

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"  
Corso di Laurea Triennale in Astronomia

## La produzione di polveri nelle stelle di Ramo Gigante Asintotico

Relatrice:  
**Prof.ssa Paola Marigo**

Laureanda:  
**Simona Di Stefano**

---

Anno Accademico 2020/2021



# Indice

<b>1</b>	<b>Abstract</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>AGB: fase evolutiva</b>	<b>2</b>
2.1	E-AGB . . . . .	2
2.2	TP-AGB . . . . .	4
2.2.1	Terzo dredge-up e parametro $\lambda$ . . . . .	5
2.2.2	Hot bottom burning . . . . .	6
2.2.3	Processo $s$ e produzione di elementi pesanti . . . . .	6
2.3	Perdita di massa e venti stellari . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Equazioni fondamentali della produzione di polveri</b>	<b>7</b>
3.1	Il ruolo del rapporto $C/O$ . . . . .	7
3.2	Equazioni per il modello di vento stellare . . . . .	9
3.3	Tasso di perdita di massa . . . . .	11
3.3.1	Perdita di massa nelle variabili Mira . . . . .	12
3.4	Stelle di tipo M . . . . .	14
3.4.1	Polvere di olivina . . . . .	14
3.4.2	Polvere di pirosseno . . . . .	15
3.4.3	Polvere di quarzo . . . . .	16
3.4.4	Polvere di ferro . . . . .	16
3.4.5	Tasso di produzione di polveri . . . . .	16
3.5	Stelle di tipo C . . . . .	17
3.5.1	Polvere di carbonio . . . . .	17
3.5.2	Polvere di carburo di silicio . . . . .	17
3.5.3	Tasso di produzione di polveri . . . . .	18
3.6	Stelle di tipo S . . . . .	18
3.6.1	Tasso di produzione di polveri . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Risultati</b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>25</b>



## 1 Abstract

Le stelle di massa piccola e intermedia ( $0.8M_{\odot} \leq M \leq 8M_{\odot}$ ), procedendo verso gli stadi finali della loro vita, attraversano il Ramo Gigante Asintotico del diagramma H-R: si tratta di una fase caratterizzata da una ricca nucleosintesi e da un'intensa attività di produzione di polveri, utile ai fini dell'arricchimento chimico del mezzo interstellare. L'obiettivo della tesi è quello di analizzare le quantità e la composizione delle particelle di polvere prodotte durante tale fase evolutiva. Ciò è reso possibile dalla combinazione di un set di equazioni per la dinamica del vento stellare con uno di equazioni e reazioni relative alla chimica delle polveri.

Da una parte, si trova che il tasso di produzione di polveri dipende dalla variabilità della stella: sebbene un valore rilevante sia raggiunto dalle variabili Mira, è nella fase di superwind che il processo raggiunge il massimo dell'efficienza. Quindi, si fornisce un modello di vento stellare al fine di studiare il meccanismo con cui i grani prodotti vengono trasportati e immessi nel mezzo interstellare, e in cui sia pulsazioni sia pressione di radiazione rivestono un ruolo chiave.

D'altro canto, la chimica dei grani è correlata alle abbondanze superficiali: se le stelle di classe M, con la loro atmosfera ricca di ossigeno, tendono a produrre principalmente grani di silicati, al contrario le stelle di classe C producono polveri di carbonio, mentre la classe spettrale S rappresenta una situazione intermedia. Si trova che le abbondanze chimiche superficiali sono fortemente influenzate dall'azione di terzo dredge-up e hot bottom burning. Questi episodi dell'AGB variano il rapporto C/O, incidendo sulla classe spettrale e segnando un'evoluzione chimica della stella, la quale affronta una transizione M-S-C vivendola in modo diverso a seconda della sua massa iniziale e della metallicità, nonostante la dipendenza da questi parametri stellari sia tuttora oggetto di studio.

A tal proposito, la tesi discute i limiti e le incertezze che derivano da un simile approccio teorico, poiché bisognerebbe disporre di un maggior numero di dati osservativi per elaborare un modello più preciso.

## 2 AGB: fase evolutiva

L'evoluzione lungo il Ramo Gigante Asintotico (AGB, dall'inglese *Asymptotic Giant Branch*) interessa le stelle di massa piccola ( $0.8M_{\odot} \leq M \leq 2M_{\odot}$ ) e intermedia ( $2M_{\odot} \leq M \leq 8M_{\odot}$ ). Si tratta della fase successiva al bruciamento dell'elio nel core: a causa della limitatezza della massa iniziale, la stella sviluppa un nucleo degenere di C-O e presenta inoltre un involucro convettivo (*Figura 2*). La fase AGB è caratterizzata da una ricca nucleosintesi ed è la protagonista della produzione di polveri: infatti, la stella è in grado di sintetizzare elementi anche più pesanti del ferro (mediante processo *s*) per poi essere soggetta ad un'importante perdita di massa negli stadi finali. I venti stellari trasportano infine i grani che derivano dalla condensazione delle particelle di materia espulsa, immettendoli nel mezzo interstellare (ISM).

La definizione di "asintotico" deriva dal fatto che le stelle di piccola massa, durante questa fase, evolvono di nuovo lungo il ramo delle giganti, assumendo valori simili alla fase precedente RGB (*Red Giant Branch*) in fatto di luminosità, ma con temperature leggermente maggiori. L'evoluzione lungo l'AGB è, tuttavia, qualitativamente simile per stelle di massa piccola e intermedia, essendo caratterizzata da tre fasi importanti: E-AGB, TP-AGB e, come detto, uno step finale di perdita di massa al termine del quale la stella dà origine ad una nebulosa planetaria, per poi raffreddarsi come nana bianca di C-O.

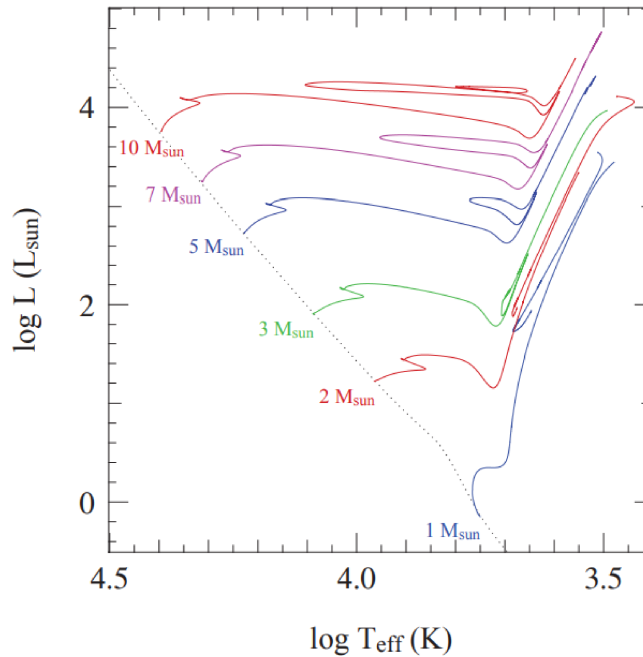


Figura 1: Evoluzione sul diagramma H-R di stelle con valori diversi di massa iniziale (in masse solari  $M_{\odot}$ ),  $X=0.7$ ,  $Z=0.02$ .

### 2.1 E-AGB

Durante la fase *early AGB* (E-AGB), il core di C-O si contrae ed il bruciamento dell'elio si trasferisce in una shell circostante: ciò avviene in corrispondenza del punto *H* indicato nei diagrammi H-R in *Figura 3* e *Figura 4* (mentre l'AGB si estende lungo tutto il tratto *H-J*). A questo punto, si attiva un duplice effetto specchio, poiché le shell attive sono due: alla contrazione del core si accompagna l'espansione degli strati esterni ricchi di He, mentre l'involucro esterno si contrae anch'esso. Tuttavia,

l'espansione degli strati di He provoca una diminuzione della temperatura alla base della shell di H, la quale si spegne. In risposta, lo strato di He e l'involuppo di H iniziano ad espandersi insieme, reagendo alla contrazione del core, in un unico effetto specchio. Pertanto, la fase AGB è legata essenzialmente al bruciamento dell'elio in una shell e, man mano che il bruciamento di quest'ultimo procede, la massa del core di C-O cresce, finché la sua densità è così elevata da farlo entrare in un regime degenerare.

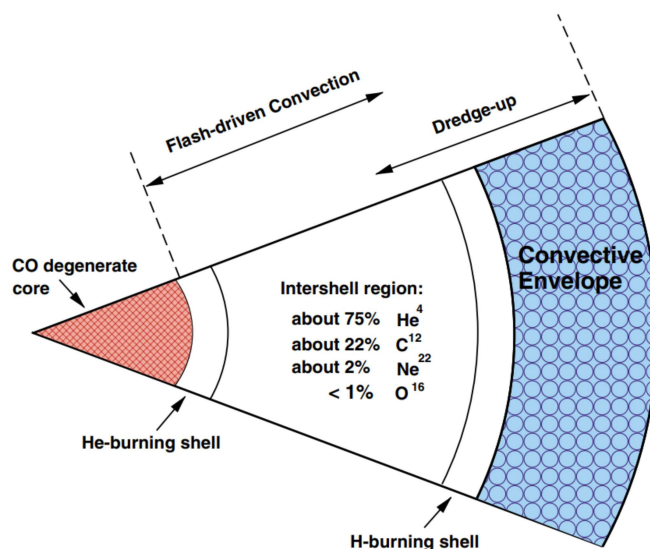


Figura 2: Una stella AGB è caratterizzata da una shell di He ed una shell di H, separate da una regione di intershell; l'involuppo è convettivo (in blu). Figura tratta da Karakas et al. (2002).

Se la massa iniziale è sufficientemente elevata ( $M \geq 4 M_{\odot}$ ), può verificarsi un evento detto "secondo dredge-up". Il raffreddamento e l'espansione degli strati esterni della stella, infatti, hanno come effetto anche quello di aumentare l'opacità e dunque quello di far sprofondare l'involuppo convettivo esterno fino alla regione di discontinuità H-He<sup>1</sup>. Questo effetto permette un efficace mescolamento chimico, oltre che il trasporto in superficie dei prodotti che derivano dal bruciamento dell'idrogeno, in particolare He, ma anche <sup>14</sup>N, che proviene dalla conversione di <sup>12</sup>C e <sup>16</sup>O a seguito del ciclo CNO. Per le stelle di massa  $M \leq 4 M_{\odot}$  non è previsto un secondo dredge-up, dal momento che la shell di H non viene spenta del tutto. Questo episodio si colloca nel punto *K* del diagramma di Kippenhahn in *Figura 5*.

<sup>1</sup>In accordo con il criterio di Schwarzschild, il trasporto convettivo è favorito in condizioni di elevata opacità o elevato rapporto luminosità/massa; l'importanza di quest'ultimo parametro entra in gioco durante l'He-shell flash.

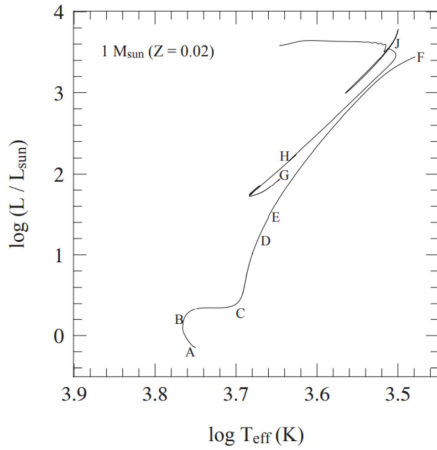


Figura 3: Diagramma H-R per una stella di piccola massa ( $1 M_{\odot}$ ).

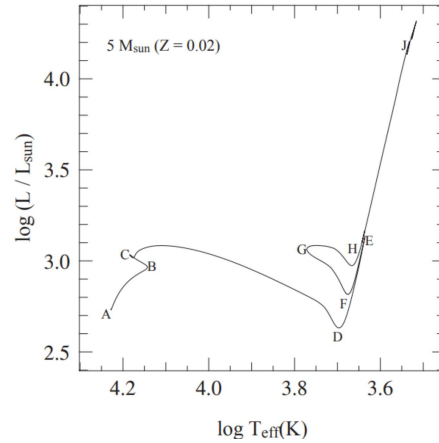


Figura 4: Diagramma H-R per una stella di massa intermedia ( $5 M_{\odot}$ ).

