.0067978	2.2318
$m = 3, \delta = 0.375$	0.003849	0.57492	9.1405×10^{-17}	-0.013973	4.3386
$m = 3, \delta = 0.1875$	0.0038383	0.43705	4.6958×10^{-15}	-0.028294	8.5557

Tabella 5.20: Studio della dipendenza di δ per errori relativi nel bilanciamento delle forze di reazione per i gradi di libertà z , ϕ_x e ϕ_y , avendo applicato il carico di figura 5.2 sul grado di libertà ϕ_x .

Si ha una dipendenza quadratica di $\sum_{i=1}^N F_{3i}$ e $\sum_{i=1}^N F_{4i}$ dal valore di δ , come mostrato in figura 5.12.

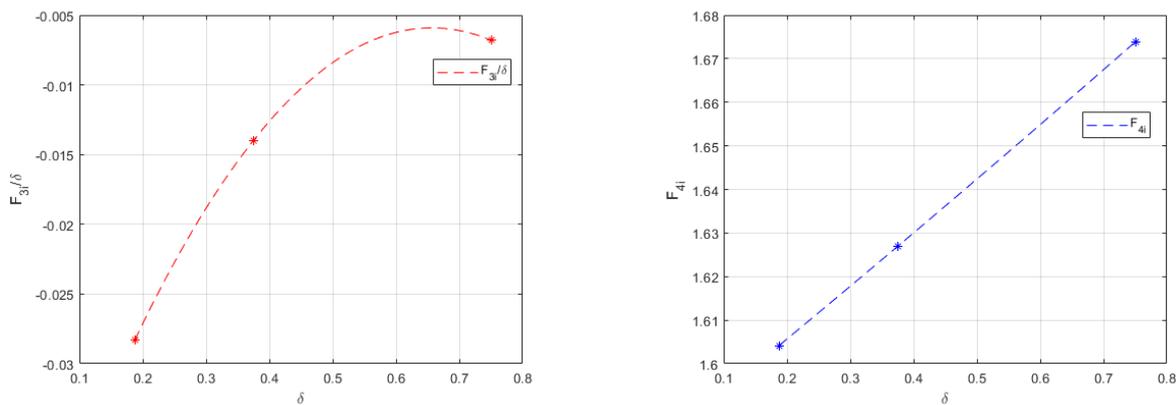


Figura 5.12: Rappresentazione della dipendenza di $\sum_{i=1}^N F_{3i}$ (sinistra) e $\sum_{i=1}^N F_{4i}$ (destra) dal valore di δ .

Spostamento imposto con andamento quadratico

Utilizzando il campo spostamento riportato in tabella 5.5 e figura 5.5, si esegue la verifica dell'equilibrio delle forze lungo il grado di libertà ϕ_x .

In tabella 5.21 sono riportati i risultati ottenuti per quanto riguarda l'errore relativo allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , ottenuti dalle relazioni 5.57, 5.58 e 5.59 rispettivamente.

e_{r_z}	$e_{r_{\phi_x}}$	$e_{r_{\phi_y}}$
1.1474×10^{-3}	0.71364	3.4491×10^{-16}

Tabella 5.21: Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo spostamento di tipo quadratico al grado di libertà ϕ_x .

In tabella 5.22 si riporta un'analisi di δ -convergenza, valutando anche la sommatoria delle forze di reazione per i gradi di libertà z e ϕ_x , $\sum_{i=1}^N F_{3i}$ e $\sum_{i=1}^N F_{4i}$, scalati il valore di δ .

	e_{r_z}	$e_{r_{\phi_x}}$	$e_{r_{\phi_y}}$	$(\sum_{i=1}^N F_{3i}/\delta)$	$(\sum_{i=1}^N F_{4i}/\delta)$
$m = 3, \delta = 0.75$	1.1474×10^{-3}	0.71364	3.4491×10^{-16}	6.2609×10^{-5}	0.074665
$m = 3, \delta = 0.375$	3.0609×10^{-3}	0.66791	2.0631×10^{-16}	-3.4075×10^{-4}	0.1492
$m = 3, \delta = 0.1875$	4.4155×10^{-3}	0.64045	2.769×10^{-15}	-9.8778×10^{-4}	0.29822

Tabella 5.22: Studio della dipendenza di δ per errori relativi nel bilanciamento delle forze di reazione per i gradi di libertà z , ϕ_x e ϕ_y , avendo applicato il carico di figura 5.5 sul grado di libertà ϕ_x .

Si ha una dipendenza quadratica di $\sum_{i=1}^N F_{3i}$ e $\sum_{i=1}^N F_{4i}$ dal valore di δ , come mostrato in figura 5.13.

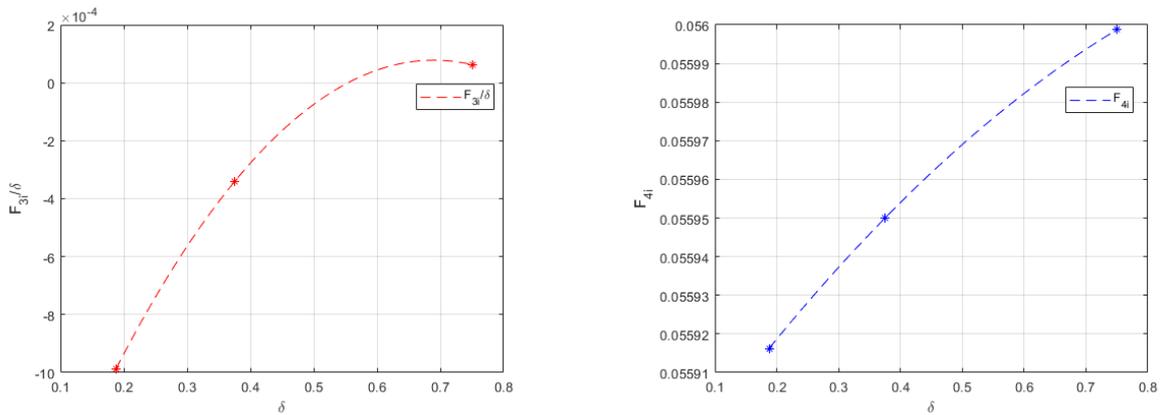


Figura 5.13: Rappresentazione della dipendenza di $\sum_{i=1}^N F_{3i}$ (sinistra) e $\sum_{i=1}^N F_{4i}$ (destra) dal valore di δ .

5.2.5 Verifica dell'equilibrio per il grado di libertà ϕ_y

Spostamento imposto con andamento bilineare

Utilizzando il campo spostamento riportato in tabella 5.3 e figura 5.2, si esegue la verifica dell'equilibrio delle forze lungo il grado di libertà ϕ_y .

