

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Modelli cosmologici che imitano l'evoluzione del
background del modello standard Λ CDM

Relatore

Prof. Nicola Bartolo

Laureando

Alonzo Rodrigo Diaz Avalos

Anno Accademico 2017/2018

Indice

1	Introduzione	2
2	Nozioni preliminari	3
2.1	Metrica di FLRW	4
2.1.1	Equazioni di Friedmann	4
2.1.2	Geometria dell'Universo	6
2.2	Modelli cosmologici	7
2.2.1	Modello Λ CDM	8
3	Introduzione teorica	10
3.1	Teorie Mimetiche	10
3.2	Condizione Mimetica	14
3.3	Lagrange multiplier	15
4	Modelli Mimetici	17
4.1	Modello originale mimetico	17
4.2	Primo semplice esempio	19
4.3	Secondo esempio	23
4.4	Ulteriori considerazioni	28
4.5	GW170817	29
4.6	Teorie DHOST e limiti da GW170817	32
4.7	Mimetic DHOST	34
5	Gravità massiva mimetica	38
5.1	Meccanismo di Higgs	38
5.2	Teoria mimetica	43

Capitolo 1

Introduzione

Da diverse osservazioni sperimentali risulta come l'Universo sia attualmente composto per circa il 95% di materia non barionica e non interagente se non per via gravitazionale. Il modello standard della cosmologia, il cosiddetto modello Λ CDM, derivante dalla teoria della Relatività Generale, riesce a rappresentare la fenomenologia osservata, tramite la costante cosmologica Λ e la materia oscura fredda CDM (Cold Dark Matter). Tuttavia tale modello al momento non è in grado di dare risposta ad alcune importanti domande aperte, quali il problema della costante cosmologica, la natura particellare della materia oscura, la validità della Relatività generale su larga scala ed altri.

La cosiddetta gravità mimetica apporta delle modifiche alle equazioni di Einstein per aspirare, in linea di principio, a spiegare l'origine e le caratteristiche della materia oscura (e dell'energia oscura), non più tramite l'introduzione di particelle ad hoc, ma tramite le proprietà che discendono dalla modifica della gravità stessa.

Nel Capitolo 2 si riportano i concetti introduttivi elementari sulla cosmologia. Nel Capitolo 3 si presenta la formulazione della teoria mimetica, dalle equazioni di Einstein alle equazioni mimetiche, con alcune implicazioni teoriche. Nel capitolo 4 si mostrano esempi studiati in vari articoli, mostrando come adattando le Lagrangiane si possano ottenere effetti diversi. In particolare si discute su come la rivelazione della GW170817 (e della sua controparte elettromagnetica) abbia determinato importanti restrizioni sulle diverse teorie proposte. Infine nel Capitolo 5, come ulteriore esempio di interesse delle teorie mimetiche, si introduce la gravità massiva, da una breve introduzione del meccanismo di Higgs, all'implementazione con la teoria mimetica, osservando alla fine alcune conseguenze riscontrabili.

Capitolo 2

Nozioni preliminari

L'Universo può essere distinto in Universo osservabile ed in Universo globale, descritti attraverso una particolare geometria che includa entrambi, tramite le coordinate comoventi dello spazio-tempo quadridimensionale. In termini osservativi lo spazio-tempo osservabile è il cono luce passato. Se l'Universo osservabile è più piccolo dell'intero Universo, non si potrà definire una struttura globale solo mediante l'osservazione, ma ci si dovrà restringere all'Universo osservabile.

L'Universo osservabile è una sfera con un raggio di circa 46 miliardi di anni luce. La distribuzione di materia su piccole scale di lunghezza parte dalle stelle, galassie, ammassi e superammassi di galassie fino a strutture a larga scala. L'Universo è inoltre immerso in una radiazione a microonde.

La densità dell'Universo è molto bassa, circa $9.9 \cdot 10^{-30}$ grammi per centimetro cubo. La massa-energia è formata per un 68 % da energia oscura, per un 27 % da materia oscura fredda, che non emette luce e composto da materia non barionica, e solo il restante 5 % da materia barionica ordinaria. L'energia oscura è quella componente (a pressione negativa) che è ritenuta essere responsabile dell'attuale espansione accelerata dell'Universo. Tuttavia ad oggi, le proprietà dell'energia oscura e materia oscura sono in gran parte sconosciute ed in parte anche controversi in quanto nessun modello candidato che ne spieghi l'origine e proprietà fondamentali è stato in grado di prevalere sulla base dei dati osservativi raccolti. L'ipotetica particella di materia oscura fredda, la WIMP (Weakly Interacting Massive Particle), ad oggi non è stata ancora osservata.

Si stima che nell'Universo ci sia più materia che antimateria, sproporzionata dovuta molto probabilmente alla violazione del prodotto delle simmetrie CP. La carica netta inoltre sembra essere nulla, cosicché l'unica interazione rilevante su grande scala risulta essere quella gravitazionale.

L'Universo sembra rispettare le leggi e costanti della fisica moderna, in particolare il Modello Standard della fisica delle particelle (o meglio sue estensioni nell'ambito della Supersimmetria) e le interazioni fondamentali. Tuttavia mentre le interazioni deboli, elettromagnetiche e forti descritte dalla teoria elettrodebole e dalla cromodinamica quantistica possono essere descritte da teorie quantistiche rinormalizzate, mediate da bosoni

di gauge, per l'interazione gravitazionale, descritta al meglio dalla relatività generale, una teoria quantistica dei campi rinormalizzata non è ancora stata raggiunta, anche se varie forme delle teorie delle stringhe sembrano promettenti.

2.1 Metrica di FLRW

La metrica di Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) è una metrica Riemanniana, in particolare ammette una curvatura costante con valore $+1$, 0 o -1 che induce una struttura sulla superficie detta, rispettivamente, ellittica, piatta ed iperbolica.

La metrica di FLRW descrive l'Universo su grande scala con le ipotesi fondamentali di Universo isotropo ed omogeneo, assunto vero il principio cosmologico. Ad oggi si presuppone che la metrica di FLRW dia una buona rappresentazione dell'Universo osservabile su grande scala, con l'aggiunta di fluttuazioni di densità, da cui poi hanno origine, per successiva instabilità gravitazionale, le varie strutture su grande scala che sono state menzionate sopra.

Per la maggior parte di questa Tesi ci si concentrerà sull'evoluzione media di "background" dell'Universo in espansione, ovvero della dinamica di un universo omogeneo ed isotropo descritto dalla metrica di FLRW, non occupandoci dell'aspetto relativo all'evoluzione delle perturbazioni cosmologiche.

La metrica di FLRW può essere scritta in coordinate cartesiane, nella convenzione $(-, +, +, +)$ e ponendo la velocità della luce $c = 1$, come:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2 \left[dx_i^2 + k \frac{x_i^2}{1 - kx_i^2} dx_i^2 \right]. \quad (2.1)$$

Il parametro $a(t)$ è un parametro fondamentale, detto fattore di scala dell'Universo, mentre si definisce il parametro $H(a)$ come:

$$H(a) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (2.2)$$

che esprime il tasso di espansione dell'Universo. Si noti la dipendenza del fattore di scala dal tempo, ciò dovuto al fatto che si considera una metrica che descrive un Universo omogeneo ed isotropo. La k invece rappresenta la curvatura dello spazio, che potrà assumere i valori -1 , 0 o $+1$.

2.1.1 Equazioni di Friedmann

Le equazioni di Friedmann sono due per un Universo omogeneo ed isotropo, indipendenti e derivate dalle equazioni di campo di Einstein. Per i simboli di Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left[\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right], \quad (2.3)$$

e per la metrica (2.1) si trova:

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\eta_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\delta_j^i, \quad \Gamma_{kj}^i = \frac{kx^i}{a(t)^2}g_{kj}. \quad (2.4)$$

con g_{ij} tensore metrico.

Da questi si calcola il cosiddetto tensore di Riemann, definito come

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = \partial_{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\sigma}^{\mu}\Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}, \quad (2.5)$$

e successivamente il tensore di curvatura di Ricci e lo scalare di Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}, \quad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Le componenti risultano:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \quad R_{0i} = 0, \quad R_{ij} = \frac{\ddot{a}(t)a(t) + 2\dot{a}(t)^2 + 2k}{a(t)^2}g_{ij}, \quad (2.7)$$

$$R = 6\frac{a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}(t)^2 + k}{a(t)^2}. \quad (2.8)$$

con g_{ij} tensore metrico.

Si risolve ora l'equazione di campo di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

ove le componenti del tensore energia impulso sono definite come:

$$T_{00} = \rho(t), \quad T_{0i} = 0, \quad T_{ij} = p(t)g_{ij}, \quad (2.10)$$

con $\rho(t)$ e $p(t)$ rispettivamente densità di energia e pressione dell'Universo, inteso quest'ultimo come un fluido perfetto. Si assume infatti che l'Universo possa essere descritto in analogia ad un fluido, che obbedisce all'equazione dei fluidi, facilmente ricavabile a partire dalla prima legge della termodinamica e dalla formula di Einstein massa-energia:

$$\dot{\rho}(t) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}(\rho(t) + p(t)) = 0. \quad (2.11)$$

Considerando solo le componenti (00) dell'equazione di campo di Einstein (2.9) si trova la prima equazione di Friedmann:

$$\frac{\dot{a}(t)^2 + k}{a(t)^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho(t). \quad (2.12)$$

Le componenti miste (0i) sono tutte nulle mentre le componenti spaziali (ij) risultano:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \Lambda = -8\pi Gp(t), \quad (2.13)$$

che rappresenta la seconda equazione di Friedmann. Inoltre, la (2.13), combinata con la precedente (2.12) porge

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{1}{3}\Lambda = -\frac{4\pi G}{3}(\rho(t) + 3p(t)), \quad (2.14)$$

più utilizzata rispetto alla (2.13).

Risultano quindi tre equazioni, la (2.11), (2.12) e la (2.14) (o equivalentemente la (2.13)), indipendenti le une dalle altre.

2.1.2 Geometria dell'Universo

Si considera ora il caso $\Lambda = 0$. Questa approssimazione tuttavia è ragionevole considerando che il valore ad oggi stimato della costante cosmologica è decine di ordini più piccoli dell'unità. Come mostrato in precedenza, combinando la prima equazione di Friedmann (2.12) con la seconda (2.13) si ottiene la (2.12)

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho(t) + 3p(t)). \quad (2.15)$$

L'equazione (2.15) è detta equazione di accelerazione e descrive l'accelerazione del fattore di scala. Si noti come non compare il termine costante k che invece appare nelle altre equazioni.

Ed a proposito del fattore k questo viene introdotto interpretandolo come parametro di curvatura spaziale dell'Universo. A seconda del valore assunto, infatti, ci sono tre possibili geometrie per l'Universo: ellittico, piatto ed iperbolico per un valore di k pari rispettivamente a $+1$, 0 , -1 .

L'Universo piatto è descritto dalla geometria Euclidea, con i vari assiomi e postulati della geometria classica. Un Universo piatto sarebbe infinito in estensione per non violare il principio cosmologico.

L'Universo ellittico si basa su una geometria non Euclidea, l'esempio più semplice è una sfera. In questo caso l'Universo è finito in estensione conservando i principi fondamentali di isotropia ed omogeneità. La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di 180° , la circonferenza di un cerchio minore di $2\pi r$. Per questa geometria la costante k assume valore positivo ed un Universo con $k > 0$ viene spesso detto Universo chiuso, per la sua estensione finita.

Infine l'Universo iperbolico si basa anch'esso su una geometria non euclidea, la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di 180° e la circonferenza di un cerchio maggiore di $2\pi r$. La costante k è negativa e l'Universo è infinito in estensione. Con tale struttura viene definito Universo aperto.

Ad oggi l'Universo osservabile, ovvero l'Universo che teoricamente può essere osservato dalla luce che attraversa la Terra, risulta essere compatibile con un Universo spazialmente piatto con un margine di errore dello 0.2 %. Si assumerà quindi da qui in poi $k = 0$.

2.2 Modelli cosmologici

Si vogliono risolvere le equazioni di Friedmann per trovare semplici soluzioni di come l'Universo possa evolvere. Per fare ciò bisogna distinguere il caso di Universo di materia, radiazione o mix di entrambi.

Per materia si intende materia non relativistica con pressione $p = 0$. Questa è la più semplice approssimazione che si possa fare per un Universo, dominato da materia oscura fredda, non interagente (su scale cosmologiche) se non per via gravitazionale.

Dalle equazione dei fluidi (2.11) con $p = 0$ si trova:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \longrightarrow \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} (\rho a^3) = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt} (\rho a^3) = 0 \longrightarrow \rho \propto \frac{1}{a^3}. \quad (2.16)$$

Tale risultato è ragionevole: la densità diminuisce in proporzione al volume dell'Universo, tale che se il volume aumenta di un certo fattore k , la densità diminuisce dello stesso fattore k .

Sostituendo quindi il valore trovato per la densità di energia in (2.12), semplificando ed impostando $k = 0$ e $\Lambda = 0$ si trova:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0}{a}, \quad (2.17)$$

ove si è posto $\rho = \rho_0 a^{-3}$. La soluzione risulta:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}. \quad (2.18)$$

Con tale soluzione l'Universo si espande indefinitivamente, ma il tasso di espansione diminuisce fino a diventare infinitamente lento nel futuro lontano dell'Universo. In particolare la materia non ricollassa su sè stessa, ma si espande per sempre.

La radiazione invece è costituita da particelle o luce che si muovono alla velocità della luce. L'energia cinetica porta ad una pressione, la pressione di radiazione, stimabile come un terzo della densità di energia (ponendo $c = 1$): $p = \rho/3$. Sostituendo all'equazione dei fluidi (2.11):

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \longrightarrow \frac{1}{a^4} \frac{d}{dt} (\rho a^4) = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt} (\rho a^4) = 0 \longrightarrow \rho \propto \frac{1}{a^4}. \quad (2.19)$$

Si noti come l'Universo si espande più lentamente rispetto al caso di Universo dominato da materia, dovuto alla decelerazione aggiuntiva data dalla pressione che stavolta non è nulla. In termini termodinamici, nell'espansione è necessario il lavoro $p dV$ a causa della pressione non nulla, e proprio tale lavoro è causa della diminuzione della densità di radiazione. Sostituendo quindi nella prima equazione di Freeman (2.12) si ricava:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t}. \quad (2.20)$$

Per una situazione più realistica invece si può considerare la densità di energia costituita dai due contributi di materia e radiazione:

$$\rho = \rho_{mat} + \rho_{rad}, \quad \rho_{mat} \propto \frac{1}{a^3}, \quad \rho_{rad} \propto \frac{1}{a^4}. \quad (2.21)$$

Trovare una soluzione $\rho(t)$ è possibile seppur piuttosto complicato. Si considera la situazione in cui una delle due componenti domina sull'altra.

Se è la radiazione la componente principale, si trova:

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}, \quad \rho_{rad} \propto \frac{1}{t^2}, \quad \rho_{mat} \propto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.22)$$

La densità di materia decresce più lentamente di quella di radiazione quindi questa situazione non potrà durare per sempre.

Se la materia è la componente principale:

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}, \quad \rho_{rad} \propto \frac{1}{t^{\frac{8}{3}}}, \quad \rho_{mat} \propto \frac{1}{t^2}. \quad (2.23)$$

Si ritiene che il nostro Universo sia stato inizialmente dominato dalla radiazione e successivamente dalla materia, con il tasso di espansione che accelera da $a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$ a $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$. Ci si può chiedere infine cosa accada se la costante di curvatura k non sia nulla. Dall'equazione di Friedmann (2.12) si nota come se k fosse negativo l'espansione (ovvero il termine H^2) non potrà mai fermarsi l'Universo continuerà ad espandersi indefinitamente. Per $a(t)$ grande, ovvero in un'era molto lontana cosicchè t è molto grande, il termine proporzionale a ρ avendo un andamento come a^{-3} si può trascurare, quindi:

$$\frac{\dot{a}(t)^2 + k}{a(t)^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) \longrightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2}. \quad (2.24)$$

che ha come soluzione $a \propto t$. L'espansione dell'Universo diventa quindi ancora più veloce. Si parla in tal caso di libera espansione dell'Universo.

Nel caso k sia positivo si nota come sia possibile che $H(t)$ si annulli:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}. \quad (2.25)$$

Il termine k/a^2 diventerà sempre più importante fino ad eguagliare il termine ρ_{mat} ed annullare quindi $H(t)$. Si parla in tal caso di ricollasso dell'Universo a causa della forza gravitazionale. Le equazioni che governano l'espansione dell'Universo infatti sono time-reversible, ovvero sostituendo $-t$ a t le equazioni rimangono inalterate e il collasso può essere considerato un'espansione al contrario e quindi dopo un tempo finito l'Universo inizierà a collassare su sè stesso fino al cosiddetto Big Crunch.

2.2.1 Modello Λ CDM

Al giorno d'oggi il cosiddetto Λ CDM è il modello che ha avuto più successo nell'ambito della cosmologia, e rappresenta quello che vien definito il modello standard.

