

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

Flussi turbolenti in presenza di pareti

Relatori

Prof. Giulio Giusteri

Prof. Antonio Trovato

Laureando

Alessandro Cavalleri

Anno Accademico 2021/2022

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Elementi di Statistica	1
1.2	Equazione di Reynolds	2
2	Fenomenologia della Turbolenza	4
2.1	Il Tensore di Correlazione	6
2.2	Modi di Fourier	8
2.3	Spettro della velocità	11
3	Flussi turbolenti in presenza di pareti	17
3.1	Flusso all'interno di una condotta rettangolare	17
3.2	Strato limite	24
4	Conclusioni	29

Capitolo 1

Introduzione

Quasi ogni moto di materiale fluido con cui entriamo in contatto nella vita quotidiana è un flusso turbolento. Da un ruscello in montagna che scorre verso valle, all'aria spostata da un ventilatore per tenerci al fresco d'estate, alle correnti atmosferiche e oceaniche, ogni giorno abbiamo modo di apprezzare questi moti così affascinanti e allo stesso tempo complessi, misteriosi.

Osservando abbastanza attentamente uno di questi fenomeni è facile rendersi conto che stiamo considerando moti imprevedibili e instabili, in cui è impossibile immaginare di riuscire a prevedere l'evoluzione di ogni singolo vortice. Più precisamente, i moti turbolenti sono caratterizzati dalle seguenti peculiarità:

- Fluttuazioni: tutti i campi che descrivono il flusso (velocità, pressione, temperatura, etc.) presentano fluttuazioni irregolari, caotiche e imprevedibili.
- Non linearità: benché anche alcuni flussi laminari presentino effetti non lineari, questo carattere è più accentuato nei flussi turbolenti.
- Vorticità e Dissipazione: la presenza di vortici è di fondamentale importanza nell'interpretazione moderna della turbolenza, e come vedremo è profondamente legata alla dissipazione di energia.
- Diffusività: si osserva che nei flussi turbolenti la capacità di diffondere momento o calore aumenta notevolmente, proprio grazie alla presenza di fluttuazioni e vortici.

Per quanto i moti turbolenti risultino estremamente complessi, è noto che l'equazione di Navier-Stokes garantisce in linea teorica una panoramica completa per la descrizione di qualsiasi flusso: questo determinismo sembra in netto contrasto con la componente imprevedibile e caotica del moto appena presentata.

In realtà la spiegazione a questo apparente paradosso risiede nel fatto che i moti reali presentano sempre delle piccole perturbazioni. Essendo i flussi turbolenti estremamente sensibili a queste variazioni, anche perturbazioni microscopiche possono comportare significative variazioni alla dinamica complessiva.

È dunque evidente che in un flusso turbolento il campo di velocità possiede una quantità di informazioni estremamente vasta e difficile da gestire matematicamente, rendendo la risoluzione dell'equazione di Navier-Stokes impraticabile, almeno analiticamente. Esistono delle tecniche numeriche che affrontano questo problema, ma sono oltre gli scopi di questa trattazione.

Per la stesura della seguente tesi si sono consultati principalmente i libri 'Turbulent Flows' di Stephen B. Pope [1] e 'Fluid Mechanics' di Pijush Kundu, Ira Cohen, David Dowling [2].

1.1 Elementi di Statistica

L'alternativa naturale per riuscire ad ottenere delle formule analitiche facilmente manipolabili è di procedere con un approccio statistico, ossia considerando il campo di velocità $U(\mathbf{x}, t)$ come una varia-

bile casuale. Si elencano in seguito le principali nozioni che verranno utilizzate nelle prossime sezioni. In generale, data Y variabile casuale a valori in \mathbb{R} , e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ corrispondente densità di probabilità, la media di Y è definita da

$$\langle Y \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s f(s) ds. \quad (1.1.1)$$

È chiaro che nel contesto della turbolenza è proprio la media del campo di velocità la quantità di rilievo fisico, che si può assumere come ben determinata (al contrario del campo di velocità).

Si definiscono quindi (rispettivamente) la fluttuazione e i momenti n -esimi di Y come

$$y \equiv Y - \langle Y \rangle, \quad (1.1.2)$$

$$\mu_n \equiv \langle y^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (s - \langle Y \rangle)^n f(s) ds. \quad (1.1.3)$$

Notiamo che il secondo momento corrisponde alla definizione di varianza, la cui radice corrisponde alla deviazione standard:

$$\text{var}(Y) \equiv \mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (s - \langle Y \rangle)^2 f(s) ds, \quad (1.1.4)$$

$$\text{sdev}(Y) = \sqrt{\text{var}(Y)} = \langle y^2 \rangle^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1.5)$$

Nel caso specifico della turbolenza, si è interessati allo studio di variabili casuali che sono in particolare funzioni dello spazio e del tempo. Possiamo allora scrivere il campo di velocità come $U(\mathbf{x}, t)$ e la sua fluttuazione come $u(\mathbf{x}, t)$. Si definiscono quindi rispettivamente il tensore di correlazione e i coefficienti di correlazione:

$$R_{ij}(\mathbf{x}_1, t_1, \mathbf{x}_2, t_2) \equiv \langle u_i(\mathbf{x}_1, t_1) u_j(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle, \quad (1.1.6)$$

$$\rho_{ij}(\mathbf{x}_1, t_1, \mathbf{x}_2, t_2) \equiv \frac{\langle u_i(\mathbf{x}_1, t_1) u_j(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle}{[\langle u_i^2(\mathbf{x}_1, t_1) \rangle \langle u_j^2(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle]^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.1.7)$$

Ricordando che dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz $|\langle u_i u_j \rangle| \leq \sqrt{\langle u_i^2 \rangle} \sqrt{\langle u_j^2 \rangle}$ è facile notare che

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1. \quad (1.1.8)$$

Il valore di questo coefficiente esprime quanto U_i e U_j fluttuino in modo coerente: se il valore di ρ_{ij} è zero U_i e U_j sono non correlate, se è uguale all'unità si dicono perfettamente correlate, mentre se è pari a -1 si parla di perfetta anticorrelazione.

Nel caso $i = j$ si ottiene il coefficiente di autocorrelazione, in quanto stiamo valutando la relazione della la stessa variabile casuale valutata tra diversi valori dello spazio e/o del tempo.

Nel proseguo della trattazione come variabili dei tensori di correlazione/autocorrelazione (e dei rispettivi coefficienti) si intenderanno sempre le componenti delle fluttuazioni relative al campo di velocità.

1.2 Equazione di Reynolds

Il prossimo passo consiste nel ricavare un'equazione che descriva l'evoluzione di queste quantità medie, a partire dalla nota equazione di Navier-Stokes.

La decomposizione di Reynolds permette di scrivere il campo di velocità come somma della media $\langle \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \rangle$ e della fluttuazione $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$,

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \rangle + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (1.2.1)$$

Ricordando l'equazione di continuità possiamo scrivere (per fluidi incomprimibili):

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \nabla \cdot (\langle \mathbf{U} \rangle + \mathbf{u}) = 0 \quad (1.2.2)$$

Considerando la media di quest'ultima equazione e sfruttando la linearità della divergenza si ottiene

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{U} \rangle + \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0, \quad (1.2.3)$$

e siccome le fluttuazioni hanno media nulla ($\langle \mathbf{u} \rangle = 0$) si conclude dalle ultime due equazioni che sia $\langle \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \rangle$ che $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ sono solenoidali.

Considerare la media dell'equazione di Navier Stokes

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) + (\nabla \cdot \mathbf{U}) \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla P(\mathbf{x}, t) + \nu \nabla^2 \mathbf{U}(\mathbf{x}, t), \quad (1.2.4)$$

è una procedura più delicata a causa del termine convettivo non lineare. Passando alla rappresentazione con gli indici, e ricordando che

$$\left\langle \frac{DU_j}{Dt} \right\rangle = \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle U_i U_j \rangle. \quad (1.2.5)$$

Per il termine convettivo si ottiene

$$\begin{aligned} \langle U_i U_j \rangle &= \langle (\langle U_i \rangle + u_i)(\langle U_j \rangle + u_j) \rangle \\ &= \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle + \langle u_i u_j \rangle. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Unendo le ultime due equazioni perveniamo a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{DU_j}{Dt} \right\rangle &= \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle U_i \rangle \langle U_j \rangle + \langle u_i u_j \rangle) \\ &= \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_i u_j \rangle, \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

dove si è sfruttato che $\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} = 0$.

Definendo la derivata totale media come

$$\frac{\overline{D}}{\overline{Dt}} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \langle \mathbf{U} \rangle \cdot \nabla, \quad (1.2.8)$$

e utilizzando quanto ricavato fino ad ora, possiamo facilmente considerare la media dell'equazione di Navier-Stokes, ottenendo l'equazione di Reynolds:

$$\frac{\overline{D} \langle U_j \rangle}{\overline{Dt}} = \nu \nabla^2 \langle U_j \rangle - \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_j}. \quad (1.2.9)$$

Le due equazioni risultano formalmente identiche, ad eccezione del termine aggiuntivo $\frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_i}$. Si può notare in particolare che $-\rho \langle u_i u_j \rangle$ rappresenta dimensionalmente uno sforzo che emerge dalle fluttuazioni di velocità: è però comodo e convenzionale definire semplicemente $\langle u_i u_j \rangle$ come tensore degli sforzi di Reynolds. Esso assume un ruolo fondamentale nella comprensione della dinamica dei moti turbolenti, e si presenta come un tensore di rango due simmetrico e definito positivo, le cui componenti diagonali rappresentano gli sforzi normali mentre le non diagonali gli sforzi di taglio.

L'energia cinetica turbolenta si definisce come

$$k \equiv \frac{1}{2} \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle. \quad (1.2.10)$$

è immediato notare che k ha le dimensioni di un'energia su unità di massa $\left[\frac{J}{kg} \right]$ e può essere dunque interpretata come densità di energia.

Si conclude la trattazione osservando che a differenza dell'equazione di Navier Stokes (1.2.4), che costituisce un sistema chiuso, la presenza aggiuntiva nella (1.2.9) del tensore degli sforzi di Reynolds causa un problema di chiusura. Tale tensore contiene infatti 9 componenti incognite da determinare, e l'unico modo per chiudere il sistema consiste nel creare modelli che riducano considerevolmente il numero di parametri ignoti. Un esempio di tale modello è dato dalla lunghezza di miscelazione, che verrà introdotta nella sezione 3.2.

Capitolo 2

Fenomenologia della Turbolenza

Per affrontare lo studio dei moti turbolenti è necessario introdurre due argomenti fondamentali: la cascata energetica e le ipotesi di Kolmogorov [3].

Consideriamo quindi un flusso completamente turbolento ad alti numeri di Reynolds, caratterizzato da una velocità caratteristica U e una lunghezza caratteristica L . L'ipotesi alla base della cascata energetica è che tale flusso presenti dei vortici di lunghezza l_0 confrontabile con L , e velocità u_0 confrontabile con U : il numero di Reynolds relativo a questi vortici risulterà quindi molto grande, per cui gli effetti viscosi sono trascurabili.

Un'ulteriore ipotesi cruciale consiste nell'assumere che questi vortici siano instabili e tendenti alla rottura, trasferendo così la loro energia a vortici più piccoli. Questo processo procede iterativamente fino a quando il numero di Reynolds è sufficientemente piccolo da rendere stabile il vortice: in questa ultima fase si ha che la presenza non più trascurabile della viscosità è responsabile della dissipazione dell'energia cinetica. In questa descrizione il processo dissipativo è collocato all'ultimo stadio del processo: indicando con ϵ il tasso di dissipazione, esso dipenderà quindi dal tempo caratteristico impegnato dai vortici grandi per cedere la loro energia ai vortici più piccoli. Considerando che l'energia scala come u_0^2 otteniamo

$$\epsilon \simeq \frac{u_0^2}{\tau_0} = \frac{u_0^3}{l_0}, \quad (2.0.1)$$

compatibilmente con le osservazioni sperimentali.

Per enunciare precisamente le ipotesi di Kolmogorov è necessario introdurre le seguenti definizioni:

1) **Omogeneità locale**: la turbolenza è localmente omogenea nel dominio D se, comunque presi $N+1$ punti $(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)})$ in D , e definendo

$$\mathbf{y}^{(n)} \equiv \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(0)} \quad (2.0.2)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}^{(n)}) \equiv \mathbf{U}(\mathbf{x}^{(n)}, t) - \mathbf{U}(\mathbf{x}^{(0)}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(0)}, t) \quad (2.0.3)$$

si ha che la PDF complessiva f_N di $\mathbf{v}(\mathbf{y}^{(n)})$ (con $n = 1, 2, \dots, N$) è indipendente sia da $\mathbf{x}^{(0)}$ che da $\mathbf{U}(\mathbf{x}^{(0)}, t)$.

2) **Isotropia locale**: la turbolenza è localmente isotropa nel dominio D se è localmente omogenea, e inoltre f_N risulta invariante per rotazioni e riflessioni degli assi.

Si possono ora formulare le ipotesi di Kolmogorov:

- **Ipotesi di isotropia locale**: in qualsiasi flusso turbolento con un numero di Reynolds abbastanza elevato, la turbolenza è in buona approssimazione localmente isotropa se valutata in un dominio D sufficientemente piccolo ($|y^{(n)}| \ll L \forall n$), e non troppo vicino alle pareti o altre singolarità.