## 2.2 TP-AGB

La fase dei puls termici TP-AGB (*Thermally Pulsing AGB*) inizia nel momento in cui la shell di He raggiunge la discontinuità di H-He provocandone la contrazione, con conseguente aumento di temperatura e riattivazione della shell di H. Le shell attive sono dunque due (H e He), ma il ritmo con cui bruciano non è lo stesso: in particolare, la shell di idrogeno produce energia ad un tasso maggiore di quella di elio, per cui accumula He sotto di sé. La causa scatenante di un pulso termico è comunque un'instabilità di carattere geometrico legata alla sottigliezza della shell di elio, la quale non è in grado di espandersi e diminuire pressione e temperatura a sufficienza, come avverrebbe in condizioni stabili, ma entra piuttosto in una situazione di *runaway* termonucleare.

Più nel dettaglio, tale fenomeno si manifesta in un ciclo di eventi in cui la shell di elio resta inattiva per la maggior parte del tempo. L'aumento di massa nella regione di intershell dovuto al bruciamento della shell di H provoca un aumento di pressione e temperatura sul fondo di tale regione. Quando la massa di elio raggiunge un valore critico, questo viene bruciato in una condizione di *runaway* termonucleare che prende il nome di *helium shell flash*. Esso ha la durata di circa 1 anno e può raggiungere luminosità nell'ordine di  $L \simeq 10^8 L_{\odot}$ . L'elevato flusso di energia che viene sprigionato instaura un regime convettivo all'interno della zona di intershell (detta ICZ, *intershell convective zone*, Figura 6), promuovendo un efficace mescolamento, questa volta, degli elementi derivanti dal bruciamento dell'elio, specialmente il  $^{12}\text{C}$  prodotto dalla reazione  $3\alpha$ . Successivamente, l'energia del *flash* viene dissipata nell'espansione della regione di intershell, cosicché la shell di He ha modo di espandersi e raffreddarsi fino ad estinguere il flash e tornare a bruciare in modo stabile, per centinaia di anni. Come conseguenza della sua espansione, anche la shell di H si spegne.

Un altro risultato di fondamentale importanza è che, nuovamente, le condizioni strutturali favoriscono un regime di trasporto convettivo, portando ad un episodio di "terzo dredge-up" (TDU) in cui l'inviluppo convettivo esterno sprofonda oltre la shell estinta di idrogeno. Il terzo dredge-up influisce particolarmente sulla composizione superficiale, in modo molto più incisivo del primo e del secondo: per la prima volta nel corso dell'esistenza della stella, infatti, in superficie affiorano anche i prodotti del bruciamento dell'elio, soprattutto  $^{12}\text{C}$ .

Infine, la shell di H si riattiva, mentre quella di He si spegne nuovamente per dare luogo ad un lungo periodo di bruciamento stabile dell'idrogeno, detto di interpulso, la cui durata diminuisce



all'aumentare della massa del core stellare (generalmente, si mantiene tra i 50000 e i 10000 anni).

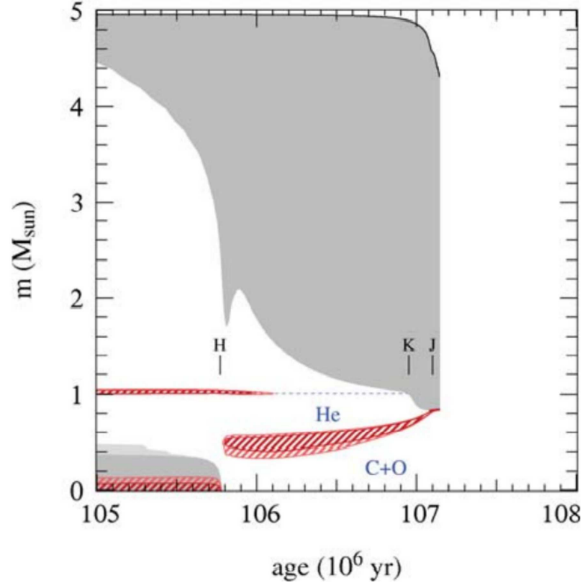


Figura 5: Diagramma di Kippenhahn per un modello di  $5 M_{\odot}$  ( $X=0.70$ ,  $Z=0.02$ ). Nel punto  $K$  l'involuppo convettivo sprofonda e raggiunge gli strati ricchi di He.

### 2.2.1 Terzo dredge-up e parametro $\lambda$

Gli effetti che il pulso termico ha sulla struttura della stella sono rappresentati in *Figura 6*, dove tale fenomeno si ripete due volte. Nella figura si notano inoltre due grandezze:  $\Delta m_H$  e  $\Delta m_{du}$ , che indicano rispettivamente l'aumento di massa del core estinto di H durante l'interpulso precedente e il valore della massa effettivamente trasportata nell'involuppo esterno durante l'episodio di dredge-up. Il rapporto fra le due quantità fornisce un criterio di misura dell'efficienza del TDU e prende il nome di parametro di dredge-up  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\Delta m_{du}}{\Delta m_H}$$

Tanto più il parametro si avvicina a  $\lambda = 1$ , tanto più il processo di rimescolamento si dimostra efficace: tale condizione implica infatti che la massa del core non cresca di molto nel corso del tempo, poiché un suo aumento in massa è compensato dal trasporto della stessa massa in zone superficiali. In genere, il terzo dredge-up non avviene sin dall'inizio del TP-AGB, ma è necessario che i puls termici si ripetano diverse volte, prima che la luminosità del flash sia abbastanza elevata da favorire la convezione.

Il valore di  $\lambda$  dipende da parametri fisici quali la massa del core, la massa totale della stella, la sua metallicità e di conseguenza la sua opacità (Karakas et al. 2002). In particolare, si trova che, per un dato valore della massa,  $\lambda$  cresce al decrescere della metallicità  $Z$ , indipendentemente dalla perdita di massa. Inoltre,  $\lambda$  è funzione del tempo, poiché cresce più bruscamente per le stelle di piccola massa, mentre in quelle di massa intermedia tende asintoticamente al suo valore massimo, senza raggiungerlo per diversi puls. Sebbene nelle stelle di massa piccola l'arricchimento in carbonio avvenga meno gradualmente, è necessario un numero di puls maggiore per avvicinarsi al valore massimo di  $\lambda$ , ma questo può infine essere raggiunto. Karakas et al. (2002) hanno poi individuato un aumento del valore massimo di  $\lambda$  all'aumentare della massa iniziale. Il valore e la dipendenza di  $\lambda$  dai parametri stellari resta comunque un'importante fonte di incertezza.

### 2.2.2 Hot bottom burning

L'*hot bottom burning* (HBB) è un fenomeno che può verificarsi durante la fase di interpulso se la massa della stella è sufficientemente elevata (circa  $M \geq 4 - 5M_{\odot}$ ). In tal caso, la temperatura al di sotto dell'involuppo convettivo esterno è così elevata (intorno ai  $3 \cdot 10^7 K$ ) da innescare il bruciamento dell'idrogeno per mezzo del ciclo CNO. L'effetto principale dal punto di vista chimico è quello di sostituire parte del  $^{12}C$  (trasportato dal TDU) con  $^{14}N$ ; la composizione superficiale viene arricchita anche di altri elementi, quali  $^7Li$ ,  $^{23}Na$ ,  $^{25,26}Mg$ .

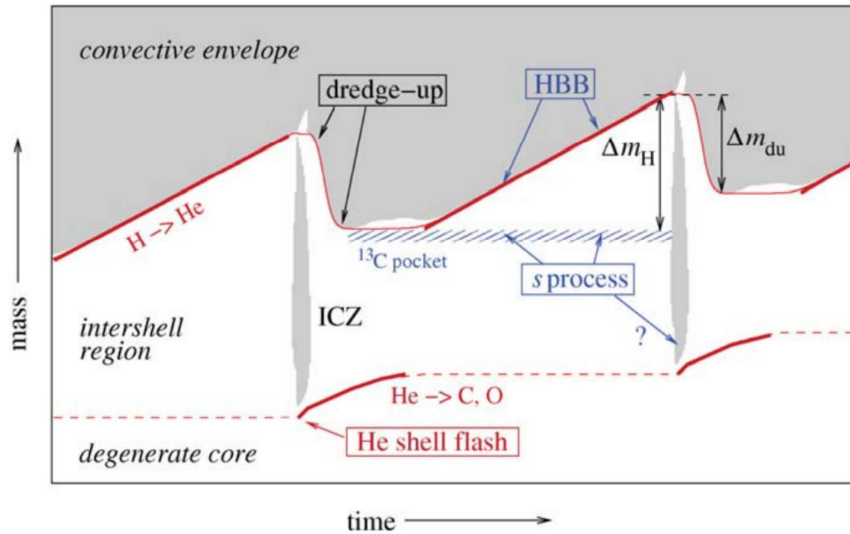


Figura 6: Struttura interna durante la fase TP-AGB. Nelle aree grigie, compresa l'ICZ, è attivo il trasporto convettivo.

### 2.2.3 Processo s e produzione di elementi pesanti

Le stelle AGB sono in grado di sintetizzare elementi più pesanti del ferro (Zr, Y, Sr, Tc, Ba, La, Pb) attraverso la cattura neutronica lenta (o processo *s*) da parte degli atomi di Fe. Si tratta di un'ulteriore occasione di arricchimento delle abbondanze superficiali.

In questo senso, il terzo dredge-up, che si verifica dopo un certo numero di pulsioni, non trasporta solo  $^{12}C$ , ma anche gli elementi prodotti da tali catture neutroniche (Gallino et al., 1998). Il fatto che siano catture "lente" indica che due catture successive avvengono in un tempo scala maggiore di quello legato al decadimento beta degli isotopi instabili che si formano a seguito del processo.

Affinché una cattura neutronica abbia luogo, dev'esserci disponibilità di neutroni liberi. Essi provengono da due reazioni principali:  $^{13}C(\alpha, n)^{16}O$  e  $^{22}Ne(\alpha, n)^{25}Mg$ . La seconda avviene soprattutto nelle AGB più massive ( $M \geq 3M_{\odot}$  circa), poiché necessita di una temperatura più elevata ( $\sim 3.5 \cdot 10^8 K$ ), raggiungibile durante l'He-shell flash; il  $^{22}Ne$  che prende parte alla reazione proviene dalla conversione del  $^{14}N$  (residuo del ciclo CNO) ad opera del bruciamento dell'elio. La reazione  $^{13}C(\alpha, n)^{16}O$ , invece, è comune alle stelle di massa più piccola ( $M \leq 3M_{\odot}$ ). Si crede che il  $^{13}C$  necessario ad avviare la reazione provenga da una shell sottile ("pocket", Figura 6) di  $^{13}C$  e che il processo *s* abbia luogo in questa shell. Essa ha l'aspetto di una piccola regione, situata al di sopra della zona di intershell, ricca di  $^{12}C$ , dell'ordine di  $10^{-4}M_{\odot}$  (Gallino et al., 1998), e si formerebbe

durante l'interpulso, cioè come primo step del ciclo CN nel momento in cui l'idrogeno torna ad essere bruciato in modo stabile.

### 2.3 Perdita di massa e venti stellari

La successione di puls termici si interrompe a seconda della decrescita della massa dell'involuppo di H e, dall'altro lato, della crescita del core degenero di C-O. Si stima che, se la massa di quest'ultimo superasse la massa limite di Chandrasekhar  $M_{Ch} \simeq 1.46M_{\odot}$ , il carbonio sarebbe bruciato in regime degenero in quello che prende il nome di *carbon flash*. In realtà, tramite osservazioni, si dimostra che questo processo non avviene mai nelle AGB, poiché esse sono soggette ad un'importante perdita di massa che è capace di rimuovere l'involuppo di H, impedendo una crescita eccessiva del core di C-O e arricchendo, al contrario, il mezzo interstellare di nuovi elementi. Dunque, il tasso di perdita di massa determina la durata della fase TP-AGB, oltre che la massa della nana bianca residua.

Il meccanismo alla base della perdita di massa sono forti venti stellari, probabilmente originati da una combinazione di pulsazioni e pressione di radiazione esercitate sulle particelle di polvere, una volta che esse hanno modo di condensare nelle regioni più esterne e fredde dell'atmosfera. In genere, le pulsazioni creano delle onde d'urto nell'atmosfera stellare, trasportando il gas a grandi distanze dal centro ed aumentandone la densità. La temperatura necessaria affinché le particelle condensino si aggira intorno ai 1500 K, in corrispondenza di 1.5 – 2 raggi stellari. Una volta condensate, le particelle assumono anche un grado rilevante di opacità e formano delle shell di polvere otticamente spesse e visibili dell'infrarosso (Ferrarotti & Gail, 2003; Ferrarotti & Gail, 2002); in quanto opache, possono essere accelerate dalla pressione di radiazione, assorbendo il momento della radiazione stessa. Un esempio di stelle che risentono fortemente di questo effetto è dato dalle variabili Mira, il cui tasso di perdita di massa è legato al periodo di pulsazione.

