



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

L'effetto Cerenkov

Relatore

Prof. Kurt Lechner

Laureando

Gabriele Marotta

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Introduzione	1
1 Le equazioni di Maxwell	3
2 Campo generato da una quadricorrente arbitraria: metodo della funzione di Green	5
2.1 Caso di una particella in moto rettilineo uniforme	7
2.2 Caso di una particella con moto arbitrario: campi di Liénard-Wiechert	8
2.2.1 Campo nella zona delle onde ed emissione di radiazione	9
3 L'effetto Cerenkov	11
3.1 Moto rettilineo uniforme in un mezzo non dispersivo	11
3.1.1 Campo per $v < \frac{c}{n}$	13
3.1.2 Campo per $v > \frac{c}{n}$	14
3.2 Moto rettilineo uniforme in un mezzo dispersivo	18
3.2.1 Andamenti asintotici dei campi	23
3.2.2 Derivazione della formula per l'irraggiamento di Frank e Tamm	24
3.3 Rivelatori Cerenkov	26
A Cenni sulle funzioni di Bessel	29
Bibliografia	31

Introduzione

Nell'anno 1934 il fisico russo Pavel Cerenkov, all'epoca ancora un dottorando, venne incaricato dello studio della luminescenza emessa da sali di uranio in soluzione, bombardati da raggi γ provenienti da una sorgente radioattiva [2]. Le misure di intensità della radiazione venivano effettuate utilizzando come sensore i suoi stessi occhi, i quali venivano sottoposti a lunghe sedute di adattamento al buio. Fu nel corso di questi esperimenti che osservò, per caso, una debolissima luce blu emessa dalla soluzione liquida, investita dalla sorgente radioattiva. Incuriosito, iniziò allora un'analisi approfondita delle caratteristiche di questa radiazione. Ciò che emerse, negli anni successivi, fu che non poteva trattarsi di un semplice fenomeno di luminescenza dovuto a transizioni elettroniche, per diversi motivi: la radiazione osservata risultava polarizzata linearmente e, per di più, non veniva emessa in maniera isotropa, ma lungo una superficie conica, caratterizzata da un ben determinato angolo di apertura e il cui asse coincideva con la direzione dei raggi γ . Queste caratteristiche, oltre a non appartenere alla luminescenza, non dipendevano nemmeno dalle proprietà fisico-chimiche della soluzione utilizzata, cioè risultavano essere universali. Successivamente Cerenkov, guidato dal suo supervisore Sergej Vavilov, scoprì sperimentalmente che una particella carica viaggiante di moto rettilineo uniforme in un mezzo dielettrico con una velocità ultrarelativistica (prossima a c), era in grado di generare radiazione elettromagnetica. Queste osservazioni sperimentali si scontrarono con il fatto che, secondo l'elettrodinamica classica, solo particelle cariche accelerate possono generare radiazione.

Finalmente, nel 1937, I.E. Frank e I.M. Tamm riuscirono a spiegare correttamente il fenomeno che oggi chiamiamo *effetto Cerenkov*, dal punto di vista teorico [3]. L'interpretazione che i due fisici sovietici fornirono è la seguente: la *radiazione Cerenkov* non è dovuta direttamente ai raggi γ , ma piuttosto al moto rettilineo uniforme di elettroni ultrarelativistici generati dai raggi γ , che si muovono in un mezzo dielettrico con una velocità v maggiore della velocità $\frac{c}{n}$ della luce nel mezzo (quando n , indice di rifrazione, è maggiore dell'unità). L'emissione di radiazione si spiega pensando all'elettrone che si muove nel mezzo come un segnale impulsivo che, in prossimità della sua traiettoria, polarizza istantaneamente, per deformazione, le molecole del mezzo. Quest'ultime divengono pertanto delle sorgenti impulsive accelerate di campi elettromagnetici, che si sovrappongono al campo generato dalla particella in moto. Ciò nonostante accade che, per velocità $v < \frac{c}{n}$, le onde elettromagnetiche prodotte dalle cariche di polarizzazione sono in realtà onde evanescenti, e ciò che sopravvive è il solo *campo coulombiano* dell'elettrone in movimento, che non produce alcun fenomeno di irraggiamento. Quando invece la velocità della particella nel mezzo è maggiore di $\frac{c}{n}$, allora, si ha la produzione di onde elettromagnetiche vere e proprie che formano un *campo di radiazione*. Questo costituisce la radiazione Cerenkov, il cui fronte d'onda assume la tipica forma di una superficie conica.

Obiettivo di questa tesi è quello di ripercorrere l'analisi teorica dell'effetto Cerenkov eseguita da Frank e Tamm, per comprendere come dalle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica classica emerga naturalmente che, in condizioni limite di velocità ultrarelativistica costante, anche una ca-

rica in moto rettilineo uniforme in un mezzo è in grado di emettere radiazione. La spiegazione di Frank e Tamm, infatti, prende le mosse dalle equazioni di Maxwell in un mezzo, le quali tengono conto delle cariche di polarizzazione indotte nel dielettrico dalle cariche libere, tramite delle opportune modifiche delle equazioni nel vuoto. Pertanto queste equazioni determinano la dinamica del campo elettromagnetico totale, sovrapposizione dei campi microscopici generati dalle cariche di polarizzazione e dalle cariche libere.

Lo studio in dettaglio dell'effetto Cerenkov viene affrontato nel Capitolo 3. Per fare ciò è utile, innanzitutto, capire il comportamento del campo generato da una particella in moto rettilineo uniforme nel vuoto e di quello generato da una particella con un moto qualsiasi, dunque la modalità con cui una particella carica accelerata emette radiazione. Per iniziare, nel Capitolo 1 vengono brevemente presentate le equazioni dell'elettrodinamica. Nel Capitolo 2 determineremo rapidamente il quadripotenziale generato da una generica quadricorrente tramite il metodo della *funzione di Green*, e applicheremo il risultato ottenuto al caso di una particella in moto rettilineo uniforme e al caso di una particella che segue una generica linea di universo.

Per finire, dopo la descrizione dell'effetto Cerenkov, vedremo come la scoperta dell'omonima radiazione abbia trovato numerosi impieghi nella fisica delle particelle, in particolare nella costruzione dei rivelatori di particelle, i rivelatori Cerenkov per l'appunto.

Capitolo 1

Le equazioni di Maxwell

Cominciamo, come abbiamo detto, presentando le equazioni che regolano la dinamica di tutti i fenomeni elettromagnetici classici.

Consideriamo un sistema costituito da N particelle cariche interagenti, e indichiamo con $F^{\mu\nu}$ il tensore elettromagnetico, e con $y_i^\mu(s_i)$, u^μ , p_i^μ rispettivamente la funzione rappresentante la linea di universo γ_i (parametrizzata dal tempo proprio s), la quadrivelocità e il quadrimomento associati a una singola particella.

Infine denotiamo con j^μ la quadricorrente generata dal sistema, la cui forma esplicita è data dalla seguente espressione:

$$j^\mu(x) = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} e_i \delta^4(x - y_i) dy_i^\mu = \sum_{i=1}^N e_i \int \frac{dy_i^\mu}{ds_i} \delta^4(x - y_i(s_i)) ds_i. \quad (1.1)$$

Allora, le equazioni fondamentali sono [4, p. 32] ($i = 1 \dots N$):

$$\frac{dp_i^\mu}{ds_i} = e_i F^{\mu\nu}(y_i) u_{i\nu}, \quad (1.2)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0, \quad (1.3)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (1.4)$$

Si tratta di equazioni differenziali accoppiate. Solitamente le si indicano rispettivamente con il nome di: equazioni di Lorentz, identità di Bianchi ed *equazioni di Maxwell*. Nelle (1.2), il moto delle particelle è determinato dalla forma del campo, il quale è a sua volta determinato dal moto delle particelle secondo le (1.3) e le (1.4). Nel nostro caso, siamo interessati a trovare il campo generato da una generica quadricorrente conservata data da (1.1). Vogliamo dunque risolvere le identità di Bianchi e le equazioni di Maxwell in presenza di sorgenti. Le identità di Bianchi vengono risolte in termini di un quadripotenziale A^μ tale che

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (1.5)$$

e definito modulo trasformazioni di gauge del tipo

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda, \quad (1.6)$$

con Λ un qualsiasi campo scalare. Inserendo la soluzione delle identità di Bianchi nelle equazioni di Maxwell e scegliendo come condizione di gauge-fixing la gauge di Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$, si ottengono le seguenti equazioni per il quadripotenziale A^μ :

$$\square A^\mu = j^\mu, \tag{1.7}$$

lineari in A^μ e non omogenee. La soluzione generale di queste equazioni si ottiene sommando alla soluzione generale del sistema omogeneo associato una soluzione particolare. Le soluzioni del sistema omogeneo, ovvero i quadripotenziali A^μ che soddisfano

$$\square A^\mu = 0 \quad \partial_\mu A^\mu = 0,$$

corrispondono ai cosiddetti campi liberi o di radiazione, che risultano essere sovrapposizione lineare continua di onde elettromagnetiche elementari, cioè onde piane e monocromatiche che si propagano alla velocità della luce e tali che i campi elettrico e magnetico \mathbf{E} e \mathbf{B} soddisfino:

$$\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0.$$

Una soluzione particolare per la (1.7) la si ottiene tramite il metodo della funzione di Green, discusso nel prossimo capitolo.

Capitolo 2

Campo generato da una quadricorrente arbitraria: metodo della funzione di Green

In questo capitolo, salvo diversa indicazione, poniamo $c = 1$.

Il set di equazioni che intendiamo risolvere è il seguente:

$$\square A^\mu = j^\mu, \quad (2.1)$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.2)$$

Il metodo consiste nel cercare una soluzione della forma

$$A^\mu(x) = \int G(x, y) j^\mu(y) d^4y, \quad (2.3)$$

dove x rappresenta le coordinate spazio-temporali del punto in cui si valuta il campo e y quelle del punto in cui si valuta la sorgente. La funzione $G(x, y)$ viene detta *funzione di Green* e deve soddisfare la seguente condizione:

$$\square G(x, y) = \delta^4(x - y), \quad (2.4)$$

di modo che, inserendo la soluzione (2.3) in (2.1) e sfruttando la linearità dell'operatore \square , si ottiene:

$$\square A^\mu(x) = \int \square G(x, y) j^\mu(y) d^4y = \int \delta^4(x - y) j^\mu(y) d^4y = j^\mu(x).$$

Sfruttando l'invarianza della (2.1) sotto trasformazioni di Poincarè si vincola la forma di $G(x, y)$ per mezzo delle seguenti richieste [4, p. 180]:

$$G(x, y) = G(x - y) \quad G(\Lambda x) = G(x), \quad (2.5)$$

dove Λ è una generica trasformazione di Lorentz propria.

