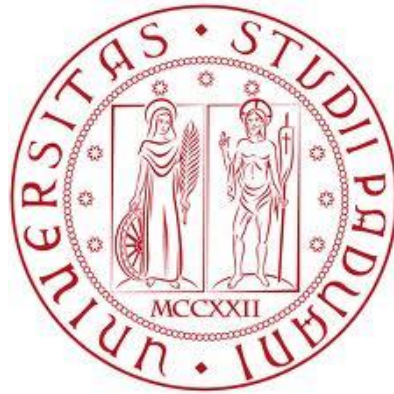


Università degli studi di Padova
Corso di Laurea in Statistica e Gestione delle Imprese



**Modelli di diffusione con componente stagionale:
Applicazione al ciclo di vita dell'iPod.**

Relatore: Prof.ssa Mariangela Guidolin
Dipartimento di Scienze Statistiche
Università di Padova

Laureando: Paolo Zamengo

Anno Accademico 2011/2012

INDICE:

1- Introduzione.....	5
1.1-Modello di Bass.....	9
1.1.1- Soluzione del Modello di Bass.....	10
1.2-Modello di Guseo-Guidolin.....	13
1.2.1-Architettura del modello.....	13
1.2.2-Formulazione esplicita del modello.....	16
1.3-Stagionalità.....	16
1.3.1-Applicazione ai modelli.....	17
1.3.2-Modello di Bass stagionale.....	18
1.3.3-Modello di Guseo-Guidolin stagionale	19
2- Identificazione statistica.....	21
2.1-Regressione Non Lineare: Metodi di stima.....	21
2.2-NLS: Metodi numerici di stima.....	22
2.2.1-Metodo di Gauss-Newton.....	23
2.2.2-Metodo di Levenberg-Marquardt.....	24
3- Introduzione al caso di studio.....	25
3.1-Lettore multimediale iPod.....	25
3.2-Diffusione dell'iPod a livello mondiale.....	27

4- Applicazione.....	29
4.1 - Applicazione del B.M su dati cumulati.....	29
4.2 - Applicazione del B.M su dati istantanei.....	31
4.3– Prima estensione del B.M con stagionalità proporzionale.....	34
4.4- Seconda estensione del B.M con stagionalità proporzionale.....	37
4.5- Applicazione modello di Guseo-Guidolin su dati cumulati.....	40
4.6 - Applicazione modello di Guseo-Guidolin su dati istantanei.....	43
4.7 - Prima estensione del modello di Guseo-Guidolin con stagionalità proporzionale.....	46
4.8 - Seconda estensione del modello di Guseo-Guidolin con stagionalità proporzionale.....	49
5- Previsioni di vendite di iPod.....	55
5.1-Considerazioni sul futuro scenario.....	56
6- Conclusioni.....	57
 Bibliografia.....	 59
 Sitografia.....	 61

1- Introduzione

La diffusione delle innovazioni è un ambito di ricerca molto vasto, la cui importanza è stata confermata nel tempo dal gran numero di pubblicazioni che lo riguardano, stimate in circa 14'600 tra il 1990 ed il 2002 (Nuntley e Davies 2002).

I ricercatori e gli studiosi si sono concentrati nel tempo sul problema della diffusione delle innovazioni, per comprendere meglio il processo attraverso il quale un'innovazione è comunicata tra i componenti di un sistema per poi venire successivamente adottata o rigettata dagli stessi.

Uno dei più importanti studiosi del settore, Everett Rogers, ha definito l'innovazione come un'idea, un prodotto, o un servizio, percepito come nuovo dal sistema (sociale, biologico, o naturale) che lo accoglie.

Questa definizione consente di intuire l'ampiezza del potenziale campo applicativo di questa definizione: si pensi alla diffusione di alcune particelle nello spazio in ambito fisico, all'idea della catena di montaggio ideata da Ford nel contesto socio-economico, alla diffusione dell'HIV nella biologia.

Tale separazione nei contesti applicativi è solo apparente poiché è possibile riconoscere un punto di contatto tra queste tematiche proprio nel meccanismo fondamentale che opera con continuità all'interno dei sistemi socio-economici, biologici o fisici: il linguaggio interno o locale di comunicazione e controllo (Guseo, 2004). Recenti applicazioni hanno confermato la versatilità applicativa dei modelli di diffusione in domini economici, demografici, sociali ed energetici, rendendone lo studio ancor più attuale ed interessante.

Storicamente la teoria dei modelli di diffusione delle innovazioni trova appoggio negli studi più diversi. La prima modellazione di questo processo è collegata al modello logistico, formulato dal matematico belga P.F. Verhulst nel 1838 e usato nel campo delle scienze naturali per descrivere fenomeni di diffusione di epidemie per contagio.

Il processo di diffusione è stato interpretato da Marchetti, (1980), sostanzialmente come un processo di apprendimento, che, come tale, può essere rappresentato dalla curva logistica.

Come osservato da Devezas, (2005), il modello logistico rappresenta uno dei più potenti mezzi di previsione della diffusione delle innovazioni tecnologiche, per la sua capacità di rappresentare la dinamica di cambiamento nel mercato e nelle aziende. La curva ad "S" è un punto di riferimento nell'ampia letteratura di dinamiche economiche nei cambiamenti tecnologici (Metcalf, 2005)

Anche in ambito sociologico si trovano riferimenti a modelli per descrivere la diffusione di innovazioni. Lo studioso francese Gabriel Tarde, nel suo libro "Le lois de l'imitation", (1980), ha affermato che il processo di imitazione può in qualche modo rappresentare una legge universale di

cambiamento sociale: L'innovazione è una condizione necessaria per il cambiamento, ma esso prende piede soprattutto quando un gran numero di persone adottano successivamente l'innovazione, tramite un processo "imitativo".

Il concetto del processo di diffusione guidato dal carattere imitativo, trova conferma negli studi socio-psicologici riguardanti la cosiddetta "*social learning theory*".

Nonostante la provenienza dei contributi alla teoria dei processi di diffusione sia fortemente eterogenea, a partire dagli anni '70 in poi il marketing quantitativo ha avuto un ruolo centrale nell'applicazione di questi modelli. La giustificazione del loro utilizzo nell'ambito dei nuovi prodotti sta nel fatto che un'innovazione si diffonde in un sistema sociale attraverso la comunicazione, come un'epidemia si diffonde nella popolazione. L'efficacia del contagio tra i soggetti è misurato dalla disponibilità di chi deve ancora acquistare il prodotto nel farsi convincere da chi ha invece lo ha già acquistato.

Nel corso degli ultimi decenni sono state effettuate numerose ricerche legate alla struttura logistica proposta da Verhulst, e tra gli studiosi più attivi in questo campo possiamo ricordare Bass, Mahajan, Muller, Meade e Islam. Nei loro studi si può riconoscere la comune frequenza di riferimenti al modello standard di Bass che, essendo una generalizzazione empirica del ciclo di vita del prodotto, rappresenta ormai un punto di riferimento nelle applicazioni legate al marketing.

In questo elaborato si è posta l'attenzione ai modelli di diffusione perché le serie storiche dei dati relativi alle innovazioni sono generalmente influenzate da tre aspetti caratteristici:

- I dati riguardanti le prime adozioni sono piuttosto scarsi sotto il profilo numerico,
- I processi di adozione presentano spesso fenomeni di non stazionarietà iniziali, seguiti una tendenza alla saturazione nella fase conclusiva delle adozioni.
- L'approccio statistico di taglio polinomiale basato sui processi ARIMA si rivela spesso inadeguato poiché concettualmente pensato per processi stazionarizzabili con opportune differenziazioni (Guseo, 2004).

Data la potenziale ampiezza dei contesti applicativi, si ritiene necessario focalizzare l'attenzione al campo delle innovazioni tecnologiche, in cui verrà analizzata e descritta l'evoluzione del processo delle vendite mondiali del lettore multimediale iPod.

Nella letteratura riguardante le innovazioni tecnologiche, ha rivestito particolare importanza il concetto delle *technology generations*, intese come un insieme di prodotti percepiti come simili dai consumatori in termini di funzionalità e caratteristiche.

Le nuove generazioni di solito offrono un miglioramento significativo di prestazioni rispetto alla generazione precedente.

Norton e Bass (1987), hanno considerato la diffusione di generazioni successive di uno stesso prodotto, combinando l'effetto sostituzione con la diffusione vera e propria dello stesso. Nel loro "*model for successive generations*", suggeriscono che le adozioni di generazioni successive vengano effettuate da soggetti provenienti sia dal mercato potenziale non sfruttato, che dagli adottanti del vecchio prodotto, intenti a comprare l'aggiornamento, (generazione), più recente. La complessità del modello da loro proposto aumenta notevolmente con l'aggiunta di ogni successiva generazione del prodotto, rendendone particolarmente ostica l'applicazione concreta.

Dalla pubblicazione del loro lavoro si è potuto notare un considerevole interesse rivolto all'analisi dei processi di crescita delle generazioni tecnologiche, ad esempio con il lavoro di Norton e Bass (1992), Mahajan e Muller (1996), Islam e Meade (1997), Bass e Bass (2001,2004).

Il fatto che non siano mai state pubblicate applicazioni sulla diffusione di un prodotto con più di tre generazioni successive, consente di apprezzare questi contributi soprattutto da un punto di vista teorico.

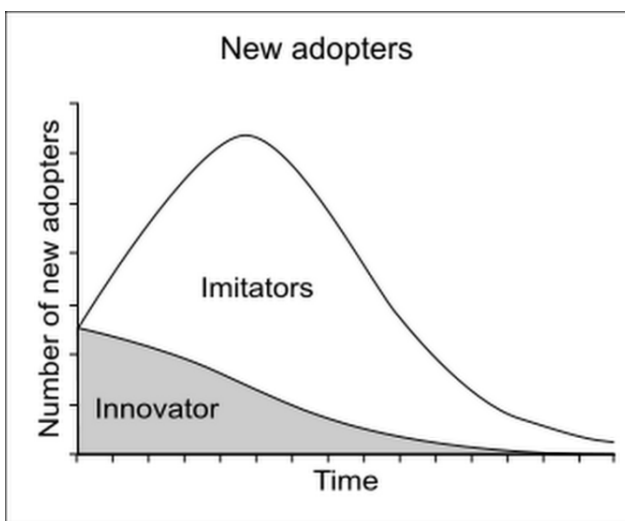
Ricordando la definizione di innovazione, non bisogna dimenticare che la cosa fondamentale non riguarda i *miglioramenti effettivi* apportati al prodotto, ma solo quelli *realmente percepiti* dagli adottanti (consumatori). Nel processo di diffusione di iPod, come verrà brevemente esposto nel terzo capitolo, il confine tra effettive generazioni successive e semplici miglie funzionali e di design, è davvero molto sottile. Come apparirà dai risultati di questo lavoro, appare lecito pensare che i nuovi modelli ed i frequenti aggiornamenti (chiamati dalla Apple stessa "generazioni"), abbiano influenzato molto il successo del famoso lettore multimediale di Apple.

I risultati forniti dalle analisi svolte in questo elaborato verranno utilizzati per cercare di interpretare al meglio tutto il processo diffusivo dell'iPod. Nella trattazione si adatterà prevalentemente un approccio quantitativo per interpretare le componenti di innovazione-imitazione che hanno caratterizzato le vendite di iPod nel mondo.

La tesi è organizzata come segue. Il capitolo 1 fornisce i principali strumenti teorici e quantitativi utilizzati nella trattazione. Vengono presentati il modello standard di Bass, il modello a potenziale variabile di Guseo-Guidolin, con un paragrafo dedicato alle estensioni suggerite da Guidolin, Guseo (2012), per cogliere la stagionalità presente nei dati. Il capitolo 2 descrive i principali metodi di stima di tali modelli, tramite i minimi quadrati non lineari. Nel capitolo 3 si introduce il caso di studio, esponendo brevemente le tappe fondamentali della diffusione dell'iPod. L'applicazione concreta dei modelli alla serie dei dati di vendita viene trattata nel capitolo 4. Nel capitolo 5 trovano spazio alcune considerazioni sul futuro scenario del lettore multimediale Apple; l'ultimo capitolo è dedicato ad alcune riflessioni conclusive sul lavoro svolto.

1.1- Modello di Bass

Il ciclo di vita del prodotto, caratterizzato dalle fasi di lancio, crescita, maturità e declino è una generalizzazione empirica ben rappresentabile per mezzo del modello standard di Bass, BM. Tale modello infatti è stato tipicamente usato per prevedere lo sviluppo della diffusione di nuovi prodotti, quale risultato dell'interazione nel tempo delle scelte d'acquisto di un potenziale set di adottanti (mercato potenziale)



Nel modello di Bass si assume che le scelte di adozione del prodotto vengano influenzate da diversi tipi di informazione: una esterna, come i mass media o la pubblicità, ed una interna, chiamata interazione sociale o word-of-mouth (passaparola).

A seconda dell'influenza ricevuta, si distinguono due gruppi di potenziali adottanti: gli innovatori, condizionati dalle informazioni esterne, e gli imitatori dalle interazioni sociali.

Figura (1) - Classi di adottanti nel BM

L'idea di fondo del modello di Bass si basa sul completamento del già citato modello logistico di Verhulst (in cui l'inizializzazione del processo è di tipo statico) mediante un processo monomolecolare che descrive in modo più realistico tale inizializzazione in un contesto sociale.

La rappresentazione formale del modello è un'equazione differenziale di primo ordine:

$$z'(t) = \left(p + q \frac{z}{m}\right) (m - z) \quad (1.1)$$

che può essere riscritta come:

$$z'(t) = p(m - z) + q \frac{z}{m} (m - z). \quad (1.2)$$

Questa espressione consente di comprendere più facilmente i fattori che regolano la variazione istantanea del processo di accumulo delle vendite, $z'(t)$. Il primo addendo $p(m - z)$ esprime, con il parametro p , l'effetto innovativo del processo dovuto principalmente all'azione esterna (comunicazione d'impresa, azione pubblicitaria) ed è direttamente proporzionale al *mercato residuo*

$(m - z)$ dove m è il *mercato potenziale*, o “*carrying capacity*”, e $z(t)$ il numero di *adozioni cumulate* al tempo t .

Questo effetto si riduce progressivamente ma ha il pregio di rendere evidente il meccanismo di inizializzazione dell'intero processo diffusivo, evidenziando il ruolo di promotore svolto da una sottopopolazione leader, o “*early adopters*”, seguendo Rogers, (2003). Il secondo addendo, con il parametro q esprime l'effetto imitativo del processo dovuto in larga misura al cosiddetto passaparola (word-of-mouth), ed è ancora direttamente proporzionale al mercato residuo corretto con una penalizzazione decrescente.

Da notare che al tempo $t = 0$, $z'(t) = pm$, che rappresenta il livello di innovatori all'inizio del processo di diffusione.

Il modello di Bass può anche essere interpretato come un “*hazard rate*”, che in questo caso rappresenta la probabilità che un'adozione avvenga al tempo t , condizionata al fatto che non sia ancora avvenuta.

$$\frac{z'}{m - z} = p + q \frac{z}{m} \quad (1.3)$$

L'equazione (1.3) è espressa come somma di due eventi incompatibili, p e $q \frac{z}{m}$: il modello non consente che l'adozione avvenga dall'influenza di entrambi gli effetti, assumendo che la decisione d'acquisto finale sia dovuta solamente ad una delle due componenti (innovativa o imitativa).

1.1.1- Soluzione del modello di Bass

L'equazione (1.1) fa riferimento ad un conteggio in termini assoluti, ma se poniamo $y = \frac{z}{m}$, si ottiene:

$$y' = (p + qy)(1 - y) \quad (1.4)$$

o, in maniera equivalente:

$$y' + qy^2 + (p - q)y - p = 0 \quad (1.5)$$

la quale rappresenta un caso particolare della più generale equazione di Riccati a coefficienti costanti, analizzata in Guseo (2004).