La stella rimuove così il suo involuppo di H, con un tasso che può raggiungere fino a  $10^{-4} M_{\odot}/yr$  (superwind). Segue, dunque, una fase di *post-AGB* in cui la stella aumenta la sua temperatura efficace, fino a ionizzare l'idrogeno dell'involuppo circumstellare, originando una nebulosa planetaria e raffreddandosi sotto forma di nana bianca, una volta che l'involuppo di H è abbastanza sottile da spegnersi.

## 3 Equazioni fondamentali della produzione di polveri

### 3.1 Il ruolo del rapporto C/O

La composizione delle polveri dipende essenzialmente dalla classe spettrale della stella che le produce. Essa, a sua volta, è definita dal rapporto C/O, vale a dire il rapporto numerico fra gli atomi di carbonio e quelli di ossigeno presenti in superficie. Questo perché, nelle condizioni di bassa temperatura dell'atmosfera stellare, i due elementi sono legati principalmente nella molecola CO, che è quella a più alta energia di legame e dunque la più stabile fra le possibili. Pertanto, il fatto che l'uno sia più abbondante dell'altro influisce sulla varietà e sulle abbondanze chimiche delle polveri (Ferrarotti & Gail 2006; Ferrarotti & Gail 2002), oltre che sulle caratteristiche spettrali. In particolare:

- se il rapporto è  $C/O < 1$ , ci sarà un eccesso nell'abbondanza di ossigeno, con conseguente formazione di molecole e particelle di polvere ricche di tale elemento, ad esempio TiO, H<sub>2</sub>O

e grani di silicato<sup>2</sup>; in questo caso la stella può essere di classe spettrale M o S. Più nello specifico, una stella di tipo M (*oxygen-rich*) è portata a produrre grani di polvere di silicati quali olivina, pirosseno e quarzo<sup>3</sup>; una stella di tipo S è caratterizzata da un rapporto C/O tendente all'unità e sviluppa grani di polvere di quarzo, ma anche di ferro metallico.

- se, invece, il rapporto è  $C/O > 1$ , vuol dire che gli atomi di C restanti formeranno molecole ricche di carbonio, ad esempio  $C_2$ , CN, grafite e SiC. Stelle al carbonio di questo tipo appartengono alla classe spettrale di tipo C (*carbon-rich*).

Il rapporto C/O non è costante nel corso della vita della stella, ma viene influenzato dall'azione di terzo dredge-up e *hot bottom burning*. Ciò che può avvenire è una vera e propria transizione M-S-C, quindi le tre classi spettrali rappresentano a tutti gli effetti delle fasi di evoluzione chimica della stella.

Infatti, prima di attraversare l'AGB, e di diventare efficienti produttrici di polveri, le stelle di massa piccola e intermedia presentano abbondanze bene o male vicine a quelle della loro sequenza principale, se non fosse per alcuni piccoli cambiamenti durante la fase RGB (primo dredge-up) e E-AGB (secondo dredge-up). Questi due episodi, rispettivamente, aumentano leggermente l'abbondanza di He e considerevolmente quella di N, mentre quella di C diminuisce leggermente (Boothroyd & Sackmann, 1999), ma le conseguenze non sono particolarmente rilevanti nei confronti della composizione dei grani di polvere (Ferrarotti & Gail, 2002).

Nel momento in cui la stella entra nella fase TP-AGB, dopo un certo numero di pulsioni, può essere soggetta ripetutamente ad eventi di terzo dredge-up, accrescendo man mano l'abbondanza superficiale di  $^{12}C$  tramite trasporto convettivo, e con esso il rapporto C/O (*Figura 7* a sinistra), diventando quindi di classe spettrale C. Tuttavia, a seconda della massa iniziale della stella, la transizione attraverso la classe S può essere significativamente lenta o essere superata bruscamente, dal momento che la dipendenza del parametro di dredge-up  $\lambda$  dal tempo è diversa nelle stelle di massa piccola e in quelle di massa intermedia (Karakas et al., 2002): se la massa iniziale è  $M \leq 2M_{\odot}$ , i pulsioni saranno pochi e porteranno ad un brusco aumento del rapporto C/O (Groenewegen et al., 1995); viceversa, le stelle più massicce sono soggette ad un numero maggiore di pulsioni, e quindi di TDU, in cui tuttavia l'aumento di C/O è più graduale, ed è possibile che appaiano con classe spettrale S prima di diventare stelle al carbonio (Ferrarotti & Gail, 2002). L'aumento del rapporto C/O dipende infine dalla metallicità  $Z$  della stella, e cresce più lentamente per stelle a metallicità più elevata, dal momento che carbonio ed ossigeno sono presenti in maggiore quantità nell'involuppo rispetto ad una stella a metallicità minore (Ferrarotti & Gail, 2006), cosicché il valore minimo di massa per la formazione di stelle al carbonio diminuisce al diminuire della metallicità (Marigo 2001). Ferrarotti & Gail (2002) evidenziano poi come il terzo dredge-up trasporti in superficie anche i prodotti del processo  $s$ , cioè gli elementi più pesanti del Fe; tuttavia, le abbondanze restano in genere troppo basse per rappresentare un contributo importante nella composizione delle polveri. Dall'altro lato, l'HBB contribuisce ad abbassare il rapporto C/O fino ad impedire alla stella di diventare di classe spettrale C, in quanto il ciclo CNO converte lo stesso  $^{12}C$  in  $^{14}N$ , come mostrato in *Figura 7* (a destra); ma l'aumento di azoto, di nuovo, non si riflette molto nella composizione delle polveri. Si trova che l'azione dell'HBB è tanto più evidente quanto più bassa è la metallicità della stella (Marigo 2001), poiché la presenza di metalli comporta un abbassamento della temperatura

<sup>2</sup>I silicati sono caratterizzati dalla presenza del gruppo tetraedrico  $SiO_4$  e necessitano dunque di un eccesso di ossigeno per formarsi.

<sup>3</sup>La dicitura "polvere di olivina" è impropria: si vuole intendere che la struttura non è cristallina, bensì amorfa, quindi non è propriamente presente olivina in forma minerale. Analogamente si definiscono polveri di quarzo, pirosseno ecc.

alla base dell'involuppo convettivo, ma anche in questo caso l'incidenza dell'HBB è incerta ed è difficile trovare una sua precisa dipendenza dai parametri stellari, dal momento che molto si basa sul modello di trasporto convettivo adottato.

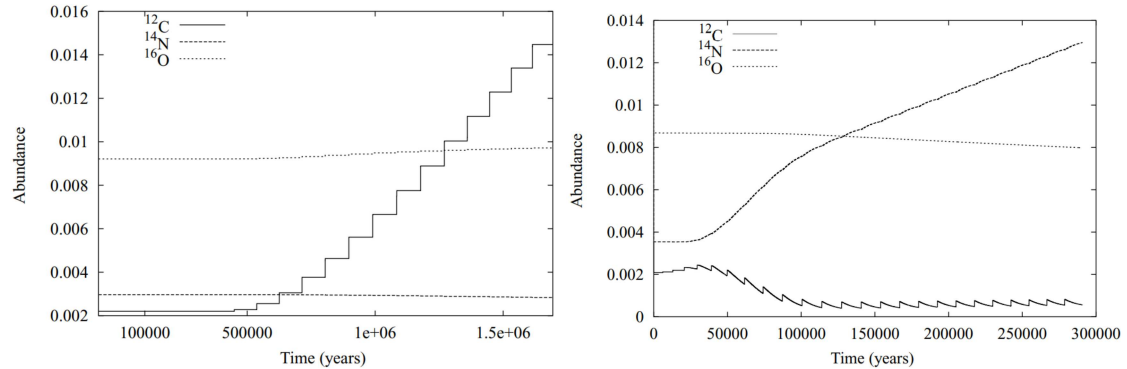


Figura 7: Variazione delle abbondanze superficiali di  $^{12}\text{C}$ ,  $^{14}\text{N}$  e  $^{16}\text{O}$  per una stella di  $3M_{\odot}$  (a sinistra) e per una stella di  $5M_{\odot}$  (a destra). Nella prima, l'abbondanza di  $^{12}\text{C}$  aumenta dopo ogni pulso, una volta che è attivo il TDU. Nell'altra, la massa è sufficientemente elevata perché l'HBB intervenga impedendo l'aumento di  $^{12}\text{C}$ . Cresce invece il contenuto di  $^{14}\text{N}$  ad opera del ciclo CNO. Figura tratta da Stancliffe et al. (2004).

### 3.2 Equazioni per il modello di vento stellare

Per studiare la produzione ed il trasporto di polveri, è necessario introdurre un modello di vento stellare, in cui si definiscano i suoi valori di temperatura e velocità, oltre che l'opacità e la densità di gas e polveri e la velocità limite a cui le particelle tendono a grandi distanze dalla stella. Queste ultime, nel loro insieme, sono immerse nell'ambiente circumstellare in un gas fatto principalmente di idrogeno. Tale gas, sotto la spinta dei venti stellari, guida il trasporto delle polveri, ed è da questa stessa fase gassosa che le particelle infine condensano in grani (Gail & Sedlmayr, 1999; Ferrarotti & Gail, 2002). Si ritiene che la creazione dei grani avvenga a partire da alcuni tipi di particelle (*seed*) che fungono da centro di nucleazione. Gli studi di Ferrarotti & Gail (2002) propongono come candidate al ruolo di *seed* le molecole di ZrC, TiC o più probabilmente  $\text{TiO}_2$ .

Il modello di vento stellare proposto da Ferrarotti & Gail (2006) si basa su un outflow stazionario e prende in considerazione una stella di massa  $M_*$ , luminosità  $L_*$ , temperatura efficace  $T_{\text{eff}}$ , non variabile<sup>4</sup> e con tasso di perdita di massa  $\dot{M}$ . La velocità del vento deriva dalla conservazione del momento, applicata al caso di outflow stazionario e a simmetria sferica, che in assenza di forze di pressione si scrive come:

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{GM_*}{r^2}(1 - \Gamma) \quad (1)$$

Dove  $\Gamma$  è il fattore di Eddington, definito come:

$$\Gamma = \frac{L_*}{4\pi c GM_*} \kappa_H \quad (2)$$

<sup>4</sup>Questo modello è un po' forzato per stelle variabili come le Mira, perché in presenza di pulsazioni il modello di outflow stazionario non è più valido (Ferrarotti & Gail, 2006); inoltre, le onde d'urto portano alla ionizzazione degli atomi e alla dissociazione delle molecole per via delle alte temperature che seguono lo shock, con successive ricombinazione e riformazione sia di atomi che molecole, per via del raffreddamento successivo (Ferrarotti & Gail 2002), definendo un quadro di evoluzione chimica del sistema piuttosto difficile da trattare nello studio della condensazione dei grani.

Vale a dire il rapporto fra la pressione di radiazione esercitata sulla polvere e l'attrazione gravitazionale esercitata dalla stella;  $\kappa_H$  è l'opacità media del sistema gas-polveri. Quindi, si ha un coefficiente  $\Gamma < 1$  quando l'attrazione gravitazionale supera la spinta della pressione di radiazione, vale a dire nel caso in cui la polvere non sia condensata in quantità sufficiente ad aumentare significativamente l'opacità, quindi ad essere accelerata ed immessa nel mezzo interstellare. Nel momento in cui la polvere condensa, ci si pone nel caso  $\Gamma > 1$ , in cui la pressione di radiazione è in grado di accelerare il gas di polveri fino ad outflow a velocità supersoniche. In tal senso, il valore di  $\Gamma$  definisce il segno del gradiente di velocità nella (1), il quale tuttavia si impone nullo nel caso  $\Gamma < 1$ : ciò vuol dire che dev'esserci un valore costante di velocità iniziale precisamente al punto in cui  $\Gamma$  diventa maggiore di uno. Questo valore è circa pari alla velocità del suono (Gail & Sedlmayr, 1985), ma nel lavoro di Ferrarotti & Gail (2006) viene posto pari a  $v_0 = 2$  km/s, poiché si ritiene che non influisca di molto sulle proprietà del modello. L'equazione (2) si può anche riscrivere in termini della luminosità di Eddington  $L_{\text{Edd}}$  come  $\Gamma = L_*/L_{\text{Edd}}$ , dove:

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi cGM_*}{\kappa_H} \quad (3)$$

Quindi, si può sostenere in modo del tutto equivalente che la condensazione ed il trasporto delle polveri avvengono se la luminosità della stella supera quella di Eddington ( $L_* > L_{\text{Edd}}$ ).