In tabella 5.23 sono riportati i risultati ottenuti per quanto riguarda l'errore relativo allo sbilanciamento delle forze lungo la direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , ottenuti dalle relazioni 5.57, 5.58 e 5.59 rispettivamente.

e_{r_z}	$e_{r_{\phi_x}}$	$e_{r_{\phi_y}}$
1.012×10^{-17}	3.7385×10^{-16}	0.59602

Tabella 5.23: Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo spostamento di tipo bilineare al grado di libertà ϕ_y .

In tabella 5.24 si riporta un'analisi di δ -convergenza, valutando anche la sommatoria delle forze di reazione per il grado di libertà ϕ_y , $\sum_{i=1}^N F_{5i}$, scalato il valore di δ .

	e_{r_z}	$e_{r_{\phi_x}}$	$e_{r_{\phi_y}}$	$(\sum_{i=1}^N F_{5i}/\delta)$
$m = 3, \delta = 0.75$	1.012×10^{-17}	3.7385×10^{-16}	0.59602	2.23
$m = 3, \delta = 0.375$	1.2973×10^{-18}	8.0404×10^{-17}	0.42616	4.3328
$m = 3, \delta = 0.1875$	2.2716×10^{-18}	4.6609×10^{-15}	0.27177	8.5432

Tabella 5.24: Studio della dipendenza di δ per errori relativi nel bilanciamento delle forze di reazione per i gradi di libertà z , ϕ_x e ϕ_y , avendo applicato il carico di figura 5.2 sul grado di libertà ϕ_y .

Si ha una dipendenza quadratica di $\sum_{i=1}^N F_{5i}$ dal valore di δ , come mostrato in figura 5.14.

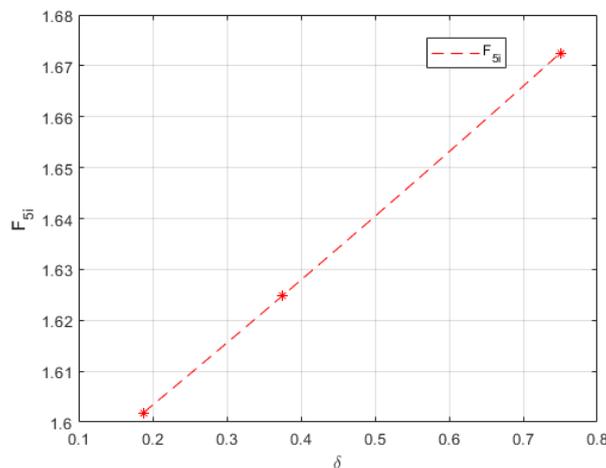


Figura 5.14: Rappresentazione della dipendenza di $\sum_{i=1}^N F_{5i}$ dal valore di δ .

Spostamento imposto con andamento quadratico

Utilizzando il campo spostamento riportato in tabella 5.5 e figura 5.5, si esegue la verifica dell'equilibrio delle forze lungo il grado di libertà ϕ_y .

In tabella 5.25 sono riportati i risultati ottenuti per quanto riguarda l'errore relativo allo sbilanciamento delle forze lungo la direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , ottenuti dalle relazioni 5.57, 5.58 e 5.59 rispettivamente.

e_{r_z}	$e_{r_{\phi_x}}$	$e_{r_{\phi_y}}$
1.0769×10^{-18}	3.3432×10^{-16}	0.72124

Tabella 5.25: Errore relativo dovuto allo sbilanciamento delle forze lungo le direzioni z , ϕ_x e ϕ_y , imposto un campo spostamento di tipo quadratico al grado di libertà ϕ_y .

In tabella 5.26 si riporta un'analisi di δ -convergenza, valutando anche la sommatoria delle forze di reazione per il grado di libertà ϕ_y , $\sum_{i=1}^N F_{5i}$, scalato il valore di δ .

	e_{r_z}	$e_{r_{\phi_x}}$	$e_{r_{\phi_y}}$	$(\sum_{i=1}^N F_{5i}/\delta)$
$m = 3, \delta = 0.75$	1.0769×10^{-18}	3.3432×10^{-16}	0.72124	0.074615
$m = 3, \delta = 0.375$	3.3248×10^{-18}	1.0128×10^{-16}	0.67048	0.14897
$m = 3, \delta = 0.1875$	1.4936×10^{-17}	2.888×10^{-15}	0.64097	0.29778

Tabella 5.26: Studio della dipendenza di δ per errori relativi nel bilanciamento delle forze di reazione per i gradi di libertà z , ϕ_x e ϕ_y , avendo applicato il carico di figura 5.5 sul grado di libertà ϕ_y .

Si ha una dipendenza quadratica di $\sum_{i=1}^N F_{5i}$ dal valore di δ , come mostrato in figura 5.15.

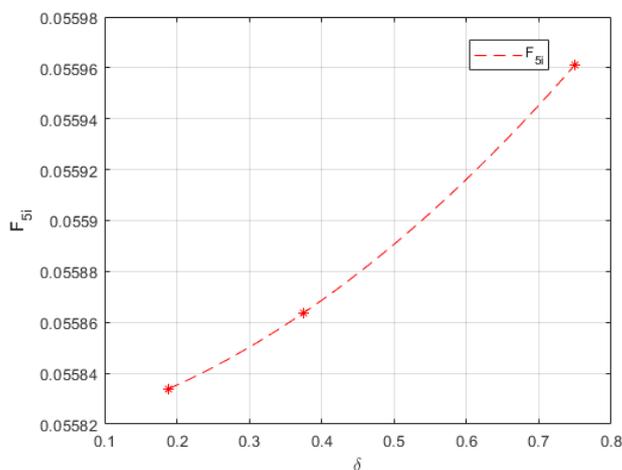


Figura 5.15: Rappresentazione della dipendenza di $\sum_{i=1}^N F_{5i}$ dal valore di δ .

Capitolo 6

Analisi di propagazione della frattura

In questo capitolo viene presentata l'analisi statica, impiegando un modello di piastra accoppiata in cui, all'interno della zona peridinamica, è stata inserita una frattura preesistente.

Il comportamento dei bond peridinamici è descritto nel paragrafo 2.2.3, con una distribuzione di materiale omogenea e isotropa sia per la porzione peridinamica che per la porzione FEM della piastra accoppiata.

L'equazione del moto dell'analisi statica è la seguente:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F} \quad (6.1)$$

Per questo capitolo si fa riferimento all'articolo di Ni et al. [39].

6.1 Sequentially linear analysis (SLA)

Il modello di soluzione statica preso in considerazione per l'analisi di propagazione della frattura è il modello *sequentially linear analysis*.