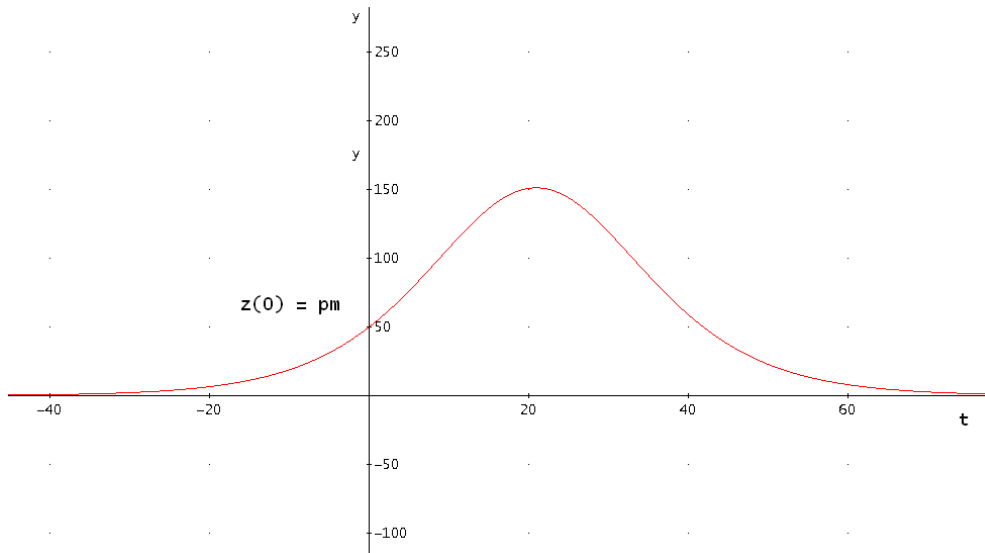


Figura (2) – Modello di Bass: adozioni istantanee (m=5000; p=0.01; q=0.1)

Le radici reali dell'equazione caratteristica

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.6)$$

sono quindi $r_1 = \frac{(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a}$ e $r_2 = -\frac{p}{q}$. In generale i termini y' e $(1 - y)$ sono positivi, come anche i parametri p e q , dunque $r_1 < 0 < r_2$. Le soluzioni asintotiche sono, rispettivamente $-\frac{p}{q}$ ed 1, sotto la condizione iniziale che $y(0) = 0$.

La formulazione forse più conosciuta del modello di Bass, è una speciale distribuzione cumulata

$$y(t) = \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}} \quad (1.7)$$

La diffusione del processo di adozione viene qui descritta dalla porzione di adottanti $y(t)$, in funzione dei parametri p e q .

Moltiplicando l'equazione ottenuta per il mercato potenziale m , si ottiene

$$z(t) = m \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}} \quad (1.8)$$

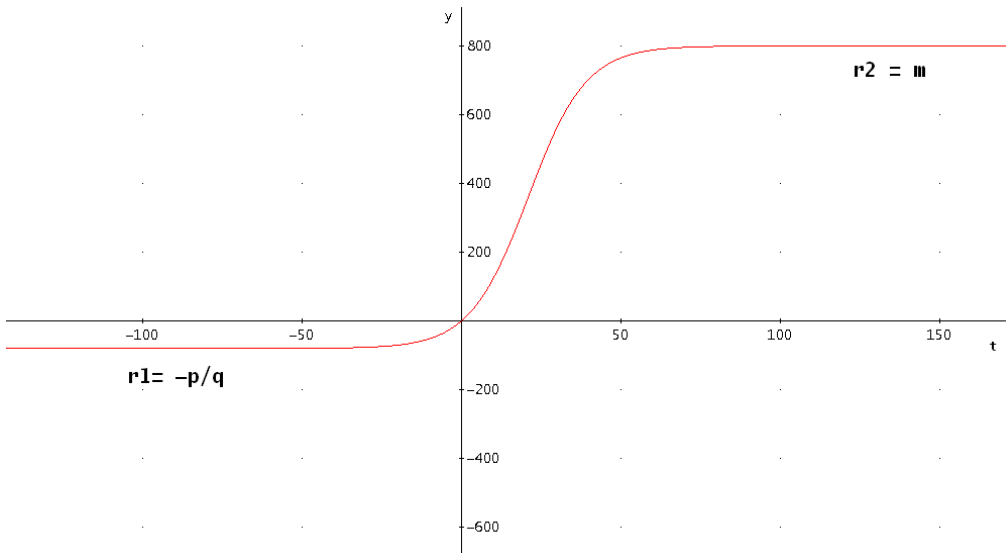


Figura (3) – Modello di Bass: adozioni istantanee ($m=800$; $p=0.01$; $q=0.1$)

Il valore dell'asintoto superiore è dovuto al valore del parametro m , poiché $r_2 = 1$.

Si può dimostrare che $y'(t)$ è simmetrica nell'intervallo $(0, 2t^+)$

$$y'(t) = m \frac{p(p+q^2) - e^{-(p+q)t}}{(p+qe^{-(p+q)t})^2} \quad (1.9)$$

Il punto di flesso di $z(t)$ si ottiene in

$$t^+ = \frac{\ln\left(\frac{q}{p}\right)}{(p+q)}. \quad (1.10)$$

Il valore della funzione nel punto è invece pari a

$$z(t^+) = m \left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2q} \right). \quad (1.11)$$

L'equazione mostra che nel punto di massimo la quota di vendite cumulate $z(t)$ è approssimativamente pari a $m/2$, poiché il valore del parametro p è solitamente molto piccolo rispetto a q .

1.2- Modello di Guseo-Guidolin (2009)

Molti ostacoli e molte barriere ostacolano la diffusione delle innovazioni.

Diversi studiosi concordano sull'esistenza di questo problema, pur producendo stime differenti: già Cera (1987) sosteneva che in azienda il 70% dei progetti non supera la fase del test o i sei mesi successivi al lancio, Engel, Blackwell e Miniard hanno parlato di insuccesso per l'80% dei nuovi prodotti, mentre altri autori, come Jones hanno addirittura fornito cifre vicine al 90%.

Il rischio di fallimento di nuovi prodotti o servizi è dunque molto elevato e la maggior parte di essi non sopravvive di fronte ai limiti che possono incontrare nella loro diffusione, siano essi culturali, istituzionali, cognitivi, o semplicemente conoscitivi.

Di fatto, se non si è a conoscenza dell'esistenza di un determinato prodotto, non si può certo volerlo acquistare. Questa semplice considerazione mette in luce il difetto principale del modello di Bass: l'assunzione che il mercato potenziale di adottanti, $m(t)$, sia costante nel tempo, e predeterminato già a partire dall'introduzione dell'innovazione (incubazione).

La stima del parametro m spesso risulta problematica: per procedere ad essa in fase iniziale viene utilizzato generalmente l'ultimo valore disponibile dei dati cumulati, e, nel caso in cui le vendite non abbiano ancora raggiunto il "picco" (ammesso che sia l'unico), ciò può portare ad una sottostima del potenziale. L'argomento è indicato come uno dei principali campi di ricerca nel contesto dei modelli di diffusione delle innovazioni (Meade and Islam, 2006).

Una possibile risposta a tale problema è stata fornita dal modello di diffusione con potenziale variabile di Guseo-Guidolin (Guseo-Guidolin, 2009).

1.2.1- Architettura del modello:

L'elaborazione del modello Guseo-Guidolin, nasce dalla necessità di definire delle procedure di stima del *mercato potenziale* per riuscire a quantificarlo in modo più affidabile rispetto a quanto possibile con il modello di Bass, BM. E' ragionevole considerare che il *mercato potenziale* di un'innovazione possa essere influenzato dalla comunicazione relativa al nuovo prodotto: infatti senza conoscerlo non si può essere dei potenziali acquirenti.

Choen e Levinthal (1990) hanno trattato il concetto di "*absorptive capacity*", definita come la prontezza, la recettività e l'abilità nel riconoscere il valore di una nuova informazione, e sfruttarla. Questa capacità è tanto maggiore quanto più è radicata la conoscenza pregressa sull'argomento. L'intuizione che ha portato alla formulazione del modello di Guseo-Guidolin (2009) sta nel

considerare il mercato potenziale m come una misura dell'*absorptive capacity*, relativa all'acquisto del prodotto, presente nella società.

Di seguito viene proposta una sintesi del percorso proposto in Guseo e Guidolin (2009) che ha portato dalla formulazione del modello finale. La rappresentazione e la costruzione di questa conoscenza collettiva può essere descritta da un insieme di connessioni fra individui all'interno di un network che evolve.

Nello studio della teoria delle reti si è posta l'attenzione negli archi, che, collegando tra di loro le unità (vertici), sono considerati i mezzi della diffusione dell'informazione reciproca tra gli individui del network.

Si consideri un grafo $G = (V, E)$

- $V = \{1, 2, \dots, i, \dots, N\}$ è l'insieme dei vertici
- La cardinalità di V è $N = c(V)$
- L'insieme E delle coppie (i, j) chiamate archi $E \subset V * V$, è l'insieme di tutte le possibili relazioni binarie fra vertici V (anche riflesive)
- La cardinalità di E è $U = c(E) \leq N^2$

Si procede quindi ad un'analisi a livello aggregato con un'approssimazione per il calcolo delle disposizioni "mean field approximation" (Guseo and Guidolin, 2008)

La dinamica di diffusione dell'informazione è descritta tramite un'equazione differenziale del tipo

$$v'(t) = p_c(1 - v(t)) + q_c v(t)(1 - v(t)) - e_c v(t) - w_c v^2(t) \quad (1.12)$$

Escludendo effetti di perdita di informazione, la densità degli archi attivi al tempo t , è espressa da:

$$v(t) = \frac{1 - e^{-(p_c+q_c)t}}{1 + \frac{q_c}{p_c} e^{-(p_c+q_c)t}} \quad (1.13)$$

Per ottenere un riferimento in termini assoluti, si pone $k(t) = U * v(t)$.

$Uv(t)$ è quindi il numero di archi attivi al tempo t , che esprimono il risultato aggregato della diffusione di informazione in un sistema.

Considerando E come un sottoinsieme quadrato del prodotto $V * V$, si ottiene che la radice quadrata di $Uv(t)$ rappresenta il numero di vertici attivi (persone informate nel network)

$$k(t) = \sqrt{U} \sqrt{v(t)} \quad (1.14)$$

L'insieme di persone informate, $k(t)$, può rappresentare l'*upper bound* $m(t)$, condizione limite che si realizzerebbe se tutte le persone venute a conoscenza dell'innovazione, la adottassero.

Nella realtà $m(t)$ è minore di $k(t)$, ed è così definito:

$$m(t) = K \sqrt{v(t)} \quad (1.15)$$

$$m(t) = K \sqrt{\frac{1 - e^{-(p_c+q_c)t}}{1 + \frac{q_c}{p_c} e^{-(p_c+q_c)t}}} \quad (1.16)$$

Risulta ora evidente che il mercato potenziale dipende da un processo di diffusione dell'informazione.

Nel caso specifico, la comunicazione dell'esistenza del nuovo prodotto nel mercato è vista anch'essa come un'innovazione, modellata da un relativo processo diffusivo, la cui espressione ricorda il modello standard di Bass.

1.2.2- Formulazione esplicita del modello

Applicando un potenziale variabile al modello di Bass otteniamo:

$$z'(t) = p_s(m(t) - z(t)) + q_s \frac{z(t)}{m(t)}(m(t) - z(t)) + z(t) \frac{m'(t)}{m(t)} \quad (1.17)$$

Seguendo Guseo (2004) si perviene alla soluzione di un BM.

$$z(t) = m(t) \frac{1 - e^{-(p_s+q_s)t}}{1 + \frac{q_s}{p_s} e^{-(p_s+q_s)t}} \quad (1.18)$$

$$z(t) = \underbrace{K \sqrt{\frac{1 - e^{-(p_c+q_c)t}}{1 + \frac{q_c}{p_c} e^{-(p_c+q_c)t}}}}_{\text{}} \frac{1 - e^{-(p_s+q_s)t}}{1 + \frac{q_s}{p_s} e^{-(p_s+q_s)t}} \quad (1.19)$$

L'espressione (3.8) rappresenta formalmente il modello Guseo Guidolin, in cui si nota che i processi di informazione e adozione vengono trattati come due fasi distinte.

I parametri p_s e q_s sono gli stessi del modello standard di Bass ed il pedice "s" indica che si riferiscono alla diffusione relativa al processo di acquisto, in inglese "sales".

La novità risiede nei parametri p_c e q_c riferiti alla diffusione della comunicazione, che modula in progressione il valore del mercato potenziale K .

Di fatto, il modello di Guseo-Guidolin è l'espressione di una co-evoluzione di processi, il cui vantaggio sta nel produrre una quantità di informazione doppia rispetto all'utilizzo del modello di Bass standard, necessitando in input dei soli dati aggregati di vendita.

1.3- Stagionalità

La disponibilità di potenti tecnologie applicate ai mezzi di comunicazione sta accelerando il processo di globalizzazione in molti aspetti della vita quotidiana.

Molte tecnologie e prodotti innovativi, ad esempio smartphones, lettori DVD o servizi di banking on-line, fino a non molti anni fa erano ancora sconosciuti, cosicché non appare difficile immaginare come questo processo di innovazione tecnologica possa continuare a influenzare il mercato negli anni a venire.

In particolare, il processo di globalizzazione dell'economia ha abbattuto le barriere del commercio a distanza, con strumenti come eBay ed Amazon, solo per citare due famosi esempi, creando uno scenario sempre più competitivo, in cui prodotti hanno sempre meno spazio, e sempre meno tempo per diffondersi tra la clientela, data l'incalzante rischio di obsolescenza dei prodotti.

Diventa quindi sempre più importante porre l'attenzione non solo sul trend delle vendite ma anche sulle loro oscillazioni durante l'anno, quali fonti di informazione di grande valenza strategica.

In particolare, nel breve medio-breve periodo la componente di stagionalità assume sicuramente un ruolo più importante rispetto a un orizzonte previsivo di medio-lungo termine.

In una serie storica, la stagionalità è costituita dai movimenti del fenomeno osservato nel corso dell'anno che, per effetto di fattori climatici, sociali, o di politiche aziendali, tendono a ripetersi in maniera sistematica (non necessariamente regolare) nel medesimo periodo degli anni successivi, (Di Fonzo, Lisi, 2005).

Il carattere stagionale di una serie è tipicamente visibile quando i dati a disposizione sono mensili o trimestrali, e la sua stima può rappresentare un problema molto delicato.

Esistono vari modi di trattare la stagionalità e generalmente si preferisce eliminare questo effetto mediante procedure di differenziazione, destagionalizzando la serie.

Nel presente elaborato viene seguito un metodo proposto in Guidolin, Guseo (2012) che, assumendo una componente stagionale di natura deterministica, e descrivibile tramite una funzione lineare in seno e coseno, la stima congiuntamente al trend con metodi regressivi non lineari (NLS).

1.3.1 - Applicazione ai modelli

Di seguito viene presentata la proposta contenuta in Guidolin, Guseo (2012) in cui il modello di Bass e il modello di Guseo-Guidolin vengono estesi al fine di tenere conto della presenza di una componente stagionale additiva.

Si prenda dunque in considerazione la decomposizione di una serie storica basata sulla struttura additiva

$$y'(t) = T(t) + S(t) + \varepsilon(t) \quad (1.20)$$

In cui $y'(t)$ rappresenta i dati istantanei osservati, $T(t)$ il trend, $S(t)$ la stagionalità, ed $\varepsilon(t)$ la componente erratica, assunta con $E[\varepsilon(t)] = 0$ e $V[\varepsilon(t)] = \sigma^2$.