Il modello prevede l'origine dell'Universo da un singolo evento (o per essere più precisi, da una fase calda dell'Universo), il Big Bang, una brusca espansione esponenziale dello spazio-tempo, l'inflazione cosmica, seguita da una fase calda, il tutto nelle prime frazioni di secondo. L'Universo primordiale rimase caldo per milioni di anni, stato che è possibile rilevare dai residui del background cosmico in microonde, una radiazione molto bassa di energia. Il Big Bang (inteso come il modello cosmologico con una fase iniziale calda, dominata dalla radiazione, e basata sulla relatività Generale di Einstein), con l'inflazione cosmica ed il modello standard di fisica delle particelle, è il solo modello cosmologico attuale consistente con i dati osservati, quali l'espansione dello spazio, la distribuzione degli elementi leggeri nell'Universo e le anisotropie nella radiazione cosmica di fondo alle microonde (Cosmic Microwave Background o CMB).

Il modello assume la Relatività Generale come teoria corretta della gravità in cosmologia su grandi scale, usa la metrica di FLRW, le equazioni di Friedmann e l'equazione di stato cosmologica.

Il modello presenta due componenti 'oscure' che sostituiscono circa il 95% della materia totale: Λ , conosciuta come costante cosmologica e CDM , la cold dark matter. La costante cosmologica Λ viene generalmente associata all'energia del vuoto, o energia oscura, per spiegare l'attuale espansione accelerata dell'Universo osservata. La costante cosmologica ha pressione negativa che appunto causa l'espansione accelerata. La frazione della densità di energia oscura dell'Universo, piatto o quasi piatto, è stimata in 0.69 ± 0.01 , dai dati del satellite Planck ([13]). Tuttavia il valore sperimentale della costante cosmologica è di 120 ordini di grandezza più basso dal valore teorico, problema che porta ad una enorme discrepanza, noto come 'cosmological constant problem'.

La materia oscura, che comprende circa il 26.8% della densità della massa-energia dell'Universo, è postulata per spiegare gli effetti gravitazionali osservati su larga scala, che non potrebbero essere spiegati solo dalla componente di materia osservata: per esempio le galassie e gli ammassi di galassie, infatti, appaiono più massive di quanto aspettato, considerando solo la materia barionica. La materia oscura fredda è non barionica, ovvero è materia non ordinaria non costituita da protoni o neutroni e né elettroni, seppur siano fermioni e non barioni. Deve avere una velocità molto bassa, quindi non relativistica. Si assume infine sia non collisionale e non interagente con le altre particelle del modello standard, eccetto tramite interazione gravitazionale.

Il restante 4.9% della materia dell'Universo comprende la materia ordinaria, come atomi, elementi chimici e plasmi, costituenti della materia visibile, pianeti, stelle e galassie.

In ogni caso il modello ΛCDM non è una teoria, ma un modello e non spiega né la natura né l'origine dell'energia e materia oscura. Ciò nonostante il modello, basato su osservazioni su larga scala, riproduce i dati osservati con un ottimo accordo.

Capitolo 3

Introduzione alla teoria mimetica

Il modello Λ CDM da solo non riesce a spiegare interamente la fenomenologia osservata nell'Universo. In particolare, ad esempio, l'origine, struttura e proprietà della materia ed energia oscura o il periodo inflazionario iniziale dell'Universo. Negli anni si sono quindi ipotizzati nuovi campi scalari e particelle da introdurre nel modello standard. Se da una parte ci sono stati alcuni successi, come la recente rilevazione del bosone di Higgs, dall'altra le particelle ipotizzate non sono state ancora trovate sperimentalmente, nè è stata formulata una descrizione matematica completa. Il modello mimetico rappresenta un approccio alternativo, modificare la gravità in modo da spiegare la presenza della materia ed energia oscura senza l'introduzione di nuove particelle, ma allo stesso tempo tale che le proprietà del modello standard Λ CDM model continuino a valere.

3.1 Teorie Mimetiche

Le teorie mimetiche si sviluppano apportando opportunamente una modifica alla Relatività Generale. Tale modifica viene introdotta al fine di spiegare i fenomeni osservati delle componenti oscure, senza introdurre nuove fonti di energia.

La modifica risiede nella riformulazione della Relatività Generale in termini di una trasformazione disforme del tensore metrico, con l'introduzione di una funzione ausiliaria. Si mostra come tale modifica possa essere applicata ad un'azione il più generale possibile:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} + S_m [g_{\mu\nu}, \phi_m], \quad (3.1)$$

con

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L} [g_{\mu\nu}, \partial_{\lambda_1} g_{\mu\nu}, \dots, \partial_{\lambda_1} \dots \partial_{\lambda_p} g_{\mu\nu}, \Psi, \partial_{\lambda_1} \Psi, \dots, \partial_{\lambda_1} \dots \partial_{\lambda_q} \Psi]. \quad (3.2)$$

In tale trattazione si seguiranno essenzialmente le linee di studio dell'articolo [1].
Si consideri una cosiddetta "disforme" della metrica:

$$g_{\mu\nu} = A(\Psi, w)l_{\mu\nu} + B(\Psi, w)\partial_\mu\Psi\partial_\nu\Psi, \quad (3.3)$$

con w definito come:

$$w = l^{\rho\sigma}\partial_\rho\Psi\partial_\sigma\Psi, \quad (3.4)$$

ed $A(\Psi, w)$ e $B(\Psi, w)$ funzioni arbitrarie di due variabili. L'inversa risulta:

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{A(\Psi, w)}l^{\mu\nu} + \frac{B(\Psi, w)}{B(\Psi, w)g^{\rho\sigma}\partial_\rho\Psi\partial_\sigma\Psi - 1}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\partial_\alpha\Psi\partial_\beta\Psi. \quad (3.5)$$

Dalla definizione di w (3.4) e dalla formula (3.5) si può scrivere:

$$w = \frac{A(\Psi, w)g^{\mu\nu}\partial_\mu\Psi\partial_\nu\Psi}{1 - B(\Psi, w)g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Psi\partial_\beta\Psi} \longrightarrow G(\Psi, w) = g^{\mu\nu}\partial_\mu\Psi\partial_\nu\Psi, \quad (3.6)$$

con la funzione $G(\Psi, w)$ definita come:

$$G(\Psi, w) = \frac{w(1 - B(\Psi, w)g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Psi\partial_\beta\Psi)}{A(\Psi, w)}. \quad (3.7)$$

Le equazioni del moto dell'azione generale (3.1), nel caso mimetico, si possono derivare dalla condizione di non esistenza della funzione G^{-1} ovvero dalla non invertibilità della trasformazione disforme (3.3). Questa condizione implica, nell'intorno di un certo w_* :

$$\frac{dG(\Psi, w)}{dw}\Big|_{w=w_*} = 0 \longrightarrow G(\Psi, w) = \frac{1}{b(\Psi)}, \quad (3.8)$$

per una funzione $b(\Psi)$ funzione solo di Ψ . Dall'equazione (3.6) si ricava:

$$b(\Psi) = \frac{1}{g^{\mu\nu}\partial_\mu\Psi\partial_\nu\Psi}, \quad (3.9)$$

quindi la funzione $B(\Psi, w)$ assume la forma:

$$B(\Psi, w) = -\frac{A(\Psi, w)}{w} + b(\Psi). \quad (3.10)$$

Si applica ora la trasformazione disforme del tipo (3.3) ad un'azione più generale possibile:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} + S_m[g_{\mu\nu}, \phi_m], \quad (3.11)$$

dove

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}[g_{\mu\nu}, \partial_{\lambda_1}g_{\mu\nu}, \dots, \partial_{\lambda_1}\dots\partial_{\lambda_p}g_{\mu\nu}, \Psi, \partial_{\lambda_1}\Psi, \dots, \partial_{\lambda_1}\dots\partial_{\lambda_q}\Psi]. \quad (3.12)$$

Si calcola la variazione rispetto a Ψ , $g_{\mu\nu}$ e ϕ_m :

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^4x (E^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} + \int d^4x \Omega_\Psi \delta \Psi + \int d^4x \Omega_m \delta \phi_m \quad (3.13)$$

dove si sono definiti:

$$\Omega_\Psi = \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta\Psi} = \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\Psi} + \sum_{h=1}^q (-1)^h \frac{d}{dx^{\lambda_1}} \dots \frac{d}{dx^{\lambda_h}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_{\lambda_1} \dots \partial_{\lambda_h} \Psi)}, \quad (3.14)$$

$$E^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \right) + \frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\sum_{h=1}^p (-1)^h \frac{d}{dx^{\lambda_1}} \dots \frac{d}{dx^{\lambda_h}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_{\lambda_1} \dots \partial_{\lambda_h} g_{\mu\nu})} \right), \quad (3.15)$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (3.16)$$

$$\Omega_m = \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta\phi_m}. \quad (3.17)$$

La variazione del tensore metrico in funzione della metrica $l_{\mu\nu}$ e del campo scalare Ψ risulta:

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} &= A \delta l_{\mu\nu} - \left(l_{\mu\nu} \frac{\partial A}{\partial w} + \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi \frac{\partial B}{\partial w} \right) \left[(l^{\alpha\rho} \partial_\alpha \Psi) (l^{\beta\sigma} \partial_\beta \Psi) \delta l_{\rho\sigma} \right] \\ &+ \left(l_{\mu\nu} \frac{\partial A}{\partial w} + \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi \frac{\partial B}{\partial w} \right) [2l^{\rho\sigma} (\partial_\rho \Psi) (\partial_\sigma \delta \Psi)] + \\ &+ \left(l_{\mu\nu} \frac{\partial A}{\partial \Psi} + \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi \frac{\partial B}{\partial \Psi} \right) \delta \Psi + \\ &+ B [(\partial_\mu \Psi) (\partial_{nn} \delta \Psi) + (\partial_\nu \Psi) (\partial_\mu \delta \Psi)], \end{aligned} \quad (3.18)$$

che inserita nella (3.13) porta alle equazioni del moto rispetto alle nuove variabili $l_{\mu\nu}$ e Ψ :

$$\frac{\delta S}{\delta l_{\mu\nu}} = 0 \longrightarrow A (E^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}) = \left(\alpha_1 \frac{\partial A}{\partial w} + \alpha_2 \frac{\partial B}{\partial w} \right) (l^{\mu\rho} \partial_\rho \Psi) (l^{\nu\sigma} \partial_\sigma \Psi). \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \Psi} &= 0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho [\sqrt{-g} \partial_\sigma \Psi B (E^{\rho\sigma} + T^{\rho\sigma})] + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho \left[\sqrt{-g} \partial_\sigma \Psi \left(\alpha_1 \frac{\partial A}{\partial w} + \alpha_2 \frac{\partial B}{\partial w} \right) l^{\rho\sigma} \right] - \frac{\Omega_\Psi}{\sqrt{-g}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\alpha_1 \frac{\partial A}{\partial \Psi} + \alpha_2 \frac{\partial B}{\partial \Psi} \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

avendo definito i due parametri α_1 ed α_2 come:

$$\alpha_1 = (E^{\rho\sigma} + T^{\rho\sigma}) l_{\rho\sigma}. \quad (3.21)$$

$$\alpha_2 = (E^{\rho\sigma} + T^{\rho\sigma}) \partial_\rho \Psi \partial_\sigma \Psi. \quad (3.22)$$

Dalla contrazione dell'equazione del moto (3.19) con la metrica ausiliaria $l_{\mu\nu}$ e con $\partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi$ si trova un sistema lineare di due equazioni linearmente indipendenti, utili per ricavare i valori dei due parametri α_1 ed α_2 :

$$\begin{cases} \alpha_1 (A - w \frac{\partial A}{\partial w}) - \alpha_2 w \frac{\partial B}{\partial w} = 0 \\ \alpha_1 w^2 \frac{\partial A}{\partial w} - \alpha_2 (A - w^2 \frac{\partial B}{\partial w}) = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

La risoluzione del sistema delle due equazioni in α_1 e α_2 dipende dal determinante, se esso è nullo o diverso da zero.

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} A - w \frac{\partial A}{\partial w} & -w \frac{\partial B}{\partial w} \\ w^2 \frac{\partial A}{\partial w} & -A + w^2 \frac{\partial B}{\partial w} \end{pmatrix} = w^2 A \frac{\partial}{\partial w} \left(B + \frac{A}{w} \right). \quad (3.24)$$

Imponendo che il determinante (3.24) sia non nullo, ovvero il sistema di equazioni (3.23) sia invertibile, si trovano come uniche soluzioni $\alpha_1 = 0$ ed $\alpha_2 = 0$, che inserendo nelle equazioni del moto (3.19) e nella (3.20) portano a

$$E^{\mu\nu} + T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.25)$$

$$\Omega_\Psi = 0. \quad (3.26)$$

Si vede quindi come in questo caso non si riottiene altro se non le stesse equazioni del moto della teoria originale da cui uno e' partito ((3.11)) prima di fare qualsiasi trasformazione disforme.

Si può verificare un secondo casop: nel caso in cui il determinante (3.24) sia nullo, risolvendo l'equazione:

$$\det(M) = 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial w} \left(B + \frac{A}{w} \right) = 0 \longrightarrow B = -\frac{A}{w} + b(\Psi), \quad (3.27)$$

con $b(\Psi)$ costante di integrazione in generale non nulla. Imporre che il determinante della matrice sia nullo equivale a dire che la trasformazione disforme non è invertibile. La (3.27) inserita nel sistema (3.23) restituisce la condizione $\alpha_2 = w\alpha_1$ e quindi la trasformazione disforme (3.3) e la sua inversa porgono:

$$g_{\mu\nu} = A(\Psi, w) l_{\mu\nu} + \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi \left(b(\Psi) - \frac{A(\Psi, w)}{w} \right), \quad (3.28)$$

$$g^{\mu\nu} = \frac{l_{\mu\nu}}{A(\Psi, w)} + \frac{A(\Psi, w) - wb(\Psi)}{A(\Psi, w) b(\Psi) w^2} (l^{\mu\rho} \partial_\rho \Psi) (l^{\nu\sigma} \partial_\sigma \Psi). \quad (3.29)$$

Pertanto adesso le equazioni del moto (3.19) e (3.20) diventano:

$$E^{\mu\nu} + T^{\mu\nu} = \frac{\alpha_1}{w} (l^{\mu\rho} \partial_\rho \Psi) (l^{\nu\sigma} \partial_\sigma \Psi), \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g} b \alpha_1 l^{\rho\sigma} \partial_\sigma \Psi) - \frac{\Omega_\Psi}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2} \alpha_1 w \frac{db}{d\Psi}. \quad (3.31)$$

Si può ora notare come la trasformazione disforme sia non invertibile, nella formulazione di $g_{\mu\nu}$ compare ora il tensore $l_{\mu\nu}$ quadratico, quindi una trasformazione inversa tramite la funzione $f_{\mu\nu}$ tale che $f_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}) = l_{\mu\nu}$, almeno globalmente, non sarà possibile. Sfruttando l'uguaglianza $l^{\mu\rho}\partial_\rho\Psi = bw\partial^\mu\Psi$ e contraendolo con la (3.30) si trova $\alpha_1 = (E + T) / (bw)$, con $E + T = g_{\rho\sigma}(E^{\rho\sigma} + T^{\rho\sigma})$. Sostituendo quindi la α_1 appena trovata in (3.30) e (3.31) ed eliminando la dipendenza dalla metrica $l^{\rho\sigma}$ per scrivere il tutto in termini solo di $g_{\mu\nu}$ esplicitamente si trova in conclusione:

$$E^{\mu\nu} + T^{\mu\nu} = (E + T) b(\Psi) \partial^\mu\Psi \partial^\nu\Psi, \quad (3.32)$$

$$\nabla_\rho [(E + T) b(\Psi) \partial^\rho\Psi] - \frac{\Omega_\Psi}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2} (E + T) \frac{1}{b(\Psi)} \frac{db(\Psi)}{d\Psi}, \quad (3.33)$$

$$\Omega_m = 0. \quad (3.34)$$

3.2 Condizione Mimetica

Un punto importante da mettere in evidenza è il seguente: l'uguaglianza $l^{\mu\rho}\partial_\rho\Psi = bw\partial^\mu\Psi$ contratta con $\partial_\mu\Psi$, usando la definizione di w in (3.4) porta al seguente constraint che nelle teorie mimetiche gioca un ruolo cruciale (chiamato constraint mimetico):

$$b(\Psi) g^{\mu\nu} \partial_\mu\Psi \partial_\nu\Psi = 1. \quad (3.35)$$

Le equazioni (3.32), (3.33), (3.34) e (3.35) sono diverse dalle equazioni del moto trovate dalla variazione dell'azione originale (3.11) rispetto alla metrica $g_{\mu\nu}$ prima di fare la trasformazione disforme. In particolare si noti come le equazioni di campo di Einstein siano modificate ed ora anche in assenza di materia ($T^{\mu\nu} = 0$) il tensore $E^{\mu\nu}$ in generale non è più nullo. Risulta chiaro quindi come l'introduzione della metrica ausiliaria, ovvero tramite l'aggiunta di un campo scalare aggiuntivo alla metrica tradizionale, portino a nuove equazioni del moto (nel caso in cui il determinante (3.24) sia nullo, che corrisponde ad una trasformazione disforme non-invertibile). Nel prossimo capitolo si mostrerà come queste nuove equazioni, che definiscono le cosiddette teorie mimetiche, riescono effettivamente a mimare il comportamento della materia oscura e/o della energia oscura.

