



Università degli studi di Padova

Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali

**Corso di Laurea Triennale in
Ingegneria Meccanica e Meccatronica
Curriculum Meccatronico**

**STUDIO NUMERICO DELLE DISTRIBUZIONI DI TENSIONI NELLE ADIACENZE
DI INTAGLI PERIODICI IN ALBERI SOGGETTI A TORSIONE**

**NUMERICAL STUDY OF STRESS DISTRIBUTION NEAR PERIODIC NOTCHES
IN TORSION LOADED SHAFTS**

RELATORE: CH.MO PROF. MICHELE ZAPPALORTO

CORRELATORI: ING. ALESSANDRO PONTEFISSO

LAUREANDO: PIETRO BICEGO

ANNO ACCADEMICO: 2012/2013

INDICE

Introduzione.....	1
1. Teoria di riferimento	
1.1. Torsione in una trave a sezione circolare	3
1.2. La fatica	5
1.3. Fattori che influenzano la resistenza a fatica.....	8
1.4. Fattore teorico di concentrazione K_t	9
1.5. Espressioni utilizzate per il calcolo delle τ	10
2. Analisi	
2.1. Descrizione del pezzo.....	13
2.2. Metodo degli elementi finiti	14
2.3. Ansys	14
2.4. Risoluzione del problema.....	16
3. Risultati	
3.1. Prima geometria: $\rho=0,5\text{mm}$ $p=1\text{mm}$	17
3.2. Seconda geometria: $\rho=0,5\text{mm}$ $p=2\text{mm}$	19
3.3. Terza geometria: $\rho=0,5\text{mm}$ $p=4\text{mm}$	22
3.4. Quarta geometria: $\rho=0,5\text{mm}$ $p=8\text{mm}$	26
3.5. Quinta geometria: $\rho=0,5\text{mm}$ $p=16\text{mm}$	28
3.6. Sesta geometria: $\rho=2\text{mm}$ $p=1\text{mm}$	31
3.7. Settima geometria: $\rho=2\text{mm}$ $p=2\text{mm}$	35
3.8. Ottava geometria: $\rho=2\text{mm}$ $p=4\text{mm}$	38
3.9. Nona geometria: $\rho=2\text{mm}$ $p=8\text{mm}$	40
3.10. Decima geometria: $\rho=2\text{mm}$ $p=16\text{mm}$	42
4. Conclusioni	47
Bibliografia	49

INTRODUZIONE

L'obiettivo che questa tesi si propone è quello di studiare la distribuzione delle tensioni nelle adiacenze di intagli periodici in alberi soggetti a torsione.

L'analisi dei risultati ottenuti tramite l'elaborazione numerica del software Ansys sono stati confrontati con le soluzioni di alcune forme chiuse di espressioni formulate, nel 2010, da Michele Zappalorto, Paolo Lazzarin e Stefano Filippi.

In principio verrà esposta la parte teorica relativa, in particolare, al calcolo della torsione in una trave circolare e al comportamento a fatica dei componenti meccanici.

Saranno poi spiegate le espressioni chiuse attraverso le quali verrà anche valutato lo stato delle tensioni disposte lungo le linee bisettrici degli intagli.

Procederò quindi descrivendo la geometria del pezzo, il metodo degli elementi finiti e le procedure eseguite con il software di calcolo.

Infine illustrerò i casi studiati con le relative conclusioni.

1. TEORIA DI RIFERIMENTO

1.1. Torsione in una trave a sezione circolare

Si consideri una trave a sezione circolare, soggetta a due coppie di estremità tali da provocare una rotazione delle sezioni intorno all'asse longitudinale della trave (fig. 1). La torsione induce delle tensioni tangenziali τ con un andamento che sarà lineare rispetto al centro della sezione in modo che gli spostamenti avvengano secondo archi di cerchio con lo stesso andamento al centro θ (fig. 2). Dunque $\tau = Cr$.

L'angolo γ sarà direttamente proporzionale al raggio r .

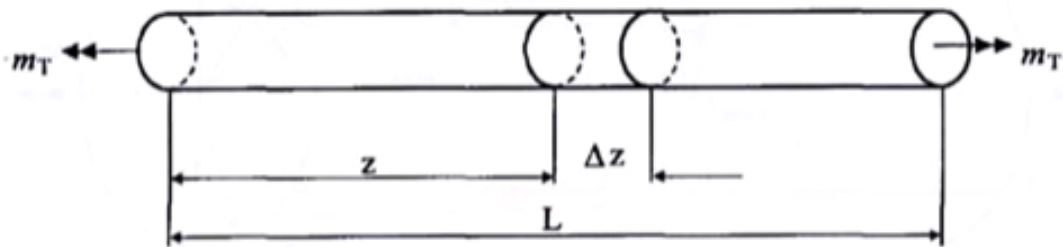


Figura1

Per definizione il momento torcente vale :

$$M_t = \int_A \tau r dA$$

Sostituendo $\tau = Cr$

$$M_t = \int_A Cr^2 dA = C \int_A r^2 dA = C J_p$$

Dove J_p è il momento geometrico polare della sezione. La costante C vale :

$$C = \frac{M_t}{J_p} = \frac{\tau}{r}$$

Quindi le tensioni tangenziali hanno la seguente espressione :

$$\tau = \frac{M_t}{J_p} r$$

detta equazione di Coulomb.

Le tensioni τ sono massime sulla circonferenza esterna $r = r_{max}$ e diminuiscono linearmente fino ad annullarsi sull'asse polare della sezione.

Per reciprocità le τ nella sezione trasversale si accompagnano le τ nella sezione longitudinale (Fig. 3).

La tensione massima τ di torsione si ha sulla superficie esterna della trave. Per una trave cilindrica l'espressione vale perciò:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \quad \text{con} \quad W_t = \frac{\pi}{16} D^3$$

W_t ha le dimensioni di una lunghezza alla terza (mm^3) ed è chiamato modulo di resistenza a torsione.

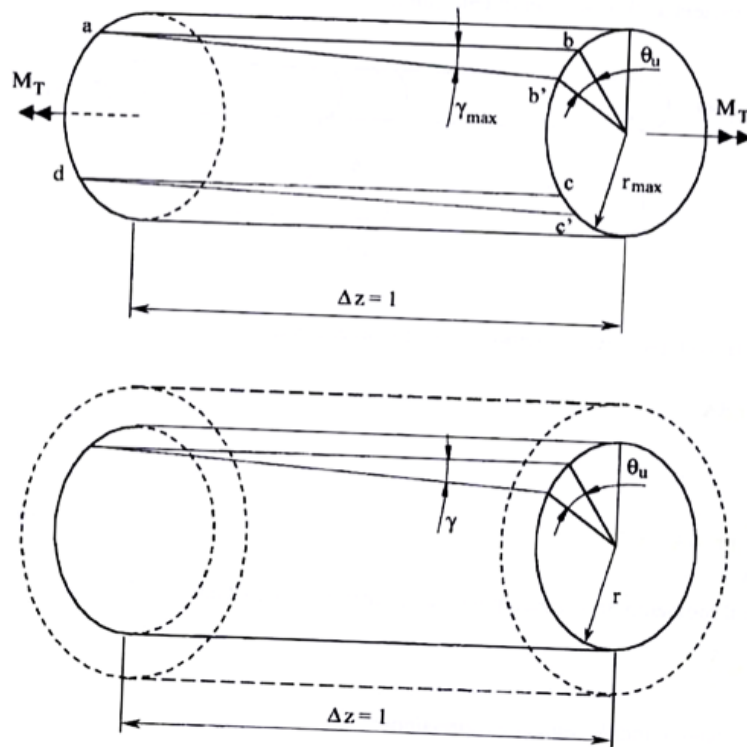


Figura 2

L'angolo θ_u che dà la rotazione tra due sezioni disposte a una distanza unitaria vale:

$$\theta_u = \frac{\gamma}{r} = \frac{\tau}{Gr} = \frac{M_t}{GJ_p}$$

Una trave di lunghezza L ha un angolo di torsione pari a:

$$\theta = \frac{M_t}{GJ_p} L$$

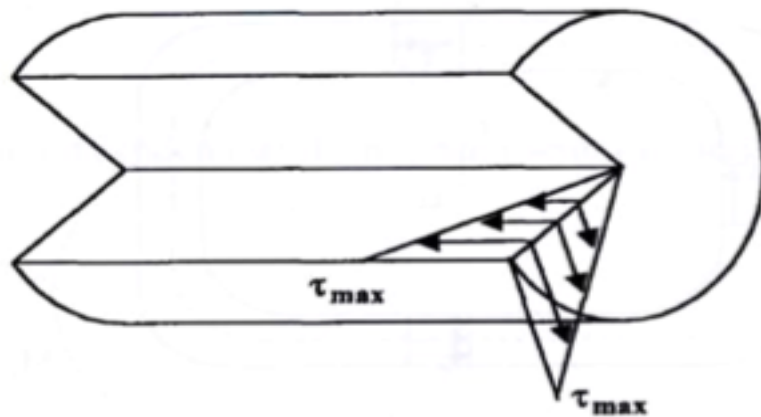


Figura 3

La rigidità torsionale della trave è il rapporto tra momento torcente e angolo di torsione θ . Una trave cilindrica può essere assimilata a una molla di costante elastica K_t se è soggetta a torsione pura.

L'espressione della costante elastica vale:

$$K_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{GJ_p}{L} \quad [\text{Nm/rad}]$$

1.2. La fatica

Ci sono applicazioni nelle quali bisogna tener conto dei carichi variabili nel tempo. Venne osservato che organi correttamente dimensionati dal punto di vista statico andavano a rottura quando i carichi si ripetevano per un numero di cicli molto elevato, anche se le sollecitazioni che agivano nei punti più critici erano nettamente inferiori dal valore critico di rottura.

Carichi ripetuti nel tempo causano un danneggiamento progressivo del materiale in seguito alla comparsa di cricche. Quest'ultime sono un difetto del materiale che si propaga fino ad arrivare al cedimento, provocando delle rotture che avvengono in campo elastico.

Sono necessarie delle analisi specifiche del componente perché dal punto di vista statico i materiali da costruzione tradizionali hanno un comportamento duttile, quando vanno a rottura, ci mostrano delle deformazioni plastiche evidenti. A fatica i materiali da costruzione si comportano in maniera fragile, rompendosi senza deformarsi plasticamente.

Il primo ricercatore ad affrontare in modo sistematico il fenomeno della fatica fu un ingegnere tedesco, Wöhler, che lavorava presso le ferrovie dello stato. Egli comprese come in presenza di un numero elevato di cicli di sollecitazioni il componente manifestasse una resistenza completamente diversa, e assai minore di quella statica. La curva della resistenza a fatica del materiale in funzione del numero di cicli viene chiamata curva di Wöhler.

Con una variazione di tipo sinusoidale ($\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin(2\pi ft)$) della tensione in funzione del tempo definiamo le grandezze in gioco:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \quad R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$$

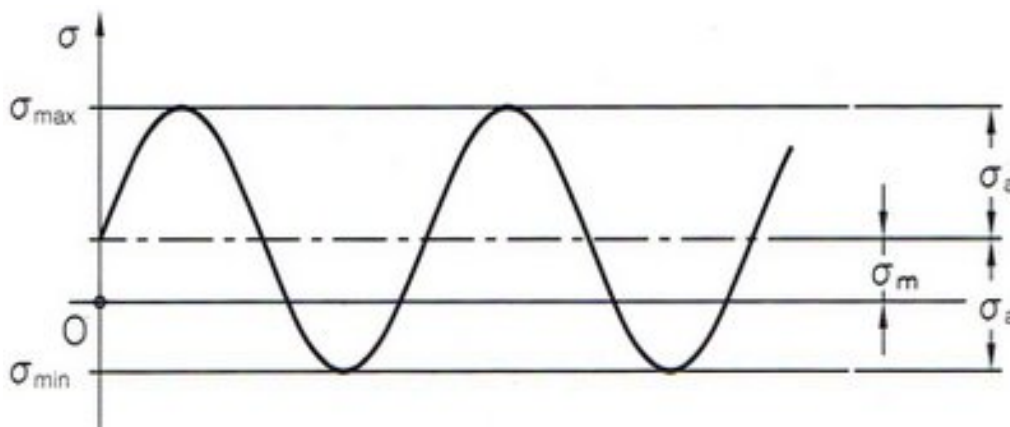


Figura 4 Variazione sinusoidale della tensione in funzione del tempo

σ_{max} è la tensione massima, σ_{min} è la tensione minima, σ_a è il valore di picco o l'ampiezza, σ_m è il valore medio della funzione sinusoidale ed R è il rapporto nominale di ciclo, quando $R = -1$ esso viene chiamato rapporto di ciclo fondamentale quindi $\sigma_{max} = -\sigma_{min}$ e $\sigma_m = 0$.

Le espressioni introdotte possono essere riscritte nella seguente forma:

$$\sigma_a = \frac{1-R}{2} \sigma_{max} \quad \sigma_m = \frac{1+R}{2} \sigma_{max} \quad \sigma_a = \frac{1-R}{1+R} \sigma_m$$

Una tipica curva di Wöhler è mostrata in figura 5, la vita a fatica è espressa in numero di cicli N che portano a rottura il componente in funzione del valore di picco σ_a . L'ampiezza di tensione σ_a è la variabile indipendente mentre N è la variabile dipendente.

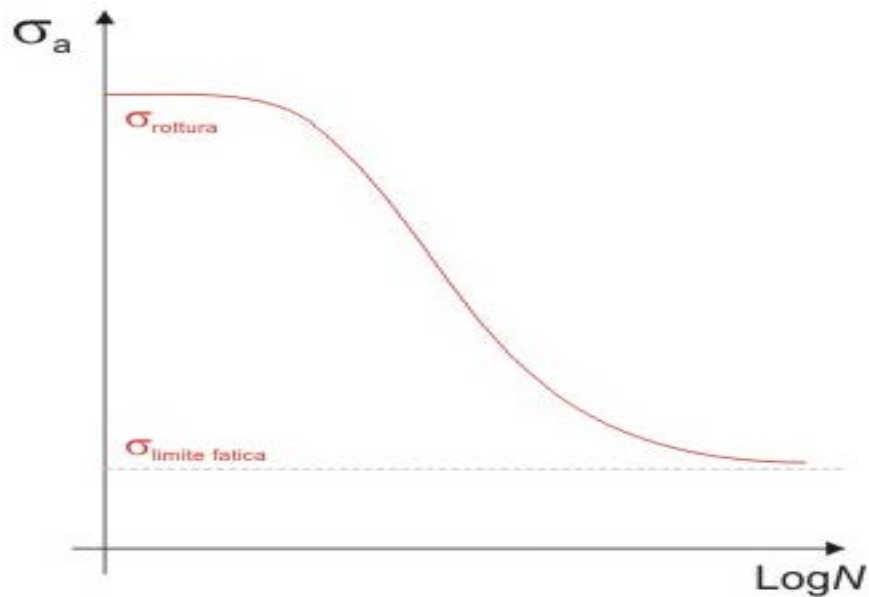


Figura 5 Curva di Wöhler

In figura 5 si nota che per N tendente a zero la curva parte dal limite di rottura del materiale, segue poi una riduzione della resistenza per un tratto d'inclinazione k costante (k è definito come pendenza inversa) ed infine compare un plateau definito limite di fatica del materiale $\sigma_{a\infty}$, al di sotto del quale non si avrà rottura.

La curva di Wöhler è determinata sperimentalmente utilizzando in genere 10-15 provini. Ciascun elemento di prova viene portato a rottura ad ampiezza costante e fornisce un singolo dato del diagramma. La curva viene ricavata con un "best fitting" dei dati sperimentali basato sul metodo dei minimi quadrati. Essa rappresenta i valori medi di resistenza a fatica: il 50% hanno rottura a sinistra della curva, il 50% alla sua destra (figura 6).

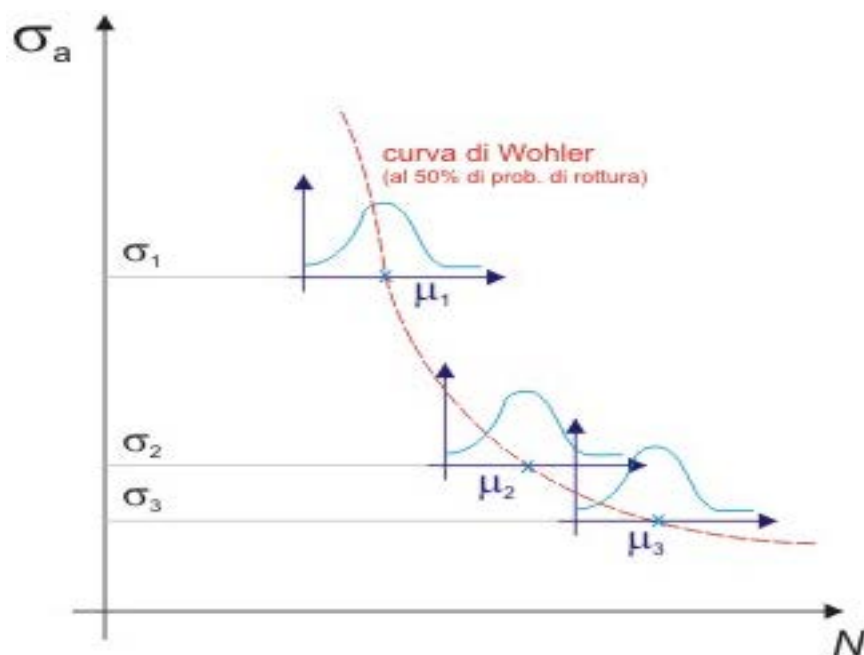


Figura 6 Curva di Wöhler ricavata con i minimi quadrati

Per la sua difficoltà di determinazione ed essendo una prova molto costosa è spesso necessario stimare il limite di fatica $\sigma_{a\infty}$ passando ad una curva semplificata e di più facile realizzazione.

Sempre con R pari al rapporto di ciclo fondamentale, in corrispondenza di mille cicli si pone l'ampiezza pari alla tensione di rottura del materiale. Tra i mille cicli fino al limite inferiore σ_A , in corrispondenza di due milioni di cicli, si fa iniziare il tratto di pendenza costante.

Per $N > N_A$ in base alle normative a cui il progettista fa riferimento ci possono essere svariati casi come ad esempio la presenza di un plateau, oppure si scende con la stessa pendenza k, oppure con la stessa pendenza k fino a cinque milioni di cicli e poi con una pendenza ridotta e pari a $2k-1$.

Il tratto inclinato della curva di Wöhler viene espresso dalla relazione seguente:

$$(\sigma_a)^k N = cost$$

Passando ai logaritmi diventa:

$$k \log(\sigma_a) + \log(N) = cost$$

ossia:

$$\log(\sigma_a) = \frac{1}{k} \log(N) + cost$$

che rappresenta una retta utilizzando le doppie scale logaritmiche.

La curva semplificativa varierà in base al rapporto di ciclo R, ai diversi parametri di influenza interni ed esterni e al diverso tipo di materiale.

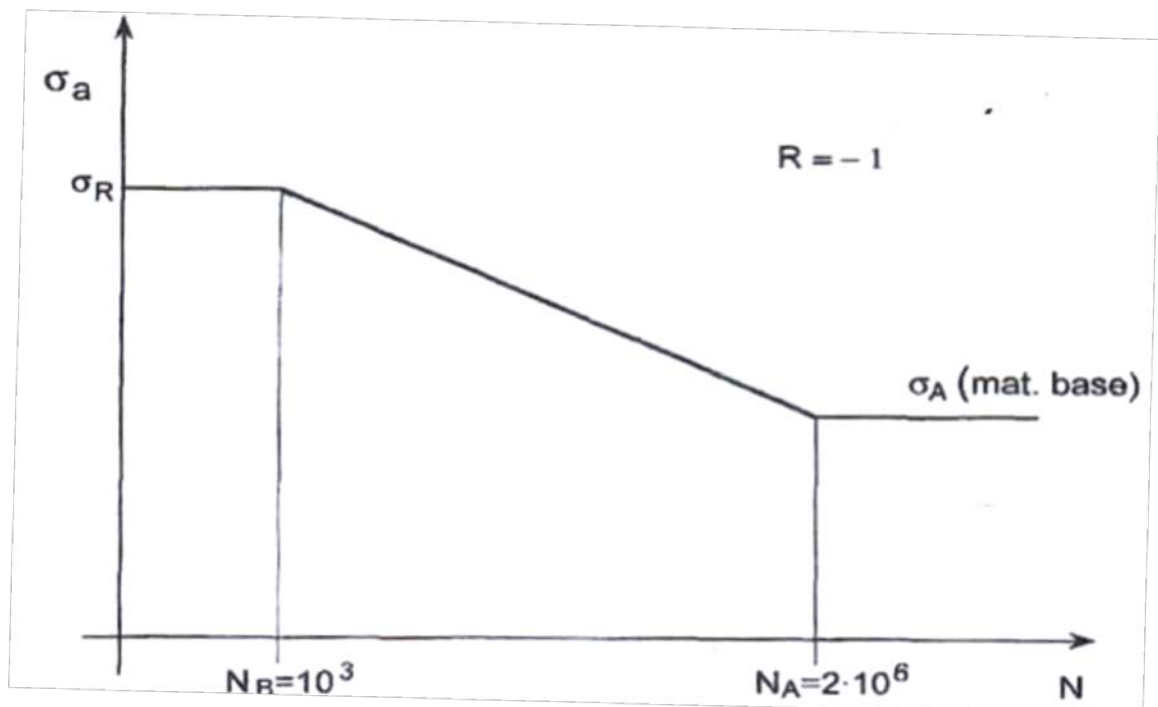


Figura 7 Curva di Wöhler semplificata

1.3. Fattori che influenzano la resistenza a fatica

E' importante conoscere i fattori che influenzano la resistenza del componente, in modo da poter costruire correttamente la curva Wöhler in maniera approssimata.

Questi parametri si suddividono in fattori esterni ed interni: i primi sono strettamente legati alle caratteristiche del componente in esame, mentre i secondi sono legati all'ambiente e alle condizioni di esercizio.

I parametri interni presi in considerazione sono cinque: il primo riguarda l'influenza del materiale base, con un rapporto di ciclo pari a $R=-1$ si è notato un legame lineare tra il limite di fatica e la tensione di rottura. La relazione lineare vale:

$$\sigma_{A\infty, R=-1} = \vartheta \sigma_R$$

con ϑ che è un coefficiente chiamato rapporto di fatica. Esso varia tra 0,35 e 0,6 e negli acciai tradizionali per costruzione vale $\vartheta=0,5$.

Il secondo parametro sono le dimensioni assolute, maggiori sono le dimensioni del componente in considerazione maggiore sarà la probabilità di trovare difetti e quindi minore sarà la resistenza a fatica. La finitura superficiale ha un'influenza significativa sulla vita necessaria a innescare la cricca, più bassa sarà la rugosità migliore sarà la resistenza.

I trattamenti termici di un organo meccanico sono un altro importante parametro interno, infatti essi possono indurre uno stato di tensione residuo sulla superficie del componente. Se questi stati residui sono di compressione migliorano la resistenza a fatica perché impediscono la propagazione dei difetti del materiale, al contrario le tensioni residue di trazione facilitano la propagazione della cricche. L'ultimo parametro interno che verrà approfondito nel prossimo paragrafo sono le variazioni geometriche.

Anche i fattori esterni sono cinque: un primo parametro è la presenza di tensione media o di rapporto di ciclo, il cui aumento porta effetti negativi che possano essere quantificate con tecniche specifiche. Altro fattore esterno è il tipo di sollecitazione, infatti il volume di un materiale che è soggetto alla massima tensione influenza la resistenza a fatica; le tre principali tipologie studiate sono in ordine di criticità, la flessione piana, la flessione rotante e la trazione (figura 8).