Si suppone quindi che l'anisotropia dei vortici grandi (dovuta principalmente alla presenza di condizioni al contorno) svanisca nel processo caotico della cascata energetica.

- **Prima ipotesi di similitudine:** per turbolenze localmente isotrope, f_N dipende solamente dalla viscosità cinematica ν e dal tasso di dissipazione ϵ .

Anche in questa ipotesi si suppone che la cascata energetica sia un processo distruttivo, che porta alla perdita della geometria del vortice di partenza. Questo implica che la statistica dei vortici piccoli sia “universale”, ossia simile per qualsiasi flusso turbolento ad alti Re . Gli unici due parametri significativi durante la cascata energetica sono il tasso di dissipazione e la viscosità: la densità di probabilità potrà quindi dipendere solo da questi ultimi. Partendo da ϵ e ν si possono costruire univocamente una scala spaziale, una temporale e una di velocità. Esse sono dette scale di Kolmogorov e sono date da

$$\eta \equiv (\nu^3/\epsilon)^{1/4}, \quad u_\eta \equiv (\nu\epsilon)^{1/4}, \quad \tau_\eta \equiv (\nu/\epsilon)^{1/2}. \quad (2.0.4)$$

- **Seconda ipotesi di similitudine:** se i moduli dei vettori $\mathbf{y}^{(m)}$ e delle loro differenze $\mathbf{y}^{(m)} - \mathbf{y}^{(n)}$ ($m \neq n$) sono grandi rispetto alla lunghezza di Kolmogorov η , allora f_N dipende solamente da ϵ , e in particolare non dipende da ν .

Innanzitutto osserviamo che i rapporti tra le scale di Kolmogorov e quelle relative ai vortici più grandi si determinano dalla già citata stima per l'energia (2.0.1) e dalle definizioni (2.0.4):

$$\eta/l_0 \simeq Re^{-3/4}, \quad u_\eta/u_0 \simeq Re^{-1/4}, \quad \tau_\eta/\tau_0 \simeq Re^{-1/2}. \quad (2.0.5)$$

Questa ipotesi può allora essere giustificata notando che per Re molto elevati si possono considerare lunghezze molto maggiori di η ma molto minori di L , per le quali possiamo ancora ipotizzare che f_N sia universale, trascurando però gli effetti viscosi. L'unico parametro da cui si potrà avere dipendenza sarà quindi ϵ .

È conveniente notare già in prima battuta che le ipotesi di Kolmogorov dividono un flusso turbolento in tre scale di lunghezza distinte:

- **Scala energetica:** corrisponde intuitivamente alle scale di lunghezza confrontabili con L , ossia quelle contenenti i vortici più grandi. Il nome è dovuto al fatto che in questo livello è contenuta gran parte dell'energia cinetica. Una buona convenzione in accordo con gli esperimenti è di porre il limite inferiore di questa scala a $L_{EI} = \frac{1}{6}l_0$, per motivazioni sperimentali che saranno più chiare in seguito.
- **Scala inerziale:** si riferisce alla regione in cui si può applicare la seconda ipotesi di similitudine. Prendendo come limite inferiore $L_{DI} = 60\eta$ (valore che verrà discusso successivamente) si ha che tale scala è composta da lunghezze nell'intervallo $L_{DI} < l < L_{EI}$.
- **Scala dissipativa:** corrisponde evidentemente all'ultimo stadio della cascata energetica, ossia contiene gli ordini di grandezza dove la viscosità diventa non trascurabile e l'energia viene dissipata.

Nell'ambito della cascata energetica è di centrale importanza la quantità $T(l)$, ossia il tasso di energia trasferita dai vortici di lunghezza maggiore di l a quelli più piccoli. Supponendo che il contributo dominante sia fornito da vortici con lunghezza caratteristica confrontabile con l , possiamo aspettarci

$$T(l) \simeq \frac{u(l)^2}{\tau(l)}, \quad (2.0.6)$$

dove le scale caratteristiche sono state costruite a partire da ϵ e l :

$$u(l) = (\epsilon l)^{1/3} = u_\eta (l/\eta)^{1/3} \simeq u_0 (l/l_0)^{1/3}, \quad (2.0.7)$$

$$\tau(l) = (l^2/\epsilon)^{1/3} = \tau_\eta (l/\eta)^{2/3} \simeq \tau_0 (l/l_0)^{2/3}. \quad (2.0.8)$$

È particolarmente significativo notare che con queste approssimazioni $T(l)$ risulta indipendente da l : questa proprietà è effettivamente verificata e quindi $T(l)$ corrisponde a ϵ .

2.1 Il Tensore di Correlazione

Il primo approccio alla descrizione della turbolenza, formulato da Taylor [4] e Von Kármán e Howarth [5], è basato sullo studio del tensore di correlazione (a tempo fissato), che rappresenta la statistica più semplice che contenga qualche informazione circa la struttura spaziale del campo di velocità. Si analizzerà il caso di turbolenza omogenea e isotropa: in questo modo si può considerare, senza perdita di generalità, la media del campo di velocità identicamente nulla in ogni punto.

Sfruttando l'ipotesi di isotropia locale si possono operare diverse semplificazioni, e la rilevanza delle conseguenze di queste ipotesi è supportata dall'evidenza sperimentale, che conferma la ragionevolezza di tali approssimazioni in diversi casi reali. Dall'ipotesi di omogeneità possiamo osservare che il tensore di correlazione

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) \equiv \langle u_i(\mathbf{x}+\mathbf{r}, t)u_j(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (2.1.1)$$

non può dipendere da \mathbf{x} , ma solo da r . Non esistendo direzioni preferenziali (ipotesi di isotropia), $R_{ij}(\mathbf{r}, t)$ dovrà essere in particolare un tensore isotropo, e la dipendenza funzionale da r più generale che rispetti questa condizione è data dalla seguente espressione:

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = u'^2 \left(g(r, t)\delta_{ij} + [f(r, t) - g(r, t)]\frac{r_i r_j}{r^2} \right), \quad (2.1.2)$$

con $f(r, t)$ e $g(r, t)$ funzioni scalari. Considerando $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_1$ si ottiene, senza perdita di generalità,

$$R_{11}/u'^2 = f(r, t) = \frac{\langle u_1(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_1, t)u_1(\mathbf{x}, t) \rangle}{\langle u_1^2 \rangle}, \quad (2.1.3)$$

$$R_{22}/u'^2 = g(r, t) = \frac{\langle u_2(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_1, t)u_2(\mathbf{x}, t) \rangle}{\langle u_2^2 \rangle}, \quad (2.1.4)$$

$$R_{22} = R_{33}, \quad R_{ij} = 0, \quad \text{per } i \neq j.$$

Si identificano quindi f e g rispettivamente come funzioni di autocorrelazione longitudinale e trasversa. Si può dimostrare che per fluidi incomprimibili dall'equazione di continuità deriva la seguente formula

$$\frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_j} = 0, \quad (2.1.5)$$

che permette di esprimere g in funzione di f :

$$g(r, t) = f(r, t) + \frac{1}{2}r \frac{\partial}{\partial r} f(r, t). \quad (2.1.6)$$

Quindi sotto queste condizioni il coefficiente di correlazione $R_{ij}(\mathbf{r}, t)$ è completamente determinato dalla funzione di autocorrelazione longitudinale $f(r, t)$.

Utilizzando questa funzione possiamo costruire due scale di lunghezza distinte: la prima prende il nome di scala integrale longitudinale,

$$L_{11}(t) = \int_0^\infty f(r, t)dr, \quad (2.1.7)$$

che possiamo supporre essere legata alla lunghezza dei vortici di dimensioni maggiori.

La seconda è denominata microscaia longitudinale di Taylor λ_f , e si ricava espandendo al secondo ordine $f(r)$. Se $\pm\lambda_f$ sono le intersezioni della parabola approssimante $p(r)$ con l'asse delle ascisse, allora

$$\begin{aligned} p(r) &= 1 + \frac{1}{2}f''(0)r^2 = 1 - r^2/\lambda_f^2, \\ \Rightarrow \lambda_f(t) &= \left[-\frac{1}{2}f''(0, t) \right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Grandezze analoghe si definiscono anche per la scala trasversale, utilizzando g anzichè f :

$$L_{22}(t) = \int_0^\infty g(r, t) dr, \quad \lambda_g(t) = \left[-\frac{1}{2} g''(0, t) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.1.9)$$

e in caso di turbolenza isotropa si può dimostrare dalla (2.1.6) che $\lambda_g(t) = \lambda_f(t)/\sqrt{2}$.

Per determinare la relazione che lega le scale di Taylor con quelle di Kolmogorov, consideriamo $L \equiv k^{3/2}/\epsilon$ come lunghezza caratteristica dei vortici più grandi, dove k è l'energia cinetica turbolenta e ϵ è il tasso di dissipazione. Si definisce quindi il numero di Reynolds di turbolenza

$$Re_L \equiv \frac{k^{\frac{1}{2}} L}{\nu} = \frac{k^2}{\epsilon \nu}, \quad (2.1.10)$$

da cui si perviene alle seguenti relazioni:

$$\lambda_g/L = \sqrt{10} Re_L^{-\frac{1}{2}}, \quad \nu/L = Re_L^{-\frac{3}{4}}, \quad \lambda_g = \sqrt{10} \eta^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}}, \quad (2.1.11)$$

concludendo che ad elevati Re il valore di λ_g è compreso fra η e L .

Nonostante le scale di Taylor non abbiano un'interpretazione fisica precisa, esse sono quantità ben definite che vengono utilizzate frequentemente. Ad esempio il numero di Reynolds relativo alla microscala di Taylor,

$$R_\lambda \equiv u' \lambda_g / \nu = \left(\frac{20}{3} Re_L \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1.12)$$

viene tradizionalmente utilizzato per caratterizzare la turbolenza in presenza di griglie. Inoltre si può verificare che il rapporto

$$\lambda_g / u' = (15\nu/\epsilon)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{15} \tau_\eta, \quad (2.1.13)$$

quantifica correttamente il tempo caratteristico dei vortici più piccoli.

Von Kármán e Howarth ottennero anche un'equazione che descrive l'evoluzione di $f(r, t)$, sfruttando l'equazione di Navier-Stokes. Considerando la derivata di $R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{ij}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \langle u_i(\mathbf{x}+\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{x}, t) \rangle \\ &= \langle u_j(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial t} u_i(\mathbf{x}+\mathbf{r}, t) \rangle + \langle u_i(\mathbf{x}+\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} u_j(\mathbf{x}, t) \rangle, \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

l'equazione di Navier-Stokes

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_j} \quad (2.1.15)$$

può essere utilizzata per eliminare le derivate temporali presenti nel membro di destra della (2.1.14). Così facendo emergono tre termini corrispondenti ai contributi di convezione, del gradiente di pressione e della viscosità, dove in particolare il termine di pressione è identicamente nullo nell'ipotesi di turbolenza isotropa.

Il termine convettivo coinvolge correlazioni tra tutte le componenti della velocità, che possono essere espresse come segue:

$$\bar{S}_{ijk}(\mathbf{r}, t) \equiv \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}, t) u_k(\mathbf{x}+\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (2.1.16)$$

Analogamente al caso di R_{ij} , anche \bar{S}_{ijk} può essere scritto in funzione del solo termine di correlazione lineare,

$$\bar{k}(\mathbf{r}, t) = \bar{S}_{111}(r\mathbf{e}_1, t)/u'^3 = \langle u_1(\mathbf{x}, t)^2 u_1(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_1, t) \rangle / u'^3. \quad (2.1.17)$$

Con questa procedura si perviene all'equazione di Kármán-Howarth:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u'^2 f) - \frac{u'^3}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 \bar{k}) = \frac{2\nu u'^2}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial f}{\partial r} \right). \quad (2.1.18)$$

Da cui possiamo trarre le seguenti conclusioni:

- Emerge nuovamente un problema di chiusura, in quanto l'equazione contiene due termini incogniti, $f(r, t)$ e $\bar{k}(r, t)$.
- I termini dipendenti da \bar{k} e ν rappresentano rispettivamente processi inerziali e viscosi.
- Negli stadi finali dell'evoluzione di un flusso turbolento, si ha una fase in cui i numeri di Reynolds sono sufficientemente piccoli da poter trascurare il termine inerziale. In questo regime si trova la soluzione

$$f(r, t) = \exp[-r^2/(8\nu t)]. \quad (2.1.19)$$

- Nell'interpretazione di Kolmogorov l'energia viene trasferita dai vortici più grandi ai vortici più piccoli mediante un processo inerziale (per $r \ll \eta$). Concludiamo quindi che questo trasferimento di energia è dovuto al termine dipendente da \bar{k} nell'equazione di Kármán-Howarth.
- Se $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ha una forma Gaussiana allora $\bar{k}(r, t)$ è identicamente nulla, come tutti i terzi momenti. Concludiamo che il fenomeno della cascata energetica dipende solo dalle componenti non gaussiane del campo di velocità.