Il campo scalare ausiliario, Ψ , induce un grado di libertà aggiuntivo al campo gravitazionale. Un'interpretazione la si può vedere riscrivendo l'equazione (3.32) come:

$$E^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}, \quad (3.36)$$

con

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = (E + T) b(\Psi) \partial^\mu\Psi \partial^\nu\Psi \quad (3.37)$$

Dall'espressione del tensore energia-impulso per un fluido perfetto:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (3.38)$$

e comparando le due espressioni di $T^{\mu\nu}$, ponendo $p = 0$, si può fare un'analogia e definire:

$$\rho \equiv E + T, \quad u^\mu \equiv g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \Psi, \quad (3.39)$$

con ρ la densità di energia, p la pressione e u^μ la quadrivelocità che soddisfa la condizione di normalizzazione $u^\mu u_\mu = 1$. Il grado di libertà aggiunto dall'introduzione della Ψ riproduce il comportamento della materia non collisionale (con pressione $p = 0$), con densità di energia pari a $E + T$ e col potenziale scalare che funge da potenziale cinetico, ovvero tale che $\nabla^\mu \phi = -u^\mu$. Anche in questo caso in assenza di materia la densità di energia non si annulla, diversamente dalla Relatività generale. Inoltre la condizione di normalizzazione della quadrivelocità equivale, con le sostituzioni (3.39), alla condizione mimetica (3.35) con la normalizzazione di $b = -1$, e la conservazione del tensore $\tilde{T}^{\mu\nu}$, $\nabla_\mu \tilde{T}^\mu = 0$, riporta l'equazione del moto (3.33).

3.3 Formulazione dal Lagrange multiplier

Come mostrato sempre in [1], si mostrerà ora come le equazioni del moto mimetiche di un'azione (la più generale possibile) del tipo (3.1), ottenute tramite la trasformazione disforme (3.3), possono anche essere ottenute senza alcuna trasformazione disforme e senza l'aggiunta della metrica ausiliaria $l_{\mu\nu}$.

Si consideri sempre l'azione (3.1), dove stavolta si aggiunge un termine aggiuntivo:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} + S_m [g_{\mu\nu}, \phi_m] + \int d^4x \sqrt{-g} \lambda (b(\Psi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi - 1), \quad (3.40)$$

dove λ è un campo moltiplicatore di Lagrange e $b(\Psi)$ è una funzione nota di Ψ che definisce la teoria e che, proprio grazie alla scelta arbitraria di tale funzione, si riusciranno a mimare diverse condizioni fenomenologiche. Tale metodo verrà illustrato negli esempi dei capitoli successivi.

Per trovare le equazioni del moto si effettua la variazione dell'azione rispetto a λ , Ψ , $g_{\mu\nu}$ e ϕ_m e si trova, rispettivamente:

$$b(\Psi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi - 1 = 0, \quad (3.41)$$

$$\Omega_\Psi + \sqrt{-g} \frac{\lambda}{b(\Psi)} \frac{db(\Psi)}{d\Psi} - 2\partial_\mu (\sqrt{-g} \lambda b(\Psi) g^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi), \quad (3.42)$$

$$E^{\mu\nu} + T^{\mu\nu} - 2\lambda b(\Psi) \partial^\mu \Psi \partial^\nu \Psi = 0, \quad (3.43)$$

$$\Omega_m = 0, \quad (3.44)$$

ove i termini $E^{\mu\nu}$, $T^{\mu\nu}$ e Ω_Ψ sono definiti, rispettivamente, dalle equazioni (3.15), (3.16) e (3.17).

Calcolando la traccia dell'equazione (3.43) ed usando l'equazione (3.41) si trova:

$$E + T - 2\lambda b(\Psi) g_{\mu\nu} \partial^\mu \Psi \partial^\nu \Psi = 0 \longrightarrow E + T - 2\lambda = 0, \quad (3.45)$$

ovvero

$$\lambda = \frac{E + T}{2}. \quad (3.46)$$

Con tale valore di λ le equazioni del moto possono essere riscritte infine nella forma seguente:

$$b(\Psi)g^{\mu\nu}\partial_\mu\Psi\partial_\nu\Psi - 1 = 0, \quad (3.47)$$

$$\nabla_\mu[(E + T)b(\Psi)\partial^\mu\Psi] - \frac{\Omega_\Psi}{\sqrt{-g}} = \frac{E + T}{2} \frac{1}{b(\Psi)} \frac{db(\Psi)}{d\Psi}, \quad (3.48)$$

$$E^{\mu\nu} + T^{\mu\nu} = (E + T)b(\Psi)\partial^\mu\Psi\partial^\nu\Psi = 0, \quad (3.49)$$

$$\Omega_m = 0. \quad (3.50)$$

Queste quattro equazioni del moto sono uguali alle equazioni del moto (3.32), (3.33), (3.34) e (3.35). La formulazione col Lagrange multiplier quindi è del tutto equivalente alla formulazione con la trasformazione disforme della metrica, senza dover aggiungere una metrica ausiliaria, ma dovendo aggiungere un termine, λ , moltiplicatore di Lagrange, all'azione del sistema.

Delle quattro equazioni (3.47), (3.48), (3.49) e (3.50) non tutte sono indipendenti. Prendendo la derivata covariante dell'equazione (3.49), usando la conservazione del tensore energia-impulso, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, si trova:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu E^{\mu\nu} &= \nabla_\mu[(E + T)b(\Psi)\partial^\mu\Psi]\partial^\nu\Psi + (E + T)b(\Psi)\partial^\mu\Psi\nabla_\mu\partial^\nu\Psi = \\ &= \partial^\mu\Psi \left[\nabla_\nu[(E + T)b(\Psi)\partial^\mu\Psi] - \frac{1}{2} \frac{1}{b(\Psi)} \frac{db(\Psi)}{d\Psi} (E + T) \right], \end{aligned} \quad (3.51)$$

dove nella seconda eguaglianza si è utilizzata la derivata covariante della condizione mimetica (3.47):

$$b(\Psi)g^{\mu\nu}\partial_\mu\Psi\partial_\nu\Psi - 1 = 0 \longrightarrow b(\Psi)\nabla^\mu\nabla^\nu\Psi\partial_\mu\Psi = -\frac{1}{2} \frac{db(\Psi)}{d\Psi} \nabla^\nu\Psi\partial_\mu\Psi\partial^\mu\Psi. \quad (3.52)$$

Come mostrato da Horndeski si ha la seguente uguaglianza:

$$\sqrt{-g}\nabla_\mu E^{\mu\nu} = \Omega_\Psi\nabla^\nu\Psi, \quad (3.53)$$

ed, usando il fatto che $\partial^\nu\Psi \neq 0$ almeno per uno degli indici ν , si semplifica l'equazione (3.51) nel seguente modo:

$$\nabla_\mu[(E + T)b(\Psi)\partial^\mu\Psi] - \frac{\Omega_\Psi}{\sqrt{-g}} = \frac{E + T}{2} \frac{1}{b(\Psi)} \frac{db(\Psi)}{d\Psi}, \quad (3.54)$$

ovvero identica all'equazione (3.48).

Quest'ultima quindi non è indipendente dalle altre tre, ma deriva prendendo la derivata covariante dell'equazione (3.49) ed usando la condizione $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, l'equazione (3.47) e l'equazione (3.50). Per risolvere la dinamica di un sistema, quindi, è sufficiente considerare il set di tre equazioni (3.49) e l'equazione (3.50), più la condizione mimetica (3.47).

Capitolo 4

Modelli Mimetici

4.1 Modello originale mimetico

Come primo modello specifico delle teorie mimetiche si comincia dal modello originalmente proposto da Chamseddine e Mukhanov in [6]. Per semplicità ci si concentrerà esclusivamente sul comportamento del background nella metrica di FLRW. In questo caso il modello di partenza è quello della Relatività Generale di Einstein:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + \mathcal{L}_M] = \frac{1}{2} U \int dt \sqrt{-g} R, \quad (4.1)$$

dove si noti che nell'ultimo passaggio si è eliminata la presenza di materia, $\mathcal{L}_M = 0$, e si è indicato con U l'integrale di volume sullo spazio e d'ora in poi si porrà $U = 1$. In un Universo spazialmente piatto, nella metrica (2.1) di FLRW si ha:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-(-1)a^2a^2a^2} = a^3, \quad (4.2)$$

$$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = -R_{00} + \frac{3}{a^2}R_{ii} = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (4.3)$$

L'azione diventa quindi:

$$S = 3 \int dt (a^2\ddot{a} + a\dot{a}^2). \quad (4.4)$$

Si comincia considerando la densità di Lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(a, \dot{a}, \ddot{a}; t)$ senza l'aggiunta del Lagrange multiplier; si calcola quindi la variazione dell'azione e si ricavano le equazioni del moto. Per fare ciò si comincia considerando che la Lagrangiana non dipende solo dalla funzione $a(t)$ e dalla sua derivata prima $\dot{a}(t)$, ma anche dalla derivata seconda $\ddot{a}(t)$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(a(t), \dot{a}(t), \ddot{a}(t); t). \quad (4.5)$$

La variazione della Lagrangiana risulta

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(a + \delta a, \dot{a} + \delta\dot{a}, \ddot{a} + \delta\ddot{a}; t) - \mathcal{L}(a, \dot{a}, \ddot{a}; t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a}\delta a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{a}}\delta\dot{a} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\ddot{a}}\delta\ddot{a}, \quad (4.6)$$

quindi la variazione dell'azione diventa

$$\delta S = \delta \int dt \delta \mathcal{L} = \int dt \delta \mathcal{L}. \quad (4.7)$$

Si usa ora il fatto che per una Lagrangiana, dipendente da $y(x)$ e dalle sue i -esime derivate, per $i = 1, \dots, n$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x); x \right), \quad (4.8)$$

allora la variazione della sua azione può essere agevolmente calcolata come

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dx \delta y \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^{(n)}} \right) \right] = \\ &= \int dx \delta y \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^{(k)}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Quindi la variazione dell'azione (4.4) può essere scritta come

$$\delta S = \int dt \delta a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{a}} \right) \right]. \quad (4.10)$$

Svolgendo i conti si trova

$$\frac{\delta S}{\delta a} = 0 \iff \int dt (2a\ddot{a} + \dot{a}^2) = 0 \iff 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 = 0. \quad (4.11)$$

Si può dividere ora per a^2 , cosa del tutto lecita in quanto per $t = t_0$ la funzione $a(t)$ viene normalizzata ad uno, mentre per $t > t_0$ la funzione si assume positiva e strettamente crescente, quindi in particolare non si annulla mai. Si trova quindi

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 0. \quad (4.12)$$

Questa soluzione equivale proprio alla soluzione delle equazioni di Friedmann (2.12) e (2.13) nel caso in cui si consideri un Universo spazialmente piatto in assenza di materia, $T_{\mu\nu} = 0$, e si approssimi $\Lambda = 0$. Ciò è ragionevole considerando che nell'azione (4.1) si è utilizzata l'azione di Einstein-Hilbert nella metrica di FLRW, che portano alle equazioni di Einstein e da cui derivano a sua volta le equazioni di Friedmann.

Imponendo quindi che $a \propto t^\alpha$ sia soluzione, si trova $\alpha = 0, \frac{2}{3}$, ovvero, escludendo la soluzione $a(t) = \text{costante}$:

$$\alpha = \frac{2}{3(1+w)} = \frac{2}{3} \longrightarrow w = 0. \quad (4.13)$$

Si vogliono studiare ora le equazioni del moto nel caso mimetico. Come mostrato in [1], queste possono essere ottenute trasformando la Lagrangiana (4.1) tramite una trasformazione disforme mimetica del tipo (3.3), imponendo la non invertibilità, ovvero con la

condizione (3.10) :

$$g_{\mu\nu} = A(\Psi, w)l_{\mu\nu} + \partial_\mu\Psi\partial_\nu\Psi \left(b(\Psi) - \frac{A(\Psi, w)}{w} \right), \quad (4.14)$$

con l'utilizzo della metrica ausiliaria $l_{\mu\nu}$, Ψ campo scalare che definisce la trasformazione ed $A(\Psi, w)$ funzione arbitraria di due variabili. Alternativamente, come mostrato nel capitolo precedente, la trasformazione (4.14) e l'equazione del moto nel caso mimetico, può essere ottenuta attraverso la variazione di un'azione senza l'utilizzo della metrica aggiuntiva $l_{\mu\nu}$, aggiungendo ora il termine addizionale $\mathcal{L}_\lambda = \sqrt{-g}\lambda (b(\Psi) g^{\mu\nu}\partial_\mu\Psi\partial_\nu\Psi - 1)$ alla Lagrangiana di partenza. In questo modo uno impone automaticamente il vincolo mimetico.

La densità di Lagrangiana, sempre nella metrica di FLRW in Universo spazialmente piatto, diventa quindi:

$$\mathcal{L} = 3(a^2\ddot{a} + a\dot{a}^2) - a^3\lambda (b(\Psi)\dot{\Psi}^2 + 1) = \mathcal{L}(a, \dot{a}, \ddot{a}, \Psi, \dot{\Psi}; t). \quad (4.15)$$

Calcolando la variazione rispetto a $\delta\lambda$, $\delta\Psi$ e δa si ricavano:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}\delta\lambda = 0 \longrightarrow a^3 (b(\Psi)\dot{\Psi}^2 + 1) = 0 \longrightarrow b(\Psi)\dot{\Psi}^2 + 1 = 0, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi}\delta\Psi - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Psi}} \right) \delta\Psi = 0 \longrightarrow \frac{db}{d\Psi}\dot{\Psi}^2 + 6b\dot{a}\dot{\Psi} + 2ba\ddot{\Psi} = 0, \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{a}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\ddot{a}} \right) &= 0 \longrightarrow \\ \longrightarrow 3(2a\ddot{a} + \dot{a}^2) + 3a^2\lambda (b(\Psi)\dot{\Psi}^2 + 1) &= 0 \longrightarrow 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Col nuovo set di equazioni si trovano come soluzioni:

$$b = -1, \quad \Psi = t, \quad a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad w = 0. \quad (4.19)$$

Si ha quindi che le soluzioni di $a(t)$ nel caso non mimetico coincidono quindi col caso mimetico con l'aggiunta del \mathcal{L}_λ . Si noti infatti che l'equazione (4.18) è identica alla (4.12).

4.2 Primo semplice esempio

Si considerano i due primi esempi presentati in [1]. Nel seguito si studierà il caso di Universo omogeneo ed isotropo nella metrica di FLRW per il background. Si andranno ad escludere le fluttuazioni e le derivate rispetto allo spazio saranno nulle, ovvero $\nabla^\mu \equiv \nabla^0$. Si considerano l'azione di Horndeski, teorie locali tensoriali-scalari 4D più generali possibili. Queste contengono equazioni del moto del secondo ordine e possono essere derivate

dalla cosiddetta azione di Horndeski.

Dalla teoria di Horndeski, l'azione risulta:

$$S_H = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_H = \int d^4x \sqrt{-g} \sum_{n=0}^3 \mathcal{L}_n, \quad (4.20)$$

con:

$$\mathcal{L}_0 = K(X, \Psi), \quad (4.21)$$

$$\mathcal{L}_1 = -G_3(X, \Psi) \square \Psi, \quad (4.22)$$

$$\mathcal{L}_2 = G_{4,X}(X, \Psi) \left[(\square \Psi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \Psi)^2 \right] + R G_4(X, \Psi), \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = & -\frac{1}{6} G_{5,X}(X, \Psi) \left[(\square \Psi)^2 - 3 \square \Psi (\nabla_\mu \nabla_\nu \Psi)^2 + 2 (\nabla_\mu \nabla_\nu \Psi)^3 \right] + \\ & + G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \Psi G_5(X, \Psi), \end{aligned} \quad (4.24)$$

ove

$$X = -1/2 \nabla_\mu \Psi \nabla^\mu \Psi. \quad (4.25)$$

Si considerano adesso due semplici sottocasi che mettono però ben in evidenza alcune proprietà delle teorie mimetiche.