Tale metodo di soluzione prevede la seguente procedura:

1. Eseguire un'analisi lineare statica del modello imponendo un carico piccolo per trovare il bond con il valore più alto di stretch s_{max} .
2. Se il valore dello stretch massimo s_{max} assume un valore maggiore dello stretch critico s_c , l'equilibrio del modello è soddisfatto dato il carico imposto.
3. Se $s_{max} > s_c$, il carico imposto deve essere moltiplicato per il rapporto $\frac{s_c}{s_{max}}$ per granire la rottura del bond con il più alto valore di stretch.
4. Si rimuove il contributo del bond con più elevato valore di stretch nella matrice di rigidezza globale.
5. Si ripetono i passi da 1 a 3, ottenendo una rimozione sequenziale di un singolo bond a ogni iterazione, riducendo così progressivamente la rigidezza totale del modello.

6.2 Analisi di propagazione della frattura in una piastra accoppiata

6.2.1 Modo I di propagazione della frattura

Si considera un modello di piastra accoppiata con formulazione plane-stress che presenta una discontinuità, origine del danno, che si propaga nella struttura a seguito dell'applicazione del carico.

La piastra in esame presenta le caratteristiche geometriche e meccaniche riportate rispettivamente nelle tabelle 6.1 e 6.2 rispettivamente.

Caratteristiche geometriche	Valore [m]
L	0.1
W	0.061
h	1

Tabella 6.1: Caratteristiche geometriche della piastra. L rappresenta la dimensione parallela all'asse x , W la dimensione parallela a y e h lo spessore.

Proprietà meccaniche	Valore
E	72 GPa
ν	0.3333
G_0	135 J/m ²

Tabella 6.2: Caratteristiche meccaniche della piastra.

Si assume una discretizzazione della piastra con un passo griglia uguale nelle due direzioni x e y : $\Delta x = \Delta y = 0.001 m$.

Le coordinate della zona peridinamica sono:

$$\underline{x_{min} = 0.04 m \quad y_{min} = 0.003 m \quad x_{max} = 0.097 m \quad y_{max} = 0.057 m}$$

Il motivo di tale scelta trova giustificazione nel risparmio in termini di costo computazionale: data l'ipotesi di piccoli spostamenti e la prevedibile direzione di propagazione della cricca, risulta superfluo modellare una zona peridinamica maggiormente estesa.

Per la regione peridinamica si utilizza un orizzonte pari a $\delta = 0.003 m$, quindi si assume $m = 3$.

Il modello di piastra accoppiata peridinamica-FEM è rappresentato in figura 6.1.

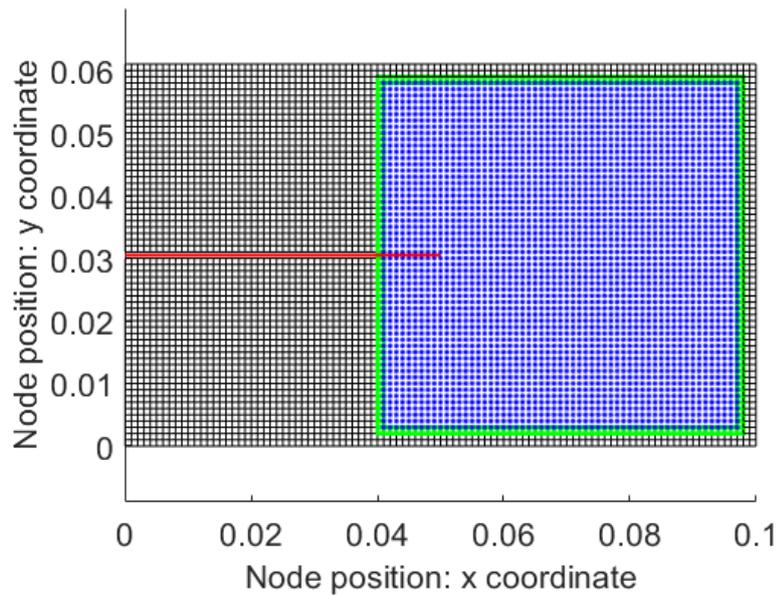


Figura 6.1: Modello di piastra accoppiata: regione FEM (grigio), regione peridinamica (blu), elementi di accoppiamento (verde).

La cricca è definita tra due righe di nodi, con coordinata $y_{cr} = W/2$, con una lunghezza pari a $L/2$.

La presenza di una rottura nella zona peridinamica è dovuta alla mancanza di bond, così da simulare una discontinuità nel materiale. I bond intersecati dalla cricca rossa in figura 6.2 vengono rimossi così da creare una discontinuità nel reticolo di bond, e quindi nel materiale stesso, come visibile nella figura seguente:

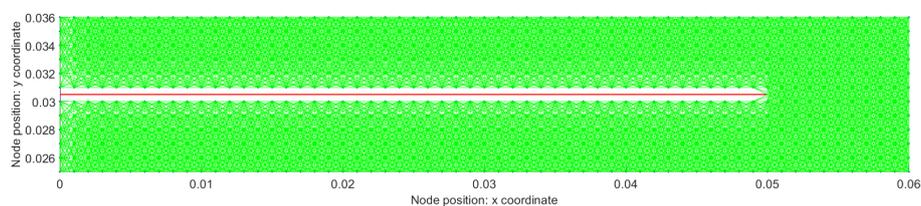


Figura 6.2: Cricca iniziale localizzata nella zona peridinamica (linea rossa) e rappresentazione dei bond (verde).

Come si può notare da figura 6.3, si applica un carico di trazione sul lato inferiore e superiore, agente in direzione normale alla frattura, cui corrisponde il cosiddetto *Modo I* di propagazione della frattura o *apertura*. Infine, nel modello si impone una condizione di incastro sul lato destro della piastra per tutti i gradi di libertà dei nodi appartenenti al lato.

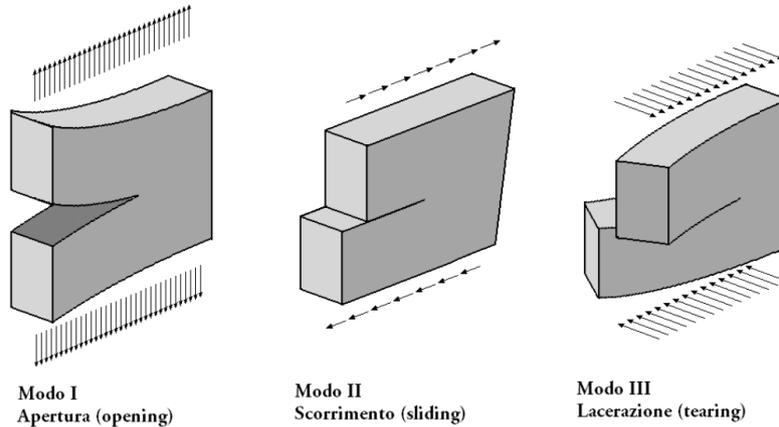


Figura 6.3: Rappresentazione dei modi di propagazione di una frattura.