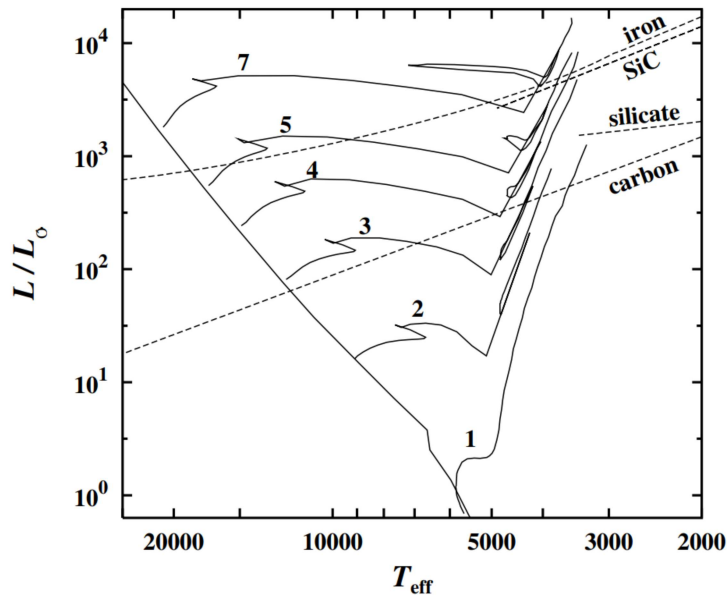


Figura 8: Le linee tratteggiate indicano i limiti di luminosità  $L_{\text{Edd}}$  relativi ai principali costituenti delle polveri. Il calcolo è stato fatto per  $M_* = 1M_\odot$  e  $f = 0.5$ , per il resto la  $L_{\text{Edd}}$  scala come  $M_*/f$ . Figura tratta da Ferrarotti & Gail 2006.

Per quanto riguarda il calcolo di  $\kappa_H$ , si considera l'opacità del gas  $\kappa_{\text{gas}}$  e quella  $\kappa_{i,\text{dust}}$  delle specie polverose  $i$  che contribuiscono maggiormente all'opacità totale, a seconda della loro abbondanza e del grado di condensazione  $f_i$ :

$$\kappa_H = \kappa_{\text{gas}} + \sum_i f_i \kappa_{i,\text{dust}} \quad (4)$$

Dove i  $\kappa_{i,dust}$  sono approssimate dalla media di Rosseland<sup>5</sup>. Il fatto che si sommino direttamente implica che l'estinzione sia grigia, ed è una valida approssimazione.

Vale inoltre la conservazione della massa:

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho v \quad (5)$$

che definisce la densità  $\rho$  del vento, se la velocità  $v$  è nota dalla (1), mantenendo il tasso di perdita di massa  $\dot{M}$  come parametro libero del modello. L'equazione (5) esprime semplicemente il fatto che, se le particelle del vento si muovono dalla superficie stellare verso distanze maggiori dal centro della stella, la massa si conserva per ogni "guscio di materia" che esse attraversano.

Si determina infine la temperatura  $T$  del vento, nell'approssimazione di Lucy (1971, 1976), valida difatti per una shell di polvere grigia e a simmetria sferica:

$$T^4 = \frac{1}{2} T_{\text{eff}}^4 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{R_*^2}{r^2}} + \frac{3}{2} \tau_L \right) \quad (6)$$

Dove  $\tau_L$  è tale per cui:

$$\frac{d\tau_L}{dr} = -\rho \kappa_H \frac{R_*^2}{r^2} \quad (7)$$

E inoltre:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tau_L = 0 \quad (8)$$

Si noti che si è fatta l'ipotesi che la temperatura del gas sia la stessa a prescindere dalla composizione dei grani.

A questo punto, il problema risulta dipendere dalle abbondanze chimiche della fotosfera e dai parametri stellari  $M_*$ ,  $R_*$ ,  $\dot{M}$ ,  $T_{\text{eff}}$  e la luminosità  $L_*$ , la quale è legata ai precedenti tramite l'equazione di Stefan-Boltzmann:

$$4\pi R_*^2 \sigma_{\text{SB}} T_{\text{eff}}^4 = L_* \quad (9)$$

Con  $\sigma_{\text{SB}}$  costante di Stefan-Boltzmann. Le abbondanze chimiche e i parametri  $M_*$ ,  $R_*$ ,  $T_{\text{eff}}$  sono dati da un modello di evoluzione stellare AGB (Groenewegen & de Jong 1993; Marigo et al. 1996; Marigo 2001), mentre  $L_*$  è data dalla (9). Resta solo da stimare  $\dot{M}$  per risolvere il modello di vento stellare.

### 3.3 Tasso di perdita di massa

Nel calcolo della produzione di polveri, Ferrarotti & Gail (2006) considerano di fondamentale importanza la distinzione fra stelle variabili e stelle non-variabili, poiché questo aspetto condiziona l'efficienza della produzione stessa, oltre che le caratteristiche dell'outflow.

Per stelle non-variabili si intendono quelle che si collocano nella parte inferiore dell'AGB, con

<sup>5</sup>In genere, l'opacità di un materiale dipende dalla frequenza della radiazione che lo attraversa. La media di Rosseland dà più peso al range di frequenze in cui il flusso della radiazione è maggiore.

basse temperature efficaci e luminosità moderate, fino a  $10^3 L_\odot$ . Essendoci incertezza nei meccanismi di trasporto del vento, per calcolare il tasso di perdita di massa  $\dot{M}_{\text{Reim}}$  (da inserire nella (5)) viene adottato un fit del tutto empirico che prende il nome di formula di Reimers:

$$\dot{M}_{\text{Reim}} = \eta \cdot 4 \times 10^{-13} \frac{L_* R_*}{M_*} \quad (10)$$

Dove  $\dot{M}_{\text{Reim}}$  è espresso in unità di masse solari per anno,  $L_*$ ,  $M_*$  e  $R_*$  in unità solari ed  $\eta$  è un parametro empirico che permette di adattare il fit a determinati tipi di stelle; in questo caso viene scelto  $\eta = 0.86$ , come calcolato da Groenewegen & de Jong (1993). La (10) definisce delle linee di perdita di massa costante, che possono essere riportate in un diagramma HR, come mostrato in *Figura 9*.

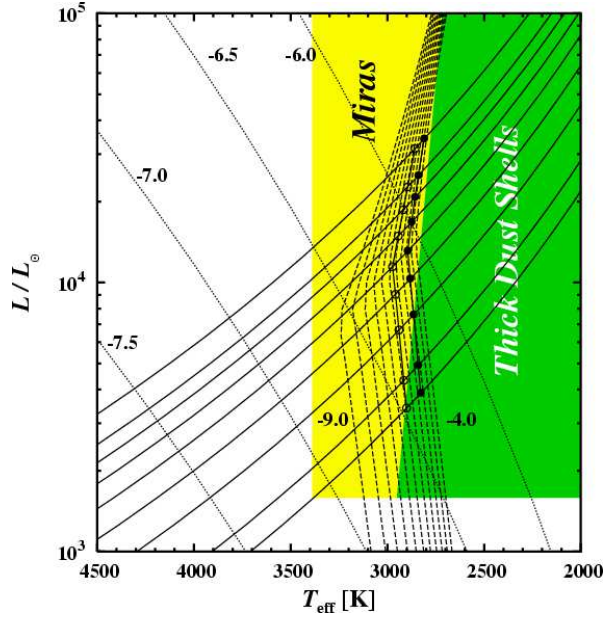


Figura 9: Tratto dell'AGB per stelle di 0.8, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 5  $M_\odot$  (linee continue). Sono riportati i luoghi dei punti in cui il tasso di perdita di massa è costante, nell'approssimazione di Reimers (linee a puntini) e nell'approssimazione per le variabili Mira (linee tratteggiate), separate in unità di  $\log \dot{M} = 0.5$ . La linea con cerchietti bianchi indica la transizione da perdita di massa  $\log \dot{M}_{\text{Reim}}$  a  $\log \dot{M}_{\text{Mira}}$ , mentre quella con cerchietti neri definisce il limite oltre cui si trovano shell di polvere otticamente spesse. La regione in giallo rappresenta la striscia di instabilità delle Mira.

### 3.3.1 Perdita di massa nelle variabili Mira

Nel tratto superiore dell'AGB, le stelle attraversano una regione in cui sono variabili, cioè manifestano pulsazioni: è il caso delle variabili semiregolari (SRa e SRb), delle variabili a lungo periodo (LpV), ma le più importanti dal punto di vista della produzione delle polveri sono le variabili Mira.

Il tasso di perdita di massa è fortemente legato al periodo di pulsazione della Mira. Quest'ultimo può essere espresso in giorni come:

$$\log P = -2.07 + 1.94 \log R_*/R_\odot - 0.90 \log M_*/M_\odot \quad (11)$$

Cosicché il tasso di perdita di massa è dato da (Marigo et al. 1996; Vassiliadis & Wood 1993):

$$\log \dot{M}_{\text{Mira}} = -11.40 + 1.23 \times 10^{-2} P \quad (12)$$



per stelle di massa  $M_* < 2.5 M_\odot$ , e

$$\log \dot{M}_{\text{Mira}} = -11.40 + 1.23 \times 10^{-2}(P - 100(M_*/M_\odot - 2.5)) \quad (13)$$

se la massa è  $M_* > 2.5 M_\odot$ . Di nuovo, le linee tratteggiate in *Figura 9* indicano tasso di perdita di massa costante.

Inoltre, in *Figura 9*, la linea con cerchietti neri indica il limite oltre il quale le shell di polvere sono otticamente spesse, rendendo la Mira invisibile nell'ottico. Quindi, lungo la linea vale la condizione  $\tau_H = 1$ , in cui:

$$\tau_H = \int_{R_i}^{R_a} \rho \langle \kappa_H \rangle dr \quad (14)$$

Con  $\tau_H$  profondità ottica e  $\langle \kappa_H \rangle$  opacità media del mezzo. Si osserva che il limite definito da  $\tau_H = 1$  è molto vicino a quello della parte rossa della striscia di instabilità Mira.

Quando la shell di polvere è otticamente spessa ( $\tau_H > 1$ ), la stella affronta la fase di superwind, durante la quale il tasso di perdita di massa è particolarmente elevato e l'involuppo di H viene rimosso rapidamente. Viene adottata la seguente espressione (Marigo et al. 1996; Vassiliadis & Wood 1993):

$$\dot{M}_{\text{SW}} = 2.1 \times 10^{-8} \frac{L/L_\odot}{v_\infty [\text{km s}^{-1}]} \quad (15)$$

Dove  $v_\infty$  è la velocità limite del vento. Nell'approssimazione di Vassiliadis & Wood (1993) si definisce una  $v_*$  valida per ogni classe spettrale, tale per cui:

$$v_* = -13.50 + 5.60 \times 10^{-2} P \text{ km/s} \quad (16)$$

E quindi:

$$v_\infty = \min (\max(v_*, 3 \text{ km/s}), 15 \text{ km/s}) \quad (17)$$

D'altra parte, il tasso di perdita di massa per una variabile Mira può essere basso nel caso in cui il periodo di pulsazione sia minore di 300 giorni: in tal caso, se il tasso che risulta dalle (12) e (13) è minore di quello calcolato nell'approssimazione di Reimers in (10), allora si considera valido quest'ultimo valore, vale a dire quello che massimizza l'efficienza del processo.

In definitiva, per il calcolo di  $\dot{M}$ , Ferrarotti & Gail (2006) procedono nel seguente modo (*Figura 10*): se la stella non è una variabile Mira, si prende come valore  $\dot{M}_{\text{Reim}}$  dato dalla (10) e si elabora un modello di shell di polvere con outflow a velocità costante. Si prende per valido tale valore anche nel caso in cui la stella sia una Mira con periodo di pulsazione inferiore a 300 giorni, il che definisce un limite pari a  $2 \times 10^{-6} M_\odot/\text{yr}$ .

- Si pone un limite inferiore di  $\dot{M} = 3 \times 10^{-7} M_\odot/\text{yr}$  e se il valore di  $\dot{M}_{\text{Reim}}$  calcolato risulta essere minore, si considera trascurabile la produzione delle polveri.
- Se  $3 \times 10^{-7} M_\odot/\text{yr} < \dot{M}_{\text{Reim}} < 2 \times 10^{-6} M_\odot/\text{yr}$ , la condensazione non è comunque sufficiente a provocare un outflow; piuttosto, questo sarà dovuto ad altre cause e la formazione della polvere avverrà in modo passivo. Si considera una velocità di espansione dell'outflow di  $v_{\text{exp}} = 5 \text{ km/s}$  tipica per le stelle a basso rate di perdita di massa (Groenewegen et al., 1998).