Nel primo esempio A. si considera il caso semplice di teoria mimetica di un campo scalare canonico cinetico, senza potenziale associato alla teoria della gravità di Einstein:

$$\begin{aligned} K(X, \Psi) &= c_2 X, & G_3(X, \Psi) &= 0, \\ G_4(X, \Psi) &= \frac{1}{2}, & G_5(X, \Psi) &= 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

con c_2 una costante. L'azione diventa quindi:

$$S_H = \int d^4x \sqrt{-g} \left(c_2 X + \frac{1}{2} R \right) + \int d^4x \sqrt{-g} \lambda (b(\Psi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi - 1), \quad (4.27)$$

ovvero in un Universo spazialmente piatto, nella metrica di FLRW per il background risulta una Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} c_2 a^3 \dot{\Psi}^2 + 3 (a \dot{a}^2 + a^2 \ddot{a}) - a^3 \lambda (b(\Psi) \dot{\Psi}^2 + 1), \quad (4.28)$$

Si studia il caso in assenza di materia, $T^{\mu\nu} = 0$. Per trovare le equazioni del moto si procede a calcolare la variazione della Lagrangiana rispetto alla λ , ad a ed al campo Ψ :

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda} = 0 \longrightarrow b \dot{\Psi}^2 + 1 = 0, \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta a} = 0 & \longrightarrow \frac{3}{2} c_2 a^2 \dot{\Psi} + 3 \dot{a}^2 + 6 a \ddot{a} - 3 a^2 \lambda (b \dot{\Psi}^2 + 1) - \frac{d}{dt} (6 a \dot{a}) + \frac{d^2}{dt^2} (3 a^2) = 0 \\ & \longrightarrow c_2 a^2 \dot{\Psi}^2 + 2 \dot{a}^2 + 4 a \ddot{a} = 0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi} = 0 &\longrightarrow -a^3 \lambda \frac{db}{d\Psi} \dot{\Psi}^2 - \frac{d}{dt} \left(c_2 a^3 \lambda b \dot{\Psi} \right) = 0 \\ &\longrightarrow -a^3 \lambda \frac{db}{d\Psi} \dot{\Psi}^2 - 3c_2 a^2 \dot{a} \dot{\Psi} - c_2 a^3 \ddot{\Psi} + 6a^2 \dot{a} \lambda b \dot{\Psi} + 2a^3 \frac{d\lambda}{dt} b \dot{\Psi} = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Alternativamente si potevano calcolare il tensore $E^{\mu\nu}$, ricordando la definizione (3.15), e Ω_Ψ , dalla (3.14), ponendo $\mathcal{L} = \mathcal{L}_H$ che porgono come risultato:

$$E_{00} = -3H^2 + \frac{1}{2}c_2 \dot{\Psi}^2, \quad (4.32)$$

$$E_{ii} = a^2 \left(3H^2 + 2\dot{H} + \frac{1}{2}c_2 \dot{\Psi}^2 \right), \quad (4.33)$$

$$E = 12H^2 + 6\dot{H} + c_2 \dot{\Psi}^2, \quad (4.34)$$

$$\Omega_\Psi = a^3 \left(-3c_2 H \dot{\Psi} - c_2 \ddot{\Psi} \right), \quad (4.35)$$

con $H \equiv \dot{a}/a$. L'equazioni del moto quindi, nel caso mimetico, si calcolano dall'equazione (3.35), la componente (00) e (ii) della (3.32) e la (3.33), inserendo i valori dei tensori trovati:

$$b(\Psi) \dot{\Psi}^2 + 1 = 0, \quad (4.36)$$

$$3H^2 = \frac{1}{2} \dot{\Psi}^2 \left[c_2 - 2b(\Psi) \left(12H^2 + 6\dot{H} + c_2 \dot{\Psi}^2 \right) \right], \quad (4.37)$$

$$6H^2 + 4\dot{H} + c_2 \dot{\Psi}^2 = 0, \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} &b(\Psi) \left[-6H \left(6H^2 \dot{\Psi} + 7\dot{\Psi} \dot{H} + 2H \ddot{\Psi} \right) - 6\dot{H} \ddot{\Psi} - 6\ddot{H} \dot{\Psi} \right] - \\ &- 3b(\Psi) c_2 \dot{\Psi}^2 \left(H \dot{\Psi} + \ddot{\Psi} \right) + c_2 \left(3H \dot{\Psi} + \ddot{\Psi} \right) + \\ &+ \frac{db(\Psi)}{d\Psi} \left(\frac{1}{b(\Psi)} + 2\dot{\Psi}^2 \right) \left[-6H^2 - 3\dot{H} - \frac{1}{2}c_2 \dot{\Psi}^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Anzitutto si evidenzia il fatto che le equazioni non sono tutte indipendenti, ma l'equazione (4.37) e la (4.39) sono derivabili dalla (4.36) e dalla (4.38). Equivalentemente, delle tre equazioni (4.29), (4.30) e (4.31) solo due sono indipendenti, infatti la (4.31) risulta derivabile dalle prime due.

Inoltre, come d'altronde ci si aspetta, le due equazioni indipendenti trovate dalla variazione della Lagrangiana, la (4.29) e la (4.30), e le due equazioni indipendenti (4.36) e (4.38) sono esattamente le stesse, ricordando che $H = \dot{a}a^{-1}$.

Si noti poi che la Lagrangiana (4.28) è equivalente all'azione dell'esempio precedente, la (4.15), ponendo $c_2 = 0$ e $b = -1$. Questo si può notare ad esempio dalle equazioni (4.36), (4.38) e (4.39) ponendo sempre $c_2 = 0$ e $b = -1$ e comparandole con le equazioni (4.16), (4.17) e (4.18). Infatti la (4.36) è identica alla (4.16), la (4.38) diventa:

$$6H^2 + 4\dot{H} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a} = 0, \quad (4.40)$$

che risulta identica alla (4.18), ed infine la (4.39), per $b = -1$, ovvero $\Psi = t$ per l'equazione (4.36), e $c_2 = 0$:

$$36H^3\dot{\Psi} + 42H\dot{H}\dot{\Psi} + 6\dot{\Psi}\ddot{\Psi} = H\dot{\Psi}(6H^2 + 4\dot{H}) + \dot{\Psi}(3H\dot{H} + \ddot{H}) = 0, \quad (4.41)$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usata la (4.18) nella prima parentesi e la sua derivata nella seconda parentesi. Quindi tale equazione non è indipendente, in quanto ricavabile dalla (4.36) e dalla (4.38).

Si sostituisce ora $a(t) \propto t^\alpha$, con α costante reale, per vedere se tale funzione di $a(t)$ risolve il sistema delle due equazioni indipendenti ed è quindi soluzione, per una qualche funzione del campo scalare $\Psi(t)$ e per una qualche funzione $b(t)$.

Dalla (4.30) si ricava:

$$c_2 t^{2\alpha} \ddot{\Psi}^2 + 2\alpha^2 t^{2\alpha-2} + 4\alpha(\alpha-1)t^{2\alpha-2} = 0 \longrightarrow c_2 t^2 \dot{\Psi}^2 + 6\alpha^2 - 4\alpha = 0. \quad (4.42)$$

Si trova quindi come soluzione per $\Psi(t)$:

$$\dot{\Psi} = \pm \sqrt{\frac{6\alpha^2 - 4\alpha}{c_2} \frac{1}{t}} \longrightarrow \Psi = \pm \sqrt{\frac{6\alpha^2 - 4\alpha}{c_2}} \log\left(\frac{t}{t_*}\right), \quad (4.43)$$

con t_* costante di integrazione.

Dall'equazione (4.29) si ricava invece la funzione $b(t)$:

$$b = -\frac{1}{\dot{\Psi}^2} \longrightarrow b = -\frac{c_2}{6\alpha^2 - 4\alpha} t^2 = \frac{c_2}{6\alpha^2 - 4\alpha} t_*^2 e^{\pm \sqrt{c_2(6\alpha^2 - 4\alpha)^{-1}} \Psi}, \quad (4.44)$$

ove nell'ultima eguaglianza si è espresso t in funzione di Ψ , invertendo la funzione (4.43). Si pone:

$$\alpha = \frac{2}{3(1+w)}. \quad (4.45)$$

In questo caso si nota come il fattore di scala possa mimare un Universo che obbedisce alla legge dei fluidi perfetti, con equazione di stato (costante) w .

La soluzione per il fattore di scala $a(t)$ al set di equazioni risulta:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}}. \quad (4.46)$$

Si vuole adesso trovare la costante di proporzionalità t_0 in modo da poter tracciare il grafico, con la convenzione usata in cosmologia di porre t_0 l'età dell'Universo, quindi $a(t_0)$ denota il valore del fattore di scala al giorno d'oggi.

La costante è tale per cui al tempo t_0 si ha $a(t_0) = 1$ ovvero $H(t_0) = H_0$:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{2}{3(1+w)} \frac{1}{t} \longrightarrow H(t_0) \equiv H_0 \sqrt{\Omega_w} = \frac{2}{3(1+w)} \frac{1}{t_0}, \quad (4.47)$$

dove Ω_w è la generica densità dipendente dal valore di w , ovvero ad esempio Ω_m se $w = 0$, Ω_Λ se $w = -1$. Si trova quindi:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_w}(1+w)} \longrightarrow a(t) = \left(\frac{3H_0\sqrt{\Omega_w}(1+w)t}{2} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}}. \quad (4.48)$$

Le equazioni di Friedmann (2.12) e (2.14) per un fluido perfetto nel caso di universo omogeneo ed isotropo, possono essere riscritte in funzione del fattore di scala $a(t)$ con i vari parametri di densità. Si indica con Ω_M la densità di materia (dark matter più materia barionica), con Ω_{rad} la densità di radiazione, con Ω_k la densità di curvatura spaziale e con Ω_x , dove la x denota una generica densità, che potrà essere ad esempio di costante cosmologica ($w = -1$), o di dark energy. In generale si trova:

$$\Omega = \frac{8\pi G\rho(t=t_0)}{3H_0^2}. \quad (4.49)$$

E quindi le equazioni di Friedmann diventano:

$$\begin{aligned} H(a) = \frac{\dot{a}}{a} &= H_0 \sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_{rad} a^{-4} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_x a^{-3(1+w)}} = \\ &= H_0 \sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_x a^{-3(1+w)}}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

dove si è utilizzato il fatto che per un Universo spazialmente piatto, con $k = 0$, $\Omega_k = 0$ ed il fatto che da osservazioni sperimentali $\Omega_{rad} \sim 10^{-4}$ che viene approssimato a zero. Nel caso $w = 0$, ovvero un universo matter-dominated:

$$\begin{aligned} H(a) = \frac{\dot{a}}{a} &= \frac{da}{dt} a^{-1} = H_0 \sqrt{\Omega_m a^{-3}} = a^{-\frac{3}{2}} H_0 \sqrt{\Omega_m} \\ \longrightarrow da a^{\frac{1}{2}} &= H_0 \sqrt{\Omega_m} dt \longrightarrow a^{\frac{3}{2}} = a_0 t \longrightarrow a = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3H_0\sqrt{\Omega_m}t}{2} \right)^{\frac{2}{3}}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

dove nell'ultimo passaggio si è trovata la costante di proporzionalità sostituendo la soluzione $a(t)$ trovata nell'equazione $H(a)$.

Le soluzioni trovate per il modello mimetico quindi simulano perfettamente il caso di un universo di fluido perfetto con un'equazione di stato $w = 0$ matter-dominated, seppur la (4.48) risulta più generale in quanto si considera una legge di espansione dipendente anche da w , la costante di equazione di stato per un Universo assimilabile ad un fluido perfetto.

4.3 Secondo esempio: "Mimetic cubic Galileon"

Nel secondo esempio che si va a trattare, si adotta sempre l'azione della teoria di Horndeski (4.20), particolarizzandola al caso cosiddetto della "Mimetic cubic Galileon". Questa

è una teoria effettiva di campo, generalizzazione della teoria di Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) costruite su determinate simmetrie, 3+1 dimensionale immersa in uno spazio di Minkowski 5-dimensionale, con un campo scalare che rappresenta una modifica locale della gravità in una qualche forma della teoria dell stringhe. In particolare il campo scalare è invariante sotto trasformazioni di Galileo:

$$\pi \longrightarrow \pi + b_\mu x^\mu. \quad (4.52)$$

Senza scendere nei particolari della teoria, che esula dai contenuti di questa trattazione, l'azione può essere scritta in termini dell'azione di Horndeski (4.20) con la scelta dei seguenti termini:

$$\begin{aligned} K(X, \Psi) &= c_2 X, & G_3(X, \Psi) &= 2 \frac{c_3}{\tilde{\Lambda}} X, \\ G_4(X, \Psi) &= \frac{1}{2}, & G_5 &= 0, \end{aligned} \quad (4.53)$$

ove c_2 e c_3 sono costanti e $\tilde{\Lambda}$ il fattore di scala di cutoff che d'ora in poi si porrà pari all'unità. L'azione risulta quindi:

$$S_H = \int d^4 \sqrt{-g} \left[c_2 X - 2c_3 X \square \Psi + \frac{1}{2} R + \lambda (b(\Psi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi - 1) \right]. \quad (4.54)$$

In un Universo spazialmente piatto, nella metrica di FLRW per il background risulta:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} c_2 a^3 \dot{\Psi}^2 + c_3 a^3 \dot{\Psi}^2 \ddot{\Psi} + 3(a^2 \ddot{a} + a \dot{a}^2) - a^3 \lambda (b \dot{\Psi}^2 + 1). \quad (4.55)$$

Per le equazioni del moto si calcola la variazione della Lagrangiana:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda} = 0 \longrightarrow b \dot{\Psi}^2 + 1 = 0, \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta a} = 0 &\longrightarrow \frac{3}{2} c_2 a^2 \dot{\Psi}^2 + 3c_3 a^2 \dot{\Psi}^2 \ddot{\Psi} + 6a \ddot{a} + 3\dot{a}^2 - \frac{d}{dt} (6a\dot{a}) + \frac{d^2}{dt^2} (3a^2) = 0 \\ &\longrightarrow c_2 a^2 \dot{\Psi}^2 + 2c_3 a^2 \dot{\Psi}^2 \ddot{\Psi} + 4a \ddot{a} + 2\dot{a}^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi} = 0 &\longrightarrow -a^3 \lambda \frac{db}{d\Psi} \dot{\Psi}^2 - \frac{d}{dt} (c_2 a^3 \dot{\Psi} + 2c_3 a^3 \dot{\Psi} \ddot{\Psi} - 2a^3 \lambda b \dot{\Psi}) + \\ &+ \frac{d^2}{dt^2} (c_3 a^3 \dot{\Psi}^2) = 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Anche in questo caso si potevano calcolare le equazioni del moto a partire dai tensori $E_{\mu\nu}$ ed Ω_Ψ nel caso in cui $T^{\mu\nu} = 0$. Le componenti del tensore $E^{\mu\nu}$ e Ω_Ψ dalle definizioni (3.15) e (3.14), per un Universo omogeneo ed isotropo, risultano:aa

$$E_{00} = -3H^2 + \frac{1}{2} c_2 \dot{\Psi}^2 + 3c_3 \dot{\Psi}^2 \ddot{\Psi}, \quad (4.59)$$

$$E_{ii} = a^2 \left(3H^2 + 2\dot{H} + \frac{1}{2} c_2 \dot{\Psi}^2 + c_3 \dot{\Psi}^2 \ddot{\Psi} \right), \quad (4.60)$$

$$E = 12H^2 + 6\dot{H} + c_2\dot{\Psi}^2, \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \Omega_\Psi = a^3 & \left(-3c_2H\dot{\Psi} - c_2\ddot{\Psi} - 18c_3H\dot{\Psi}\ddot{\Psi} - 4c_3\ddot{\Psi}^2 - 2c_3\dot{\Psi}\ddot{\Psi} \right) + \\ & + a^3 \left(-9c_3H^2\dot{\Psi}^2 - 3c_3\dot{H}\dot{\Psi}^2 - 2c_3\dot{\Psi}\ddot{\Psi} \right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

L'equazioni del moto nel caso mimetico (3.35), la componente (00) e (ii) della (3.32) e la (3.33), coi risultati appena trovati porgono:

$$b(\Psi)\dot{\Psi}^2 + 1 = 0, \quad (4.63)$$

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\Psi}^2 \left[c_2 + 6c_3\ddot{\Psi} + 2b(\Psi) \left(12H^2 + 6\dot{H} + c_2\dot{\Psi}^2 \right) \right], \quad (4.64)$$

$$6H^2 + 4\dot{H} + c_2\dot{\Psi}^2 + 2c_3\dot{\Psi}^2\ddot{\Psi} = 0, \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} b(\Psi) & \left[-6H \left(6H^2\dot{\Psi} + 7\dot{\Psi}\dot{H} + 2H\ddot{\Psi} \right) - 6\dot{H}\ddot{\Psi} - 6\ddot{H}\dot{\Psi} \right] - \\ & - 3b(\Psi)c_2\dot{\Psi}^2 \left(H\dot{\Psi} + \ddot{\Psi} \right) + c_2 \left(3H\dot{\Psi} + \ddot{\Psi} \right) + \\ & + \left(18c_3H\dot{\Psi}\ddot{\Psi} + 4c_3\ddot{\Psi}^2 + 2c_3\dot{\Psi}\ddot{\Psi} + 9c_3H^2\dot{\Psi}^2 + 3c_3\dot{H}\dot{\Psi}^2 + 2c_3\dot{\Psi}\ddot{\Psi} \right) + \\ & + \frac{db(\Psi)}{d\Psi} \left(\frac{1}{b(\Psi)} + 2\dot{\Psi}^2 \right) \left[-6H^2 - 3\dot{H} - \frac{1}{2}c_2\dot{\Psi}^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Delle quattro equazioni solo due sono indipendenti, ovvero prendendo come equazione la (4.63) e la (4.65), le altre due risultano un'identità. In modo analogo solo la (4.56) e la (4.57) sono indipendenti, mentre la (4.58) è ricavabile dalle prime due.

Anche in questo esempio, nel caso in cui $c_2 = c_3 = 0$ e $b = -1$, si ritrovano le equazioni (4.16), (4.17) e (4.18) dell'articolo originale di A. H. Chamseddine e V. Mukhanov.

