

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi Civita”

Corso di Laurea in Matematica

Il modello di Curie-Weiss con dissipazione

Relatore:

Prof. Marco Formentin

Laureanda:

Martina Delluniversità

Matricola: 1221935

Anno Accademico 2022/2023

21.04.2023

Indice

Introduzione	5
1 Nozioni preliminari	7
1.1 Catene di Markov a tempo discreto	7
1.2 Il processo di Poisson	9
1.3 Catene di Markov a tempo continuo	15
2 Il modello di Curie-Weiss	21
2.1 Introduzione	21
2.2 Definizione del modello	21
2.3 Analisi del modello	28
3 Modello di Curie-Weiss con dissipazione	33
3.1 Definizione del modello	33
3.2 Analisi (locale) degli equilibri	34
3.3 Esistenza e unicità del ciclo limite	37
4 Conclusioni e applicazioni	43
Ringraziamenti	45

Introduzione

Il modello di Curie-Weiss nasce come descrizione del comportamento di materiali ferromagnetici, cioè di quei materiali che tendono a magnetizzarsi sotto l'azione di un campo magnetico. A dispetto della sua semplicità, il modello risulta particolarmente utile nella descrizione di una grande quantità di fenomeni fisici e chimici, nonché interessante dal punto di vista matematico in quanto offre un esempio di modello *stocastico* (governato quindi da leggi casuali) che può essere approssimato, nel limite termodinamico, con un modello *deterministico*. Questo ci consente di ridurre lo studio del modello, nel nostro caso, all'analisi qualitativa di un'equazione differenziale. L'organizzazione della tesi è la seguente.

Nel Capitolo 1 introduciamo uno strumento fondamentale alla modellizzazione di sistemi di particelle interagenti: le catene di Markov. Dopo averle definite nel caso discreto, spostiamo la nostra attenzione ai processi di Poisson e in particolare al Teorema di competizione, necessari alla rappresentazione delle catene di Markov a tempo continuo, la cui trattazione concluderà la sezione.

Nel Capitolo 2 ci occupiamo del modello di Curie-Weiss, definendolo e illustrando un metodo per studiarlo, il limite di campo medio. Quest'ultimo consiste nell'analizzare il comportamento del modello nel limite $N \rightarrow +\infty$, dove N è il numero di particelle coinvolte nel sistema. Ciò ci permette in particolare di studiare l'evoluzione del modello per $t \rightarrow +\infty$ e di mostrare con l'analisi qualitativa di una ODE che il sistema tende a raggiungere nel tempo due diverse situazioni, in base dalla scelta di un parametro iniziale che corrisponde all'inverso della temperatura iniziale del sistema. In particolare, per valori *piccoli* di questo parametro (e quindi temperature iniziali *alte*) osserviamo la tendenza a raggiungere un certo ordine in cui il numero di cariche positive e negative si mantiene uguale, quindi una magnetizzazione media nulla.

Per parametri, invece, sufficientemente *grandi* (quindi temperature basse) il

sistema tende a raggiungere una magnetizzazione media non nulla. Mostriamo che, fissato un parametro sufficientemente grande, i possibili valori di magnetizzazione a cui il sistema tende sono due, uno l'opposto dell'altro. In particolare, se al tempo 0 prevalgono le cariche negative la magnetizzazione tenderà al valore negativo; viceversa, se la magnetizzazione iniziale è positiva tenderà nel limite al valore positivo.

Nel Capitolo 3, infine, apportiamo una variazione al modello di Curie-Weiss aggiungendo un effetto di tipo dissipativo alla dinamica del sistema. Con tecniche analoghe a quelle utilizzate nel Capitolo 2, studiamo l'evoluzione del sistema nel tempo e osserviamo ancora due diversi comportamenti dipendenti dalla temperatura iniziale. In entrambi i casi la tendenza del sistema a raggiungere, asintoticamente, un ordine interno non si perde e porta o, per temperature iniziali sufficientemente alte, a una distribuzione con numero uguale di cariche positive e negative (come nel modello di Curie-Weiss) oppure, per temperature iniziali sufficientemente basse, a un comportamento di tipo periodico, che vede la magnetizzazione media oscillare tra valori positivi e negativi. Quest'ultimo fenomeno costituisce un esempio interessante di "oscillazioni auto-sostenute", dovute cioè non a forze periodiche esterne, bensì generate dal sistema stesso.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

In questo capitolo introduciamo, definendo e ricavando alcuni risultati elementari, le catene di Markov a tempo discreto e continuo e i processi di Poisson, nozioni fondamentali per affrontare l'analisi del modello che sarà oggetto di studio nei successivi capitoli.

1.1 Catene di Markov a tempo discreto

1.1.1 La proprietà di Markov

Ricordiamo che un *processo stocastico* è una qualunque successione di variabili aleatorie a valori in un insieme E , detto *spazio degli stati*.

Supporremo d'ora in poi tale spazio *finito* o *numerabile* e indicheremo i suoi elementi con i, j, k, \dots

Diremo che il processo *si trova allo stato i al tempo n* , o che *visita lo stato i al tempo n* , se $X_n = i$.

Definizione 1.1. Sia $\{X_n\}_{n \geq 0}$ un processo stocastico a tempo discreto e a valori in uno spazio degli stati E numerabile. Se per ogni intero $n \geq 0$ e per ogni stato $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \end{aligned} \quad (1.1)$$

ed entrambi i membri destro e sinistro sono ben definiti, tale processo stocastico si dice una *catena di Markov*.

Una *catena di Markov* si dice *omogenea (HMC)* se il membro destro di (1.1) è indipendente da n , ossia se vale:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ = P(X_1 = j | X_0 = i). \end{aligned} \quad (1.2)$$

La Proprietà (1.1) è detta *proprietà di Markov*.

Interpretando gli indici delle variabili X_n come dei tempi discreti, in particolare n come il tempo presente, la nozione di proprietà di Markov formalizza l'idea intuitiva della “possibilità di fare inferenze sullo stato futuro X_{n+1} di un processo a partire solo dall'informazione presente X_n , trascurandone la storia passata (X_{n-1}, \dots, X_0) ”.

Data una catena di Markov omogenea (HMC), la matrice $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}_{i,j \in E}$, dove

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j | X_0 = i), \quad (1.3)$$

è detta *matrice di transizione* della HMC.