La stagionalità influenza sicuramente l'andamento delle vendite, ma nel seguito si ipotizzerà anche l'effetto inverso, assumendo valida anche l'influenza del ciclo di vita del prodotto sull'intensità dell'effetto stagionale: in particolare, è ragionevole immaginare che l'effetto si manifesti maggiormente sui dati di vendita del periodo di maturità del prodotto, risultando meno incidente in fase di introduzione e declino.

Per tener conto di questo aspetto, riscrivendo l'equazione (1.20)

$$y'(t) = T(t) + S(t) + \varepsilon(t) = h(t)[M + A(t)] + \varepsilon(t) \quad (1.21)$$

da cui si ottiene



$$y'(t) = h(t)M + h(t)A(t) + \varepsilon(t). \quad (1.22)$$

Nell'equazione (1.22) la componente di trend risulta essere $Mh(t)$, dove $h(t)$ è la funzione di densità che esprime l'evoluzione delle vendite nel tempo, ed M una costante con ruolo di parametro di scala del processo. La stagionalità del processo è invece rappresentata da $h(t)A(t)$, con $A(t)$ che esprime l'effetto stagionale, modulato da $h(t)$.

Da notare che nell'equazione (1.22), per costruzione, l'effetto stagionale espresso da $A(t)$ è proporzionale al valore raggiunto dalle vendite al tempo t , coerentemente con le ipotesi assunte in precedenza.

1.3.2 - Modello di Bass stagionale

Per meglio definire $T(t)$ ed $S(t)$, si prenda in considerazione il modello standard di Bass definito in precedenza dall'equazione (1.8)

$$z(t) = m F(t; p, q) = m \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}} \quad (1.23)$$

espresso in termini istantanei da:

$$z'(t) = m F'(t; p, q) = m f(t; p, q) \quad (1.24)$$

Dove $f(t; p, q)$, la densità di probabilità del processo, corrisponde alla derivata prima della funzione di ripartizione $F(t; p, q)$.

Per semplicità di calcolo si adotta l'approssimazione per cui

$$f(t; p, q) \simeq [F(t + 0.5; p, q) - F(t - 0.5; p, q)]. \quad (1.25)$$

Assumendo

$$h(t) = f(t; p, q); M = m \quad (1.26)$$

si ottiene una pratica formulazione della componente di trend, espressa da

$$T(t) = Mh(t) = m[F(t + 0.5; p, q) - F(t - 0.5; p, q)], \quad (1.27)$$

mentre il contributo stagionale è espresso da

$$S(t) = h(t)A(t) = [F(t + 0.5; p, q) - F(t - 0.5; p, q)] A(t). \quad (1.28)$$

L'espressione del processo di adozioni istantanee nel modello di Bass stagionale, si ottiene sommando le due equazioni precedenti

$$z'(t) = T(t) + S(t) = [M + A(t)][F(t + 0.5; p, q) - F(t - 0.5; p, q)]. \quad (1.29)$$

Seguendo il metodo di regressione, l'effetto stagionale viene espresso dalla combinazione lineare di funzioni trigonometriche, ottenendo

$$A(t) = \sum_{j=1}^{\lfloor s/2 \rfloor} [a_j \cos\left(\frac{2\pi t}{s}\right) + b_j \sin\left(\frac{2\pi t}{s}\right)] \quad (1.30)$$

in cui a_j e b_j sono due parametri da stimare con le tecniche di regressione non lineare (per un breve compendio, si veda il paragrafo 2), mentre $s/2$ è la parte intera di $\lfloor s/2 \rfloor$.

1.3.3 - Modello di Guseo-Guidolin stagionale

Si consideri ora la struttura del modello Guseo-Guidolin

$$z(t) = K W(t; p_c, q_c, t; p_s, q_s) = K \sqrt{F(t; p_c, q_c)} F(t; p_s, q_s) \quad (1.31)$$

in cui $W(t; p_c, q_c, p_s, q_s)$ è il prodotto tra le due funzioni di ripartizione relative ai processi di comunicazione, $\sqrt{F(t; p_c, q_c)}$, ed adozione, $F(t; p_s, q_s)$.

La formulazione esplicita del processo di adozioni cumulate, introdotta nel paragrafo 1.2, è pari a

$$z(t) = K \sqrt{\frac{1 - e^{-(p_c+q_c)t}}{1 + \frac{q_c}{p_c} e^{-(p_c+q_c)t}} \frac{1 - e^{-(p_s+q_s)t}}{1 + \frac{q_s}{p_s} e^{-(p_s+q_s)t}}}. \quad (1.32)$$

Le adozioni istantanee, sono espresse invece da

$$z'(t) = K W'(t; p_c, q_c, p_s, q_s) = K w(t; p_c, q_c, p_s, q_s). \quad (1.33)$$

Utilizzando l'approssimazione (1.25), si ottiene

$$w(t; p_c, q_c, t; p_s, q_s) \simeq [W(t + 0.5; p_c, q_c, p_s, q_s) - W(t - 0.5; p_c, q_c, p_s, q_s)] \quad (1.34)$$

quindi, ricordando le assunzioni della (1.26), otteniamo che la componente di trend per il modello a potenziale variabile, è misurata da

$$T(t) = Mh(t) = K[W(t + 0.5; p_c, q_c, p_s, q_s) - W(t - 0.5; p_c, q_c, p_s, q_s)]. \quad (1.35)$$

Il contributo dell'effetto stagionale è ancora

$$S(t) = h(t)A(t) = [W(t + 0.5; p_c, q_c, p_s, q_s) - W(t - 0.5; p_c, q_c, p_s, q_s)] A(t), \quad (1.36)$$

per cui l'espressione delle adozioni istantanee, $z'(t)$, del modello Guseo Guidolin stagionale è

$$T(t) + S(t) = [M + A(t)][W(t + 0.5; p_c, q_c, p_s, q_s) - W(t - 0.5; p_c, q_c, p_s, q_s)]. \quad (1.37)$$

2 - Identificazione Statistica

2.1 – Regressione Non Lineare: Metodi di stima

L'analisi della diffusione dell'iPod è stata effettuata con l'ausilio del software di elaborazione statistica Statgraphics Centurion XVI.I, e in particolare tramite la regressione non lineare dei modelli di Bass, Guseo-Guidolin e delle loro estensioni stagionali.

Per poter utilizzare il modello di Bass è necessario stimare i parametri m , p , e q presentati nel relativo capitolo, mentre riguardo al modello di Guseo-Guidolin, che distingue la fase di diffusione dell'informazione dal processo di adozione vera e propria, i parametri saranno, rispettivamente k , p_c , q_c , p_s , q_s .

Per quanto riguarda le due estensioni proposte per ciascun modello, la procedura di stima riguarderà anche i parametri responsabili della modulazione dell'effetto stagionale (che si ricorda assunto deterministico).

Nel suo lavoro originario Bass suggeriva di stimare i parametri del suo modello usando i minimi quadrati ordinari (OLS). Questo metodo, però, spesso ha il difetto di fornire stime ad elevata multicollinearità, di conseguenza instabili a causa degli elevati standard error che determinano intervalli di confidenza molto ampi. Vi è inoltre l'impossibilità di ricorrere ai classici rimedi proposti dalla letteratura econometrica, ad esempio, eliminare un coefficiente dalla specificazione del modello, poiché lo farebbe perdere di senso nel presente contesto.

Un altro rilevante difetto evidenziato da numerosi studi empirici è la tendenza a produrre parametri di segno negativo (rappresentando probabilità negative).

Per questi motivi i parametri del modello di Bass e di Guseo-Guidolin verranno stimati con i minimi quadrati non lineari (NLS), come suggerito da Srinivasan e Mason (1986).

Nel seguito verrà introdotto sinteticamente il contesto della regressione non lineare e successivamente verranno presentati i due metodi numerici di stima tipicamente utilizzati. Gran parte del materiale qui presentato trae spunto dal lavoro di Guseo (2002), e Seber & Wild (1989).

2.2 – NLS: Metodi numerici di stima

Considerato un modello esprimibile nella forma

$$y_i = f(x_i; \theta^*) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

dove x_i è un vettore $k \times 1$ di variabili esplicative (nei modelli analizzati in seguito l'unica variabile esplicativa è rappresentata dal tempo "t") e θ^* è l'incognito vero parametro θ , con $\theta \in \Theta \subset R^p$. Si ipotizza che il modello sia corretto in media poiché la componente ε_i , che rappresenta una variabile casuale, ha valore atteso nullo. La stima secondo i minimi quadrati di θ^* , che indichiamo con $\hat{\theta}$, per costruzione minimizza la *devianza* $S(\theta)$, cioè la somma dei quadrati degli errori:

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i; \theta)]^2. \quad (2.2)$$

Sia $f(x_i; \theta)$ differenziabile in θ e $\hat{\theta}$ interno a Θ , condizione rispettata dai modelli utilizzati nel seguito, allora $\hat{\theta}$ soddisfa il seguente sistema di equazioni normali

$$\frac{\partial S(\theta)}{\partial \theta_r} \Big|_{\hat{\theta}} = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Si supponga ora che $f(\theta) = f(x_i; \theta)$, per non appesantire eccessivamente la notazione, e si indichi con $f(\theta)$ il vettore $(f_1(\theta), f_2(\theta), \dots, f_n(\theta))'$. Sia

$$F.(\theta) = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta'} = \left[\frac{\partial f_i(\theta)}{\partial \theta_r} \right]; \quad i = 1, \dots, n; \quad r = 1, \dots, p \quad (2.4)$$

la matrice jacobiana $n \times p$ delle derivate parziali prime di f rispetto a θ' . Passando alla notazione vettoriale la devianza $S(\theta)$ diventa

$$S(\theta) = [y - f(\theta)]' [y - f(\theta)] = \varepsilon' \varepsilon = \|y - f(\theta)\|^2 \quad (2.5)$$

ovvero la norma al quadrato di $\varepsilon = y - f(\theta)$. Derivando la (numero equazione precedente) ed uguagliando a zero si hanno le usuali equazioni normali, ed in particolare si ottiene

$$-2F'.(y - f(\theta)) = 0 \quad (2.6)$$

che equivale a

$$F' \cdot (y - f(\theta)) = 0 \quad (2.7)$$

cui corrisponde, sotto le assunzioni fatte, la soluzione $\hat{\theta}$, nonché alla condizione di ortogonalità $F' \perp \varepsilon$. La soluzione viene calcolata con metodi di iterazioni successive.

Bisogna porre particolare attenzione alla minimizzazione di $S(\theta)$, poiché, a differenza del caso lineare, è possibile che esistano svariati minimi relativi. Questo è uno dei problemi principali da risolvere per ottenere una stima affidabile di $\hat{\theta}$.

Nel seguito verranno proposte due strategie di risoluzione del problema di ottimizzazione, nello specifico il metodo Gauss-Newton e il metodo Levenberg-Marquadt, quello effettivamente adottato nel seguito per le elaborazioni dei dati con Statgraphics.

2.2.1 - Metodo di Gauss – Newton

Si consideri un vettore iniziale θ_a , ritenuto una buona approssimazione di $\hat{\theta}$. Si sviluppi in serie di Taylor troncata al primo ordine il vettore $f(\theta)$ in un intorno del punto θ_a

$$f(\theta) \approx f(\theta_a) + F'_{\cdot a} (\theta - \theta_a) \quad (2.8)$$

dove si è posto per semplicità $F'_{\cdot a} = F'(\theta_a)$. La devianza approssimata in termini lineari

$$\begin{aligned} S(\theta) &= [y - f(\theta)]' [y - f(\theta)] \\ &\approx [y - f(\theta_a) + F'_{\cdot a} (\theta - \theta_a)]' - [y - f(\theta_a) + F'_{\cdot a} (\theta - \theta_a)] \\ &= [z - F'_{\cdot a} \beta]' [z - F'_{\cdot a} \beta] \end{aligned} \quad (2.9)$$

dove si è posto $z = y - f(\theta_a)$ e $\beta = (\theta - \theta_a)$. Il minimo di β si ottiene per

$$\hat{\beta} = (F'_{\cdot a} F'_{\cdot a})^{-1} F'_{\cdot a} z \quad (2.10)$$

e quindi

$$\hat{\beta} = (\theta_b - \theta_a) = (F'_{\cdot a} F'_{\cdot a})^{-1} F'_{\cdot a} (y - f(\theta_a)) = \delta_a \quad (2.11)$$

In altri termini la seconda approssimazione è del tipo

$$\theta_b = \theta_a + \delta_a. \quad (2.12)$$

In corrispondenza di una effettiva soluzione di minimo, la distanza misurata da δ_a sarà nulla, arrestando così l'aggiornamento sequenziale. Si osservi che il valore di δ_a è nullo se

$F'_{\cdot a} (y - f(\theta_a)) = 0$, che verifica la condizione di ortogonalità esposta in precedenza.

2.2.2 - Metodo Levenberg – Marquardt

Il metodo di Levenberg – Marquardt introduce una sostanziale modifica all'algoritmo di Gauss – Newton (2.11) eliminando eventuali fonti di singolarità dovute alla matrice $(F'_{\cdot a} F_{\cdot a})$.

Il nuovo passaggio di aggiornamento introduce una opportuna matrice diagonale di rango pieno

$$\delta_a = (F'_{\cdot a} F_{\cdot a} + \eta_a D_a)^{-1} F_{\cdot a} (y - f(\theta_a)) \quad (2.13)$$

dove D_a è diagonale con elementi positivi (nei casi più semplici $D_a = I_p$). Si osservi che in ogni caso in corrispondenza della soluzione è soddisfatta l'equazione di ortogonalità

$$\hat{F}'_{\cdot} (y - f(\hat{\theta})) = 0 \quad (2.14)$$

Il parametro η_a viene modificato in funzione del valore $S(\theta)$.

3 - Introduzione al caso di studio

3.1- Lettore multimediale iPod

Si è deciso di analizzare la diffusione di questo prodotto perché la serie dei dati di vendita presenta delle caratteristiche importanti; la popolarità dell'iPod e la grande quantità di informazioni disponibili a riguardo sono due elementi fondamentali che facilitano una migliore comprensione del processo diffusivo sottostante.

L'iPod è un piccolo lettore multimediale che ha rivoluzionato il mondo della musica, concorrendo a determinare prima la fama e poi il successo della sua azienda di produzione, la **Apple**.



Figura (4) – Modelli più diffusi di iPod (in ordine, *Shuffle*; *Nano*, *Classic* e *Touch*)

L'azienda americana produce dispositivi multimediali, computer e sistemi operativi dal 1976, e deve la sua fama mondiale alle numerose innovazioni nel campo dell'alta tecnologia e del design nei suoi prodotti.

Il primo iPod *Classic* viene lanciato nel mercato nell'ottobre dell'anno 2001, realizzando in media vendite dell'ordine di 600 migliaia di unità per entrambi i due anni successivi.

Nel gennaio 2004 (2/04) Apple presenta l'iPod in versione *Mini*, che riscuoterà un successo notevolissimo, tanto da creare alcune difficoltà nel riuscire a soddisfare la vertiginosa crescita di richieste nel mercato.

Un anno dopo (2/05) Steve Jobs, amministratore delegato della Apple, afferma che (in America) la quota di mercato dell'iPod è raddoppiata: dal 32% del gennaio 2004 al 64%, solamente un anno dopo: "iPod mini worked", disse.

Nel gennaio e nel settembre 2005 sono state presentate le versioni iPod *Shuffle* ed iPod *Nano* che hanno contribuito fortemente alla diffusione del prodotto Apple, sia per il loro innovativo design e

le caratteristiche tecniche, che per una significativa diminuzione dei prezzi di vendita (si ricorda che i dati si riferiscono ai volumi di vendita e non al fatturato).

Nel settembre 2006 (1/07) è stata presentata la seconda, rivoluzionaria, versione di iPod *Shuffle*, il più piccolo mp3-player al mondo, comportando un incremento delle vendite pari al 41% nel trimestre successivo.

Un solo anno dopo, nel settembre 2007 si assiste al lancio di iPod *Touch*, dotato di tecnologia multi-touch, connettività Wi-fi e bluetooth.