Tuttavia, l'equazione (2.4) e le (2.5) non determinano univocamente la funzione di Green. Si procede, dunque, aggiungendo una richiesta fisica legata alla causalità: il valore assunto dal quadripotenziale $A^\mu(x)$ al tempo x^0 e nella posizione \mathbf{x} non può dipendere dai valori assunti dalla quadricorrente $j^\mu(y)$ ad istanti successivi a x^0 , cioè in punti $y = (y^0, \mathbf{y})$, con $y^0 > x^0$. Ciò implica che deve valere $G(x, y) = 0$ non appena $y^0 > x^0$. In linea di principio, una tale richiesta andrebbe contro la Relatività dal momento che, in generale, la successione temporale di due eventi non è preservata da una generica trasformazione di Lorentz. Per mantenere l'ordinamento temporale in ogni sistema di riferimento occorre che $G(x, y)$ sia non nullo solo per eventi di coordinate x e y connessi causalmente, vale a dire per $(x - y)^2 \geq 0$.

In sintesi, ci siamo ricondotti dalla ricerca di una soluzione per le (2.1), (2.2) alla ricerca di una soluzione per il seguente set di equazioni:

$$\square G(x) = \delta^4(x), \quad (2.6)$$

$$G(\Lambda x) = G(x), \quad (2.7)$$

$$G(x) = 0 \quad \text{per} \quad x^0 < 0. \quad (2.8)$$

La sola e unica soluzione di queste equazioni è data da [4, p. 185]:

$$G_{ret}(x) = \frac{\delta(x^0 - |\mathbf{x}|)}{4\pi|\mathbf{x}|} = \frac{\delta(t - r)}{4\pi r} \quad \text{con} \quad r = |\mathbf{x}|, \quad (2.9)$$

che può essere riscritta nella seguente forma, Lorentz invariante a vista:

$$G_{ret}(x) = \frac{\Theta(x^0)\delta(x^2)}{2\pi}, \quad (2.10)$$

dove con Θ si denota la funzione a gradino di Heaviside. La suddetta soluzione viene chiamata *funzione di Green ritardata*, e d'ora in poi la indicheremo semplicemente con $G(x)$. Da notare che $G(x)$ ha supporto solo su eventi connessi causalmente da segnali di tipo luce, il che sta a ribadire il fatto che i segnali elettromagnetici si propagano, nel vuoto, con una velocità pari a c .

Una volta ottenuta la funzione di Green, inserendo la (2.10) nella (2.3), troviamo il cosiddetto *potenziale ritardato*:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{2\pi} \int \Theta(x^0 - y^0)\delta((x - y)^2)j^\mu(y) d^4y, \quad (2.11)$$

oppure, usando la scrittura (2.9) :

$$A^\mu(x) = A^\mu(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{j^\mu(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y. \quad (2.12)$$

Dalla (2.12) si capisce il motivo per cui il potenziale viene detto "ritardato": il valore di A^μ all'istante t e in \mathbf{x} dipende dallo stato della sorgente non allo stesso istante, bensì al *tempo ritardato* $t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c}$, diminuito rispetto a t del tempo necessario al segnale elettromagnetico a percorrere la distanza $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ tra il punto in cui si valuta il potenziale e il punto in cui si trova la carica.

2.1 Caso di una particella in moto rettilineo uniforme

Applichiamo, adesso, il risultato appena ottenuto al caso di una particella in moto rettilineo uniforme nel vuoto. Supponendo che si muovi con una quadrirelatività $u^\mu = (\gamma, \gamma \mathbf{v})$ costante ($u^\mu u_\mu = 1$) e che all'istante $t = 0$ passi per l'origine, allora, da (1.1) abbiamo che la sua linea di universo e la quadricorrente associata sono:

$$y^\mu(s) = su^\mu \quad \rightarrow \quad j^\mu(y) = eu^\mu \int \delta^4(y - su) ds. \quad (2.13)$$

Dunque, inserendo la (2.13) nella formula (2.11) per il potenziale, si ha:

$$A^\mu(x) = \frac{eu^\mu}{2\pi} \int \Theta(x^0 - su^0) \delta(f(s)) ds, \quad (2.14)$$

dove definiamo la funzione di s

$$f(s) = (x - su)^2 = x^2 - 2s(ux) + s^2 \quad \text{con} \quad (ux) = u^\mu x_\mu. \quad (2.15)$$

Essendo quadratica in s , risulta che $f(s)$ ammette i due zeri

$$s_\pm(x) = (ux) \mp \sqrt{(ux)^2 - x^2}, \quad (2.16)$$

entrambi reali per ogni x , e tali che:

$$x^0 - s_+ u^0 > 0 \quad x^0 - s_- u^0 < 0. \quad (2.17)$$

Per calcolare A^μ , utilizziamo la regola della composizione della distribuzione delta con una funzione:

$$\delta(f(s)) = \frac{\delta(s - s_+)}{|f'(s_+)|} + \frac{\delta(s - s_-)}{|f'(s_-)|}. \quad (2.18)$$

Osserviamo che, per via delle (2.17) e della presenza della funzione di Heaviside nella (2.14), solo il primo termine della (2.18) contribuisce al quadripotenziale. Si arriva così al seguente risultato [4, p. 195]:

$$A^\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{u^\mu}{\sqrt{(ux)^2 - x^2}}. \quad (2.19)$$

Introducendo il vettore

$$\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{v}t,$$

che ad ogni istante t congiunge il punto di osservazione \mathbf{x} con la posizione $\mathbf{y} = \mathbf{v}t$ della particella, la (2.19) può essere riscritta in termini del vettore \mathbf{R} come:

$$A^\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{\left(1, \frac{\mathbf{v}}{c}\right)}{\left[R^2 + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2}{c^2} - \frac{v^2 R^2}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.20)$$

in cui è stata reintrodotta la velocità della luce. Nel caso semplificato in cui il moto avviene lungo l'asse z , cioè $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{u}}_z$, la (2.20) assume la forma:

$$A^\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{\left(1, \frac{v\hat{\mathbf{u}}_z}{c}\right)}{\left[(z-vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(x^2 + y^2)\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.21)$$

Dalla (2.21) si ottiene il tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ tramite la (1.5), e da questo le espressioni per i campi elettrico e magnetico, date da:

$$\mathbf{E}(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{x} - vt\hat{\mathbf{u}}_z)}{\left[(z-vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(x^2 + y^2)\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}. \quad (2.22)$$

Ad ogni istante t il campo elettrico è diretto come il vettore \mathbf{R} , mentre il campo magnetico è tangente a delle circonferenze concentriche alla traiettoria.

Dalle (2.21) e (2.22) si vede che, a grandi distanze dalla sorgente, per ogni istante di tempo t fissato, il potenziale ha l'andamento asintotico $A^\mu \sim \frac{1}{|\mathbf{x}|} \equiv \frac{1}{r}$, mentre il campo elettromagnetico si comporta come $F^{\mu\nu} \sim \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \equiv \frac{1}{r^2}$. Pertanto si è in presenza di un *campo coulombiano*, che non emette alcuna radiazione. In realtà quest'ultimo risultato era facilmente prevedibile, dal momento che, per mezzo di un boost lungo l'asse z , è possibile passare dal sistema di riferimento in cui la particella è in moto a quello in cui è a riposo; ma se nel secondo caso, com'è noto, non si ha irraggiamento, allora lo stesso deve valere per il primo. Da notare che, ponendo nelle (2.21) e (2.22) $v = 0$, ci si riconduce immediatamente al potenziale e al campo di una particella carica statica.

2.2 Caso di una particella con moto arbitrario: campi di Liénard-Wiechert

Consideriamo una particella carica che segue una generica linea di universo $y^\mu(s)$. La quadricorrente associata è

$$j^\mu(y) = e \int u^\mu(s) \delta^4(x - y(s)) ds,$$

che, inserita nella formula (2.11), restituisce

$$A^\mu(x) = \frac{e}{2\pi} \int u^\mu(s) \Theta(x^0 - y^0(s)) \delta(f(s)) ds,$$

in cui è stata introdotta la funzione

$$f(s) = (x - y(s))^2 = (x^0 - y^0(s))^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}(s)|^2.$$

Anche in questo caso, si può dimostrare che $f(s)$ ammette due zeri reali $s_\pm(x)$ che soddisfano le disuguaglianze (2.16), per cui, usando la regola (2.18), si giunge al cosiddetto *quadripotenziale di Liénard e Wiechert* [4, p. 208]:

$$A^\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{u^\mu(s)}{(x - y(s))u(s)} \Big|_{s=s_\pm(x)}. \quad (2.23)$$

Riscriviamo il potenziale di Liénard-Wiechert mettendo in evidenza il tempo ritardato t' , definito ponendo:

$$\begin{aligned} t' = y^0(s_+) &\rightarrow s_+ = s_+(t') \rightarrow y^\mu(t') = (t', \mathbf{y}(t')), \\ y^0(s_+) - x^0 &= |\mathbf{x} - \mathbf{y}(s_+)| \Rightarrow t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}(t')|. \end{aligned}$$

Introducendo il vettore $\mathbf{R}(t') = \mathbf{x} - \mathbf{y}(t')$, come già fatto nel caso di una particella in moto rettilineo uniforme, e ripristinando la velocità della luce c , il quadripotenziale (2.23) assume la forma:

$$A^\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{\left(1, \frac{\mathbf{v}(t')}{c}\right)}{R - \mathbf{R}(t') \cdot \frac{\mathbf{v}(t')}{c}}. \quad (2.24)$$

Come è facile vedere, anche questo potenziale si comporta, a grandi distanze, come $\frac{1}{r}$. Tuttavia, adesso, il campo elettromagnetico possiede delle caratteristiche radicalmente diverse rispetto a quelle del caso precedente. Essenzialmente, ciò è dovuto al fatto che stavolta la velocità è indirettamente una funzione del tempo t tramite il tempo ritardato $t'(t, \mathbf{x})$. Di conseguenza le derivate $\partial^\mu A^\nu$, che compaiono nell'espressione del tensore $F^{\mu\nu}$, portano alla comparsa di termini proporzionali all'accelerazione $\mathbf{a}(t') = \frac{d\mathbf{v}(t')}{dt'}$, che moltiplicati per il numeratore non derivato della (2.24) forniscono termini che complessivamente, a grandi distanze, decrescono come $\frac{1}{r}$, non più come $\frac{1}{r^2}$. Precisamente, svolgendo i conti [4, p. 212], quello che si trova è che il tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ ammette una scrittura del tipo:

$$F^{\mu\nu} = F_v^{\mu\nu} + F_a^{\mu\nu},$$

dove $F_v^{\mu\nu}$ è detto *campo di velocità* (o coulombiano) e $F_a^{\mu\nu}$ è detto *campo di accelerazione*. Il primo coinvolge solo la quadrivelocità u^μ della particella, mentre il secondo presenta anche una dipendenza dall'accelerazione. In particolare, a grandi distanze, i due campi decrescono come

$$F_v^{\mu\nu} \sim \frac{1}{r^2} \quad F_a^{\mu\nu} \sim \frac{1}{r},$$

e ne consegue che $F_a^{\mu\nu}$ domina su $F_v^{\mu\nu}$. Dunque, asintoticamente, il campo totale decresce come $\frac{1}{r}$. Dalla linearità nella corrente j^μ della (2.11), queste ultime osservazioni possono essere estese a un generico sistema di particelle cariche.