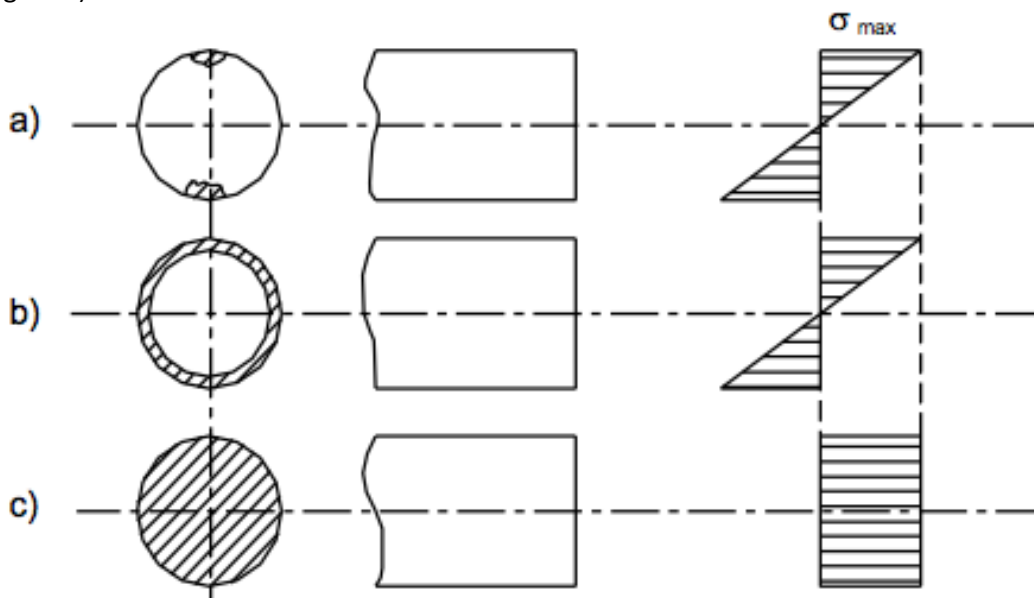


Figura 8 Effetto di diversi tipi di carichi

L'ambiente di esercizio ha un ruolo importante, ed in particolare due fattori, la temperatura e la presenza o meno di agenti corrosivi; la prima ha un effetto negativo se è tale da provocare una variazione microstrutturale della grana cristallina, mentre la seconda è pericolosa se si

lavora in un ambiente umido tale da intaccare la finitura superficiale dovuta a fenomeni corrosivi.

Ci sono due aspetti da considerare nelle modalità di variazioni del carico: uno è il tipo di forma d'onda che però si è scoperto non avere alcuna influenza sulla resistenza a fatica, mentre l'altro è la frequenza di esercizio.

La frequenza agisce in maniera negativa se è tale da indurre un fenomeno di isteresi con conseguente riscaldamento del materiale stesso, riconducendo tale processo al problema della temperatura. Per i materiali da costruzione si hanno questi fenomeni per frequenze molto elevate circa a 100Hz difficile da raggiungere per molte applicazioni. Per i polimeri l'isteresi del pezzo si manifesta intorno ai 10 Hz, un range di frequenze molto più basso e più facile da raggiungere.

Ultimo ma non meno importante parametro esterno è la storia di carico, per la quale esiste la regola di Miner. Essa afferma che il cedimento a fatica avviene quando si soddisfa la seguente relazione:

$$\sum_i \frac{n_i}{N_i} = 1$$

con n_i numero di cicli per blocco di carico e N_i numero di cicli per cui si ha rottura con il medesimo carico.

1.4.Fattore teorico di concentrazione K_t

Variazioni geometriche del componente come intagli e fori vanno a modificare le distribuzioni nominali di tensione. In questi punti dove si hanno degli effetti di concentrazione delle tensioni, si ha la maggiore probabilità di innescare le cricche che portano a rottura per fatica. In una piastra forata la distribuzione di tensione potrebbe essere rappresentata come in figura 9, dove le tensioni nominali sulla sezione netta e lorda sono:

$$\sigma_{nom,n} = \frac{F}{(W-d)t} \quad \sigma_{nom,g} = \frac{F}{Wt}$$

con F la forza applicata, W la larghezza totale, d il diametro del foro e t lo spessore del pezzo.

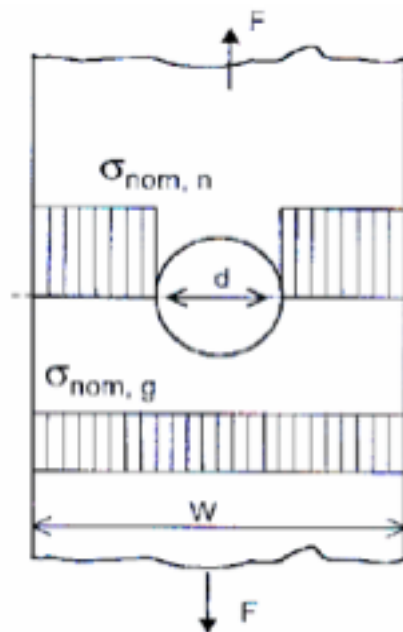


Figura 9 Tensioni nominali in una piastra forata soggetta a trazione

Nella realtà la distribuzione di tensione non corrisponde al grafico in figura 9, infatti in corrispondenza del bordo del foro ci sarà la tensione massima detta tensione di picco elastico (figura 10) e avrà un andamento decrescente non lineare allontanandosi da esso.

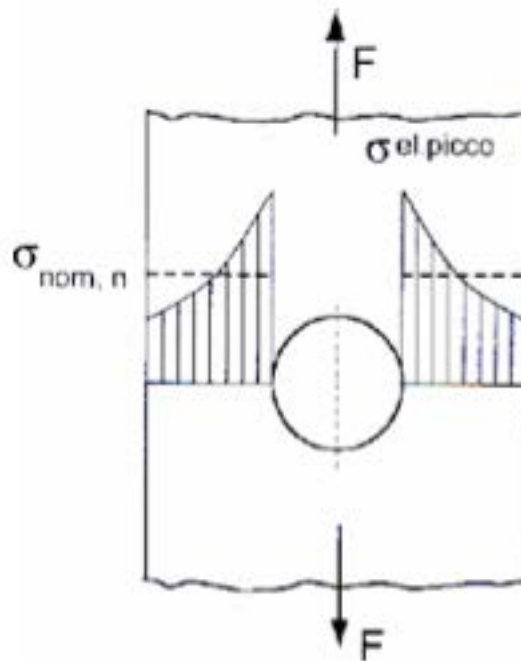


Figura 10 Tensioni reali in una piastra forata soggetta a trazione

E' presente un'analogia idrodinamica dove lo stato di tensione può essere assimilato alla velocità del fluido. All'interno del condotto il moto del fluido sarà regolare nelle zone lontane dall'ostacolo, mentre avrà una perturbazione aumentando la velocità sue vicinanze.

Il coefficiente teorico di concentrazione delle tensioni detto anche K_t , serve per calcolare quanto la tensione di picco sia elevata rispetto a quella nominale:

$$K_t = \frac{\sigma_{el.picco}}{\sigma_{nom,n}}$$

Spesso compare anche un pedice "n" o "g" a seconda che la tensione nominale sia riferita alla sezione netta o lorda.

k_{tn} è un fattore teorico perché non dipende dalle proprietà del materiale e dalle dimensioni assolute ma solamente dalla geometria del pezzo che si sta considerando.

Esso può essere calcolato tramite delle analisi matematiche o con metodi numerici come gli elementi finiti; inoltre esiste un manuale "Peterson's stress concentration factors", contenente i valori tabulati di k_{tn} per alcune geometrie delle piastre.

1.5. Espressioni utilizzate per il calcolo delle τ

Si sono utilizzate in questa tesi due espressioni in forma chiusa per calcolarsi le tensioni tangenziali lungo le bisettrici degli intagli dell'albero assialsimmetrico soggetto a torsione.

La prima espressione utilizzata è la seguente:

$$\tau_{zy} = \frac{\tau_{max}}{\omega_3} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda_3 - 1} \left(1 + \left(\frac{r}{r_3}\right)^{\mu_3 - \lambda_3}\right) \left(1 - \frac{r - r_0}{R}\right) \quad (1)$$

dove R è il raggio della sezione netta, τ_{max} è la tensione sull'apice dell'intaglio, ω_3 nel nostro caso è uguale a 2,0155, $\lambda_3=0,5000$, $\mu_3=0,40978$, $r_3= \lambda_3\rho$ con ρ pari al nostro raggio di raccordo dell'intaglio, $r_0=(1 - \lambda_3)\rho$ ed infine $r=$ distanza dall'apice dell'intaglio $+\frac{\rho}{2}$.

Come fatto in Lazzarin et al. (2007) e Zappalorto et al. (2008), l'ultimo termine sulla destra dell'equazione 1, è stato introdotto per tener conto della diminuzione lineare della tensione di taglio nominale. Si evidenzia che nell'espressione 1 le distribuzioni delle tensioni di taglio dipendono da due esponenti che possono essere determinati analiticamente in funzione dell'angolo di apertura dell'intaglio. L'origine è posta a una distanza pari a r_0 dall'apice dell'intaglio sulla linea bisettrice. La seconda espressione utilizzata è:

$$\tau_{zy} = \frac{\tau_{max}}{\omega_3} \left(1 + \left(\frac{\text{Arctan}[(r-r_0)m]}{mr_0}\right)^{\lambda_3-1}\right) \chi \left(1 + \left(\frac{r}{r_3}\right)^{\mu_3-\lambda_3}\right) \left(1 - \frac{r-r_0}{R}\right) \quad (2)$$

Il valore m da utilizzare nell'espressione 2 può essere facilmente determinato mediante un'equazione di equilibrio sulla sezione netta:

$$\int_0^R \left(1 + \frac{\text{Arctan}[(R-t)m]}{mr_0}\right)^{\lambda_3-1} \chi \left(1 + \left(\frac{R+r_0-t}{r_3}\right)^{\mu_3-\lambda_3}\right) t^3 dt = \frac{\omega_3 R^4}{4k_{tn}}$$

dove è utilizzato il cambiamento di variabile $t = R-(r-r_0)$.

Il valore di m è stato calcolato tramite un programma trascritto con il software mathematica che consiste nell'inserire nel caso di cui si sta prendendo in considerazione, il valore di k_{tn} e il raggio di raccordo dell'intaglio ρ .

Successivamente si proseguirà provando ad inserire m per tentativi fino a quando il programma ci darà un risultato prossimo allo 0, di conseguenza si utilizzerà il valore che rispetta tale condizione.

Qui k_{tn} è il fattore teorico di concentrazione delle tensioni riferito alla sezione netta della barra arrotondata ed è dato dalla seguente formula:

$$k_{tn} = \frac{\tau_{max}}{\tau_{nom,netta}}$$

dove la tensione nominale netta corrisponde pari a :

$$\tau_{nom,netta} = 100 \chi \left(\frac{R_e}{R}\right)^3$$

con R il raggio della sezione netta e R_e il raggio della sezione lorda mentre il valore 100 risulta essere la massima tensione nominale di taglio della piastra.

L'espressione 2, risulta essere più precisa della 1. Infatti si nota che con l'eq. 1 la precisione viene a mancare man mano che ci si allontana dall'apice dell'intaglio andando a sottostimare le tensioni, mentre i risultati ottenuti con la 2 sono soddisfacenti anche se ci troviamo distanti dall'intaglio.

2. ANALISI

2.1. Descrizione del pezzo

L'elemento preso in considerazione è una piastra con tre intagli periodici come in figura 11. Alla destra del pezzo ci sono tre intagli con una forma ad U posti ad una uguale distanza tra loro; essi hanno una profondità pari a 10mm che rimarrà tale per tutti i dieci casi analizzati, mentre il raggio di raccordo come il passo tra un intaglio e l'altro varieranno nei diversi casi. La sezione è simmetrica rispetto all'asse Y quindi verrà disegnata solo metà superficie e non ci sarà bisogno di specificare questa simmetria poiché il software rispetta già questa proprietà.

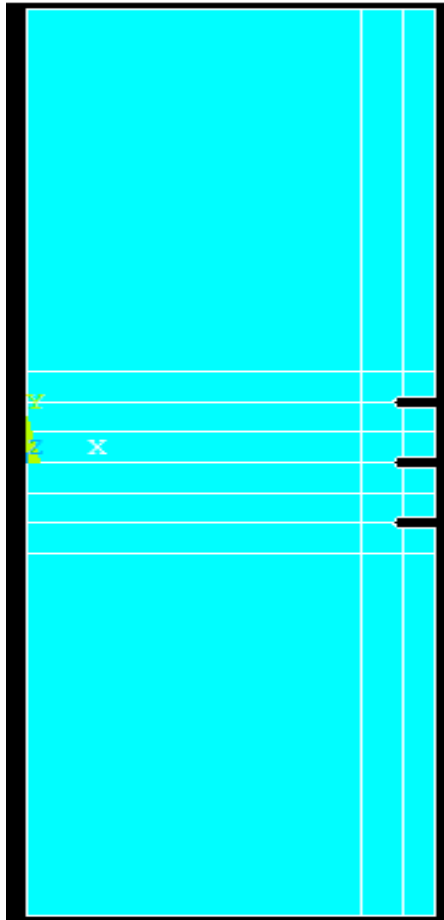


Figura 11 Forma della sezione analizzata

La piastra ha un'altezza pari a 300mm e una larghezza di 100mm, mentre lo spessore si considera irrilevante rispetto alle altre due dimensioni.

I dieci casi presi in considerazione si suddividono in base al raggio di raccordo e al passo utilizzato tra un intaglio e l'altro. In particolare i raggi di raccordo utilizzati sono due ($p=0,5\text{mm}$ e $p=2\text{mm}$) e le distanze tra un intaglio e l'altro sono cinque ($p=1\text{mm}$, $p=2\text{mm}$, $p=4\text{mm}$, $p=8\text{mm}$, $p=16\text{mm}$).

I primi cinque casi sono stati analizzati con il raggio di raccordo $p=0,5\text{mm}$ e i restanti cinque con un raggio $p=2\text{mm}$, ovviamente variando da un caso all'altro le distanze tra i vari intagli. Per avere delle tensioni significative sulle corrispettive bisettrici degli intagli si è applicato una forza F_z tale da poter provocare sulla sezione lorda una tensione massima nominale di taglio pari a $\tau_{nom}^{max}=100\text{Mpa}$. Le formule utilizzate per determinare F_z tramite τ_{nom}^{max} sono:

$$\tau_{nom}^{max} = \frac{M_t}{J_p} R_e$$

M_t è il momento torcente, R_e è il raggio della sezione lorda e infine J_p è il momento geometrico polare della sezione. Sostituendo risulta che:

$$100 = \frac{(F_z R_e) R_e}{\frac{\pi}{32} (2R_e)^4}$$

e quindi F_z risulta :

$$F_z = \frac{100\pi}{2} R_e^2 = 1,57 \times 10^6 \text{Mpa}$$

F_z sarà applicata nell'angolo in alto a destra della piastra.

2.2. Metodo degli elementi finiti

Il metodo degli elementi finiti (FEM) è una tecnica numerica usata per trovare le soluzioni approssimate di problemi descritti da equazioni differenziali alle derivate parziali riducendo queste ultime ad un sistema di equazioni algebriche. Il metodo FEM ha una posizione dominante nel panorama delle tecniche numeriche di approssimazione e rappresenta il kernel di gran parte dei codici di analisi automatici.

Esso consiste nel discretizzare il continuo in una griglia costituita da tanti elementi finiti: triangoli e quadrilateri per domini 2D, esaedri e tetraedri per domini 3D.

Su ciascun elemento il codice numerico è costituito da un vettore "forze" (F) e un vettore "spostamento" (f), impostando un'equazione matriciale simile all'equazione di una molla:

$$\{F\} = [K] \{f\}$$

dove la matrice [K] prende il nome di matrice di rigidità.

I risultati delle funzioni non saranno valori esatti, ma valori che procureranno il minor errore su tutta la soluzione. La soluzione sarà tanto più reale quanto più piccoli saranno gli elementi del nostro componente; questo implica un aumento del numero di elementi e di equazioni algebriche da risolvere che avrà come risultato anche un aumento del tempo computazionale.

Bisogna poi fare un'analisi di sensibilità delle mesh tale per cui oltre ad un certo numero di elementi k_{tn} tende ad un valore asintotico. Il numero corretto di elementi da scegliere per analizzare il pezzo è quindi il primo valore di k_{tn} che uguaglia la convergenza.

Inoltre il componente dovrebbe avere delle mesh regolari che evitano di creare delle distorsioni della griglia. Per ottenere dei risultati il più possibile precisi la mesh dovrebbe essere più fitta nei punti più critici della struttura. Il metodo degli elementi finiti viene utilizzato maggiormente per risolvere problemi poggianti su leggi di tipo lineare, come ad esempio i problemi di sforzi, deformazioni in campo elastico e la diffusione del calore all'interno di un corpo materiale.

2.3. Ansys

Il software che è utilizzato per l'analisi degli elementi finiti si chiama Ansys.

Esso si suddivide in tre fasi: quella di preprocessor, solution e general postprocessor.

Nella prima fase si definiscono le proprietà del materiale cioè se è lineare isotropico e omogeneo, dopodichè si disegna la sezione creando le aree e la griglia discretizzata nel continuo (mesh), poi si applicano forze e momenti del caso.

In solution si risolvono le equazioni differenziali alle derivate parziali del problema approssimate a delle semplici equazioni algebriche.

Infine nella fase general postprocessor si analizzano le tensioni dei punti critici, il fattore teorico di concentrazione (che è fondamentale per la fatica), la deformazione della sezione, grafici e listati del pezzo.

Nella prima immagine è rappresentata la sezione del pezzo nella fase di preprocessor, nella seconda la deformazione della sezione dovuta alle forze di trazione ed infine nella terza è raffigurata lo stato delle tensioni lungo la coordinata Y.

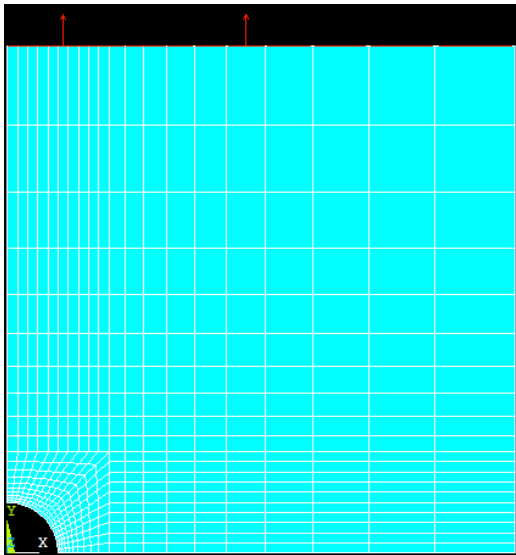


Figura 12 Mesh

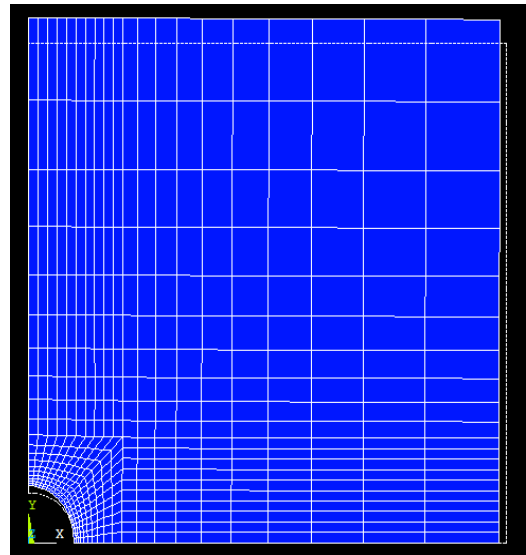


Figura 13 Deformata

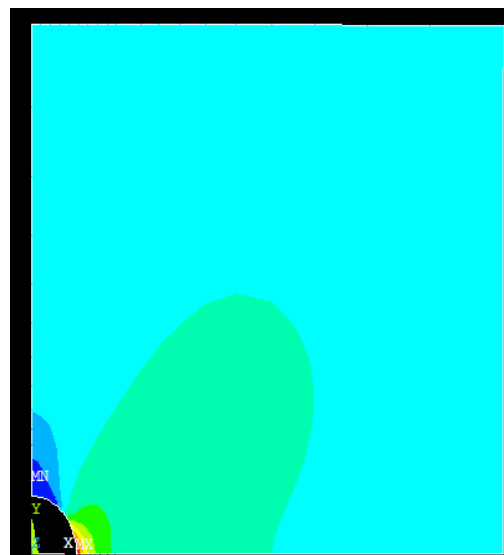


Figura 14 Tensione

2.4. Risoluzione del problema

Per l'analisi del pezzo creato tramite il software Ansys, è stato utilizzato nella fase di preprocessor l'elemento armonico PLANE 83 per effettuare l'analisi degli elementi finiti sulle basi di modelli bidimensionali.

Si sono definite le proprietà del materiale tramite la voce material props (serve per la matrice di rigidità), impostando un materiale lineare, omogeneo, isotropico con modulo di Young $E=206000\text{Mpa}$ e coefficiente di poisson $\nu=0,3$ che sono caratteristiche di un acciaio comune.

La sezione è stata disegnata tramite i comandi di CAD presenti nel software, sono poi state definite le aree e le mesh cercando di avere una griglia più fitta in prossimità dei tre intagli periodici, per evitare di avere delle approssimazioni sbagliate nel calcolo delle tensioni (figura 15). Per applicare il momento torcente abbiamo dovuto vincolare il lato inferiore della piastra tramite la funzione displacement su solution; in seguito abbiamo applicato una forza F_z pari a $1,57 \times 10^6$ sull'angolo in alto a destra della sezione.

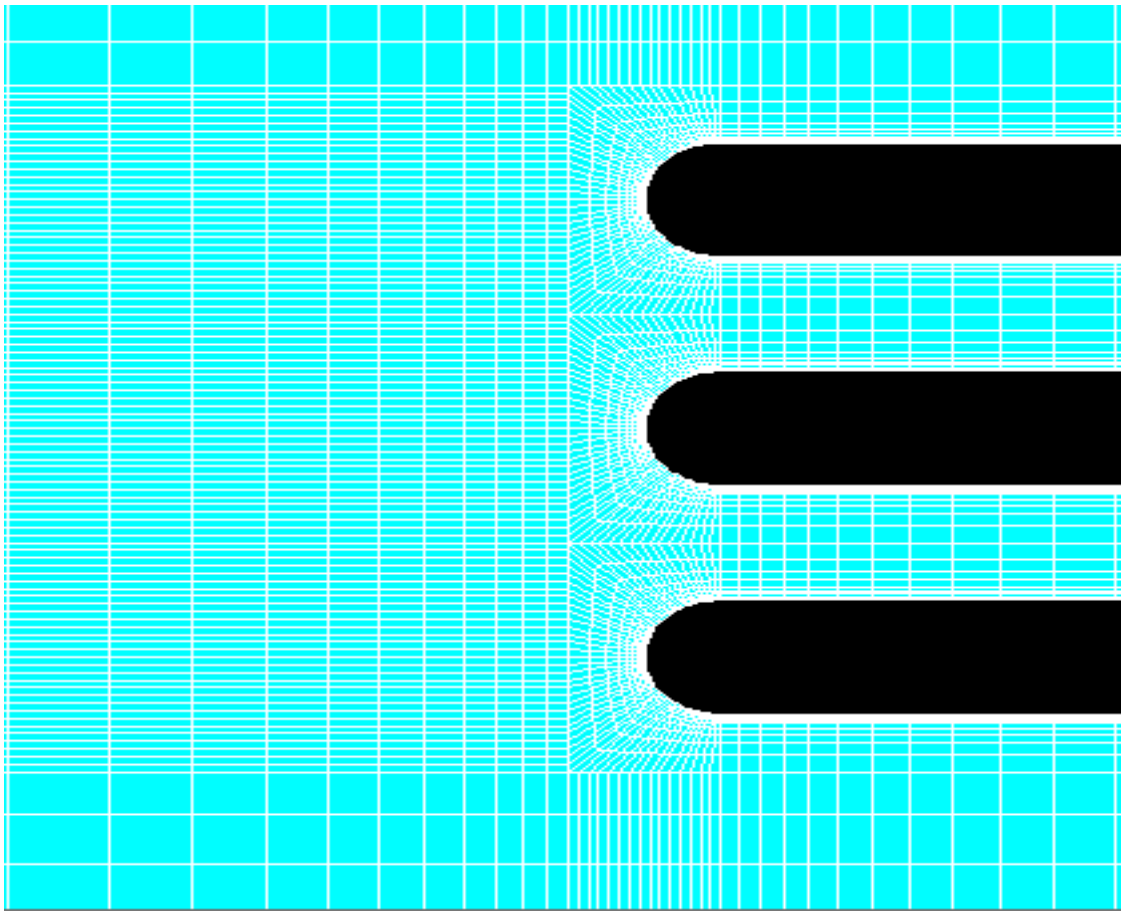


Figura 15 Rappresentazione delle mesh in prossimità dei tre intagli periodici

In solution dentro la sezione solve, troviamo la funzione current LS, che completa la fase di elaborazione degli elementi finiti di Ansys. Per poter visualizzare i risultati si seleziona il general postprocessor: le soluzioni di interesse sono le tensioni di taglio in prossimità delle bisettrici dei tre intagli periodici perché le distribuzioni di tensione lungo queste linee sono comunemente considerate le più importanti componenti di tensione per l'analisi a fatica. Per confrontare i risultati provenienti dalla FEM con le formule 1, 2 si è utilizzato un foglio di calcolo excel dove i risultati provenienti dall'analisi di Ansys sono stati ricavati e listati tramite le path operations.