Le differenze presenti nelle nuove versioni di iPod presentate nel tempo, riguardano principalmente dettagli tecnici, come la capienza o le funzionalità, ed estetici, come i colori e le dimensioni.

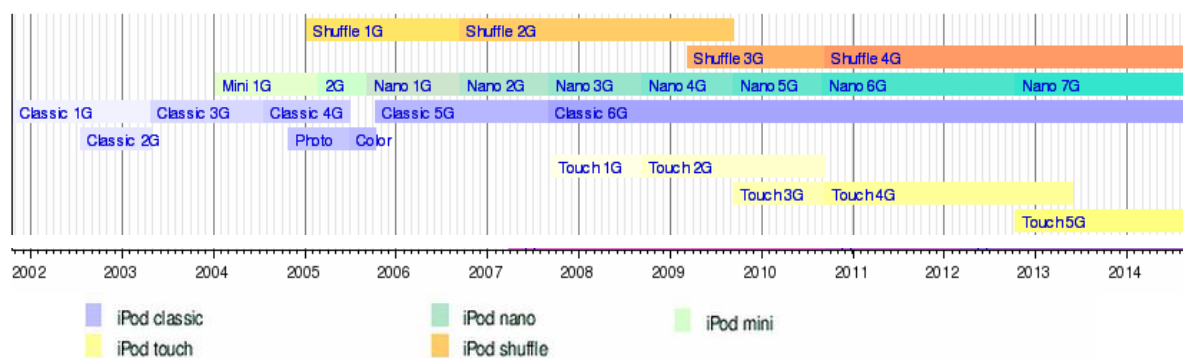


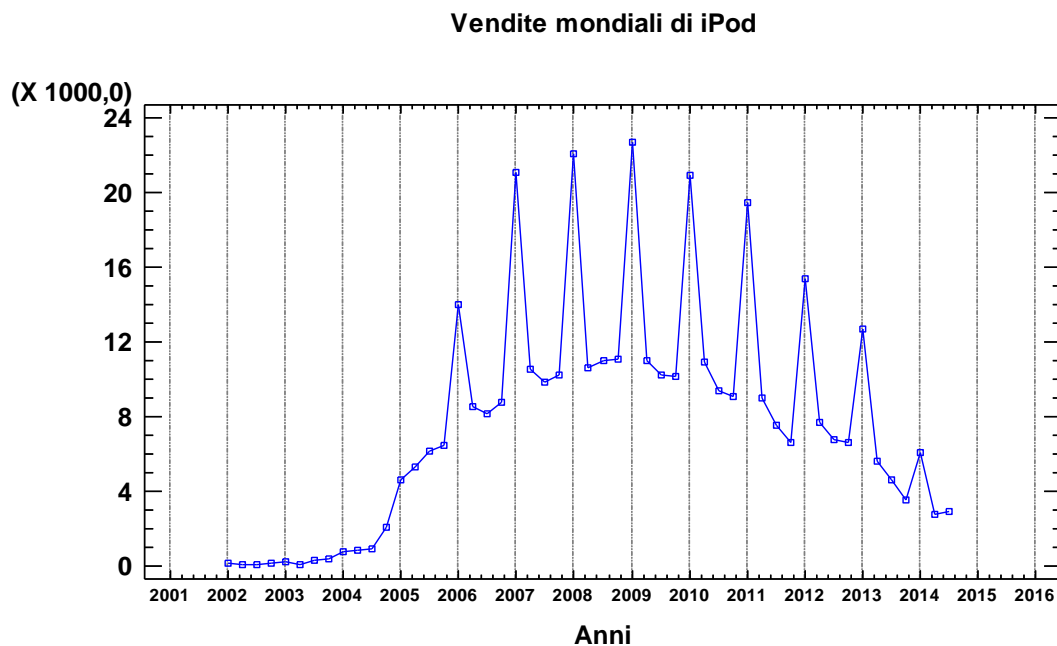
Figura (5) – Cronologia di diffusione delle generazioni di iPod

Durante il ciclo di vita del prodotto sono stati presentati cinque diversi modelli, aggiornati successivamente da nuove generazioni. Questa pluralità di aspetti è però solo apparente, poiché le varie novità apportate ai modelli sono da considerare come generazioni successive di un unico prodotto, che nel tempo ha mantenuto le sue caratteristiche fondamentali. Appare legittimo quindi trattare i dati relativi all'iPod senza distinguere le vendite registrate dai diversi modelli, in quanto relative ad un unico prodotto.

I dati raccolti, espressi in migliaia di unità, sono organizzati in trimestri (quarters) e obbediscono alla convenzione americana secondo cui l'anno fiscale inizia il 1 ottobre e termina il 30 settembre. Il primo trimestre, quindi, riguarderà i dati di vendita dei mesi di ottobre, novembre e dicembre; il secondo trimestre, invece, collezionerà le vendite contabilizzate da gennaio a marzo.

3.1.1- Diffusione dell'iPod a livello mondiale

Da una prima analisi grafica si può notare come il processo di diffusione dell'iPod abbia riscontrato inizialmente molte difficoltà, mantenendo un andamento costante nei primi due anni e mezzo di vita e registrando in quel periodo mediamente 285'300 vendite a trimestre.



Il periodo di introduzione del prodotto è stato particolarmente lungo: oltre alle comuni difficoltà di inserimento nel mercato, il processo di diffusione dell'iPod è stato influenzato anche dal periodo in cui è stato introdotto nel mercato. La presentazione ufficiale del primo iPod risale al 26 ottobre 2001, appena un mese dopo il crollo delle torri gemelle avvenuto l'11 settembre 2001. E' possibile che la preoccupazione e l'incertezza che hanno caratterizzato l'economia mondiale nel periodo successivo all'attentato non abbiano creato un contesto favorevole alla diffusione del famoso lettore multimediale, ritardandone la fase di crescita.

Osservando il grafico, dopo la lunga fase di introduzione si nota poi un andamento medio che ricorda il ciclo di vita del prodotto nelle successive fasi di maturità, crescita e declino.

In poco meno tredici anni, Apple ha venduto ben 396 milioni di iPods, circa 30 milioni all'anno.

Si nota la presenza di forti picchi stagionali che iniziano a manifestarsi con frequenza regolare dall'anno 2006, caratterizzando le vendite per tutta la durata osservabile della vita del prodotto.

L'intensità dell'effetto stagionale è tale da far registrare delle vendite mediamente pari al doppio di quelle contabilizzate nei trimestri adiacenti.

Il picco massimo è relativo al primo trimestre del 2009 in cui sono stati vendute 22'727'000 unità ma, come si può notare, gli altri picchi non hanno registrato valori particolarmente inferiori, esprimendo vendite per circa 20 milioni nei primi trimestri fiscali degli anni dal 2007 al 2011.

Dal 2007 al 2014 l'azienda americana ha proposto 5 modelli e 24 nuove versioni di iPod, la maggior parte delle quali sono state presentate negli anni sistematicamente nella seconda settimana di settembre.

Si consideri che normalmente Apple commercializza in America i suoi nuovi prodotti due settimane dopo la loro presentazione, mentre nel resto del mondo vengono messi in vendita nei mesi subito successivi.

Ricordando che il primo trimestre fiscale americano comprende i mesi da ottobre a dicembre, si può comprendere più facilmente la presenza dei forti picchi di vendite registrati periodicamente il primo trimestre di ogni anno.

La sistematicità nel presentare i nuovi modelli di iPod nei primi giorni di settembre, può ragionevolmente apparire una strategia di mercato messa in atto dalla Apple per incrementare il volume di vendite nei mesi di ottobre e novembre, probabilmente con l'intento di suggerire una buona idea regalo per le festività natalizie.

Si procede ora ad una analisi dei dati di vendita con l'applicazione di alcuni modelli di diffusione presentati nel capitolo precedente.

4- Applicazione

4.1 - Applicazione B.M. su dati cumulati

Nonlinear Regression - iPod 2001 Cum

Dependent variable: iPod_2001_Cum

Independent variables: t

Function to be estimated: $m * (1 - EXP(-(p + q) * t)) / (1 + (q/p) * EXP(-(p + q) * t))$

In formule:

$$m * F(t; p, q)$$

Con:

$$F(t; p, q) = \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}$$

Initial parameter estimates:

$$m = 350000,$$

$$p = 0,001$$

$$q = 0,1$$

Estimation method: Marquardt

Estimation stopped due to convergence of residual sum of squares.

Number of iterations: 8

Number of function calls: 37

Estimation Results

			<i>Asymptotic</i>	<i>95,0%</i>
		<i>Asymptotic</i>	<i>Confidence</i>	<i>Interval</i>
<i>Parameter</i>	<i>Estimate</i>	<i>Standard Error</i>	<i>Lower</i>	<i>Upper</i>
m	404910,	4816,92	395225,	414596,
p	0,00162071	0,000141668	0,00133587	0,00190556
q	0,149813	0,00467252	0,140418	0,159208

Analysis of Variance

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square
Model	2,51801E12	2,51801E12	2,51801E12
Residual	2,98239E9	2,98239E9	2,98239E9
Total	2,52099E12	51	
Total (Corr.)	1,07463E12	1,07463E12	

R-Squared = 99,7225 percent

R-Squared (adjusted for d.f.) = 99,7109 percent

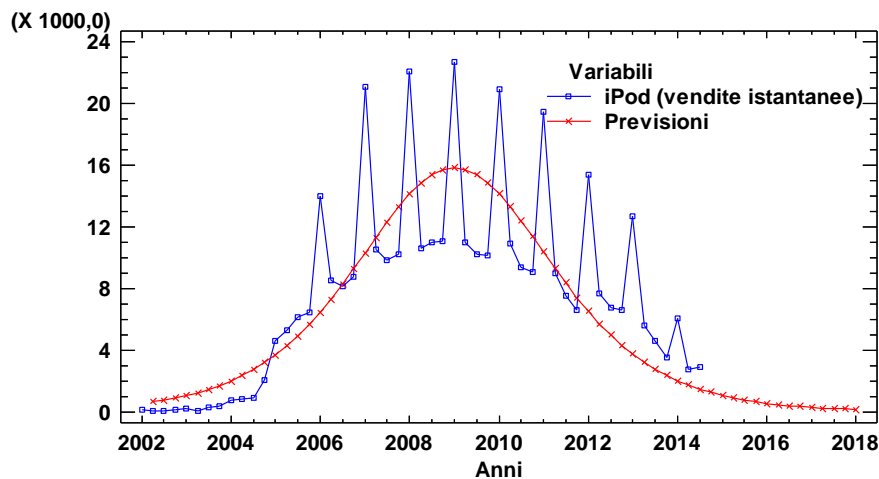
Standard Error of Est. = 7882,46

Mean absolute error = 6527,43

Durbin-Watson statistic = 0,245778

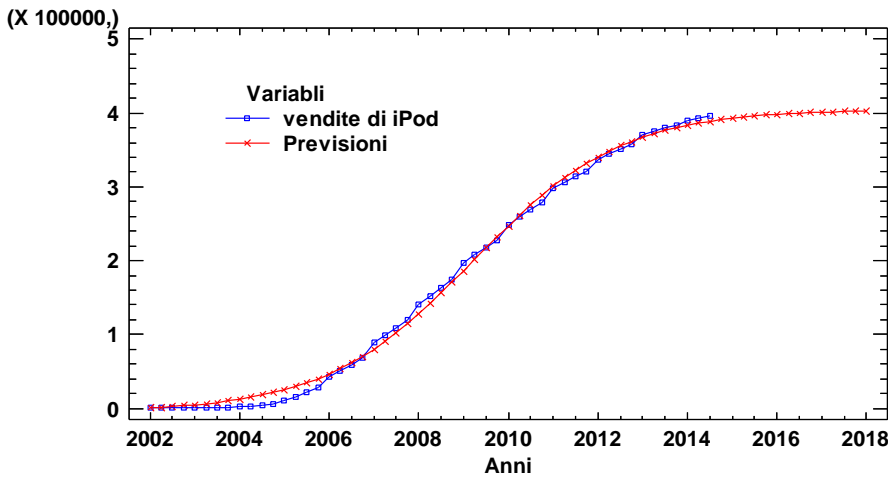
Lag 1 residual autocorrelation = 0,869102

Modello di Bass su dati cumulati



Osservando il grafico del modello si nota come esso interpreti discretamente l'andamento medio delle vendite, senza però riuscire a descrivere i picchi stagionali e senza cogliere la fase di "crisi" iniziale, sperimentata dalla maggior parte delle innovazioni lanciate nel mercato.

Modello di Bass su dati cumulati



L'indice R-quadro è calcolato

come $\frac{RSS}{TSS} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ e, per

costruzione, $0 < R^2 < 1$.

Il valore trovato in questa applicazione, pari a 99,7225, è quindi abbastanza buono, ma ciò è dovuto al fatto che il modello è stato applicato ai dati cumulati,

dove i picchi stagionali registrati nei primi trimestri si compensano con gli altri tre dati dell'anno.

I parametri p e q misurano rispettivamente 0,00162 e 0,1498, valori che suggeriscono una forte presenza di acquirenti imitatori, condizionati da informazioni interne al sistema sociale di riferimento.

Come espresso nel paragrafo 4, per gli obiettivi dell'elaborato, si procederà ad analizzare i dati di vendita istantanei per poter successivamente applicare un'estensione a tali modelli tenendo conto dell'effetto stagionale.

4.2 - Applicazione B.M. su dati istantanei

Nonlinear Regression - iPod 2001

Dependent variable: iPod_2001

Independent variables: t

Function to be estimated: $m * (1 - EXP(-(p + q) * (t + 0,5)))/(1 + (q/p) * EXP(-(p + q) * (t + 0,5))) - m * (1 - EXP(-(p + q) * (t - 0,5)))/(1 + (q/p) * EXP(-(p + q) * (t - 0,5)))$

In formule:

$$m * [F(t + 0.5; p, q) - F(t - 0.5; p, q)].$$

Con:

$$F(t; p, q) = \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}$$

Initial parameter estimates:

$$m = 350000,$$

$$p = 0,001$$

$$q = 0,1$$

Estimation method: Marquardt

Estimation stopped due to convergence of residual sum of squares.