2.2.1 Campo nella zona delle onde ed emissione di radiazione

Abbiamo appena visto che, a grandi distanze da un sistema carico, in quella che in letteratura viene chiamata *zona delle onde*, il campo elettromagnetico generato dal sistema coincide, eventualmente, con il campo di accelerazione. Vogliamo ora mostrare rapidamente che, nella zona delle onde, il campo di accelerazione si comporta come un campo di radiazione, cioè risulta, in prima approssimazione, sovrapposizione di onde elementari.

Prendiamo una generica quadricorrente $j^\mu(y)$ con un'estensione spaziale limitata: $j^\mu(t, \mathbf{y}) = 0$ per $r = |\mathbf{y}| > l, \forall t$. Sappiamo che j^μ genera il quadripotenziale (2.12), e ponendoci nelle condizioni $|\mathbf{y}| < l, |\mathbf{x}| \gg l$, otteniamo:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{4\pi r} \int j^\mu(t - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{y}) d^3y \quad \text{con} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{r}. \quad (2.25)$$

Sfruttando la linearità rispetto alla corrente, e il fatto che questa può essere decomposta spettralmente nella sovrapposizione di correnti monocromatiche, possiamo valutare $A^\mu(x)$ studiando singolarmente ogni componente monocromatica con pulsazione ω del tipo $j^\mu(t, \mathbf{y}) = e^{i\omega t} j^\mu(\omega, \mathbf{y}) + c.c.$. Inserendo una tale corrente nella (2.25) si giunge a

$$A^\mu(x) = e^{ik \cdot x} \epsilon^\mu + c.c. \quad \text{con} \quad \epsilon^\mu = \frac{1}{4\pi r} \int e^{i\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}} j^\mu(\omega, \mathbf{y}) d^3 y + c.c. \quad , \quad k \equiv k^\mu = (\omega, \omega \mathbf{n}), \quad (2.26)$$

che corrisponde con ottima approssimazione a un'onda elementare piana che si propaga in direzione radiale \mathbf{n} . L'approssimazione è valida se valutiamo il potenziale in una regione con estensione spaziale piccola rispetto a r , di modo che le variazioni di r e \mathbf{n} siano fortemente limitate.

Capitolo 3

L'effetto Cerenkov

In questo capitolo, salvo diversa indicazione, la velocità della luce c è sempre presente.

Si consideri una particella carica che si muove con una velocità $v < c$ costante all'interno di un mezzo dielettrico, il cui indice di rifrazione denotiamo con n .

Come già accennato nell'introduzione della tesi, la teoria dell'effetto Cerenkov di Frank e Tamm si basa sulle equazioni di Maxwell in un mezzo. Il metodo con cui si intende procedere è il seguente: nel Paragrafo 3.1 considereremo dapprima un mezzo non dispersivo, il cui indice di rifrazione n non dipende dalla frequenza della radiazione che lo attraversa; si andrà dunque a studiare il campo macroscopico totale, generato dalla particella e dalle cariche di polarizzazione (a cui ci riferiremo chiamandolo, semplicemente, campo prodotto dalla particella), nei due casi distinti $v < \frac{c}{n}$ e $v > \frac{c}{n}$. Vedremo come l'emissione di radiazione avvenga solamente se è soddisfatta la condizione $v > \frac{c}{n}$; tuttavia, in questo caso, l'ipotesi non fisica di un mezzo non dispersivo fa sì che il campo prodotto presenti una divergenza in corrispondenza della superficie rappresentante il fronte d'onda della radiazione emessa, la cui forma caratteristica è quella di un cono con vertice posto, in ogni istante, sulla posizione della particella: si tratta del cosiddetto cono di Mach. Ciò ha come conseguenza l'emissione di una quantità infinita di energia nell'unità di tempo; questa difficoltà verrà superata in seguito, nel Paragrafo 3.2, in cui determineremo il campo prodotto da una particella in moto rettilineo uniforme in un mezzo dispersivo, assieme alla formula per l'irraggiamento di Frank e Tamm, che fornisce la quantità di energia emessa nell'unità di frequenza e di spazio percorso dalla particella. Per finire, nel Paragrafo 3.3, faremo un accenno ai rivelatori Cerenkov.

3.1 Moto rettilineo uniforme in un mezzo non dispersivo

Scegliendo il sistema di unità di misura di Heaviside-Lorentz (in cui $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$), le equazioni di Maxwell all'interno di un mezzo dielettrico generico e in presenza di sorgenti vengono scritte introducendo il campo vettoriale spostamento dielettrico $\mathbf{D} = \epsilon_r \mathbf{E}$ e il campo magnetizzante $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_r}$, i quali tengono conto, rispettivamente, della presenza delle cariche di polarizzazione e delle correnti di magnetizzazione indotte dalle cariche libere e dalle correnti di conduzione. Nella notazione

tridimensionale le equazioni assumano la forma [5, p. 338]

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\mathbf{j}}{c}, \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.4)$$

Consideriamo adesso un mezzo dielettrico che sia omogeneo, isotropo e privo di qualunque proprietà magnetica, ossia con una permeabilità magnetica relativa $\mu_r = 1$. Il suo indice di rifrazione è perciò dato da $n = \sqrt{\epsilon_r}$, con ϵ_r la permittività elettrica relativa del mezzo.

Supponiamo quindi che il mezzo sia non dispersivo, cioè $n = \sqrt{\epsilon_r} = \text{cost.}$ e riscriviamo le equazioni di Maxwell in un tale mezzo, in cui si ha $\mathbf{D} = \epsilon_r \mathbf{E} = n^2 \mathbf{E}$ e $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_r} = \mathbf{B}$.

Le (3.1) - (3.4), allora, divengono:

$$-\frac{n^2}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{c}, \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{n^2}, \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.8)$$

La soluzione generale delle equazioni (3.6) e (3.8) in termini dei potenziali scalare A^0 e vettore \mathbf{A} sono date dalle solite espressioni:

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.9)$$

Inserendo le (3.9) nelle equazioni (3.5) e (3.7), ricordando che, per un dato campo di vettori \mathbf{F} vale l'identità operatoriale $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$, si ottiene:

$$\frac{n^2}{c} \frac{\partial(\nabla A^0)}{\partial t} + \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\mathbf{j}}{c}, \quad (3.10)$$

$$-\nabla^2 A^0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{n^2}, \quad (3.11)$$

e imponendo la gauge di Lorenz adattata

$$\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial A^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (3.12)$$

si arriva alle seguenti equazioni per il quadripotenziale A^μ :

$$\square_n A^\mu = \left(\frac{\rho}{n^2}, \frac{\mathbf{j}}{c} \right) \quad \text{con} \quad \square_n \equiv \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (3.13)$$

Consideriamo quindi una particella carica in moto rettilineo uniforme nel mezzo con una quadrivelocità $u^\mu = (\gamma, \frac{\gamma \mathbf{v}}{c})$ costante. Per semplicità scegliamo ancora una volta un sistema di riferimento con l'asse z coincidente con la traiettoria della particella, e utilizziamo delle coordinate cilindriche

(r, ϕ, z) , dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e ϕ rappresentano le coordinate polari sul piano xy . Dal momento che, in questo caso, la densità di carica ρ e la densità di corrente \mathbf{j} sono date da

$$\rho(t, \mathbf{x}) = eu^0 \int \delta^4(x - us) ds = e\delta(z - vt)\delta(x)\delta(y) \quad \mathbf{j} = \rho\mathbf{v}, \quad (3.14)$$

confrontando la parte temporale ($\mu = 0$) e spaziale ($\mu = i$) delle equazioni (3.13), si ottiene una relazione tra il potenziale vettore e il potenziale scalare:

$$\square_n \mathbf{A} = \frac{\rho\mathbf{v}}{c} = \frac{(n^2 \square_n A^0)\mathbf{v}}{c} = \square_n \left(\frac{n^2 A^0}{c} \mathbf{v} \right) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A} = \frac{n^2 A^0}{c} \mathbf{v}, \quad (3.15)$$

per cui è sufficiente risolvere le (3.13) per $\mu = 0$, ovvero l'equazione:

$$\square_n A^0 = \frac{\rho}{n^2}. \quad (3.16)$$

3.1.1 Campo per $v < \frac{c}{n}$

Nel Paragrafo 2.1 abbiamo risolto le equazioni per il quadripotenziale $\square A^\mu = j^\mu$, per una quadricorrente j^μ generata da una particella in moto rettilineo uniforme nel vuoto ($n = 1$) con una velocità $v < \frac{c}{n} = c$, giungendo alla soluzione (2.21).

Per una particella che si muove in un mezzo abbiamo $n \neq 1$, ma nel particolare caso in esame è comunque soddisfatta la condizione $v < \frac{c}{n}$. È possibile dunque trovare una soluzione per la (3.16) notando che le equazioni di Maxwell nel mezzo (3.5) - (3.8) si ottengono dalle analoghe equazioni del vuoto (in cui $n = 1$) effettuando le seguenti sostituzioni:

$$\mathbf{E} \rightarrow n\mathbf{E} \quad \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} \quad c \rightarrow \frac{c}{n} \quad \rho \rightarrow \frac{\rho}{n} \quad \mathbf{j} \rightarrow \frac{\mathbf{j}}{n}. \quad (3.17)$$

Perciò la soluzione per la (3.16) la si ottiene eseguendo le medesime sostituzioni sulla componente $\mu = 0$ della (2.21), cioè:

$$A^0 \rightarrow nA^0 \quad c \rightarrow \frac{c}{n} \quad e \rightarrow \frac{e}{n}. \quad (3.18)$$

Risulta allora che la soluzione per la (3.16) è data da:

$$A^0(t, \mathbf{x}) = \frac{e}{4\pi n^2} \frac{1}{\sqrt{(z - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2 n^2}{c^2}\right) r^2}}, \quad (3.19)$$

da cui si ricava \mathbf{A} usando la (3.15), e quindi i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} dalle (3.9). Anche questi ultimi, però, possono essere ottenuti rapidamente dai campi (2.22) attraverso le sostituzioni (3.17), ottenendo:

$$\mathbf{E}(x) = \frac{e}{4\pi n^2} \frac{(1 - \frac{v^2 n^2}{c^2})(\mathbf{x} - vt\hat{\mathbf{u}}_z)}{\left[(z - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2 n^2}{c^2}\right) r^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{B}(x) = \frac{ev}{4\pi n^2 c} \frac{(1 - \frac{v^2 n^2}{c^2}) r \hat{\mathbf{u}}_\phi}{\left[(z - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2 n^2}{c^2}\right) r^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.21)$$

Le (3.19), (3.20) e (3.21) ci dicono che le grandezze A^μ , \mathbf{E} e \mathbf{B} , diverse da zero su tutto lo spazio, divergono solo nei punti ($r = 0, z = vt$), ovvero sulla traiettoria della particella.

Mostriamo adesso, con un semplice calcolo, che non si ha emissione di radiazione elettromagnetica da parte della particella, e quindi di radiazione Cerenkov.