3. RISULTATI

Di seguito verranno esposti i risultati e i grafici dei tre intagli che sono stati analizzati tramite il software Ansys. L'obiettivo principale è quello di confrontare i risultati ricavati dalle FEM con le espressioni chiuse analizzate nel paragrafo 1.5.

3.1. Prima geometria: $\rho=0,5\text{mm}$ $p=1\text{mm}$

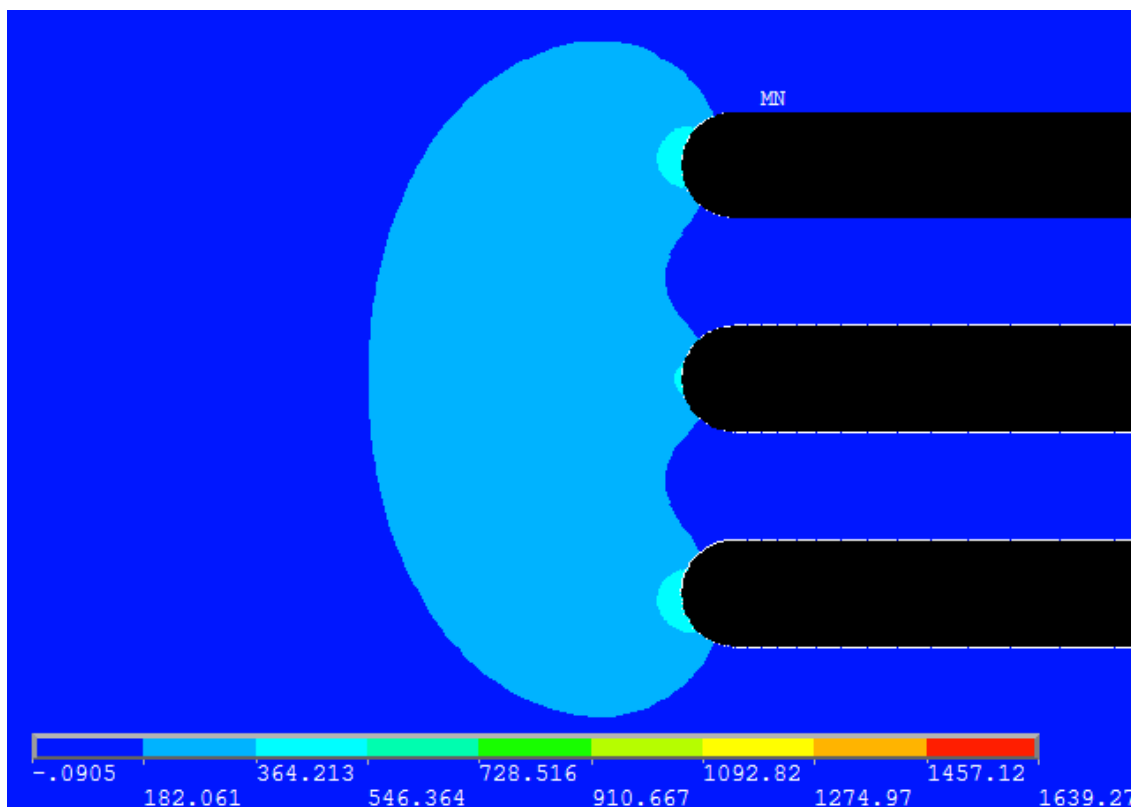


Figura 16 Distribuzione delle tensioni in prossimità dei tre intagli

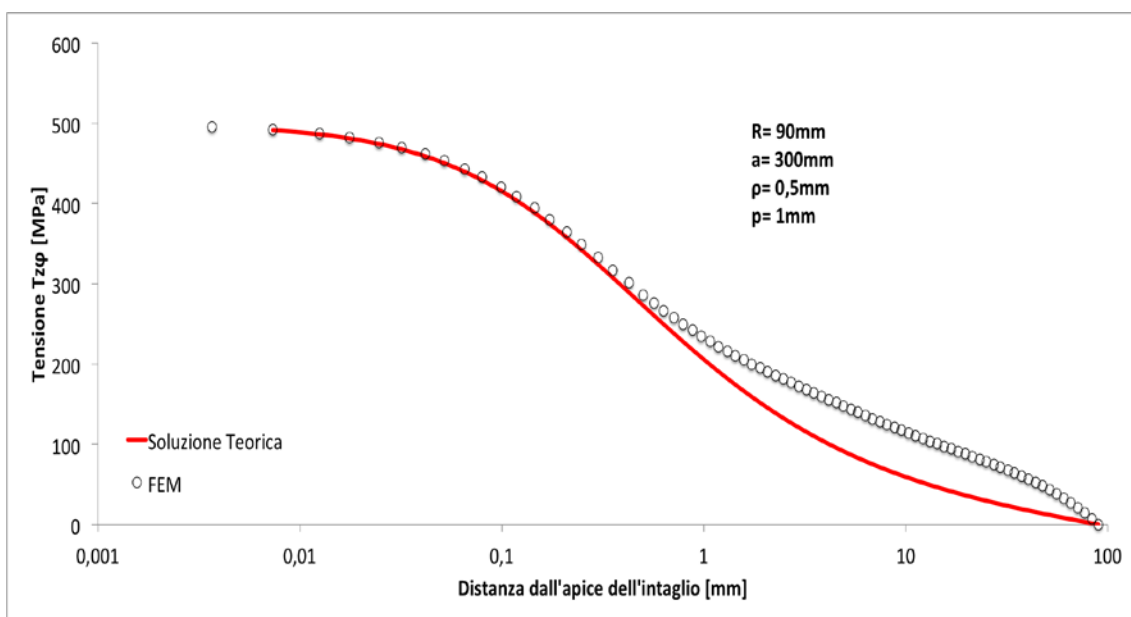


Figura 17 Andamento delle tensione $Tz\phi$ del primo intaglio a partire dall'alto

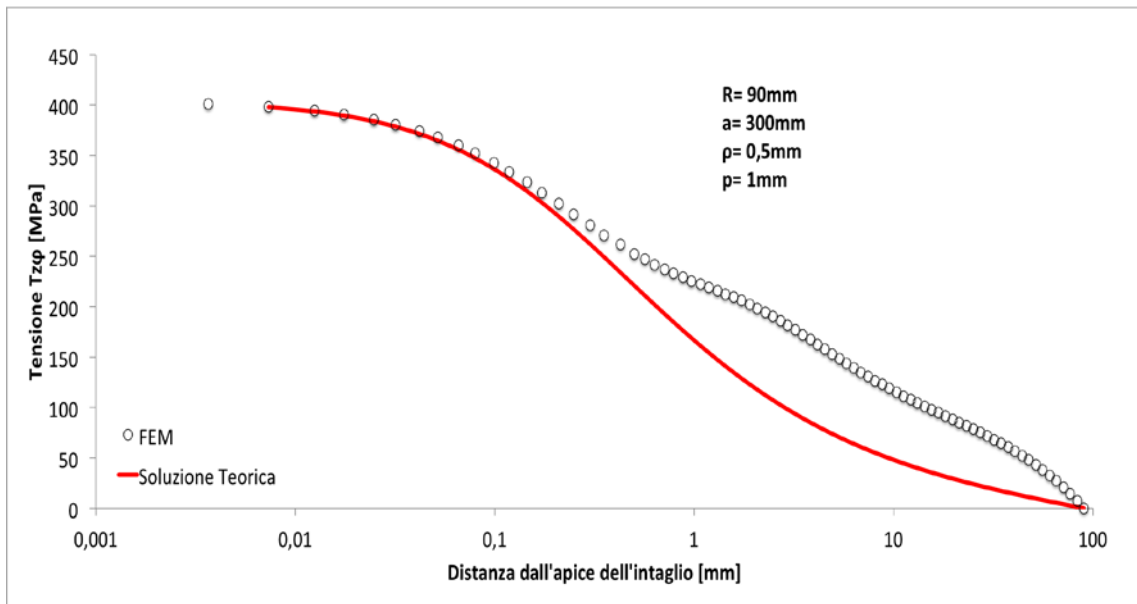


Figura 18 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del secondo intaglio a partire dall'alto

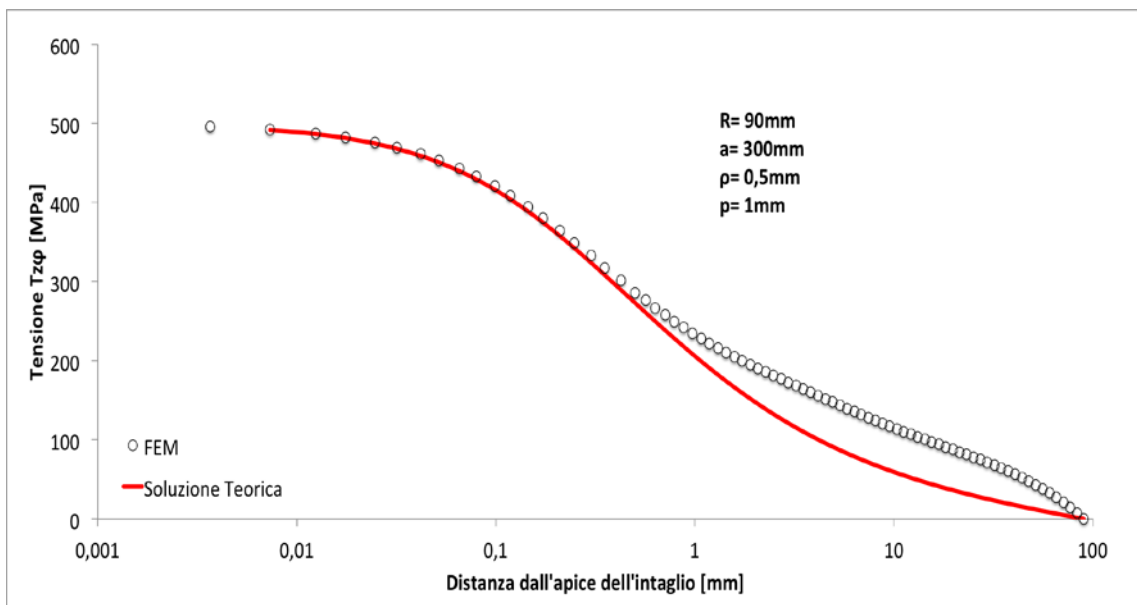


Figura 19 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del terzo intaglio a partire dall'alto

In questo primo caso è stata utilizzata soltanto l'espressione 1; si può subito notare che questa è precisa nelle vicinanze degli intagli, mentre mano a mano che ci si allontana inizia a sottostimare le tensioni di taglio. Come prima analisi possiamo affermare che l'intaglio centrale è influenzato dagli altri due più esterni, infatti in figura 18 la soluzione teorica è meno precisa rispetto alle altre due soluzioni.

3.2. Seconda geometria: $\rho=0,5\text{mm}$ $p=2\text{mm}$

Nella seconda geometria sono analizzate entrambe le espressioni chiuse. Inizialmente verranno esposti i grafici calcolati con l'equazione 1 e successivamente quelli dell'equazione 2.

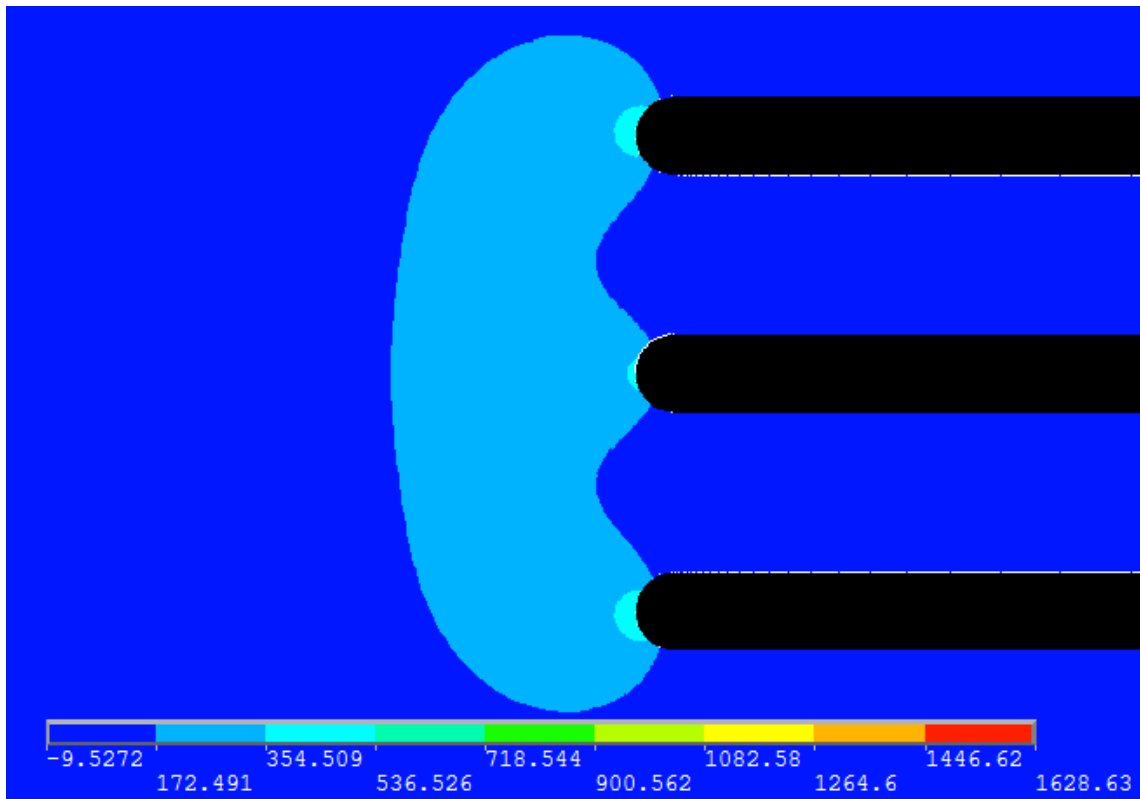


Figura 20 Distribuzione delle tensione in prossimità dei tre intagli

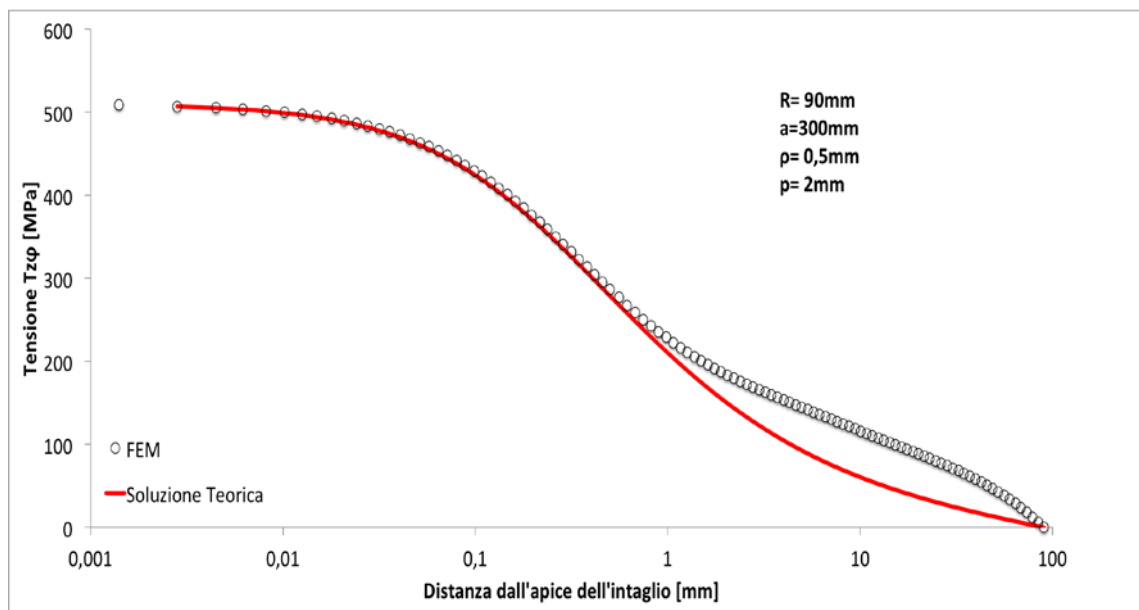


Figura 21 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del primo intaglio a partire dall'alto

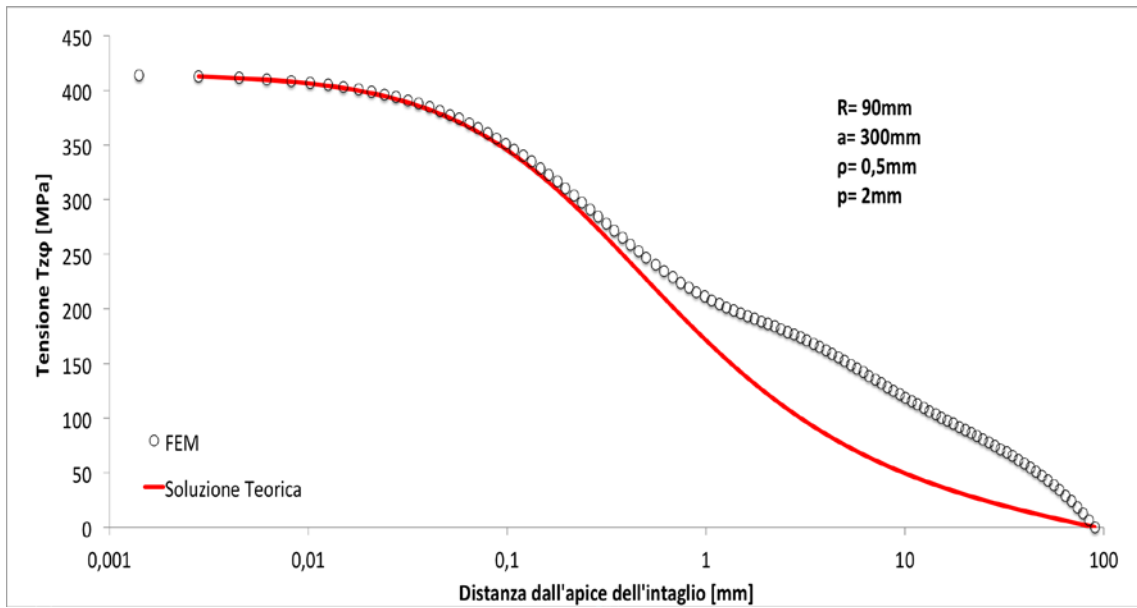


Figura 22 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del secondo intaglio a partire dall'alto

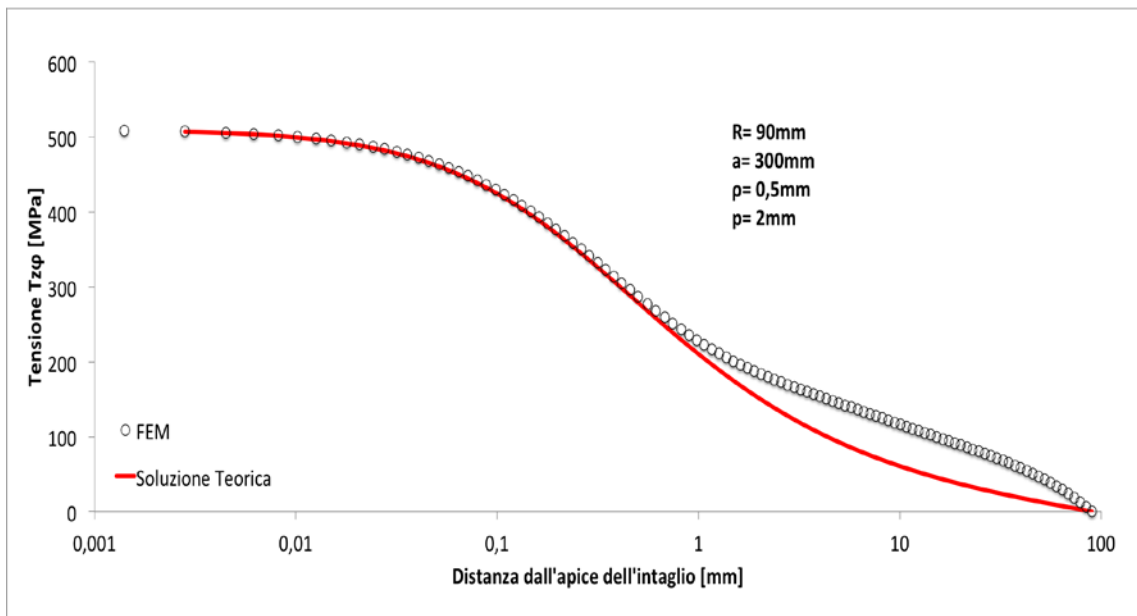


Figura 23 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del terzo intaglio a partire dall'alto

Si sono determinati il valore m ed il fattore teorico di concentrazione delle tensioni; con tali valori sono stati calcolati i risultati dell'espressione 2 che vengono riportati nei seguenti grafici.

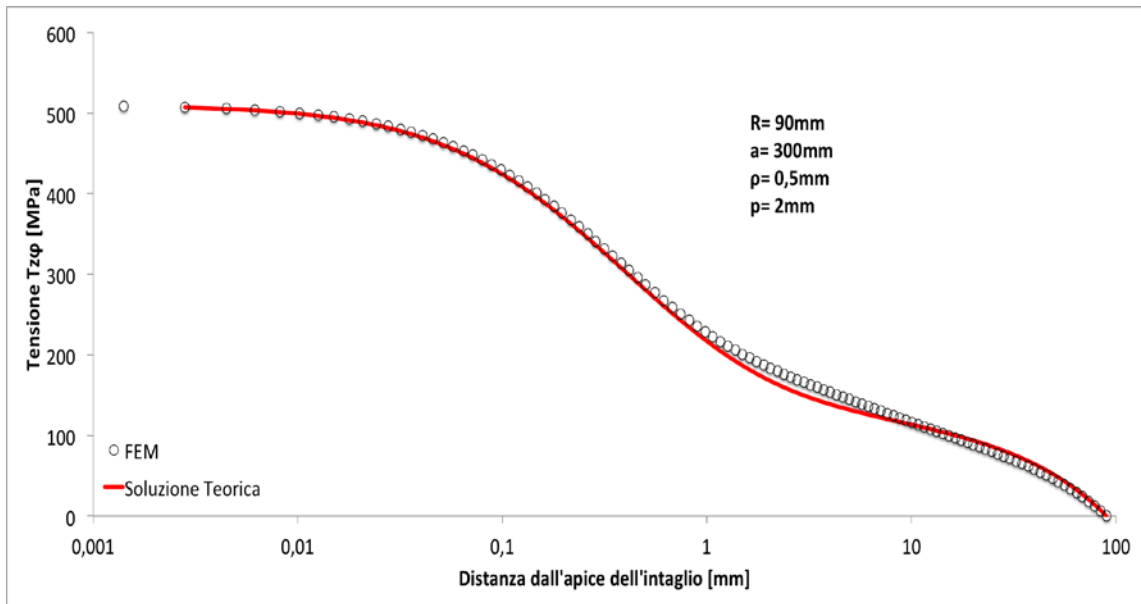


Figura 24 Andamento delle tensione $T_{z\varphi}$ del primo intaglio a partire dall'alto

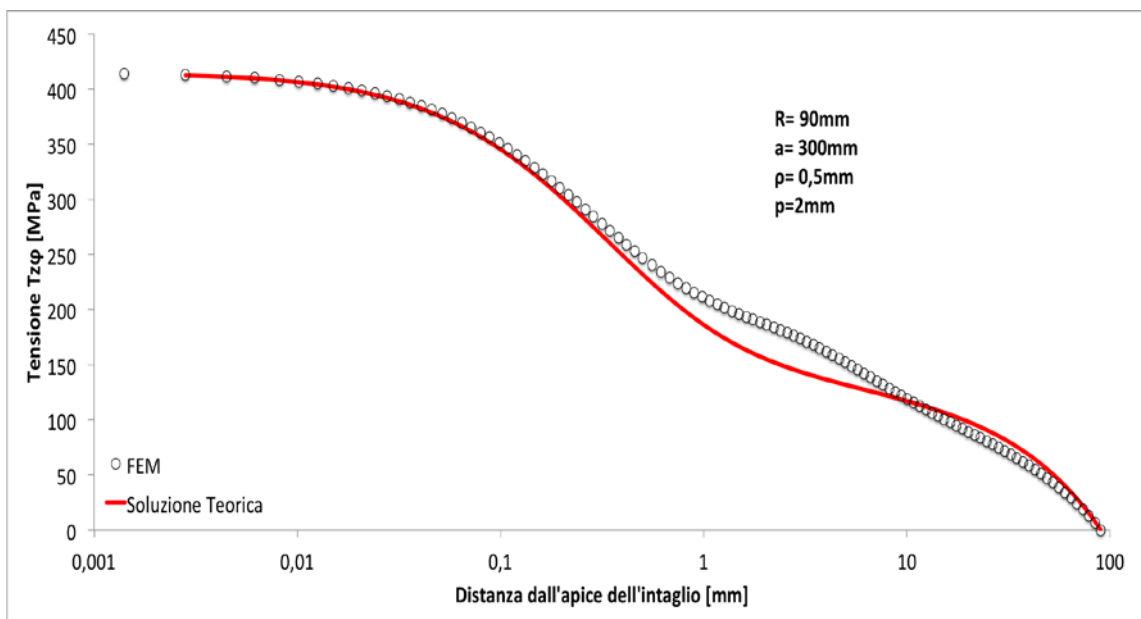


Figura 25 Andamento delle tensione $T_{z\varphi}$ del secondo intaglio a partire dall'alto

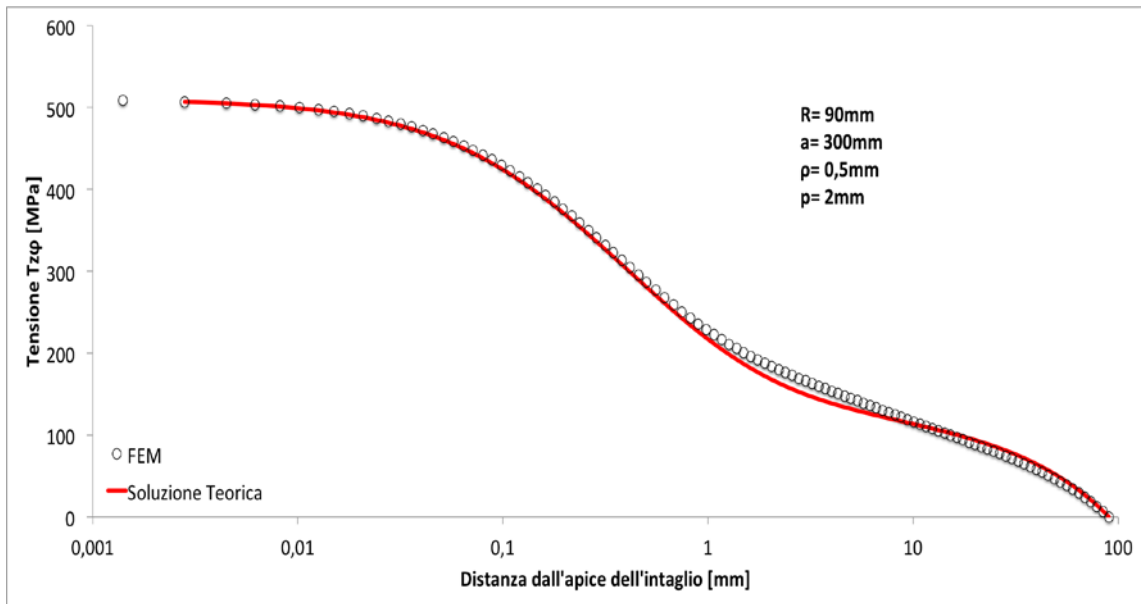


Figura 26 Andamento delle tensione $Tz\phi$ del terzo intaglio a partire dall'alto

Il fattore teorico di concentrazione è uguale nel primo e nel terzo intaglio poiché le distribuzioni di tensioni hanno lo stesso andamento. Il parametro vale $K_{tn}=3,72$ mentre per l'intaglio centrale corrisponde $K_{tn}=3,03$.