Si prova a vedere se per la funzione $a(t)$ nella forma:

$$a(t) = a_* [\sinh(\mathcal{C}t)]^{\frac{2}{3}}, \quad (4.67)$$

con $\mathcal{C} = \sqrt{3\Lambda/4}$, si riesce a risolvere il sistema delle due equazioni. Sostituendo tale valore di $a(t)$ nella (4.57) si ricava:

$$\begin{aligned} c_2\dot{\Psi}^2 + 2c_3\dot{\Psi}^2\ddot{\Psi} + \frac{8}{3}\mathcal{C} & = 0 \\ \rightarrow t = \sqrt{\frac{8\mathcal{C}^2}{3c_2}} \frac{2c_3}{c_2} & \left[-\arctan \left(\pm \sqrt{\frac{3c_2}{8\mathcal{C}^2}} \dot{\Psi} \right) \pm \sqrt{\frac{3c_2}{8\mathcal{C}^2}} \dot{\Psi} \right] + k, \end{aligned} \quad (4.68)$$

con k costante di integrazione.

Infine la funzione $b(t)$ può essere ricavata dalla (4.56) e dalla (4.68):

$$t = \sqrt{\frac{8\mathcal{C}^2}{3c_2}} \frac{2c_3}{c_2} \left[-\arctan \left(\pm \sqrt{\frac{3c_2}{8\mathcal{C}^2}} \sqrt{-\frac{1}{b}} \right) \pm \sqrt{\frac{3c_2}{8\mathcal{C}^2}} \sqrt{-\frac{1}{b}} \right] + K, \quad (4.69)$$

con K costante di integrazione.

Il sistema ammette quindi come soluzione $a(t) \propto \sinh(\mathcal{C}t)^{\frac{2}{3}}$, quindi è possibile mimare un Universo di materia oscura con costante cosmologica Λ positiva, anche grazie al fatto di poter usare la funzione $b(t)$ arbitrariamente, obbedendo solo alla (4.56).

Si riporta in grafico (Figura (4.1)) le funzioni $a(t)$, $\dot{\Psi}(t)$ e $b(t)$ in funzione del tempo. Per la costruzione del grafico si pone $c_2 = c_3 = \mathcal{C} = a_* = 1$.

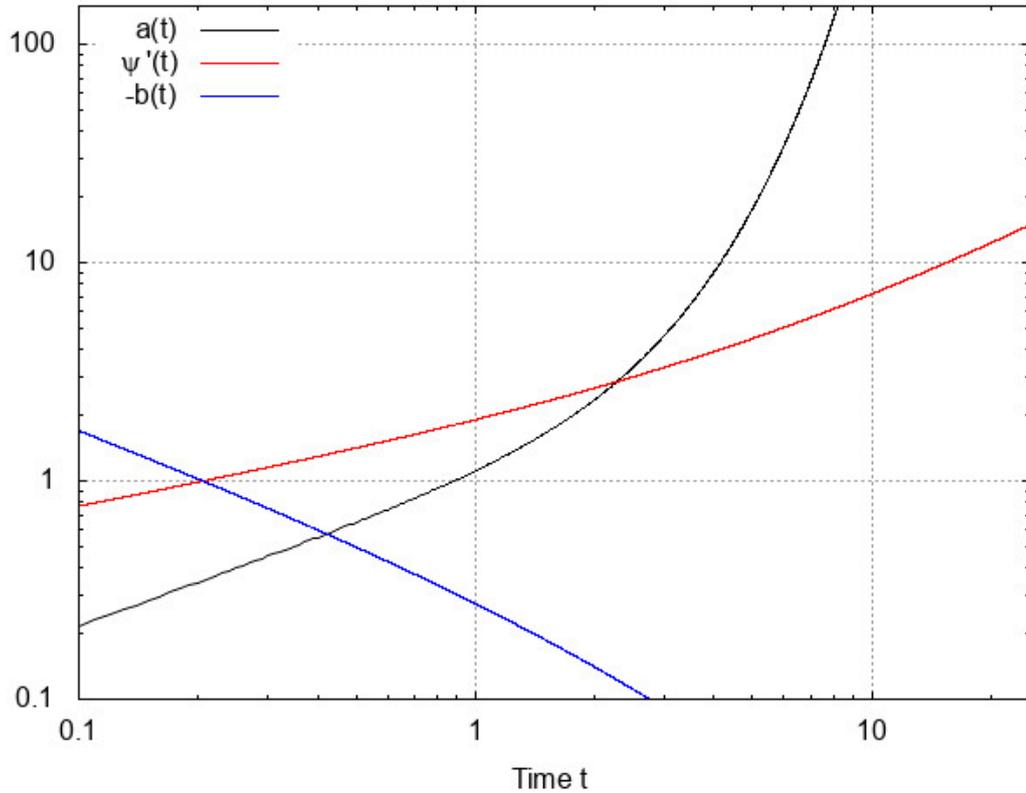


Figura 4.1

Con la scelta di porre le costanti pari ad uno si ha che l'era dominata da materia termina per $t = \mathcal{O}(1)$, per poi venir dominato dalla costante cosmologica. Tale situazione è visibile anche dal grafico, osservando come la funzione $a(t)$ per $t = \mathcal{O}(1)$ cambi la pendenza.

Utilizzando la (4.68) si possono osservare i limiti interessanti: per $\mathcal{C}t \ll 1$ la derivata del campo $\dot{\Psi}(t)$ deve avere un andamento del tipo $\dot{\Psi}(t) \propto t^{\frac{1}{3}}$, mentre per $\mathcal{C}t \gg 1$ si deve avere $\dot{\Psi}(t) \propto t$. In Figura (4.1) effettivamente si può riscontrare tale andamento di $\dot{\Psi}(t)$.

Si riscrive la funzione $a(t)$ nel seguente modo:

$$a(t) = \left(\frac{\sinh(\mathcal{C}t)}{\sinh(\mathcal{C}t_0)} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (4.70)$$

con t_0 il tempo tale che $a(t_0) = 1$ ovvero $H(t) = H_0$. Calcolando $H(t)$ al tempo $t = t_0$:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{2\mathcal{C} \cosh(\mathcal{C}t)}{3 \sinh(\mathcal{C}t)} \longrightarrow H(t_0) \equiv H_0 = \frac{2\mathcal{C} \cosh(\mathcal{C}t_0)}{3 \sinh(\mathcal{C}t_0)}. \quad (4.71)$$

Dalla definizione di Ω_Λ ponendo $c = 1$:

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \longrightarrow \frac{2\mathcal{C}}{3} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3\Lambda}{4}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{9H_0^2 \Omega_\Lambda}{4}} = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}. \quad (4.72)$$

Quindi, con le opportune semplificazioni, e ricordando che $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$, parametri di densità rispettivamente per la costante cosmologica Λ e per la materia:

$$\begin{aligned} \sqrt{\Omega_\Lambda} \cosh(\mathcal{C}t_0) &= \sinh(\mathcal{C}t_0) \longrightarrow \Omega_\Lambda \cosh(\mathcal{C}t_0)^2 = \sinh(\mathcal{C}t_0)^2 \\ &\longrightarrow \Omega_\Lambda \sinh(\mathcal{C}t_0)^2 + \Omega_\Lambda = \sinh(\mathcal{C}t_0)^2 \\ &\longrightarrow \Omega_\Lambda = (1 - \Omega_\Lambda) \sinh(\mathcal{C}t_0)^2 = \Omega_m \sinh(\mathcal{C}t_0)^2 \\ &\longrightarrow \sinh(\mathcal{C}t_0) = \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Quindi il fattore di scala con la costante di proporzionalità trovata risulta:

$$a(t) = \left(\sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}} \sinh(\mathcal{C}t) \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (4.74)$$

D'altra parte se si considera il Λ CDM model, la pressione della componente di dark energy è negativa e per tale componente risulta: $p = -\rho c^2$ ovvero $w = -1$. In tal caso le equazioni di Friedmann (2.12) e (2.14) possono essere riscritte convenientemente come:

$$H(a) = \frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda}, \quad (4.75)$$

che risolto porge la soluzione:

$$\begin{aligned} \frac{da}{aH_0 \sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda}} &= dt \\ \longrightarrow \frac{2}{3H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}} \log \left(\sqrt{\Omega_\Lambda} \sqrt{\Omega_\Lambda a^3 + \Omega_m} + \Omega_\Lambda a^{\frac{3}{2}} \right) &= t \\ \longrightarrow \frac{2}{3H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}} \operatorname{settsinh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} a^{\frac{3}{2}} \right) &= t \\ \longrightarrow a(t) = \left(\sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}} \sinh \left(\frac{3H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}}{2} t \right) \right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Ricordando poi che $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}$ e $\mathcal{C} = \sqrt{\frac{3\Lambda}{4}}$ si ha $\mathcal{C} = \frac{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}}{2}$ e si ottiene esattamente la stessa equazione del caso mimetico.

4.4 Ulteriori considerazioni

Consideriamo infine un terzo esempio, tratto da [9] in cui viene presentata un'azione del modello mimetico:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g(\tilde{g}_{\mu\nu}, \phi)} \left[\frac{1}{2k^2} R(g_{\mu\nu}(\tilde{g}_{\mu\nu}, \phi)) - V(\phi) \right], \quad (4.77)$$

con k^2 costante e $g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi$ trasformazione della metrica, o alternativamente:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2k^2} R(g_{\mu\nu}) - V(\phi) + \lambda (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 1) \right], \quad (4.78)$$

equivalente alla prima usando un campo scalare con il Lagrange multiplier. Il potenziale considerato è della forma:

$$V(\phi) = V_1 e^{m_1^2 \phi^2 - m_2^4 \phi^4} + V_2 e^{-m_3^4 \phi^4}. \quad (4.79)$$

In questo articolo si costruisce il grafico $H(z)$ in funzione del redshift z per il modello derivante dall'azione mimetica (4.77) (o equivalentemente da (4.78)), tracciando simultaneamente l'andamento di $H(z)$ del modello standard Λ CDM e verificando come i due andamenti si discostino l'uno dall'altro, ovvero come la teoria mimetica devia dal modello standard.

Si procede ora a fare analisi simile per i due esempi precedentemente descritti, ovvero usando le azioni (4.27) e (4.54) dei primi due esempi presentati in [1]. Il potenziale di accoppiamento $V(\phi)$ è quindi nullo.

Per il redshift cosmologico nella metrica di FLRW si ha:

$$z(t) = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1 \longrightarrow z(t) = \frac{1}{a(t)} - 1, \quad (4.80)$$

con la convenzione $a(t_0) = 1$.

Per la soluzione del primo esempio (4.46) con $w = 0$ e usando per comodità $H_0 = 1$, si ha:

$$\frac{1}{1+z} = a(t) = \left(\frac{3\sqrt{\Omega_w} t}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \longrightarrow z = \left(\frac{3\sqrt{\Omega_w} t}{2} \right)^{-\frac{2}{3}} - 1 \longrightarrow t = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_w}} (1+z)^{-\frac{3}{2}} \quad (4.81)$$

$$\longrightarrow H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_w}} t^{-1} \longrightarrow H(z) = (1+z)^{\frac{3}{2}}, \quad (4.82)$$

che risulta la stessa dell'equazione (4.51) per $H(a)$, sostituendo $a(t)$ con $a(z)$. Per la soluzione del secondo esempio (4.67) invece:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} = a(t) &= \left(\sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}} \sinh(\mathcal{C}t) \right)^{\frac{2}{3}} \longrightarrow \\ &\longrightarrow (1+z)^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} = \sinh \mathcal{C}t = x, \end{aligned} \quad (4.83)$$

ove si è posto $x = (1+z)^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}}$. Inoltre si ha che

$$\mathcal{C}t = \text{settsinh}(x) = \log \left(x + \sqrt{1+x^2} \right), \quad (4.84)$$

e pertanto

$$\begin{aligned} H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a} &= \frac{2\mathcal{C} \cosh(\mathcal{C}t)}{3 \sinh(\mathcal{C}t)} \longrightarrow \\ &\longrightarrow H(x) = \sqrt{\Omega_\Lambda} \frac{1}{x} \left[\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2(x + \sqrt{1+x^2})} \right], \end{aligned} \quad (4.85)$$

che con le opportune semplificazioni ed esplicitando $x(z)$:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sqrt{\Omega_\Lambda} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{\Omega_\Lambda} \sqrt{1 + (1+z)^{-3} \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}}}{(1+z)^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}}} = \\ &= \sqrt{(1+z)^3 \Omega_m + \Omega_\Lambda}, \end{aligned} \quad (4.86)$$

che come ci si aspettava è uguale all'equazione (4.75) per $H(a)$, sostituendo $a(t)$ con $a(z)$.

In (4.2) si è riportato il fattore di scala $a(t)$ in funzione del tempo, ed $H(z)$ in funzione del redshift cosmologico in Figura (4.3), per entrambi gli esempi. Nei grafici si pone $H_0 = 1$. Si noti come le due funzioni convergano entrambi nello zero, ovvero a tempi iniziali la costante cosmologica è sottodominante. Utilizzando i limiti notevoli infatti:

$$\lim_{\mathcal{C}x \rightarrow 0} \frac{[\sinh(x)]^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = 1. \quad (4.87)$$

4.5 Limiti osservativi dalla misura dell'evento GW170817

La rivelazione dell'onda gravitazionale GW170817 e della controparte elettromagnetica GRB 170817A, raggi gamma di breve durata, nell'agosto 2017 all' "Advanced LIGO and

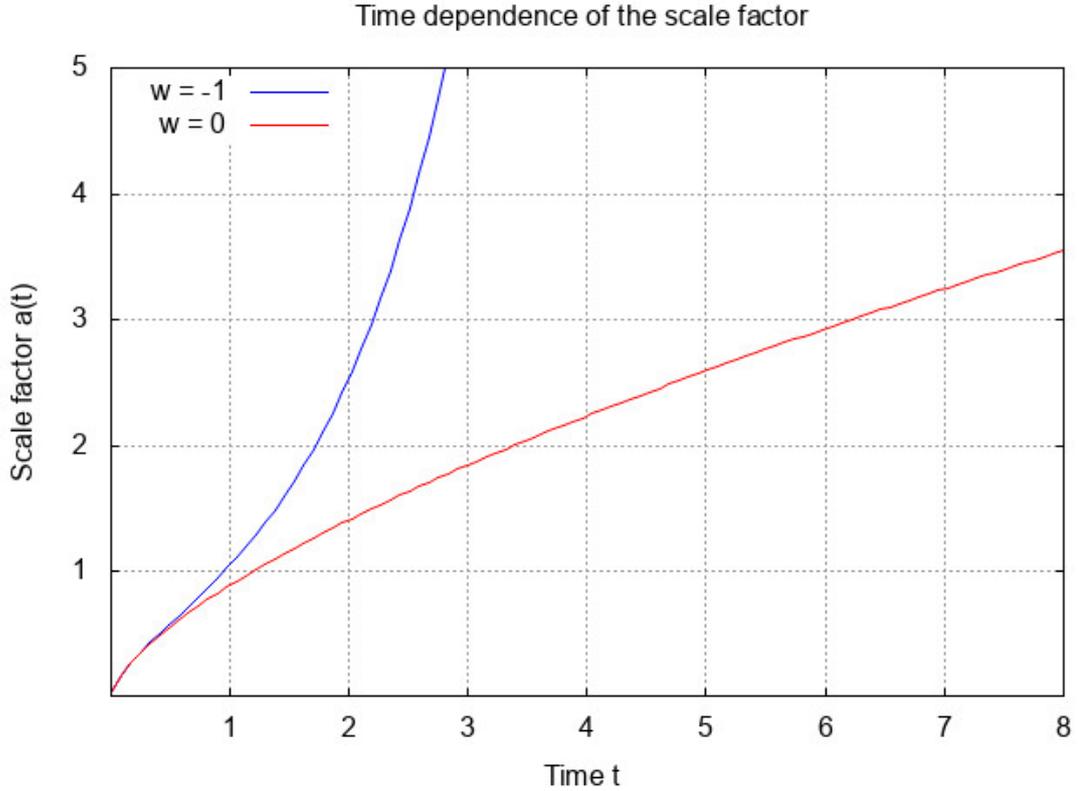


Figura 4.2

Virgo detectors", è avvenuta a seguito della fusione di un sistema binario di stelle di neutroni [5].

Si è riusciti a stabilire che la loro velocità di propagazione c_g coincide con la velocità della luce c a meno di una parte su 10^{-15} . In particolare la rivelazione dell'onda elettromagnetica GRB 170817A associata all'onda gravitazionale è avvenuta con un ritardo di $(1.74 \pm 0.05) s$. Assumendo che l'onda gravitazionale ed elettromagnetica siano state emesse simultaneamente si può attribuire l'intero ritardo ad una diversa velocità tra le onde nella distanza percorsa D , stimata in circa $D = 26 Mpc$, trovando così un limite superiore alla differenza di velocità $\Delta v = v_{GW} - v_{EM}$, con $v_{GW} > v_{EM}$.