Data la simmetria cilindrica del sistema, dimostriamolo calcolando l'energia totale che attraversa un cilindro coassiale con la traiettoria della particella, di altezza $\Delta z = z_2 - z_1$ e raggio r tendente all'infinito, ovvero il flusso del vettore di Poynting $\mathbf{S} = c\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ attraverso questa superficie. Svolgendo i calcoli si trova la seguente espressione per \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \left(\frac{e}{4\pi n^2} \right)^2 \frac{\left(1 - \frac{v^2 n^2}{c^2}\right)^2 v r (r \hat{\mathbf{u}}_z + (vt - z) \hat{\mathbf{u}}_r)}{\left((z - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2 n^2}{c^2}\right) r^2 \right)^3}. \quad (3.22)$$

Il vettore possiede una componente S_z , parallela alla traiettoria della particella, e una componente radiale S_r sul piano xy . La componente S_z risulta essere sempre positiva, diretta nel verso del moto, e non contribuisce al calcolo del flusso di \mathbf{S} . Diversamente, come si può facilmente vedere dalla (3.22), ad ogni istante S_r è positiva (flusso di energia uscente) per $z < vt$, cioè alle *spalle* della particella, e negativa (flusso di energia entrante) per $z > vt$, cioè *davanti* alla particella. Di conseguenza, integrando da $t = -\infty$ ($z = -\infty$) a $t = +\infty$ ($z = +\infty$), il calcolo del flusso totale di energia attraverso la superficie cilindrica considerata restituisce 0 come risultato finale, in quanto l'energia che viene emessa alle spalle della particella durante il suo tragitto viene riassorbita davanti.

3.1.2 Campo per $v > \frac{c}{n}$

In questo caso il ragionamento fatto nel precedente sottoparagrafo non è più valido, e per risolvere la (3.16) è necessario ricorrere nuovamente al metodo della funzione di Green. Analogamente al caso nel vuoto, cerchiamo una *funzione di Green ritardata nel mezzo* $G_n(x)$ che soddisfi l'equazione (2.6) con l'operatore \square_n al posto di \square :

$$\square_n G_n(ct, \mathbf{x}) = \delta(ct) \delta^3(\mathbf{x}), \quad (3.23)$$

e l'equazione (2.8), necessaria per preservare la causalità. Salta invece la condizione (2.7), legata all'invarianza di Lorentz.

Effettuando la sostituzione $t \rightarrow \frac{t}{n}$ nella (2.6) e usando la proprietà della distribuzione delta $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$ si ha

$$\left(\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) G\left(\frac{ct}{n}, \mathbf{x}\right) = n \delta(ct) \delta^3(\mathbf{x}) \quad \Longrightarrow \quad \square_n \left(\frac{1}{n} G\left(\frac{ct}{n}, \mathbf{x}\right) \right) = \delta(ct) \delta^3(\mathbf{x}). \quad (3.24)$$

Confrontando quest'ultima espressione con la (3.23) e ricordando la funzione di Green (2.10), ci si convince facilmente che la soluzione causale della (3.23) è data da

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \frac{1}{n} G\left(\frac{ct}{n}, \mathbf{x}\right) = \frac{1}{2\pi n} \Theta\left(\frac{ct}{n}\right) \delta\left(\frac{c^2 t^2}{n^2} - |\mathbf{x}|^2\right) \\ &= \frac{1}{2\pi n} \Theta(ct) \delta(x_n^2), \end{aligned} \quad (3.25)$$

in cui è stato opportunamente modificato il prodotto scalare nello spazio-tempo di Minkowski, definendo

$$(a^\mu b_\mu)_n = \frac{a^0 b_0}{n^2} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

A questo punto, la soluzione dell'equazione (3.16) è:

$$A^0(x) = \int G_n(x-y) \frac{\rho(y)}{n^2} d^4y, \quad (3.26)$$

la quale, sostituendo a $G_n(x-y)$ la sua espressione (3.25) e a ρ la sua espressione in (3.14), diventa

$$\begin{aligned} A^0(x) &= \frac{eu^0}{2\pi n^3} \iint \Theta(ct - y^0) \delta((x-y)_n^2) \delta^4(x-us) d^4y ds \\ &= \frac{eu^0}{2\pi n^3} \int \Theta(ct - u^0 s) \delta(f(s)) ds, \end{aligned} \quad (3.27)$$

dove, come al solito, abbiamo definito la funzione di s

$$f(s) = (x-us)_n^2 = x_n^2 - 2s(ux)_n + s^2 u_n^2,$$

analoga a quella del paragrafo 2.1.

Si procede, quindi, cercando gli zeri di $f(s)$ e usando la regola (2.18). Dai conti [4, p. 363] emerge che anche in questo caso esistono due zeri $s_\pm(x)$, ma, per via della condizione $v > \frac{c}{n}$, essi sono reali solo nella regione spazio-temporale descritta dalla seguente disuguaglianza:

$$s_\pm(x) = \frac{(ux)_n \mp \sqrt{(ux)_n^2 - u_n^2 x_n^2}}{u_n^2} \in \mathbb{R} \quad \iff \quad \frac{r^2}{(z-vt)^2 + r^2} < \frac{c^2}{v^2 n^2}, \quad (3.28)$$

che rappresenta, ad ogni istante t , un doppio cono centrato sulla posizione della particella in quel preciso istante, coassiale con la sua traiettoria e di apertura angolare α uguale a

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{c}{vn}\right), \quad (3.29)$$

Inoltre, studiando il segno di $ct - u^0 s_\pm(x)$ all'interno del doppio cono, risulta che [4], sempre per via della condizione $v > \frac{c}{n}$, sia $ct - u^0 s_+(x)$ che $ct - u^0 s_-(x)$ sono negativi, per $z > vt$, e positivi per $z < vt$. Di conseguenza, la presenza della funzione di Heaviside nella (3.27) implica che, ad ogni istante t , il quadripotenziale è diverso da zero solo nella regione

$$z - vt < -r \sqrt{\frac{v^2 n^2}{c^2} - 1}, \quad (3.30)$$

disuguaglianza ottenuta imponendo $z < vt$ nella (3.28). In pratica, diversamente dal caso $v < \frac{c}{n}$, il campo elettromagnetico prodotto è non nullo, in ogni istante t , solamente all'interno del cono con vertice in $z = vt$ e rivolto nella direzione opposta al moto della carica. Esso prende il nome di *cono di Mach*, con ovvio riferimento al fenomeno che, nell'ambito della fluidodinamica, è noto come *bang supersonico*.

Alla luce delle osservazioni appena fatte, e dal momento che usando la regola (2.18) con $|f'(s)| = 2[su_n^2 - (ux)_n]$ si ha che, per $z < vt$, entrambi gli zeri s_{\pm} contribuiscono al computo di A^0 nella (3.27), si conclude che quest'ultimo è dato da:

$$A^0(x) = \frac{e}{4\pi n^2} \frac{2\Theta\left(vt - z - r\sqrt{\frac{v^2 n^2}{c^2} - 1}\right)}{\sqrt{(z - vt)^2 - \left(\frac{v^2 n^2}{c^2} - 1\right)r^2}}, \quad (3.31)$$

in cui notiamo che il termine $\left(1 - \frac{v^2 n^2}{c^2}\right)$, presente nell'argomento della radice della (3.19), è stato qui riscritto raccogliendo il segno meno, essendo adesso lo stesso termine negativo. Risulta così ben chiaro che la radice a denominatore della (3.31) è ben definita solo se è soddisfatta la disuguaglianza (3.30).

Un'altra differenza radicale tra i potenziali (3.19) e (3.31) risiede nel fatto che il secondo diverge non solo sulla traiettoria della particella, ma anche sulla superficie del cono di Mach, data da

$$z - vt + r\sqrt{\frac{v^2 n^2}{c^2} - 1} = 0. \quad (3.32)$$

Ne consegue che anche i campi \mathbf{E} , \mathbf{B} e il vettore \mathbf{S} divergono sul cono di Mach e sono nulli al suo esterno. Essi, inoltre, sono formalmente identici a quelli che si ottengono nel caso $v < \frac{c}{n}$ (a meno di un fattore moltiplicativo pari a 2 per \mathbf{E} e \mathbf{B} , pari a 4 per \mathbf{S}), dal momento che i potenziali (3.19) e (3.31) presentano la stessa dipendenza funzionale rispetto alle coordinate spazio-temporali.

In linea di principio, tuttavia, non esiste alcun motivo fisico particolare per cui il campo elettromagnetico debba divergere sulla superficie del cono di Mach, in quanto essa rappresenta una semplice superficie geometrica, sulla quale non è presente nessuna distribuzione di carica. È molto più probabile, invece, che le anomalie riscontrate siano dovute, piuttosto, ad aver basato l'analisi del fenomeno su delle ipotesi poco realistiche, non fisiche. Vedremo, nel Paragrafo 3.2, che l'errore è stato l'aver considerato il mezzo come non dispersivo.

È importante capire che, nel caso $v > \frac{c}{n}$, l'esistenza del cono di Mach ha delle profonde implicazioni sul comportamento fisico del sistema. La principale conseguenza consiste nel fatto che, ripetendo il calcolo del flusso radiale di \mathbf{S} , discusso nel Sottoparagrafo 3.1.1, stavolta il conto porge un risultato non nullo e positivo. Ciò accade perché la componente radiale S_r del vettore di Poynting, identica a quella dell'espressione (3.22) moltiplicata per un fattore 4, risulta essere diversa da zero e positiva all'interno del cono di Mach, sul quale addirittura diverge, e nulla al suo esterno, in particolare "davanti" alla particella, per $z > vt$. Quindi, mentre nel caso $v < \frac{c}{n}$ il contributo positivo al flusso, dato dalla componente radiale S_r per $z < vt$, veniva esattamente compensato da un eguale contributo negativo da parte di S_r per $z > vt$, nel caso $v > \frac{c}{n}$ ciò non avviene, e si ha un flusso netto di energia uscente. In altre parole, l'energia emessa in ogni istante non viene più riassorbita. Questa circostanza segnala dunque l'emissione di radiazione elettromagnetica da parte del sistema. Ciononostante, la singolarità del campo in corrispondenza della superficie di Mach fa sì che l'energia trasportata dalla radiazione nell'unità di tempo sia infinita.

La direzione di propagazione di questa radiazione coincide con quella del vettore di Poynting \mathbf{S} . Cerchiamo allora di capire qual è la sua direzione. Per farlo sfruttiamo l'espressione (3.22), che, ripetiamo, è uguale a quella del caso $v > \frac{c}{n}$, a parte per il fatto che è diversa da zero su tutto lo spazio e che non diverge.

La superficie del cono di Mach al tempo t è una sottovarietà immersa di \mathbb{R}^3 che può essere descritta come insieme di livello 0 della sommersione¹

$$g : (\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \left(\sqrt{\frac{v^2 n^2}{c^2} - 1} \right) + z - vt,$$

vale a dire il sottoinsieme

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\sqrt{\frac{v^2 n^2}{c^2} - 1} \right) + z - vt = 0 \right\},$$

che scritto in coordinate cilindriche (r, ϕ, z) equivale alla condizione (3.32).