Le sue entrate rappresentano la probabilità che un processo che si trova allo stato i arrivi allo stato j in un passo. È quindi chiaro che esse devono soddisfare

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j \in E} p_{ij} = 1$$

per ogni stato i, j in E . Una matrice \mathbf{P} con indici in E che soddisfa la proprietà suddetta è chiamata una *matrice stocastica*.

1.1.2 Distribuzione di una HMC

Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n\}_{n \geq 0}$.

Chiameremo *stato iniziale* la variabile aleatoria X_0 e *distribuzione iniziale* la sua distribuzione di probabilità ν , cioè:

$$\nu(i) = P(X_0 = i). \quad (1.4)$$

Chiamiamo *distribuzione della HMC* la probabilità

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k). \quad (1.5)$$

Notiamo che, per la regola della catena,

$$\begin{aligned} P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k) &= \\ P(X_0 = i_0)P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \dots P(X_k = i_k | X_0 = i_0, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}); \end{aligned}$$

da cui si ha, sfruttando la proprietà di Markov,

$$\begin{aligned} P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k) &= \\ P(X_0 = i_0)P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \dots P(X_k = i_k | X_{k-1} = i_{k-1}), \end{aligned}$$

o utilizzando le notazioni viste sopra,

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k) = \nu(i_0)p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{k-1} i_k}, \quad (1.6)$$

dove i $p_{i_0 i_1}, \dots, p_{i_{k-1} i_k}$ sono entrate della matrice di transizione della HMC. Vale quindi il seguente risultato:

Teorema 1.1. *La distribuzione di una catena di Markov omogenea (a tempi discreti) è determinata unicamente dalla sua distribuzione iniziale e dalla sua matrice di transizione.*

1.2 Il processo di Poisson

Introduciamo in questa sezione i processi di Poisson, utili a costruire modelli probabilistici per i tempi per cui accadono eventi rilevanti, la cui evidenza empirica fa ritenere però imprevedibili.

1.2.1 Processi di conteggio

Cominciamo con la definizione di *processo di punto*.

Definizione 1.2. *Un processo di punto su \mathbb{R}_+ è una successione $\{T_n\}_{n \geq 0}$ di variabili aleatorie non-negative tale che valgano quasi-certamente le seguenti proprietà:*

- (i) $T_0 \equiv 0$,
- (ii) $0 < T_1 < T_2 < \dots$,
- (iii) $\lim_{n \uparrow \infty} T_n = +\infty$.

Osservazione 1.1. *Solitamente viene data una definizione meno restrittiva di [1.2](#). In particolare, non si richiede (iii) e in (ii) le disuguaglianze possono essere non strette. Tuttavia, (ii) e (iii) sono sempre verificate nel caso di particolari processi di punto detti processi di Poisson, dei quali ci occuperemo in questa sezione.*

Nel caso di processi di punto che verificano solo (i) e (ii) parleremo di processo di punto semplice.

Diamo ora alcune definizioni che ci saranno utili in seguito.

Definizione 1.3. *Sia $\{T_n\}_{n \geq 0}$ un processo di punto. Una successione $\{S_n\}_{n \geq 1}$ definita da*

$$S_n = T_n - T_{n-1} \tag{1.7}$$

si dice successione di interarrivo o di intertempi.

Definizione 1.4. Sia $\{T_n\}_{n \geq 0}$ un processo di punto. Dato un qualsiasi intervallo in \mathbb{R}_+ , definiamo

$$N((a, b]) \doteq \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{(a, b]}(T_n). \quad (1.8)$$

Sia ora, dato $t \geq 0$,

$$N(t) \doteq N((0, t]). \quad (1.9)$$

La famiglia di variabili aleatorie $\{N_t\}_{t \geq 0}$ è detta processo di conteggio di $\{T_n\}_{n \geq 0}$.

Scriveremo d'ora in poi, per brevità, $N(a, b]$ al posto di $N((a, b])$.

Intuitivamente, $N(a, b]$ conta il numero di eventi che si verificano nell'intervallo di tempo $(a, b]$, $N(t)$ il numero di eventi verificatisi entro l'istante t .

Poiché la successione di eventi $\{T_n\}_{n \geq 0}$ si può ottenere a partire da $\{N_t\}_{t \geq 0}$, chiameremo spesso quest'ultimo *processo di punto* al posto di $\{T_n\}_{n \geq 0}$.

Osservazione 1.2. Le traiettorie del processo di conteggio N_t sono costanti a tratti e continue a destra. Inoltre $N(0) = 0$ e $N(a, b] = N(b) - N(a)$.

1.2.2 Il processo di Poisson omogeneo

Siamo ora pronti a definire il *processo di Poisson omogeneo*:

Definizione 1.5. Un processo di punto N su \mathbb{R}_+ si dice processo di Poisson omogeneo (HPP) di intensità $\lambda > 0$ se:

- (a) Per tutti i tempi $t_i, i \in \{1, \dots, k\}$, tali che $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ le variabili aleatorie $N(t_i, t_{i+1}]$, $i \in \{1, \dots, k-1\}$, sono indipendenti (diremo che il processo ha incrementi indipendenti),
- (b) Per ogni intervallo $(a, b] \subset \mathbb{R}_+$, $N(a, b]$ è una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda(b-a)$.

Quindi, per ogni $k \geq 0$,

$$P(N(a, b] = k) = e^{-\lambda(b-a)} \frac{[\lambda(b-a)]^k}{k!}$$

e, in particolare,

$$E[N(a, b)] = \lambda(b-a)$$

Osservazione 1.3. (Assenza di memoria) La proprietà (b) di [1.5](#) implica, in particolare, l'indipendenza della variabile $N(a, b]$ da $N(s)$ per un qualsiasi $s \in (0, a]$. Per questo motivo si dice che un processo di Poisson omogeneo gode della proprietà di assenza di memoria.

Osservazione 1.4. *Nel caso adottassimo la definizione meno restrittiva di processo di punto (si veda Definizione [1.2](#) e Osservazione [1.1](#)), è possibile dimostrare che le condizioni (a) e (b) nella Definizione [1.5](#) sono sufficienti a garantire che il processo di punto sia del tipo visto nella Definizione [1.2](#).*

Vediamo ora una proprietà delle successioni di intertempi associate a un processo di Poisson omogeneo.