Impiegando il metodo descritto nel paragrafo 6.1, ad ogni iterazione inizialmente viene applicata una forza di trazione pari a $f_{iniziale} = 1 N$, per cui non si crea nessuna rottura dei bond e la piastra nella configurazione deformata risulta in equilibrio.

In seguito viene identificato il bond con stretch massimo s_{max} . Successivamente la forza viene amplificata dal rapporto $\frac{s_0}{s_{max}}$, dove s_0 è lo stretch critico:

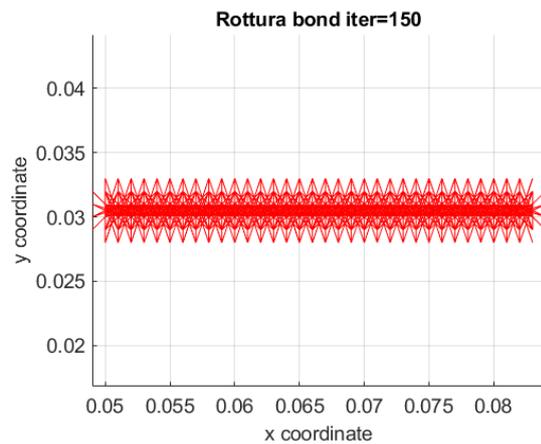
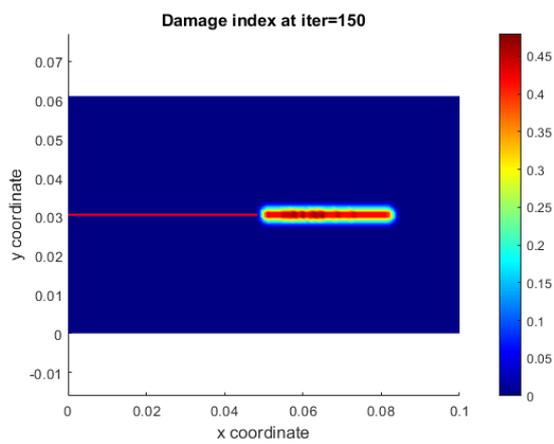
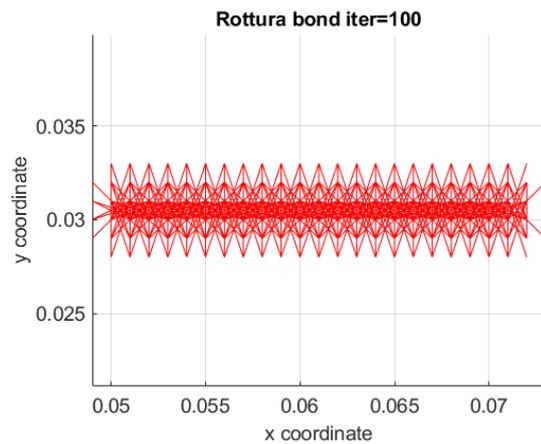
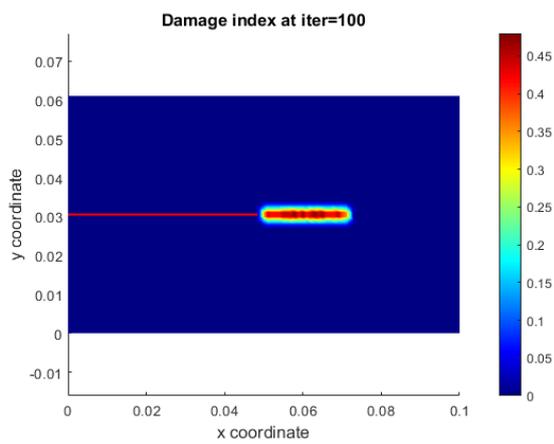
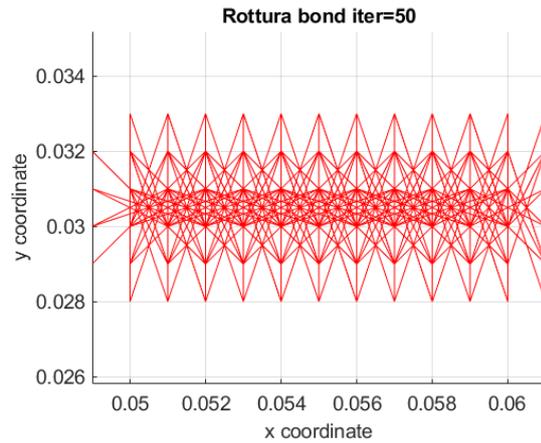
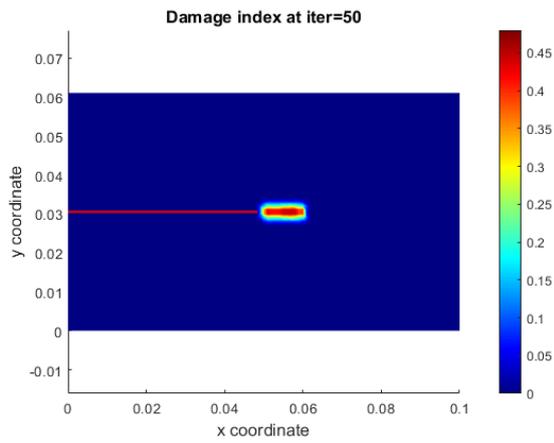
$$f_{finale} = f_{iniziale} \frac{s_0}{s_{max}} \quad (6.2)$$

dove s_0 per il caso plane-stress è definito come $s_c = \sqrt{\frac{4\pi G J_c}{9E\delta}}$.

A seguito dell'applicazione di f_{finale} si provoca la rottura del bond che inizialmente possedeva lo stretch maggiore. All'iterazione successiva, applicando lo stesso procedimento e creando ad ogni iterazione la rottura di un bond, si ottiene così la propagazione della cricca.

Tuttavia, per simulare il fenomeno di biforcazione della cricca, si ricavano i primi 4 bond con lo stretch più elevato, ottenendo ad ogni iterazione la rottura di almeno 4 bond.