2.2 Modi di Fourier

Un secondo approccio equivalente a quanto descritto nella sezione precedente consiste nel rappresentare il campo di velocità mediante la serie di Fourier tridimensionale. Questa rappresentazione impone che il campo di velocità sia periodico: dato $L \gg L_{ii}$ deve valere

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{N}L, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (2.2.1)$$

Per ogni vettore intero \mathbf{N} . Definendo $k_0 \equiv 2\pi/L$, i modi di Fourier sono dati da

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = e^{ik_0 n_1 x_1} e^{ik_0 n_2 x_2} e^{ik_0 n_3 x_3}, \quad (2.2.2)$$

dove si è passati alla notazione complessa e si è definito il vettore d'onda $\mathbf{k} \equiv k_0(\mathbf{e}_1 n_1 + \mathbf{e}_2 n_2 + \mathbf{e}_3 n_3)$. È importante sottolineare che gli effetti dovuti all'aver imposto artificialmente una periodicità svaniscono per $\frac{L_{ii}}{L} \rightarrow 0$.

I modi di Fourier risultano tra loro ortogonali, costanti nella direzione ortogonale a \mathbf{k} e oscillanti nella direzione parallela.

Data una funzione reale $g(x)$ periodica, si può costruire la sua rappresentazione in serie di Fourier

$$g(x) = \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{g}(\mathbf{k}), \quad (2.2.3)$$

in cui la sommatoria è dunque estesa ai valori del vettore d'onda e $\hat{g}(\mathbf{k})$ definiscono i coefficienti (complessi) di Fourier. Essendo $g(\mathbf{x})$ reale, deve valere la condizione di simmetria per i coefficienti

$$\hat{g}(\mathbf{k}) = \hat{g}^*(-\mathbf{k}). \quad (2.2.4)$$

Tali coefficienti possono essere determinati dalla condizione di ortogonalità:

$$\langle g(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \rangle_L = \left\langle \sum_{\mathbf{k}} \hat{g}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \right\rangle_L = \left\langle \sum_{\mathbf{k}} \hat{g}(\mathbf{k}) \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \right\rangle_L = \hat{g}(\mathbf{k}'), \quad (2.2.5)$$

dove si denota con $\langle \cdot \rangle_L$ la media nel volume cubico di lato L . Definiamo ora l'operatore $F_{\mathbf{k}}\{\cdot\}$

$$F_{\mathbf{k}}\{g(x)\} = \langle g(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \rangle_L = \frac{1}{L^3} \int_0^L \int_0^L \int_0^L g(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dx_1 dx_2 dx_3, \quad (2.2.6)$$

da cui evidentemente applicare $F_k\{\cdot\}$ a $g(\mathbf{x})$ equivale a calcolarne il coefficiente di Fourier relativo al vettore d'onda \mathbf{k} ,

$$F_k\{g(\mathbf{x})\} = \hat{g}(\mathbf{k}). \quad (2.2.7)$$

Questa rappresentazione risulta particolarmente utile per la nota proprietà di trasformazione delle derivate,

$$F_k\left\{\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right\} = ik_j \hat{g}(\mathbf{k}), \quad (2.2.8)$$

che possiamo sfruttare per riscrivere l'equazione di continuità come segue:

$$F_k\left\{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right\} = ik_j \hat{u}_j = i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0, \quad (2.2.9)$$

da cui è immediato concludere che $\hat{\mathbf{u}} \perp \mathbf{k}$.

In generale, dato un vettore $\hat{\mathbf{G}}$, possiamo scomporlo sempre in una componente $\hat{\mathbf{G}}^\perp$ ortogonale a \mathbf{k} e in una $\hat{\mathbf{G}}^\parallel$ parallela. Denotando con $\mathbf{e} = \mathbf{k}/k$ il versore parallelo a \mathbf{k} , si ottiene

$$\hat{\mathbf{G}}^\parallel = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{G}})/k^2 = \frac{k_j k_k}{k^2} \hat{\mathbf{G}}_k, \quad (2.2.10)$$

$$\hat{\mathbf{G}}^\perp = \hat{\mathbf{G}} - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{G}})/k^2 = P_{ij} \hat{\mathbf{G}}_k, \quad (2.2.11)$$

dove si è definito il tensore di proiezione $P_{ij} \equiv \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$. In particolare, si possono applicare questi risultati per trovare, a partire dalla nota equazione di Navier-Stokes (1.2.4), l'evoluzione del campo di velocità nello spazio dei vettori d'onda. Per fare ciò applichiamo l'operatore $F_k\{\cdot\}$ ad ambo i membri:

- Siccome la derivata temporale commuta con l'operatore $F_k\{\cdot\}$, per il primo termine si trova semplicemente

$$F_k\left\{\frac{\partial u_j}{\partial t}\right\} = \frac{d\hat{u}_j}{dt} \quad (2.2.12)$$

- Per il termine viscoso, applicando due volte la regola (2.2.8), si ottiene

$$F_k\left\{\nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}\right\} = -\nu k^2 \hat{u}_j \quad (2.2.13)$$

- Indicando con $\hat{p}(\mathbf{k}, \mathbf{t}) \equiv F_k\{p(\mathbf{x}, t)/\rho\}$ il coefficiente di Fourier relativo alla pressione dinamica $p(\rho)$, si ottiene per il termine corrispondente

$$F_k\left\{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j}\right\} = -ik_j \hat{p} \quad (2.2.14)$$

Si perviene così alla seguente equazione:

$$\frac{d\hat{u}_j}{dt} + \nu k^2 \hat{u}_j = -ik_j \hat{p} - \hat{G}_j, \quad (2.2.15)$$

dove il termine $\hat{G}_j(\mathbf{k}, t) \equiv F_k\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}(u_j u_k)\right\}$ indica il coefficiente di Fourier del termine convettivo. Moltiplicando ambo i membri per k_j i termini al primo membro si annullano, e si ottiene

$$k^2 \hat{p} = ik_j \hat{G}_j, \quad (2.2.16)$$

che rappresenta l'equazione di Poisson della pressione valutata nello spazio dei vettori d'onda. La soluzione di questa equazione conduce a soluzioni della forma

$$-ik_j \hat{p} = \hat{G}_j^\parallel, \quad (2.2.17)$$

da cui si conclude che termine di pressione bilancia esattamente $-\hat{\mathbf{G}}^{\parallel}$. Dunque ciò che rimane al secondo membro della (2.2.15) è $-\hat{\mathbf{G}}^{\perp}$, per cui si può scrivere

$$\frac{d\hat{u}_j}{dt} + \nu k^2 \hat{u}_j = -P_{ij} \hat{G}_k = -\hat{G}_j^{\perp}. \quad (2.2.18)$$

Se il numero di Reynolds è abbastanza basso da poter trascurare il termine convettivo, questa equazione ammette soluzioni della forma

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, 0) e^{-\nu k^2 t}. \quad (2.2.19)$$

L'effetto della viscosità è quindi di smorzare esponenzialmente i coefficienti di Fourier, e in particolare la rapidità di smorzamento aumenta velocemente all'aumentare del modulo quadro del vettore d'onda. Sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier, si dimostra che

$$\hat{G}_j(\mathbf{k}, t) = ik_k \sum_{k'} \hat{u}_j(\mathbf{k}') \hat{u}_k(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2.2.20)$$

e inserendo questo risultato nella (2.2.18) si perviene ad un'equazione definitiva per l'evoluzione di $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$, che rappresenta l'analogo dell'equazione di Navier-Stokes nello spazio dei vettori d'onda:

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k^2 \right) \hat{u}_j(\mathbf{k}, t) = -ik_l P_{jk}(\mathbf{k}) \sum_{k'} \hat{u}_j(\mathbf{k}') \hat{u}_k(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2.2.21)$$

In particolare si nota che in questo spazio il termine convettivo risulta non lineare e non locale: esso infatti contiene interazioni tra i vettori d'onda \mathbf{k} , \mathbf{k}' e \mathbf{k}'' , tali che $\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k}$.

Con l'obiettivo di descrivere la turbolenza statisticamente si considera, come nella sezione precedente, il caso più semplice in cui la turbolenza è omogenea e isotropa. Sotto queste ipotesi $\langle \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \rangle$ è identicamente nulla ovunque, e dunque anche i relativi coefficienti di Fourier si annullano. La successiva statistica da considerare è la covarianza tra due coefficienti di Fourier,

$$\langle \hat{u}_i(\mathbf{k}', t) \hat{u}_j(\mathbf{k}, t) \rangle, \quad (2.2.22)$$

che risultano in particolare incorrelati se non è verificata la condizione $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$. Inoltre si può verificare la seguente relazione:

$$\hat{R}_{ij}(\mathbf{k}, t) = F_k \{ R_{ij}(\mathbf{x}, t) \}, \quad (2.2.23)$$

da cui è immediato concludere che $R_{ij}(\mathbf{x}, t)$ ammette la rappresentazione in serie di Fourier

$$R_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{R}_{ij}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (2.2.24)$$

Si definisce quindi il tensore spettro di velocità

$$\phi_{ij}(\bar{\mathbf{k}}, t) \equiv \sum_{\mathbf{k}} \delta(\bar{\mathbf{k}} - \mathbf{k}) \hat{R}_{ij}(\mathbf{k}, t), \quad (2.2.25)$$

che risulta essere la trasformata di Fourier in tre dimensioni del tensore di correlazione, ossia

$$\phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} R_{ij}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (2.2.26)$$

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \phi_{ij}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}. \quad (2.2.27)$$

Ponendo $\mathbf{r} = 0$ la (2.2.24) e la (2.2.27) si semplificano ulteriormente,

$$R_{ij}(0, t) = \langle u_i u_j \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \hat{R}_{ij}(\mathbf{k}, t) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ij}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}, \quad (2.2.28)$$

evidenziando che $\hat{R}_{ij}(\mathbf{k}, t)$ rappresenta il contributo al tensore degli sforzi di Reynolds apportato dal modo di Fourier di numero d'onda \mathbf{k} . Di particolare rilievo risulta l'energia cinetica dei modi di Fourier, definita da

$$\hat{E}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \langle \hat{u}_i^*(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \rangle = \frac{1}{2} \hat{R}_{ii}(\mathbf{k}, t). \quad (2.2.29)$$

Ricordando la definizione di energia cinetica turbolenta (1.2.10) si trova

$$k(t) = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \hat{R}_{ii}(\mathbf{k}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \hat{E}(\mathbf{k}, t) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \phi_{ii}(\bar{\mathbf{k}}, t) d\bar{\mathbf{k}}. \quad (2.2.30)$$

Si riconosce quindi in $\hat{E}(\mathbf{k}, t)$ il contributo all'energia cinetica dato dal modo di Fourier di vettore d'onda \mathbf{k} . È possibile trovare una relazione tra $\hat{E}(\mathbf{k}, t)$ e il tasso di dissipazione $\epsilon(t)$ come segue:

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= -\nu \langle u_j \nabla^2 u_j \rangle = -\nu \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_k} R_{jj}(\mathbf{r}, t) \\ &= -\nu \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} (-k_k k_k) \hat{R}_{jj}(\mathbf{k}, t) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} 2\nu k^2 \hat{E}(\mathbf{k}, t) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} 2\nu \bar{\mathbf{k}}^2 \frac{1}{2} \phi_{ii}(\bar{\mathbf{k}}^2, t) d\bar{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Quindi $2\nu k^2 \hat{E}(\mathbf{k}, t)$ costituisce il contributo al tasso di dissipazione dato dal modo di Fourier con vettore d'onda \mathbf{k} .

L'evoluzione di $\hat{E}(\mathbf{k}, t)$ può essere dedotta dalla (2.2.21), ricavando

$$\frac{d}{dt} \hat{E}(\mathbf{k}, t) = \hat{T}(\mathbf{k}, t) - 2\nu \mathbf{k}^2 \hat{E}(\mathbf{k}, t), \quad (2.2.32)$$

dove

$$\hat{T}(\mathbf{k}, t) = k_l P_{ij}(\mathbf{k}) \Re \left(i \sum_{\mathbf{k}'} \langle \hat{u}_j(\mathbf{k}) \hat{u}_k^*(\mathbf{k}') \hat{u}_l^*(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \rangle \right), \quad (2.2.33)$$

e $\Re(\cdot)$ denota la parte reale. Se sommata su tutti i valori di \mathbf{k} , il membro di sinistra della (2.2.32) è pari a dk/dt mentre l'ultimo termine del membro di destra vale $-\epsilon$: siccome per turbolenze isotrope questi due termini si equivalgono, concludiamo che deve valere

$$\sum_{\mathbf{k}} \hat{T}(\mathbf{k}, t) = 0. \quad (2.2.34)$$

Dunque il termine $\hat{T}(\mathbf{k}, t)$ rappresenta un trasferimento di energia tra i vari modi.

Va evidenziato il fatto che l'equazione (2.2.32) ha lo stesso contenuto fisico dell'equazione di Kármán-Howarth (2.1.18), ma espresso in uno spazio differente. In particolare questa trattazione ha il pregio di arrivare a una scrittura esplicita per $\hat{T}(\mathbf{k}, t)$, quantità che gioca un ruolo centrale nel processo della cascata energetica.