Teorema 1.2. *La successione di intertempi $\{S_n\}_{n \geq 1}$ di un HPP su \mathbb{R}_+ di intensità λ è una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione esponenziale di parametro λ .*

La funzione di ripartizione di un arbitrario elemento della successione è quindi

$$P(S_n \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

e la sua media

$$E[S_n] = \lambda^{-1}.$$

1.2.3 Competizione di processi di Poisson

Siano $\{T_n^1\}_{n \geq 1}$ e $\{T_n^2\}_{n \geq 1}$ due HPP *indipendenti* su \mathbb{R}_+ di intensità, rispettivamente, $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$. La *sovrapposizione* o *somma* dei due processi è definita come la sequenza $\{T_n\}_{n \geq 1}$ ottenuta dall'unione dei due processi di partenza, come spiegato nella Figura [1.1](#).

Mostriamo ora la seguente

Proposizione 1.1. *Siano $\{T_n^1\}_{n \geq 1}$ e $\{T_n^2\}_{n \geq 1}$ due processi di Poisson omogenei e indipendenti su \mathbb{R}_+ di intensità, rispettivamente, $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$*

- (i) *I due processi $\{T_n^1\}_{n \geq 1}$ e $\{T_n^2\}_{n \geq 1}$ non hanno punti in comune.*
- (ii) *La loro sovrapposizione $\{T_n\}_{n \geq 1}$ è un processo di Poisson omogeneo di intensità $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.*

Dimostrazione. (i). Basta verificare che il processo di punto è *semplice*. Ma questo è chiaro dall'Osservazione [1.4](#). (ii). Osserviamo che per (i) $\{T_n\}_{n \geq 1}$ è un processo di punto su \mathbb{R}_+ . Mostriamo che è un processo di Poisson omogeneo, cioè che verifica (a) e (b) della Definizione [1.5](#).

Definiamo N , processo di conteggio di $\{T_n\}_{n \geq 1}$, come

$$N(a, b] = N_1(a, b] + N_2(a, b].$$

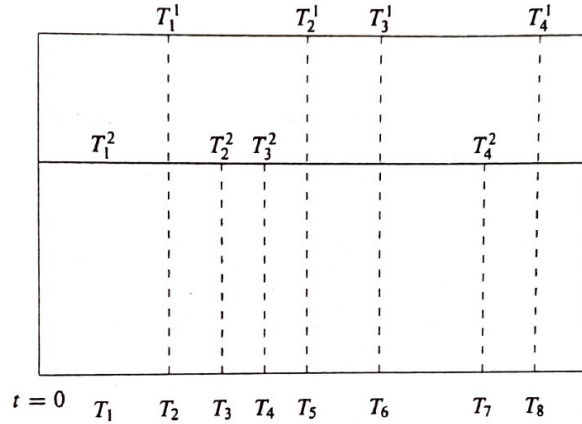


Figura 1.1: Sovrapposizione di due processi di Poisson (immagine da [1])

Chiaramente N verifica la condizione (a) di [1.5] poiché N_1 e N_2 sono indipendenti. Per quanto riguarda (b), osserviamo che, dati $a, b \in \mathbb{R}$, $N(a, b]$ è somma di due variabili aleatorie di Poisson indipendenti di parametri $\lambda_1(b-a)$ e $\lambda_2(b-a)$, e dunque è a sua volta una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda(b-a)$, dove $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. \square

Il risultato si può estendere a sovrapposizioni di un numero arbitrario (anche infinito) di HPP grazie al seguente teorema:

Teorema 1.3. (Somma di HPP indipendenti)

Sia $\{N_i\}_{i \geq 1}$ una famiglia di processi di Poisson omogenei e indipendenti di intensità positive $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$. Allora:

(i) Due qualsiasi processi di Poisson di questa famiglia non hanno punti in comune,

(ii) Se

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \lambda < \infty, \quad (1.10)$$

allora

$$N(t) \doteq \sum_{i=1}^{\infty} N_i(t) \quad (1.11)$$

definisce il processo di conteggio di un processo di Poisson omogeneo di intensità λ .

Dimostrazione. Il punto (i) è già stato mostrato nella Proposizione [1.1](#). Mostriamo dunque (ii). Si osservi preliminarmente che, per ogni $t \geq 0$, dalla linearità della media e da [\(1.10\)](#) segue che

$$E[N(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} E[N_i(t)] = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \right) t < \infty,$$

da cui $N(t)$ è quasi certamente finito. In particolare, $N(a, b]$ è quasi certamente finito per ogni $(a, b] \subset \mathbb{R}_+$ (abbiamo visto che $N(a, b] = N(b) - N(a)$). Mostriamo ora, come fatto nella Proposizione [1.1](#), che valgono le proprietà (a) e (b) di [1.5](#).

Per (a) basta osservare che la densità di $N(a, b]$ è

$$\begin{aligned} P(N(a, b] = k) &= \lim_{n \uparrow \infty} P\left(\sum_{i=1}^n N_i(a, b] = k \right) \\ &= \lim_{n \uparrow \infty} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i(b-a)} \frac{[\sum_{i=1}^n \lambda_i(b-a)]^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda(b-a)} \frac{[\lambda(b-a)]^k}{k!} \end{aligned}$$

e quindi $N(a, b]$ è un processo di Poisson di parametro λ .

La dimostrazione di (b) è analoga al caso di sovrapposizione di due processi (vista nella dimostrazione della Proposizione [1.1](#)). \square

Vediamo ora un altro importante risultato.

Teorema 1.4. (Teorema di competizione)

Sia $\{N_i\}_{i \geq 1}$ una famiglia di processi di Poisson omogenei e indipendenti di intensità positive $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$, con $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \lambda < \infty$. Denotiamo con Z il primo evento di $N = \sum_{i=1}^{\infty} N_i$ e con J l'indice del processo di Poisson omogeneo a cui appartiene Z . Allora

$$P(J = i, Z \geq a) = P(J = i)P(Z \geq a) = \frac{\lambda_i}{\lambda} e^{-\lambda a}. \quad (1.12)$$

In particolare, J e Z sono indipendenti, $P(J = i) = \frac{\lambda_i}{\lambda}$ e Z è un'esponenziale di parametro λ^{-1} .