Utilizzando la seconda espressione si può notare che inizia a seguire con più precisione l'andamento delle tensioni dei tre intagli anche allontanandosi dagli apici.

L'intaglio centrale continua ad essere influenzato dagli altri due, infatti la precisione è minore.

3.3.Terza geometria: $\rho=0,5\text{mm}$ $p=4\text{mm}$

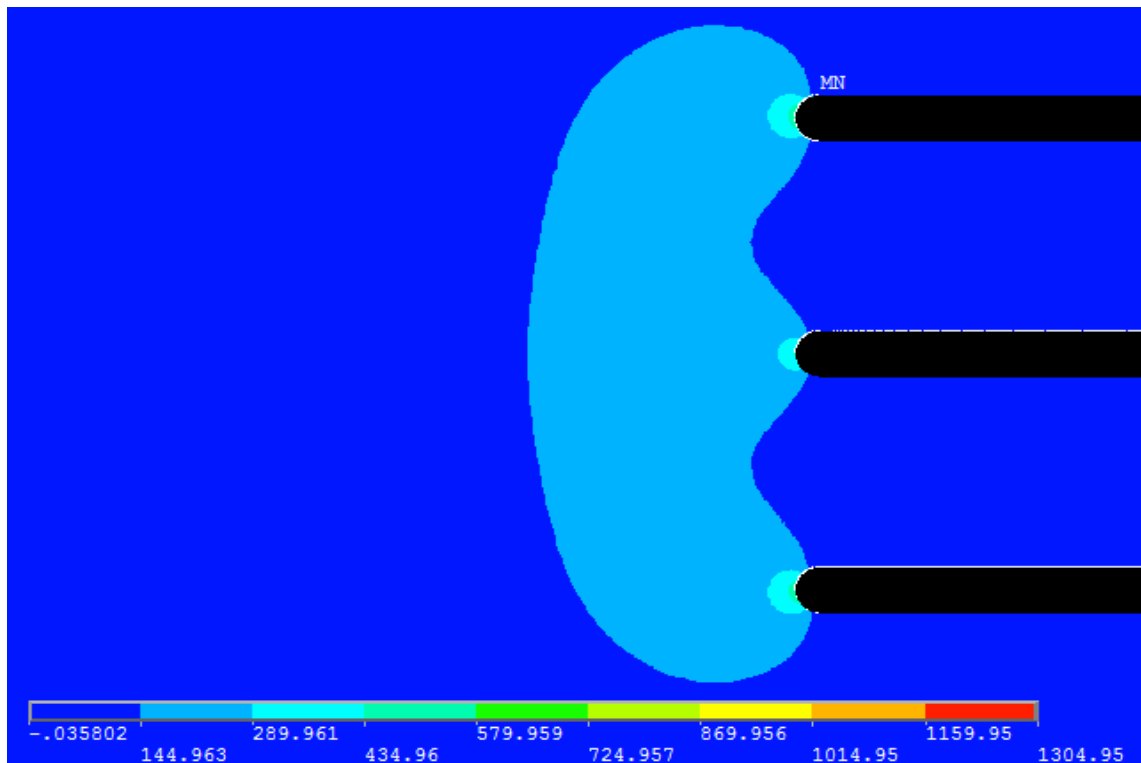


Figura 27 Distribuzione delle tensione in prossimità dei tre intagli

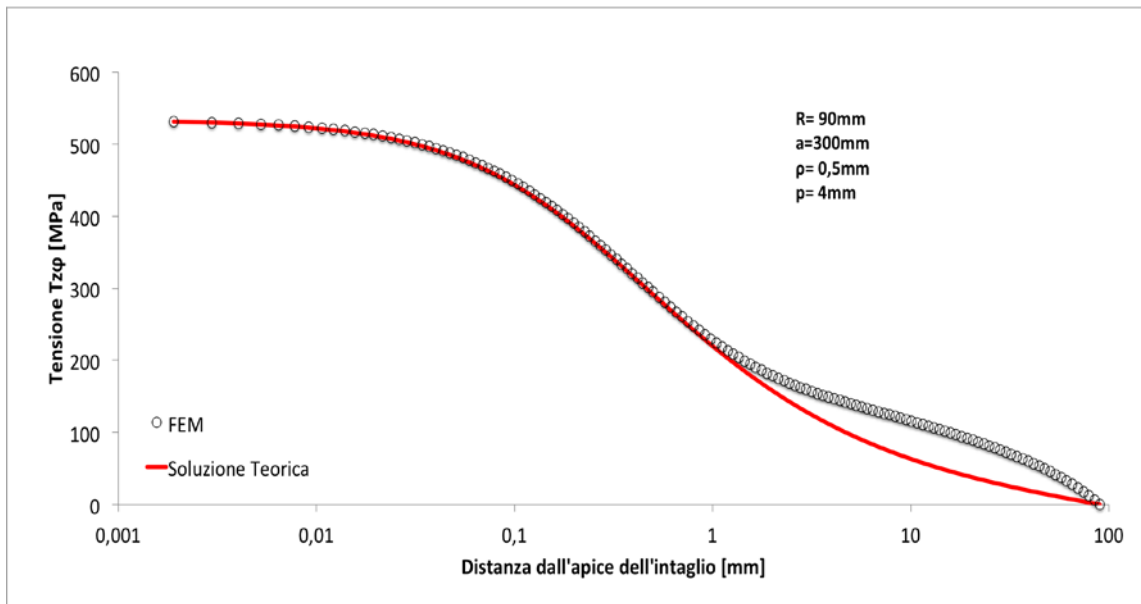


Figura 28 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del primo intaglio a partire dall'alto

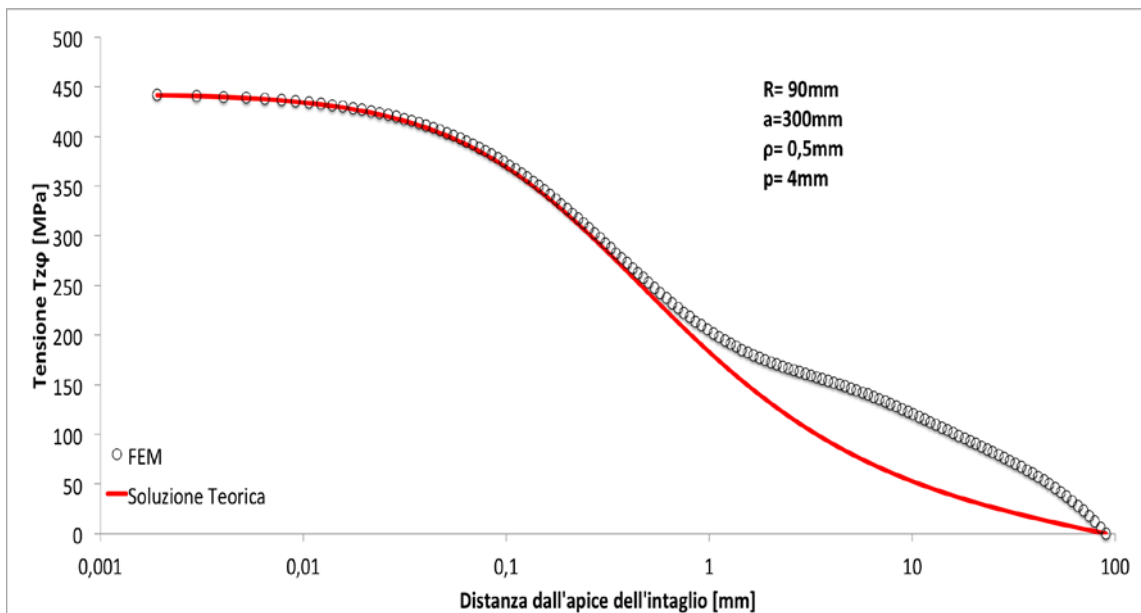


Figura 29 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del secondo intaglio a partire dall'alto

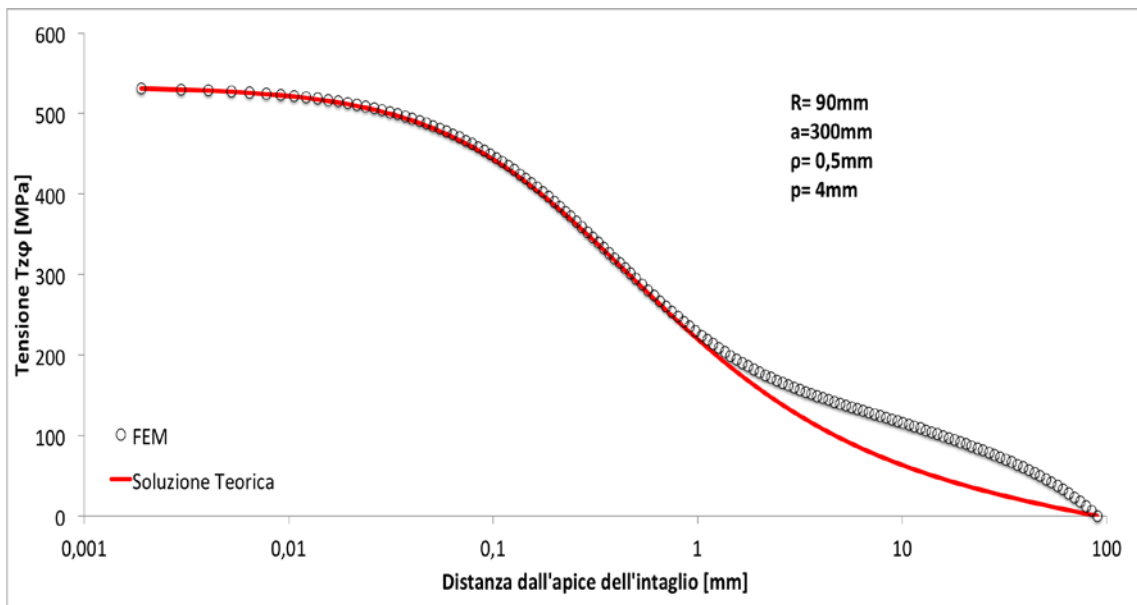


Figura 30 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del terzo intaglio a partire dall'alto

Di seguito sono esposti i risultati della seconda espressione.

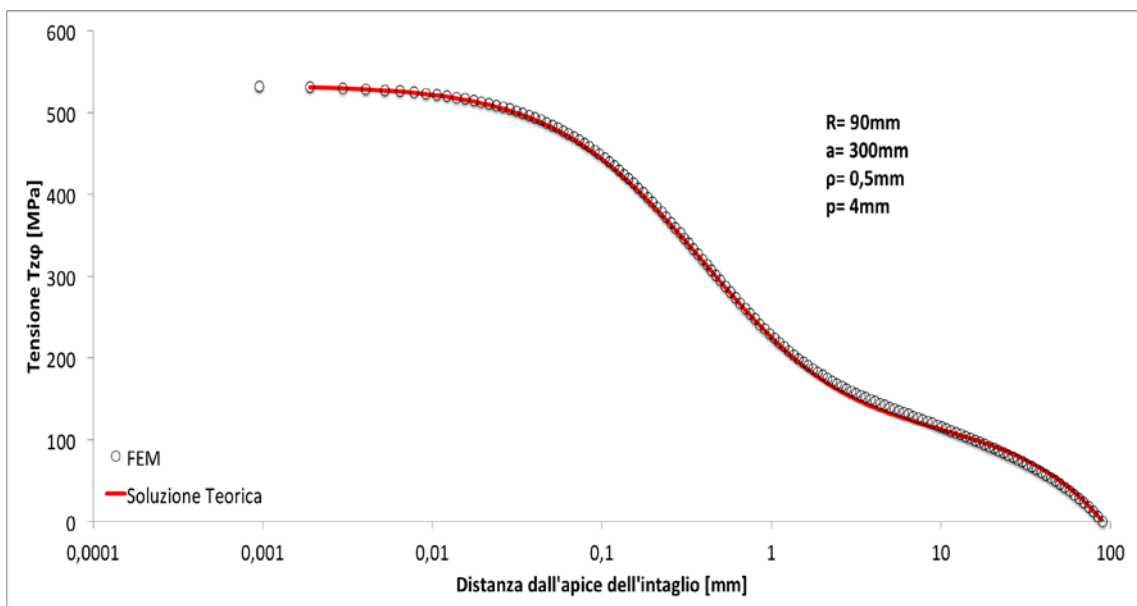


Figura 31 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del primo intaglio a partire dall'alto

$$K_{tn} = 3,89$$

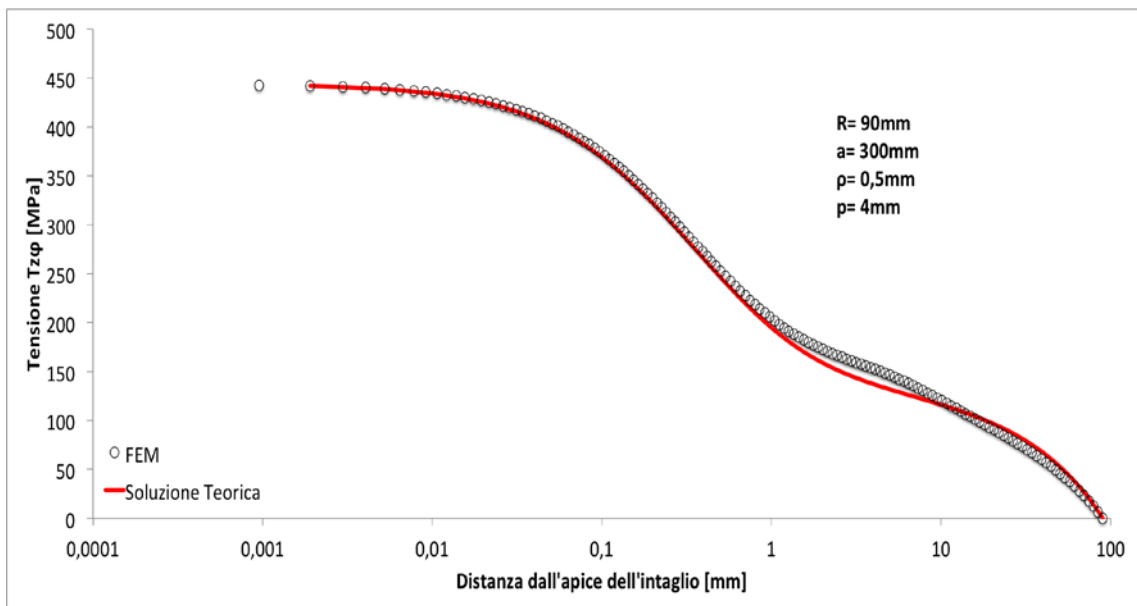


Figura 32 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del secondo intaglio a partire dall'alto

$$K_{tn} = 3,23$$

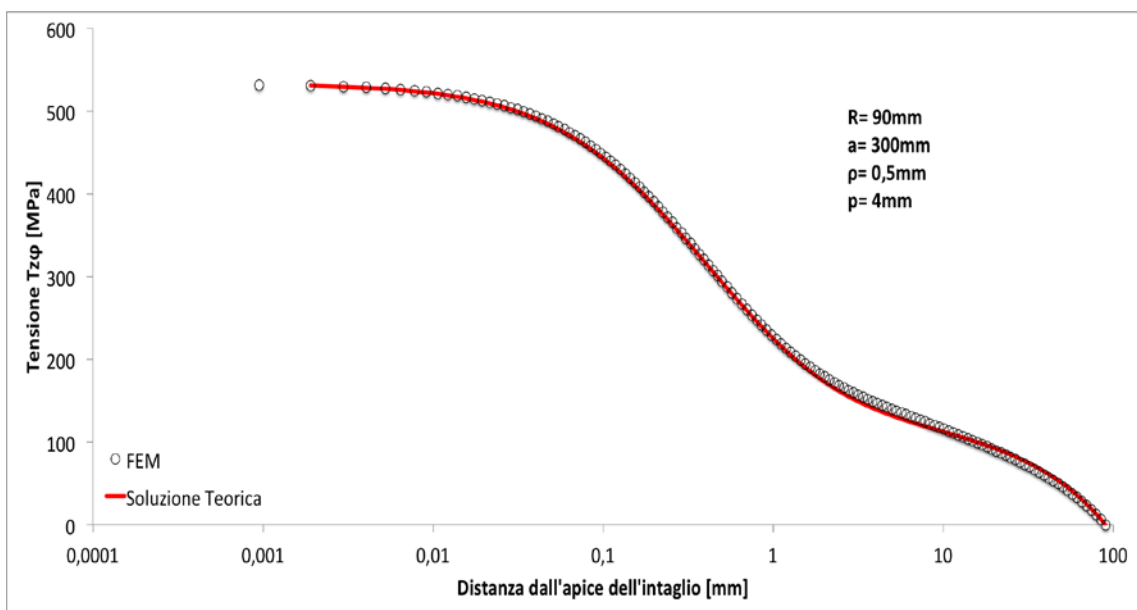


Figura 33 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del terzo intaglio a partire dall'alto

$$K_{tn} = 3,89$$

3.4. Quarta geometria: $\rho=0,5\text{mm}$ $p=8\text{mm}$

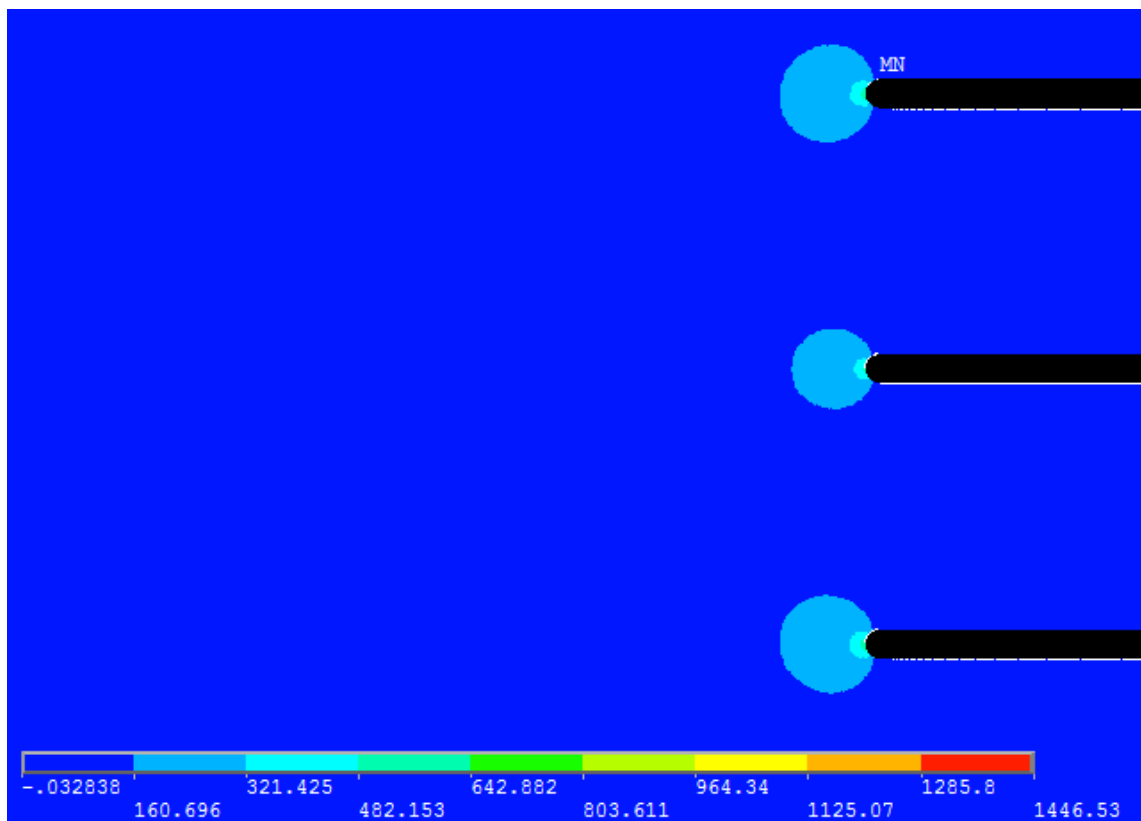


Figura 34 Distribuzione delle tensione in prossimità dei tre intagli

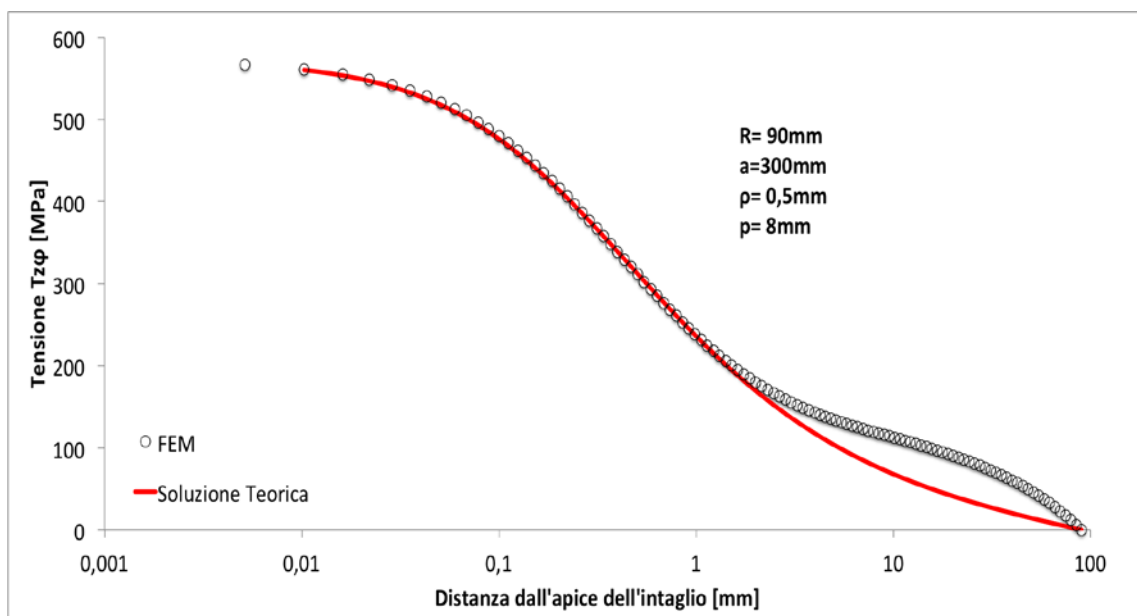


Figura 35 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del primo intaglio a partire dall'alto