Alternativamente, come mostrato in [5], da si può stimare che l'onda elettromagnetica sia stata emessa con un ritardo di $10s$, dovuto a contributi astrofisici del collasso della stella di neutroni supermassiva formatasi durante la fusione il che determina un limite inferiore alla differenza di velocità Δv . Pertanto alla fine si ottengono i limiti: . In tal caso:

$$-3 \cdot 10^{-15} \leq \frac{\Delta v}{v_{EM}} \leq +7 \cdot 10^{-16}. \quad (4.88)$$

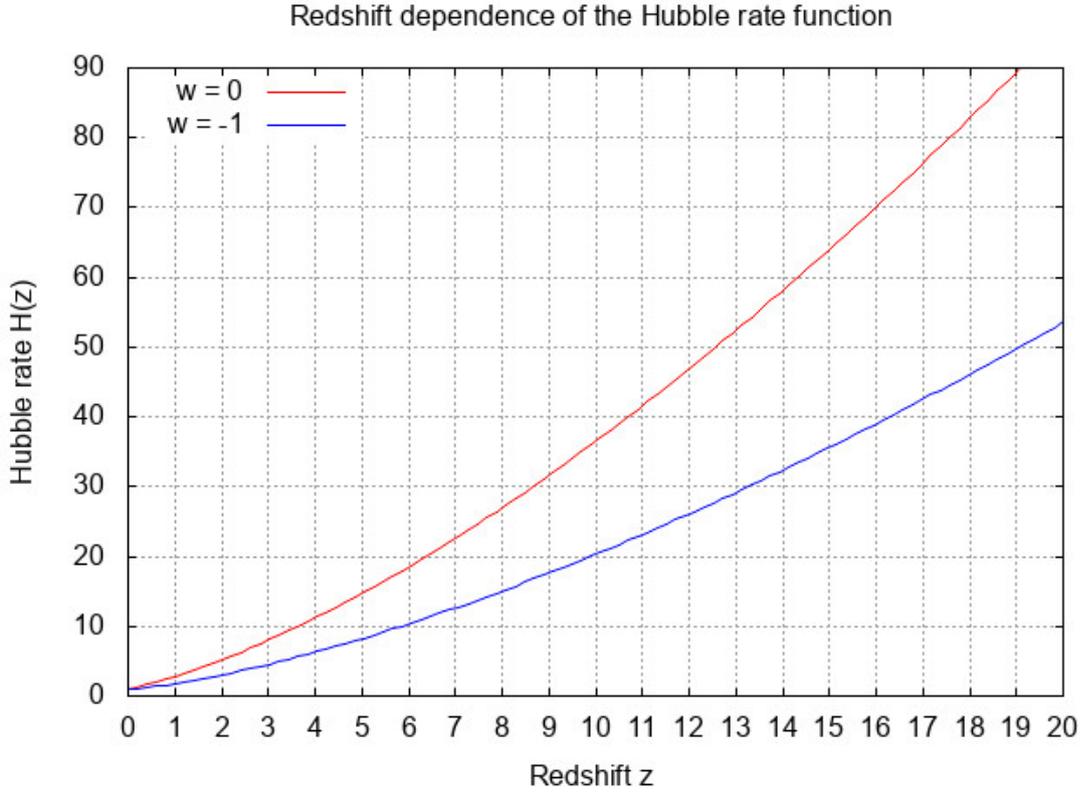


Figura 4.3

Si noti che questi limiti trascurano la dispersione media intergalattica dei raggi gamma. Si può verificare se le onde gravitazionali ed elettromagnetiche siano affette dallo stesso potenziale gravitazionale, ovvero il principio di equivalenza, usando l'effetto Shapiro. Questo effetto prevede che la propagazione delle onde in uno spazio curvo, ovvero in un campo gravitazionale, avvenga in un tempo maggiore che in uno spazio piatto. La formulazione di Shapiro prevede un ritardo:

$$\delta t_S = -\frac{1 + \gamma}{c^3} \int_{r_e}^{r_o} U(r(l)) dl, \quad (4.89)$$

con r_e ed r_o rispettivamente posizione di emissione ed osservazione, $U(r)$ potenziale gravitazionale e γ che rappresenta la deviazione dalla teoria della relatività generale. In quest'ultima infatti $\gamma_{GW} = \gamma_{EM} = 1$.

Considerando solo l'effetto della Via Lattea, su una sfera di raggio pari a 100 kpc, con un potenziale classico di Keplero e massa di $2.5 \cdot 10^{11} M_\odot$, usando come differenza delle velocità i limiti inferiori in (4.88), si trova:

$$-2.6 \cdot 10^{-7} \leq \gamma_{GW} - \gamma_{EM} \leq +1.2 \cdot 10^{-6}. \quad (4.90)$$

Fino ad ora la stima migliore di γ_{EM} era data dalla misura dell'effetto Shapiro tramite la sonda Cassini, ed era stato trovato

$$\gamma_{EM} - 1 \leq (2.1 \pm 2.3) \cdot 10^{-5}. \quad (4.91)$$

Le informazioni ricavate dalla rivelazione dell'onda gravitazionale GW170817 e dell'onda elettromagnetica GRB 170817A risultano essenziali per le teorie di materia oscura o gravità modificata, in quanto molte di queste prevedevano una velocità delle onde gravitazionali diversa da c .

In particolare hanno determinato dei limiti molto stringenti e anche l'esclusione di molti modelli di gravità modificata proposti fino ad ora per spiegare l'attuale espansione accelerata dell'Universo. Nella prossima sezione ci si concentrerà su un esempio particolarmente rilevante a cui poi si applicherà il formalismo delle teorie mimetiche visto nelle sezioni precedenti.

4.6 Teorie DHOST e limiti da GW170817

Si considerano le DHOST theories (Degenerate Higher Order Scalar Tensor theories) ([2], [3], [4]). Queste sono teorie la cui azione è funzione della metrica $g_{\mu\nu}$ e del campo scalare Ψ e che dipende non solo da Ψ e dal suo gradiente $\nabla_\mu \Psi$, ma anche dalle derivate seconde $\nabla_\mu \nabla_\nu \Psi$. A differenza della teoria di Horndeski (4.20), le teorie DHOST sono più generali e considerano la cosiddetta "degenerazione" della Lagrangiana.

Si prenda ad esempio una lagrangiana \mathcal{L} di un punto in movimento nello spazio:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}a\ddot{\Psi}^2 + b\ddot{\Psi}\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{\Psi}^2 + \frac{1}{2}c\dot{q}^2 - V(\Psi, q) = \\ &= \frac{1}{2}a\dot{Q}^2 + b\dot{Q}\dot{q} + \frac{1}{2}c\dot{q}^2 + \frac{1}{2}Q^2 - V(\Psi, q) - \xi(Q - \dot{\Psi}), \end{aligned} \quad (4.92)$$

con a , b e c costanti, $V(\Psi, q)$ un qualche potenziale ed avendo definito $Q = \dot{\Psi}$, per avere una Lagrangiana solo con le "velocità" e senza accelerazioni, ovvero serivate seconde delle variabili. Le variabili q sono le "classiche" variabili spaziali, mentre le variabili Ψ sono sempre variabili spaziali ma che ammettono derivate di ordine secondo o superiore, che nel caso classico porterebbero a delle instabilità. Nella Lagrangiana non compare "l'accelerazione" di q ma solo della variabile Q . Per identificare quanti siano i gradi di libertà indipendenti, o equivalentemente il numero di condizioni iniziali necessarie per identificare univocamente il sistema, si calcola il determinante della matrice Hessiana:

$$\det(\mathcal{H}) = \det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v^a \partial v^b}\right) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = ac - b^2, \quad (4.93)$$

dove $v^a \equiv (\dot{Q}, \dot{q})$. Nel caso generale di \mathcal{H} invertibile, $\det(\mathcal{H}) \neq 0$, si trovano sei condizioni iniziali, ovvero tre gradi di libertà uno associato alla variabile q e gli altri due al campo scalare Ψ ed in tal caso si avranno instabilità.

Nel caso invece in cui \mathcal{H} non sia invertibile, $\det(\mathcal{H}) = 0$, sono necessarie solo quattro condizioni iniziali e quindi due soli gradi di libertà, uno associato alla q ed uno al campo Ψ , mentre il terzo grado di libertà viene eliminato dalla degenerazione. Si dice quindi che, in tale situazione, la Lagrangiana (4.92) è degenere. Si elimina quindi il grado di libertà aggiunti

Si prenda in esame l'azione generale delle teorie DHOST:

$$S^{DHOST} = \int d^4x \sqrt{-g} [F(\Psi, X) R + P(\Psi, X) + Q(\Psi, X) \square\Psi] + \int d^4x \sqrt{-g} \left[\sum_{I=1}^5 A_I(\Psi, X) L_I \right], \quad (4.94)$$

con:

$$L_1 = \nabla_\mu \nabla_\nu \Psi \nabla^\mu \nabla^\nu \Psi, \quad (4.95)$$

$$L_2 = (\square\Psi)^2, \quad (4.96)$$

$$L_3 = (\square\Psi) \nabla^\mu \Psi \nabla_\mu \nabla_\nu \Psi, \nabla^\nu \Psi \quad (4.97)$$

$$L_4 = \nabla^\mu \Psi \nabla_\mu \nabla_\rho \Psi \nabla^\rho \nabla^\nu \Psi \nabla_\nu \Psi, \quad (4.98)$$

$$L_5 = (\nabla^\mu \Psi \nabla_\mu \nabla_\nu \Psi \nabla^\nu \Psi)^2, \quad (4.99)$$

ed A_I funzione di ϕ ed $X = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi$, con ∇ l'operatore gradiente.

Come mostrato in [2] imporre la condizione, restrittiva, di avere la velocità delle onde gravitazionali c_g uguale alla velocità della luce, porta ad imporre le seguenti condizioni:

$$A_1 = A_2 = 0, \quad (4.100)$$

$$A_4 = \frac{1}{8F} [48F_X^2 - 8(F - XF_X) A_3 - X^2, A_3^2] \quad (4.101)$$

$$A_5 = \frac{1}{2F} (4F_X + X A_3) A_3. \quad (4.102)$$

Si noti che, seppur la velocità delle onde gravitazionali c_g sia pari a c a meno di una parte in 10^{-15} , quindi con una certa incertezza, si assumerà ora che sia esattamente pari a c , trascurando la piccola eventuale differenza.

La Lagrangiana DHOST diviene dunque:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{c_g=1}^{DHOST} &= P + Q \square\Psi + FR + A_3 \nabla^\mu \Psi \nabla^\nu \Psi \nabla_\mu \nabla_\nu \Psi \square\Psi + \\ &+ \frac{1}{8F} [48F_X^2 - 8FA_3] \nabla^\mu \Psi \nabla_\mu \nabla_\nu \Psi \nabla_\lambda \Psi \nabla^\lambda \nabla^\nu \Psi + \\ &+ \frac{1}{8F} [8XF_X A_3 - X^2 A_3^2] \nabla^\mu \Psi \nabla_\mu \nabla_\nu \Psi \nabla_\lambda \Psi \nabla^\lambda \nabla^\nu \Psi + \\ &+ \frac{1}{2F} (4F_X + X A_3) A_3 (\nabla_\mu \Psi \nabla^\mu \nabla^\nu \Psi \nabla_\nu \Psi)^2. \end{aligned} \quad (4.103)$$

4.7 Versione mimetica dei modelli DHOST

Si consideri ora per semplicità il caso particolare con $A_3 = 0$, $P = c_1 X$, $Q = 0$ e $F = c_2 X$, con c_1, c_2 costanti di proporzionalità. Si vuole adesso implementare la sua versione mimetica e capire se questi modelli possono mimare ancora un background Λ CDM. Alla Lagrangiana dunque si aggiunge il termine \mathcal{L}_λ del Lagrange multiplier, termine mimetico. In tal caso la Lagrangiana e l'azione diventano rispettivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{c_g=1}^{DHOST} &= c_1 X + c_2 X R + 6 \frac{c_2}{X} \Psi^\mu \Psi_{\mu\nu} \Psi_\lambda \Psi^{\lambda\nu} + \\ &+ \lambda (b(\Psi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi - 1), \end{aligned} \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned} S_{c_g=1}^{DHOST} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[c_1 X + c_2 X R + 6 \frac{c_2}{X} \Psi^\mu \Psi_{\mu\nu} \Psi_\lambda \Psi^{\lambda\nu} \right] + \\ &+ \int d^4x \sqrt{-g} [\lambda (b(\Psi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi - 1)], \end{aligned} \quad (4.105)$$

con

$$X = -\frac{1}{2} \nabla_\mu \Psi \nabla^\mu \Psi, \quad (4.106)$$

e $\Psi_\mu = \nabla_\mu \Psi$, $\Psi_{\mu\nu} = \nabla_\mu \nabla_\nu \Psi$.

Il campo Ψ è un campo scalare, quindi $\nabla_\nu = \partial_\nu$. Inoltre in un universo omogeneo ed isotropo $\partial_x \Psi = \partial_y \Psi = \partial_z \Psi = 0$. L'azione quindi, nella metrica di FLRW, diviene:

$$\begin{aligned} S_{c_g=1}^{DHOST} &= U \int dt a^3 \left[\frac{1}{2} c_1 \dot{\Psi}^2 + 3c_2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \dot{\Psi}^2 - 12c_2 \ddot{\Psi}^2 - \lambda (b\dot{\Psi}^2 + 1) \right] = \\ &= U \int dt a^3 (\mathcal{L} + \mathcal{L}_\lambda), \end{aligned} \quad (4.107)$$

ove si è indicato con $U = \int d^3x$, e da ora si porrà $U = 1$.

Si calcolano le equazioni nel moto dalla variazione dell'azione:

$$\frac{\delta S}{\delta \lambda} = 0 \longrightarrow b(\Psi) \dot{\Psi}^2 + 1 = 0, \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta a} = 0 &\longrightarrow \frac{3}{2} c_1 a^2 \dot{\Psi}^2 + 3c_2 \dot{a}^2 \dot{\Psi}^2 + 6c_2 a \ddot{a} \dot{\Psi}^2 - 30c_2 a^2 \ddot{\Psi}^2 + 12c_2 a \dot{a} \dot{\Psi} \ddot{\Psi} + \\ &+ 6c_2 a^2 \dot{\Psi} \ddot{\Psi} = 0, \end{aligned} \quad (4.109)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \Psi} = 0 &\longrightarrow -a^3 \lambda \frac{db}{d\Psi} \dot{\Psi}^2 - \frac{d}{dt} \left(c_1 a^3 \dot{\Psi} + 6c_2 a \dot{a} \dot{\Psi} + 6c_2 a^2 \ddot{a} \dot{\Psi} - 2\lambda a^3 b \dot{\Psi} \right) + \\ &+ \frac{d^2}{dt^2} \left(-24c_2 a^3 \ddot{\Psi} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Sia ora la funzione $a(t)$ della forma:

$$a(t) = a_* (\sinh(\mathcal{C}t))^{\frac{2}{3}}, \quad (4.111)$$

con $\mathcal{C} = \sqrt{3\Lambda/4}$. Sostituendo tale funzione di $a(t)$ nell'equazione (4.109) si trova:

$$\left(\frac{3c_1}{2c_2} + 4\mathcal{C}^2\right) \dot{\Psi}^2 - 30\ddot{\Psi}^2 + 8\mathcal{C} \frac{\cosh(\mathcal{C}t)}{\sinh(\mathcal{C}t)} \dot{\Psi}\ddot{\Psi} + 6\dot{\Psi}\ddot{\Psi} = 0. \quad (4.112)$$

Una soluzione analitica esatta non è facile da ricavare. Tuttavia in un caso particolare la si può calcolare esattamente. Nel caso in cui il coefficiente di $\dot{\Psi}^2$ sia nullo, ovvero se

$$\left(\frac{3c_1}{2c_2} + 4\mathcal{C}^2\right) = 0 \longrightarrow c_1 = -\frac{8}{3}c_2\mathcal{C}^2, \quad (4.113)$$

l'equazione (4.112) si semplifica:

$$-5\ddot{\Psi}^2 + \frac{4}{3}\mathcal{C} \frac{\cosh(\mathcal{C}t)}{\sinh(\mathcal{C}t)} \dot{\Psi}\ddot{\Psi} + \dot{\Psi}\ddot{\Psi} = 0. \quad (4.114)$$

Procedendo quindi con ulteriori semplificazioni ed integrazioni successive si trova:

$$\begin{aligned} -5\frac{\ddot{\Psi}}{\dot{\Psi}} + \frac{4}{3}\mathcal{C} \frac{\cosh(\mathcal{C}t)}{\sinh(\mathcal{C}t)} + \frac{\ddot{\Psi}}{\dot{\Psi}} = 0 &\longrightarrow \log\left(\dot{\Psi}^{-5}\ddot{\Psi}\right) + \frac{4}{3}\log(\sinh(\mathcal{C}t)) = 0 \\ &\longrightarrow \sinh(\mathcal{C}t)^{\frac{4}{3}} = \dot{\Psi}^5\ddot{\Psi}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Si trova in definitiva, con l'ausilio di un calcolatore:

$$\dot{\Psi}(t) = \frac{-\mathcal{C}^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2} \left[k_1\mathcal{C} + \frac{\cosh(\mathcal{C}t)}{\sinh(\mathcal{C}t)^{\frac{1}{3}}} \left[3 - 2(-\sinh(\mathcal{C}t))^{\frac{1}{6}} {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \cosh(\mathcal{C}t)^2\right) \right] \right]^{\frac{1}{4}}}, \quad (4.116)$$

ove si è usata la funzione ${}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; (\cosh(\mathcal{C}t))^2\right)$, la serie ipergeometrica, definita come:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}. \quad (4.117)$$

Alternativamente, non riuscendo a trovare una soluzione esatta per $\dot{\Psi}(t)$, manipolando opportunamente l'equazione (4.112), si può trovare una soluzione approssimata per $\dot{\Psi}/\ddot{\Psi}$, usando il metodo di Eulero, ovvero approssimando la funzione al primo ordine, ad intervalli successivi, e trovandone il valore in tale punto. Si definisce:

$$g(t) = \dot{\Psi}, \quad (4.118)$$

e quindi l'equazione (4.112) diventa:

$$\left(\frac{3c_1}{2c_2} + 4\mathcal{C}^2\right) g^2 - 30\dot{g}^2 + 8\mathcal{C} \frac{\cosh(\mathcal{C}t)}{\sinh(\mathcal{C}t)} g\dot{g} + 6g\ddot{g} = 0. \quad (4.119)$$

Si definisce nuovamente

$$f(t) = \frac{g(t)}{\dot{g}(t)} = \frac{\dot{\Psi}}{\ddot{\Psi}}, \quad (4.120)$$

e l'equazione si riscrive come:

$$\dot{f} = \left(\frac{c_1}{4c_2} + \frac{2}{3}c^2 \right) f^2 - 4 + \frac{4}{3}c \frac{\cosh(ct)}{\sinh(ct)} f = f(t, f(t)). \quad (4.121)$$

L'approssimazione viene sviluppata tramite programmi appositi. Il procedimento è il seguente: partendo da un qualche istante di tempo t_0 , il valore di $f(t+t_0)$ può essere approssimato dal valore di $f(t_0)$ più il passo temporale moltiplicato per la pendenza della funzione, ovvero la derivata prima della funzione, $\dot{f}(t_0)$. In sostanza si tratta di un'espansione di Taylor al primo ordine.