Dimostrazione. Proviamo innanzitutto il risultato nel caso di un numero finito di processi. Dobbiamo mostrare che se X_1, \dots, X_K sono K variabili aleatorie indipendenti con legge esponenziale e medie $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_K^{-1}$, se $Z_K = \inf(X_1, \dots, X_K)$ e J_K è tale che $X_{J_K} = Z_K$, allora

$$P(J_K = i, Z_K \geq a) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_K} e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_K)a}. \quad (1.13)$$

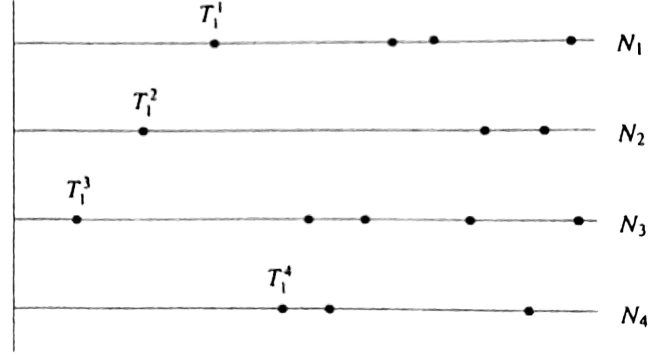


Figura 1.2: Competizione di quattro processi di punto. Qui $Z = T_1^3$, $J = 3$ (Immagine da [1]).

Osserviamo innanzitutto che

$$\begin{aligned} P(Z_K \geq a) &= P(\cap_{j=1}^K \{X_j \geq a\}) \\ &= \prod_{j=1}^K P(X_j \geq a) = \prod_{j=1}^K e^{-\lambda_j a} = e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_K)a} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Chiamando $U = \inf(X_2, \dots, X_K)$, si ha

$$\begin{aligned} P(J_K = 1, Z_K \geq a) &= P(a \leq X_1 < U) \\ &= \int_a^{+\infty} P(U > x) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-(\lambda_2 + \dots + \lambda_K)x} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_K} e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_K)a}, \end{aligned}$$

che mostra (1.13).

Facendo tendere $a \rightarrow +\infty$ otteniamo

$$P(J_K = 1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_K}. \quad (1.15)$$

Questo, assieme a (1.13) e (1.14), dà (1.12) nel caso $i = 1$, senza perdita di generalità.

Nel caso di un numero infinito di processi, è sufficiente osservare che la successione decrescente di eventi $\{J_K = 1, Z_K \geq a\}$ tende, per $K \rightarrow +\infty$, a

$$\{J = 1, Z \geq a\} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \{J_K = 1, Z_K \geq a\}, \quad (1.16)$$

da cui segue, usando (1.13), la tesi. □

1.3 Catene di Markov a tempo continuo

Passiamo ora allo studio delle catene di Markov a tempo continuo.

1.3.1 La proprietà di Markov

Dato un insieme numerabile E , ricordiamo che un *processo stocastico* $\{X_t\}_{t \geq 0}$ a valori in E è una famiglia di variabili aleatorie X_t con indici in \mathbb{R}_+ e a valori in E .

Lo spazio E viene detto *spazio degli stati*; la quantità $P(X_{t_1} = i, \dots, X_{t_k} = i_k)$ per ogni $t_1, \dots, t_k \geq 0$ e per ogni $i_1, \dots, i_k \in E$ è la *distribuzione di probabilità* del processo $\{X_t\}_{t \geq 0}$.

Definizione 1.6. (Catene di Markov a tempo continuo) *Sia E un insieme numerabile. Un processo stocastico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ a valori in E si dice catena di Markov a tempo continuo se, per ogni $i, j, i_1, \dots, i_k \in E$, per ogni $t, s \geq 0$ e per ogni $s_1, \dots, s_k \geq 0$ con $s_l \leq s$ per ogni $l \in \{1, \dots, k\}$, vale*

$$P(X_{t+s} = j | X_s = i, X_{s_1} = i_1, \dots, X_{s_k} = i_k) = P(X_{t+s} = j | X_s = i), \quad (1.17)$$

ed entrambi i membri destro e sinistro sono ben definiti.

Una catena di Markov a tempo continuo si dice omogenea se il membro destro di (1.17) è indipendente da s .

Chiameremo la Proprietà (1.17) *proprietà di Markov*.

In analogia con quanto avviene nel caso discreto, interpretando X_s come lo stato presente, X_{t+s} quello futuro e X_{s_l} per ogni $l \leq s$ quello passato, la proprietà suddetta può essere interpretata come la “possibilità di fare inferenze sullo stato futuro X_{t+s} di un processo a partire dall’informazione presente X_s , trascurando la sua storia passata $(X_{s_1}, \dots, X_{s_k})$ ”.

1.3.2 Semigruppato di transizione

Definiamo un altro oggetto che ci sarà utile a trattare le catene di Markov a tempo continuo: il *semigruppato di transizione*.

Esso può essere visto come l’analogo a tempo continuo della matrice di transizione nel caso discreto. Benché non sia l’unico approccio possibile, il semigruppato di transizione permette di vedere le catene di Markov a tempo continuo come una naturale estensione di quelle a tempo discreto.

Con le notazioni della Definizione [1.17](#), definiamo la seguente quantità:

$$\mathbf{P}(t) \doteq \{p_{ij}(t)\}_{i,j \in E}, \quad (1.18)$$

dove

$$p_{ij}(t) \doteq P(X_{t+s} = j | X_s = i)$$

La famiglia $\{\mathbf{P}(t)\}_{t \geq 0}$ è detta *gruppo di transizione della HMC a tempo continuo* $\{X_t\}_{t \geq 0}$.

Valgono, come nel caso discreto, le *equazioni di Chapman-Kolmogorov*:

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in E} p_{kj}(t)p_{ik}(s),$$

in forma compatta:

$$\mathbf{P}(t+s) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}(s),$$

da cui segue

$$\mathbf{P}(0) = \mathbb{1}.$$

Chiamiamo *distribuzione di $X(t)$ al tempo t* il vettore $\mu(t) = \{\mu_i(t)\}_{i \in E}$ dove $\mu_i(t) = P(X_t = i)$ e, analogamente al caso discreto, vale

$$\mu(t)^T = \mu(0)^T \mathbf{P}(t)$$

e la distribuzione di una HMC a tempo continuo dipende solo dal suo semigruppato di transizione.

1.3.3 Il generatore infinitesimo

Sia $\{\mathbf{P}(t)\}_{t \geq 0}$ il semigruppato di transizione su E di una catena di Markov a tempo continuo $\{X_t\}_{t \geq 0}$, cioè, per ogni $t, s \geq 0$,

1. $\mathbf{P}(t)$ è una matrice stocastica,
2. $\mathbf{P}(0) = \mathbb{1}$,
3. $\mathbf{P}(t+s) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}(s)$.