- Se, invece, si trova  $\dot{M}_{\text{Reim}} > 2 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{yr}$ , il tasso di perdita di massa è di livello intermedio e ciò implica che la pressione di radiazione sia sufficiente a guidare outflow di gas a velocità supersoniche. Supponendo che la velocità iniziale sia incrementata di  $v_{\text{exp}} = 2 \text{ km/s}$ , si controlla se questo incremento è sufficiente a superare la velocità limite  $v_{\infty}$ : infatti, anche per tassi di perdita di massa rilevanti, a seconda della composizione dei grani e se la luminosità non è abbastanza elevata (*Figura 8*), può succedere che l'opacità non permetta di sviluppare un vento stellare. Se l'incremento di velocità dovuto alla formazione delle polveri è trascurabile, il vento sarà guidato piuttosto dalle pulsazioni.

Se la stella è una variabile Mira, si prende il maggiore fra i valori (12) e (13), e si considera il più alto fra questo e quello calcolato in (15). Se risulta che la stella non è in fase di superwind, di nuovo, partendo da una velocità iniziale  $v_0 = 2 \text{ km/s}$  e calcolando un incremento di  $v_{\text{exp}} = 5 \text{ km/s}$ , si valuta se il vento è guidato da pressione di radiazione piuttosto che pulsazioni. Risolvere questi modelli di vento stellare è fondamentale, poiché la perdita di massa da parte della stella è direttamente legata alla quantità di polvere prodotta e introdotta nell'ISM, mediata dal grado di condensazione caratteristico della molecola corrispondente.

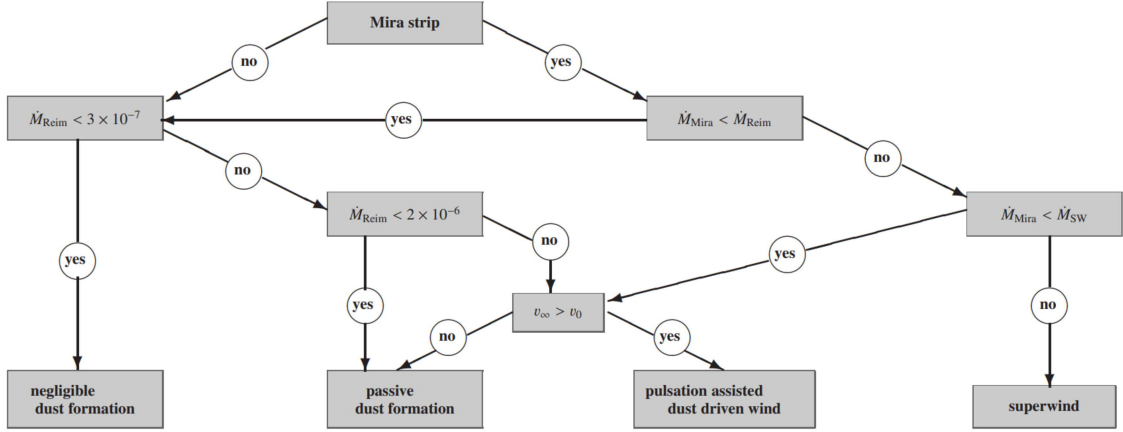


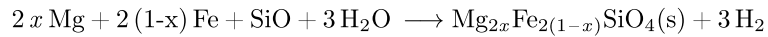
Figura 10: Procedimento seguito da Ferrarotti & Gail (2006) nel calcolo del tasso di perdita di massa.

### 3.4 Stelle di tipo M

Di seguito si riportano i processi di formazione di polveri il cui contenuto chimico è caratteristico di una stella con atmosfera ricca di ossigeno. Ferrarotti & Gail (2006) si soffermano sulle abbondanze più rilevanti.

#### 3.4.1 Polvere di olivina

La composizione caratteristica di questo tipo di grani è  $\text{Mg}_{2x}\text{Fe}_{2(1-x)}\text{SiO}_4$ , con  $x \in [0, 1]$ , quindi uno scenario intermedio tra forsterite,  $\text{Mg}_2\text{SiO}_4$  ( $x = 1$ ), e fayalite,  $\text{Fe}_2\text{SiO}_4$  ( $x = 0$ ). La reazione che porta alla formazione di tale composto è:



La reazione procede con un tasso dato dal reagente limitante, cioè quello con abbondanza minore, che può essere SiO oppure Mg+Fe oppure l'ossigeno presente in  $\text{H}_2\text{O}$ . In particolare, la scarsa

abbondanza di ossigeno diventa rilevante man mano che il rapporto C/O tende a uno, quindi passando da una stella di classe spettrale M ad una di classe S.

In genere, ci sono processi che portano alla crescita del grano di polvere ed altri che portano alla sua distruzione: l'accrescimento di atomi e molecole può essere contrastato da fenomeni di sublimazione, se la temperatura è troppo elevata, o da collisioni dirette con le molecole di H<sub>2</sub> presenti nel gas (si parla in tal caso di *chemical sputtering* o *chemisputtering*, Gail & Sedlmayr 1999). Quindi, se il grano di polvere di olivina ha raggio  $a_{ol}$ , il suo tasso di crescita o decrescita è descritto dall'equazione:

$$\frac{da_{ol}}{dt} = V_{0,ol}(J_{ol}^{gr} - J_{ol}^{dec}) \quad (18)$$

Dove la crescita del grano corrisponde a quella del reagente presente in minore quantità:

$$J_{ol}^{gr} = \min \left( J_{SiO}^{gr}, \frac{1}{2} [J_{Mg}^{gr} + J_{Fe}^{gr}], \frac{1}{3} J_{H_2O}^{gr} \right) \quad (19)$$

Mentre  $V_{0,ol}$  è il volume della molecola.

C'è un ultimo parametro che è importante considerare sia per il calcolo dell'opacità nella (4), sia per valutare l'efficienza della produzione di polveri: si tratta del grado di condensazione  $f$ . Supponendo simmetria sferica della particella di polvere, esso si calcola come:

$$f_{ol} = \frac{4\pi(a_{ol}^3 - a_{0,ol}^3)}{3V_{0,ol}} \frac{n_{d,ol}}{\epsilon_{Si}N_H} \quad (20)$$

Che consiste in una sottrazione di volumi: quello calcolato con raggio  $a_{ol}$  e quello iniziale calcolato con raggio  $a_{0,ol}$  del *seed* (posto pari a 1 nm).  $n_{d,ol}$  è la densità numerica dei *seed*, posta pari a  $3 \cdot 10^{-13}$ , mentre  $\epsilon_{Si}$  è l'abbondanza del silicio presente nella fase gassosa. Infine, il risultato viene normalizzato alla densità di atomi di idrogeno  $N_H$ .

### 3.4.2 Polvere di pirosseno

Il pirosseno ha composizione  $Mg_xFe_{1-x}SiO_3$ ,  $x \in [0, 1]$ : i casi estremi sono rappresentati da enstatite,  $MgSiO_3$  ( $x = 1$ ), e ferrosilite,  $FeSiO_3$  ( $x = 0$ ). Il pirosseno si forma secondo la reazione:



In cui il reagente limitante è SiO, Mg+Fe oppure l'ossigeno presente in H<sub>2</sub>O.

Analogamente al caso dell'olivina, si definisce il rate di crescita dei grani:

$$\frac{da_{py}}{dt} = V_{0,py}(J_{py}^{gr} - J_{py}^{dec}) \quad (21)$$

Con il processo di crescita relativo al reagente limitante, che può essere SiO, l'aggiunta di Mg+Fe dal gas ai grani, o di nuovo l'ossigeno presente in H<sub>2</sub>O:

$$J_{py}^{gr} = \min \left( J_{SiO}^{gr}, [J_{Mg}^{gr} + J_{Fe}^{gr}], \frac{1}{2} J_{H_2O}^{gr} \right) \quad (22)$$

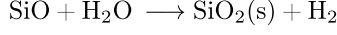
Ed il grado di condensazione:

$$f_{py} = \frac{4\pi(a_{py}^3 - a_{0,py}^3)}{3V_{0,py}} \frac{n_{d,py}}{\epsilon_{Si}N_H} \quad (23)$$

Definito analogamente alla (20).

### 3.4.3 Polvere di quarzo

Il quarzo si forma secondo la reazione:



In cui il reagente presente in minore quantità è quello meno abbondante fra SiO e H<sub>2</sub>O.

Le particelle si sviluppano nel corso del tempo a seconda di processi di crescita e distruzione:

$$\frac{da_{\text{qu}}}{dt} = V_{0,\text{qu}}(J_{\text{qu}}^{\text{gr}} - J_{\text{qu}}^{\text{dec}}) \quad (24)$$

In cui quello di crescita è relativo a SiO o H<sub>2</sub>O:

$$J_{\text{qu}}^{\text{gr}} = \min(J_{\text{SiO}}^{\text{gr}}, J_{\text{H}_2\text{O}}^{\text{gr}}) \quad (25)$$

Inoltre, il grado di condensazione è definito da:

$$f_{\text{qu}} = \frac{4\pi(a_{\text{qu}}^3 - a_{0,\text{qu}}^3)}{3V_{0,\text{qu}}} \frac{n_{\text{d,qu}}}{\epsilon_{\text{Si}}N_{\text{H}}} \quad (26)$$

Definito analogamente alla (20).

### 3.4.4 Polvere di ferro

L'ultimo contributo è dato dal ferro puro. I grani aumentano o diminuiscono le dimensioni con un rate:

$$\frac{da_{\text{ir}}}{dt} = V_{0,\text{ir}}(J_{\text{ir}}^{\text{gr}} - J_{\text{ir}}^{\text{dec}}) \quad (27)$$

Il grado di condensazione del ferro è definito da:

$$f_{\text{ir}} = \frac{4\pi(a_{\text{ir}}^3 - a_{0,\text{ir}}^3)}{3V_{0,\text{ir}}} \frac{n_{\text{d,ir}}}{\epsilon_{\text{Fe}}N_{\text{H}}} \quad (28)$$

Sempre in forma analoga alla (20), ma con  $\epsilon_{\text{Fe}}$  abbondanza del ferro nella fase gassosa.

### 3.4.5 Tasso di produzione di polveri

Per le stelle di tipo M, la produzione di polveri di olivina, pirosseno e quarzo è considerata nell'insieme come produzione di polveri contenenti silicati, per cui il tasso di produzione è:

$$\frac{dM_{\text{sil, M}}}{dt} = \dot{M}X_{\text{Si}} \frac{A_{\text{sil}}}{A_{\text{Si}}} f_{\text{sil}} \quad (29)$$

In cui  $\dot{M}$  è il tasso di perdita di massa dovuto ai venti stellari,  $A_{\text{Si}}$  il peso atomico del silicio;  $X_{\text{Si}}$  è l'abbondanza del silicio, in termini di massa, riferita al materiale trasportato dal vento stellare: poiché il silicio non è coinvolto particolarmente nei processi di nucleosintesi prima e durante l'AGB, la sua abbondanza sarà circa uguale a quella iniziale della stella. La massa delle polveri contenenti silicio  $M_{\text{sil, M}}$  è zero nell'istante iniziale  $t = 0$ .  $f_{\text{sil}}$  è la somma dei gradi di condensazione delle polveri di silicato, calcolati in (20), (23) e (26):

$$f_{\text{sil}} = f_{\text{ol}} + f_{\text{py}} + f_{\text{qu}} \quad (30)$$

Infine,  $A_{\text{sil}}$  è il peso molecolare dei silicati, dato da una combinazione dei pesi atomici delle sue varie componenti, ciascuna moltiplicata per la sua abbondanza e per il suo grado di condensazione:

$$A_{\text{sil}} = [(x_{\text{ol}}A_{\text{fo}} + (1 - x_{\text{ol}})A_{\text{fa}})f_{\text{ol}} + (x_{\text{py}}A_{\text{en}} + (1 - x_{\text{py}})A_{\text{fs}})f_{\text{py}} + A_{\text{qu}}f_{\text{qu}}]f_{\text{sil}}^{-1} \quad (31)$$

Dove  $A_{\text{fo}}$ ,  $A_{\text{fa}}$ ,  $A_{\text{en}}$ ,  $A_{\text{fs}}$ ,  $A_{\text{qu}}$  sono i pesi atomici rispettivamente di forsterite, fayalite, enstatite, ferrosilite e quarzo. Analogamente, si definisce il tasso di produzione di polveri di ferro come:

$$\frac{dM_{\text{iro, M}}}{dt} = \dot{M}X_{\text{Fe}} \frac{A_{\text{iro}}}{A_{\text{Fe}}} f_{\text{iro}} \quad (32)$$

Come nel caso dell'abbondanza di Si, l'abbondanza di ferro  $X_{\text{Fe}}$  si può considerare circa pari a quella iniziale, nonostante una piccola parte venga utilizzata nel processo  $s$ . La massa delle polveri contenenti Fe è zero nell'istante iniziale  $t = 0$ ;  $f_{\text{iro}}$  è data dalla (28).