2.3 Spettro della velocità

In questa sezione si presenta un primo riscontro fra la teoria che si è sviluppata fino a questo punto e i risultati sperimentali. Per fare ciò è necessario stabilire delle relazioni utili fra $E(k)$ e $\phi_{ij}(\mathbf{k})$. Si introdurrà inoltre il concetto di spettro di energia unidimensionale, in quanto risulta una quantità facile da misurare sperimentalmente. Si è già accennato nel paragrafo precedente che il tensore di correlazione e il tensore spettro di velocità sono duali sotto l'azione della trasformata di Fourier. Per $\phi_{ij}(\mathbf{k})$ valgono inoltre le seguenti proprietà:

$$\phi_{ij}(\mathbf{k}) = \phi_{ij}^*(\mathbf{k}) = \phi_{ij}(-\mathbf{k}) \quad (2.3.1)$$

$$k_i \phi_{ij}(\mathbf{k}) = k_j \phi_{ij}(\mathbf{k}) = 0 \quad (2.3.2)$$

dove (2.3.1) deriva dalle proprietà di simmetria di $R_{ij}(\mathbf{r})$ e dal fatto che $R_{ij}(\mathbf{r})$ è reale e (2.3.2) è una conseguenza dell'ipotesi di incomprimibilità. $\phi_{ij}(\mathbf{k})$ risulta essere inoltre un tensore semidefinito positivo,

$$\phi_{ij}(\mathbf{k})\mathbf{Y}_i\mathbf{Y}_j \geq 0 \quad \forall \mathbf{Y}, \quad (2.3.3)$$

da cui segue che le componenti diagonali di $\phi_{ij}(\mathbf{k})$, e in particolare la traccia, sono non negative. È utile studiare il tensore spettro di velocità in quanto si è già mostrato che esso corrisponde al contributo del modo di Fourier di vettore d'onda \mathbf{k} al tensore degli sforzi di Reynolds $\langle u_i u_j \rangle$.

Essendo un tensore di rango due, $\phi_{ij}(\mathbf{k})$ contiene una vasta quantità di informazioni: nel caso di turbolenza isotropa queste informazioni risultano però ridondanti, e in particolare $\phi_{ij}(\mathbf{k})$ può essere determinato univocamente attraverso una sola funzione scalare $E(k)$ definita da

$$E(k) = \oint \frac{1}{2} \phi_{ii}(\mathbf{k}) dS(k), \quad (2.3.4)$$

dove con $\oint(\cdot)dS(k)$ si intende l'integrazione sulla sfera nello spazio dei vettori d'onda. In particolare $E(k)$ eredita tutte le proprietà di $\phi_{ij}(\mathbf{k})$ ed è quindi una funzione reale a valori non negativi (come ci si aspetta).

Riprendendo i risultati della (2.2.30) e (2.2.31), si ottiene

$$k = \int_0^\infty E(k) dk, \quad (2.3.5)$$

$$\epsilon = \int_0^\infty 2\nu k^2 E(k) dk, \quad (2.3.6)$$

che esprimono il fatto che $E(k)$ rappresenta la densità di energia cinetica, mentre $2\nu k^2 E(k)$ indica la densità di energia dissipata (in entrambi i casi la densità è chiaramente da intendersi nello spazio dei vettori d'onda).

La relazione che lega $\phi_{ij}(\mathbf{k})$ ed $E(k)$ si ottiene osservando che l'unico tensore di rango due che posso costruire in funzione di \mathbf{k} compatibile con la richiesta di isotropia ha la seguente forma:

$$\phi_{ij}(\mathbf{k}) = A(k)\delta_{ij} + B(k)k_i k_j, \quad (2.3.7)$$

in cui $A(k)$ e $B(k)$ possono essere determinati imponendo la condizione di incomprimibilità. Così facendo si ottiene

$$\phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} P_{ij}(\mathbf{k}). \quad (2.3.8)$$

$\phi_{ij}(\mathbf{k})$ ed $E(k)$ costituiscono due quantità teoricamente misurabili: per fare ciò bisognerebbe però determinare il tensore di correlazione $R_{ij}(\mathbf{r})$ per ogni \mathbf{r} , che è impensabile nella pratica.

È comunque possibile effettuare una stima di $R_{ij}(\mathbf{r})$ lungo una retta utilizzando una sonda (per esempio un anemometro), mediante i seguenti metodi:

- Un anemometro composto da un filo ad alte temperatura viene messo in moto rettilineo uniforme a velocità V molto elevata rispetto alle grandezze caratteristiche del processo turbolento. La velocità misurata dall'anemometro è data allora da

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{X}(t), t) - \mathbf{e}_1 V, \quad (2.3.9)$$

dove si è posto senza perdita di generalità \mathbf{e}_1 come direzione di V . La covarianza temporale può essere dunque calcolata come segue:

$$\begin{aligned} R_{ij}(s) &= \langle [U_i(t) - \langle U_i(t) \rangle][U_j(t+s) - \langle U_j(t+s) \rangle] \rangle \\ &= \langle u_i(\mathbf{X}(t), t) u_j(\mathbf{X}(t+s), t+s) \rangle \\ &= \langle u_i(\mathbf{X}(t), t) u_j(\mathbf{X}(t) + \mathbf{e}_1 r_1, t + r_1/V) \rangle \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

dove con $r_1 = Vs$ si indica la distanza percorsa dalla sonda nel tempo s . Sfruttando dunque l'ipotesi su V e l'omogeneità della turbolenza si ottiene

$$\begin{aligned} R_{ij}(s) &= \langle u_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{e}_1 Vt, 0) u_j(\mathbf{x}_0 + \mathbf{e}_1 Vt + \mathbf{e}_1 r_1, 0) \rangle \\ &= \langle u_i(\mathbf{x}_0, 0) u_j(\mathbf{x}_0 + \mathbf{e}_1 r_1, 0) \rangle = R_{ij}(\mathbf{e}_1 r_1, \mathbf{x}_0, 0). \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Si osserva quindi che si è riusciti a ottenere una stima della covarianza spaziale misurando la covarianza temporale.

- Una tecnica molto più utilizzata consiste nel posizionare la sonda in un punto fissato: questo metodo è applicabile per flussi statisticamente stazionari, per i quali le fluttuazioni dovute alla turbolenza sono piccole rispetto alla velocità media.

Nel sistema di riferimento solidale alla velocità media, la sonda si muove con velocità costante $\mathbf{e}_1 V = -\langle U \rangle = -\mathbf{e}_1 \langle U_1 \rangle$. Con queste ipotesi si possono considerare calcoli analoghi al caso precedente, con la differenza che $r_1 = -\langle U_1 \rangle s$.

L'approssimazione che permette di stimare correlazioni spaziali attraverso correlazioni temporali è nota come ipotesi di Taylor [6], e la sua validità dipende sia dalle proprietà del flusso che dal tipo di osservabile misurata. Può risultare abbastanza accurata in un flusso turbolento attraverso una griglia con $u'/\langle U_1 \rangle \ll 1$, ma si rivela non applicabile in molti altri contesti.

Nei casi in cui tale ipotesi è ragionevole, le quantità misurate sperimentalmente conducono alle seguenti espressioni funzionali:

$$R_{11}(\mathbf{e}_1 r_1, t) = \langle u_1^2 \rangle f(r_1, t), \quad (2.3.12)$$

$$R_{22}(\mathbf{e}_1 r_1, t) = \langle u_2^2 \rangle g(r_1, t), \quad (2.3.13)$$

nelle quali f e g indicano rispettivamente le funzioni di autocorrelazione longitudinale e trasversa. Definiamo ora lo spettro di energia unidimensionale $E_{ij}(k_1)$ come il doppio della trasformata di Fourier unidimensionale di $R_{ij}(\mathbf{e}_1 r_1)$:

$$E_{ij}(k_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\mathbf{e}_1 r_1) e^{-ik_1 r_1} dr_1. \quad (2.3.14)$$

Calcolato per $i=j=2$, e sfruttando la parità dell'integrando, la (2.3.14) restituisce

$$E_{22}(k_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_{22}(\mathbf{e}_1 r_1) \cos(k_1 r_1) dr_1, \quad (2.3.15)$$

con la corrispettiva formula inversa,

$$R_{22}(\mathbf{e}_1 r_1) = \int_0^{\infty} E_{22}(k_1) \cos(k_1 r_1) dk_1. \quad (2.3.16)$$

Il fattore 2 nella (2.3.14) si introduce in modo da ottenere

$$R_{22}(0) = \langle u_2^2 \rangle = \int_0^{\infty} E_{22}(k_1) dk_1. \quad (2.3.17)$$

Lo spettro unidimensionale è legato al tensore spettro di velocità dalla relazione

$$E_{22}(k_1) = 2 \int \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{22}(\mathbf{k}) dk_2 dk_3. \quad (2.3.18)$$

Dalla (2.3.12) si ricava la relazione tra $E_{11}(k_1)$ e $f(r_1)$,

$$E_{11}(k_1) = \frac{2}{\pi} \langle u_1^2 \rangle \int_0^{\infty} f(r_1) \cos(k_1 r_1) dr_1, \quad (2.3.19)$$

e ponendo $k_1 = 0$ si ritrova la definizione di scala di lunghezza integrale L_{11} ,

$$L_{11} = \int_0^{\infty} f(r_1) dr_1 = \frac{\pi E_{11}(0)}{2 \langle u_1^2 \rangle}. \quad (2.3.20)$$

Scrivendo la (2.3.18) per $E_{11}(k_1)$ e ricordando la formula (2.3.8) si ottiene

$$E_{11}(k_1) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(k)}{2\pi k^2} \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right) dk_2 dk_3. \quad (2.3.21)$$

Sfruttando la simmetria del dominio di integrazione si introduce la coordinata radiale $k_r^2 = k_2^2 + k_3^2 = k^2 - k_1^2$, grazie alla quale posso riscrivere la (2.3.21) come

$$E_{11}(k_1) = \int_{k_1}^{\infty} \frac{E(k)}{k} \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right) dk, \quad (2.3.22)$$

che rende manifesto il fatto che $E_{11}(k_1)$ contiene solo i contributi dei numeri d'onda k maggiori di k_1 . Invertendo questa formula si ottiene

$$E(k) = \frac{1}{2} k^3 \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{k} \frac{dE_{11}(k)}{dk} \right). \quad (2.3.23)$$

Avendo indagato le principali proprietà di $E_{ij}(k_1)$, $\phi_{ij}(\mathbf{k})$, $E(k)$ e le relazioni esistenti tra di esse, il passo successivo consiste nello studiarne lo spettro: per avere un riscontro sperimentale, nella maggior parte delle misure viene invocata l'ipotesi di Taylor al fine di ottenere stime di $E_{ij}(k_1)$.

Sfruttando le ipotesi di Kolmogorov è possibile prevedere diverse dipendenze funzionali. Si è già discusso che l'ipotesi di isotropia si applica alle scale di lunghezza per cui $l < l_{EI}$, che nello spazio dei vettori d'onda equivale a imporre $k > k_{EI}$. Se questa condizione è soddisfatta allora $E(k)$ definisce univocamente ϕ_{ij} , e inoltre valgono (2.3.21)-(2.3.23).

La prima ipotesi di similitudine impone che sotto le stesse ipotesi il campo di velocità segua una statistica universale, dipendente unicamente da ϵ e ν : dunque $E(k)$ deve essere una funzione universale dipendente da k , ϵ e ν . Semplici osservazioni dimensionali mostrano allora che sotto queste condizioni $E(k)$ può essere scritto in due modi:

$$E(k) = (\epsilon \nu^5)^{1/4} \psi(k\eta) = u_\eta^2 \psi(k\eta), \quad (2.3.24)$$

$$E(k) = \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \Psi(k\eta), \quad (2.3.25)$$

dove $\psi(k\eta)$ e $\Psi(k\eta)$ sono due funzioni adimensionali universali, legate dalla relazione

$$\Psi(k\eta) = (k\eta)^{5/3} \psi(k\eta). \quad (2.3.26)$$

La seconda ipotesi di similitudine si applica nell'intervallo inerziale, ossia per $l_{DI} < l < l_{EI}$, che corrisponde nello spazio dei vettori d'onda a $k_{EI} < k < l_{DI}$, o equivalentemente $1 \gg k\eta \gg \eta/l_0$.

Sappiamo che in questo intervallo $E(k)$ ha ancora un comportamento universale, che però dipende solo da ϵ . Questo significa che, per $k\eta \rightarrow 0$, Ψ non dipende più dal suo argomento e diventa una costante C . Ci aspettiamo quindi una dipendenza di questa forma

$$E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (2.3.27)$$

confermata dalle osservazioni sperimentali con $C=1.5$. Si può dimostrare che con questo tipo di dipendenze funzionali anche gli spettri unidimensionali assumono una forma analoga,

$$E_{11}(k_1) = C_1 \epsilon^{2/3} k_1^{-5/3}, \quad (2.3.28)$$

$$E_{22}(k_1) = C'_1 \epsilon^{2/3} k_1^{-5/3}, \quad (2.3.29)$$

dove $C_1 = \frac{18}{55}C$, e $C'_1 = \frac{4}{3}C_1$. Un modello definitivo per lo spettro energetico, che descriva $E(k)$ non solo nella scala inerziale, ma anche in quella dissipativa ed energetica, è dato da

$$E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3} f_L(kL) f_\eta(k\eta), \quad (2.3.30)$$

dove f_L ne determina la forma nell'intervallo energetico (e tende all'unità per grandi valori di kL), mentre f_η ne determina la forma nell'intervallo di dissipazione (e tende all'unità per piccoli valori di

$k\eta$). In questo modo si recupera nell'intervallo inerziale la formula (2.3.25). In particolare si utilizzano le seguenti parametrizzazioni:

$$f_L(kL) = \left(\frac{kL}{[(kL)^2 + c_L]^{1/2}} \right)^{5/3+p_0}, \quad (2.3.31)$$

$$f_\eta(k\eta) = \exp\{-\beta\{[(k\eta)^4 + c_\eta^4]^{1/4} - c_\eta\}\}, \quad (2.3.32)$$

che conducono ad un andamento di $E(k)$ descritto dalla figura 2.1.