Il gradiente della funzione g , calcolato in punto del dominio, rappresenta, per definizione, un vettore ortogonale alla superficie di livello passante per quel punto, pertanto, considerando i punti (r, ϕ, z) che soddisfano (3.32), ∇g costituisce un vettore ortogonale alla superficie del cono di Mach. Calcolando il gradiente in coordinate cilindriche della funzione

$$g(r, \phi, z) = r \sqrt{\frac{v^2 n^2}{c^2} - 1} + z - vt$$

si ottiene:

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \phi} \hat{\mathbf{u}}_\phi + \frac{\partial g}{\partial z} \hat{\mathbf{u}}_z = \sqrt{\frac{v^2 n^2}{c^2} - 1} \hat{\mathbf{u}}_r + \hat{\mathbf{u}}_z,$$

Valutando la (3.22) sul cono di Mach, si trova:

$$\mathbf{S} \Big|_{Mach} \propto (vt - z) \hat{\mathbf{u}}_r + r \hat{\mathbf{u}}_z = r \left(\sqrt{\frac{v^2 n^2}{c^2} - 1} \hat{\mathbf{u}}_r + \hat{\mathbf{u}}_z \right) \parallel \nabla g.$$

Questo significa che, nel caso $v > \frac{c}{n}$, il vettore di Poynting \mathbf{S} è ortogonale al cono di Mach, sul quale diverge.

Abbiamo quindi capito che la radiazione in questione viene emessa lungo delle direzioni che giacciono su un cono ortogonale al cono di Mach, rivolto nello stesso verso del moto della particella e coassiale alla sua traiettoria. Questo cono è chiamato *cono di Cerenkov*, e il suo angolo di apertura, l'*angolo di Cerenkov* Θ_C , determina la direzione di propagazione di quella che viene per l'appunto chiamata *radiazione Cerenkov*. Θ_C corrisponde all'angolo formato dalla direzione di \mathbf{S} valutato sul cono di Mach e dall'asse z . Dal momento che

$$S_z \Big|_{Mach} \propto r \quad |\mathbf{S}| \Big|_{Mach} \propto r \sqrt{\frac{v^2 n^2}{c^2} - 1} + 1 = r \frac{vn}{c},$$

allora, l'angolo di Cerenkov è dato da:

$$\Theta_C = \arccos \left(\frac{S_z \Big|_{Mach}}{|\mathbf{S}| \Big|_{Mach}} \right) = \arccos \left(\frac{c}{vn} \right). \quad (3.33)$$

Inoltre, poichè il cono di Mach e quello di Cerenkov sono ortogonali, segue che i rispettivi angoli di apertura (3.29) e (3.33) sono complementari, cioè vale la relazione:

$$\alpha + \Theta_C = \frac{\pi}{2}.$$

¹Una sommersione è una funzione differenziabile il cui differenziale è sempre suriettivo; nel caso di una funzione scalare, il differenziale coincide con il suo gradiente, e richiedere che questo sia suriettivo equivale a richiedere che sia in ogni punto diverso dal vettore nullo, condizione soddisfatta da g .

3.2 Moto rettilineo uniforme in un mezzo dispersivo

Le singolarità ottenute nel paragrafo precedente, in realtà, non sono fisiche. Per dimostrarlo cerchiamo di alleggerire le ipotesi troppo restrittive sul mezzo di propagazione. Considerare l'indice di rifrazione di un dielettrico come una quantità costante è, infatti, un'approssimazione valida solamente nella regione visibile dello spettro elettromagnetico ($390 - 700 \text{ nm}$), e non per tutti i materiali. In genere l'indice di rifrazione di un mezzo n è una funzione molto complicata della frequenza ω della radiazione che lo attraversa, cioè $n = n(\omega)$, ed è inoltre caratteristico di ciascun materiale, dipendendo molto dalle sue proprietà atomiche, come ad esempio le frequenze di risonanza.

Nonostante ciò, è possibile tracciare un'andamento generale, valido per tutti i tipi di dielettrico: per basse frequenze, $n(\omega)$ si mantiene sempre al di sopra del valore 1; nei pressi della frequenza di risonanza più alta del mezzo, che tipicamente si trova nella regione della radiazione X, il fenomeno noto con il nome di dispersione anomala conduce a un indice di rifrazione minore di 1; infine per frequenze sempre più elevate $n(\omega)$ tende a 1, rimanendogli sempre inferiore.

In figura 3.1 è riportato, a titolo di esempio, l'andamento sperimentale dell'indice di rifrazione dell'acqua in funzione della frequenza, in cui ritroviamo il comportamento appena descritto. Vediamo anche come nella regione del visibile, evidenziata dal tratteggio, n ha un valore circa costante pari a 1,34.

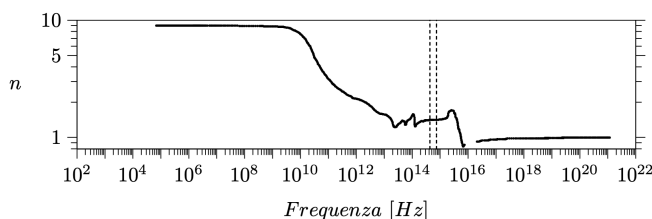


Figura 3.1: Indice di rifrazione dell'acqua in funzione della frequenza.

In particolare, è di fondamentale importanza osservare che i dati sperimentali, quindi fisici, ci dicono che la banda di frequenze tali per cui $n(\omega) > 1$ è limitata. È proprio questo il motivo che spinge a credere che considerare la dipendenza di n dalla frequenza sia la strada giusta da seguire per riuscire a eliminare le anomalie ottenute nel caso non dispersivo. Nel considerare n costante abbiamo implicitamente supposto che la radiazione emessa sia costituita, a grandi distanze, dalla sovrapposizione continua di onde elementari di tutte le possibili frequenze. Difatti, fissato n , e scelta una velocità v tale che sia $v > \frac{c}{n}$, questa disuguaglianza è sempre valida per ogni valore di ω . Vedremo, in seguito, che il costo di questa eccessiva semplificazione è la divergenza dell'integrale coinvolto nella decomposizione spettrale del quadripotenziale $A^\mu(x)$ valutato sul cono di Mach, a conferma di quanto già visto nel Sottoparagrafo 3.1.2 con il potenziale (3.31) ottenuto nel caso non dispersivo.

Tuttavia, come si è appena constatato, esiste un valore ω_0 tale che per $\omega > \omega_0$ si ha $n(\omega) < 1$, perciò, in tal caso, si ha necessariamente $v < \frac{c}{n}$, e non viene emessa alcuna radiazione con frequenze $\omega > \omega_0$. Non a caso, si trova che lo spettro della radiazione Cerenkov contiene, generalmente, l'intervallo che va dalla zona dell'infrarosso fino ad arrivare all'ultravioletto.

C'è da dire, inoltre, che in un mezzo dispersivo la radiazione non si propaga più con un fronte d'onda di forma perfettamente conica, poichè non ha più senso parlare di un singolo cono di Mach/Cerenkov. Essendo, infatti, gli angoli (3.29) e (3.33) delle funzioni di n , che a sua volta è una funzione di ω , le componenti della radiazione di diversa frequenza saranno caratterizzate

da un cono di Mach/Cerenkov con una apertura angolare diversa. In altre parole, è come se il fronte d'onda della radiazione Cerenkov fosse "spalmato" su una regione spaziale delimitata, ad ogni istante t , dalle superfici dei due coni di Mach coassiali (con vertice comune in $z = vt$), relativi alle frequenze minima e massima dello spettro di radiazione, a cui corrispondono rispettivamente l'angolo di apertura minore α^{min} (indice di rifrazione massimo) e maggiore α^{max} (indice di rifrazione minimo). Allo stesso modo, la radiazione viene emessa, istantaneamente, lungo le direzioni tangenti alle superfici di una moltitudine di coni Cerenkov, che spaziano un angolo $\delta\Theta_C = \Theta_C^{max} - \Theta_C^{min}$, dove Θ_C^{max} e Θ_C^{min} sono complementari rispettivamente ad α^{min} e α^{max} .

Fatte le dovute premesse, consideriamo adesso un mezzo dielettrico dispersivo, omogeneo e isotropo. Intendiamo studiare, frequenza per frequenza, la dinamica del campo elettromagnetico prodotto dalla particella. Di conseguenza non possiamo più partire dalle equazioni di Maxwell (3.5) - (3.8), in quanto esse sono definite nel dominio dei tempi, e non ci permettono di fissare una determinata frequenza ω . La strategia consiste, quindi, nel considerare le trasformate di Fourier temporali delle equazioni di Maxwell nel mezzo, e, una volta passati al dominio delle frequenze, fissarne una, dunque eseguire la sostituzione formale $n \rightarrow n(\omega)$ (con $n(-\omega) = n(\omega)$):

$$-\frac{n^2(\omega)}{c}i\omega\mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}) + \nabla \times \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{j}(\omega, \mathbf{x})}{c}, \quad (3.34)$$

$$\frac{i\omega}{c}\mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) + \nabla \times \mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}) = 0, \quad (3.35)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{\rho(\omega, \mathbf{x})}{n^2(\omega)}, \quad (3.36)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) = 0. \quad (3.37)$$

con le soluzioni generali di (3.35) e (3.37) date da:

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}) = -\nabla A^0(\omega, \mathbf{x}) - \frac{i\omega}{c}\mathbf{A}(\omega, \mathbf{x}) \quad \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\omega, \mathbf{x}), \quad (3.38)$$

in cui abbiamo mostrato anche la dipendenza da \mathbf{x} , che nel seguito ometteremo.

Sostituendo le (3.38) nelle (3.34) e (3.36), e imponendo la gauge-fixing adattata

$$i\omega\frac{n^2}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (3.39)$$

con passaggi analoghi a quelli effettuati per ottenere le equazioni (3.13), otteniamo le equazioni

$$-\left(\frac{\omega^2 n^2(\omega)}{c^2} + \nabla^2\right)A^\mu(\omega) = \left(\frac{\rho(\omega)}{n^2(\omega)}, \frac{\mathbf{j}(\omega)}{c}\right). \quad (3.40)$$

Notiamo che, effettuata la sostituzione $n \rightarrow n(\omega)$, il campo elettromagnetico non può più essere descritto, punto per punto, da equazioni locali, dal momento che, se cerchiamo di tornare indietro applicando l'antitrasformata, la presenza di un prodotto tra funzioni di ω nelle equazioni (3.34), (3.35) e (3.36) restituisce delle equazioni in forma integrale, dunque non locale.

Per ricavare il campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}(x)$ generato da una generica quadricorrente $j^\mu(x)$, si calcola la sua trasformata di Fourier temporale $j^\mu(\omega)$, si risolvono le equazioni (3.40) e si torna indietro nel dominio dei tempi tramite l'antitrasformata temporale di $A^\mu(\omega)$, data da

$$(c = 1) \quad A^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} A^\mu(\omega) dt. \quad (3.41)$$

Per finire, il campo elettromagnetico è $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

Va fatta, però, un'ulteriore e importante osservazione: poichè risolviamo le equazioni per il quadripotenziale nel dominio delle frequenze, non è possibile applicare in maniera diretta la condizione (2.8) che preserva la causalità, necessaria affinché il campo elettromagnetico si propaghi dalla sorgente al punto di osservazione e non viceversa. Nel risolvere le (3.40), quindi, occorrerà fare in modo che la soluzione $A^\mu(\omega)$ che troveremo non violi la causalità.