Si riporta quindi in grafico (si veda Fig. (4.4)) la funzione $a(t)$ e la funzione $f(t) = \dot{\Psi}/\ddot{\Psi}$ appena calcolata in funzione del tempo. Si pone a fini illustrativi $c_1 = c_2 = a_* = c = 1$.

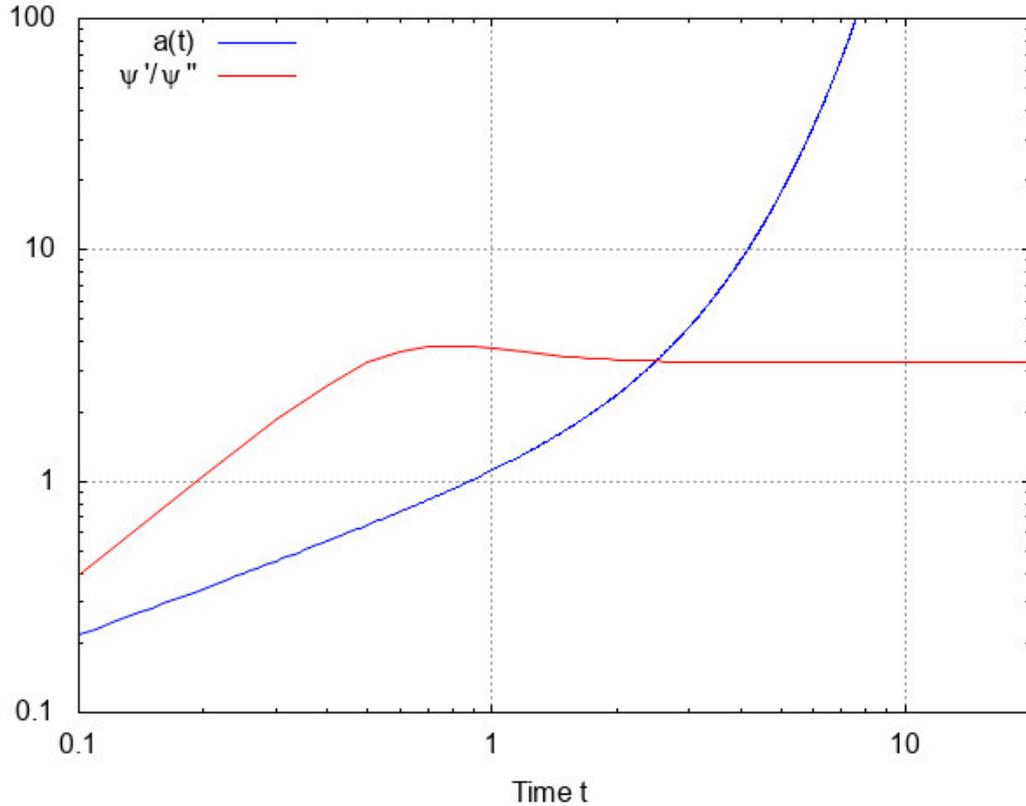


Figura 4.4

Con la scelta di porre le costanti pari ad uno, il periodo dominato da materia termina per $t = \mathcal{O}(1)$, per poi essere dominato dalla costante cosmologica. Dal grafico si può notare come ci sia un cambiamento nella pendenza della funzione $a(t)$.

Si nota dal grafico come per $\mathcal{C}t \ll 1$ la funzione $f(t) = \dot{\Psi}/\ddot{\Psi} \propto t^\alpha$. In particolare, osservando anche i dati ricavati dal calcolatore, si ha che $\alpha \neq 1$. Quindi il campo Ψ è tale che $\dot{\Psi} \propto e^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$. La funzione $b(t)$ quindi diventa $b(t) = \dot{\Psi}^{-2} \propto e^{-2\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$.

Si nota poi come per $\mathcal{C}t \gg 1$ la funzione $f(t)$ è costante, ovvero il campo Ψ è tale che $\dot{\Psi} = e^{kt}$, con k costante. La funzione $b(t)$ invece diventa $b(t) \propto e^{-2kt}$.

Infine la funzione $b(t)$ è completamente determinata usando l'equazione (4.108) una volta determinata una funzione esplicita per il campo $\dot{\Psi}(t)$.

Capitolo 5

Gravità massiva mimetica ghost free

5.1 Meccanismo di Higgs

Le equazioni standard della teoria unificata elettrodebole descrive correttamente le interazioni, tramite particelle, W , Z e fotoni, che nella teoria risultano prive di massa. Mentre ciò è vero per il fotone, le altre due particelle sono massive, circa 100 volte la massa del protone. I teorici R. Brout, F. Englert e P. Higgs proposero l'introduzione di un campo, il campo di Higgs, che pervade l'Universo e che conferisce massa alle particelle tanto più esse interagiscono con il campo.

Riguardo il gravitone, questa è una ipotetica particella elementare responsabile dell'interazione elettromagnetica, teorizzata in diversi modelli nell'ambito della gravità quantistica. In particolare si prevede siano di massa nulla e viaggianti alla velocità della luce, analogo ai fotoni per l'interazione elettromagnetica.

La possibilità che i gravitoni non siano di massa nulla potrebbe portare all'interpretazione dei componenti "oscuri" dell'Universo, quali l'energia e materia oscura.

Si considerano gli articoli di Ali H. Chamseddine e Viatcheslav Mukhanov, "Higgs for Graviton: Simple and Elegant Solution", "Mimetic Massive Gravity: Beyond Linear Approximation" e "Ghost Free Mimetic Massive Gravity". Si consideri il campo scalare ϕ^A , con $A = 0, 1, 2, 3$ Lorentz invariante. Si assume la metrica $\eta_{\mu\nu} = (-, +, +, +)$ e si costruisce il tensore simmetrico in AB :

$$H^{AB} = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^A \partial_\nu \phi^B, \quad (5.1)$$

che può chiaramente essere decomposto in:

$$H_B^A = \tilde{H}_B^A + \frac{1}{4} \delta_B^A H, \quad (5.2)$$

con $H = H_A^A$ e $\tilde{H}_A^A = 0$, rispettivamente traccia e tensore a traccia nulla di H_B^A . Si adotta l'azione Lorentz invariante, ponendo $8\pi G = 1$:

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ R - m^2 \left[3 \left(\left(\frac{1}{4} H \right)^2 - 1 \right)^2 - \tilde{H}_B^A \tilde{H}_A^B \right] \right\}. \quad (5.3)$$

Le equazioni del moto, dalla variazione dell'azione rispetto alla metrica $g_{\mu\nu}$ ed a ϕ^A , ammettono le soluzioni di Minkowski nel vuoto:

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \longrightarrow \langle g_{\mu\nu} \rangle = \eta_{\mu\nu}, \quad (5.4)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \phi^A} = 0 \longrightarrow \phi^A = x^A. \quad (5.5)$$

Si identificherà la metrica globale di Minkowski η_{AB} con la metrica dello spazio-tempo $\eta_{\mu\nu}$.

Per piccole perturbazioni per il background nel vuoto:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}, \quad \phi^A = x^A + \chi^A. \quad (5.6)$$

Si introduce:

$$\begin{aligned} \bar{h}^{AB} &= H^{AB} - \eta^{AB} = h^{AB} + \partial^A \chi^B + \partial^B \chi^A + \\ &+ h^{AC} \partial_C \chi^B + h^{BC} \partial_C \chi^A + h^{CD} \partial_C \chi^A \partial_D \chi^B, \end{aligned} \quad (5.7)$$

con $h^{AB} = h^{\mu\nu} \delta_\mu^A \delta_\nu^B$ e $\partial^A = \delta_\mu^A \eta^{\mu\nu} \partial_\nu$, e l'azione (5.3) risulta:

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ R - m^2 \left[(\bar{h}^2 - \bar{h}_B^A \bar{h}_A^B) + \frac{3}{4^2} \bar{h}^3 + \frac{3}{4^4} \bar{h}^4 \right] \right\}. \quad (5.8)$$

Il tensore h_B^A per piccole perturbazioni dalla (5.6), ed approssimando al primo ordine considerando che $|h^{\mu\nu}| \ll 1$ e $|\phi^A| \ll 1$:

$$\bar{h}_B^A = h_B^A + \partial_B \chi^A + \partial^A \chi_B, \quad (5.9)$$

ed sprimendo quindi l'azione in termini di \bar{h}_B^A , approssimando a termini al secondo ordine:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \int d^4x \left[\partial^C \bar{h}_B^A \partial_C \bar{h}_A^B - 2 \partial^C \bar{h}_C^A \partial_D \bar{h}_A^D + 2 \partial^C \bar{h}_C^A \partial_A \bar{h} \right] - \\ &- \frac{1}{2} \int d^4x \left[-\partial_A \bar{h} \partial^A \bar{h} - m^2 (\bar{h}_B^A \bar{h}_A^B - \bar{h}^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Si procede quindi a studiare tale azione. Dei quattro gradi di libertà del campo scalare ϕ^A ne saranno necessari solo tre per descrivere i gradi di libertà del gravitone. Un grado di libertà sarà quindi superfluo e χ^0 viene eliminato dalla perturbazione del background (5.6). Infatti nel limite di costante gravitazionale nulla:

$$g^{\mu\nu} \longrightarrow \eta^{\mu\nu}, \quad h^{\mu\nu} \longrightarrow 0, \quad (5.11)$$

l'azione:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x (\bar{h}^2 - \bar{h}_B^A \bar{h}_A^B) = \int d^4x \left[(\partial_A \chi^A)^2 - (\partial_A \chi^B) (\partial^A \chi_B) \right], \quad (5.12)$$

risulta nella stessa forma dell'azione di Maxwell per il 4-potenziale χ^A , la cui Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\mu_0} (\partial_\mu \chi_\nu \partial^\mu \chi^\nu - \partial_\nu \chi_\mu \partial^\mu \chi^\nu), \quad (5.13)$$

con quattro gradi di libertà a cui ne va sottratto uno imposto dalla condizione di Gauge adottata.

Dalla (5.3), ricordando che $\tilde{H}_B^A = 0$ se $A = B$, si pone \mathcal{L} pari a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left[-\frac{1}{2}R \right] + \frac{m^2}{2} \left[3 \left(\frac{1}{16}H^2 - 1 \right)^2 - \tilde{H}_B^A \tilde{H}_A^B \right] = \\ &= \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{mass}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

con

$$\mathcal{L}_{mass} = \frac{m^2}{2} \left[3 \left(\frac{1}{16}H^2 - 1 \right)^2 - \tilde{H}_B^A \tilde{H}_A^B \right]. \quad (5.15)$$

Si calcola quindi il tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$ dalla definizione (3.16) ed in seguito la traccia:

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{mass}) &= \frac{m^2}{2} \left[\left(-\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu} \right) 3 \left(\frac{1}{16}H^2 - 1 \right)^2 \delta g^{\mu\nu} \right] + \\ &+ \frac{m^2}{2} \left[3\sqrt{-g}\delta \left(\frac{H^2}{16} - 1 \right)^2 \right] = \\ &= \frac{m^2}{2}\sqrt{-g} \left[\left(-\frac{3}{512}H^4 + \frac{3}{16}H^2 - \frac{3}{2} \right) g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} + \\ &+ \frac{m^2}{2}\sqrt{-g} \left[\left(\frac{3}{64}H^3 - \frac{3}{4}H \right) \partial_\mu \phi^A \partial_\nu \phi_A \right] \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{mass})}{\delta g^{\mu\nu}} \longrightarrow T_\mu^\mu = \frac{m^2}{2} \left(\frac{3}{128}H^4 - 6 \right). \quad (5.17)$$

Risulta chiaro come ora l'energia abbia un limite inferiore.

Se si annulla il campo scalare del background, $H_B^A = 0$, i gravitoni non sono più associati al campo scalare e quindi non sono più massivi. Dalla (5.17) con $H^{AB} = 0$ si possono riscrivere le equazioni di Einstein, trovando:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{3}{2}m^2 g_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (5.18)$$

ovvero una costante cosmologica negativa. Per comprenderne meglio il significato si consideri un'altra azione, con α e β costanti da definire. L'azione (5.3), considerando solo la parte massiva, diventa ora:

$$S_m = \frac{m^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(\frac{1}{16} H^2 - 1 \right)^2 \left(\alpha \frac{1}{16} H^2 - \beta \right) - \tilde{H}_B^A \tilde{H}_A^B \right]. \quad (5.19)$$

Se le costanti α e β sono tali che $\alpha - \beta = 3$, tale azione L'azione (5.19) riposrta all'azione di Fierz-Pauli.

Considerando infatti la Lagrangiana massiva proposta da Fierz-Pauli:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kin} + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{mass}, \quad (5.20)$$

con \mathcal{L}_{kin} la Lagrangiana standard del termine cinetico che in termini di $\bar{h}^{\mu\nu}$ diviene:

$$\mathcal{L}_{kin} = \frac{1}{2} \left(-\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} \partial_\nu \bar{h} + \partial_\mu \bar{h}^{\mu\sigma} \partial_\nu \bar{h}_\sigma^\nu - \frac{1}{2} \partial_\sigma \bar{h}^{\mu\nu} \partial^\sigma \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \bar{h} \partial^\mu \bar{h} \right), \quad (5.21)$$

ovvero la Lagrangiana di Einstein-Hilbert linearizzata, con \mathcal{L}_m la Lagrangiana associata alla materia:

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} \bar{h}_{\mu\nu} T^{\mu\nu}, \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (5.22)$$

e con la Lagrangiana più generale possibile associata al termine massivo, \mathcal{L}_{mass} :

$$\mathcal{L}_{mass} = -\frac{1}{4} (a \bar{h}_{\mu\nu} \bar{h}^{\mu\nu} + b \bar{h}^2), \quad (5.23)$$

con a e b costanti dalle dimensioni di una massa al quadrato.

Le equazioni del moto per una tale teoria (5.20), posto $8\pi G = 1$:

$$2T_{\mu\nu} = -\partial_\mu \partial_\nu \bar{h} - \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} + \partial_\mu \partial^\sigma \bar{h}_{\sigma\nu} + \partial_\nu \partial^\sigma \bar{h}_{\sigma\mu} - \square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \square \bar{h} + a \bar{h}_{\mu\nu} + b h \eta_{\mu\nu}, \quad (5.24)$$

con la condizione aggiuntiva:

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \longrightarrow a \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} + b \partial_\nu \bar{h} = 0 \quad (5.25)$$

Prendendo la traccia dell'equazione del moto (5.24) con il constraint (5.25) si trova:

$$\left[2 \left(1 + \frac{b}{a} \right) \square + a \left(1 + 4 \frac{b}{a} \right) \right] \bar{h} = 2T, \quad (5.26)$$

che, assumendo per un attimo che $a \neq -b$, e definendo:

$$m^2 = \frac{a(a+4b)}{2(a+b)}, \quad (5.27)$$

porge la seguente equazione:

$$(\square - m^2) \bar{h} = \frac{a}{a+b} T, \quad (5.28)$$

che descrive il campo scalare massivo di spin 2 ed $\bar{h}_{\mu\nu}$ come mediatore dell'interazione gravitazionale, il gravitone, con massa m . Nel 1939 M. Fierz e W. Pauli mostrarono in "On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field" che solo con la scelta $a = -b$ si ritrovano i cinque gradi di liberta della polarizzazione del gravitone massivo di spin 2. Ogni altra scelta porta ad un sesto grado di liberta di tipo ghost ovvero una configurazione con il segno sbagliato del termine cinetico nella Lagrangiana quindi un sistema instabile.