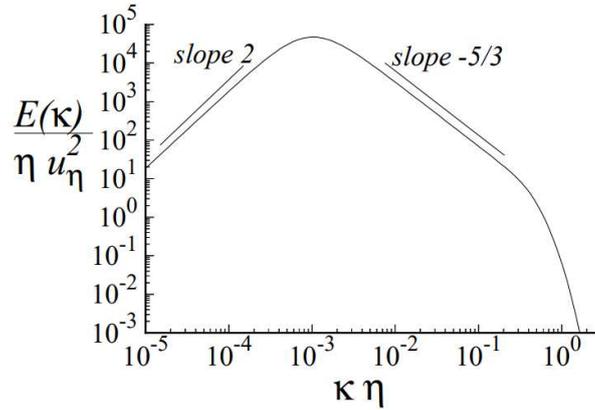


Figura 2.1: Modello dello spettro energetico (Eq.(2.3.30) normalizzata con le scale di Kolmogorov) per $R_\lambda = 500$. Tutte le immagini nella presente tesi sono tratte dal libro di Stephen B. Pope 'Turbulent Flows' [1] come rese disponibili dall'autore.

Oltre a verificare le condizioni appena discusse, f_L e f_η contengono ulteriori informazioni. Nella zona energetica il contributo dominante è $f_L \simeq (kL)^{5/3+p_0}$, che porta ad un andamento complessivo dell'energia dato da $E(k) \propto k^2$. Nella zona dissipativa, nella quale il termine dominante è f_η , si avrà invece un andamento esponenziale con $\beta \simeq 2.1$.

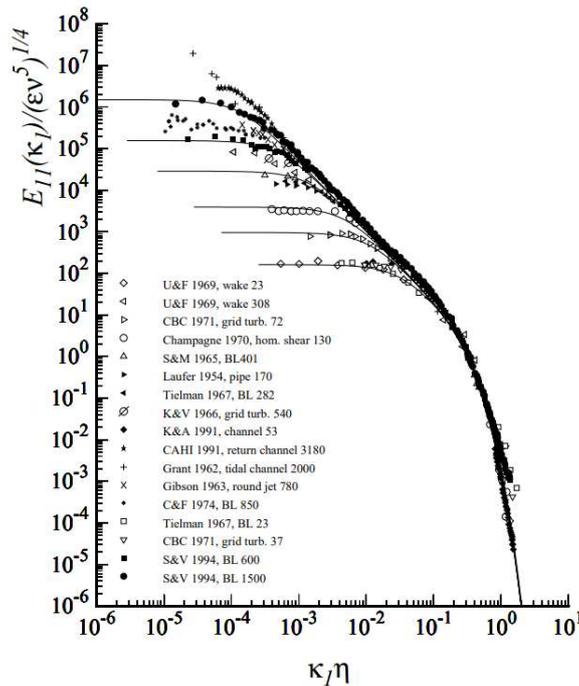


Figura 2.2: Misure dello spettro unidimensionale longitudinale (simboli) sovrapposte al modello dello spettro energetico (linee, Eq. (2.3.30)), per $R_\lambda=30, 70, 130, 300, 600$ e 1500 .

Una prima conferma delle ipotesi adottate è inerente alla scala di dissipazione, di cui un plot che sovrappone diversi flussi turbolenti è mostrato nella figura 2.2. Abbiamo un'evidente conferma della prima ipotesi di similitudine: per k sufficientemente elevati notiamo che le curve si sovrappongono completamente.

La seconda ipotesi di similitudine è confermata in modo analogo da un plot dei cosiddetti spettri unidimensionali compensati $\epsilon^{-2/3} k_1^{5/3} E_{11}(k_1)$ (analogamente per E_{22}), quantità che dalle (2.3.28) e (2.3.29) ci si aspetta assumano un valore costante nella scala inerziale. Le evidenze sperimentali conducono a grafici con forma analoga alle figure 2.3. Abbiamo una conferma sia dell'andamento costante nella zona centrale, che dell'ipotesi di isotropia, in quanto emerge dai dati sperimentali che $C'_1 = \frac{4}{3}C_1$ nella scala inerziale.

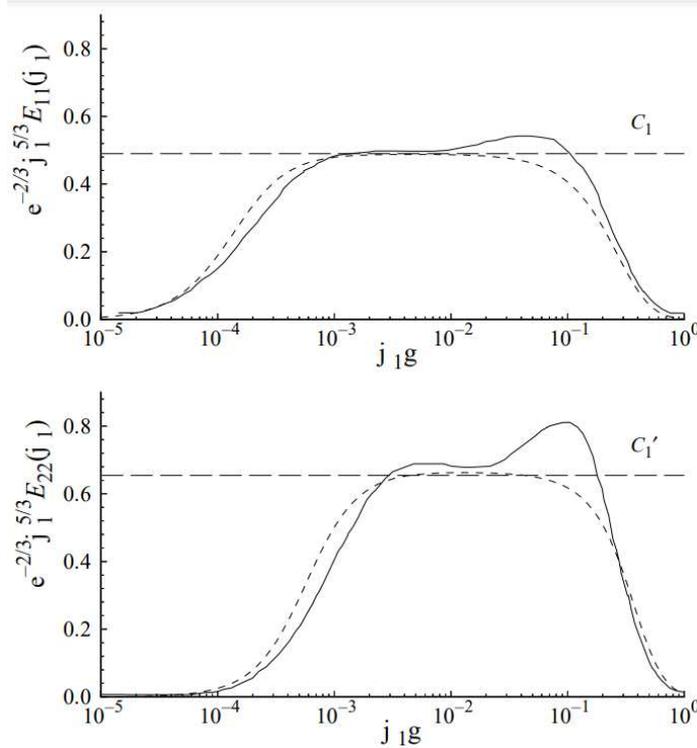


Figura 2.3: Spettri unidimensionali compensati misurati all'interno di uno strato limite turbolento a $R_\lambda \sim 1450$. Le linee continue rappresentano i dati sperimentali; le linee tratteggiate il modello dello spettro energetico; le linee tratteggiate lunghe i valori di C_1 e C'_1 .

Inoltre, sperimentalmente si evidenziano i seguenti fatti:

- Dallo studio dello spettro di dissipazione emerge che i moti che dissipano più energia sono caratterizzati da lunghezze caratteristiche anche molto maggiori di η . Da questa osservazione si è stabilito che una buona stima per la lunghezza che separa scala inerziale e scala dissipativa è $L_{DI} \simeq 60\eta$.
- Per bassi numeri di Reynolds la scala di dissipazione si sovrappone notevolmente alla scala energetica, e per trattare le due scale come perfettamente separate è necessario aumentare significativamente il valore di Re .
- L'analisi della scala energetica è più complessa a causa della non universalità. Comunque, studiando lo spettro di $E(k)$ per flussi turbolenti isotropi (come per un flusso attraverso una griglia), il modello descritto rappresenta una descrizione ragionevole dei dati. Inoltre si osserva che l'80% dell'energia è contenuta in moti con lunghezze caratteristiche $\frac{1}{6}L_{11} < l < 6L_{11}$.

Capitolo 3

Flussi turbolenti in presenza di pareti

Avendo presentato le caratteristiche fondamentali dei flussi turbolenti, l'obiettivo di questo capitolo è di affrontare lo studio di flussi turbolenti in presenza di pareti in tre casi semplici ma di fondamentale importanza, non solo per una maggiore comprensione teorica del fenomeno ma anche per le svariate applicazioni pratiche.

Si cercherà in particolare di determinare, in ciascun caso, il profilo di velocità e la legge di attrito (che determina lo sforzo di taglio esercitato dal fluido sulla parete).

3.1 Flusso all'interno di una condotta rettangolare

Consideriamo un flusso completamente turbolento ($Re > 1800$) attraverso la condotta schematicamente rappresentata in figura,

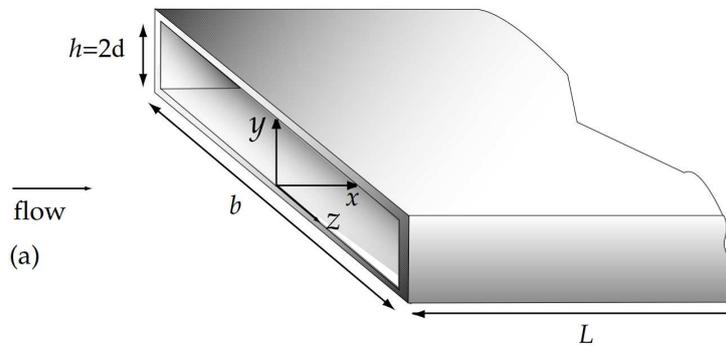


Figura 3.1: Flusso all'interno di una condotta

dove in particolare consideriamo $L_x \gg L_y$ e $L_z \gg L_y$. Il flusso è generato da una differenza di pressione fra l'entrata e l'uscita della condotta: in questo modo il flusso medio è prevalentemente orientato nella direzione x , e il campo di velocità media varia prevalentemente lungo la direzione y . La condizione $L_z \gg L_y$ permette di concludere che il flusso è statisticamente indipendente da z lontano dalle pareti parallele alla direzione y , e per simmetria deve valere $\langle U_z \rangle = 0$. È inoltre conveniente porre $L_y = 2\delta$: in questo modo la parete inferiore è posta a $y = 0$, mentre quella superiore a $y = 2\delta$. In prossimità dell'entrata della condotta vi è una regione dove il flusso è sottoposto a una fase transiente: in questa sezione si studierà invece il flusso per grandi valori di x , dove esso può essere considerato come completamente sviluppato e statisticamente indipendente da x . Concludiamo che sotto queste condizioni il flusso risulta statisticamente stazionario e unidimensionale, e in particolare il campo di velocità medio dipende solo dalla coordinata y .

Denotiamo le componenti della velocità $(U_1, U_2, U_3) \equiv (U, V, W)$, e le corrispettive fluttuazioni $(u_1, u_2, u_3) \equiv (u, v, w)$. La simmetria del problema rende naturale l'ipotesi (confermata dagli esperimenti) di simmetria rispetto al piano $y = \delta$: la statistica di (U, V, W) è la stessa in y e in $2\delta - y$. Caratterizziamo

ora il flusso con i numeri di Reynolds

$$Re \equiv (2\delta)\bar{U}/\nu, \quad (3.1.1)$$

$$Re_0 \equiv \delta U_0/\nu, \quad (3.1.2)$$

dove $U_0 = \langle U \rangle_{y=\delta}$ è la velocità al centro della condotta, mentre \bar{U} definisce la velocità media,

$$\bar{U} \equiv \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \langle U \rangle dy. \quad (3.1.3)$$

Il prossimo passo è considerare le già discusse equazioni che governano la statistica: l'equazione di continuità media e l'equazione di Reynolds (1.2.9). Dalla prima otteniamo

$$\frac{d\langle V \rangle}{dy} = 0, \quad (3.1.4)$$

dove si è sfruttato che $\langle W \rangle = 0$ e $\langle U \rangle$ non dipende da x . Considerando la no-slip boundary condition concludiamo che $\langle V \rangle = 0 \forall y$.

L'equazione di Reynolds per la componente y si riduce a

$$0 = -\frac{d}{dy} \langle v^2 \rangle - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial y}, \quad (3.1.5)$$

che considerata insieme alla boundary condition $\langle v^2 \rangle_{y=0} = 0$, si integra conducendo a

$$\langle v^2 \rangle + \langle p \rangle / \rho = p_w(x) / \rho, \quad (3.1.6)$$

dove $p_w = \langle p(x, 0, 0) \rangle$ è la pressione media valutata nella parete inferiore. Derivando ambo i membri rispetto a x perveniamo a

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} = \frac{dp_w}{dx}. \quad (3.1.7)$$

Considerandone la componente y , l'equazione di Reynolds restituisce

$$0 = \nu \frac{d^2 \langle U \rangle}{dy^2} - \frac{d}{dy} \langle uv \rangle - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x}. \quad (3.1.8)$$

Inglobando tutti i contributi allo sforzo totale di taglio in un unico termine $\tau = \rho\nu \frac{d\langle U \rangle}{dy} - \rho \langle uv \rangle$ possiamo riscrivere l'ultima equazione come

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{dp_w}{dx}. \quad (3.1.9)$$

Questo risultato permette di notare un sostanziale bilanciamento delle forze: il gradiente di pressione è compensato dal gradiente dello sforzo totale di taglio. Inoltre siccome τ dipende solo da y , mentre p_w dipende solo da x , quest'ultima equazione permette anche di concludere che entrambi i membri sono costanti: possiamo esprimere sia $\tau(y)$ che dp_w/dx esplicitamente in funzione di un unico parametro,

$$\tau_w \equiv \tau(0). \quad (3.1.10)$$

Integrando le precedenti relazioni è immediato pervenire ai seguenti risultati:

$$-\frac{dp_w}{dx} = \frac{\tau_w}{\delta}, \quad (3.1.11)$$

$$\tau(y) = \tau_w \left(1 - \frac{y}{\delta}\right). \quad (3.1.12)$$

Dalla (3.1.7) concludiamo che

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} = -\frac{\tau_w}{\delta}, \quad (3.1.13)$$

dunque abbiamo un gradiente di pressione medio costante nella direzione del flusso (analogamente al flusso laminare di Poiseuille).