Come sappiamo, nel caso particolare di un moto rettilineo uniforme è sufficiente risolvere la (3.40) solo per $\mu = 0$, dal momento che valgono le seguenti relazioni:

$$\mathbf{j}(\omega) = \rho(\omega)\mathbf{v} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A} = \frac{n^2(\omega)A^0(\omega)}{c}\mathbf{v}, \quad (3.42)$$

analoghe alle (3.14), (3.15). Effettuando la trasformata di Fourier temporale della densità di carica $\rho(x)$ in (3.14) si ha:

$$(c = 1) \quad \begin{aligned} \rho(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \delta(z - vt) \delta(x) \delta(y) dt \\ &= \frac{e}{\sqrt{2\pi}v} e^{-\frac{i\omega z}{v}} \delta^2(\mathbf{r}) \quad \text{con} \quad \delta^2(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y). \end{aligned} \quad (3.43)$$

che inserita nella (3.40) restituisce la seguente equazione per $A^0(\omega)$:

$$\left(\frac{n^2(\omega)\omega^2}{c^2} + \nabla^2 \right) A^0(\omega) = -\frac{e}{\sqrt{2\pi}vn^2(\omega)} e^{-\frac{i\omega z}{v}} \delta^2(\mathbf{r}). \quad (3.44)$$

Iniziamo a risolvere la (3.44) considerando i punti (\mathbf{r}, z) con $\mathbf{r} \neq 0$, per cui, avendo escluso il punto di singolarità, possiamo effettuare un cambio di coordinate, passando da quelle cartesiane alle più convenienti coordinate cilindriche. Abbiamo allora

$$\left(\frac{n^2(\omega)\omega^2}{c^2} + \nabla_{cil}^2 \right) A^0(\omega) = 0, \quad (3.45)$$

dove abbiamo indicato con ∇_{cil}^2 il laplaciano in coordinate cilindriche². Data la simmetria cilindrica, cerchiamo una soluzione particolare indipendente dalla variabile ϕ , della forma

$$A^0(\omega, r, z) = \frac{e}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}vn^2(\omega)} e^{-\frac{i\omega z}{v}} F(\omega, r). \quad (3.46)$$

Inserendo l'ansatz (3.46) in (3.45) e osservando che la derivata parziale rispetto alla coordinata ϕ non contribuisce al calcolo, ci si riconduce a un'equazione per la sola funzione $F(\omega, r)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{n^2(\omega)\omega^2}{c^2} \right) \frac{e}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}vn^2(\omega)} e^{-\frac{i\omega z}{v}} F(\omega, r) &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\omega^2}{v^2} + \frac{n^2(\omega)\omega^2}{c^2} \right) e^{-\frac{i\omega z}{v}} F(\omega, r) &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\omega^2}{v^2} \left(\frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2} - 1 \right) \right] F(\omega, r) &= 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

² $\nabla_{cil}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Ridefinendo opportunamente l'argomento della funzione F si vede facilmente che deve soddisfare le seguenti equazioni differenziali:

$$F'' + \frac{1}{\xi}F' \pm F = 0 \quad \text{con} \quad ' = \frac{d}{d\xi}, \quad (3.48)$$

in cui si ha il segno positivo o il segno negativo a seconda se, per una data frequenza ω , si ha $v > \frac{c}{n(\omega)}$ o $v < \frac{c}{n(\omega)}$, e rispettivamente $\xi = \frac{\omega r}{v} \sqrt{\frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2} - 1}$ oppure $\xi = \frac{\omega r}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2}}$, entrambi maggiori di zero e con i radicandi ben definiti.

Le soluzioni³ della (3.48) sono naturalmente diverse a seconda del segno:

- **caso $v < c/n(\omega)$** si tratta di un'equazione di Bessel modificata di ordine zero. Un sistema fondamentale di soluzioni è rappresentato dalla coppia di funzioni linearmente indipendenti $(K_0(\xi), I_0(\xi))$, per cui la soluzione generale è data da

$$F(\xi) = AK_0(\xi) + BI_0(\xi). \quad (3.49)$$

Tuttavia, per $\xi \rightarrow +\infty$, la funzione I_0 diverge esponenzialmente⁴ come $I_0 \sim \frac{e^\xi}{\sqrt{2\pi\xi}}$, e ciò ci obbliga a porre $B = 0$, dal momento che una tale funzione non può costituire una distribuzione;

- **caso $v > c/n(\omega)$** si tratta di un'equazione di Bessel di ordine zero. Un sistema fondamentale di soluzioni è rappresentato dalle funzioni di Hankel $(H_0^1(\xi), H_0^2(\xi))$, per cui la soluzione generale è data da

$$F(\xi) = CH_0^1(\xi) + DH_0^2(\xi). \quad (3.50)$$

Tuttavia, notiamo che per $\xi \rightarrow +\infty$, la funzione H_0^1 ha l'andamento asintotico⁵ $H_0^1 \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{i(\xi - \frac{\pi}{4})}$. Questa funzione contribuisce al potenziale come un'onda entrante dall'infinito, quando invece sappiamo che il segnale si propaga in verso opposto, cioè dalla sorgente, posta a $r = 0$, fino a $r = +\infty$. Questo significa che il valore del campo a un istante t e in un punto con coordinata radiale r , viene assunto in un punto con coordinata $r' > r$ a un istante t' precedente a t , e ciò viola chiaramente la causalità. Perciò, per preservarla, dobbiamo porre $C = 0$.

Pertanto, le soluzioni delle equazioni (3.48) possono essere riunite in un'unica espressione data da

$$F(\xi) = A\Theta\left(1 - \frac{vn(\omega)}{c}\right)K_0(\xi) + D\Theta\left(\frac{vn(\omega)}{c} - 1\right)H_0^2(\xi), \quad (3.51)$$

in cui la presenza delle funzioni Θ di Heaviside fa sì che, data una frequenza ω , si ha $F(\xi) = AK_0(\xi)$ oppure $F(\xi) = DH_0^2(\xi)$ a seconda se vale $v < \frac{c}{n(\omega)}$ o $v > \frac{c}{n(\omega)}$. Ritornando alle variabili ω, r la (3.51) diviene

$$F(\omega, r) = A\Theta\left(1 - \frac{vn(\omega)}{c}\right)K_0\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2}}}{v}\omega r\right) + D\Theta\left(\frac{vn(\omega)}{c} - 1\right)H_0^2\left(\frac{\sqrt{\frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2} - 1}}{v}\omega r\right), \quad (3.52)$$

³vedi appendice A

⁴vedi appendice A formula (A.16)

⁵vedi appendice A formula (A.9)

che rappresenta la soluzione della (3.47).

Dobbiamo adesso verificare che la soluzione appena trovata soddisfi l'equazione (3.44) anche nel senso delle distribuzioni, ovvero bisogna mostrare la presenza, per $r \rightarrow 0$, della distribuzione singolare $\delta^2(\mathbf{r})$ nel membro di sinistra, e imponendo l'uguaglianza con il membro di destra troveremo le costanti A e D , e quindi un'unica soluzione.

Ripartiamo quindi dalla (3.44) e reinseriamo la (3.46) mantenendo stavolta la $\delta^2(\mathbf{r})$. Con passaggi simili a quelli fatti per arrivare alla (3.47), otteniamo:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \left(\frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2} - 1 \right) \right] F(\omega, r) = -2\pi \delta^2(\mathbf{r}). \quad (3.53)$$

Riscalando le variabili x e y nella stessa maniera in cui è stato fatto prima per r , ovvero mandandole nelle variabili $x \mapsto \xi_1$ e $y \mapsto \xi_2$ tali che $\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, la (3.53) diventa:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \pm 1 \right) F(\xi) = -2\pi \delta^2(\xi). \quad (3.54)$$

Inserendo dunque la soluzione (3.52), sapendo che per $\xi \rightarrow 0$ le funzioni $K_0(\xi)$ e $H_0^2(\xi)$ hanno gli andamenti⁶ $K_0(\xi) \sim \ln \xi$ e $H_0^2(\xi) \sim \frac{2}{i\pi} \ln \xi$, e sfruttando l'identità distribuzionale

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) \ln \xi = 2\pi \delta^2(\xi),$$

si conclude che, per frequenze tali che $v < \frac{c}{n(\omega)}$, si ha:

$$-A2\pi \delta^2(\xi) = -2\pi \delta^2(\xi) \implies A = 1, \quad (3.55)$$

mentre, per frequenze tali che $v > \frac{c}{n(\omega)}$, si ha:

$$\frac{4D}{i} \delta^2(\xi) = -2\pi \delta^2(\xi) \implies D = -i\frac{\pi}{2}. \quad (3.56)$$

La soluzione trovata per $A^0(\omega)$ è quindi unica.

A questo punto, trovato il quadripotenziale $A^\mu(\omega) = (A^0(\omega), \mathbf{A}(\omega))$, non ci resta altro da fare che calcolare la sua antitrasformata temporale. Allora, il quadripotenziale generato da una particella in moto rettilineo uniforme in un mezzo dispersivo è:

$$A^0(x) = \frac{e}{v(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i\omega(z-vt)}{v}} \frac{F(\omega, r)}{n^2(\omega)} d\omega, \quad (3.57)$$

$$\mathbf{A}(x) = \frac{e\hat{\mathbf{u}}_z}{c(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i\omega(z-vt)}{v}} F(\omega, r) d\omega. \quad (3.58)$$

⁶vedi appendice A formule (A.5) e (A.14)

3.2.1 Andamenti asintotici dei campi

Noto il quadripotenziale $A^\mu(\omega)$ dato dalla (3.46), in cui $F(\omega, r)$ è definita dalla (3.52) con i coefficienti (3.55) e (3.56), dalle espressioni (3.38) si ottiene il campo elettromagnetico corrispondente a una data frequenza ω . Valutando quest'ultimo nella zona delle onde è possibile verificare quanto anticipato nell'introduzione della tesi, ovvero che, se la condizione $v > \frac{c}{n(\omega)}$ non è soddisfatta da alcuna frequenza, vengono emesse delle onde evanescenti che non costituiscono radiazione, mentre nel caso in cui la condizione è soddisfatta da un insieme non vuoto di frequenze, allora vengono emesse delle vere e proprie onde elettromagnetiche che formano un campo di radiazione contenente quelle stesse frequenze.