Con la scelta $a = -b$ quindi la (5.26):

$$\bar{h} = -\frac{2}{3a}T. \quad (5.29)$$

Risulta quindi ora ovvio come la scelta di $\alpha - \beta = 3$ sia l'unica tale per cui l'azione (5.19) sia nella stessa forma dell'azione di Fierz Pauli (5.20): infatti sviluppando i termini nella parentesi quadra separatamente, H^2 e $\tilde{H}_B^A \tilde{H}_A^B$ nella (5.19), si trova per il termine in H^2 :

$$\left(\frac{H}{16} - 1\right)^2 \left(\alpha \frac{H}{16} - \beta\right) = \alpha \frac{H^6}{4096} - \beta \frac{H^4}{256} - \alpha \frac{H^4}{128} + \alpha \frac{H^2}{16} + \beta \frac{H^2}{8}, \quad (5.30)$$

mentre per il termine in $\tilde{H}_B^A \tilde{H}_A^B$:

$$\tilde{H}_B^A \tilde{H}_A^B = \left(H_B^A - \frac{1}{4}\delta_B^A H\right) \left(H_A^B - \frac{1}{4}\delta_A^B H\right) = H_B^A H_A^B - \frac{1}{4}H^2. \quad (5.31)$$

Ricordando ora che:

$$\bar{h}^{AB} = H^{AB} - n^{AB} \longrightarrow H = \bar{h} + 4, \quad (5.32)$$

e considerando solo i termini quadratici in \bar{h} ed in \bar{h}_B^A , come compaiono nella Lagrangiana associata al termine massivo di Fierz-Pauli (5.23), la (5.30) e la (5.31) diventano rispettivamente:

$$\begin{aligned} (5.30) &\longrightarrow \frac{\alpha}{4096} 3840 \bar{h}^2 - \frac{\beta}{256} 96 \bar{h}^2 + \frac{\alpha}{16} \bar{h}^2 - \frac{\alpha}{128} 96 \bar{h}^2 + \frac{\beta}{8} \bar{h}^2 = \\ &= \frac{1}{4} \bar{h}^2 \alpha - \frac{1}{4} \bar{h}^2 \beta, \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$(5.31) \longrightarrow (\bar{h}_B^A + \eta_B^A) (\bar{h}_A^B + \eta_A^B) - \frac{1}{4} (\bar{h} + 4)^2 = \bar{h}_B^A \bar{h}_A^B - \frac{1}{4} \bar{h}^2. \quad (5.34)$$

Affinchè sia soddisfatta (5.23) con la condizione $a = -b$ basta risolvere l'equazione per i coefficienti di \bar{h}^2 e $\bar{h}_B^A \bar{h}_A^B$ dalla (5.33) e dalla (5.34) ed imporre siano entrambi di norma unitaria e discordi:

$$\frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{4}\beta = 1 - \frac{1}{4} \longrightarrow \alpha - \beta = 3. \quad (5.35)$$

Ritornando alla Lagrangiana (5.19):

$$S_m = \frac{m^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(\frac{1}{16}H^2 - 1\right)^2 \left(\alpha \frac{1}{16}H^2 - \beta\right) - \tilde{H}_B^A, \tilde{H}_A^B \right] \quad (5.36)$$

si calcola il tensore $T_{\mu\nu}$ dalla definizione (3.16):

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{mass}) &= \frac{m^2}{2} \left[-\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \left(\frac{H^2}{16} - 1 \right)^2 \left(\alpha \frac{H^2}{16} - \beta \right) \right] + \\ &+ \frac{m^2}{2} \left[\sqrt{-g} \delta \left[\left(\frac{1}{16} H^2 - 1 \right)^2 \left(\alpha \frac{1}{16} H^2 - \beta \right) \right] \right], \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{mass})}{\delta g^{\mu\nu}} = m^2 \left[-\alpha \frac{H^6}{8192} + \alpha \frac{H^4}{256} + \beta \frac{H^4}{128} \right] g_{\mu\nu} + \\ &+ m^2 \left[-\alpha \frac{H^2}{32} - \beta \frac{H^2}{16} - \beta \frac{1}{2} \right] g_{\mu\nu} + \\ &+ m^2 \left[\alpha \frac{3H^5}{2048} - \alpha \frac{H^4}{32} - \beta \frac{H^3}{64} + \alpha \frac{H}{8} + \beta \frac{H}{4} \right] \partial_\mu \phi^A \partial_\nu \phi_A. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Considerando sempre $H_B^A = 0$, l'equazione di Einstein si riduce a:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\beta m^2 g_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \longrightarrow \Lambda = -\frac{1}{2}\beta m^2. \quad (5.39)$$

Si può prendere ad esempio la costante $\alpha = 3$ e $\beta = 0$, trovando una costante cosmologica nulla.

Alternativamente con la scelta $\alpha = 2$ e $\beta = -1$ la costante cosmologica è positiva dell'ordine di m^2 . Dalla (4.50) con $\Omega_M = 0$ ed $w = -1$ si trova:

$$H(t)^2 = H(t_0)^2 \Omega_\Lambda = H_0^2 \Omega_\Lambda, \quad (5.40)$$

e dalla definizione di Ω_Λ :

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho}{3H_0^2}, \quad (5.41)$$

nell'era attuale, ovvero con $H(t)|_{t=t_0} = H(t_0) \equiv H_0$ si ha:

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho}{3H_0^2} \sim \frac{T}{H_0^2} \sim \frac{m^2}{H_0^2} = 1 \longrightarrow m \sim H_0. \quad (5.42)$$

Se la massa del gravitone m è comparabile con la costante di Hubble all'era attuale H_0 si vede che, a distanze cosmologiche circa al raggio di Vainshtein, il termine massivo può riprodurre l'effetto gravitazionale repulsivo che porta all'accelerazione cosmica dell'Universo. Questa potrebbe essere un'interpretazione dell'energia oscura dell'Universo.

5.2 Teoria mimetica massiva

In tale teoria si utilizzerà il meccanismo di Brout-Englert-Higgs, o semplicemente Higgs, per generare la massa del gravitone ed uno dei quattro campi scalari sarà posto come

il campo scalare della gravità mimetica. Inoltre si aggiunge il termine mimetico alla Lagrangiana per riprodurre gli effetti della materia oscura.

Per piccole perturbazioni del campo continua a valere la (5.6). Dei quattro campi scalari ϕ^A , come mostrato precedentemente, tre solo sono necessari per dare massa al gravitone, che donano i tre gradi di libertà al gravitone che con i due gradi di spin ne conterrà cinque. Si porrà ora $\phi^0 \equiv \phi$ come il campo scalare di tipo mimetico. Definendo nuovamente:

$$\bar{h}^{AB} = H^{AB} - \eta^{AB} = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^A \partial_\nu \phi^B - \eta^{AB}, \quad (5.43)$$

si considera l'azione:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{R}{2} + \frac{m^2}{8} \left[\frac{\bar{h}^2}{2} - \bar{h}^{AB} \bar{h}_{AB} \right] + \lambda (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + 1) \right], \quad (5.44)$$

che, come si nota, porta il termine mimetico in λ col campo scalare ϕ , ed il termine massivo differisce dall'azione di Fierz-Pauli per il termine $\frac{1}{2}$ in \bar{h}^2 . Tale modifica viene introdotta per eliminare le instabilità che si produrrebbero introducendo la Lagrangiana mimetica alla Lagrangiana di Fierz-Pauli senza la modifica, ovvero evitare i ghost.

Si trovano le equazioni del moto dalla variazione di $\delta g^{\mu\nu}$, $\delta \phi^A$ e $\delta \lambda$:

$$G_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{m^2}{8} \left(\frac{1}{2} \bar{h}^2 - \bar{h}^{AB} \bar{h}_{AB} \right) g_{\mu\nu} + \lambda (2\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) + \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{2} \bar{h} \partial_\mu \phi_A \partial_\nu \phi^A - \bar{h}_{AB} \partial_\mu \phi^A \partial_\nu \phi^B \right), \quad (5.45)$$

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta \phi^A} = \nabla^\mu \left[m^2 \left(\frac{\bar{h}}{2} \partial_\mu \phi_A - \bar{h}_{AB} \partial_\mu \phi^B \right) + 4\lambda \partial_\mu \phi_A \right] = 0, \quad (5.46)$$

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta \lambda} = \bar{h}^{00} = 0. \quad (5.47)$$

Ponendo nella (5.46) $A = 0$ ed $A = k$, linearizzando le equazioni in $h_{\mu\nu}$ e χ^A , si trova rispettivamente:

$$\partial_0 \lambda - \frac{m^2}{4} \left(\partial^\rho \bar{h}_{\rho 0} - \frac{1}{2} \partial_0 \bar{h} \right) = 0, \quad (5.48)$$

$$m^2 \left(\partial^\rho \bar{h}_{\rho k} - \frac{1}{2} \partial_k \bar{h} \right) = 0, \quad (5.49)$$

mentre la (5.45) linearizzata in $h_{\mu\nu}$ porge:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\rho h_{\rho\nu} - \partial_\nu \partial^\rho h_{\rho\mu} + \partial_\mu \partial_\nu h) + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\square h - \partial^\sigma \partial^\rho h_{\rho\sigma}), \quad (5.50)$$

La perturbazione al primo ordine:

$$\bar{h}^{AB} = \delta_\mu^A \delta_\nu^B h^{\mu\nu} + \partial^A \chi^B + \partial^B \chi^A \longrightarrow h_{\mu\nu} = -\bar{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu \chi_\nu + \partial_\nu \chi_\mu, \quad (5.51)$$

e sostituendo la (5.51) in (5.50) e ricordando la (5.47):

$$G_{00} = 2\lambda + \frac{m^2}{4}\bar{h}, \quad (5.52)$$

$$G_{0i} = -\frac{m^2}{2}\bar{h}_{0i}, \quad (5.53)$$

$$G_{ij} = -\frac{m^2}{2}\left(\bar{h}_{ij} - \frac{1}{2}\bar{h}\right). \quad (5.54)$$

Nel tensore $G_{\mu\nu}$ non compaiono più termini di χ e quindi $G_{\mu\nu}(h_{\rho\sigma}) = -G_{\mu\nu}(\bar{h}_{\rho\sigma})$.

Si noti come le equazioni (5.48) e (5.49) discendono dalle (5.52), (5.53) e (5.54) usando l'identità di Bianchi $\partial^\mu G_{\mu\nu}$. Le dieci equazioni inoltre sono sufficienti a determinare completamente λ , \bar{h}_{0i} e \bar{h}_{ij} con $\bar{h}_{00} = 0$ dalla condizione mimetica.

Dalle equazioni (5.48) e (5.49) si ricavano:

$$\partial_i \partial^\rho \bar{h}_{\rho k} + \partial_k \partial^\rho h_{\rho i} = \partial_i \partial_k \bar{h}, \quad (5.55)$$

$$\partial^\sigma \partial^\rho \bar{h}_{\rho\sigma} = \partial^0 (\partial^\rho \bar{h}_{\rho 0}) + \partial^k (\partial^\rho \bar{h}_{\rho k}) = \frac{1}{2} \partial^2 \bar{h} + \frac{4}{m^2} \ddot{\lambda}. \quad (5.56)$$

Cominciando dalla (5.54), ed usando la (5.50) appena trovata, si può facilmente trovare:

$$\partial^2 \bar{h}_{ij} - \eta_{ij} \left(\frac{1}{2} \partial^2 \bar{h} - \frac{4}{m^2} \ddot{\lambda} \right) = -m^2 \left(\bar{h}_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} \bar{h} \right), \quad (5.57)$$

e scomponendo \bar{h}_{ij} nella traccia e nella parte senza traccia:

$$\bar{h}_{ij} = \bar{h}_{ij}^T + \frac{1}{3} \eta_{ij} \bar{h} \longrightarrow \bar{h}_{ij}^T \equiv \bar{h}_{ij} - \frac{1}{3} \eta_{ij} \bar{h}, \quad (5.58)$$

si vede come la parte senza traccia del tensore \bar{h}_{ij} , \bar{h}_{ij}^T , soddisfa all'equazione delle onde:

$$(\square + m^2) \bar{h}_{ij}^T = 0, \quad (5.59)$$

per un gravitone con massa m . Per l'equazione (5.52), ed usando la (5.50):

$$\Delta \bar{h} + \partial^i \partial^j \bar{h}_{ij} = 4\lambda + \frac{m^2}{2} \bar{h}, \quad (5.60)$$

con $\Delta = -\partial^i \partial_i$, ed usando sempre la scomposizione (5.58) si trova:

$$\bar{h} = 6 \left(\frac{\partial^i \partial^j \bar{h}_{ij}^T - 4\lambda}{3m^2 - 4\Delta} \right), \quad (5.61)$$

esprimendo così \bar{h} in funzione di \bar{h}_{ij}^T e λ , che sostituita nell'equazione per $i = j$ di $G_{\mu\nu}$ (5.57):

$$(\square + m^2) \bar{h} = \frac{24}{m^2} \ddot{\lambda}. \quad (5.62)$$

Si ha quindi un sistema di equazioni (5.59) e (5.62):

$$\begin{cases} (\square + m^2) \bar{h}_{ij}^T = 0 \\ (\square + m^2) \bar{h} = \frac{24}{m^2} \ddot{\lambda} \end{cases} \longrightarrow 6 (\square + m^2) \left(\frac{\partial^i \partial^j \bar{h}_{ij}^T - 4\lambda}{3m^2 - 4\Delta} \right) = \frac{24}{m^2} \ddot{\lambda}, \quad (5.63)$$

ovvero:

$$\ddot{\lambda} + \frac{m^2}{4} \lambda = 0, \quad (5.64)$$

equazione che descrive la materia mimetica.

Infine per l'equazione per $0 - i$ di $G_{\mu\nu}$ (5.53), usando la (5.48) e (5.50), si trova:

$$\Delta \bar{h}_{0i} + \partial_0 \partial^k \bar{h}_{ki} + \partial_0 \partial^i \left(\frac{4}{m^2} \lambda - \frac{1}{2} \bar{h} \right) = m^2 \bar{h}_{0i}, \quad (5.65)$$

da cui, dalla solita scomposizione (5.58) e dalla (5.61) si ricava:

$$\bar{h}_{0i} = \frac{\partial_0 \partial^k \bar{h}_{ki}^T}{m^2 - \Delta} - \frac{\partial_0 \partial_i}{m^2 - \Delta} \left(\frac{\partial^l \partial^m \bar{h}_{lm}^T}{3m^2 - 4\Delta} \right) + \frac{16 \partial_0 \partial_i \lambda}{m^2 (3m^2 - 4\Delta)}. \quad (5.66)$$

Si è quindi trovato come la teoria di gravità massiva mimetica descriva gravitoni massivi, caratterizzati dalla parte a traccia nulla \bar{h}_{ki}^T che soddisfa la (5.59), e materia mimetica, descritta dalla λ che obbedisce all'equazione (5.64) e che non imita la polvere interstellare ma particelle di massa pari a $m/2$, metà della massa del gravitone. Tale materia si pone quindi come candidato per la spiegazione della materia oscura fredda nell'Universo. Infine i termini rimanenti \bar{h} e \bar{h}_{0i} sono espressi completamente da \bar{h}_{ki}^T e da λ .

Bibliografia

- [1] F. Arroja, N. Bartolo, P. Karmakar, S. Matarrese. *The two faces of mimetic Horndeski gravity: disformal transformations and Lagrange multiplier*, JCAP 1509 (2015) 051.
- [2] D. Langlois, R. Saito, D. Yamauchi, K. Noui. *Scalar-tensor theories and modified gravity in the wake of GW170817*, Phys. Rev. D 97, 061501 (2018).
- [3] D. Langlois, K. Noui. *Degenerate higher derivative theories beyond Horndeski: evading the Ostrogradski instability*, JCAP 1602 (2016) 02, 034.
- [4] D. Langlois. *Degenerate Higher-Order Scalar-Tensor (DHOST) theories* (2018).
- [5] LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, Fermi Gamma-Ray Burst Monitor, INTEGRAL. *Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A*, The Astrophysical Journal Letters, 848:L13 (27pp), 2017 October 20.
- [6] A. H. Chamseddine, Viatcheslav Mukhanov. *Mimetic Dark Matter*, JHEP 1311 (2013) 135.
- [7] A. H. Chamseddine, Viatcheslav Mukhanov. *Higgs for Graviton: Simple and Elegant Solution*, JHEP 1008:011,2010.
- [8] A. H. Chamseddine, Viatcheslav Mukhanov. *Ghost Free Mimetic Massive Gravity*, JHEP 06 (2018) 060.
- [9] J. Matsumoto. *Unified description of dark energy and dark matter in mimetic matter model*.
- [10] N. Deruelle, J. Rua. *Disformal Transformations, Veiled General Relativity and Mimetic Gravity*, JCAP 09 (2014) 002.
- [11] A. Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*, John Wiley & Sons, Chichester, 2003.
- [12] M. Fierz, W. Pauli. *On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field*, Mathematical and Physical Sciences, Volume 173, Issue 953, pp. 211-232.

- [13] Planck Collaboration. *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, (2018).