Si definiscono quindi i coefficienti di attrito superficiale normalizzando τ_w con una velocità di riferimento: utilizzando le velocità caratteristiche definite in precedenza otteniamo

$$c_f \equiv \tau_w / \left(\frac{1}{2} \rho U_0^2 \right), \quad (3.1.14)$$

$$C_f \equiv \tau_w / \left(\frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 \right). \quad (3.1.15)$$

In generale, se il flusso è definito da ρ , ν , δ e dp_w/dx , non è possibile determinare esattamente U_0 e \bar{U} . Come verrà discusso in seguito, si possono comunque effettuare delle stime più o meno accurate. Dalle (3.1.14) e (3.1.15) si conclude quindi che anche i coefficienti di attrito superficiale non sono noti con esattezza (al contrario del caso laminare, dove queste quantità sono perfettamente determinate).

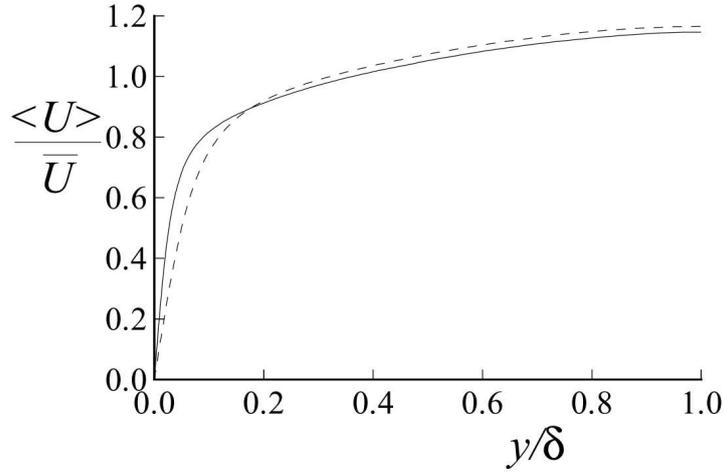


Figura 3.2: Profilo del campo di velocità medio per un flusso turbolento in una condotta completamente sviluppato. La linea tratteggiata è caratterizzata da $Re = 5600$; la linea continua da $Re = 13750$.

Nella figura 3.2 è rappresentato il profilo di velocità ricavato sperimentalmente per $Re = 5600$ (linea tratteggiata) e $Re = 13750$ (linea continua): il prossimo passo per l'analisi del flusso consiste nel giustificare tale andamento.

Si può notare innanzitutto che a causa della no-slip boundary condition, il tensore degli sforzi di Reynolds è identicamente nullo. Dunque lo sforzo di taglio totale alla parete è determinato unicamente dal contributo viscoso,

$$\tau_w = \rho \nu \left(\frac{d\langle U \rangle}{dy} \right)_{y=0}. \quad (3.1.16)$$

È evidente che in prossimità della parete i parametri fondamentali per la dinamica del flusso siano ν e τ_w : da questi possiamo formare delle scale viscose, che determinano gli ordini di grandezza in gioco in questa regione. Esse sono rispettivamente la velocità di attrito e la scala di lunghezza viscosa,

$$u_\tau \equiv \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad (3.1.17)$$

$$\delta_\nu \equiv \nu \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}} = \frac{\nu}{u_\tau}. \quad (3.1.18)$$

Inoltre, siccome il numero di Reynolds costruito con le scale viscose $Re_\nu = u_\tau \delta_\nu / \nu$ vale semplicemente uno, si definisce invece il numero di Reynolds di attrito

$$Re_\tau \equiv \frac{u_\tau \delta}{\nu} = \frac{\delta}{\delta_\nu}. \quad (3.1.19)$$

È ora conveniente normalizzare la distanza dalla parete tramite la scala di lunghezza viscosa, tramite la seguente convenzione

$$y^+ \equiv \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{u_\tau y}{\nu}. \quad (3.1.20)$$

Tramite questa normalizzazione, osservando il comportamento sperimentale del flusso è possibile identificare tre diverse regioni:

- $y^+ < 50$ definisce la regione viscosa: i contributi viscosi allo sforzo di taglio non sono trascurabili. Si passa da un contributo del 100% nella parete a meno del 10% ad $y^+ = 50$.
- $y^+ > 50$ viene denominata regione esterna, dove gli effetti della viscosità sono trascurabili.
- $y^+ < 5$ è la regione completamente viscosa, ossia la parte della regione viscosa prossima alla parete: solo in questa zona il contributo allo sforzo di taglio dovuto al tensore di Reynolds risulta trascurabile rispetto al contributo viscoso.

È rilevante osservare che al crescere del numero di Reynolds si ha un progressivo assottigliamento della regione viscosa, in quanto $\frac{\delta_\nu}{\delta} \propto Re_\tau^{-1}$.

Abbiamo discusso all'inizio della sezione che il flusso è completamente determinato dai parametri ρ , ν , δ e dp_w/dx . Con l'intenzione di esplicitare il gradiente di velocità media $d\langle U \rangle/dy$ (poichè è la quantità dinamicamente di rilievo), concludiamo per ragioni dimensionali che questa quantità può dipendere solo da due parametri adimensionali, per cui senza perdita di generalità possiamo scrivere

$$\frac{d\langle U \rangle}{dy} = \frac{u_\tau}{y} \Phi\left(\frac{y}{\delta_\nu}, \frac{y}{\delta}\right), \quad (3.1.21)$$

dove Φ è una funzione universale adimensionale.

Per procedere è necessario considerare l'ipotesi di Prandtl [7], che postulò l'esistenza di una regione interna (che per convenzione viene definita da $y/\delta < 0.1$) dove il profilo di velocità media è completamente determinato dalle scale viscosi, e risulta in particolare indipendente sia da δ che da U_0 . Matematicamente questa ipotesi si scrive come segue,

$$\frac{d\langle U \rangle}{dy} = \frac{u_\tau}{y} \Phi_1\left(\frac{y}{\delta_\nu}\right), \quad \text{per } \frac{y}{\delta} \ll 1, \quad (3.1.22)$$

dove

$$\Phi_1\left(\frac{y}{\delta_\nu}\right) = \lim_{y/\delta \rightarrow 0} \Phi\left(\frac{y}{\delta_\nu}, \frac{y}{\delta}\right). \quad (3.1.23)$$

Utilizzando la stessa notazione definita in precedenza possiamo definire una velocità su scala viscosa,

$$u^+ \equiv \frac{\langle U \rangle}{u_\tau}, \quad (3.1.24)$$

cosicchè la (3.1.22) può essere riscritta come

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{1}{y^+} \Phi_1(y^+). \quad (3.1.25)$$

Integrando la precedente equazione si ottiene la legge della parete:

$$u^+ = f_w(y^+), \quad (3.1.26)$$

che evidenzia come u^+ dipenda solo da y^+ per $y/\delta \ll 1$.

Per numeri di Reynolds abbastanza elevati vi è un'abbondante verifica sperimentale sull'universalità della funzione $f_w(y^+)$, che può essere determinata analiticamente nei limiti di y^+ molto piccolo o molto grande.

Nel primo caso possiamo approssimare la funzione con un semplice sviluppo di Taylor:

$$f_w(y^+) = y^+ + \mathcal{O}(y^{+4}), \quad (3.1.27)$$

dove si è tenuto conto che dalla no-slip boundary condition deriva immediatamente che $f_w(0) = 0$, mentre dalla (3.1.16) concludo che $f'_w(0) = 1$. Inoltre procedendo ulteriormente con lo sviluppo si verifica che la (3.1.27) è esatta a meno di correzioni al quarto ordine. Sperimentalmente si ha un'ottima verifica di questo andamento lineare per $y^+ < 5$.

Se consideriamo numeri di Reynolds abbastanza elevati, nella zona più distante dalla parete della regione interna possiamo scrivere $y^+ \simeq 0.1\delta/\delta_\nu = 0.1Re_\tau \gg 1$. In questo regime si può supporre che gli effetti viscosi siano trascurabili, e dalla (3.1.22) concludiamo che Φ_1 risulta essere indipendente dal suo unico argomento e assume un valore costante denotato da k^{-1} :

$$\Phi_1(y^+) = \frac{1}{k}, \quad \text{per } \frac{y}{\delta} \ll 1 \text{ e } y^+ \gg 1. \quad (3.1.28)$$

Possiamo ora riscrivere la (3.1.25) come segue,

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{1}{ky^+}, \quad (3.1.29)$$

che è facilmente integrabile e conduce alla legge logaritmica di von Kármán:

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln(y^+) + B, \quad (3.1.30)$$

dove B è una costante. Sperimentalmente questa legge è verificata per $y^+ > 30$ con ottima precisione, con i valori delle costanti che variano leggermente in letteratura, ma che generalmente non si discostano più di un 5% dalle seguenti stime di riferimento:

$$k = 0.41 \quad B = 5.2. \quad (3.1.31)$$

La regione compresa fra la regione completamente viscosa e la regione dove è valida la legge logaritmica rappresenta una regione di transizione, dove si passa da una zona dominata dalla viscosità a una dominata dalla turbolenza.

Rimane da considerare l'andamento del campo di velocità medio nella regione esterna, dove il contributo viscoso è trascurabile e possiamo dunque eliminare tale dipendenza funzionale da Φ ,

$$\lim_{y/\delta_\nu \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{y}{\delta_\nu}, \frac{y}{\delta}\right) = \Phi_0\left(\frac{y}{\delta}\right). \quad (3.1.32)$$

Sostituendo questo risultato nella (3.1.21) e integrando tra y e δ si ottiene la legge del difetto di velocità (sempre dovuta a von Kármán)

$$\frac{U_0 - \langle U \rangle}{u_\tau} = F_D\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (3.1.33)$$

dove

$$F_D\left(\frac{y}{\delta}\right) = \int_{y/\delta}^1 \frac{1}{y'} \Phi_0(y') dy'. \quad (3.1.34)$$

Questa legge esprime il fatto che la differenza tra il campo di velocità medio $\langle U \rangle$ e il valore della velocità al centro della condotta U_0 dipende unicamente da y/δ . Contrariamente alla legge della parete, non si ha nessun motivo in questo caso per ipotizzare che $F_D(y/\delta)$ sia universale: essa dipende dal tipo di flusso in considerazione.

Siccome per numeri di Reynolds molto elevati ($Re > 20.000$) si ha una zona di sovrapposizione tra la regione interna ($y/\delta < 0.1$) e la regione esterna ($y/\delta_\nu > 50$), possiamo concludere che in questa regione la (3.1.22) e la (3.1.32) sono entrambe valide, da cui

$$\frac{y}{u_\tau} \frac{d\langle U \rangle}{dy} = \Phi_1\left(\frac{y}{\delta_\nu}\right) = \Phi_0\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad \text{per } \delta_\nu \ll y \ll \delta. \quad (3.1.35)$$

Quest'ultima equazione può essere soddisfatta solo se sia Φ_1 che Φ_0 sono costanti: con questo argomento ritrovo per Φ_1 la legge logaritmica, e similmente per Φ_0 si perviene alla seguente relazione esplicita, valida per $y/\delta \ll 1$:

$$\frac{U_0 - \langle U \rangle}{u_\tau} = -\frac{1}{k} \ln \frac{y}{\delta} + B_1, \quad (3.1.36)$$

che è in in accordo con le misure sperimentali non solo per la regione di validità delle nostre ipotesi $0.08 < y/\delta < 0.3$ ma anche nella regione centrale, $0.3 < y/\delta < 1$, dove gli argomenti utilizzati cessano di valere. Possiamo dunque stimare la velocità media \bar{U} approssimando $\langle U \rangle$ con la legge logaritmica in tutta la condotta: infatti l'unica regione che si discosta sensibilmente da questa legge è data da $y^+ < 30$, e però essa apporta un contributo trascurabile (a meno di considerare numeri di Reynolds bassi). Così facendo si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{U_0 - \bar{U}}{u_\tau} &= \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{U_0 - \langle U \rangle}{u_\tau} dy \\ &\simeq \frac{1}{\delta} \int_0^\delta -\frac{1}{k} \ln \left(\frac{y}{\delta} \right) dy = \frac{1}{k} \simeq 2.4, \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

in ottimo accordo con gli esperimenti che forniscono valori compresi tra 2 e 3. Sommando la (3.1.30) e la (3.1.36) si perviene ad un'equazione indipendente da y ,

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{u_\tau} &= \frac{1}{k} \ln \left(\frac{\delta}{\delta_\nu} \right) + B + B_1 \\ &= \frac{1}{k} \ln \left[Re_0 \left(\frac{U_0}{u_\tau} \right)^{-1} \right] + B + B_1. \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

Noto il parametro Re_0 questa equazione può essere risolta per U_0/u_τ , da cui si può calcolare il coefficiente di attrito superficiale $c_f = \tau_w / (\frac{1}{2} \rho U_0^2) = 2(u_\tau U_0)^{-2}$. Inoltre dalla stima (3.1.37) è possibile determinare anche C_f e Re . Dall'equazione (3.1.38) si può inoltre esplicitare Re_τ in funzione di Re , verificando che sussiste una relazione lineare: questo fatto è un'ulteriore conferma che ad alti numeri di Reynolds la scala viscosa diminuisce sensibilmente.