Considerando quest'ultimo aspetto, in figura 6.4, si riporta l'andamento della propagazione della frattura ogni 50 iterazioni:



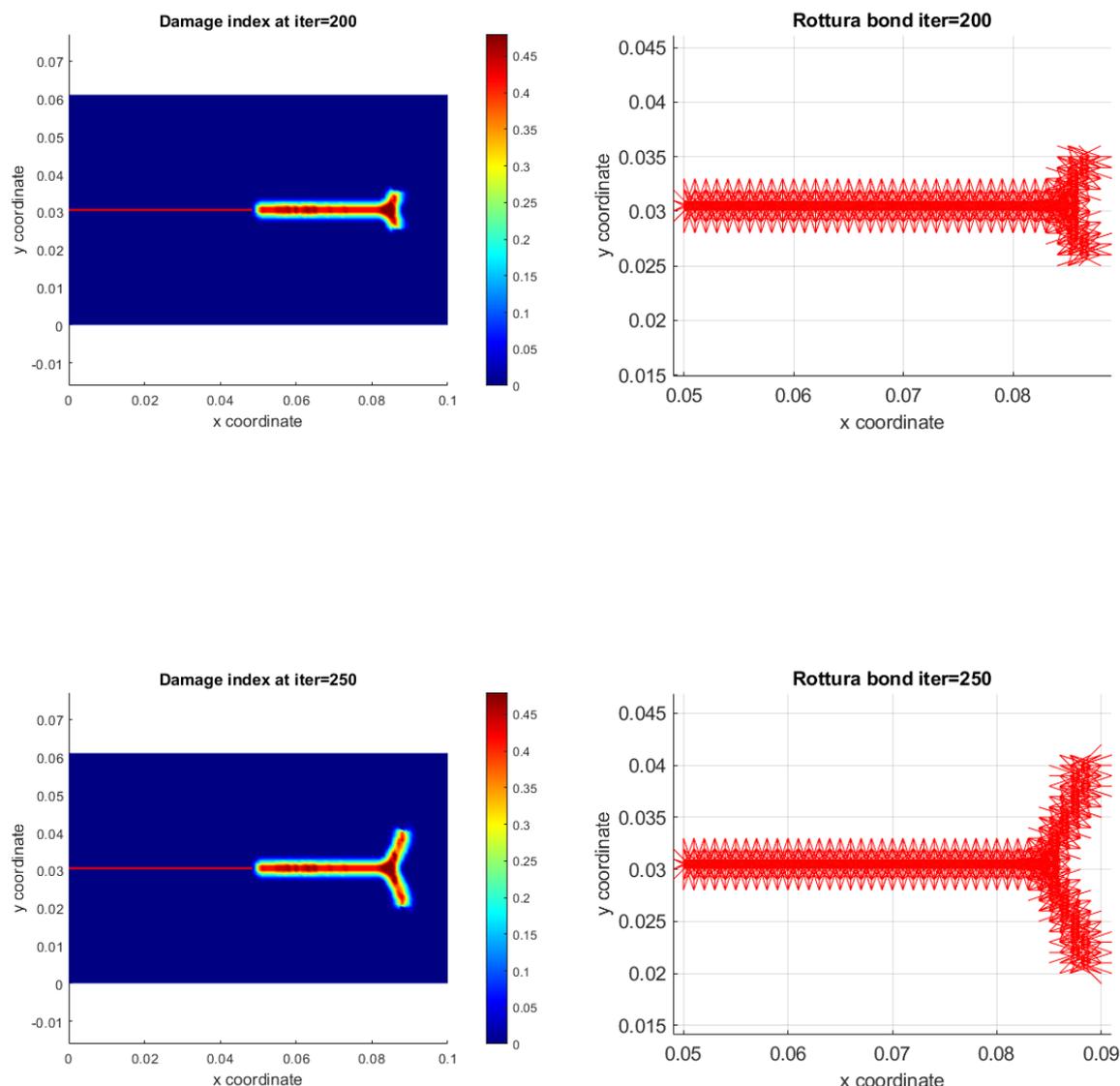


Figura 6.4: Rappresentazione dell'indice di danno nella propagazione della frattura (Modo I) all'aumentare delle iterazioni (sinistra) e bond interessati alla rottura (destra).

Come mostrato in figura 6.4, ad ogni iterazione aumenta la propagazione della frattura orizzontalmente, dato che le condizioni di carico e geometrica presentano una configurazione simmetrica.

In prossimità del lato all'estremo destro della piastra si verifica una biforcazione della frattura. Come riportato nell'articolo di Bobaru et al. [40] si evidenzia come nelle simulazioni quasi statiche di propagazione di una cricca, in un materiale isotropo e omogeneo, possa non verificarsi la biforcazione della cricca.

Per eseguire questa verifica, in figura 6.5, si considera la stessa piastra con una dimensione lungo l'asse x doppia rispetto al caso di figura 6.4.

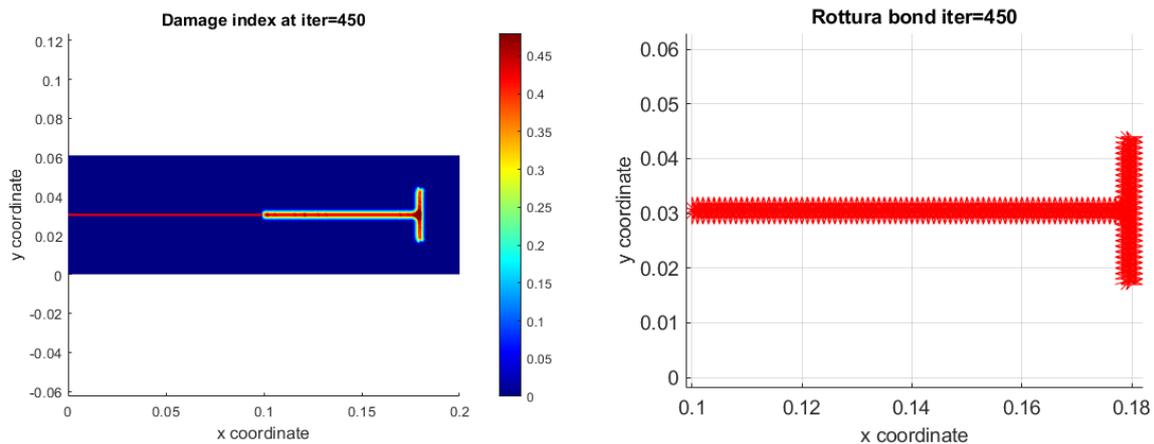


Figura 6.5: Rappresentazione dell'indice di danno nella propagazione della frattura all'aumentare delle iterazioni (sinistra) e bond interessati alla rottura (destra), nel caso di dimensione della piastra raddoppiata lungo x .

A differenza di figura 6.4, ora la biforcazione della cricca avviene a un valore di x maggiore.

Modificando la tipologia di vincolo sul lato destro della piastra, inserendo un vincolo di incastro per i gradi di libertà lungo l'asse x e y , solamente per i nodi immediatamente sopra e sotto alla metà del lato, si ottengono i risultati mostrati in figura 6.6.

Si è inoltre aumentato il coefficiente m , mantenendo costante il valore dell'orizzonte $\delta = 0.003 m$, avendo in questo caso $m = 4$, per dimostrare come l'andamento della frattura dipende anche dal valore di m .