Supponiamo inoltre che il semigruppato sia *continuo* nell'origine, cioè che valga

$$\lim_{h \downarrow 0} \mathbf{P}(h) = \mathbf{P}(0) = \mathbb{1} \quad (1.19)$$

dove si ha convergenza puntuale e per ogni entrata di \mathbf{P} .

Vale il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione:

Teorema 1.5. (Caratteristica locale) *Sia $\{\mathbf{P}(t)\}_{t \geq 0}$ un semigruppò di transizione continuo su uno spazio delle fasi E . Per ogni stato i , esiste*

$$q_i \doteq \lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} \in [0, \infty] \quad (1.20)$$

e, per ogni coppia i, j di stati tali che $i \neq j$, esiste

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \in [0, \infty) \quad (1.21)$$

Sia ora, per ogni stato i ,

$$q_{ii} \doteq -q_i$$

Definiamo allora

Definizione 1.7. (Generatore infinitesimo)

I numeri q_{ij} sono chiamati le caratteristiche locali del semigruppò, o della corrispondente HMC a tempo continuo. La matrice

$$\mathbf{A} = \{q_{ij}\}_{i,j \in E}$$

è detta generatore infinitesimo del semigruppò, o della corrispondente HMC a tempo continuo. In notazione compatta,

$$\mathbf{A} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbf{P}(h) - \mathbf{P}(0)}{h},$$

cioè, il generatore infinitesimo è la derivata in 0 della funzione matriciale $t \mapsto \mathbf{P}(t)$.

1.3.4 HMC a salti regolari

Introduciamo ora i concetti di *stabilità* e *conservatività* di una catena.

Definizione 1.8. *Per ogni stato i , una catena di Markov si dice stabile se*

$$q_i < +\infty \text{ per ogni } i \in E \quad (1.22)$$

e conservativa se

$$q_i = \sum_{j \in E, j \neq i} q_{ij} \quad (1.23)$$

Introduciamo ora un'ampia classe di catene di Markov stabili e conservative, dette catene di Markov *a salti regolari*.

Definizione 1.9. (HMC a salti regolari)

Un processo stocastico $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ a valori in uno spazio degli stati E finito o numerabile si dice processo di salto (RJP) se, per quasi ogni $\omega \in \Omega$ e per ogni $t \geq 0$, esiste $\epsilon(t, \omega) > 0$ tale che

$$X(t + s, \omega) = X(t, \omega) \text{ per ogni } s \in [t, t + \epsilon(t, \omega)).$$

Un processo di salto si dice regolare se, per quasi ogni $\omega \in \Omega$, l'insieme $A(\omega)$ delle discontinuità della funzione $t \mapsto X(t, \omega)$ è σ -discreto, ossia, per ogni $c \geq 0$,

$$|A(\omega) \cap [0, c]| < \infty.$$

Una HMC a salti regolari, infine, è una catena di Markov omogenea che è anche un processo di salto regolare.

Vale il seguente

Teorema 1.6. (Stabilità e conservatività delle HMC)

1. Una HMC a salti regolari è stabile e conservativa
2. Due HMC a salti regolari con lo stesso generatore sono probabilisticamente equivalenti, cioè hanno anche lo stesso semigruppato di transizione.

Mostriamo di seguito come rappresentare una HMC a salti regolari per mezzo di processi di Poisson.

Sia $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ un processo di salto regolare e omogeneo, a valori in E , e siano

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n$$

una successione di tempi di transizione per X . Nel caso la catena abbia meno di n salti nell'intervallo $(0, +\infty)$, useremo la convenzione $\tau = +\infty$.

Poniamo ora

$$X_n \doteq X(\tau_n). \tag{1.24}$$

Si può mostrare (si veda il Teorema 1.2 in [1]) che $(X_n)_{n \geq 0}$ è una HMC.

Definizione 1.10. (Catena scheletro)

La catena $(X_n)_{n \geq 0}$ definita in (1.24) si dice catena scheletro del processo di salto regolare $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$.

Sia ora $Q = (q_{ij})_{ij \in E}$ il generatore infinitesimo di un RJP omogeneo $(X(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ a valori in E . Assumiamo $0 < q_i = -q_{ii} < +\infty$ per ogni $i \in E$. Si

può provare, allora, che la matrice di transizione della sua catena scheletro $(X_n)_{n \geq 0}$ è $M = (m_{ij})_{ij \in E}$, dove

$$m_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}, \quad m_{ii} = 0$$

Consideriamo a questo punto le seguenti regole per la dinamica di un processo di salto a tempo continuo:

1. Quando lo stato presente è i (cioè $X(t) = i$), il salto successivo è al tempo $\tau \sim \text{Exp}(q_i)$.
2. Quando lo stato presente è i , lo stato successivo j viene raggiunto con probabilità m_{ij} .

Mostriamo ora che un processo con una dinamica che segue le regole 1 e 2 ha come generatore infinitesimo Q .

Infatti:

$$P(X(t+h) = j | X(t) = i) = q_i h \frac{q_{ij}}{q_i} + o(h) = h q_{ij} + o(h) \quad (1.25)$$

e

$$\begin{aligned} P(X(t+h) = i | X(t) = i) &= P(X(h) = j | X(0) = i) \\ &= P(\tau_1 - \tau_0 \geq h | X(0) = i) = e^{-q_i h} \\ &= 1 - q_i h + o(h). \end{aligned} \quad (1.26)$$

dove q_i è la probabilità che ci sia un salto nell'intervallo $[t, t+h]$ e q_{ij} è la probabilità di passare da uno stato i a uno stato j .