Number of iterations: 6

Number of function calls: 27

Estimation Results

			<i>Asymptotic</i>	<i>95,0%</i>
		<i>Asymptotic</i>	<i>Confidence</i>	<i>Interval</i>
<i>Parameter</i>	<i>Estimate</i>	<i>Standard Error</i>	<i>Lower</i>	<i>Upper</i>
m	429449,	32094,7	364918,	493980,
p	0,00233566	0,000763565	0,000800408	0,00387091
q	0,132244	0,0145491	0,102991	0,161497

Analysis of Variance

<i>Source</i>	<i>Sum of Squares</i>	<i>Df</i>	<i>Mean Square</i>
Model	4,2441E9	3	1,4147E9
Residual	7,02378E8	48	1,46329E7
Total	4,94647E9	51	
Total (Corr.)	1,87607E9	50	

R-Squared = 62,5613 percent

R-Squared (adjusted for d.f.) = 61,0013 percent

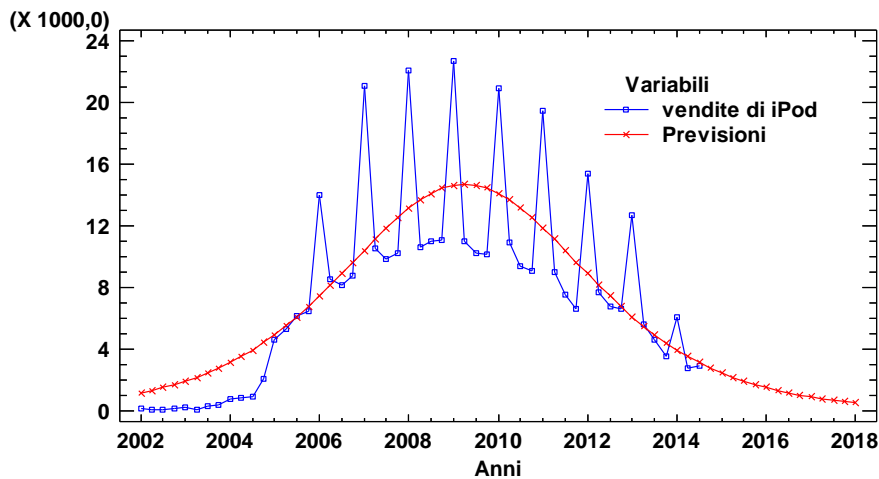
Standard Error of Est. = 3825,29

Mean absolute error = 2735,59

Durbin-Watson statistic = 2,24855

Lag 1 residual autocorrelation = -0,125037

Modello di Bass su dati istantanei

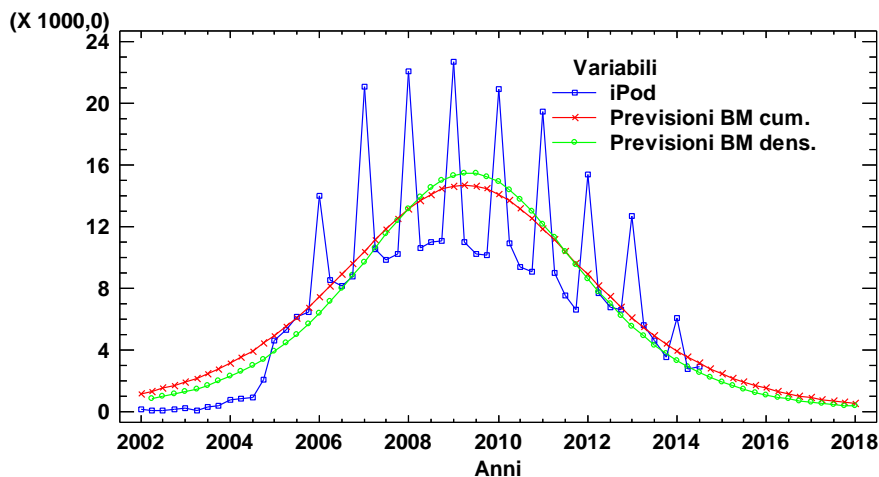


Da una analisi grafica non si notano particolari differenze rispetto all'applicazione di un BM su dati cumulati.

Il modello calcolato sui dati istantanei produce una stima più alta del mercato potenziale, con $m = 429'449$, mentre indica un picco massimo di vendite più basso rispetto al modello precedente.

La stima del parametro p è aumentata, in quanto ora misura 0,00233, mentre il valore stimato di q è ora più basso, e pari a 0,1322.

Confronto tra BM su dati istantanei e cumulati



L'indice di adattamento del modello ai dati, $R^2 = 0,625613$, è molto più basso di quello trovato nell'applicazione precedente, ma questo è semplicemente dovuto al fatto che ora il modello è applicato direttamente ai dati di vendita istantanei, in cui non vi è alcuna compensazione tra i dati sovrastimati o sottostimati, come avveniva in precedenza.

Come ipotizzato nel capitolo 4, si nota ora che l'intensità dei picchi stagionali sembra essere proporzionale al periodo raggiunto dal ciclo di vita del prodotto, risultando maggiore nel periodo di maturità, e minore in fase di introduzione e declino.

Si procede quindi all'applicazione di un'estensione al modello Bass per tener in considerazione un effetto stagionale proporzionale ai dati di vendita (Guidolin-Guseo, 2012).

4.3- Prima estensione del B.M. con stagionalità proporzionale

Non linear Regression - iPod 2001

Dependent variable: iPod_2001

Independent variables: t

Function to be estimated: $(m + a * COSR(6,28 * t/s) + b * SINR(6,28 * t/s)) * ((1 - EXP(-(p + q) * (t + 0,5)))/(1 + (q/p) * EXP(-(p + q) * (t + 0,5))) - (1 - EXP(-(p + q) * (t - 0,5)))/(1 + (q/p) * EXP(-(p + q) * (t - 0,5))))$

In formule:

$$[m + A(t)][F(t + 0.5; p, q) - F(t - 0.5; p, q)].$$

Con:

$$F(t; p, q) = \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}$$

ed

$$A(t) = \left[a * \cos\left(\frac{2\pi t}{s}\right) + b * \sin\left(\frac{2\pi t}{s}\right) \right]$$

Initial parameter estimates:

m = 428000,

a = -15000,

s = 4,0

b = 150000,

p = 0,002

q = 0,14

Estimation method: Marquardt

Estimation stopped due to convergence of residual sum of squares.

Number of iterations: 5

Number of function calls: 41

Estimation Results

			<i>Asymptotic</i>	<i>95,0%</i>
		<i>Asymptotic</i>	<i>Confidence</i>	<i>Interval</i>
<i>Parameter</i>	<i>Estimate</i>	<i>Standard Error</i>	<i>Lower</i>	<i>Upper</i>
m	428460,	21281,0	385597,	471322,
a	-15001,0	87799,6	-191839,	161837,
s	3,99703	0,0418987	3,91264	4,08142
b	185435,	37964,2	108971,	261899,
p	0,00228254	0,000488646	0,00129835	0,00326672
q	0,133088	0,00947848	0,113998	0,152179

Analysis of Variance

<i>Source</i>	<i>Sum of Squares</i>	<i>Df</i>	<i>Mean Square</i>
Model	4,64538E9	6	7,74229E8
Residual	3,01099E8	45	6,69108E6
Total	4,94647E9	51	
Total (Corr.)	1,87607E9	50	

R-Squared = 83,9506 percent

R-Squared (adjusted for d.f.) = 82,1673 percent

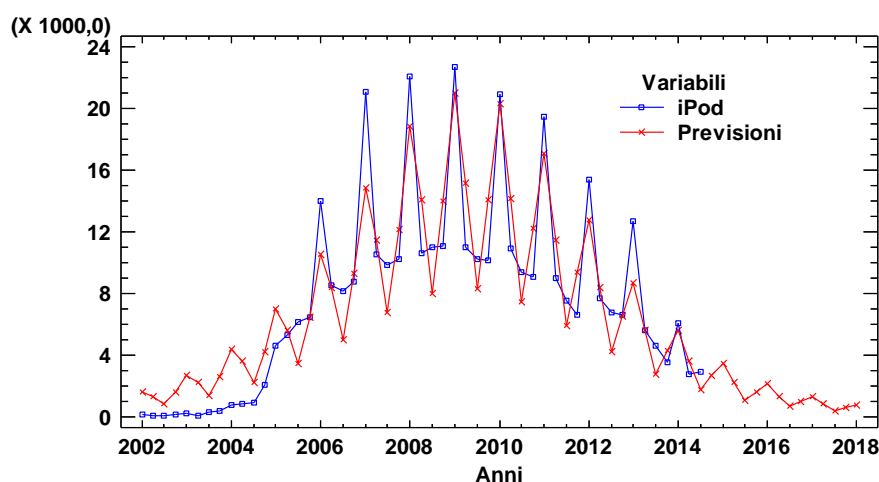
Standard Error of Est. = 2586,71

Mean absolute error = 2064,48

Durbin-Watson statistic = 2,57455

Lag 1 residual autocorrelation = -0,293182

Modello di Bass stagionale



La stima del mercato potenziale m è aumentata ancora raggiungendo le 428'460 unità: ricordando che i dati sono raccolti in migliaia, questo modello stima un potenziale di circa un milione di acquirenti in più rispetto al precedente modello di Bass standard.

A parte una leggera incertezza nell'intervallo di confidenza del parametro α , le stime esprimono un certo grado di stabilità.

Osservando i valori dei parametri p e q , si può notare come essi restino sostanzialmente invariati dall'analisi fatta in precedenza, misurando ora rispettivamente 0,002282 e 0,13308.

L' R^2 è pari a 0,839506, ottenendo 21,39 punti percentuali in più rispetto a prima, con un miglioramento in percentuale pari al 34,2%.

L'analisi per via grafica conferma nettamente il miglioramento raggiunto, poiché ora, seppur con qualche difficoltà, il modello riesce a tener conto dei picchi stagionali.

Le carenze però sono ancora molto evidenti: la sovrastima del periodo iniziale di vendite, e la descrizione troppo approssimata dell'effetto stagionale.

In particolare si nota che i dati descrivono un picco nel primo trimestre di ogni anno, mantenendo un andamento abbastanza costante nel periodo rimanente dell'anno, mentre il modello propone dei picchi stagionali continui e alternati ogni due trimestri.

Nel seguito si proverà a complicare la funzione $A(t)$, adibita per costruzione a descrivere la stagionalità della serie, inserendo una funzione armonica di periodo $f = 2$ per cercare di cogliere l'andamento descritto in precedenza.

4.4- Seconda estensione del B.M. con stagionalità proporzionale

Nonlinear Regression - Bass Season 2

Dependent variable: iPod_2001

Independent variables: t

Function to be estimated: $(m + a * \text{COSR}(6,28 * t/s) + b * \text{SINR}(6,28 * t/s) + c * \text{COSR}(6,28 * t/f) + d * \text{SINR}(6,28 * t/f)) * ((1 - \text{EXP}(-(p + q) * (t + 0,5)))/(1 + (q/p) * \text{EXP}(-(p + q) * (t + 0,5))) - (1 - \text{EXP}(-(p + q) * (t - 0,5)))/(1 + (q/p) * \text{EXP}(-(p + q) * (t - 0,5))))$

In formule:

$$[m + A(t)][F(t + 0.5; p, q) - F(t - 0.5; p, q)].$$

Con:

$$F(t; p, q) = \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}$$

ed

$$A(t) = \left[a * \cos\left(\frac{2\pi t}{s}\right) + b * \sin\left(\frac{2\pi t}{s}\right) + c * \cos\left(\frac{2\pi t}{f}\right) + d * \sin\left(\frac{2\pi t}{f}\right) \right]$$

Initial parameter estimates:

m = 428000,

a = -15000,0

s = 4,0

b = 150000,

c = 100000,

f = 2,0

d = -15000,0

p = 0,002

q = 0,14

Estimation method: Marquardt

Estimation stopped due to convergence of residual sum of squares.

Number of iterations: 7

Number of function calls: 80

Estimation Results

			<i>Asymptotic</i>	<i>95,0%</i>
		<i>Asymptotic</i>	<i>Confidence</i>	<i>Interval</i>
<i>Parameter</i>	<i>Estimate</i>	<i>Standard Error</i>	<i>Lower</i>	<i>Upper</i>
m	428637,	14157,2	400066,	457207,
a	-17057,3	58128,7	-134366,	100251,
s	3,99622	0,0277254	3,94027	4,05218
b	185629,	25809,2	133544,	237714,
c	-26954,7	114253,	-257527,	203617,
f	2,02326	0,0238021	1,97523	2,0713
d	88774,0	94713,7	-102366,	279914,
p	0,00229613	0,000325581	0,00163908	0,00295319
q	0,132886	0,00628902	0,120195	0,145578

Analysis of Variance

<i>Source</i>	<i>Sum of Squares</i>	<i>Df</i>	<i>Mean Square</i>
Model	4,82208E9	9	5,35786E8
Residual	1,24396E8	42	2,96182E6
Total	4,94647E9	51	
Total (Corr.)	1,87607E9	50	

R-Squared = 93,3693 percent

R-Squared (adjusted for d.f.) = 92,1064 percent

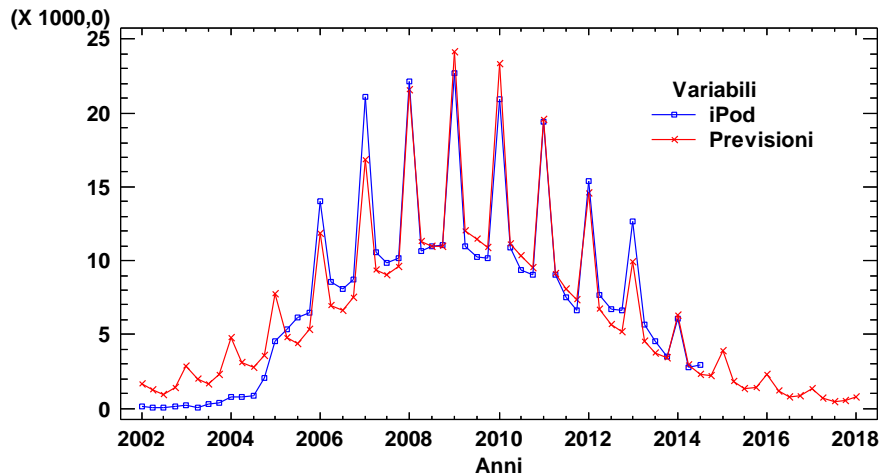
Standard Error of Est. = 1720,99

Mean absolute error = 1251,44

Durbin-Watson statistic = 0,565944

Lag 1 residual autocorrelation = 0,705542

Modello di Bas stagionale evoluto



I valori delle stime dei parametri p e q rimangono ancora sostanzialmente invariati, mentre si nota un ridimensionamento della stima del parametro m , che torna ad abbassarsi leggermente, misurando 428'637.

L'indice R^2 è pari a 0,9337, una misura molto soddisfacente se si considera che il modello è calcolato sui dati istantanei.

Si può notare come negli intervalli di confidenza di alcuni parametri, responsabili della modulazione dell'effetto stagionale, sia presente lo zero. Considerata però la generale stabilità dei parametri nel complesso, ciò non costituisce un problema rilevante.

L'aggiunta di due armoniche nella funzione $A(t)$ ha in effetti raggiunto i risultati preposti; ora il modello è capace di cogliere più correttamente l'effetto stagionale negli anni, descrivendo con efficacia il picco registrato nei primi trimestri di ogni anno, riuscendo inoltre a seguire l'andamento delle vendite nei periodi dell'anno rimanenti.

Il limite principale di questa applicazione rimane la difficoltà di descrivere correttamente le vendite del periodo iniziale e finale della vita del prodotto: sovrastimandole prima, e sottostimando poi.

Una possibile alternativa al modello di Bass può essere l'applicazione del modello con potenziale variabile in funzione della conoscenza, modello di Guseo-Guidolin (2009), anche in considerazione della forma del comportamento diffusivo, caratterizzato da una partenza molto lenta e da una forte ripresa.

Numerose applicazioni hanno mostrato che questo particolare comportamento è ben descritto dal modello con potenziale variabile di Guseo-Guidolin.

4.5- Applicazione modello Guseo-Guidolin sui dati cumulati

Nonlinear Regression - iPod 2001 Cum

Dependent variable: iPod_2001_Cum

Independent variables: t

Function to be estimated : $K * \text{SQRT}((1 - \text{EXP}(-(p_c - q_c) * t)) / (1 + (q_c / p_c) * \text{EXP}(-(p_c - q_c) * t))) * (1 - \text{EXP}(-(p_s - q_s) * t)) / (1 + (q_s / p_s) * \text{EXP}(-(p_s - q_s) * t))$

In formule:

$$K * W(t; p_c, q_c, p_s, q_s)$$

Con:

$$W(t; p_c, q_c, p_s, q_s) = \sqrt{\frac{1 - e^{-(p_c + q_c)t}}{1 + \frac{q_c}{p_c} e^{-(p_c + q_c)t}} \frac{1 - e^{-(p_s + q_s)t}}{1 + \frac{q_s}{p_s} e^{-(p_s + q_s)t}}$$

Initial parameter estimates:

K = 400000,

qc = 0,15

pc = 0,001

qs = 0,32

ps = 0,001

Estimation method: Marquardt

Estimation stopped due to convergence of residual sum of squares.