In figura 6.6, si riporta l'andamento della propagazione della cricca:

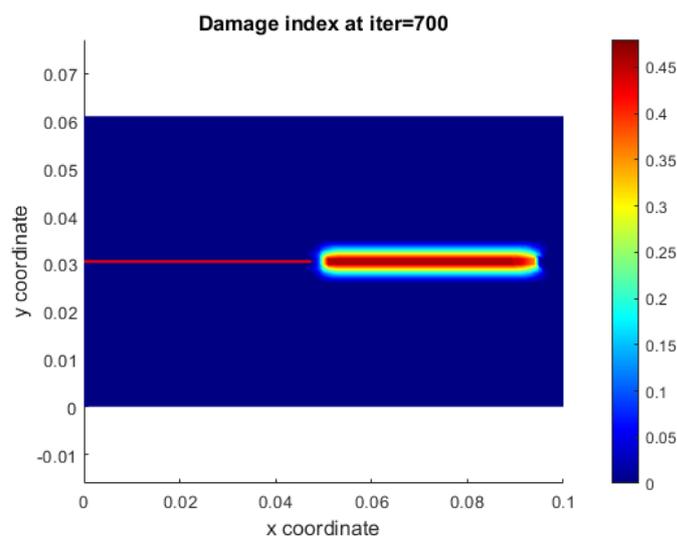


Figura 6.6: Rappresentazione dell'indice di danno nella propagazione della frattura (Modo I) all'aumentare delle iterazioni, con $m = 4$ e vincolo di incastro ai due nodi immediatamente sopra e sotto la frattura sul lato destro della piastra.

In conclusione, avendo una condizione di carico quasi statico, per un materiale omogeneo isotropo, si è dimostrato che può non presentarsi la biforcazione della cricca, a differenza del caso in cui viene applicato un carico dinamico, come verificato nell'articolo di Bobaru et al. [40].

6.2.2 Modo III di propagazione della frattura

Seguendo la procedura riportata nel paragrafo 6.2.1, si procede all'analisi del caso di propagazione della frattura secondo il *Modo III* o *lacerazione*.

Anche per questo caso, si impiega il modello di piastra descritto dalle caratteristiche geometriche e meccaniche riportate nelle tabelle 6.1 e 6.2 rispettivamente.

Si assume un passo griglia $\Delta x = \Delta y = 0.001 \text{ m}$ e per la regione peridinamica si assume un orizzonte $\delta = 0.003 \text{ m}$, quindi $m = 3$.

Il carico imposto agisce sempre in direzione normale alla frattura, ma in un'altra direzione rispetto al caso precedente, come rappresentato in figura. Anche per questo caso viene seguito il modello *Sequentially linear analysis* descritto nel paragrafo 6.1.

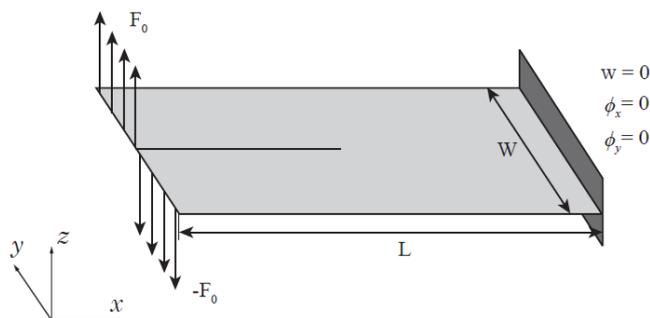


Figura 6.7: Rappresentazione grafica di una piastra incastrata, sottoposta ad uno sforzo trasversale F_0 , in direzione z , ed uno sforzo $-F_0$ in direzione $-z$.

In figura 6.9 si riporta un esempio di deformata della piastra in esame con carico imposto fuori dal piano, quindi lungo l'asse z :

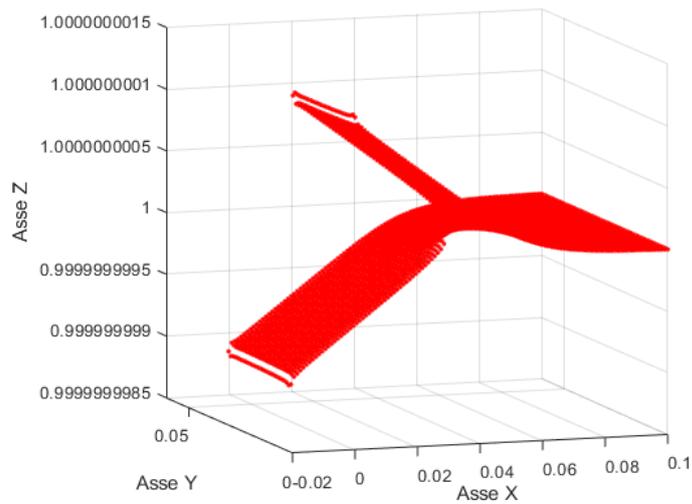
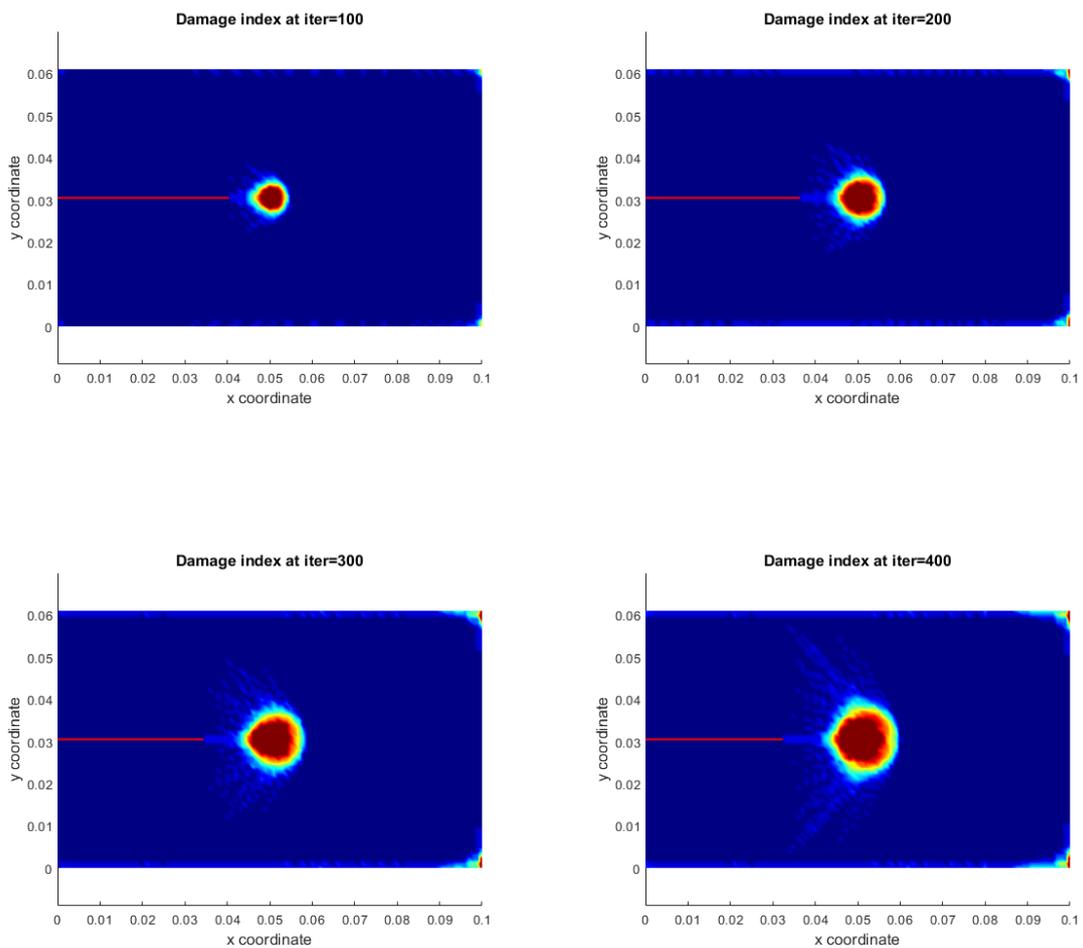