La (29) e la (32) sono nulle durante le fasi spettrali S e C.

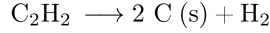
Risulta evidente come il tasso di produzione delle polveri sia diverso dal tasso di perdita di massa per venti stellari, in quanto modulato dal grado di condensazione.

### 3.5 Stelle di tipo C

Il caso opposto è rappresentato dalle stelle con rapporto  $\text{C/O} > 1$ , vale a dire ricche in carbonio. Anche in questo caso Ferrarotti & Gail (2006) riportano le abbondanze principali.

#### 3.5.1 Polvere di carbonio

La seconda molecola più abbondante presente nel gas e contenente carbonio dopo il CO è  $\text{C}_2\text{H}_2$ . Il carbonio si svilupperebbe quindi nel seguente modo:



E i grani crescerebbero nel tempo come indicato dalla seguente equazione, simile alle precedenti:

$$\frac{da_{\text{ca}}}{dt} = V_{0,\text{ca}} J_{\text{ca}}^{\text{gr}} \quad (33)$$

Dove si sono trascurati processi distruttivi.

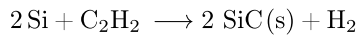
Il grado di condensazione del carbonio è definito come:

$$f_{\text{ca}} = \frac{4\pi(a_{\text{ca}}^3 - a_{0,\text{ca}}^3)}{3V_{0,\text{ca}}} \frac{n_{\text{d,ca}}}{\epsilon_{\text{C}}N_{\text{H}}} \quad (34)$$

Dove  $\epsilon_{\text{C}}$  indica l'abbondanza del carbonio nella fase gassosa, mentre la densità numerica dei *seed* è sempre posta pari a  $3 \cdot 10^{-13}$ .

#### 3.5.2 Polvere di carburo di silicio

La crescita di SiC avviene secondo la reazione:



Il tasso della reazione viene definito dal meno abbondante fra Si e C<sub>2</sub>H<sub>2</sub>.

Le dimensioni dei grani cambiano nel tempo per via di processi costruttivi e distruttivi:

$$\frac{da_{\text{sic}}}{dt} = V_{0,\text{sic}}(J_{\text{sic}}^{\text{gr}} - J_{\text{sic}}^{\text{dec}}) \quad (35)$$

E il tasso di crescita dei grani viene definito come:

$$J_{\text{sic}}^{\text{gr}} = \min(J_{\text{Si}}^{\text{gr}}, J_{\text{C}_2\text{H}_2}^{\text{gr}}) \quad (36)$$

Infine, il grado di condensazione:

$$f_{\text{sic}} = \frac{4\pi(a_{\text{sic}}^3 - a_{0,\text{sic}}^3)}{3V_{0,\text{sic}}} \frac{n_{\text{d,sic}}}{\epsilon_{\text{Si}} N_{\text{H}}} \quad (37)$$

### 3.5.3 Tasso di produzione di polveri

Si calcola innanzitutto il tasso di produzione di polveri di carbonio:

$$\frac{dM_{\text{car, C}}}{dt} = \dot{M} X_{\text{C}} f_{\text{car}} \quad (38)$$

Il quale è nullo durante le fasi M ed S della stella, mentre la massa stessa  $M_{\text{car, C}}$  è nulla all'istante  $t = 0$ . I termini di peso molecolare e atomico si elidono in quanto uguali per il carbonio allo stato solido. Questa volta l'abbondanza di carbonio  $X_{\text{C}}$  è soggetta ad un aumento a causa dei fenomeni di TDU ed è necessario tenerne conto nel modello di evoluzione stellare.

Si procede con il tasso di produzione delle polveri contenenti carburo di silicio SiC:

$$\frac{dM_{\text{sic, C}}}{dt} = \dot{M} X_{\text{Si}} \frac{A_{\text{sic}}}{A_{\text{Si}}} f_{\text{sic}} \quad (39)$$

Dove i termini sono espressi analogamente a quelli della (29), la massa  $M_{\text{sic, C}}$  si pone uguale a zero per  $t = 0$  e il grado di condensazione  $f_{\text{sic}}$  è dato dalla (37). L'abbondanza di silicio  $X_{\text{Si}}$  si suppone circa uguale a quella iniziale. Il tasso si impone nullo durante le fasi di evoluzione chimica M ed S.

## 3.6 Stelle di tipo S

Una situazione intermedia è data dalle stelle S, in cui il rapporto C/O è prossimo all'unità. Pertanto, non ci saranno eccessi di C o di O sufficienti a formare gran parte dei condensati discussi finora.

I prodotti più importanti sono il ferro, che condensa in Fe puro allo stato solido oppure in FeSi, ed il quarzo, che è l'unico silicato che si prende in considerazione. La formazione e la condensazione sia di ferro che di quarzo vengono trattate come nel caso di una stella di tipo M.

### 3.6.1 Tasso di produzione di polveri

Come nella (29), il tasso di produzione di polveri di ferro nelle stelle di classe spettrale S è definito come:

$$\frac{dM_{\text{iro, S}}}{dt} = \dot{M} X_{\text{Fe}} \frac{A_{\text{iro}}}{A_{\text{Fe}}} f_{\text{iro}} \quad (40)$$

Uguale a zero nelle fasi M e C, e con massa  $M_{\text{Fe}, S}$  nulla all'istante iniziale. L'abbondanza del ferro  $X_{\text{Fe}}$  non cambia durante la fase AGB, quindi si può imporre pari a quella iniziale, ed  $f_{\text{Fe}}$  è definito dalla (28).

Per quanto riguarda invece le polveri di silicati (solo quarzo in questo caso):

$$\frac{dM_{\text{sil}, S}}{dt} = \dot{M} X_{\text{Si}} \frac{A_{\text{sil}}}{A_{\text{Si}}} f_{\text{sil}} \quad (41)$$

Uguale a zero nelle fasi M e C, e con massa  $M_{\text{sil}, S}$  nulla all'istante iniziale. Anche  $X_{\text{Si}}$  non cambia durante la fase AGB e si può imporre uguale all'abbondanza iniziale, mentre  $f_{\text{sil}}$  è descritto dalla (30).

## 4 Risultati

I grafici riportati di seguito sono tratti dal lavoro di Ferrarotti & Gail (2006) e derivano dai modelli di vento stellare illustrati precedentemente.

Innanzitutto, si segue l'andamento del parametro  $\Gamma$  descritto dall'equazione (2), in funzione del tempo (*Figura 11*), per due modelli stellari di  $2 M_{\odot}$ , uno a metallicità molto bassa  $Z = 0.001$  e l'altro a metallicità vicina a quella solare,  $Z = 0.02$ . Si osserva che la formazione delle polveri e il trasporto delle stesse per pressione di radiazione è una condizione (corrispondente a  $\Gamma > 1$ ) che può essere soddisfatta solo con le elevate luminosità raggiunte ciclicamente nella fase dei puls termici TP-AGB. Solo per valori molto alti del tasso di perdita di massa (superwind), la condizione può perdurare anche durante le fasi di interpulso e non solo durante l'*He-shell flash*, specialmente se la stella è nella striscia di instabilità Mira. La linea tratteggiata nella stessa figura descrive invece l'andamento del rapporto C/O, sempre in funzione del tempo: è possibile verificare che la stella a metallicità maggiore arricchisce gradualmente il suo rapporto C/O ad ogni pulso, ma in quella a metallicità minore il processo è decisamente più efficiente.

I grafici riportati in *Figura 12* mostrano a tal proposito che il tasso di perdita di massa presenta dei picchi in corrispondenza dell'*He-shell flash*, che indicano dunque i momenti di massima produzione di polveri. Inoltre, è possibile notare che il numero di puls termici, a parità di massa, è maggiore nella stella a metallicità minore, e che i valori di  $\Gamma$  e  $\dot{M}$  sono più elevati.

Infine, la *Figura 13* mette in relazione il contenuto dei grani condensati in funzione del tempo. Per la stella a metallicità  $Z = 0.001$ , si osservano solo carbonio, carburo di silicio e ferro, con prevalenza del carbonio, ad indicare che la stella appartiene alla classe spettrale di tipo C. Il modello a metallicità  $Z = 0.02$ , invece, produce inizialmente silicati e ferro, trascorrendo la prima parte del TP-AGB come stella di classe M; successivamente, le polveri si arricchiscono di carbonio, SiC e ferro segnando la transizione alla classe spettrale C. Entrambe le stelle saltano la fase di classe spettrale S, per una questione di bilancio tra dipendenza di  $\lambda$  dalla massa iniziale e dipendenza dalla metallicità.

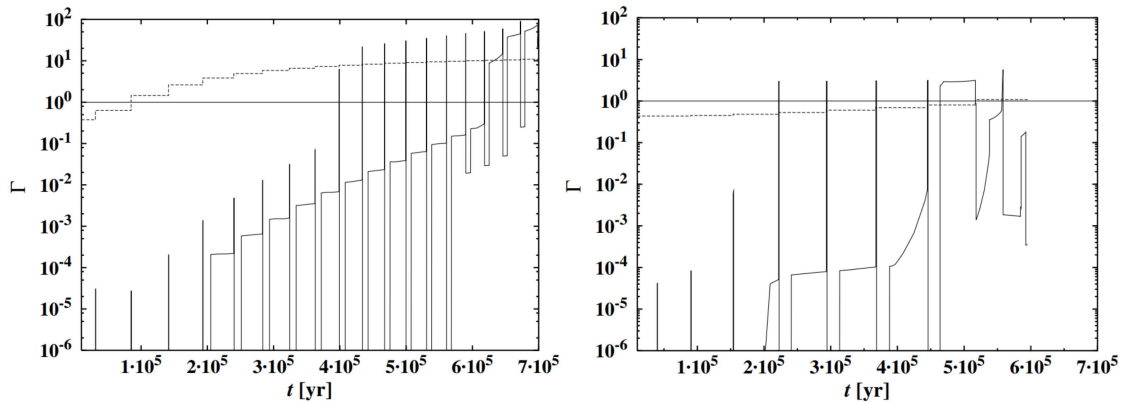


Figura 11:  $\Gamma$  (linea continua) e C/O (linea tratteggiata) espressi in funzione del tempo per due stelle di massa iniziale pari a  $2 M_{\odot}$  e metallicità  $Z = 0.001$  (a sinistra) e  $Z = 0.02$  (a destra). Il tempo  $t = 0$  corrisponde al primo pulso termico. Figura tratta da Ferrarotti & Gail (2006).

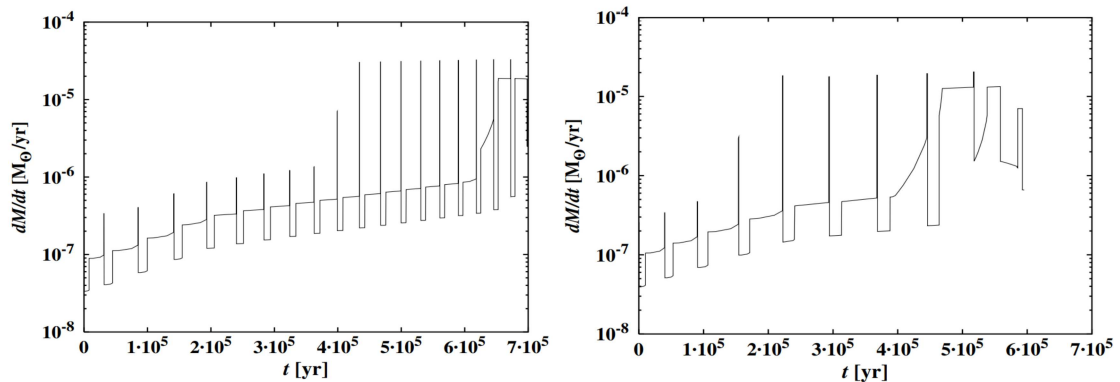


Figura 12: Evoluzione del tasso di perdita di massa nel corso del tempo durante la fase TP-AGB, per due stelle di massa iniziale pari a  $2 M_{\odot}$  e metallicità  $Z = 0.001$  (a sinistra) e  $Z = 0.02$  (a destra). Il tempo  $t = 0$  corrisponde al primo pulso termico. Figura tratta da Ferrarotti & Gail (2006).