1.3.5 RJHMC e il Teorema di competizione

Sia $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ un processo di salto regolare e omogeneo, a valori in E . Poniamo $X(t) = i$ e $I_i^\neq = \{j \in E : j \neq i\}$. Sia Q il generatore infinitesimale di $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$. Consideriamo quindi i HPP

$$(N_j)_{j \in I_i^\neq}$$

di intensità $\lambda = q_{ij}$, $j \in I_i^\neq$. Definiamo $Z =$ “il primo punto di $N = \sum_{j \neq i} N_j$ ”. La dinamica del processo è la seguente:

1. La catena si muove al tempo Z .

2. La catena si muove a j quando $Z \in N_j$.

Abbiamo quindi, per il Teorema di competizione (Teorema [1.4](#)), che il generatore del processo è dato da

$$\begin{aligned} p_{ij}(h) &= P(X(t+h) = j | X(t) = i) = P(Z \leq h)P(Z \in N_j) \\ &= \left(\sum_{k \neq i} q_{ik} \right) h \frac{q_{ij}}{\left(\sum_{k \neq i} q_{ik} \right)} + o(h) \\ &= q_{ij}h + o(h) \end{aligned}$$

e

$$p_{ii}(h) = P(Z > h) = 1 - q_i h + o(h)$$

e cioè il processo (che è, ricordiamo, a salti regolari) ha lo stesso generatore della catena $(X(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ e, in particolare, lo stesso semigruppato di transizione.

In conclusione, per definire un processo di Markov è sufficiente assegnare il generatore infinitesimo, da cui si può costruire una rappresentazione della catena.

Inoltre, ricordiamo che $P(X_{t+h} = j | X_t = i) = q_{ij}h + o(h)$, cioè la probabilità di saltare da i a j nell'intervallo di tempo h è proporzionale a q_{ij} a meno di termini piccoli in h .

Capitolo 2

Il modello di Curie-Weiss

2.1 Introduzione

I sistemi di particelle interagenti (SIP), nel senso in cui verranno intesi in questa tesi, sono sistemi finiti o numerabili di processi di Markov che interagiscono localmente. Ogni sistema di particelle interagenti viene definito su un *reticolo*. La scelta canonica è il reticolo intero di dimensione d , \mathbb{Z}^d . In ogni punto di questo reticolo c'è un processo di Markov a tempo continuo con spazio degli stati finito (nel caso in cui tratteremo, di dimensione due); la probabilità di cambiare stato di uno di questi siti (o meglio, del processo di Markov ad essi associato) dipende dagli stati dei siti ad esso vicini nel reticolo.

Nonostante la loro definizione e formulazione siano piuttosto semplici, i SIP sono particolarmente utili nel descrivere l'andamento di un gran numero di fenomeni e la descrizione del loro comportamento si rivela spesso tutt'altro che semplice.

Di seguito ci occuperemo di un particolare modello di SIP: il modello di Ising stocastico a campo medio (detto anche di *Curie-Weiss*) con dinamica di Glauber, di cui studieremo il *limite di campo medio*.

2.2 Definizione del modello

Formalizziamo quanto visto sopra e definiamo il modello di Curie-Weiss. Sia S un insieme finito, chiamato *spazio degli stati locale*, e Λ un insieme numerabile, detto *reticolo*. Denotiamo con S^Λ il prodotto cartesiano di S per Λ volte. I suoi elementi saranno quindi della forma

$$\sigma = (\sigma_i)_{i \in \Lambda},$$

con $\sigma_i \in S$ per ogni $i \in \Lambda$.

Definizione 2.1. *Un sistema di particelle interagenti (SIP) è un processo di Markov a tempo continuo $X = (X_t)_{t \geq 0}$ con spazio degli stati della forma S^Λ .*

Quindi, a ogni tempo $t \geq 0$ lo stato del sistema X è

$$X_t = (X_t(i))_{i \in \Lambda},$$

con $X_t(i) \in S$ per ogni $i \in \Lambda$.

Chiamiamo $X_t(i)$ lo stato locale di X al tempo t nella posizione (o sito) i . Generalmente Λ ha la struttura di un grafo. Denotiamo con E l'insieme dei suoi nodi e con $\mathcal{N}_i \doteq \{j \in \Lambda \mid \{i, j\} \in E\}$ l'insieme dei siti vicini a un certo sito i .

Nel caso del modello di Ising stocastico, lo spazio degli stati locale si riduce all'insieme $\{+1, -1\}$ e lo stato locale di un sito i , σ_i , viene chiamato *spin*.¹ La probabilità con cui un sito assume un certo valore di spin dipende unicamente dagli spin dei siti vicini.

Più precisamente, il modello di Ising stocastico con dinamica di Glauber è un sistema di particelle interagenti che evolve in modo che la probabilità che un sito i passi in un intervallo di tempo dt a un certo spin $\sigma \in S = \{-1, +1\}$, conoscendo lo spin dei vicini, sia uguale a

$$r_i^\sigma dt + o(dt),$$

dove la quantità $r_i^\sigma(x)$ è detta il *rate* con cui il sito i passa allo spin σ .

Ne segue che, per quanto visto nel Capitolo 1, r_i^σ è il generatore infinitesimo della HMC $(\sigma_i)_{i \in \Lambda}$ ed è sufficiente a definire e rappresentare la catena.

Costruiamo ora il modello a campo medio, cioè su un grafo *completo* Λ_N a $|\Lambda_N| = N$ vertici, dove quindi un sito è vicino di ogni altro sito (compreso se stesso, per semplificare la trattazione matematica). Supporremo cioè d'ora in poi

$$\mathcal{N}_i \doteq \Lambda_N \quad \text{e quindi} \quad |\mathcal{N}_i| = N. \quad (2.1)$$

Siamo interessati a studiare il comportamento del modello per $N \rightarrow \infty$, cioè il suo limite a campo medio.

Consideriamo dunque un modello di Ising a campo medio con N siti di spin, rispettivamente $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_N(t))$, dove $t \in [0, T]$, $T < \infty$ e $\sigma_i \in$

¹La nomenclatura è dovuta al fatto che il modello di Ising nasce in ambito fisico come descrizione dei fenomeni magnetici: in questo caso lo spazio degli stati descrive la direzione del campo magnetico dell'atomo che si trova nel sito i

$\{-1, +1\}$ per ogni i .

In questo modello, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, la transizione $\sigma_i(t) \rightarrow -\sigma_i(t)$ avviene con rate

$$1 + \tanh(-\sigma_i(t)\beta m_N(t)) \quad (2.2)$$

dove

$$m_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i(t)$$

è la *magnetizzazione* del sistema, ossia il valor medio degli spin.