Figura 6.8: Rappresentanza della deformata della piastra con cricca pre-esistente e forza imposta lungo l'asse z .

In figura, si riporta l'evoluzione della propagazione della frattura ogni 100 iterazioni:



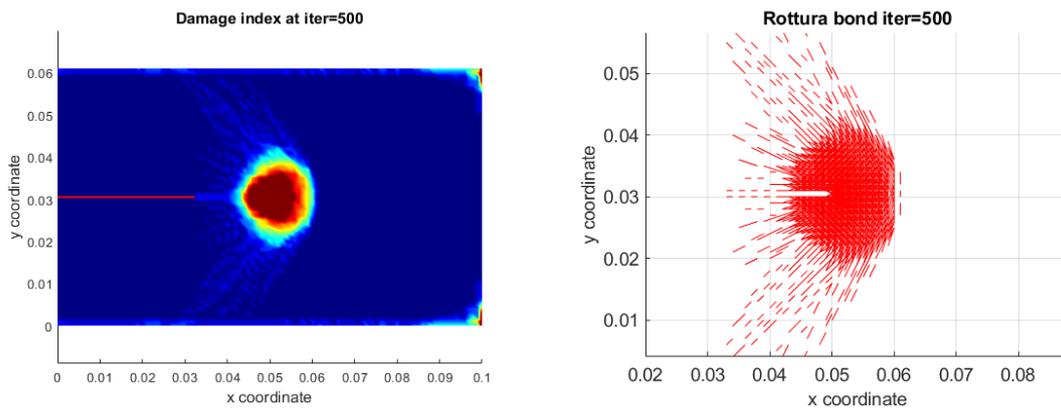


Figura 6.9: Rappresentazione dell'indice di danno nella propagazione della frattura (Modo III) all'aumentare delle iterazioni e rappresentazione dei bond interessati alla rottura all'iterazione 500.

Sono stati riportati i risultati ottenuti per la propagazione della frattura secondo il *Modo III*, ma si precisa che sono necessarie ulteriori analisi e valutazioni.

Capitolo 7

Conclusioni

Nell'elaborato è stata adottata la tecnica di accoppiamento tra il metodo agli elementi finiti e la teoria peridinamica sviluppata dal gruppo di ricerca di Strutture aerospaziali dell'Università degli Studi di Padova, al fine di realizzare modelli che possano simulare il comportamento di piastre, anche in presenza di fratture.

La teoria peridinamica è una nuova teoria del continuo non locale, utile per descrivere i fenomeni di formazione e di propagazione di fratture. La presenza di questi danni nel materiale comporta una variazione del comportamento della struttura, quando questa viene sottoposta a carichi, e, in generale, ne determina un indebolimento complessivo; per tale motivo, lo studio di questo fenomeno ha assunto una notevole rilevanza in ambito ingegneristico.

La teoria peridinamica, a causa della sua stessa formulazione, risulta onerosa dal punto di vista computazionale e deve essere implementata con particolari accorgimenti, soprattutto per quanto riguarda l'applicazione delle condizioni al contorno.

Nel presente elaborato è stata presentata una formulazione della teoria peridinamica per le piastre, in particolare facendo riferimento alla teoria peridinamica bond-based.

L'accoppiamento tra il metodo agli elementi finiti e la teoria peridinamica permette di sfruttare le potenzialità di entrambi i metodi numerici e di superare le rispettive problematiche.

Per la validazione del modello accoppiato, sono state effettuate diverse tipologie di verifica, inerenti alla correttezza dell'accoppiamento. I risultati ottenuti dai modelli accoppiati FEM-PD sono stati confrontati, in seguito, con quelli dei modelli solo FEM, applicando per ognuno di essi diverse condizioni di carico; infine, dai rispettivi confronti sono state evidenziate differenze sia per quanto riguarda la variazione degli spostamenti fuori dal piano che per le rotazioni. Allo stesso tempo è stato evidenziato un ulteriore disequilibrio tra le risultanti delle forze e delle reazioni vincolari nel modello accoppiato FEM-PD.

Successivamente, sono state svolte più verifiche sull'equilibrio delle forze nella piastra accoppiata, definendo uno spostamento imposto all'interfaccia tra il modello FEM e PD. Tali verifiche sono state effettuate nel piano lungo le direzioni x e y , confermando alcuni risultati presenti in letteratura. Sono state sviluppate, in seguito, delle analisi omologhe

per gli spostamenti fuori dal piano, lungo la direzione z . E' stato definito un ulteriore fattore correttivo γ_z nella definizione del micromodulo c_s , quando all'interfaccia FEM-PD viene applicato uno spostamento imposto con andamento bilineare, utile per la riduzione degli errori relativi, dovuti allo sbilanciamento delle forze. Infine, sono state svolte altre verifiche dell'equilibrio delle forze per le rotazioni ϕ_x e ϕ_y .

Nella parte finale dell'elaborato, sono stati riportati esempi relativi all'analisi statica della propagazione di una frattura, facendo riferimento al Modo I e Modo III, in una piastra accoppiata FEM-PD. In particolar modo è stata implementata la *Sequentially linear analysis*, riscontrando delle affinità con i risultati presenti in letteratura.