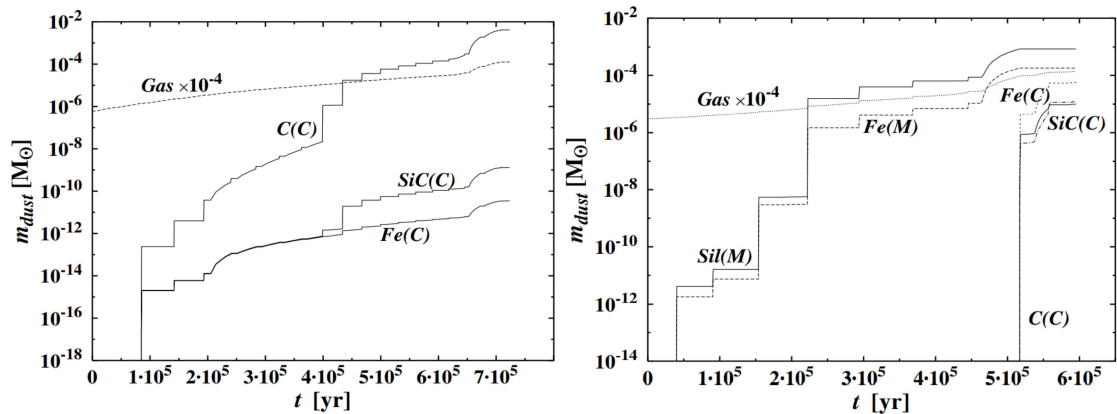


Figura 13: Massa delle principali specie polverose prodotte da due stelle di massa iniziale pari a  $2 M_{\odot}$  e metallicità  $Z = 0.001$  (a sinistra) e  $Z = 0.02$  (a destra), in funzione del tempo.  $t = 0$  corrisponde al primo pulso termico. Figura tratta da Ferrarotti & Gail (2006).

I gradi di condensazione calcolati nelle (20), (23), (26), (28), e riferiti a due modelli stellari di  $1 M_{\odot}$  (una stella di tipo M ed una di tipo C), sono riportati in grafici tridimensionali in funzione



della perdita di massa e del rapporto C/O. In particolare, olivina e pirosseno vengono considerati nell'insieme come polveri di silicati contenenti Fe, Mg e Si, mentre il quarzo viene considerato un altro contributo alle polveri di Si. In definitiva, si ha il grado di condensazione per Si e quello per Mg nei silicati in *Figura 14*, seguono poi Fe sempre appartenente ai silicati e Fe condensato come metallo in *Figura 15*.

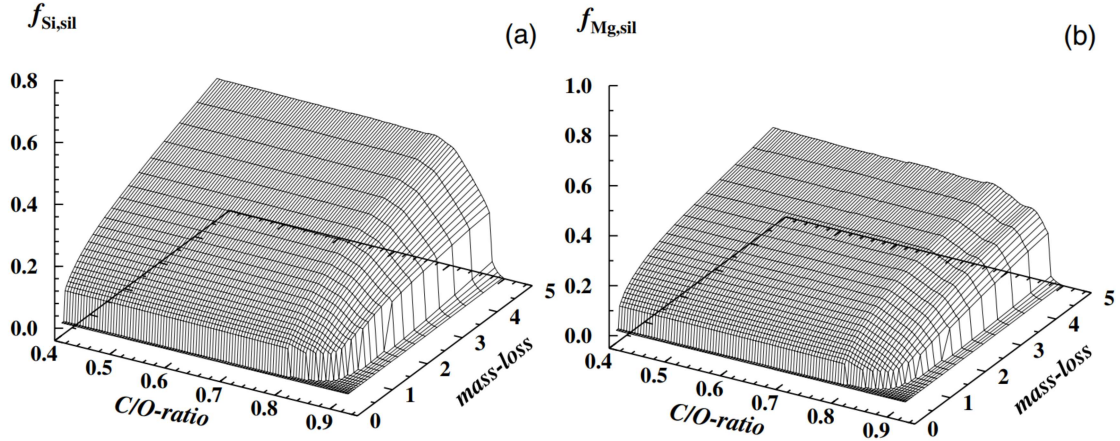


Figura 14: Grado di condensazione di Si (a sinistra) e di Mg (a destra) in funzione della perdita di massa e del rapporto C/O per una stella di classe spettrale M, luminosità  $L_* = 10^4 L_\odot$  e  $T_{\text{eff}} = 3000 \text{ K}$  (Ferrarotti & Gail 2006).

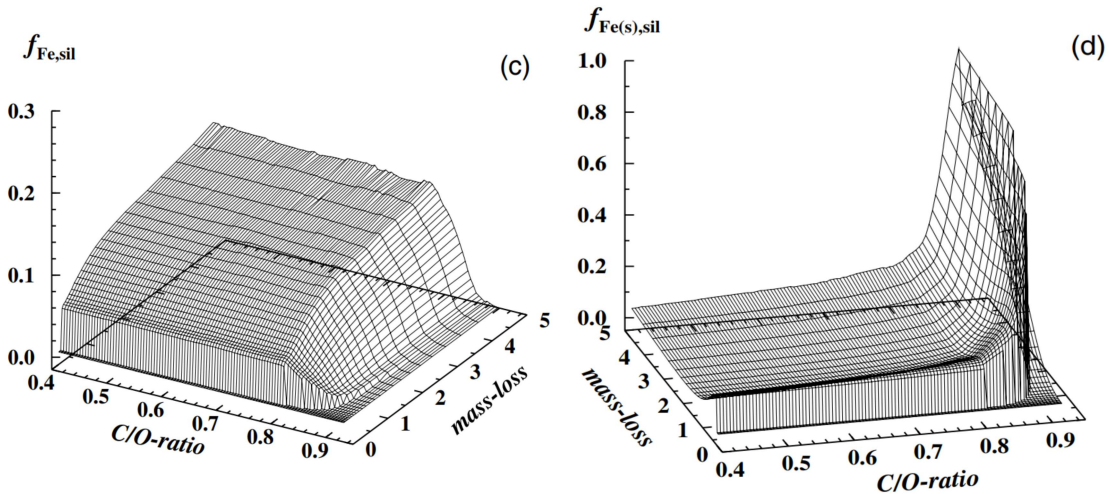


Figura 15: Grado di condensazione di Fe relativo ai silicati (a sinistra) e di Fe metallico (a destra) in funzione della perdita di massa e del rapporto C/O per una stella di classe spettrale M, luminosità  $L_* = 10^4 L_\odot$  e  $T_{\text{eff}} = 3000 \text{ K}$  (Ferrarotti & Gail 2006).

L'andamento generale per quanto riguarda i silicati è che il grado di condensazione per bassi valori di perdita di massa è molto basso ed aumenta lentamente all'aumentare della perdita di massa, raggiungendo un valore considerevole solo per elevata perdita di massa, tipica di una fase superwind. Ciò vuol dire che solo una parte del materiale che potenzialmente può condensare in grani condensa effettivamente. Tale grado di condensazione si mantiene costante all'aumentare del rapporto C/O, per poi diminuire notevolmente per valori di C/O superiori a 0.8: ciò conferma le aspettative, dato che man mano che il rapporto C/O tende all'unità e si passa da una stella M ad una S per effetto

del TDU, l'ossigeno è sempre meno disponibile a formare la molecola  $\text{SiO}_4$  comune ai silicati. Si osserva, invece, che il grado di condensazione del ferro metallico aumenta notevolmente per una transizione alla classe spettrale S.

Per quanto riguarda una stella di tipo C, le polveri da essa prodotta conterranno carbonio e SiC (Figura 16), ma è interessante vedere anche l'andamento del grado di condensazione del ferro metallico (Figura 17). Quest'ultimo è elevato solo per  $\text{C/O} \simeq 1$  e non per vere stelle al carbonio. Il trend generale, anche in questo caso, è che il grado di condensazione aumenti gradualmente all'aumentare del tasso di perdita di massa per venti stellari. Si nota che  $f_C$  aumenta fortemente all'aumentare del rapporto C/O, poiché con esso aumenta chiaramente la disponibilità di carbonio (e comunque in esso è stato incluso anche il carbonio legato nella molecola CO, non solo quello residuo). Il grado di condensazione del carburo di silicio, al contrario, non sembra dipendere particolarmente dal rapporto C/O, se non per il brusco aumento in prossimità di  $\text{C/O} \simeq 1$ .

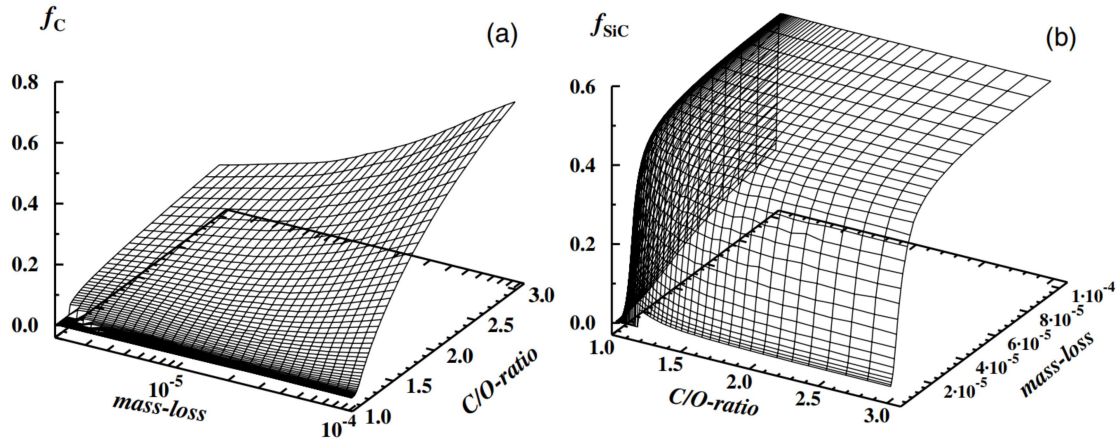


Figura 16: Grado di condensazione del carbonio (a sinistra) e di SiC (a destra) in funzione della perdita di massa e del rapporto C/O per una stella di classe spettrale C, luminosità  $L_* = 10^4 L_\odot$  e  $T_{\text{eff}} = 2500 \text{ K}$  (Ferrarotti & Gail 2006).

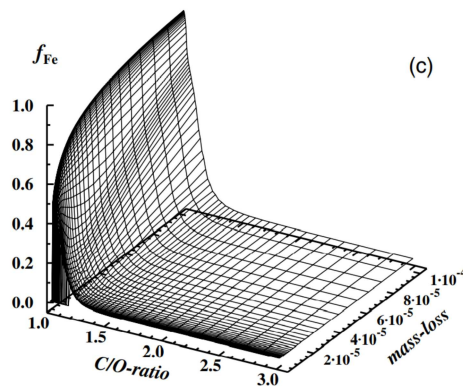


Figura 17: Grado di condensazione di Fe in funzione della perdita di massa e del rapporto C/O per una stella di classe spettrale C, luminosità  $L_* = 10^4 L_\odot$  e  $T_{\text{eff}} = 2500 \text{ K}$  (Ferrarotti & Gail 2006).

Se, invece, si pone la quantità di polvere in unità logaritmiche  $\log M_{\text{dust}}$  in funzione della massa stellare  $M_*$ , è possibile notare che la composizione dei grani dipende fortemente dalla massa della stella e dalla sua metallicità.

I modelli di evoluzione stellare sono stati elaborati nel range da 1 a  $7 M_{\odot}$  e per tre diversi valori di metallicità:  $Z = 0.04$ ,  $Z = 0.02$  e  $Z = 0.008$ . Come polveri principali si prendono quella di silicati (in cui confluiscono olivina, pirosseno e quarzo), di ferro, di SiC e la polvere di carbonio. A primo impatto, è evidente che le stelle a metallicità più alta ( $Z = 0.04$  e  $Z = 0.02$ ) tendono a formare prevalentemente polvere di silicati e polvere di ferro, mentre quelle a metallicità minore ( $Z = 0.008$ ) formano soprattutto polveri di carbonio.

In particolare, seguendo il modello con  $Z = 0.04$  (Figura 18), si osserva che stelle di 1, 1.5 e  $2 M_{\odot}$  producono polvere di silicati e ferro, dopodiché i silicati diminuiscono drasticamente per stelle di 3 e  $4 M_{\odot}$ , sostituiti da SiC e carbonio; nel modello di  $5 M_{\odot}$  sono presenti tutte e quattro le componenti, ma SiC e carbonio diminuiscono fino a  $10^{-4} M_{\odot}$ , per poi scomparire nella stella di  $7 M_{\odot}$ . Questo andamento si spiega tenendo conto che, a parità di numero di pulsioni, il processo di arricchimento superficiale del carbonio è meno efficiente nelle stelle di piccola massa (Karakas et al., 2002); il suo effetto di aumento del rapporto C/O è invece evidente tra 3 e  $5 M_{\odot}$ , ma da  $5 M_{\odot}$  in poi, l'HBB interviene prevenendo la transizione alla classe spettrale C, poiché diminuisce il rapporto C/O, contrastando l'azione del TDU.