Rimane da discutere il ruolo degli sforzi di Reynolds: per fare ciò consideriamo il nostro flusso diviso in regione viscosa ($y^+ < 50$), regione di validità della legge logaritmica ($50 < y^+ < 120$), e core ($y^+ > 120$).

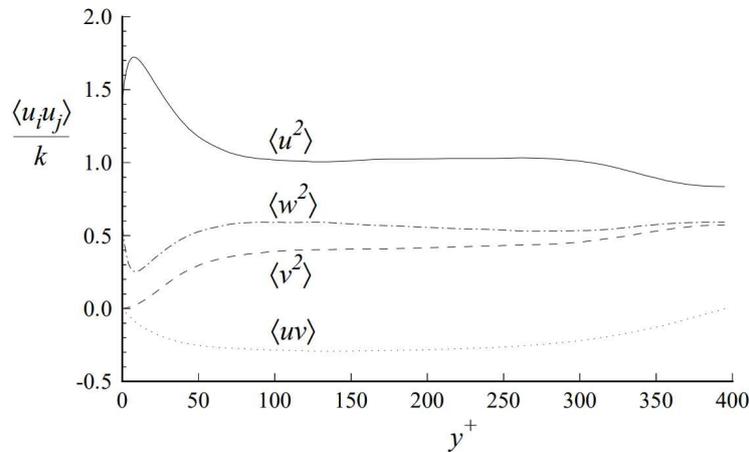


Figura 3.3: Profili degli sforzi di Reynolds normalizzati tramite l'energia cinetica turbolenta per un flusso in una condotta a $Re = 13750$.

La figura 3.3 mostra l'evoluzione delle componenti del tensore degli sforzi di Reynolds in funzione di y^+ , mentre la 3.4 descrive l'andamento del rapporto produzione-disipazione P/ϵ , oltre che del gradiente

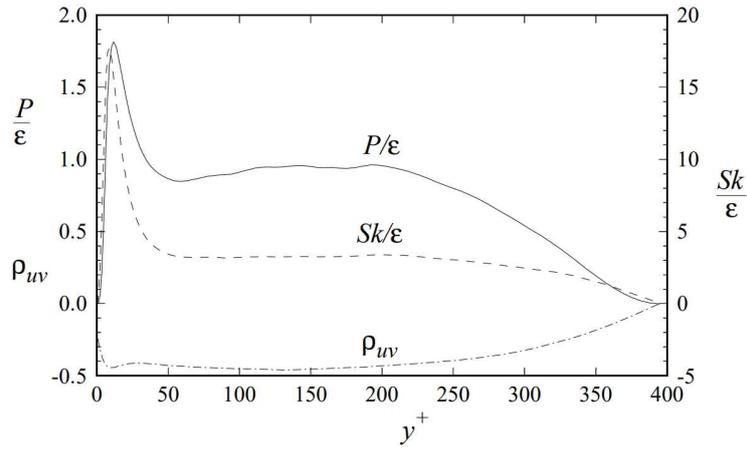


Figura 3.4: Profili del tasso di produzione su dissipazione (P/ϵ), del gradiente di velocità medio normalizzato (Sk/ϵ) e dello e del coefficiente di correlazione dello sforzo di taglio ρ_{uv} per un flusso in una condotta a $Re = 13750$.

di velocità medio normalizzato Sk/ϵ e del coefficiente di correlazione dello sforzo di taglio ρ_{uv} . Da questi grafici possiamo osservare le seguenti peculiarità:

- Nella regione di validità della legge logaritmica i tensori di Reynolds normalizzati $\langle u_i u_j \rangle / k$ sono essenzialmente costanti, così come il rapporto produzione-dissipazione P/ϵ (che è inoltre molto vicino all'unità) e il gradiente di velocità medio normalizzato Sk/ϵ .
- Al centro della condotta si annullano sia il gradiente di velocità medio che lo sforzo di taglio, per cui anche la produzione P vale zero.
- Gli sforzi di Reynolds sono anisotropi al centro della condotta, e questa asimmetria si accentua considerevolmente nella regione di validità della legge logaritmica.
- La zona viscosa contiene la maggior parte dell'attività turbolenta. Produzione, dissipazione, energia cinetica turbolenta e anisotropia assumono il loro massimo per valori inferiori a $20y^+$.

Esplicitata l'importanza della regione viscosa, si procede nel tentativo di approssimare gli sforzi di Reynolds in tale zona mediante uno sviluppo di Taylor,

$$u = a_1 + b_1 y + c_1 y^2 + \dots \quad (3.1.39)$$

$$v = a_2 + b_2 y + c_2 y^2 + \dots \quad (3.1.40)$$

$$w = a_3 + b_3 y + c_3 y^2 + \dots \quad (3.1.41)$$

dove i coefficienti rappresentano variabili casuali, che nell'ipotesi di flusso completamente sviluppato (per x lontano dall'entrata della condotta) sono statisticamente indipendenti da x , z e t . Per $y=0$ la no-slip boundary condition impone $u = a_1 = 0$ e parimenti $w = a_3 = 0$; dalla condizione di impermeabilità concludiamo che anche $v = a_2 = 0$. Inoltre, siccome nella parete u e w sono identicamente nulle per ogni valore di x e z , anche $(\partial u / \partial x)_{y=0}$ e $(\partial w / \partial z)_{y=0}$ si annullano, e dall'equazione di continuità otteniamo

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=0} = b_2 = 0. \quad (3.1.42)$$

Questo risultato è significativo poichè permette di concludere che in prossimità della parete il flusso è bidimensionale e parallelo alla parete stessa. Considerando ora la media del prodotto delle espansioni (3.1.39)-(3.1.41) perveniamo a

$$\langle u^2 \rangle = \langle b_1^2 \rangle y^2 + \dots, \quad (3.1.43)$$

$$\langle v^2 \rangle = \langle c_c^2 \rangle y^4 + \dots, \quad (3.1.44)$$

$$\langle w^2 \rangle = \langle b_3^2 \rangle y^2 + \dots, \quad (3.1.45)$$

$$\langle uv \rangle = \langle b_1 c_2 \rangle y^3 + \dots \quad (3.1.46)$$

Dunque $\langle u^2 \rangle$ e $\langle w^2 \rangle$ crescono più rapidamente di $-\langle uv \rangle$ e $\langle v \rangle$.
Definendo il flusso di energia

$$T_i = U_i p / \rho - 2\nu U_j S_{ij}, \quad (3.1.47)$$

si può dimostrare che la nota equazione che descrive l'evoluzione dell'energia (che a sua volta discende dall'equazione di Navier-Stokes)

$$\frac{DE}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{T} = -2\nu S_{ij} S_{ij}, \quad (3.1.48)$$

ammette la seguente formulazione nel caso specifico di flusso turbolento (completamente sviluppato) all'interno di una condotta

$$0 = P - \bar{\epsilon} + \nu \frac{d^2 k}{dy^2} - \frac{d}{dy} \left\langle \frac{1}{2} v \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right\rangle - \frac{1}{\rho} \frac{d}{dy} \langle v p' \rangle, \quad (3.1.49)$$

dove si è introdotta la pseudo-dissipazione

$$\bar{\epsilon} \equiv \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle. \quad (3.1.50)$$

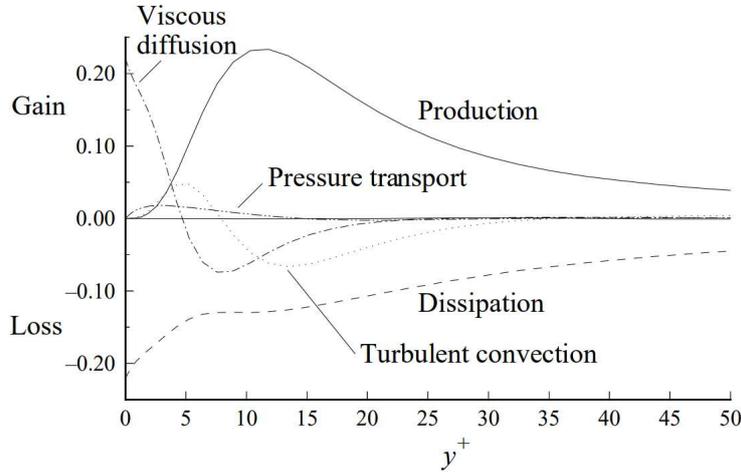


Figura 3.5: Evoluzione dei vari termini nell'equazione (3.1.49) nella regione viscosa per un flusso in una condotta a $Re = 13750$.

La figura 3.5 mostra l'evoluzione dei vari termini nell'equazione (3.1.49) all'interno della regione viscosa. In particolare, notiamo che la produzione aumenta da zero come y^3 , raggiungendo un picco per $y^+ \simeq 12$, attorno al quale la produzione è maggiore della dissipazione ($P/\epsilon \simeq 1.8$) e l'eccesso di energia viene trasportato dal flusso. Mentre la pressione contribuisce in minima parte al trasporto, i contributi dominanti sono dati dal trasporto convettivo turbolento (sia verso la parete che verso la regione di validità della legge logaritmica) e dalla diffusione viscosa, che trasporta energia unicamente verso la parete.

Risulta inoltre che il picco di dissipazione è alla parete, dove si annulla l'energia cinetica: infatti, nonostante la velocità media si annulli, lo sforzo di taglio medio è diverso da zero e così pure la dissipazione. Inoltre possiamo scrivere semplicemente

$$\epsilon = \bar{\epsilon} = \nu \frac{d^2 k}{dy^2}, \quad \text{per } y = 0 \quad (3.1.51)$$

in quanto gli altri termini della (3.1.49) si annullano.

3.2 Strato limite

Si presenta in questa sezione lo studio dello strato limite nel caso più semplice possibile: un flusso non turbolento a velocità costante U_0 attorno ad una lamina ideale e piatta, come mostrato in figura 3.6.

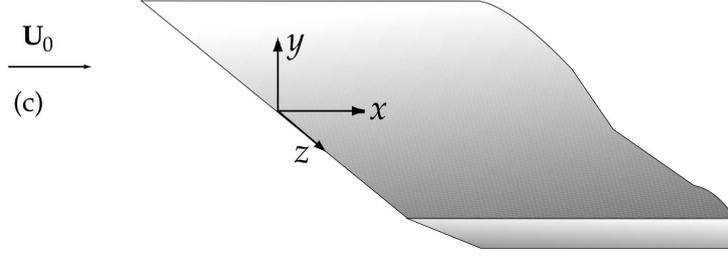


Figura 3.6: Flusso non turbolento attraverso una lamina piana

Si utilizzeranno nel proseguio le stesse coordinate e notazioni introdotte nello studio del flusso turbolento all'interno di una condotta. Risulta comodo porre la superficie della lamina nel piano $y = 0$, in modo da avere un'estremità a $x = 0, y = 0$ come in figura. Analogamente al caso della condotta, per simmetria si può concludere che $\langle W \rangle = 0$, mentre le altre quantità medie dipendono sia da x che da y .

Lo spessore dello strato limite $\delta(x)$ può essere definito in diversi modi: una convezione che ha il pregio di non essere arbitraria è data dallo spessore di spostamento:

$$\delta(x) \equiv \int_0^\infty \left(1 - \frac{\langle U \rangle}{U_0}\right) dy. \quad (3.2.1)$$

Si definisce in maniera analoga lo spessore del momento

$$\theta(x) \equiv \int_0^\infty \frac{\langle U \rangle}{U_0} \left(1 - \frac{\langle U \rangle}{U_0}\right) dy, \quad (3.2.2)$$

e attraverso queste grandezze si possono ora introdurre diversi numeri di Reynolds:

$$Re_x \equiv \frac{U_0 x}{\nu}, \quad Re_\delta \equiv \frac{U_0 \delta}{\nu}, \quad Re_\theta \equiv \frac{U_0 \theta}{\nu}. \quad (3.2.3)$$

Partendo dall'estremità della lamina ($x = 0$) si osserverà un flusso laminare fintanto che Re_x rimane inferiore ad un valore critico Re_c , che varia considerevolmente a seconda dell'entità delle perturbazioni presenti nel flusso libero laminare, e oltre al quale il flusso all'interno dello strato limite è completamente turbolento.