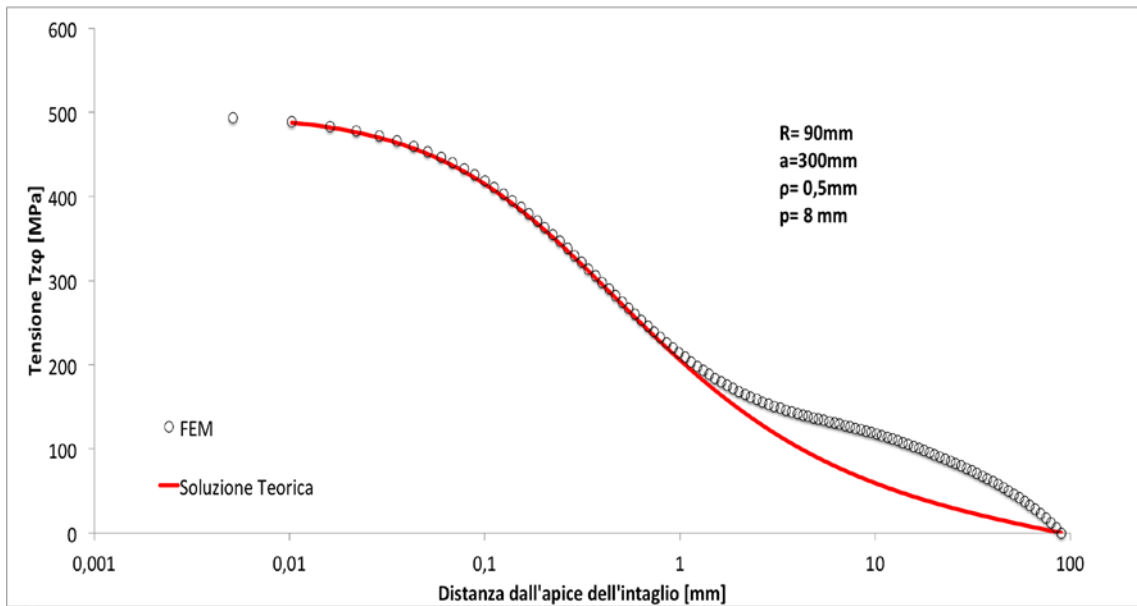


Figura 36 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del secondo intaglio a partire dall'alto

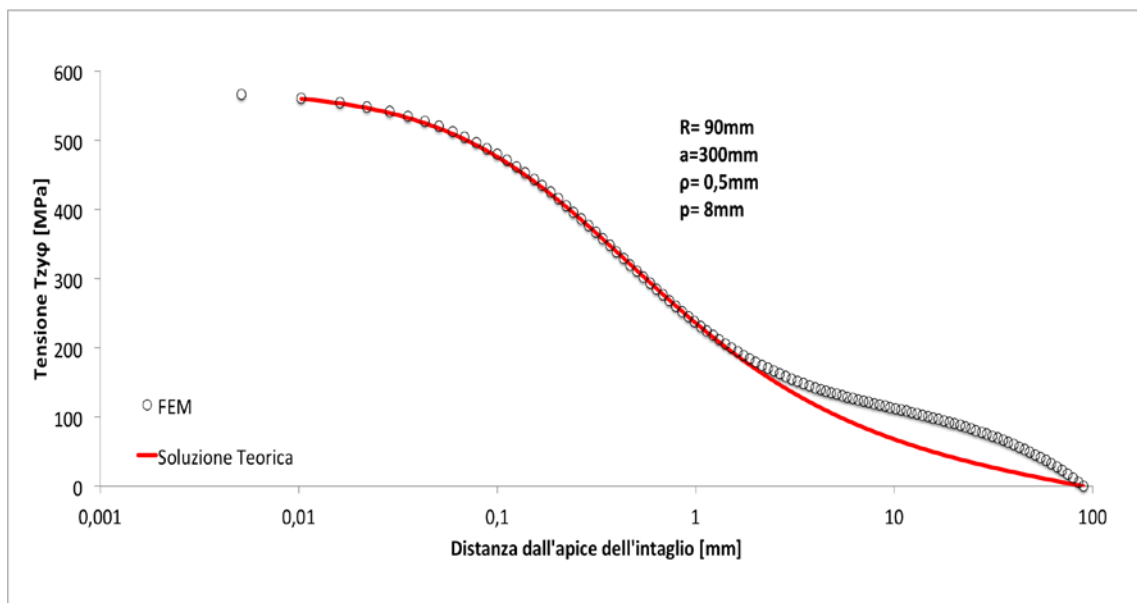


Figura 37 Andamento delle tensione $T_{zy\phi}$ del terzo intaglio a partire dall'alto

3.5. Quinta geometria: $\rho=0,5\text{mm}$ $p=16\text{mm}$

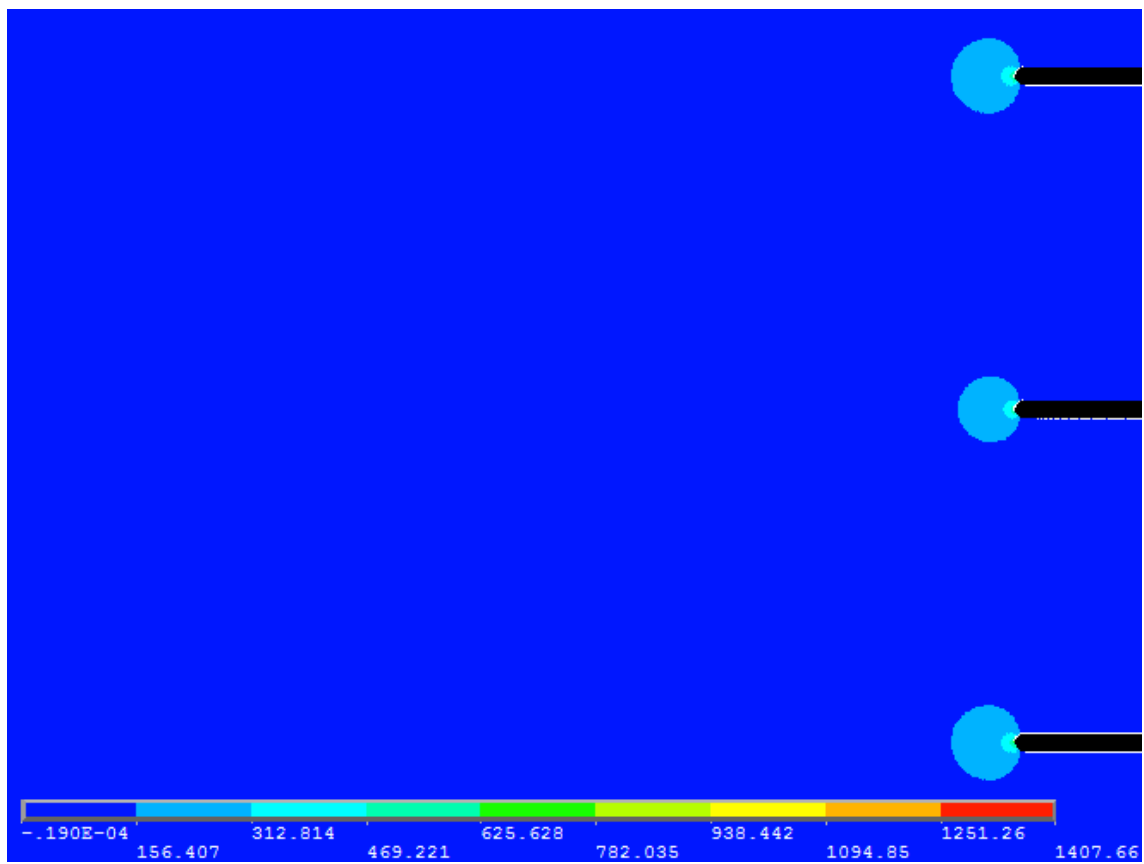


Figura 38 Distribuzione delle tensione in prossimità dei tre intagli

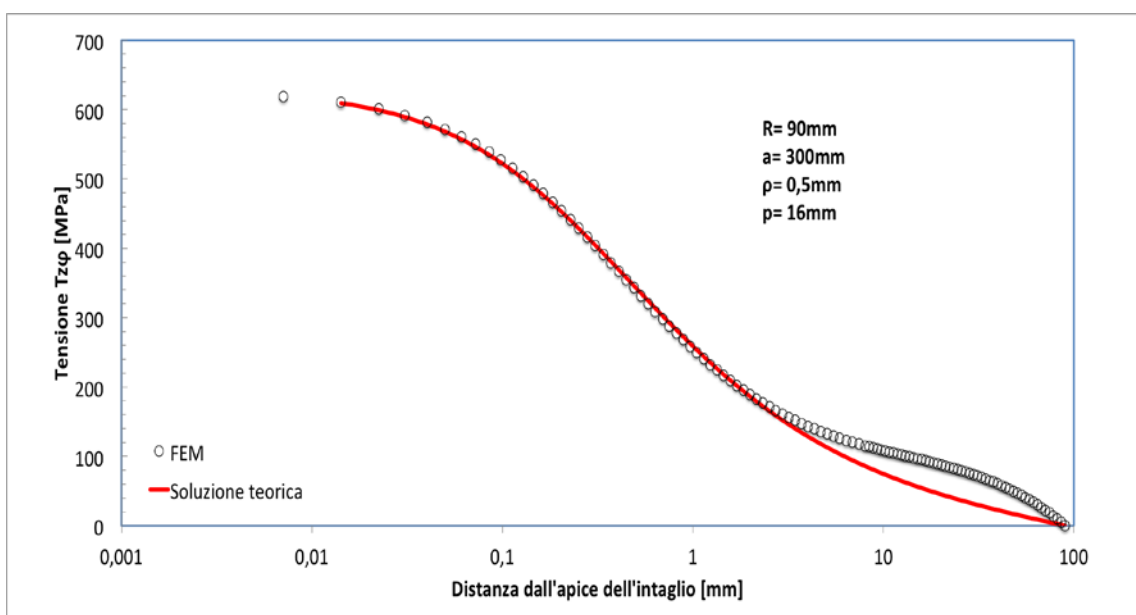


Figura 39 Andamento delle tensione $T_{z\varphi}$ del primo intaglio a partire dall'alto

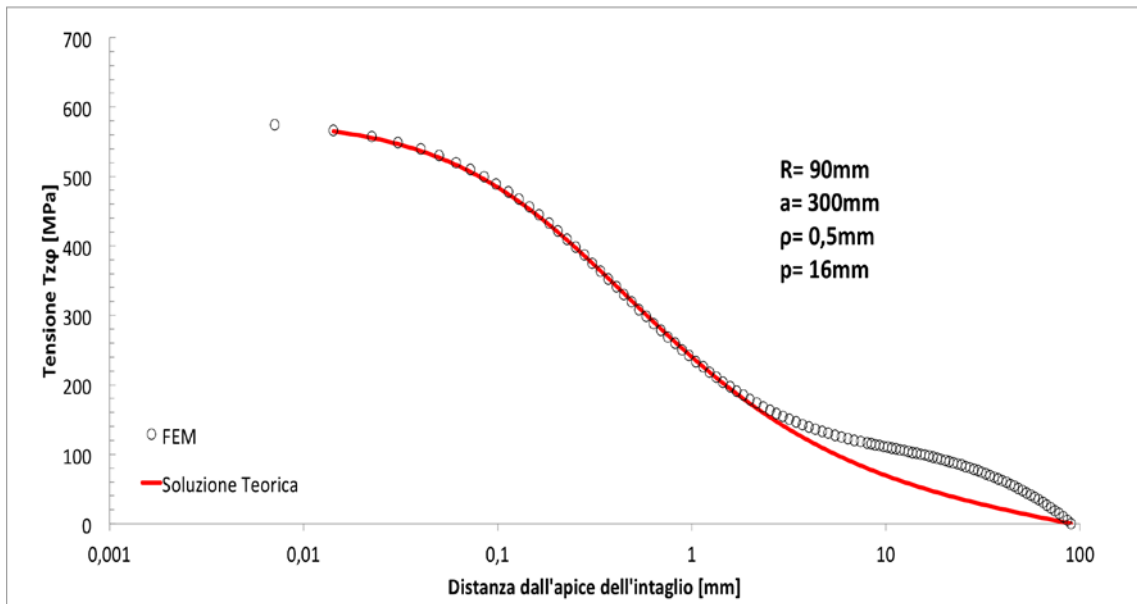


Figura 40 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del secondo intaglio a partire dall'alto

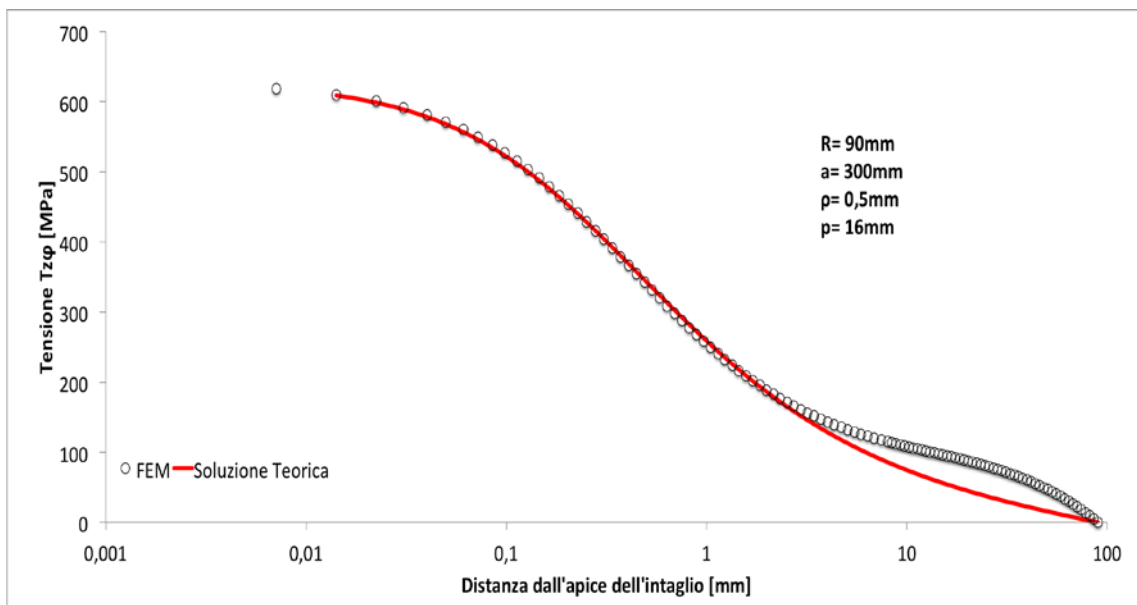


Figura 41 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del terzo intaglio a partire dall'alto

Di seguito sono esposti i risultati della seconda espressione.

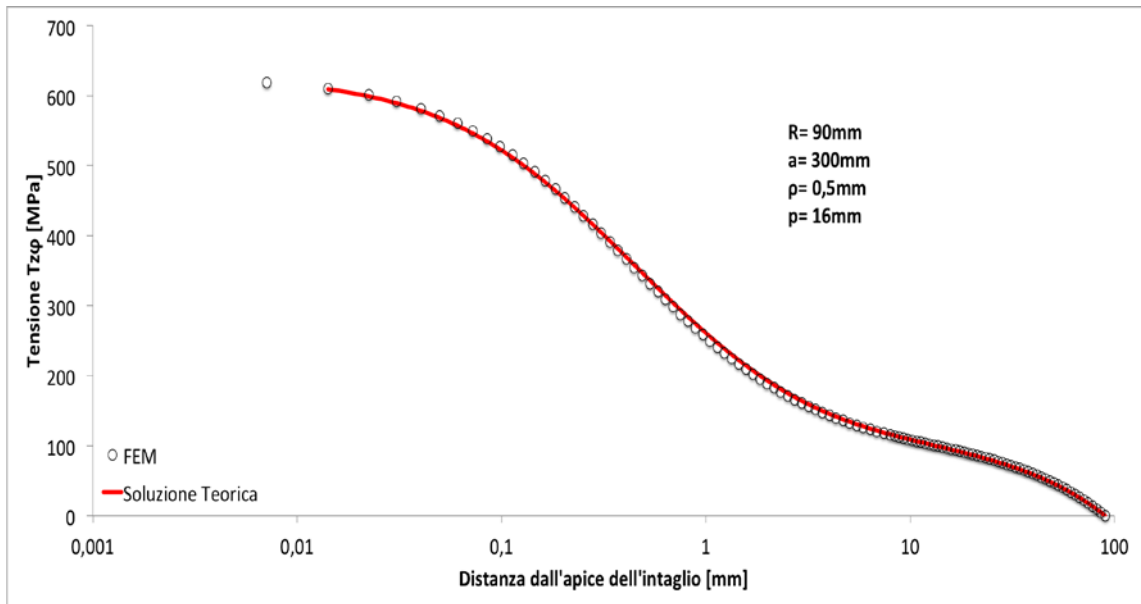


Figura 42 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del primo intaglio a partire dall'alto

$$K_{tn} = 4,58$$

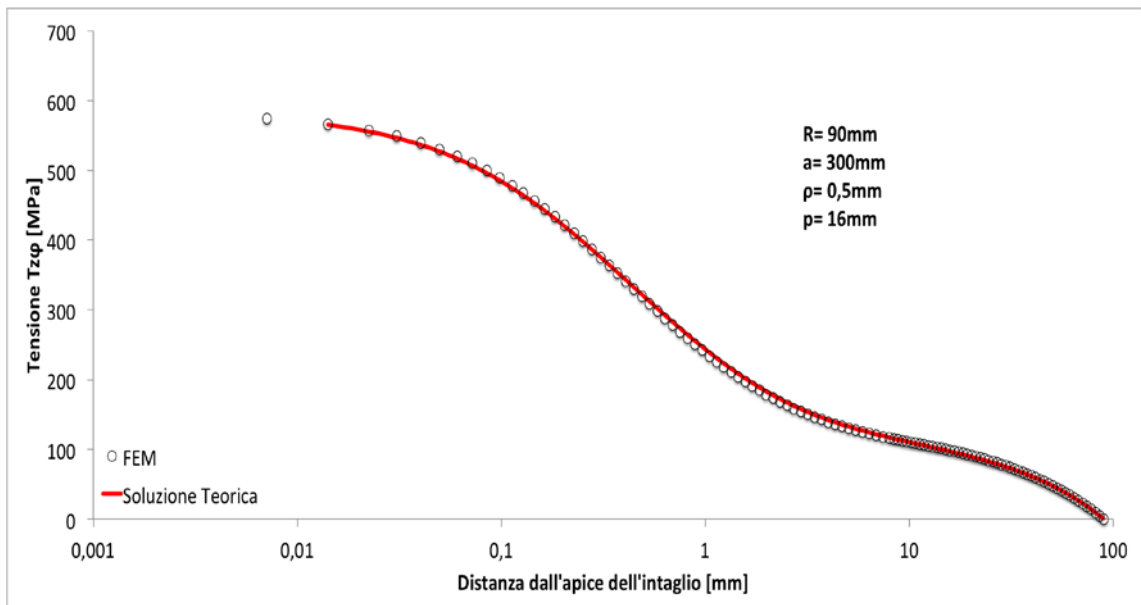


Figura 43 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del secondo intaglio a partire dall'alto

$$K_{tn} = 4,25$$

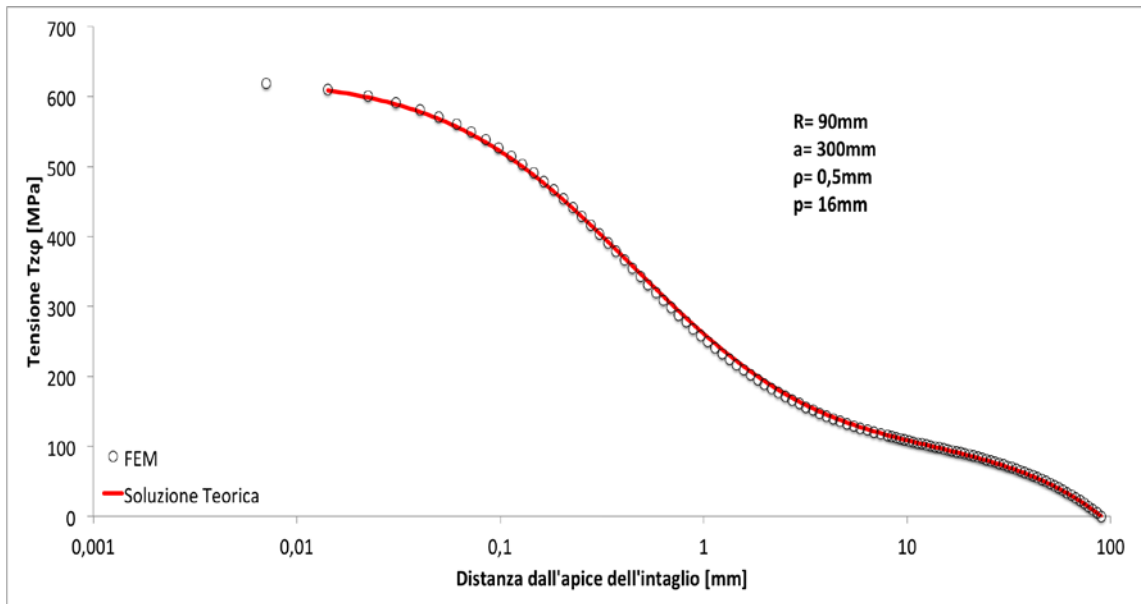


Figura 44 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del terzo intaglio a partire dall'alto

$$K_{tn} = 4,58$$

Saranno ora analizzate le stesse geometrie con un raggio di raccordo quattro volte più grande, ossia $\rho=2\text{mm}$.