Bibliografia

- [1] Griffith A. A., *The phenomena of rupture and flow in solids* - Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A (1921), vol. 221, pp. 163-198.
- [2] N. Moës, J. Dolbow, T. Belytschko, *A finite element method for crack growth without remeshing* - International Journal for Numerical Methods in Engineering (1999), vol. 46, pp. 131-150.
- [3] T. Belytschko, T. Black, *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing* - International Journal for Numerical Methods in Engineering (1999), vol. 45, pp. 601-620.
- [4] G.R. Johnson, R.A. Stryk, *Eroding interface and improved tetrahedral element algorithms for high-velocity impact computations in three dimensions*, International Journal of Impact Engineering (1987), vol. 5, pp. 411-421.
- [5] T. Belytschko, J.I. Lin, *A three-dimensional impact-penetration algorithm with erosion*, International Journal of Impact Engineering (1987), vol. 5, pp. 111-127.
- [6] C. Kuhn, R. Müller, *A phase field model for fracture* - Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (2009), vol. 8, pp. 10223-10224.
- [7] H. Amor, J.-J. Marigo, C. Maurini, *Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact: Numerical experiments*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids (2009), col. 57, pp. 1209-1229.
- [8] M. Ortiz, Y. Leroy, A. Needleman, *A finite element method for localized failure analysis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (1987), vol. 61, pp. 189-214.
- [9] X.-P. Xu, A. Needleman, *Void nucleation by inclusion debonding in a crystal matrix* -Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering (1993), vol. 1, pp. 111.
- [10] X.-P. Xu, A. Needleman, *Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids* - Journal of the Mechanics and Physics of Solids (1994), vol. 42, pp. 1397-1434.

- [11] J.M. Melenk, I. Babuška, *The partition of unity finite element method: Basic theory and applications* - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (1996), vol. 139, pp. 289–314.
- [12] I. Babuška, J.M. Melenk, *The partition of unity method* - International Journal for Numerical Methods in Engineering (1997), vol. 40, pp. 727–758.
- [13] Ongaro G., Seleson P., Galvanetto U., Ni T., Zaccariotto M., *Overall equilibrium in the coupling of peridynamics and classical continuum mechanics* - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (2021), vol. 381.
- [14] Schlangen E., van Mier J. G. M., *Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures* - Materials and Structures (1992), vol. 25, pp. 534–542.
- [15] Cleri F., Phillpot S. R., Wolf D., Yip S., *Atomistic simulations of materials fracture and the link between atomic and continuum length scales* - Journal of the American Ceramic Society (1998), vol. 81, pp. 501–516.
- [16] Silling S. A., *Reformulation of elasticity theory for discontinuities and longrange forces* - Journal of Mechanics and Physics of Solids (2000) vol. 48, pp. 175-209.
- [17] Silling S. A., Epton M., Weckner O., Xu J., Askari E., *Peridynamic States and Constitutive Modeling* - Journal of Elasticity (2007) vol. 88, pp. 151- 184.
- [18] Madenci E., Oterkus E., *Peridynamic Theory and Its Applications* - Springer (2014) ISBN 978-1-4939-5322-6.
- [19] Trageser J., Seleson P., *Bond-Based Peridynamics: a Tale of Two Poisson's Ratios* - Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling (2020) vol. 2, pp. 278–288.
- [20] Diyaroglu C., Oterkus E., Oterkus S., Madenci E., *Peridynamics for bending of beams and plates with transverse shear deformation* - International Journal of Solids and Structures (2015) vol. 69-70, pp. 152-168.
- [21] Macek R. W., Silling S. A., *Peridynamics via finite element analysis* - Finite Elements in Analysis and Design (2007) vol. 43, pp. 1169-1178.
- [22] Kilic B., Madenci E., *Coupling of peridynamic theory and the finite element method* - Journal of Mechanics of Materials and Structures (2010) vol. 5, pp.707-735.
- [23] Lubineau G., Azdoud Y., Han F., Rey C., Askari A., *A morphing strategy to couple non-local to local continuum mechanics* - Journal of the Mechanics and Physics of Solids (2012) vol. 60, pp. 1088-1102.
- [24] Han F., Lubineau G., *Coupling of nonlocal and local continuum models by the Arlequin approach* - International Journal of Numerical Methods in Engineering (2016) vol. 89, pp. 671-685.

- [25] Seleson P., Beneddine S., Prudhomme S., *A force-based coupling scheme for peridynamics and classical elasticity* - Computational Materials Science (2013) vol. 66, pp. 34-49.
- [26] Seleson P., Ha Y. D., Beneddine S., *Concurrent Coupling of bond-based Peridynamics and the Navier equations of classical elasticity by blending* - International Journal for Multiscale Computational Engineering (2015) vol. 13, pp. 91-113.
- [27] Littlewood D. J., Silling S. A., Mitchell J. A., Seleson P., Bond S. D., Parks M. L., Turner D. Z., Burnett D. J., Ostien J., Gunzburger M., *Strong Local-Nonlocal Coupling for Integrated Fracture Modeling* - SANDIA Report (2015).
- [28] Galvanetto U., Mudric T., Shojaei A., Zaccariotto M., *An effective way to couple FEM meshes and Peridynamics grids for the solution of static equilibrium problems* - Mechanics Research Communications (2016) vol. 76, pp. 41-47.
- [29] Zaccariotto M., Tomasi D., Galvanetto U., *An enhanced coupling of PD grids to FE meshes* - Mechanics Research Communications (2017) vol. 84, pp. 125-135.
- [30] Zaccariotto M., Mudric T., Tomasi D., Shojaei A., Galvanetto U., *Coupling of FEM meshes with Peridynamics grids* - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (2018) vol. 330, pp. 471-497.
- [31] Blaauwendraad J., *Plates and FEM* - Springer (2010) ISBN 978-90-481-3595-0.
- [32] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., *Theory of plates and shells* - McGraw-Hill (1989) ISBN 0-07-064779-8.
- [33] Przemieniecki J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis* - Dover Publications, Inc. (2017) ISBN 978-0486649481.
- [34] Ferreira A. J. M., *MATLAB Codes for Finite Element Analysis* - Springer (2009) ISBN 978-1-4020-9199-5.
- [35] Kebing Y., *Enhanced integration methods for the peridynamic theory* - Dissertation for PhD Degree, Department of Mechanical and Nuclear Engineering, College of Engineering (2011) KSU.
- [36] Prakash N., Stewart R., *A Multi-threaded Method to Assemble a Sparse Stiffness Matrix for Quasi-static Solutions of Linearized Bond-Based Peridynamics* - Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling (2021) vol.3, pp. 113-147.
- [37] Silling S. A., Askari E., *A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics* - Computers and Structures (2005) vol. 83, pp. 1526–1535.
- [38] Le Q. V., Bobaru F., *Surface corrections for peridynamic models in elasticity and fracture* - Computational Mechanics (2018) vol. 61, pp. 499–518.

- [39] Ni T., Zaccariotto M., Zhu Q., Galvanetto U., *Static solution of crack propagation problems in Peridynamics* - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (2019) vol. 346, pp. 126-151.
- [40] Bobaru F., Zhang G, *Why do cracks branch? A peridynamic investigation of dynamic brittle fracture* - International Journal of Fracture (2015) vol. 196, pp. 69-98.