Richiamiamo anche la definizione di seno e coseno iperbolico,

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \end{aligned}$$

e di tangente iperbolica,

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Utilizzando tali definizioni possiamo riscrivere (3.1) come

$$\frac{2e^{-\sigma_i(t)\beta m_N}}{e^{\sigma_i(t)\beta m_N} + e^{-\sigma_i(t)\beta m_N}}. \quad (2.3)$$

Osserviamo che per $\beta > 0$ i siti tendono ad avere uno spin uguale alla maggioranza (effetto di *magnetizzazione*); viceversa, se $\beta < 0$, i siti tendono ad acquistare spin opposto a quello più frequente. I due modelli vengono detti, rispettivamente, modello *ferromagnetico* e *antiferromagnetico*.

Noi supporremo d'ora in poi $\beta > 0$.

È utile riformulare il modello in funzione della magnetizzazione m_N . Non è difficile mostrare che $(m_N(t))_{t \geq 0}$ è ancora una catena di Markov (per una dimostrazione si veda la Proposizione 3.1 di [5], facendo riferimento ai rate calcolati qui sotto). In particolare, è una RJHMC, e per quanto visto nella Sezione 1.3.4 il suo generatore (e quindi i suoi rate) identifica il comportamento della catena.

Il suo spazio degli stati (cioè i possibili valori medi che possono assumere gli spin del sistema) è $S = \{-1, -1 + \frac{2}{N}, \dots, 1 - \frac{2}{N}, 1\}$ e le sue possibili transizioni, ad ogni salto, sono

$$m_N \rightarrow m_N + \frac{2}{N}$$

quando uno spin positivo diventa negativo, e

$$m_N \rightarrow m_N - \frac{2}{N}$$

quando uno spin negativo diventa positivo.

Calcoliamo ora i rate r_1 e r_2 con cui avvengono rispettivamente le due transizioni. Ricordiamo che vale, per definizione di rate,

$$P(m_N(t+dt) = i + \frac{2}{N} | m_N(t) = i) = r_1 dt + o(dt)$$

e

$$P(m_N(t+dt) = i - \frac{2}{N} | m_N(t) = i) = r_2 dt + o(dt),$$

dove $i \in S$.

È quindi chiaro che, per quanto visto nel Capitolo 1 e usando (2.2),

$$r_1 = |\{i : \sigma_i = -1\}|(1 + \tanh(\beta m_N(t))).$$

A parole, la quantità sopra moltiplicata per dt è circa (con un errore pari a $o(dt)$) la probabilità che uno *qualsiasi* degli spin negativi diventi positivo. Riscrivendo ora la quantità $|\{i : \sigma_i = -1\}|$ (il numero di siti a spin negativo) come:

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\sigma_i - 1) = -\frac{1}{2} N \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N 1 = -\frac{1}{2} N(m_N - 1)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{1}{2} N(m_N - 1)(1 + \tanh(\beta m_N(t))) \\ &= -N(m_N - 1) \frac{e^{\beta m_N}}{e^{\beta m_N} + e^{-\beta m_N}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Analogamente,

$$r_2 = |\{i : \sigma_i = +1\}|(1 + \tanh(-\beta m_N(t)))$$

e $|\{i : \sigma_i = +1\}|$ si riscrive come:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\sigma_i + 1) = \frac{1}{2} N \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N 1 = \frac{1}{2} N(m_N + 1),$$

da cui

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{1}{2}N(m_N + 1)(1 + \tanh(-\beta m_N(t))) \\ &= N(m_N + 1) \frac{e^{-\beta m_N}}{e^{\beta m_N} + e^{-\beta m_N}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Siamo ora interessati al comportamento di questo sistema (e quindi del processo $m_N(t)$) per $N \rightarrow \infty$, ossia al suo *limite di campo medio*.

Useremo i risultati seguenti.

Sia $X_N = (X_t^N)_{t \geq 0}$, con $N \geq 1$, una catena di Markov a tempo continuo con spazio degli stati finito S_N , generatore G_N , semigruppato di transizione $(P_t^N)_{t \geq 0}$, e siano $f_N : S_N \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni a valori in un intervallo chiuso (non necessariamente limitato) di estremi sinistro e destro rispettivamente I_- e I_+ . Siamo interessati a trovare condizioni tali per cui il processo $f_N(X_t^N)_{t \geq 0}$ approssimi la soluzione $(y_t)_{t \geq 0}$ di un'equazione differenziale nel limite $N \rightarrow \infty$.

Definiamo le seguenti quantità, che ci saranno utili in seguito:

$$\begin{aligned} \alpha_N(x) &= \sum_{x' \in S} G_N(x, x')(f_N(x') - f_N(x))^2 \\ \beta_N(x) &= \sum_{x' \in S} G_N(x, x')(f_N(x') - f_N(x)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

dove $x, x' \in S_N$ sono rispettivamente lo stato di X_t^N e X_{t+dt}^N .

Mostriamo che, sotto determinate ipotesi, se per $N \rightarrow \infty$ $\alpha_N(x)$ tende a zero e $\beta_N(x)$ è sufficientemente vicina a una funzione b di $f(X_t) \doteq \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(X_t)$, allora $f(X_t)$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}_t = b(y_t) & (t \geq 0) \\ y_0 = c & (c \in I) \end{cases} \quad (2.7)$$

dove $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ è globalmente lipschitziana e tale che

$$b(I_-) \geq 0 \quad \text{se} \quad I_- > -\infty \quad \text{e} \quad b(I_+) \leq 0 \quad \text{se} \quad I_+ < +\infty. \quad (2.8)$$

Vale il seguente teorema, che non mostreremo (si veda il Teorema 3.2 di [5] per una dimostrazione):

Teorema 2.1. *Supponiamo che $f_N(X_0^N)$ converga in probabilità a y_0 condizione iniziale del problema di Cauchy (2.7) e che valgano, per $N \rightarrow \infty$,*

(i)

$$\sup_{x \in S_N} |\beta_N(x) - b(f_N(x))| \rightarrow 0 \quad (2.9)$$

(ii)

$$\sup_{x \in S_N} \alpha_N(x) \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

Allora, per ogni $T < \infty$ e $\epsilon > 0$, si ha che

$$\mathbf{P}(|f_N(X_T^N) - y_t| \leq \epsilon \quad \forall t \in [0, T]) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1. \quad (2.11)$$

Vogliamo ora applicare il teorema al processo $m_N(t)$, con $0 \leq t \leq T < \infty$ e spazio degli stati S finito, per calcolare

$$m(t) \doteq \lim_{N \rightarrow \infty} m_N(t).$$

Prendiamo

$$f_N(x) = f(x) \doteq x$$

e

$$b(x) \doteq \beta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \beta_N(x).$$

Per applicare il Teorema [2.1](#) dobbiamo calcolare i limiti per $N \rightarrow \infty$ di

$$\begin{aligned} \alpha_N(x) &= \sum_{x' \in \Lambda} G_N(x, x') (x' - x)^2 \\ \beta_N(x) &= \sum_{x' \in \Lambda} G_N(x, x') (x' - x), \end{aligned}$$

dove x è lo stato di $m_N(t)$, x' quello di $m_n(t+dt)$ e Λ è l'insieme delle possibili transizioni che può effettuare x in un tempo infinitesimo dt .