3.6.Sesta geometria: $\rho=2\text{mm}$ $p=1\text{mm}$

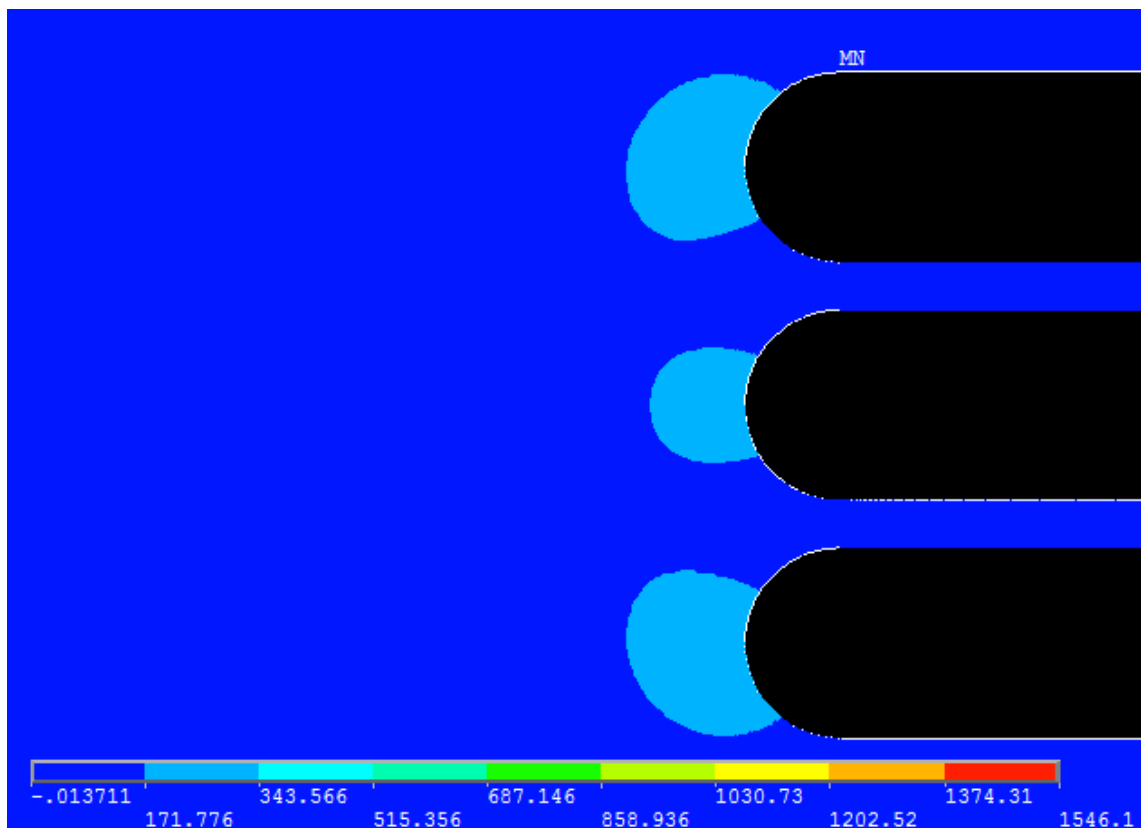


Figura 45 Distribuzione delle tensione in prossimità dei tre intagli

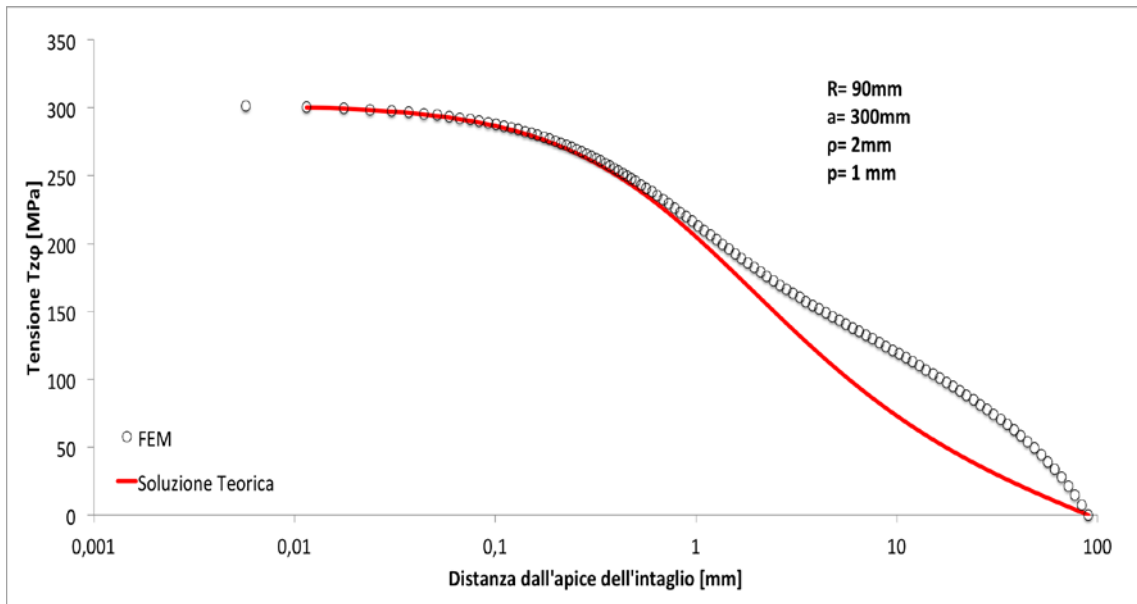


Figura 46 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del primo intaglio a partire dall'alto

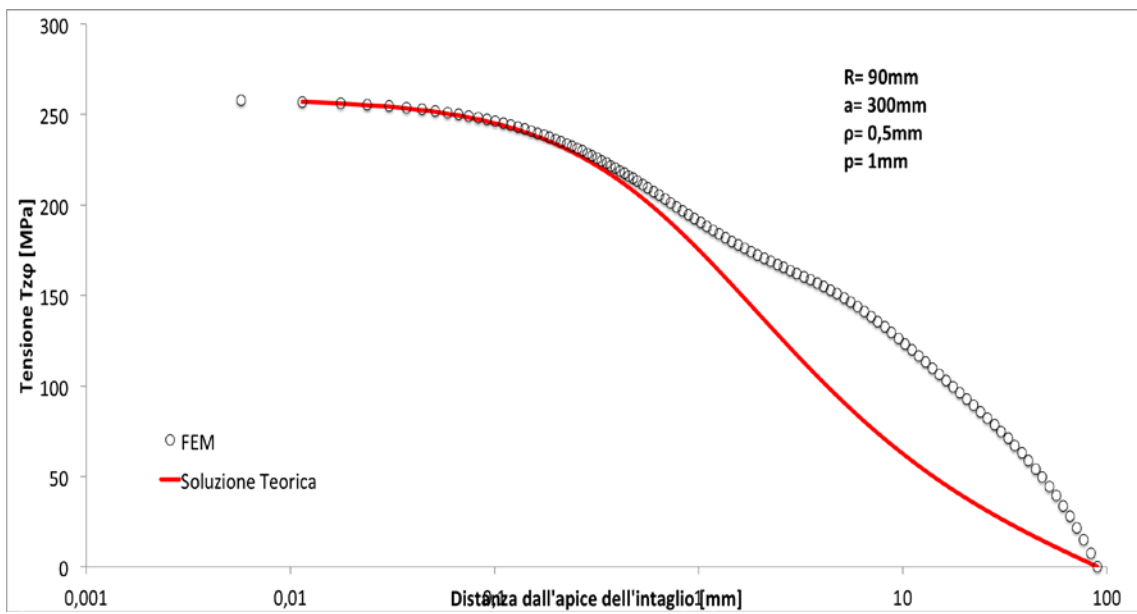


Figura 47 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del secondo intaglio a partire dall'alto

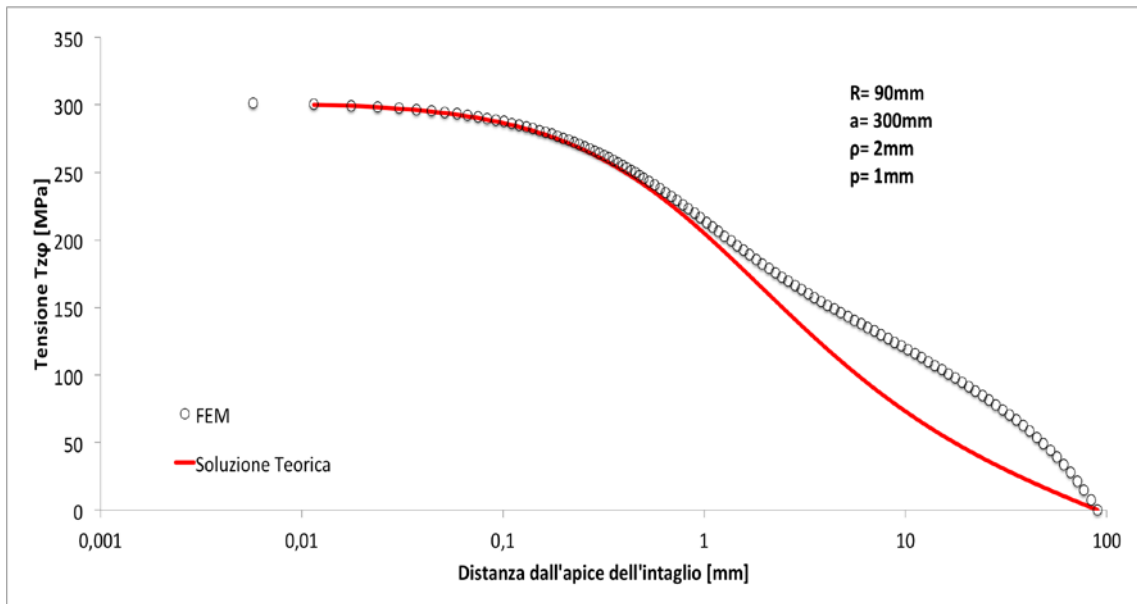


Figura 48 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del terzo intaglio a partire dall'alto

Di seguito sono esposti i risultati della seconda espressione.

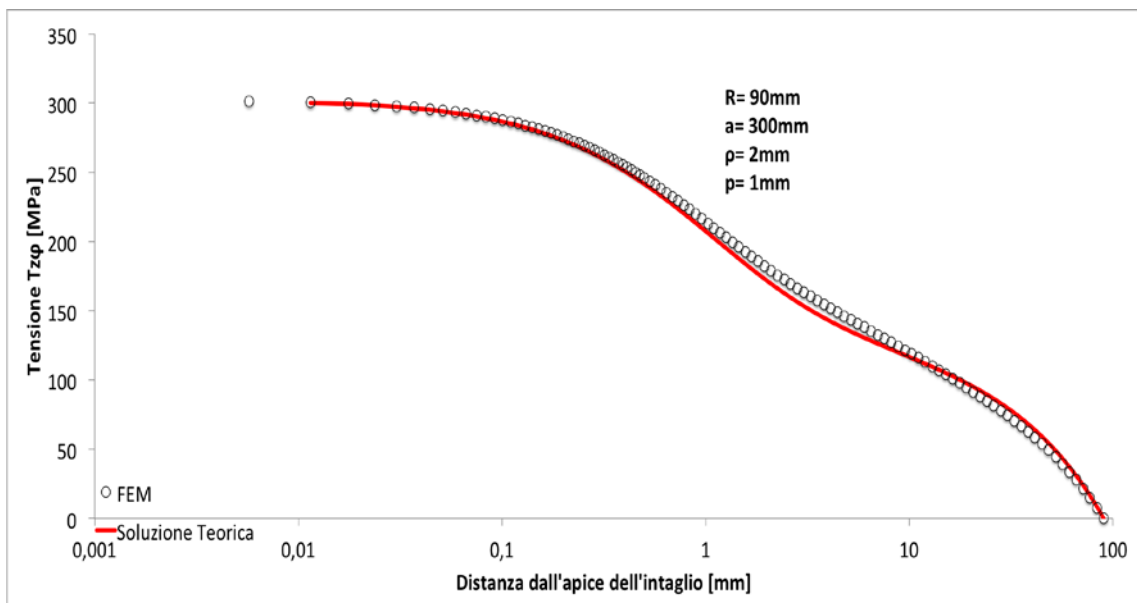


Figura 49 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del primo intaglio a partire dall'alto

$$K_{tn} = 2,20$$

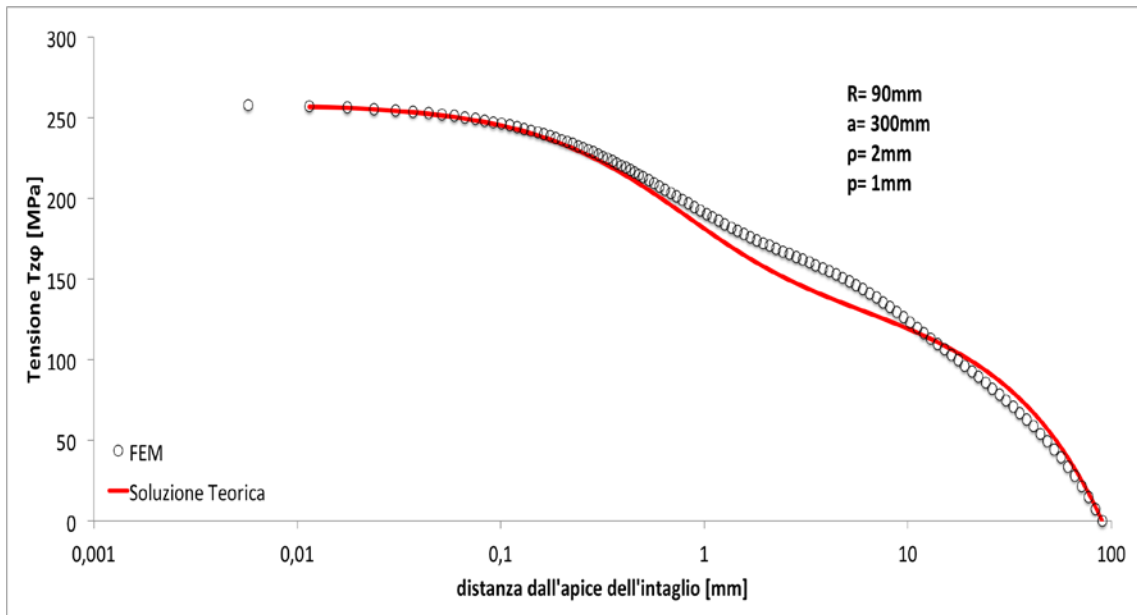


Figura 50 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del secondo intaglio a partire dall'alto

$$K_{tn} = 1,88$$

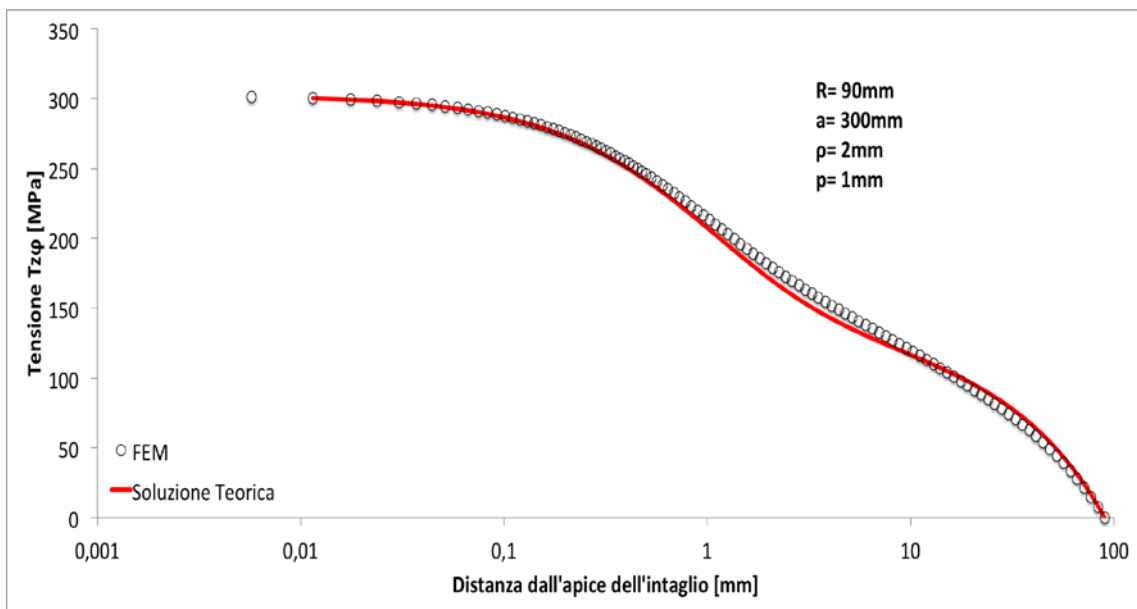


Figura 51 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del terzo intaglio a partire dall'alto

$$K_{tn} = 2,20$$

3.7. Settima geometria: $\rho=2\text{mm}$ $p=2\text{mm}$

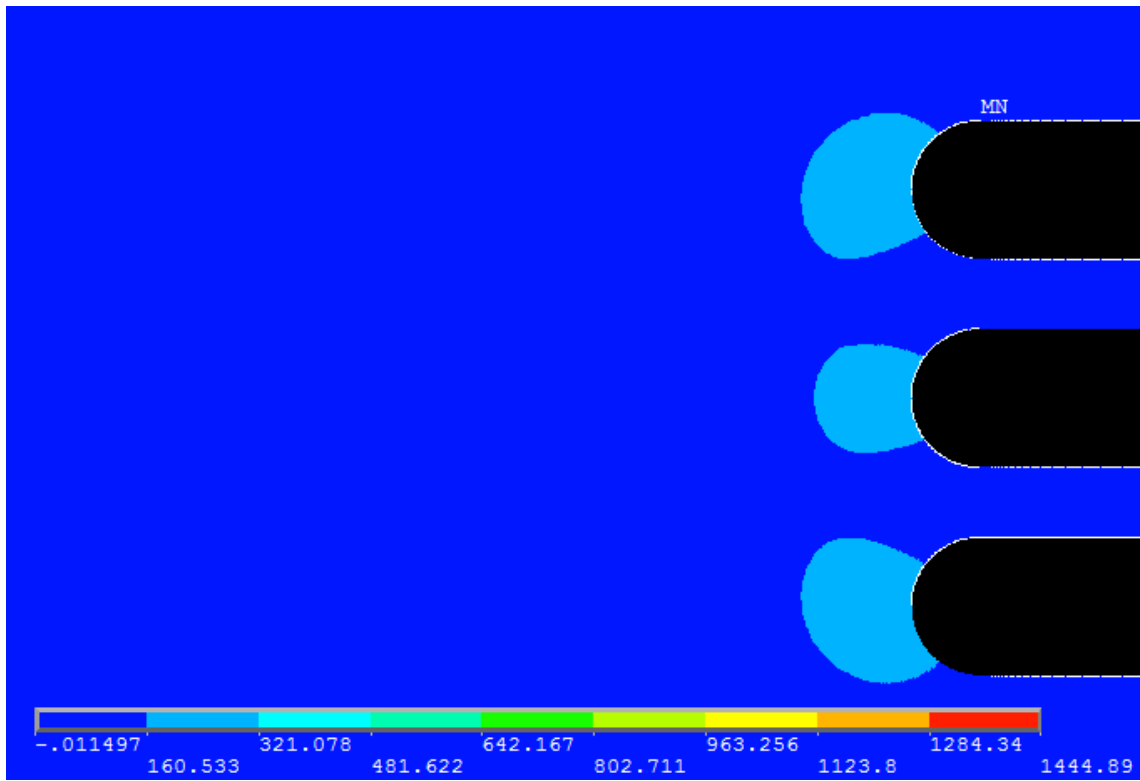


Figura 52 Distribuzione delle tensione in prossimità dei tre intagli

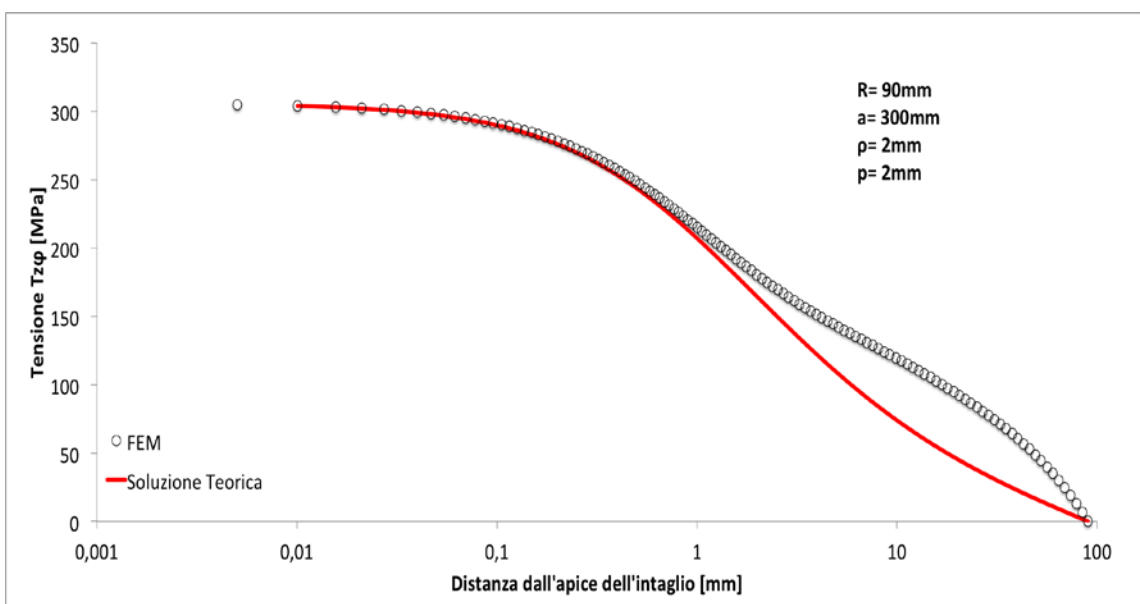


Figura 53 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del primo intaglio a partire dall'alto

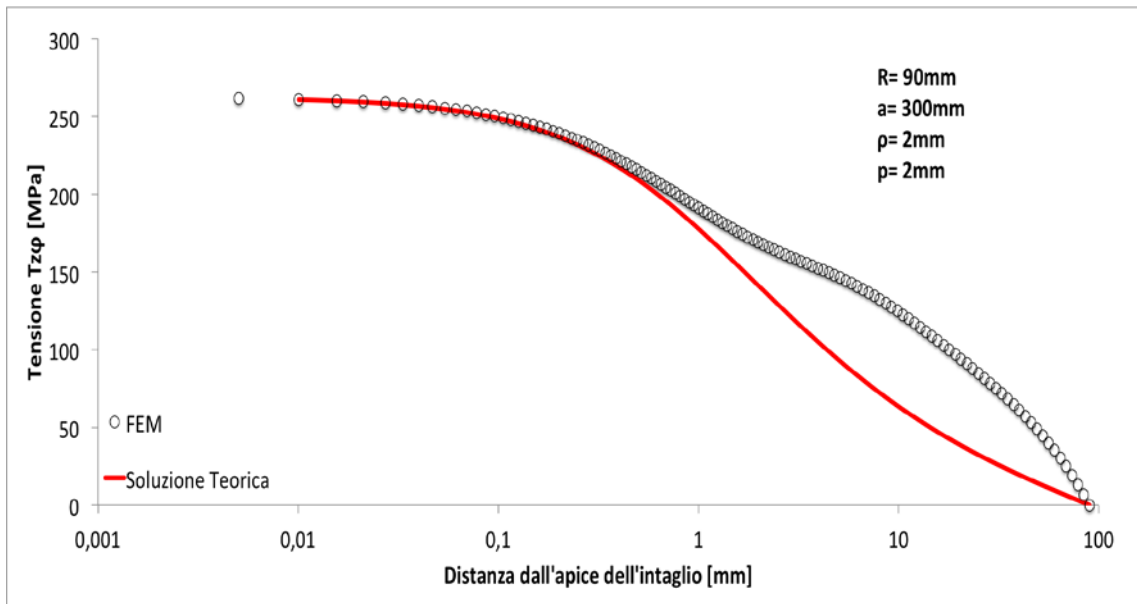


Figura 54 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del secondo intaglio a partire dall'alto

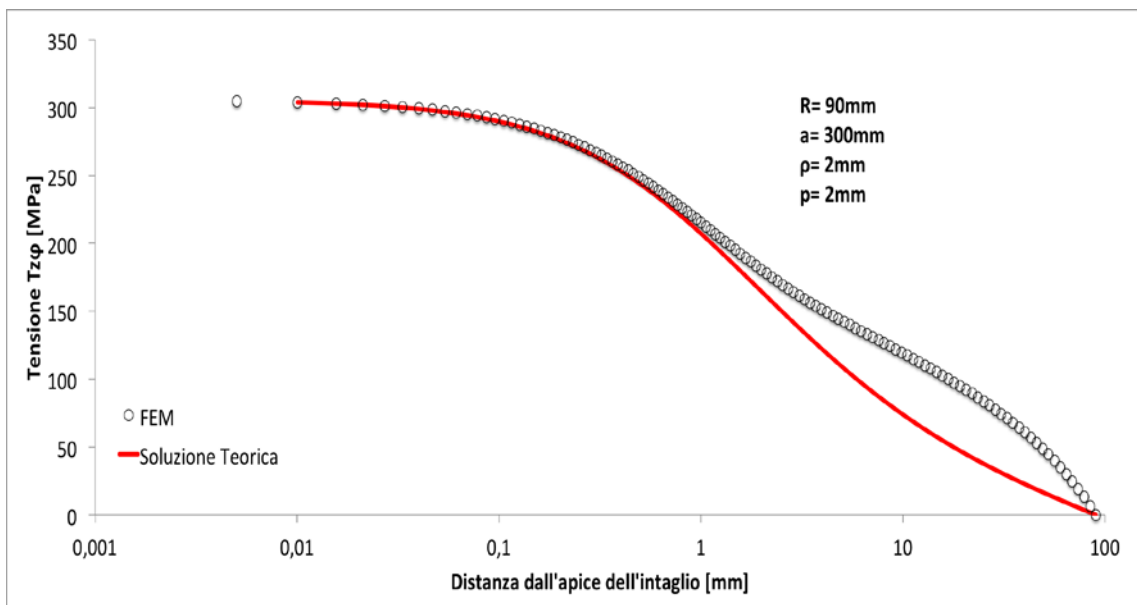


Figura 55 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del terzo intaglio a partire dall'alto

Di seguito verranno esposti i risultati della seconda espressione.