Le equazioni per lo strato limite si ricavano nel caso turbolento a partire dall'equazione di Reynolds, analogamente al caso laminare dove si ricavano a partire dall'equazione di Navier-Stokes. Si arriva così ad un'equazione simile, con la presenza di termini aggiuntivi dovuti al tensore degli sforzi di Reynolds. In particolare vale per la componente y

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle v^2 \rangle}{\partial y} = 0. \quad (3.2.4)$$

Integrando questa equazione si perviene al seguente risultato,

$$\langle p \rangle + \rho \langle v^2 \rangle = p_0(x), \quad (3.2.5)$$

che permette di notare che siccome alla parete vale $\langle v^2 \rangle = 0$, allora la pressione alla parete $p_w(x)$ deve bilanciare la pressione del flusso libero $p_0(x)$. Per la componente x si ottiene, nel caso di flusso costante,

$$\langle U \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x} + \langle V \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial y^2} - \frac{\partial \langle uv \rangle}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} + U_0 \frac{dU_0}{dx}, \quad (3.2.6)$$

dove $\tau(x, y)$ sintetizza lo sforzo totale di taglio,

$$\tau = \rho \nu \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} - \rho \langle uv \rangle. \quad (3.2.7)$$

Alla parete, osservando che i termini convettivi si annullano identicamente, si ottiene

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_{y=0} = \nu \left(\frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0. \quad (3.2.8)$$

Integrando la (3.2.6) si ottiene l'equazione integrale media del momento di von Kármán. Nel caso specifico considerato in questa sezione (ossia pressione costante) si arriva alla seguente relazione:

$$\tau_w = \frac{d}{dx} (\rho U_0^2 \theta) = \rho U_0^2 \frac{d\theta}{dx}, \quad (3.2.9)$$

e dunque per il coefficiente di attrito vale

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_0^2} = 2 \frac{d\theta}{dx}. \quad (3.2.10)$$

Per proseguire con la trattazione bisogna introdurre un modello che permetta di chiudere il sistema costituito dalle tre equazioni di Reynolds e dall'equazione di continuità. L'ipotesi più semplice che possiamo considerare prende il nome di modello della lunghezza di miscelazione: si suppone che le componenti del tensore degli sforzi di Reynolds siano legate tra loro attraverso un unico coefficiente scalare, denominato viscosità cinematica turbolenta $\nu_T(y)$, attraverso la relazione

$$-\langle uv \rangle = \nu_T \frac{d\langle U \rangle}{dy}, \quad (3.2.11)$$

che rappresenta un analogo della relazione degli sforzi adattata agli sforzi di Reynolds. Si può inoltre immaginare che ν_T possa essere espressa come prodotto di una scala di velocità u^* per una scala di lunghezza, detta lunghezza di miscelazione l_m :

$$\nu_T = u^* l_m. \quad (3.2.12)$$

In particolare, si dimostra conveniente definire la scala di velocità come segue:

$$u^* \equiv |\langle uv \rangle|^{1/2} \quad (3.2.13)$$

Introducendo nella (3.2.11) le scale appena introdotte si perviene alla relazione

$$u^* = l_m \left| \frac{d\langle U \rangle}{dy} \right|. \quad (3.2.14)$$

Nella regione di sovrapposizione ($50\delta_\nu < y < 0.1\delta$) si osserva che $-\langle uv \rangle$ è circa costante (si veda figura 3.3), e in particolare non si discosta troppo da u_τ^2 . Inoltre in tale regione possiamo assumere valida la (3.1.29). Sotto queste ipotesi si può quindi concludere che $u^* = u_\tau$, e si perviene inoltre alla seguente stima per la lunghezza di miscelazione:

$$l_m = ky. \quad (3.2.15)$$

La viscosità cinematica turbolenta assume quindi la seguente forma,

$$\nu_T = u^* l_m = l_m^2 \left| \frac{d\langle U \rangle}{dy} \right|. \quad (3.2.16)$$

Per utilizzare questi risultati come modello della turbolenza, bisogna specificare il valore di l_m al di fuori della regione di sovrapposizione, ossia nella regione viscosa e nella regione esterna. Secondo questo modello lo sforzo di taglio totale è esprimibile nella seguente forma:

$$\tau(y)/\rho = \nu \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} + \nu_T \frac{\partial \langle U \partial \rangle}{\partial y} = \nu \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} + l_m^2 \left(\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \right)^2. \quad (3.2.17)$$

Normalizzando la lunghezza di miscelazione tramite la scala di lunghezza viscosa si definisce

$$l_m^+ \equiv l_m / \delta_\nu, \quad (3.2.18)$$

da cui normalizzando la (3.2.17) tramite le scale viscosi si perviene a

$$\frac{\tau}{\tau_w} = \frac{\partial u^+}{\partial y^+} + \left(l_m^+ \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)^2. \quad (3.2.19)$$

Questa equazione è quadratica nel termine $\partial u^+/\partial y^+$ e ammette la soluzione

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{2\tau/\tau_w}{1 + [1 + (4\tau/\tau_w)(l_m^+)^2]^{1/2}}. \quad (3.2.20)$$

Siccome nella regione interna il rapporto τ/τ_w è essenzialmente pari a 1, si ottiene la legge della parete espressa in termini della lunghezza di miscelazione,

$$u^+ = f_w(y^+) = \int_0^{y^+} \frac{2dy'}{1 + [1 + 4l_m^+(y')^2]^{1/2}}. \quad (3.2.21)$$

Nella regione di validità della legge logaritmica vale $l_m = ky$ (o equivalentemente $l_m^+ = ky^+$). Se si utilizzasse tale relazione anche nella regione completamente viscosa si avrebbe che lo sforzo turbolento $\nu_T \partial \langle U \rangle / \partial y$ sarebbe proporzionale a y^2 , mentre si osserva che $-\langle uv \rangle$ cresce più lentamente, ossia come y^3 . Per risolvere questa incongruenza van Driest [8] propose l'aggiunta di un termine nell'equazione (3.2.15), dominante nella regione completamente viscosa:

$$l_m^+ = ky^+[1 - \exp(-y^+/A^+)], \quad (3.2.22)$$

dove A^+ è una costante compatibile con il valore $A^+ = 26$. Utilizzando questa correzione si giunge ad un'ottima compatibilità con gli esperimenti, come mostrato in figura 3.7. In particolare i cerchi rappresentano esperimenti a $Re_\theta = 8000$, la linea tratteggiata esperimenti a $Re_\theta = 1410$, mentre la linea continua rappresenta la funzione (3.2.21) utilizzando la correzione di Driest. È fondamentale osservare che tale correzione incide solo nella zona completamente viscosa, in quanto per grandi valori di y^+ si recupera l'equazione ordinaria $l_m^+ = ky^+$.

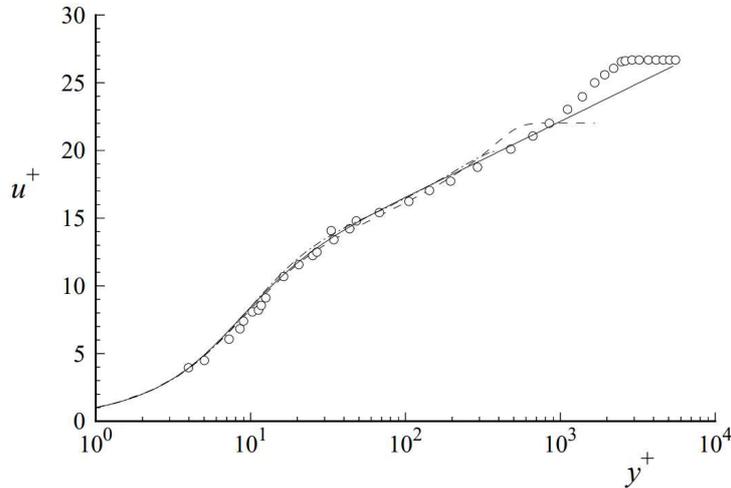


Figura 3.7: Profili del campo di velocità normalizzato. I cerchi rappresentano esperimenti all'interno di uno strato limite con $Re_\theta = 8000$; la linea tratteggiata misure analoghe a $Re_\theta = 1410$; la linea continua è la legge della parete di van Driest.

Un'ulteriore correzione va svolta nella regione più esterna ($y/\delta > 0.2$), dove la velocità media devia sistematicamente dalla legge logaritmica. Questa correzione, di natura empirica, è dovuta a Coles [9], che mostrò come il profilo di velocità possa essere scritto come somma della nota legge della parete $f_w(y^+)$ a cui si aggiunge una correzione che prende il nome di legge della scia, e che dipende da y/δ . In totale possiamo scrivere

$$\frac{\langle U \rangle}{u_\tau} = f_w \left(\frac{y}{\delta_\nu} \right) + \frac{\Pi}{k} w \left(\frac{y}{\delta} \right), \quad (3.2.23)$$

dove Π viene denominato parametro di intensità della scia, e dipende dal tipo di flusso. La funzione $w(y/\delta)$, o funzione di scia, viene invece assunta come universale ed è definita di modo da soddisfare le condizioni al contorno $w(0) = 0$, $w(1) = 2$. Si può stimare analiticamente $w(y/\delta)$ con la seguente approssimazione (che è compatibile con le evidenze sperimentali):

$$w\left(\frac{y}{\delta}\right) = 2 \sin^2 \frac{\pi y}{2\delta}. \quad (3.2.24)$$

L'effetto della legge della scia è mostrato in figura 3.8, che mostra come i dati sperimentali (cerchi) siano in perfetto accordo con la legge logaritmica (linea tratteggiata) solo per $y/\delta < 0.2$, per poi seguire fedelmente l'equazione (3.2.23), che tiene conto della legge di scia (linea continua).

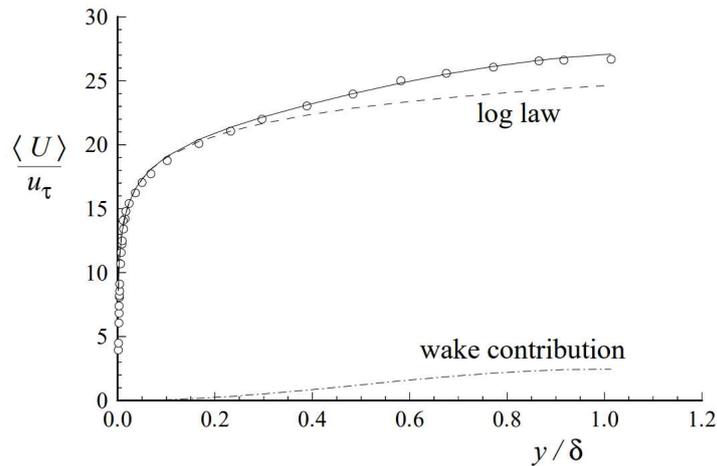


Figura 3.8: Profilo del campo di velocità medio in uno strato limite turbolento. I cerchi rappresentano i dati sperimentali; la linea tratteggiata la legge logaritmica; la linea continua consiste nella somma tra la legge logaritmica e la legge di scia.

Capitolo 4

Conclusioni

Nel corso di questo studio è emerso come un fenomeno estremamente complesso quale un flusso turbolento possa essere studiato procedendo con un approccio statistico e si sono riconosciuti nelle ipotesi di Kolmogorov e nella cascata energetica i pilastri concettuali per lo sviluppo e l'interpretazione della teoria. In particolare, perseguendo questa strada è stato ricavato un sistema di equazioni analiticamente gestibili per l'evoluzione del campo di velocità medio. Tuttavia solo attraverso ulteriori modelli, come quello della lunghezza di miscelazione, è possibile chiudere tale sistema ed ambire ad avere una teoria predittiva.

Tramite il tensore di correlazione si è potuta inoltre studiare la struttura geometrica di un flusso turbolento, e si è pervenuti a diverse scale frequentemente utilizzate per caratterizzare gli ordini di grandezza di questi fenomeni. Introducendo i modi di Fourier e considerando il tensore di correlazione nello spazio dei vettori d'onda si è pervenuti ad una caratterizzazione esaustiva dello spettro della velocità, che si è rivelato essere non solo in accordo con gli esperimenti ma anche in grado di fornire delle conferme circa la bontà delle ipotesi di Kolmogorov.

I principali risultati della prima parte del testo sono stati sfruttati in due semplici esempi: per una condotta rettangolare ragionevoli assunzioni hanno portato alla nota legge logaritmica di von Kármán, che permette di ottenere in molteplici casi delle ottime stime dei coefficienti di attrito superficiale. Analizzando i dati sperimentali è stato possibile discutere il ruolo degli sforzi di Reynolds ad esempio nei processi dissipativi e di produzione di energia turbolenta. Nel caso di lamina ideale piatta si è adottato il modello della lunghezza di miscelazione per arrivare a risultati analoghi per il profilo di velocità. Inoltre, dal confronto con i dati sperimentali, è emersa la necessità di attuare delle correzioni empiriche al profilo di velocità nella regioni completamente viscosa ed esterna, nelle quali la legge logaritmica falliva nel prevedere l'andamento dei dati.

Bibliografia

- [1] Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] Kundu, P. K., Cohen, I.M., Dowling, D. R.(2015). *Fluid Mechanics*. Academic Press, Inc.
- [3] Kolmogorov, A. N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 30, 299-303 [in russo].
- [4] Taylor, G.I. (1935). Statistical theory of turbulence: Parts I-III. *Proc. R. Soc. London Ser. A* 151, 421-464.
- [5] von Kármán, T. e L. Howarth (1938). On the statistical theory of isotropic turbulence. *Proc. R. Soc. London Ser. A* 164, 192-215.
- [6] Taylor, G.I. (1938). The spectrum of turbulence. *Proc. R. Soc. London Ser. A* 164, 476-490.
- [7] Prandtl, L. (1925). Bericht über die Entstehung der Turbulenz. *Z. Angew. Math. Mech.* 5, 136-139.
- [8] Van Driest, E. R. (1956). On turbulent flow near a wall. *J. Aerospace Sci.* 23, 1007-1011.
- [9] Coles, D. (1956). The law of the wake in the turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* 1, 191-226.