Number of iterations: 5

Number of function calls: 35

EstimationResults

			<i>Asymptotic</i>	<i>95,0%</i>
		<i>Asymptotic</i>	<i>Confidence</i>	<i>Interval</i>
<i>Parameter</i>	<i>Estimate</i>	<i>Standard Error</i>	<i>Lower</i>	<i>Upper</i>
K	420639,	3432,74	413729,	427549,
qc	0,15003	0,00497081	0,140025	0,160036
pc	0,000555222	0,0000681186	0,000418106	0,000692338
qs	0,299591	0,0198804	0,259574	0,339608
ps	0,0014192	0,000346539	0,000721654	0,00211675

Analysis of Variance

<i>Source</i>	<i>Sum of Squares</i>	<i>Df</i>	<i>Mean Square</i>
Modello	2,52068E12	5	5,04137E11
Residuo	3,10357E8	46	6,74689E6
Totale	2,52099E12	51	
Totale (Corr.)	1,07463E12	50	

R-Squared = 99,9711 percent

R-Squared (adjusted for d.f.) = 99,9686 percent

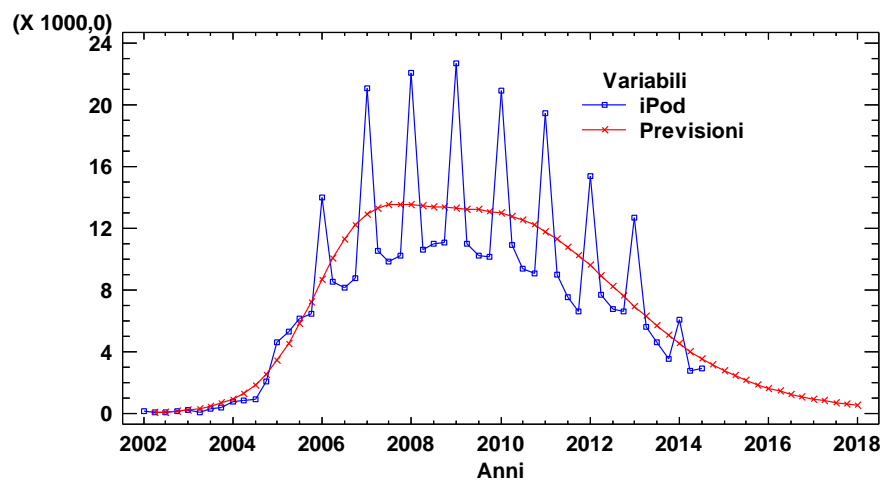
Standard Error of Est. = 2597,48

Mean absolute error = 1873,63

Durbin-Watson statistic = 1,984

Lag 1residualautocorrelation = 0,00698872

Modello GuGu su dati cumulati



Come già sottolineato nell'applicazione del BM, l'importanza di una prima applicazione del modello standard sui dati di vendita cumulati, sta principalmente nel legittimarne l'utilizzo anche in versioni più evolute e complesse, per far fronte alla stagionalità presente nei dati di vendita.

L'applicazione del modello a potenziale variabile mostra i suoi effetti positivi sotto vari aspetti.

L'indice R^2 presenta un valore di 0,999711, che dimostra un buon adattamento generale del modello ai dati.

Graficamente si nota un chiaro miglioramento della capacità descrittiva del modello, nel cogliere più correttamente la fase di crisi iniziale nella diffusione dell'iPod, seguendo in modo soddisfacente i dati di vendita dei primi tre anni.

Un altro vantaggio derivante dall'uso del modello Guseo-Guidolin, confermato anche in numerosi altri casi, è la capacità di interpretare efficacemente l'accelerazione del periodo di crescita presente nella serie durante gli anni 2005, 2006 e 2007.

Successivamente il modello propone una sorta di "plateau" negli anni di maturità del prodotto, registrati dal 2007 al 2010, che rappresenta più correttamente l'assenza di un unico picco, descritta dall'applicazione del modello standard di Bass.

Da notare che il modello propone una chiusura più lenta del "life cycle" dell'iPod, con una coda più lunga rispetto a quanto previsto dal modello standard di Bass. La conseguenza è un'evidente aumento del valore della stima del mercato potenziale K , che raggiunge la quota di 420'639 (migliaia) di unità.

L'attenzione è ora rivolta ai parametri di questo modello che ricordiamo essere composto da due "sottomodelli" di diffusione, relativi al processo di comunicazione e alla fase vera e propria di adozione del prodotto.

Confrontando i risultati ottenuti con la prima applicazione del modello standard di Bass sui dati di vendita cumulati, si può notare come il parametro $p_s = 0,00142$ sia dimezzato rispetto a prima ($p = 0,0023$), mentre q_s che prima misurava ($q = 0,133$), sia più che raddoppiato raggiungendo quota 0,299.

La fase di acquisto vera e propria dell'iPod, sembra quindi essere caratterizzata in maniera ancor più netta da un'influenza imitativa.

Si pone ora l'attenzione ai parametri più caratteristici del modello, relativi al processo di diffusione della conoscenza del prodotto, p_c e q_c , le cui stime misurano rispettivamente 0,0004376 e 0,164066.

Confrontando i valori ottenuti con quelli dati in input, anche il processo di diffusione della comunicazione sembra avere un carattere nettamente più imitativo che innovativo.

Riguardo ai due sotto-processi di diffusione, notiamo che $\frac{q_s}{p_s} = \frac{0,299591}{0,0014192} = 211,098$, mentre

$$\frac{q_c}{p_c} = \frac{0,15003}{0,0005552} = 270,23.$$

Questi risultati mostrano che, nonostante il parametro relativo alla componente imitativa del processo di acquisizione q_s , misuri circa il doppio di quello relativo all'altro processo, q_c , il rapporto con i relativi parametri di innovazione è maggiore in fase di diffusione della conoscenza del prodotto.

In altri termini, dai valori assoluti dei parametri si osserva che la componente imitativa è quantitativamente maggiore nel processo di acquisizione ma, passando ad un confronto relativo, si nota invece come sia il processo di comunicazione ad essere maggiormente guidato dagli imitatori.

Pur avendo fornito dei risultati interessanti riguardo alla diffusione del prodotto, si passa ora all'analisi dei dati istantanei per poter successivamente estendere il modello Guseo-Guidolin, al fine di cogliere la stagionalità presente nella serie di dati.

4.6 - Applicazione modello Guseo-Guidolin su dati istantanei

In formule:

$$K * [W(t + 0.5; p_c, q_c, p_s, q_s) - W(t - 0.5; p_c, q_c, p_s, q_s)]$$

Con:

$$W(t; p_c, q_c, p_s, q_s) = \sqrt{\frac{1 - e^{-(p_c+q_c)t}}{1 + \frac{q_c}{p_c} e^{-(p_c+q_c)t}} \frac{1 - e^{-(p_s+q_s)t}}{1 + \frac{q_s}{p_s} e^{-(p_s+q_s)t}}}$$

Nonlinear Regression - iPod 2001

Dependent variable: iPod_2001

Independent variables: t

Function to be estimated: $K * \text{SQRT}((1 - \text{EXP}(-(p_c+q_c)*(t+0,5)))/(1 + (q_c/p_c)*\text{EXP}(-(p_c+q_c)*(t+0,5)))) *$

$(1 - \text{EXP}(-(p_s+q_s)*(t+0,5)))/(1 + (q_s/p_s)*\text{EXP}(-(p_s+q_s)*(t+0,5))) - K * \text{SQRT}((1 - \text{EXP}(-(p_c+q_c)*(t-$

$0,5)))/(1 + (q_c/p_c)*\text{EXP}(-(p_c+q_c)*(t-0,5)))) * (1 - \text{EXP}(-(p_s+q_s)*(t-0,5)))/(1 + (q_s/p_s)*\text{EXP}(-(p_s+q_s)*(t-0,5)))$

Initial parameter estimates:

K = 420000,
pc = 0,00055
qc = 0,15
ps = 0,0014
qs = 0,3

Estimation method: Marquardt

Estimation stopped due to convergence of residual sum of squares.

Number of iterations: 3

Number of function calls: 20

EstimationResults

			<i>Asymptotic</i>	<i>95,0%</i>
		<i>Asymptotic</i>	<i>Confidence</i>	<i>Interval</i>
<i>Parameter</i>	<i>Estimate</i>	<i>Standard Error</i>	<i>Lower</i>	<i>Upper</i>
K	421551,	31073,7	359002,	484099,
pc	0,000522338	0,000365488	-0,000213352	0,00125803
qc	0,150473	0,0260199	0,0980973	0,202848
ps	0,00164277	0,00248004	-0,00334931	0,00663485
qs	0,286604	0,104538	0,0761787	0,497029

Analysis of Variance

<i>Source</i>	<i>Sum of Squares</i>	<i>Df</i>	<i>Mean Square</i>
Model	4,33204E9	5	8,66408E8
Residual	6,14433E8	46	1,33572E7
Total	4,94647E9	51	
Total (Corr.)	1,87607E9	50	

R-Squared = 67,249 percent

R-Squared (adjusted for d.f.) = 64,4011 percent

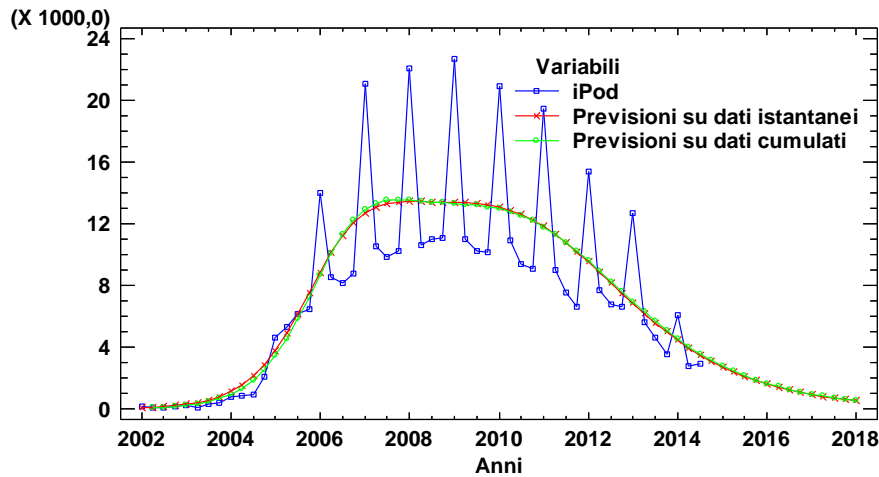
Standard Error of Est. = 3654,76

Mean absolute error = 2470,14

Durbin-Watson statistic = 2,56343

Lag 1 residual autocorrelation = -0,281967

Confronto modelli GuGu

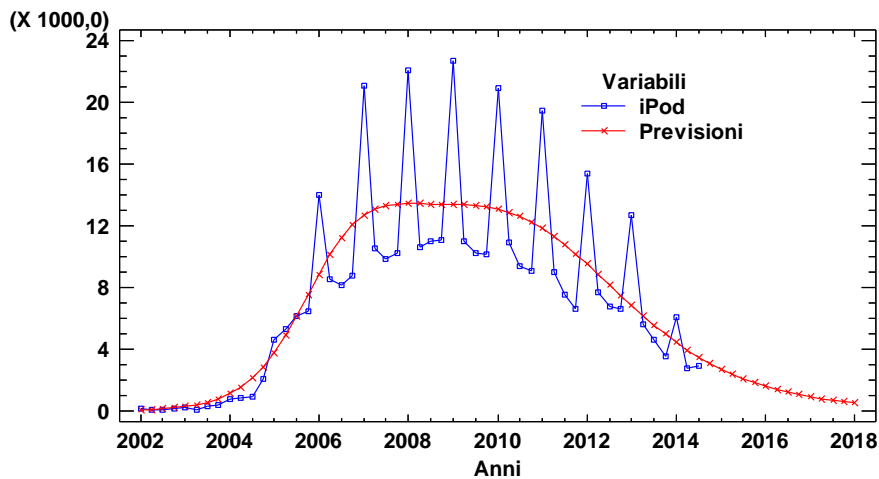


L'indice R^2 misura 0,67249, tuttavia ricordando che ora il modello è applicato ai dati di vendita istantanei, la variazione rispetto al modello precedente è relativa, come si può notare dalla sostanziale coincidenza dei modelli nel grafico di cui sopra.

Osservando i parametri, l'unica variazione degna di nota riguarda un aumento del 17% del parametro p_s che passa da un valore di 0,0014 a 0,00164 .

Si assiste inoltre ad un lieve aumento della stima del mercato potenziale K , che raggiunge quota 421'551.

Modello GuGu su dati istantanei



Per tener conto della componente stagionale, come nel precedente capitolo sul BM, si procede ora all'estensione del modello Guseo-Guidolin seguendo lo stesso procedimento.

4.7 - Prima estensione del modello Guseo-Guidolin con stagionalità proporzionale

In formule:

$$[K + A(t)] * [W(t + 0,5; p_c, q_c, p_s, q_s) - W(t - 0,5; p_c, q_c, p_s, q_s)]$$

Con:

$$W(t; p_c, q_c, p_s, q_s) = \sqrt{\frac{1 - e^{-(p_c+q_c)t}}{1 + \frac{q_c}{p_c} e^{-(p_c+q_c)t}} \frac{1 - e^{-(p_s+q_s)t}}{1 + \frac{q_s}{p_s} e^{-(p_s+q_s)t}}}$$

ed

$$A(t) = \left[a * \cos\left(\frac{2\pi t}{s}\right) + b * \sin\left(\frac{2\pi t}{s}\right) \right]$$

Nonlinear Regression - iPod 2001

Dependent variable: iPod_2001

Independent variables: t

Function to be estimated: $(K+a* \text{COSR}(6,28*t/s)+ b* \text{SINR}(6,28*t/s))* (\text{SQRT}(((1-\text{EXP}(-(pc+qc)*(t+0,5)))/(1+(qc/pc)*\text{EXP}(-(pc+qc)*(t+0,5)))) * (1-\text{EXP}(-(ps+qs)*(t+0,5)))/(1+(qs/ps)*\text{EXP}(-(ps+qs)*(t+0,5)))) - \text{SQRT}(((1-\text{EXP}(-(pc+qc)*(t-0,5)))/(1+(qc/pc)*\text{EXP}(-(pc+qc)*(t-0,5)))) * (1-\text{EXP}(-(ps+qs)*(t-0,5)))/(1+(qs/ps)*\text{EXP}(-(ps+qs)*(t-0,5))))$

Initial parameter estimates:

K = 420000,
a = -5300,0
s = 4,0
b = 180000,
pc = 0,00044
qc = 0,16
ps = 0,0015
qs = 0,3

Estimation method: Marquardt

Estimation stopped due to convergence of residual sum of squares.