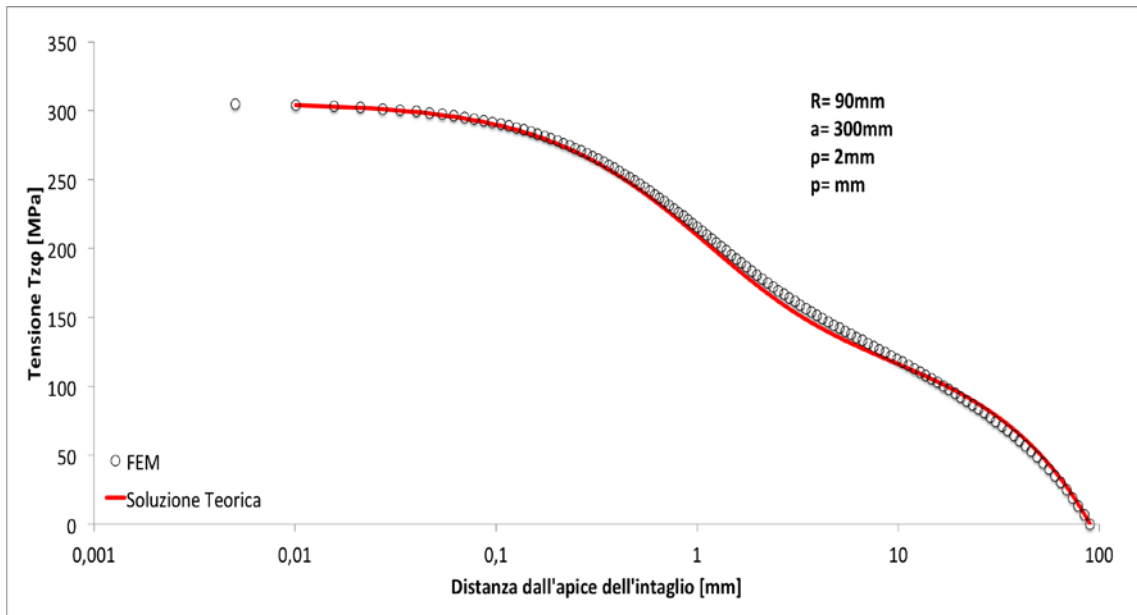


Figura 56 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del primo intaglio a partire dall'alto

$$K_{tn} = 2,23$$

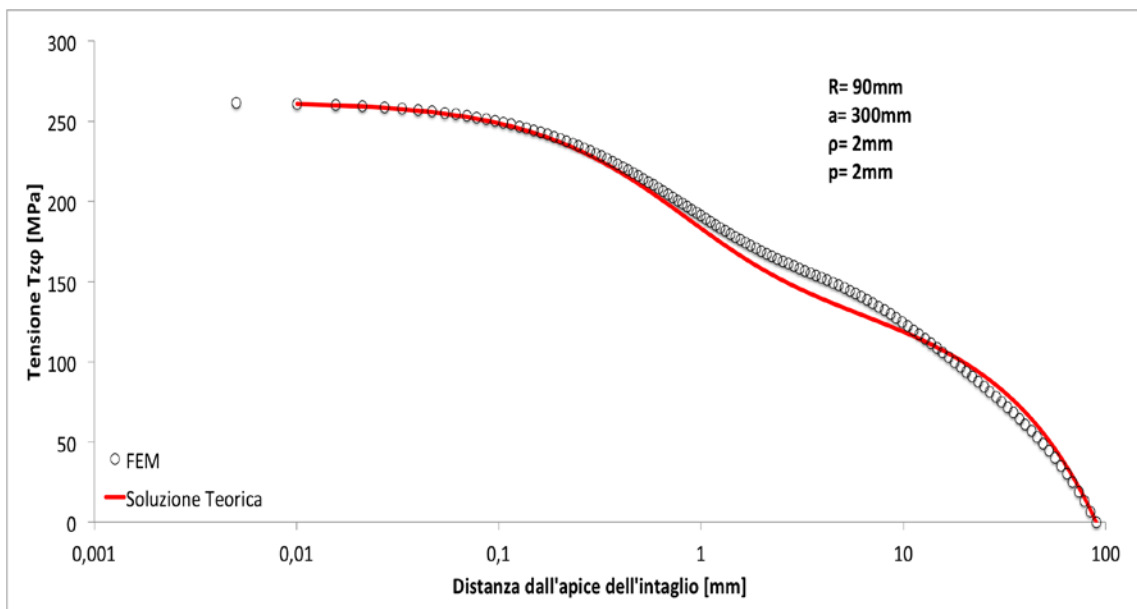


Figura 57 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del secondo intaglio a partire dall'alto

$$K_{tn} = 1,91$$

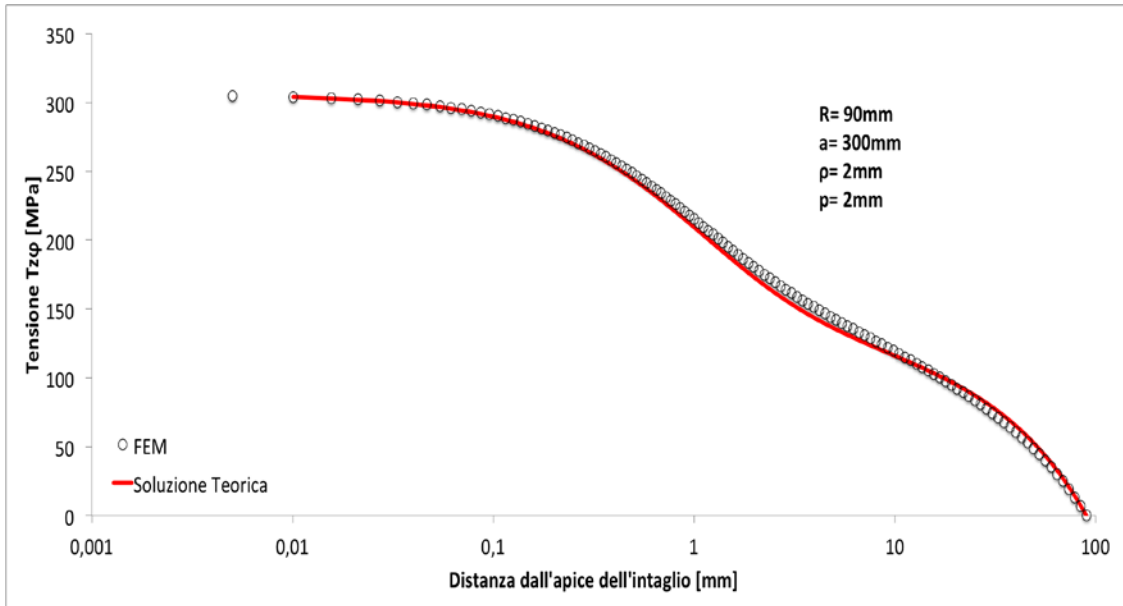


Figura 58 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del terzo intaglio a partire dall'alto

$$K_{tn} = 2,23$$

3.8.Ottava geometria: $\rho=2\text{mm}$ $p=4\text{mm}$

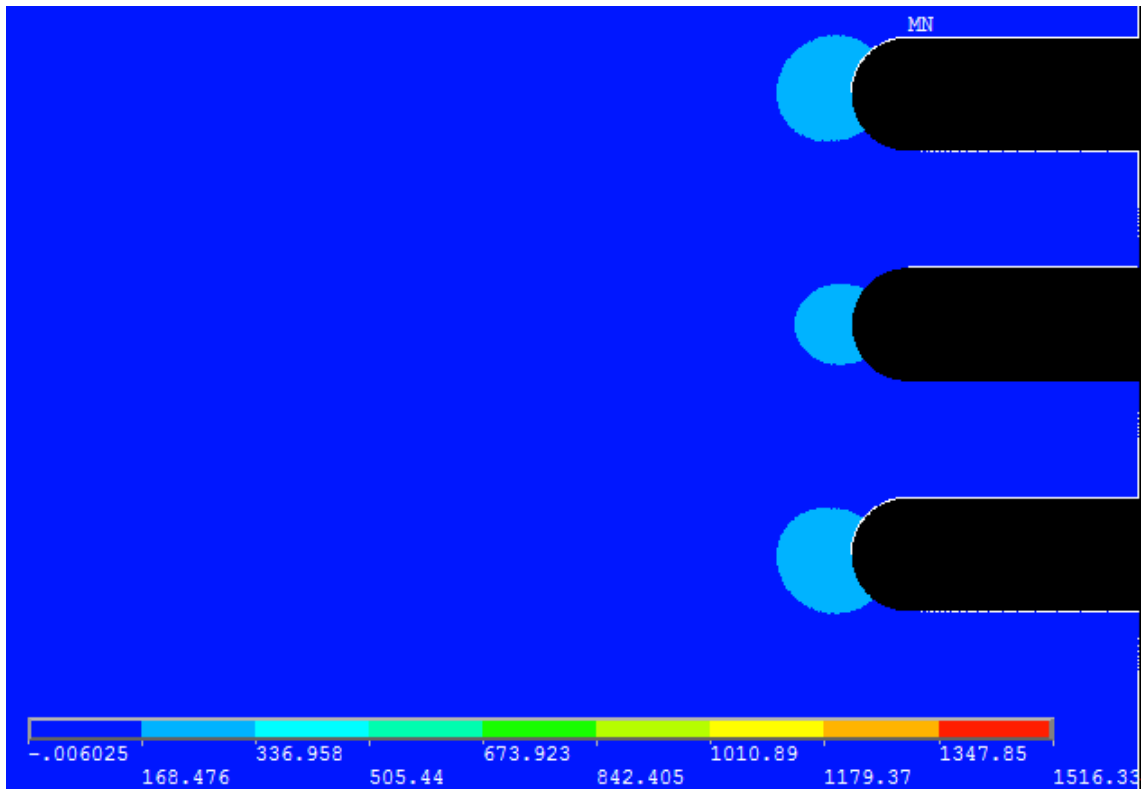


Figura 59 Distribuzione delle tensione in prossimità dei tre intagli

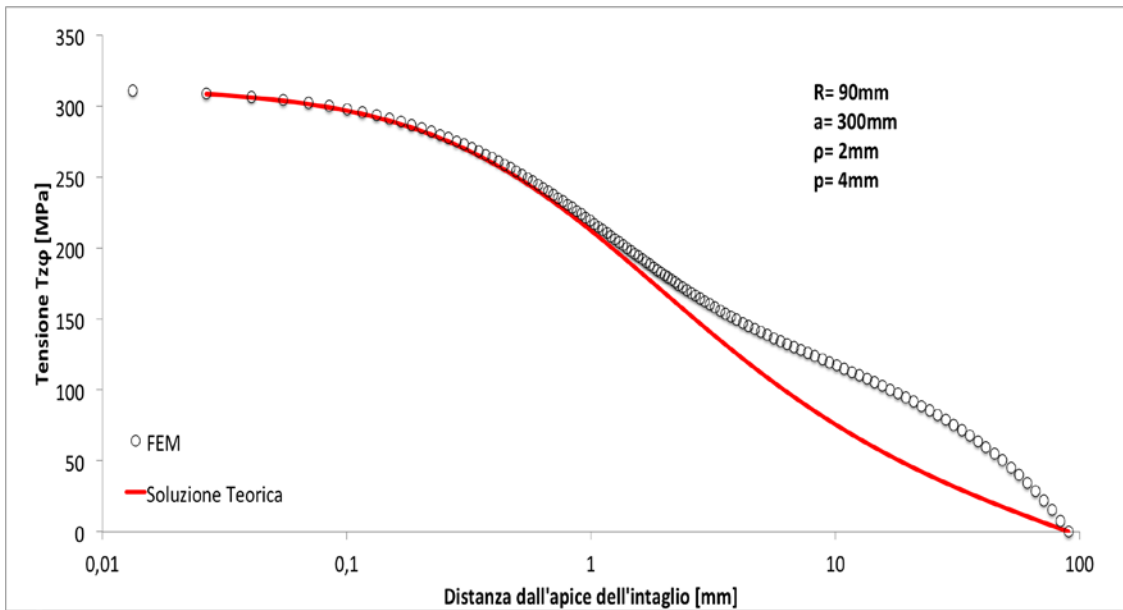


Figura 60 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del primo intaglio a partire dall'alto

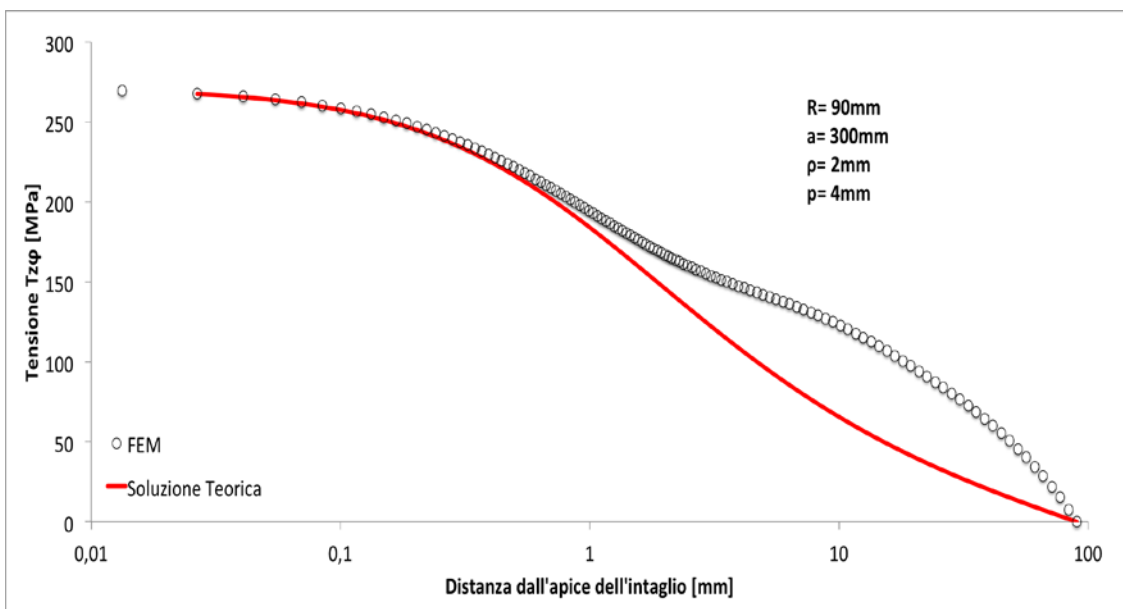


Figura 61 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del secondo intaglio a partire dall'alto

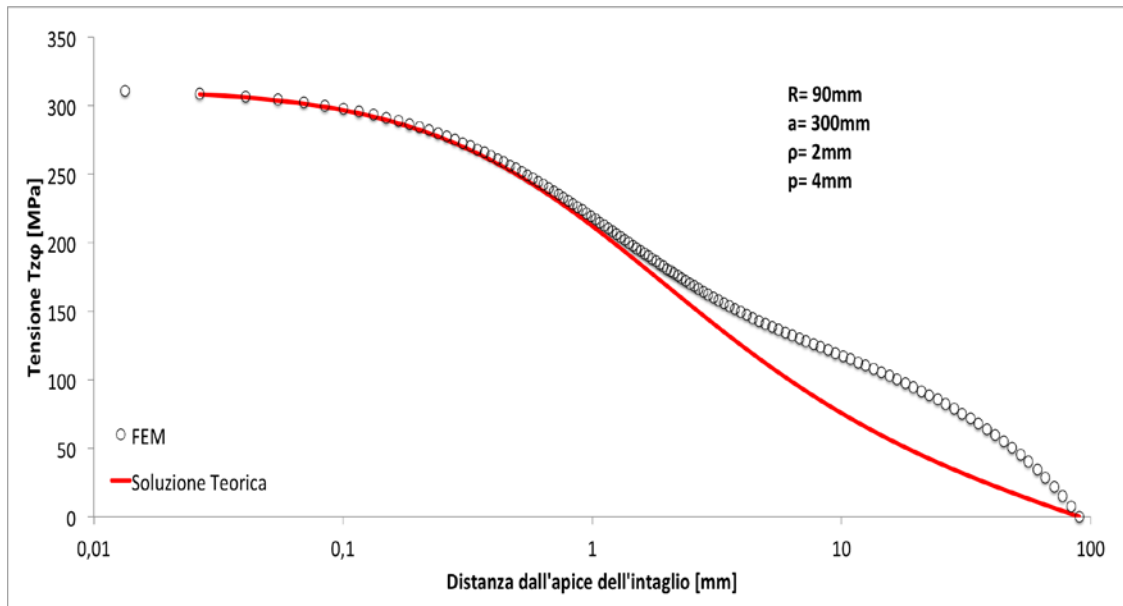


Figura 62 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del terzo intaglio a partire dall'alto

3.9.Nona geometria: $\rho=2\text{mm}$ $p=8\text{mm}$

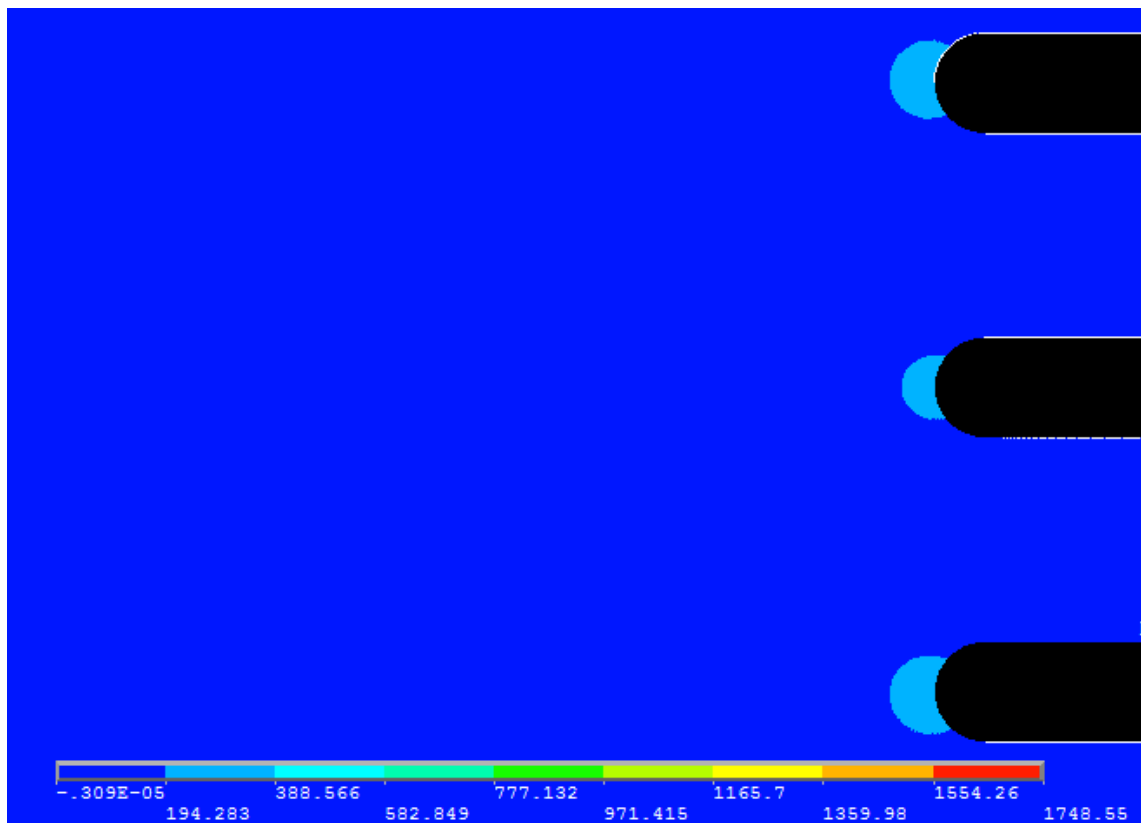


Figura 63 Distribuzione delle tensione in prossimità dei tre intagli

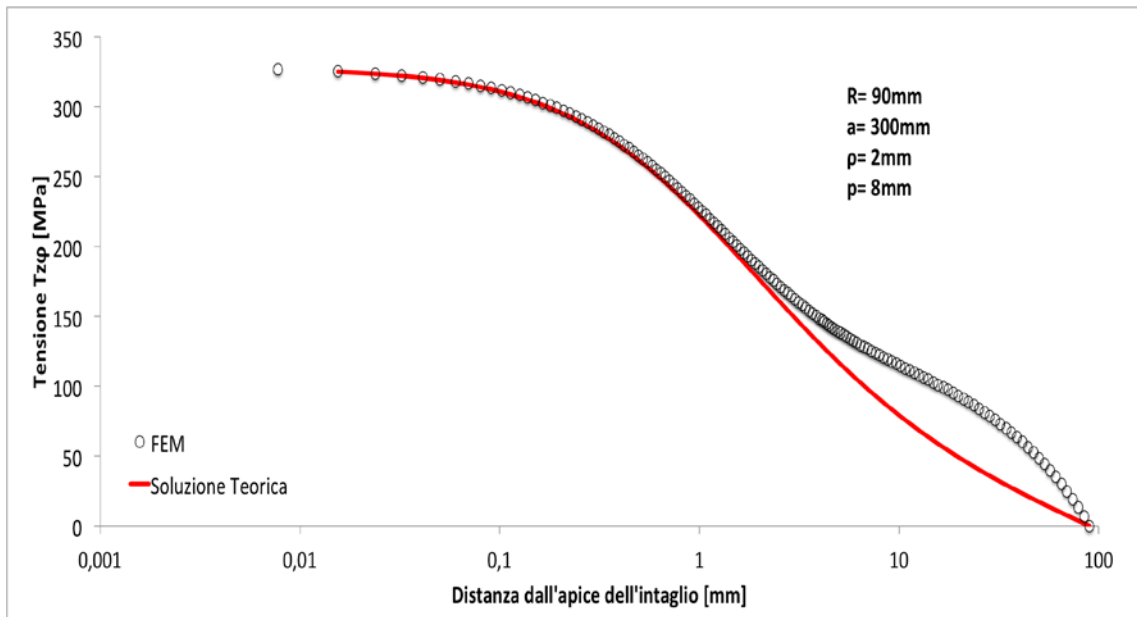


Figura 64 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del primo intaglio a partire dall'alto

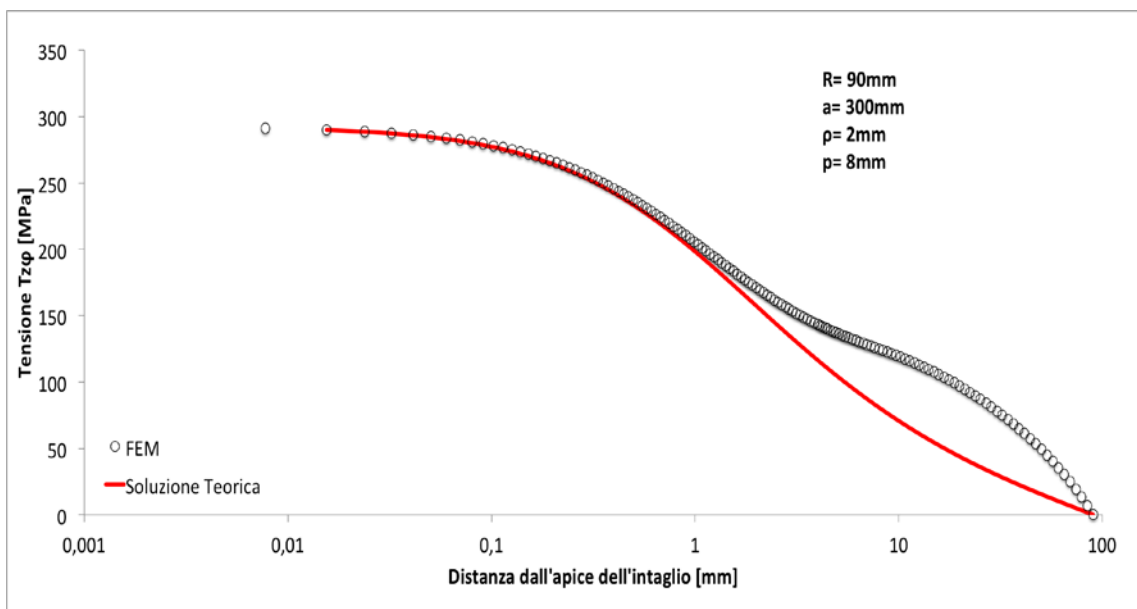


Figura 65 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del secondo intaglio a partire dall'alto