Utilizzando la relazione (3.42) tra A^0 e \mathbf{A} nelle (3.38) si possono esprimere i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} in funzione di $A^0(\omega)$ nel seguente modo:

$$\mathbf{E}(\omega) = -\left(\nabla + i\omega n^2(\omega)\mathbf{v}\right)A^0(\omega) \quad \mathbf{B}(\omega) = -n^2(\omega)\mathbf{v} \times \nabla A^0(\omega), \quad (3.59)$$

in cui $A^0(\omega)$ è dato da (3.46). Avvalendoci ancora una volta degli andamenti asintotici delle funzioni speciali K_0 e $H_0^{(2)}$ per grandi valori dell'argomento⁷ ($r \rightarrow +\infty \implies \xi \rightarrow +\infty$), ovvero

$$K_0(\omega, r) \sim \frac{\sqrt{\pi v}}{\sqrt{2\omega r} \left(1 - \frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2}\right)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{\omega r}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2}}}, \quad (3.60)$$

$$H_0^{(2)}(\omega, r) \sim \frac{\sqrt{2v}}{\sqrt{\pi\omega r} \left(\frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2} - 1\right)^{\frac{1}{4}}} e^{-i\left(\frac{\omega r}{v} \sqrt{\frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2} - 1} - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad (3.61)$$

risulta semplice valutare $A^0(\omega)$ nel limite di $r \rightarrow +\infty$:

- caso $v < c/n(\omega)$

$$A^0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{e}{4\pi n^2(\omega)} \frac{e^{-i\frac{\omega z}{v}}}{\left(1 - \frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{v\omega}} e^{-\frac{\omega r}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right); \quad (3.62)$$

- caso $v > c/n(\omega)$

$$A^0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{e}{4\pi n^2(\omega)} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\left(\frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2} - 1\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{v\omega}} e^{-i\frac{\omega}{v} \left(z + r \sqrt{\frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2} - 1}\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right). \quad (3.63)$$

Nel primo caso A^0 corrisponde a un'onda cilindrica evanescente, per la presenza del fattore esponenziale. Nel secondo caso invece, A^0 corrisponde, per ogni ω , a un'onda elettromagnetica cilindrica vera e propria, per cui dalla (3.41) risulta che, come visto nel Sottoparagrafo 2.2.1, nella zona delle onde $A^0(x)$ è con buona approssimazione sovrapposizione di onde elementari che costituiscono un campo di radiazione, in quanto si ha $A^0(\omega)e^{i\omega t} \sim e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \equiv e^{ik \cdot x}$. Poniamoci allora nel secondo caso.

⁷vedi Appendice A formule (A.17) e (A.10)

Nel calcolare i campi $\mathbf{E}(\omega)$ e $\mathbf{B}(\omega)$ tramite le (3.59), ci possiamo limitare a derivare il solo esponenziale complesso presente nella (3.63), in quanto intendiamo sempre considerare il campo elettromagnetico nella zona delle onde, vale a dire, in coordinate cilindriche, il campo arrestato all'ordine $o(1/\sqrt{r})$. I calcoli restituiscono i seguenti risultati [4, p. 377]:

$$\mathbf{E}(\omega) = \frac{i\omega}{v} \sqrt{\frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2} - 1} \left(\hat{\mathbf{u}}_r - \sqrt{\frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2} - 1} \hat{\mathbf{u}}_z \right) A^0(\omega), \quad (3.64)$$

$$\mathbf{B}(\omega) = i\omega n^2(\omega) \sqrt{\frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2} - 1} A^0(\omega) \hat{\mathbf{u}}_\phi. \quad (3.65)$$

Notiamo che, in accordo con le osservazioni sperimentali di Cerenkov, il campo elettrico è polarizzato linearmente. Dalla (3.64), infatti, risulta che $\mathbf{E}(\omega)$ è scritto come prodotto del vettore reale $\mathbf{V} = \hat{\mathbf{u}}_r - \sqrt{\frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2} - 1} \hat{\mathbf{u}}_z$ per una funzione complessa $h(\omega)$, quindi il campo elettrico $\mathbf{E}(t)$ è dato dalla sovrapposizione di onde elementari del tipo $e^{i\omega t} h(\omega) \mathbf{V} + c.c.$. Allora, il fatto che \mathbf{V} sia reale permette di raccogliarlo a fattor comune, il che significa che la direzione del campo elettrico rimane costante nel tempo, parallela al vettore \mathbf{V} . Ma ciò equivale a dire che la polarizzazione del campo è lineare.

Possiamo finalmente mostrare che l'analisi in un mezzo dispersivo riesce a eliminare la divergenza del quadripotenziale $A^\mu(x)$, riscontrata nel Sottoparagrafo 3.1.2 sulla superficie del cono di Mach. In realtà, come si è detto, non esiste un singolo cono di Mach, quindi scegliamo un generico cono di Mach relativo a un dato indice di rifrazione \bar{n} tale che $v > \frac{c}{\bar{n}}$ e valutiamo (3.57) sulla superficie data dalla (3.32), ottenendo:

$$A^0(x) \Big|_{Mach} = \frac{e}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i\omega r}{v} \sqrt{\frac{v^2 \bar{n}^2}{c^2} - 1}} \frac{F(\omega, r)}{n^2(\omega)} d\omega. \quad (3.66)$$

Per capire che l'integrale in questione è convergente ci ricordiamo che, fissata la velocità della particella, la condizione $v > \frac{c}{n(\omega)}$ è soddisfatta solo per una banda limitata di frequenze. Dalla più alta frequenza ω_0 tale per cui la precedente disuguaglianza è ancora valida, fino a $\omega = +\infty$, si ha $n(\omega) < 1$, e la funzione $F(\omega, r)$ coincide con la funzione $K_0(\xi)$, il cui argomento cresce proporzionalmente a ω . Per cui $\omega \rightarrow +\infty$ implica $\xi \rightarrow +\infty$ e risulta che, per grandi valori dell'argomento, $K_0(\xi)$ decresce esponenzialmente secondo la (3.60). Quindi il valore dell'integrale è finito.

Se invece reintroduciamo l'ipotesi dell'assenza di dispersione, cioè fissiamo $n(\omega) = \bar{n}$, la (3.66) diverge, in quanto la condizione $v > \frac{c}{n(\omega)}$ è soddisfatta per ogni ω , dunque la funzione $F(\omega, r)$ coincide con la funzione $H_0^{(2)}(\xi)$, il cui andamento per grandi valori di ξ , dato dalla (3.61), è tale da eliminare l'esponenziale complesso presente nella (3.66). Abbiamo allora:

$$A^0(x) \Big|_{Mach} \propto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega}} d\omega,$$

e dall'analisi matematica sappiamo bene che quest'integrale diverge.

3.2.2 Derivazione della formula per l'irraggiamento di Frank e Tamm

Quando si è in presenza di emissione di energia sotto forma di radiazione elettromagnetica da parte di un sistema carico, una sua importante caratteristica fisica è rappresentata dalla quantità

di energia emessa per unità di frequenza e di angolo solido $\frac{d^2\epsilon}{d\Omega d\omega}$, che fornisce informazioni circa il peso con cui una certa frequenza ω compare nella radiazione. Nel nostro specifico caso, avendo a che fare con un moto rettilineo uniforme, siamo interessati, piuttosto, alla quantità di energia emessa per unità di frequenza e di spazio percorso dalla particella $\frac{d^2\epsilon}{dzd\omega}$.

Per ricavarla consideriamo nuovamente il flusso della componente radiale del vettore di Poynting \mathbf{S} attraverso una superficie cilindrica coassiale alla traiettoria della particella, di altezza Δz e di raggio r , nel limite $r \rightarrow +\infty$. Integrando il flusso sul tempo t otteniamo la quantità totale di energia $\Delta\epsilon$ che attraversa la superficie in questione durante tutto il tragitto della particella:

$$\Delta\epsilon = 2\pi r \Delta z c \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{E}(t) \times \mathbf{B}(t)) \cdot \hat{\mathbf{u}}_r dt = 2\pi r \Delta z c \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{E}^*(\omega) \times \mathbf{B}(\omega)) \cdot \hat{\mathbf{u}}_r d\omega, \quad (3.67)$$

in cui si è fatto uso del teorema di Plancherel.

Dalla (3.67) si deduce che la grandezza che cerchiamo è data da:

$$\frac{d^2\epsilon}{dzd\omega} = 2\pi r c (\mathbf{E}^*(\omega) \times \mathbf{B}(\omega)) \cdot \hat{\mathbf{u}}_r + c.c., \quad (3.68)$$

in cui la presenza del termine complesso coniugato è dovuto al fatto che, essendo i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} reali, le loro trasformate di Fourier temporali devono soddisfare alla condizione $\mathbf{E}^*(\omega) = \mathbf{E}(-\omega)$ e $\mathbf{B}^*(\omega) = \mathbf{B}(-\omega)$.

Sostituendo a $\mathbf{E}(\omega)$ e $\mathbf{B}(\omega)$ le espressioni (3.64) e (3.65), con $A^0(\omega)$ dato da dalla (3.63), si giunge alla celebre *formula di Frank e Tamm*:

$$\frac{d^2\epsilon}{dzd\omega} = \frac{e^2\omega}{4\pi c^2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)} \right), \quad (3.69)$$

un'espressione molto semplice, dipendente dal solo indice di rifrazione del mezzo, a dimostrazione del fatto che, come osservato da Cerenkov, la radiazione ha carattere universale. Integrando la (3.69) sull'insieme limitato di frequenze per cui $v > \frac{c}{n(\omega)}$, si ricava l'energia totale emessa per unità di spazio percorso, che è sempre finita.

Dividendo per l'energia $\hbar\omega$ di un fotone, invece, si ottiene:

$$\frac{d^2 N}{dzd\omega} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c^2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)} \right), \quad (3.70)$$

che rappresenta il numero di fotoni emessi nell'unità di frequenza e di spazio percorso. Questa grandezza è legata all'efficienza di rivelazione di una data componente della radiazione di frequenza ω .

Riscriviamo ora il numero di fotoni esprimendolo per intervallo unitario di lunghezza d'onda λ . Abbiamo:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad \longrightarrow \quad d\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda. \quad (3.71)$$

Possiamo ignorare il segno negativo del differenziale $d\lambda$, in quanto ci dice solo che la lunghezza d'onda diminuisce all'aumentare della frequenza. Inserendo la seconda delle (3.71) nella (3.70) si giunge a

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dzd\lambda} &= 2\pi \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\lambda)} \right) \\ &= \frac{2\pi\alpha}{\lambda^2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\lambda)} \right), \end{aligned} \quad (3.72)$$

dove $\alpha \approx \frac{1}{137}$ è la costante di struttura fine.

Dalla (3.69) e dalla (3.72) si comprende facilmente il perchè del caratteristico colore blu assunto dalla radiazione osservata da Cerenkov nel corso dei suoi esperimenti con soluzioni liquide, e anche il motivo per cui le componenti di questo colore siano maggiormente rivelabili rispetto alle altre. Abbiamo visto infatti, dalla figura 3.1, che l'indice di rifrazione dell'acqua può essere considerato pressocchè costante nella regione del visibile dello spettro ($n \simeq \frac{4}{3}$), perciò in questo intervallo di frequenze, che va dal rosso al violetto, la (3.72) è circa proporzionale a $\frac{1}{\lambda^2}$, mentre la (3.69), se scritta in funzione della lunghezza d'onda, risulta proporzionale a $\frac{1}{\lambda^3}$. Ne consegue che i fotoni dominanti, ovvero più numerosi, sono quelli caratterizzati dalla lunghezza d'onda minima e che, allo stesso modo, le componenti della radiazione con la maggiore intensità sono, nella regione del visibile, quelle più energetiche, corrispondenti ai colori blu/violetto.