Per  $Z = 0.02$ , si vede che lo stesso andamento si ripete, ma stavolta le stelle vengono arricchite in carbonio già a partire da  $2 M_{\odot}$ , poiché al diminuire della metallicità e a parità di massa il parametro di dredge-up aumenta (Figura 19).

A  $Z = 0.008$  (Figura 20) l'efficienza del dredge-up è visibilmente più marcata. I silicati ed il ferro hanno modo di formarsi solamente nelle stelle di 5 e  $7 M_{\odot}$ . Per tale valore di metallicità, il modello ad  $1 M_{\odot}$  non produce polveri di nessuna delle quattro tipologie, poiché non è ancora diventata una stella al carbonio.

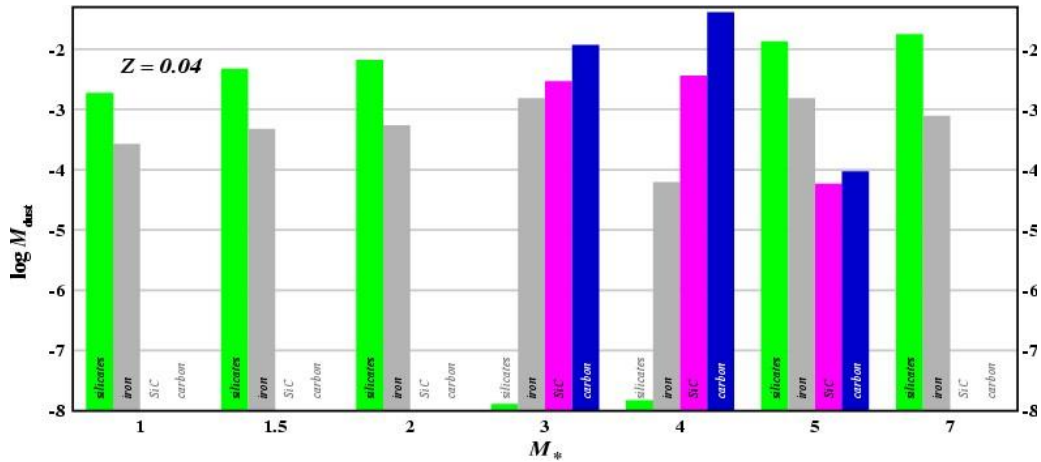


Figura 18: Modelli stellari di massa da 1 a  $7 M_{\odot}$  sono messi in relazione con la composizione delle polveri prodotte (Ferrarotti & Gail, 2006); metallicità di  $Z = 0.04$ .

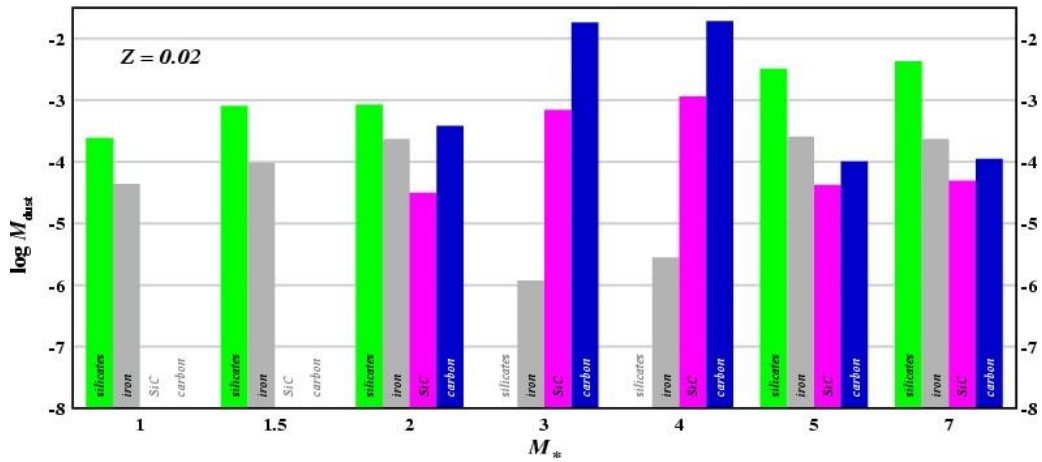


Figura 19: Modelli stellari di massa da 1 a  $7 M_\odot$  sono messi in relazione con la composizione delle polveri prodotte (Ferrarotti & Gail, 2006); metallicità di  $Z = 0.02$ .

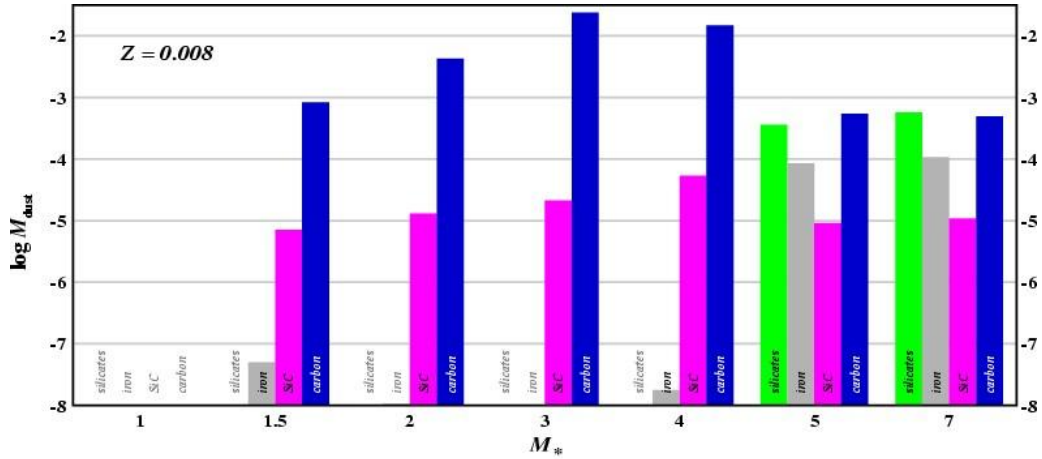


Figura 20: Modelli stellari di massa da 1 a  $7 M_\odot$  sono messi in relazione con la composizione delle polveri prodotte (Ferrarotti & Gail, 2006); metallicità di  $Z = 0.008$ .

## 5 Conclusioni

Dagli andamenti dei grafici presentati, risulta evidente la correlazione, da una parte, tra quantità di polvere condensata e tasso di perdita di massa; dall'altra, la correlazione fra composizione delle polveri, rapporto C/O, massa stellare e metallicità.

Il trend generale è chiaro: un elevato valore di perdita di massa, riscontrabile in variabili Mira ( $\simeq 10^{-6} M_{\odot}/yr$ ) e stelle in fase di superwind ( $\simeq 10^{-4} M_{\odot}/yr$ ), comporta un aumento di produzione e dunque condensazione di polveri. Queste avranno una composizione che deriva dalla classe spettrale della stella, la quale è descritta dal rapporto C/O ed è a sua volta definita dall'azione di terzo dredge-up e hot bottom burning. La formazione di stelle al carbonio, che emettono polveri di carbonio e SiC, avviene per valori di massa compresi tra  $2M_{\odot}$  e  $5M_{\odot}$ , con il limite inferiore che diminuisce al diminuire della metallicità, poiché il terzo dredge-up non avviene o è poco efficiente nelle stelle di piccola massa, mentre l'hot bottom burning abbassa il rapporto C/O per valori di massa superiori a circa  $5M_{\odot}$ .

Nonostante sia possibile identificare questo tipo di andamento, resta comunque grande l'incertezza relativa ai modelli di terzo dredge-up e di hot bottom burning, in quanto entrambi correlati al meccanismo di trasporto convettivo, del quale attualmente è difficile dare una parametrizzazione precisa. In particolare, il valore di  $\lambda$  risente fortemente della modellistica adottata e necessita di essere calibrato sulle osservazioni di stelle al carbonio: ad esempio, gli spettri di stelle *carbon-rich* possono fornire indicazioni sulle abbondanze dell'atmosfera, ma anche sulla natura delle polveri e sui meccanismi con cui esse assorbono e riemettono la radiazione che le investe (effetti di estinzione e arrossamento).

Soltanto aumentando il numero di dati osservativi disponibili, in futuro sarà possibile elaborare un modello teorico più affidabile e preciso.

## Riferimenti bibliografici

- [1] H. -P. GAIL, E. SEDLMAYR. *Mineral formation in stellar winds. I. Condensation sequence of silicate and iron grains in stationary oxygen rich outflows*. In: A&A, vol.347, pp.594-616 (July 1999).
- [2] H. -P. GAIL, E. SEDLMAYR. *Dust formation in stellar winds. II - Carbon condensation in stationary, spherically expanding winds*. In: A&A, vol.148, no. 1, pp.183-190 (July 1985).
- [3] R. J. STANCLIFFE, C. A. TOUT, O. R. POLS. *Deep dredge-up in intermediate-mass thermally pulsing asymptotic giant branch stars*. In: MNRAS, vol.352, issue 3, pp.984-992 (August 2004). DOI: 10.1111/j.1365-2966.2004.07987.x.
- [4] L. B. LUCY. *The Formation of Resonance Lines in Extended and Expanding Atmospheres*. In: ApJ, vol.163, p.95 (January 1971). DOI: 10.1086/150748.
- [5] L. B. LUCY. *Mass Loss by Cool Carbon Stars*. In: ApJ, vol.205, pp.482-491 (April 1976). DOI: 10.1086/154302.
- [6] R. GALLINO et al. *Evolution and Nucleosynthesis in Low-Mass Asymptotic Giant Branch Stars. II. Neutron Capture and the S-Process*. In: ApJ, vol.497, issue 1, pp.388-403 (April 1998). DOI: 10.1086/305437.
- [7] A. S. FERRAROTTI, H. -P. GAIL. *Mineral formation in stellar winds. III. Dust formation in S stars*. In: A&A, vol.382, pp.256-281 (January 2002). DOI: 10.1051/0004-6361:20011580.
- [8] A. S. FERRAROTTI, H. -P. GAIL. *Dust formation at low metallicity*. In: Astrophysics of Dust, Estes Park, Colorado, May 26 - 30. Edited by Adolf N. Witt, meeting abstract, id. 70. (2003).
- [9] A. S. FERRAROTTI, H. -P. GAIL. *Composition and quantities of dust produced by AGB-stars and returned to the interstellar medium*. In: A&A, vol.447, issue 2, pp.553-576 (February 2006). DOI: 10.1051/0004-6361:20041198.
- [10] A. I. BOOTHROYD, I. -J. SACKMANN. *The CNO Isotopes: Deep Circulation in Red Giants and First and Second Dredge-up*. In: ApJ, vol.510, issue 1, pp.232-250. (January 1999). DOI: 10.1086/306546.
- [11] M. A. T. GROENEWEGEN, T. DE JONG. *Synthetic AGB evolution. I. A new model*. In: A&A, vol.267, pp.410-432 (January 1993).
- [12] M. A. T. GROENEWEGEN, L. B. VAN DEN HOEK, T. DE JONG. *The evolution of galactic carbon stars*. In: A&A, vol.293, pp.381-395 (January 1995).
- [13] M. A. T. GROENEWEGEN et al.. *Dust shells around carbon Mira variables*. In: MNRAS, vol.293, issue 1, pp.18-42 (January 1998). DOI: 10.1046/j.1365-8711.1998.01113.x.
- [14] P. MARIGO, A. BRESSAN, C. CHIOSI. *The TP-AGB phase: a new model*. In: A&A, vol.313, pp.545-564 (September 1996).
- [15] P. MARIGO. *Chemical yields from low- and intermediate-mass stars: Model predictions and basic observational constraints*. In: A&A, vol.370, pp.194-217 (April 2001). DOI: 10.1051/0004-6361:20000247.
- [16] E. VASSILIADIS, P. R. WOOD. *Evolution of Low- and Intermediate-Mass Stars to the End of the Asymptotic Giant Branch with Mass Loss*. In: A&A, vol.413, p.641 (August 1993). DOI: 10.1086/173033.

- [17] A. I. KARAKAS, J. C. LATTANZIO, O. R. POLS. *Parameterising the Third Dredge-up in Asymptotic Giant Branch Stars*. In: Publications of the Astronomical Society of Australia, vol.19, issue 4, pp.515-526. (2002). DOI: 10.1071/AS02013.