Number of iterations: 3

Number of function calls: 29

EstimationResults

			<i>Asymptotic</i>	<i>95,0%</i>
		<i>Asymptotic</i>	<i>Confidence</i>	<i>Interval</i>
<i>Parameter</i>	<i>Estimate</i>	<i>Standard Error</i>	<i>Lower</i>	<i>Upper</i>
K	420617,	18038,6	384239,	456996,
a	-12842,4	70266,1	-154548,	128863,
s	3,99806	0,0338476	3,9298	4,06632
b	183161,	30090,9	122477,	243845,
pc	0,000507711	0,000200806	0,000102747	0,000912675
qc	0,151174	0,0147527	0,121423	0,180926
ps	0,00144564	0,00126573	-0,00110696	0,00399824
qs	0,292598	0,0593342	0,172939	0,412257

Analysis of Variance

<i>Source</i>	<i>Sum of Squares</i>	<i>Df</i>	<i>Mean Square</i>
Model	4,74561E9	8	5,93201E8
Residual	2,00867E8	43	4,67133E6
Total	4,94647E9	51	
Total (Corr.)	1,87607E9	50	

R-Squared = 89,2932 percent

R-Squared (adjusted for d.f.) = 87,5503 percent

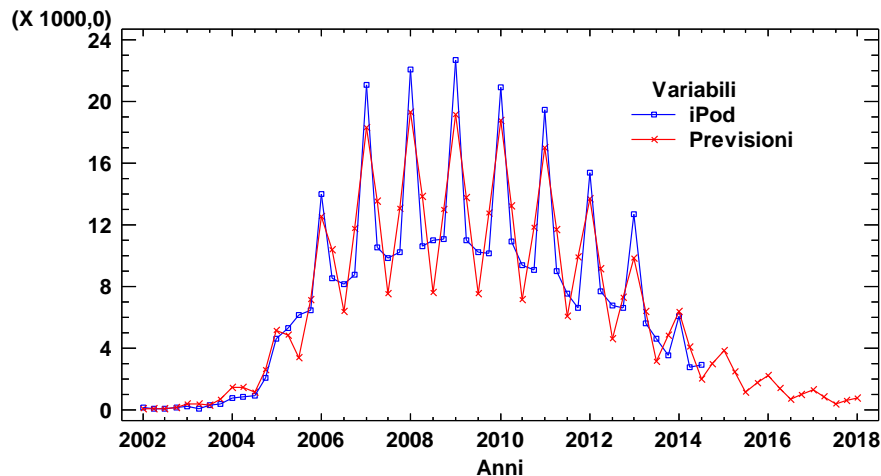
Standard Error of Est. = 2161,33

Mean absolute error = 1645,99

Durbin-Watson statistic = 3,71187

Lag 1 residual autocorrelation = -0,858264

Modello GuGu stagionale



Dal grafico si nota come il modello interpreti l'andamento dei dati in modo più soddisfacente, seguendone l'andamento generale per tutta la durata della serie.

Osservando l'adattamento del modello si assiste ad un netto miglioramento dell'indice R^2 che ora, col valore di 0,892931, esprime un buon risultato tenendo conto che l'analisi è posta sulle vendite istantanee.

Avendo a disposizione un numero maggiore di parametri, è normale ottenere un R^2 più alto. Un metodo per valutare l'effettiva convenienza del passaggio a questo modello, consiste nel calcolare l'indice di correlazione multipla parziale, $P^2 = \frac{R^2_{GuGuSeason} - R^2_{GuGu}}{1 - R^2_{GuGu}} = \frac{0.892931 - 0.672494}{1 - 0.672494} = 0,67308$, il cui valore conferma la scelta fatta.

Dai risultati di stima si nota una lieve diminuzione del mercato potenziale K , che ora vale 420'617 (migliaia) di unità, valore uguale a quello stimato dal primo modello GuGu.

Osservando la tabella dei parametri si assiste ad un ridimensionamento della componente innovativa in entrambi i processi di diffusione dovuta alla diminuzione dei valori stimati per entrambi i parametri p_s e p_c . Il parametro relativo al processo innovativo nella comunicazione diminuisce del 2,9%, mentre quello del processo di acquisizione vera e propria, p_c , registra una diminuzione del 13,6%, passando da un precedente valore di 0,001642 del modello GuGu standard su dati istantanei, ad un 0,001456 del modello attuale.

Parallelamente notiamo un aumento dei parametri relativi al processo di imitazione.

Rapportando le due componenti per entrambi i processi di diffusione, si ottiene infatti $\frac{q_s}{p_s} = \frac{0,292598}{0,0014456} = 202,41$ e $\frac{q_c}{p_c} = \frac{0,151174}{0,0005077} = 297,76$, mentre in precedenza si era ottenuto rispettivamente 174,46 e 297,76.

Come già osservato nell'estensione stagionale al BM, si può notare una prima interpretazione sommaria della stagionalità presente nei dati. Persiste quindi la difficoltà nell'attribuire il picco stagionale solo al primo trimestre e nel prevedere un andamento campanulare per i rimanenti tre *quarters* di ogni anno.

Come soluzione migliorativa si ripropone l'estensione del modello, sommando ad $A(t)$ due funzioni in seno e coseno per interpretare più efficacemente l'andamento stagionale.

4.8 - Seconda estensione del modello Guseo-Guidolin con stagionalità proporzionale

In formule:

$$[K + A(t)] * [W(t + 0,5; p_c, q_c, p_s, q_s) - W(t - 0,5; p_c, q_c, p_s, q_s)]$$

Con:

$$W(t; p_c, q_c, p_s, q_s) = \sqrt{\frac{1 - e^{-(p_c+q_c)t}}{1 + \frac{q_c}{p_c} e^{-(p_c+q_c)t}} \frac{1 - e^{-(p_s+q_s)t}}{1 + \frac{q_s}{p_s} e^{-(p_s+q_s)t}}}$$

ed

$$A(t) = \left[a * \cos\left(\frac{2\pi t}{s}\right) + b * \sin\left(\frac{2\pi t}{s}\right) + c * \cos\left(\frac{2\pi t}{2}\right) + d * \sin\left(\frac{2\pi t}{2}\right) \right]$$

Nonlinear Regression - iPod 2001

Dependent variable: iPod_2001

Independent variables: t

Function to be estimated: $(K + a * \text{COSR}(6,28 * t/s) + b * \text{SINR}(6,28 * t/s) + c * \text{COSR}(6,28 * t/2) + d * \text{SINR}(6,28 * t/2)) * (\text{SQRT}((1 - \text{EXP}(-(p_c+q_c) * (t+0,5))) / (1 + (q_c/p_c) * \text{EXP}(-(p_c+q_c) * (t+0,5)))) * (1 - \text{EXP}(-(p_s+q_s) * (t+0,5))) / (1 + (q_s/p_s) * \text{EXP}(-(p_s+q_s) * (t+0,5)))) - \text{SQRT}((1 - \text{EXP}(-(p_c+q_c) * (t-0,5))) / (1 + (q_c/p_c) * \text{EXP}(-(p_c+q_c) * (t-0,5)))) * (1 - \text{EXP}(-(p_s+q_s) * (t-0,5))) / (1 + (q_s/p_s) * \text{EXP}(-(p_s+q_s) * (t-0,5))))$

Initial parameter estimates:

K = 420000,
a = -13000,0
s = 4,0
b = 180000,
c = -35000,0
d = 87000,0
pc = 0,0005
qc = 0,15
ps = 0,0014
qs = 0,29

Estimation method: Marquardt

Estimation stopped due to convergence of residual sum of squares.

Number of iterations: 4

Number of function calls: 50

EstimationResults

			<i>Asymptotic</i>	<i>95,0%</i>
		<i>Asymptotic</i>	<i>Confidence</i>	<i>Interval</i>
<i>Parameter</i>	<i>Estimate</i>	<i>Standard Error</i>	<i>Lower</i>	<i>Upper</i>
K	419918,	5669,44	408468,	431368,
a	-12337,5	22342,9	-57459,9	32785,0
s	3,9984	0,0107533	3,97669	4,02012
b	183246,	9532,61	163995,	202498,
c	-76522,0	16929,2	-110711,	-42332,7
d	200033,	343193,	-493062,	893127,
pc	0,000505737	0,0000620335	0,000380457	0,000631016
qc	0,151373	0,00456326	0,142158	0,160589
ps	0,00139163	0,000377975	0,000628293	0,00215497
qs	0,294064	0,0184521	0,256799	0,331329

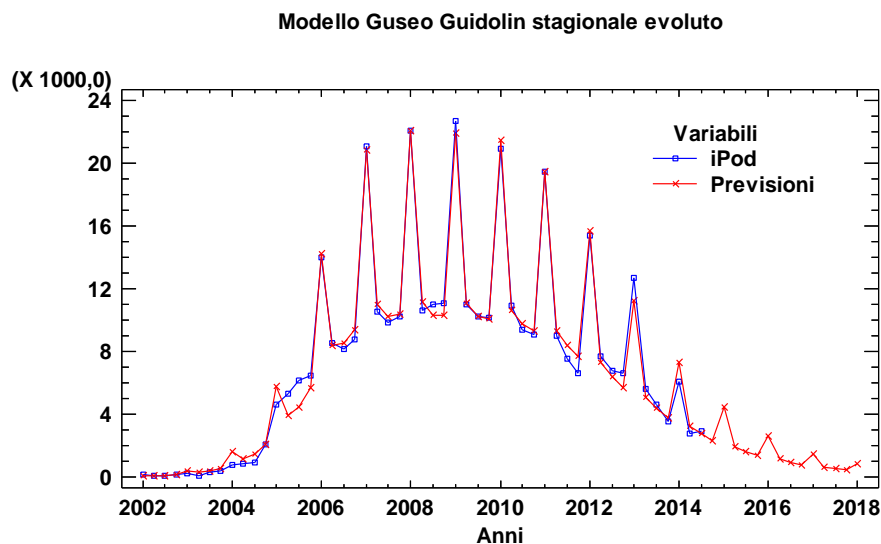
Analysis of Variance

<i>Source</i>	<i>Sum of Squares</i>	<i>Df</i>	<i>Mean Square</i>
Modello	4,92713E9	10	4,92713E8
Residuo	1,93429E7	41	471779,
Totale	4,94647E9	51	
Totale (Corr.)	1,87607E9	50	

R-Squared = 98,969 percent
 R-Squared (adjusted for d.f.) = 98,7426 percent
 Standard Error of Est. = 686,862
 Mean absolute error = 454,629
 Durbin-Watson statistic = 1,12625
 Lag 1 residual autocorrelation = 0,435535

Da un primo confronto grafico, l'adattamento del modello risulta piuttosto soddisfacente, e ciò viene ampiamente confermato dall'indice R^2 che raggiunge il valore di 0,98969; valore piuttosto alto per un modello applicato a dei dati di vendita istantanei.

Si può notare come l'andamento stagionale sia ora ben approssimato dai valori stimati, che continuano ad interpretare bene la difficoltà iniziale di diffusione dell'iPod.

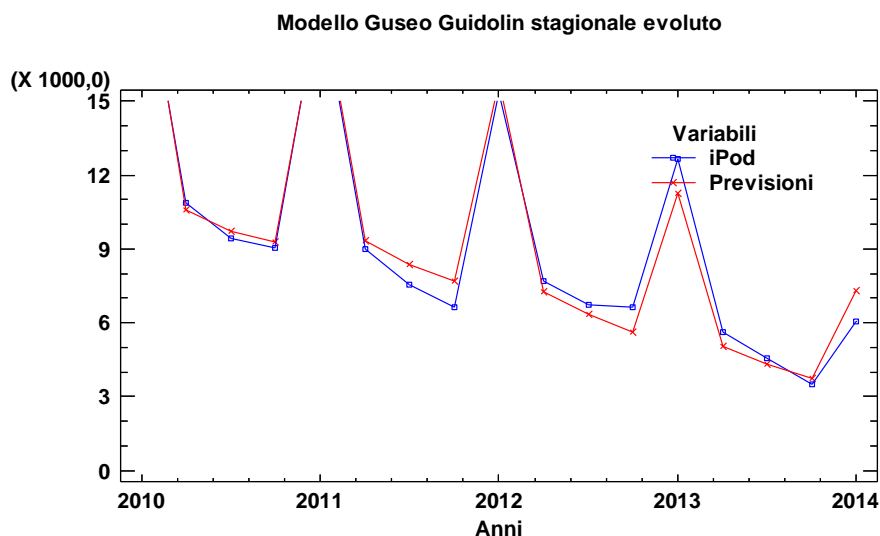


Il modello descrive un picco stagionale nel primo trimestre dell'anno 2005, proponendo un leggero calo di vendite nei due periodi successivi; da un punto di vista grafico, viene leggermente anticipata la ciclicità degli effetti stagionali che però ha effettivamente inizio nel primo trimestre del 2006. Questo anticipo comporta una leggera sottostima dei due valori, sicuramente l'unica degna di particolare interesse.

L'anno 2005 è stato particolarmente ricco di novità per l'attività commerciale della Apple, in quanto sono stati presentati in un solo anno i modelli di iPod *Shuffle* ed iPod *Nano* e probabilmente per questo motivo le vendite hanno continuato a crescere registrando quote maggiori a quelle proposte dal modello per i due trimestri considerati.

Fatta salva una leggera imperfezione descrittiva, l'effetto generale della stagionalità viene interpretato efficacemente nei periodi successivi, per tutta la durata del prodotto nel mercato.

Si pone ora l'attenzione sul periodo di vendita 2011-2012.



Ogni anno nel trimestre che precede l'inizio dei corsi delle "High school" e delle università, Apple ha lanciato una promozione chiamata "Back to school".

Dal 2006 ad oggi, nei mesi da luglio a settembre, la famosa campagna promozionale è stata dedicata a studenti e docenti di tutto il mondo, offrendo un buono spesa a fronte dell'acquisto di un computer (MacBook) di fascia alta.

Il periodo promozionale, pur variando di qualche settimana, è sempre stato proposto da luglio a settembre, trimestre che precede l'inizio degli anni accademici studenteschi, e che coincide esattamente con il quarto *quarters* degli anni fiscali nella convenzione finanziaria americana.

Nel 2011 l'azienda di Cupertino ha drasticamente ridotto il valore del buono spesa riconoscendo 100 dollari, contro i 230 mediamente offerti negli anni precedenti e per giunta limitandone l'utilizzo per il solo acquisto di software.



Figura (6) – Campagna promozionale di Apple: "Back to school" 2014

Apple stessa nel pubblicizzare la campagna promozionale aveva sempre proposto l'acquisto di un iPod tramite il buono spesa, ma quell'anno, per la prima volta, gli studenti non poterono avere in regalo il famoso lettore mp3.

Pur immaginando che queste scelte aziendali abbiano interessato solo una parte degli acquirenti di iPod, ciò rimane comunque una buona chiave di lettura per comprendere il lieve calo delle vendite del 4Q, non adeguatamente seguito dal modello.



L'anno successivo l'azienda di Cupertino non solo è tornata a rendere valido il buono spesa anche per gli hardware Apple, ma ha anche investito molto in pubblicità, presentando le nuove versioni colorate di iPod nello spot "Bounce", lanciato proprio in quel periodo.

Figura (7) – Immagine dello spot pubblicitario "Bounce", di Apple

Come si può notare dal primo grafico del modello stimato di questo paragrafo, il mercato ha risposto positivamente al rilancio del prodotto da parte di Apple, prolungando la forma campanulare che nello stesso periodo dell'anno 2011 sembrava volta a chiudersi.

Si passa ora ad una valutazione del modello matematico.

Considerando che la seconda estensione del modello Guseo-Guidolin si diversifica dalla precedente per l'aggiunta di due forme trigonometriche nella funzione $A(t)$, appare legittimo valutare il miglioramento ottenuto tramite l'indice di correlazione multipla parziale P^2 .

Il valore dell'indice $P^2 = \frac{R^2_{GuGuSeason_2} - R^2_{GuGuSeason_1}}{1 - R^2_{GuGuSeason_1}} = \frac{0,98969 - 0,892932}{1 - 0,892932}$, misura 0,9037, valore che conferma nettamente la migliore capacità esplicativa della devianza totale rispetto al precedente modello, più parsimonioso.

Notiamo che il mercato potenziale diminuisce leggermente rispetto al valore ottenuto in precedenza, raggiungendo ora la quota di 419'918.

Il processo di conoscenza del prodotto è stato quasi puramente imitativo, con un valore del relativo parametro di innovazione, $p_c = 0,000505$, prossimo quasi allo zero, e $q_c = 0,15137$. L'influenza innovativa è stata quindi molto bassa; forse è per questo motivo che la vera crescita delle vendite viene registrata solo due anni e mezzo dopo l'introduzione del primo iPod nel mercato, nel 2002. Nel processo di acquisto vero e proprio è presente una significativa, seppur contenuta, quota di innovatori, che forse aiutano a comprendere meglio la crescita repentina delle vendite avvenuta nell'anno 2005.

Dalle stime dei parametri si può notare come la componente imitativa continui a salire, raggiungendo una stima ancora più accentuata di quanto ottenuto con il primo modello stagionale GuGu.