3.3 Rivelatori Cerenkov

Le caratteristiche principali dell'emissione di radiazione Cerenkov sono:

1. **esiste una condizione di soglia per avere emissione di luce Cerenkov:** se si sceglie un mezzo con indice di rifrazione $n(\omega)$, si ha emissione solo per particelle con velocità $v > \frac{c}{n(\omega)}$;
2. **l'angolo di Cerenkov:** la luce Cerenkov è emessa lungo le direzioni tangenti alla superficie del cosiddetto cono di Cerenkov, che forma un angolo più o meno fisso con la direzione di propagazione della particella, ovvero l'angolo $\Theta_C = \arcsin\left(\frac{c}{vn}\right)$, dipendente solo dall'indice di rifrazione e dalla velocità della particella;
3. **dipendenza del numero di fotoni della radiazione dalla carica:** la (3.70) ci dice che il numero di fotoni emessi dipende dal quadrato della carica della particella.

I dispositivi che sfruttano queste caratteristiche della radiazione per rivelare particelle vengono chiamati *rivelatori Cerenkov*, e consistono generalmente in contenitori riempiti da un mezzo trasparente alla luce, che funge da dielettrico polarizzabile.

Esistono vari tipi di rivelatori Cerenkov, che si distinguono a seconda di quale caratteristica dell'omonima radiazione si avvalgono e di come lo fanno. Di seguito, diamo una breve descrizione dei più comuni. Essi si suddividono in:

- **Contatori Cerenkov a soglia** sono i più semplici tra i rivelatori Cerenkov e misurano solo il numero di fotoni emessi. Dato un fascio di particelle diverse ma aventi lo stesso momento \mathbf{p} , essi vengono utilizzati per distinguere le particelle in base alla loro massa. Per farlo sfruttano la caratteristica 1, fornendo una risposta di tipo binario, ovvero affermativa se la velocità della particella è $v > \frac{c}{n}$ e negativa se $v < \frac{c}{n}$. Quindi, scegliendo un opportuno dielettrico con indice di rifrazione n , è possibile distinguere, a parità di momento, le particelle più leggere (più veloci) che emettono radiazione, da quelle più pesanti (più lente) che non lo fanno;
- **Contatori Cerenkov differenziali** misurano l'angolo di Cerenkov Θ_C . Dato un fascio di particelle diverse ma con lo stesso momento \mathbf{p} , questi rivelatori sfruttano la caratteristica 2 della radiazione per selezionare quelle che emettono luce Cerenkov entro un certo intervallo di valori dell'angolo Θ_C , il che equivale a selezionare le particelle con una velocità compresa entro un certo range di valori;
- **RICH (Ring imaging Cherenkov)** questi rivelatori misurano l'angolo di Cerenkov Θ_C e il numero di fotoni emessi, dai quali si può risalire alla velocità della particella tramite la (3.33) e la (3.70). Per misurare l'angolo Θ_C si sfrutta la caratteristica 2 della radiazione, proiettando la luce Cerenkov su una superficie ricoperta di fotomoltiplicatori e perpendicolare alla

traiettoria della particella. Ciò che si osserva sono i cosiddetti anelli Cerenkov, prodotti dall'intersezione del cono di Mach con la superficie, come mostrato in figura 3.2. Inoltre, secondo la caratteristica 3, gli anelli generati da particelle con una carica maggiore si riconoscono con più facilità, essendo la loro immagine costituita da un più alto numero di fotoni. Misurando il raggio r di questi anelli, conoscendo la distanza L da cui l'immagine è proiettata, si risale all'angolo al vertice del cono, cioè $\Theta_C = \arctan\left(\frac{r}{L}\right)$, quindi alla velocità v . Se si conosce il momento della particella è anche possibile identificarla, ricavando la sua massa dalla relazione $v = \frac{c^2 p}{E} = \frac{c^2 p}{\sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}}$.

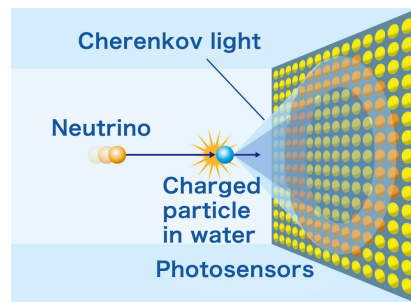


Figura 3.2: Anello Cerenkov generato da una particella carica nell'acqua.

Nel corso degli anni i rivelatori Cerenkov hanno trovato impiego in molteplici esperimenti, alcuni di questi anche molto famosi. Contatori Cerenkov a soglia e differenziali sono stati utilizzati, per esempio, nell'esperimento che condusse alla scoperta dell'antiprotone, in cui si fece uso del sincrotrone Bevatron di Berkeley, in California. Tramite questo acceleratore si riuscirono a effettuare delle collisioni in cui veniva prodotto 1 antiprotone su 100000 pioni. Per rimuovere un rumore di fondo così elevato si scelse pertanto di utilizzare dei contatori Cerenkov, in grado di discriminare i più leggeri pioni dagli antiprotoni.

Dei rivelatori di tipo RICH, invece, vengono tutt'oggi impiegati nella fisica dei neutrini. Essi sono per esempio presenti nell'esperimento *Super-Kamiokande*, situato in Giappone, che consiste in un gigante serbatoio sotterraneo, contenente 50000 tonnellate di acqua purissima, e la cui superficie interna è provvista di più di 11000 fotomoltiplicatori. Il tutto funge da osservatorio di neutrini, i quali, interagendo con l'acqua, liberano degli elettroni ultrarelativistici che emettono radiazione Cerenkov, rivelata in seguito dai fotomoltiplicatori e analizzata.

Appendice A

Cenni sulle funzioni di Bessel

I risultati che seguono, riguardanti le funzioni di Bessel, sono tratti da [1]. Per maggiori approfondimenti consultare il testo appena citato.

Le *funzioni di Bessel* sono delle funzioni di variabile complessa $z = x + iy$, soluzioni della seguente equazione differenziale del secondo ordine lineare e omogenea:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{df}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) f = 0, \quad (\text{A.1})$$

dove ν è una costante, in generale complessa, detta “ordine” dell’equazione e delle funzioni. Le soluzioni risultano essere olomorfe sul piano complesso tagliato lungo l’asse reale negativo, con $z = 0$ punto di diramazione. Per i nostri scopi siamo interessati al caso in cui $\nu = n \in \mathbb{Z}$ e $z = x \in \mathbb{R}$.

Se ν non è intero, un sistema fondamentale di soluzioni è costituito dalle funzioni linearmente indipendenti $J_{\pm\nu}(x)$, dette funzioni di Bessel del primo tipo. Se $\nu = n$ è intero allora risulta $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, dunque le soluzioni non sono più linearmente indipendenti.

Oltre alla coppia $J_{\pm\nu}(x)$, un altro sistema fondamentale di soluzioni è rappresentato dalla coppia $J_\nu(x)$ e $Y_\nu(x)$, quest’ultime dette funzioni di Bessel del secondo tipo o di Neumann, definite come:

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}. \quad (\text{A.2})$$

Per $\nu = n$, l’espressione (A.2) è indeterminata e deve essere definita mediante il limite $\nu \rightarrow n$. Si verifica che le funzioni J_ν possono essere prolungate analiticamente su tutto il piano complesso, mentre le funzioni Y_ν rimangono olomorfe su tutto il piano complesso escluso l’asse reale negativo. Per questo motivo ci restringiamo a $x \in \mathbb{R}^+$.

Oltre alle funzioni di Bessel del primo e secondo tipo è utile considerare un’altra coppia di soluzioni linearmente indipendenti, costituita da quelle che vengono chiamate funzioni di Hankel o funzioni di Bessel del terzo tipo, ottenute come combinazione lineare di J_ν e Y_ν :

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x) \quad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x). \quad (\text{A.3})$$

Di seguito sono riportati gli andamenti delle funzioni di Bessel J_ν , Y_ν , $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$ per piccoli e grandi valori dell’argomento, per $\nu = n \geq 0$ intero e fissato:

- $x \rightarrow 0$

$$J_n(x) \sim \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad (\text{A.4})$$

$$Y_0(x) \sim -iH_0^{(1)}(x) \sim iH_0^{(2)}(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln x, \quad (\text{A.5})$$

$$Y_n(x) \sim -iH_n^{(1)}(x) \sim iH_n^{(2)}(x) \sim -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad (n \geq 1). \quad (\text{A.6})$$

- $x \rightarrow +\infty$

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right), \quad (\text{A.7})$$

$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right), \quad (\text{A.8})$$

$$H_n^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi)}, \quad (\text{A.9})$$

$$H_n^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi)}. \quad (\text{A.10})$$

Vengono dette *funzioni di Bessel modificate* di ordine ν le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali, ottenute dalle (A.1) con la sostituzione $z \rightarrow iz$:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{df}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) f = 0. \quad (\text{A.11})$$

Anche in questo caso le soluzioni sono olomorfe su tutto il piano complesso tagliato lungo l'asse reale negativo, perciò ci restringiamo a valori reali e positivi dell'argomento.

Per ν reale non intero un sistema fondamentale di soluzioni è dato dalle funzioni di Bessel modificate del primo tipo $I_{\pm\nu}(x)$. Per ν intero, valgono delle relazioni analoghe a quelle per $J_{\pm\nu}$, per cui $I_{\pm\nu}$ non sono più linearmente indipendenti e si considera la coppia di soluzioni (I_ν, K_ν) , con $K_\nu(x)$ dette funzioni di Bessel modificate del secondo tipo.

Le funzioni di Bessel modificate sono legate a quelle ordinarie dalle seguenti relazioni:

$$I_\nu(x) = e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} J_\nu(ix) \quad K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi} = i\frac{\pi}{2} e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(ix). \quad (\text{A.12})$$

Fissato $\nu = n \geq 0$ intero, gli andamenti di I_ν e K_ν per piccoli e grandi valori dell'argomento sono dati da:

- $x \rightarrow 0$

$$I_n(x) \sim \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad (\text{A.13})$$

$$K_0(x) \sim -\ln x, \quad (\text{A.14})$$

$$K_n(x) \sim \frac{(n-1)!}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad (n \geq 1). \quad (\text{A.15})$$

- $x \rightarrow +\infty$

$$I_n(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad (\text{A.16})$$

$$K_n(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}. \quad (\text{A.17})$$

Bibliografia

- [1] Milton Abramowitz e Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Washington DC: U.S. Government Printing Office, dic. 1972.
- [2] P.A. Cerenkov. «Visible luminescence of the pure fluids induced by γ rays». In: *Dokl. Acad. Nauk SSSR* 2 (1934), pp. 451–454.
- [3] I.M. Frank e I.E. Tamm. «Coherent visible radiation of fast electrons in medium». In: *Compt. Rend. Acad. Sci. USSR* 14 (1937), p. 109.
- [4] Kurt Lechner. *Elettrodinamica classica*. Milano: Springer-Verlag Italia S.r.l., set. 2013.
- [5] Barone Vincenzo. *Relatività*. Torino: Bollati Boringhieri, 2018.