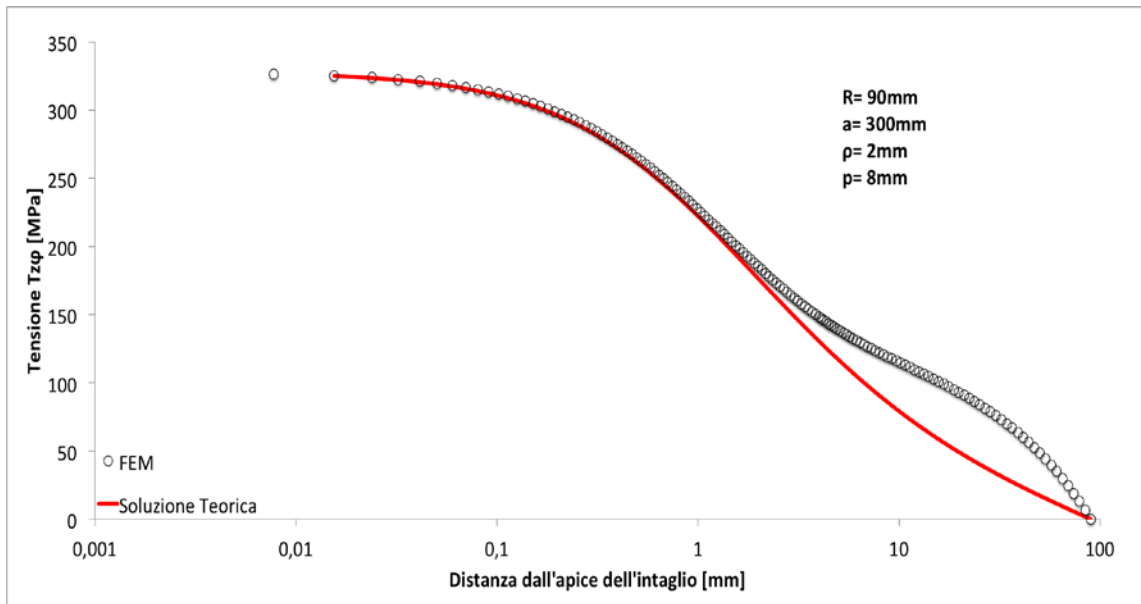


Figura 66 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del terzo intaglio a partire dall'alto

3.10.Decima geometria: $\rho=2\text{mm}$ $p=16\text{mm}$

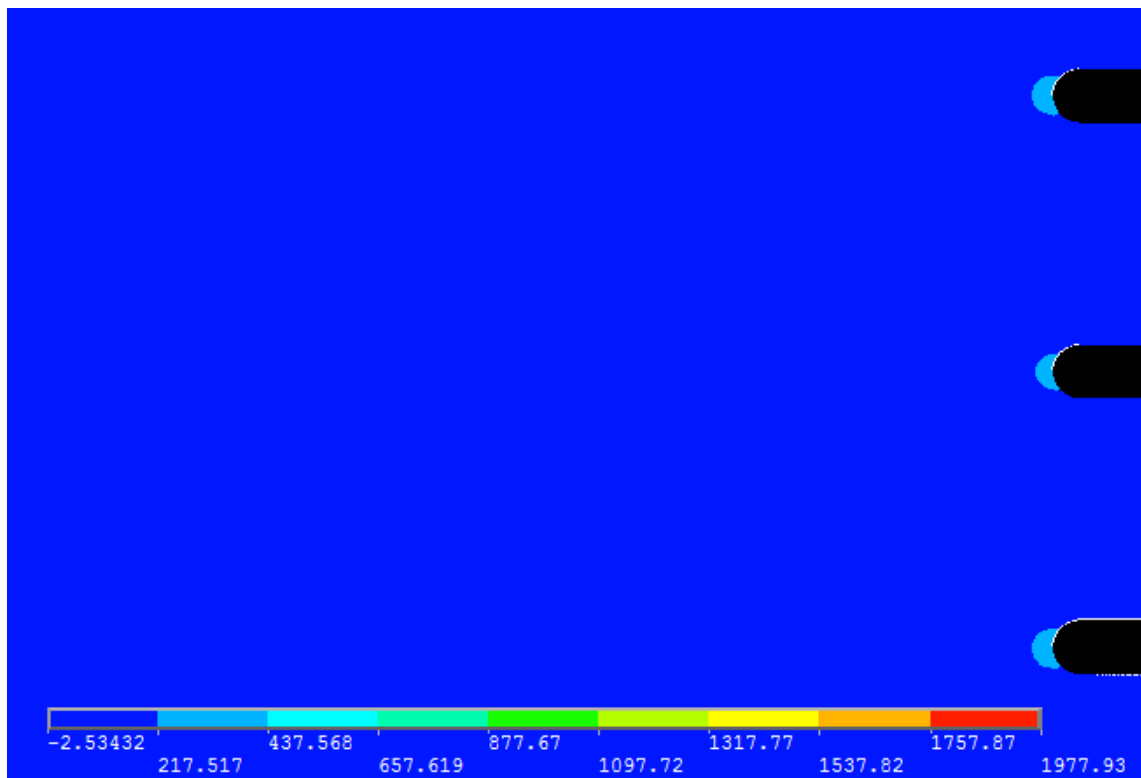


Figura 67 Distribuzione delle tensione in prossimità dei tre intagli

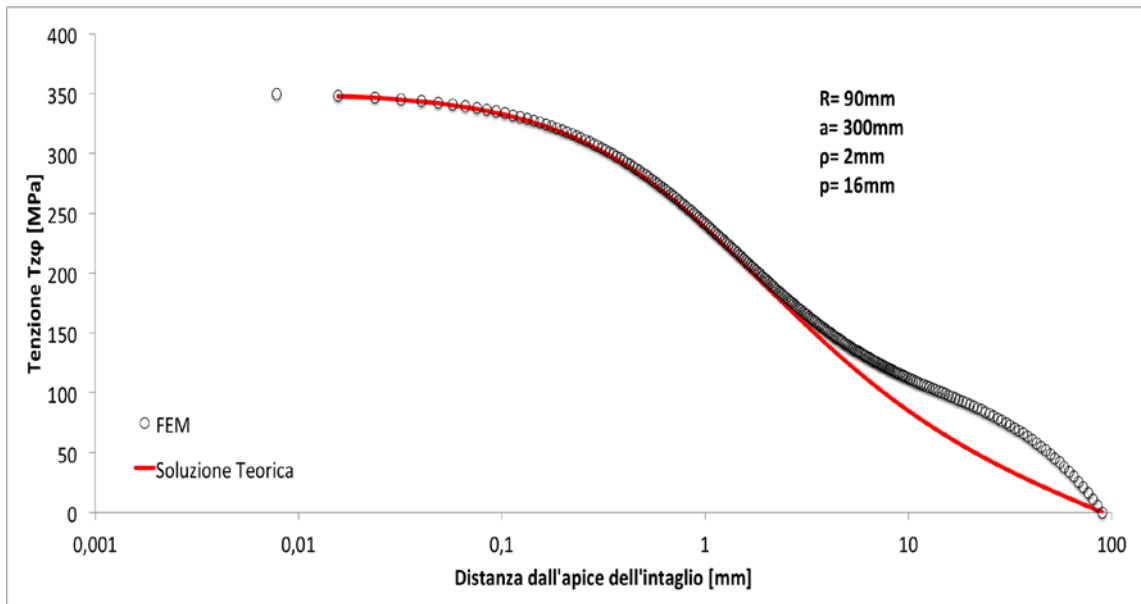


Figura 68 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del primo intaglio a partire dall'alto

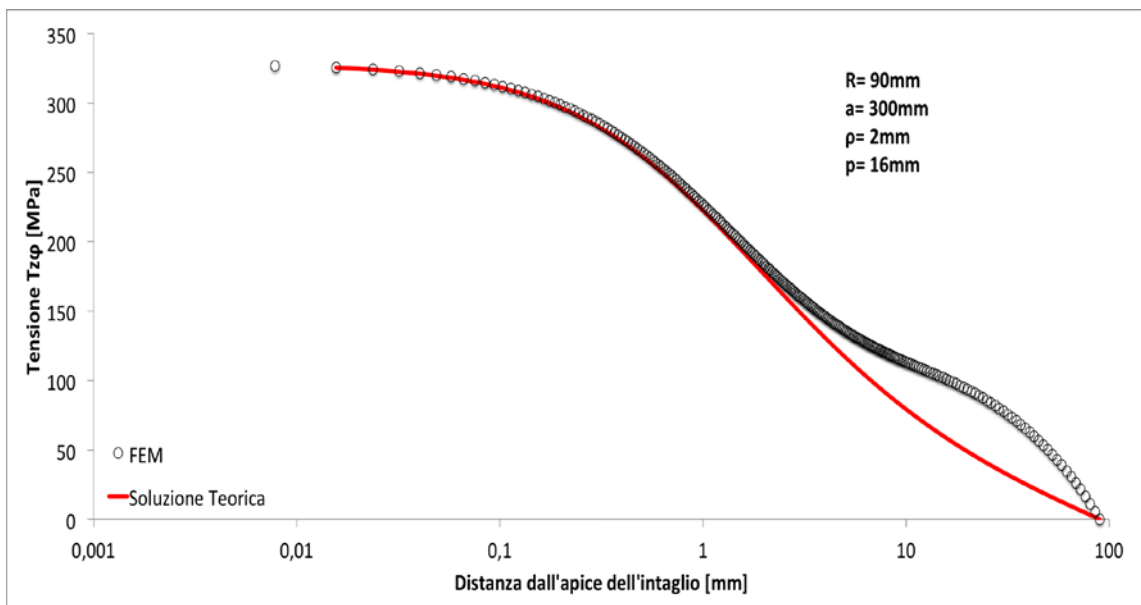


Figura 69 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del secondo intaglio a partire dall'alto

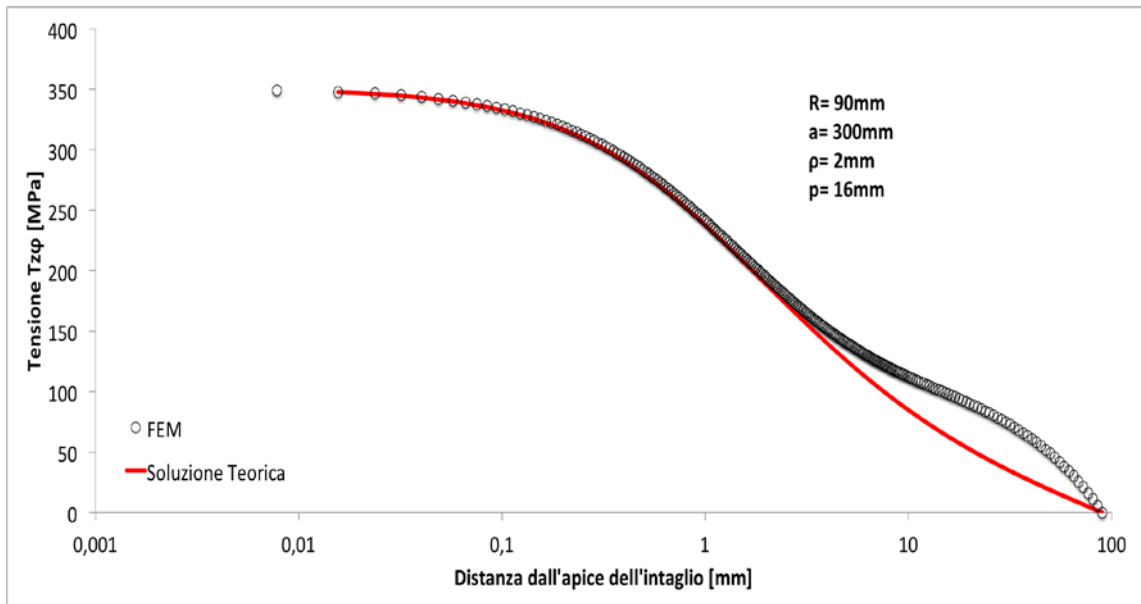


Figura 70 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del terzo intaglio a partire dall'alto

Di seguito verranno esposti i risultati della seconda espressione.

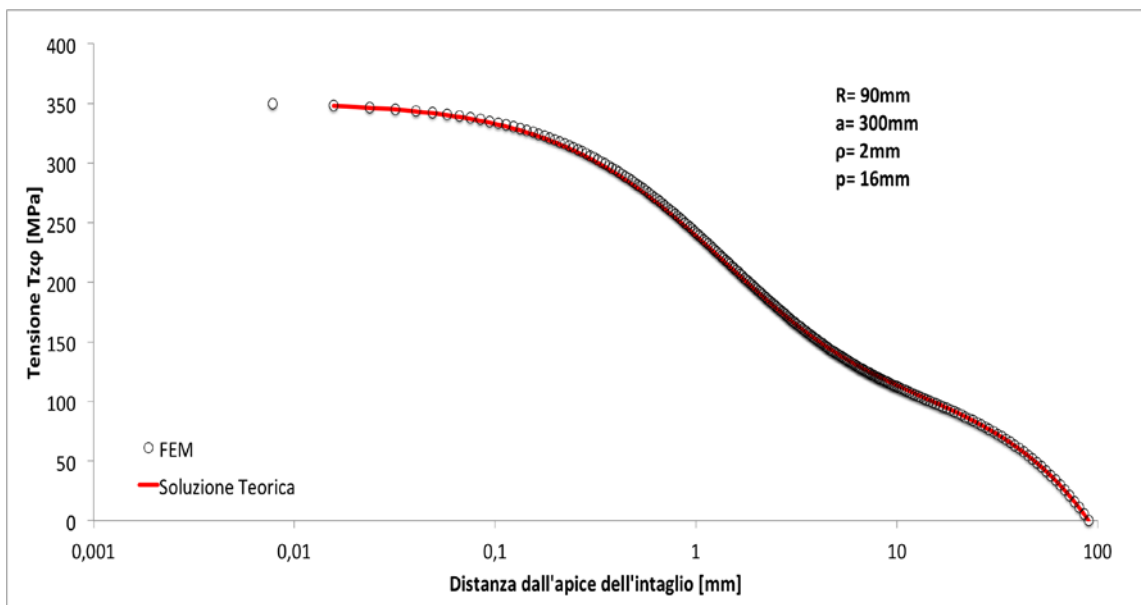


Figura 71 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del primo intaglio a partire dall'alto

$$K_{tn} = 2,56$$

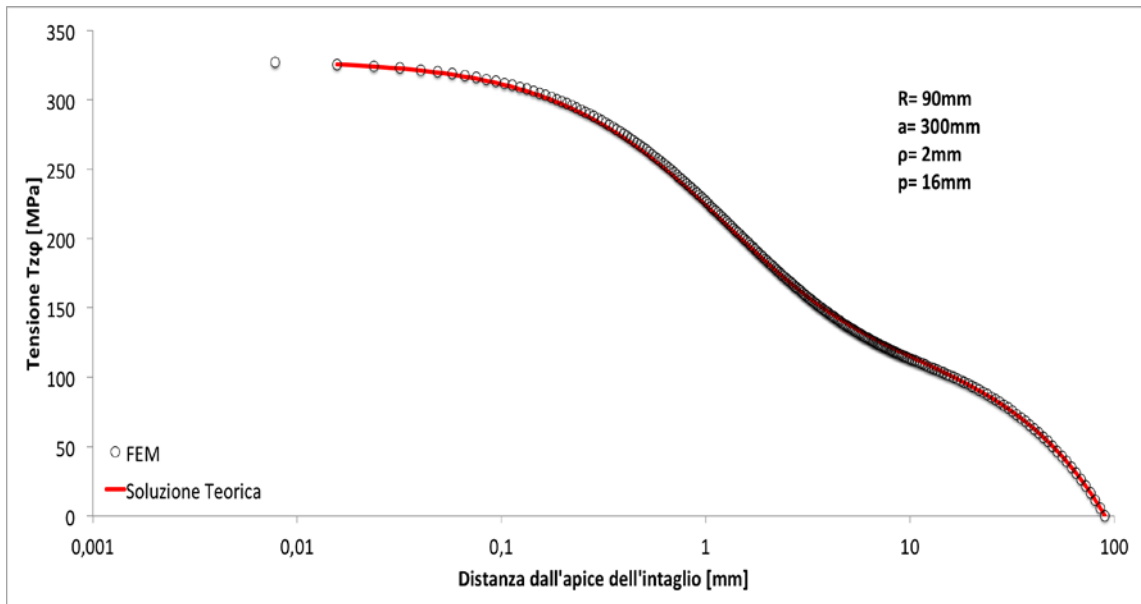


Figura 72 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del secondo intaglio a partire dall'alto

$$K_{tn} = 2,39$$

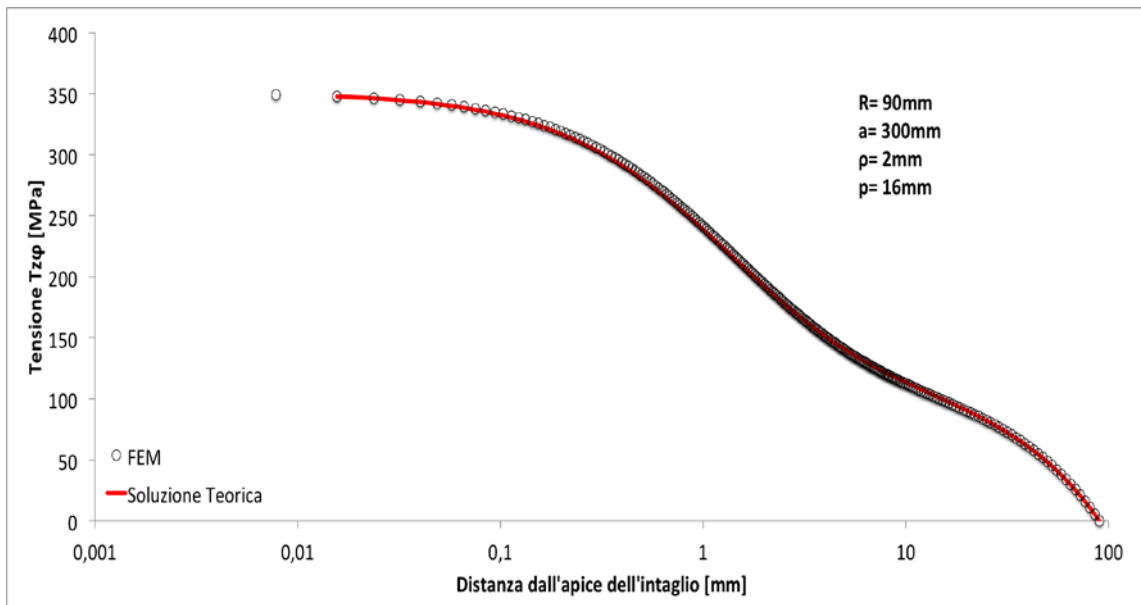


Figura 73 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del terzo intaglio a partire dall'alto

$$K_{tn} = 2,56$$

4. CONCLUSIONI

Analizzando i risultati e i grafici si possono fare delle considerazioni sulle due espressioni utilizzate per il calcolo delle tensioni nelle linee bisettrici degli intagli, in un albero assialsimmetrico soggetto a torsione.

La differenza sostanziale tra la prima e la seconda equazione è che la 1 risulta essere precisa nelle adiacenze degli intagli mentre al contrario la 2 riesce a stimare con una approssimazione soddisfacente la distribuzione di tensione in tutta la sezione dell'albero.

Quando gli intagli sono molto vicini le due espressioni risultano essere meno precise, soprattutto nel secondo intaglio a partire dall'alto. Questo comportamento è dovuto al fatto che i tre intagli si influenzano a vicenda e, in particolare, si può notare che i due laterali hanno maggiore influenza su quello centrale.

All'aumentare del passo questa influenza comincia a diminuire e le formule iniziano ad essere sempre più precise.

Risulta evidente che mano a mano che p aumenta ci si riconduce al caso di una piastra con un solo intaglio ad U, che è quello per cui le due formule sono state definite.

Nelle figure 74 e 75 viene rappresentato il confronto delle distribuzioni di tensioni dell'intaglio centrale calcolato con l'espressione 2.

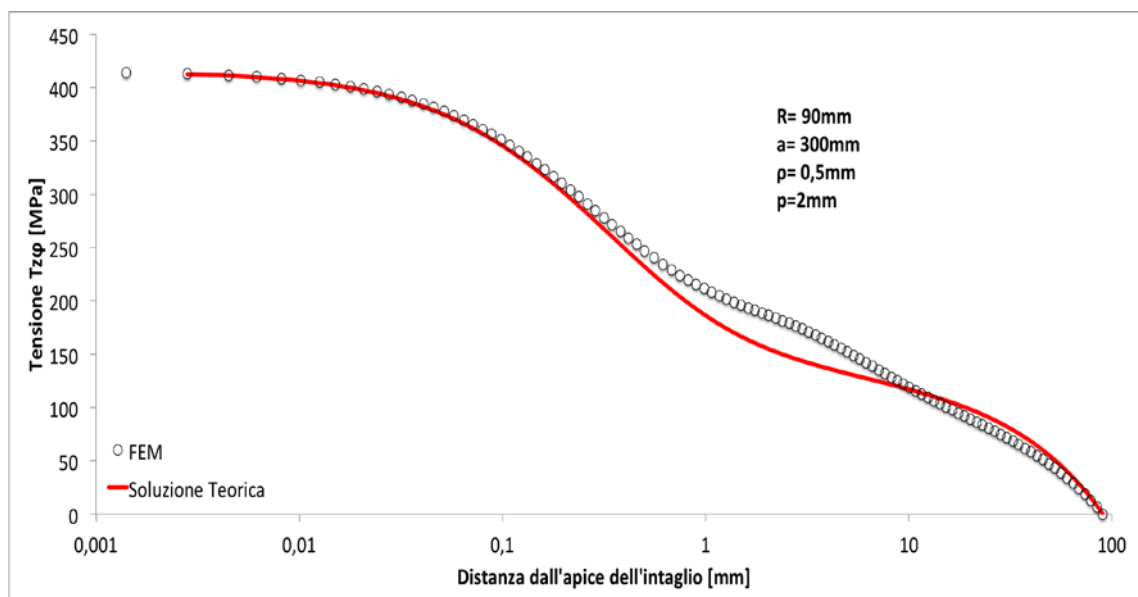


Figura 74 Andamento delle tensioni $T_{z\phi}$ del secondo intaglio a partire dall'alto

Si può notare che nella prima immagine dove la distanza è uguale a due millimetri l'intaglio centrale risente molto dell'influenza di quelli laterali. Infatti tra 1 mm e i 10mm la forma della distribuzione delle tensioni risulta avere un andamento diverso dalla figura 75. Essendo presente uno stato di tensione non previsto, in questo range, la formula sottostima i risultati.

Nella seconda immagine abbiamo una perfetta coincidenza tra il grafico della soluzione teorica e quello della soluzione trovata con Ansys, perché gli intagli sono posti ad un passo tale da non aver alcuna iterazione. Queste considerazioni possono essere considerate valide indipendentemente dal diverso raggio di raccordo utilizzato in questa tesi.

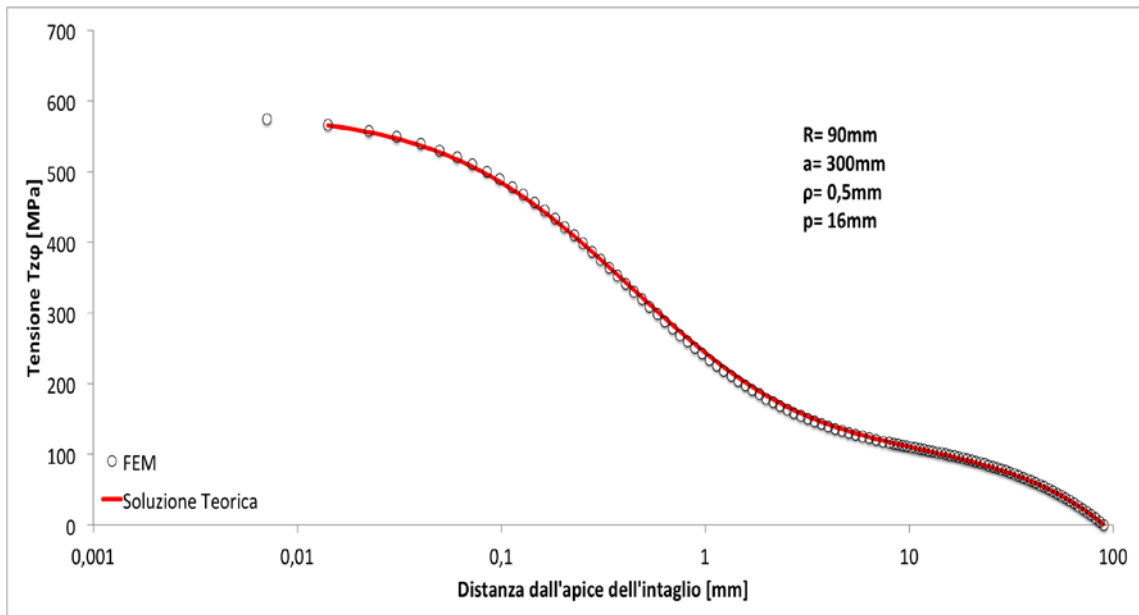


Figura 75 Andamento delle tensione $T_{z\phi}$ del secondo intaglio a partire dall'alto

Bibliografia

- Lazzarin P., 2006, Fondamenti di Costruzione di Macchine, Padova: Cortina Editore.
- Zappalorto Michele, Lazzarin Paolo, Filippi Stefano (2010). Stress field equations for U and blunt V-shaped notches in axisymmetric shafts under torsion. International Journal of Fracture, vol.164, issue: 2, pp. 253-269.