Il parametro p_s , infatti, scende di altri quattro punti percentuali, passando dal valore di 0,0014456 a 0,001392. Di conseguenza, mentre il rapporto tra le due componenti del processo di comunicazione resta invariato, quello tra i parametri q_s e p_s sale ulteriormente, misurando $\frac{q_s}{p_s} = \frac{0,294064}{0,0013916} = 211,309$.

5 - Previsioni di vendite di iPod

Il campo delle previsioni è molto delicato, e, generalmente, i modelli di diffusione delle innovazioni vengono utilizzati più per comprenderne la storia evolutiva di un prodotto che a scopo puramente previsivo.

La stima del mercato potenziale m è sicuramente l'elemento più critico da affrontare per poter effettuare delle previsioni affidabili con l'utilizzo del BM.

Rispetto a questo problema, bisogna ricordare che il modello Guseo-Guidolin propone una soluzione, sostituendo il mercato potenziale m con una più credibile formulazione di potenziale dinamico K .

Per questo motivo è ragionevole ipotizzare che il modello GuGu, e sua estensione stagionale, siano meno affetti dai limiti previsivi validi per il modello standard di Bass.

Srinivasan e Mason (1986) hanno affermato che se la serie di dati non ha già registrato il picco massimo, spesso si possono verificare delle sconvenienze sottostime, con conseguenti problematiche relative alla previsione di chiusura del ciclo di vita del prodotto. In questo caso di studio, invece, il prodotto analizzato ha già superato il periodo di maturità, trovandosi ora all'inizio di una fase di declino. Rapportando la quota di vendite cumulate alla stima del mercato potenziale, otteniamo $\frac{395'715}{419'918} = 0,9424$; questo risultato indica che la saturazione del mercato dell'iPod è pari al 94,2%.

Il modello prevede che a livello mondiale saranno vendute 519'580 unità nell'ultimo trimestre del 2017, mentre l'ultimo picco stagionale, stando alla previsione, farà registrare 777'656 vendite nel primo trimestre del 2018.

La stima della vita residua dell'iPod nel mercato è quindi circa pari a 4 anni, e, considerando che il primo modello è stato introdotto nel 2002, dieci anni fa, si nota come il ciclo temporale di vita del prodotto abbia ormai raggiunto la fase conclusiva della permanenza stimata nel mercato mondiale.

Vengono presentate nel seguito alcune considerazioni relative al futuro scenario dei mercati in cui avranno luogo le ultime vendite di iPod.

5.1 – Considerazioni sul futuro scenario

- 1- Gli smartphones prodotti negli ultimi anni includono molte funzionalità, tra cui la capacità di riprodurre file multimediali di diverso tipo, con prestazioni sempre più elevate e competitive. L'azienda Apple produce il famoso iPhone, che, oltre ad avere delle ottime caratteristiche tecniche in campo di riproduzione audio-video, in alcuni suoi modelli appare esteticamente molto simile all'ultima generazione di iPod touch.



Figura (8) – Somiglianza tra iPhone 5 (a sinistra), ed iPod Touch

- 2- La notevole differenza di prezzo dei due prodotti (mediamente il lettore multimediale costa circa la metà di un iPhone), può far dubitare sulla possibile futura cannibalizzazione subita dall'iPod, in quanto si potrebbe considerarli due prodotti destinati a due fasce di mercato distinte.
- 3- Si ritiene comunque che avere a disposizione un solo dispositivo che unisca le funzionalità di cellulare e riproduttore audio-video, ceteris paribus, rappresenti un vantaggio ed una comodità per il consumatore. Nel 2007, infatti, lo stesso Steve Jobs affermò: “L'iPhone è il miglior iPod mai creato, e allora perchè non riempirlo di buona musica?”
- 4- Pur ipotizzando la possibile fedeltà al *brand* Apple degli acquirenti di iPod, bisogna tener conto che anche altre famose realtà, quali Samsung, Sony ed HTC, negli ultimi anni hanno prodotto smartphone con caratteristiche competitive nella qualità di riproduzione audio-video, proponendo recentemente delle tecnologie innovative ed efficienti per migliorare la qualità audio, col vantaggio di offrirle mediamente a prezzi più accessibili, paragonabili a quello di un iPod touch.

- 5- Un tempo era usanza comune tra i giovani scaricare mp3 da programmi *peer-to-peer*, e questo ha favorito la circolazione di un gran numero di canzoni in formato mp3, da inserire negli iPods. Ora invece vi sono diverse alternative per ascoltare musica in modo legale, o tramite servizi (uno su tutti, Spotify), o tramite streaming o piattaforme web, come Youtube.
- La funzione musicale è passata da essere un bene per cui le persone erano disposte a pagare, ad un servizio, ormai standard, che i nuovi dispositivi tecnologici offrono.
- 6- Lo stesso Tim Cook nel gennaio 2014 ha affermato che quello dell'iPod è un business ormai in declino. Tra nuovi investitori, e vecchi appassionati del lettore mp3, sarà interessante vedere come si muoverà l'azienda di Cupertino nel prossimo anno: se la vita dell'iPod è davvero volta al termine o se magari, come al suo solito, Apple ci riserverà qualche sorpresa.

6 – Conclusioni

L'iPod ha avuto indiscutibilmente un enorme successo. Di seguito vengono presentate alcune considerazioni per mettere in luce i fattori che hanno fatto dell'iPod uno status symbol mondiale.

Le caratteristiche tecniche, soprattutto nei primi anni, erano particolarmente innovative e offrivano prestazioni mediamente superiori ai competitors. Per citare uno dei numerosi esempi disponibili, ad esempio è noto che l'iPod *Shuffle* offriva una capacità di archiviazione di un gigabyte, mentre in quella fascia di mercato erano presenti lettori mp3 con appena 256 Mb. Sicuramente la semplicità di utilizzo, molto intuitivo, ha ridotto le resistenze che un'innovazione, specialmente se tecnologica, avrebbe trovato nella società.

Le analisi svolte in questo elaborato hanno sottolineato però un aspetto interessante: la diffusione dell'iPod ha avuto in prevalenza un carattere più imitativo che innovativo. Vale quindi la pena ragionare su quali possono essere stati i driver principali di questa diffusione.

La Apple ha sempre cercato di infondere nella clientela un'idea di esclusività, proponendo vari slogan, quali: "Soon there will be 2 kinds of people. Those who use computers, and those who use Apples" presto, nel mondo ci saranno due tipi di persone: quelle che usano un computer, e quelle che usano Apple. Da maggio dell'anno 2001 ha ritirato i suoi prodotti dalla grande distribuzione proponendo una catena di negozi appositamente dedicata alla vendita di prodotti Apple, gli Apple Store.

L'attenzione per il design, l'innovazione, e l'esclusività di prodotti e servizi marchiati Apple, ha creato nel tempo una forte fidelizzazione della clientela, portando qualcuno ad affermare che l'azienda di Cupertino sia l'unica al mondo a non avere clienti, ma fan. (G.Torrini, 2012).



L'azienda è riuscita ad introdurre nell'immaginario della clientela, l'idea che ogni nuovo prodotto sia frutto di un colpo di genio. Non stupisce infatti che il suo brand sia il più quotato al mondo con un valore stimato di 118 milioni di dollari.

Figura (9) – Clip posteriore su iPod Shuffle 2G

I creatori dell'iPod hanno sempre voluto proporre uno strumento versatile, e le sue ridotte dimensioni ne hanno concesso una portabilità senza precedenti. I primi slogan pubblicitari, infatti, recitavano: "1000 songs in your pocket".

Una svolta importante avviene nel 2005 con l'introduzione dell'iPod *Shuffle*: viene proposto integrato ad un filo che permette di tenerlo al collo, quasi come una collana, un oggetto di design.

L'anno successivo durante la presentazione di iPod Shuffle 2G, il più piccolo lettore musicale al mondo, Steve Jobs lo propone dotato di una clip posteriore, insistendo su un concetto molto importante : la vestibilità.

Sicuramente il passaparola tra gli acquirenti (potenziali ed effettivi) può aver avuto un ruolo fondamentale nell'incremento delle vendite, ma anche l'importanza del linguaggio non verbale non va sottovalutata. Il fatto di aver acquistato un iPod e di sfoggiarlo, indossandolo, è un messaggio ben chiaro che si trasmette, magari anche senza volerlo. Se poi si considera che, ragionevolmente, il prodotto è stato utilizzato maggiormente da un target di età giovane, forse più sensibile a questo tipo di comunicazione all'interno del gruppo, si può immaginare quanto ciò sia stato un aspetto importante per la diffusione dell'iPod.

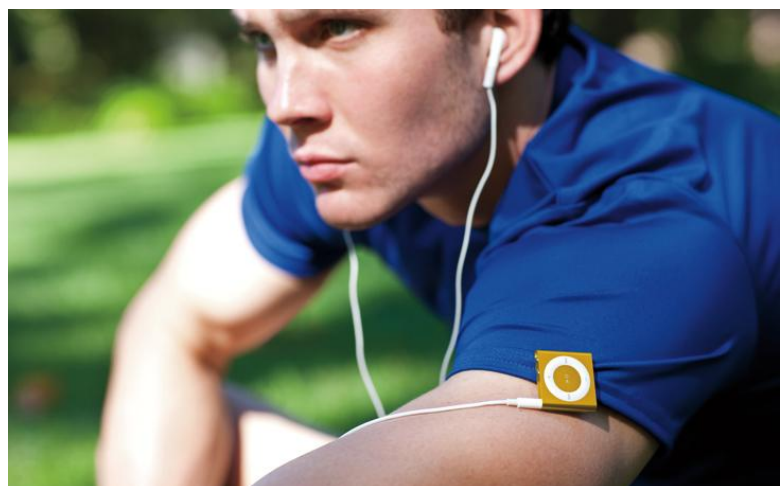


Figura (10) – Ragazzo che indossa iPod Shuffle 2G

Per quanto le caratteristiche tecniche del nuovo prodotto siano state importanti in fase d'acquisto, sembrerebbe che il brand abbia avuto un impatto ancora maggiore nei 400 milioni di persone che hanno comprato un iPod.

Da queste considerazioni trova spazio anche un'ultima riflessione: Apple consegna ai clienti ciò che vogliono, o semplicemente, vista l'efficacia del brand, presenta loro ciò che vorranno?

Probabilmente il successo è stato dato da un insieme di entrambe; è stata in grado di studiare le abitudini dei consumatori, intuirne le esigenze future, ed orientarne il gusto, meritando il successo mondiale che si è costruita negli anni.

Bibliografia

Bass, F.M., (1969), *A new product growth model for consumer durables*, Management Science, 15, 215-227.

Bass, P., Bass, F.M. (2001), *Diffusion of technology generations: A model of adoption and repeat sales*. Working paper: University of Texas at Dallas.

Bass, P., Bass, F.M. (2004), *IT Waves: two completed generational diffusion models*. Working papers: University of Texas at Dallas.

Blackwell, R.D., Miniard, P.W., Engel, J.F. (2001), *Consumer Behavior*, IX ed., Harcourt, Orlando.

Boyle, A., (2012), Some forecasts of the diffusion of e-assessment using a model. *The Innovation Journal: The Public Sector Innovation Journal*, 15(1).

Cera, D., (1987), *Nuovi marchi: perché troppo spesso falliscono*, Marketing Espansione, 37.

Choen W.M., Levinthal, D.A. (1990), *Absorptive capacity: a new perspective on learning and innovation*, administrative science quarterly, 35, 128-152.

Codeluppi, V., (2002), *Innovazione: il punto di vista del consumatore*. Ecole Supérieure de Commerce de Paris, Parigi.

- Devezas, T.C. (2005). *Evolutionary theory of technological change: State of the art and new approaches*. *Technological Forecasting and Social Change* 72: 1137–1152.
- Di Fonzo, T., Lisi, F. (2005), *Serie Storiche Economiche, Analisi Statistiche e Applicazioni*, Carocci Editore, Roma.
- Guidolin, M., Guseo, R. (2012), *Modeling seasonality in innovation diffusion: A regressive approach*. Working paper series, N.5/2012. Department of Statistical Sciences, University of Padua.
- Guseo, R. (2002). *Organizzazione statistica dell'informazione e scelte di gestione*, CEDAM, Padova.
- Guseo, R. (2004). *Interventi strategici e aspetti competitivi nel ciclo di vita di innovazioni*. Working Paper Series , N. 11/2004 . Department of Statistical Sciences, University of Padua.
- Islam, T., Meade, N., (1997), The diffusion of successive generations of a technology: a more general model. *Technological Forecasting and Social Change*, 56(1), 49-60.
- Jones, J.P. (1990), Advertising strong force or weak force? Two views of an ocean apart, *International Journal of Advertising*, 9.
- Mahajan, V., Muller, E., Bass, F.M. (1990), New product diffusion models in marketing: a review and directions for research. *Journal of Marketing*, 54(1), 1-26.
- Mahajan, V., Muller, E., (1996), Timing, diffusion, and substitution of successive generations of technological innovations: the IBM mainframe case. *Technological Forecasting and Social Change*, 51(2), 109-132.
- Manfredi, P. (1996), *Ciclo di vita di nuovi prodotti, modellistica non lineare*. Università di Pisa.
- Marchetti, C. (1980), *Society as a learning system: discovery, invention, and innovation cycles revisited*, *Technological Forecasting and Social Change*, 18, IIASA, Austria.
- Meade, N., Islam, T. (2006), Modeling and forecasting the diffusion of innovations, a 25 year review. *International Journal of Forecasting*, 22(3), 519-545.
- Metcalf, J.S., (2005), Ed Mansfield and the diffusion of innovation: an evolutionary connection, *Journal of Technology Transfer*, 30 (1-2), 171-181.

Norton, J.A., Bass, F.M. (1987), *A diffusion theory model of adoption and substitution for successive generations of high-technology products*, *Management Science*, 33,1069-1086.

Norton, J.A., Bass, F.M. (1992), *The evolution of technological generations: The law of capture*. *Sloan Management Review*, 33(2), 66-77.

Nutley, S., Davies, H., Walter, I. (2002) *Learning from the Diffusion of Innovations: Conceptual Synthesis I*. University of St, Andrews, Research Unit for Research Utilisation.

Rogers, E.M., (2003), *The diffusion of Innovation*, 5th ed., The Free Press, New York.

Seber, G.A.F., Wild, C.J.(1989), *Nonlinear Regression*, Wiley, New York.

Srinivasan, V. e Charlotte H. Mason, (1986), *Non linear least squares: estimation of new product diffusion models*. *Marketing science*, 5,169–178.

Tarde, G., (1980), *Les Lois de l'imitation, étude sociologique*, Alcan, Paris.

Tellis, J.G., Chandrasekaran, D., *Does Culture Matter? Assessing Response Biases in Cross-National Survey Research*, Working Paper 19-10, Marshall, University of south California.

Sitografia

Wikipedia, The Free Encyclopedia, <http://en.wikipedia.org/wiki/IPod>.

<http://it.wikipedia.org/wiki/Apple>

<http://it.wikipedia.org/wiki/Grafo> [http://it.wikipedia.org/wiki/Reti Bayesiane](http://it.wikipedia.org/wiki/Reti_Bayesiane)

http://en.wikipedia.org/wiki/Bass_diffusion_model.

Gianluca Torrini, <http://www.gianlucatorrini.com/labcomunicazione/2012/03/30/steve-jobs-e-bill-gates-apple-e-microsoft-due-gegni-a-confronto-padri-di-due-imperi-2/>.

Sito ufficiale Apple, <http://www.apple.com/pr/library/>.

<http://support.apple.com/kb/HT1353?viewlocale=it> IT.

http://brandirectory.com/league_tables/table/global-500-2012

<http://blog.nielsen.com/nielsenwire/consumer/us-kids-looking-forward-to-iholiday-2011/>

<http://www.tekrevue.com/apple-back-to-school-history/>

<http://www.macsedded.com/posts/apple-releases-new-ipod-tv-advert-bounce/>

<http://images.appleinsider.com/promo-090527.png>