Nel nostro caso, abbiamo visto che le possibili transizioni che può effettuare m_N sono solo due: $m_N \rightarrow m_N + \frac{2}{N}$, quando uno degli spin negativi diventa positivo, e $m_N \rightarrow m_N - \frac{2}{N}$, quando uno degli spin positivi diventa negativo; i rispettivi rate sono già stati calcolati in [\(2.4\)](#) e [\(2.5\)](#).

Quindi, ricordando che per quanto visto alla fine del Capitolo 1 i rate del

processo formano il generatore della catena $m_N(t)$,

$$\begin{aligned}
\beta_N(m_N) &= G_N \left(m_N, m_N + \frac{2}{N} \right) \left(\left(m_N + \frac{2}{N} \right) - m_N \right) \\
&\quad + G_N \left(m_N, m_N - \frac{2}{N} \right) \left(\left(m_N - \frac{2}{N} \right) - m_N \right) \\
&= -\frac{1}{2} N(m_N - 1)(1 + \tanh(\beta m_N(t))) \frac{2}{N} \\
&\quad + \frac{1}{2} N(m_N + 1)(1 + \tanh(-\beta m_N(t))) \left(-\frac{2}{N} \right) \\
&= -(m_N - 1) \frac{2e^{\beta m_N}}{e^{\beta m_N} + e^{-\beta m_N}} - (m_N + 1) \frac{2e^{-\beta m_N}}{e^{\beta m_N} + e^{-\beta m_N}} \\
&= -\frac{2}{e^{\beta m_N} + e^{-\beta m_N}} [m_N(e^{-\beta m_N} + e^{\beta m_N}) + e^{-\beta m_N} - e^{\beta m_N}].
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Ricordando le definizioni di seno e coseno iperbolico viste in (2.2), possiamo riscrivere (2.12) come

$$\begin{aligned}
\beta_N(m_N) &= -\frac{2}{2 \cosh(\beta m_N)} [2m_N \cosh(\beta m_N) - 2 \sinh(\beta m_N)] \\
&= -2[m_N - \tanh(\beta m_N)],
\end{aligned}$$

che per $N \rightarrow \infty$ tende a

$$\beta(m) = -2[m - \tanh(\beta m)]. \tag{2.13}$$

Questa è quindi la funzione b cercata (si osservi che è globalmente lipschitziana e limitata per $m < \infty$).

Resta da verificare la (ii) di 2.1. Con conti analoghi a prima, si ottiene

$$\begin{aligned}
\alpha_N(m_N) &= G_N \left(m_N, m_N - \frac{2}{N} \right) \left[\left(m_N - \frac{2}{N} \right) - m_N \right]^2 \\
&\quad + G_N \left(m_N, m_N - \frac{2}{N} \right) \left[\left(m_N - \frac{2}{N} \right) - m_N \right]^2 \\
&= -\frac{1}{2} N(m_N - 1) \frac{2e^{\beta m_N}}{e^{\beta m_N} + e^{-\beta m_N}} \frac{4}{N^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} N(m_N + 1) \frac{2e^{-\beta m_N}}{e^{\beta m_N} + e^{-\beta m_N}} \frac{4}{N^2} \\
&= \frac{2}{e^{\beta m_N} + e^{-\beta m_N}} \frac{2}{N} [-(m_N - 1)e^{-\beta m_N} + (m_N + 1)e^{\beta m_N}].
\end{aligned} \tag{2.14}$$

da cui

$$\sup_{m_N \in S} \alpha_N(m_N) = \max_{m_N \in S} \frac{4}{N} \left[\frac{-(m_N - 1)e^{-\beta m_N} + (m_N + 1)e^{\beta m_N}}{e^{\beta m_N} + e^{-\beta m_N}} \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

poiché la quantità tra parentesi quadre (e dunque anche il suo massimo) è finita per ogni valore di m_N in $S = \{-1, -1 + \frac{2}{N}, \dots, 1 - \frac{2}{N}, 1\}$ e per ogni N . Quindi, per il Teorema [2.1](#),

$$\begin{cases} \dot{m}(t) = b(m(t)) \\ m(0) = m_0 \end{cases} \quad (2.15)$$

è l'equazione differenziale che approssima l'andamento di $m_N(t)$ per $N \rightarrow \infty$, $t \in [0, T]$ e $m_0 \in S$, dove $b(m) = -2(m - \tanh(\beta m))$.

2.3 Analisi del modello

Studiamo in questo paragrafo, qualitativamente, la soluzione di [\(2.15\)](#), determinandone equilibri e diagramma di biforcazione per il parametro $\beta > 0$.

Equilibri.

Determiniamo i valori di m tali che $b(m) = 0$:

$$\begin{aligned} 2 \sinh(\beta m) - 2m \cosh(\beta m) = 0 &\iff \sinh(\beta m) = m \cosh(\beta m) \\ \iff \tanh(\beta m) = m, \end{aligned}$$

dove $\tanh(\beta m)$ è ben definita poiché $\cosh(\beta m) > 0$ per ogni m e $\beta > 0$. Risolviamo l'equazione graficamente cercando i punti di intersezione tra le funzioni m e $\tanh(\beta m)$.

Osserviamo che

$$\left. \frac{d}{dt} \tanh(\beta m) \right|_{m=0} = \beta \quad (2.16)$$

e che

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} \tanh(\beta m) = \pm 1 \quad (2.17)$$

Si vede inoltre facilmente che per $m > 0$ $\tanh(\beta m)$ è concava e per $m < 0$ convessa.

Abbiamo quindi due possibili situazioni (Figura [2.1](#)):

$\beta \leq 1$ (quindi derivata in 0 di $\tanh(\beta m) \leq 1$): i due grafici hanno una sola intersezione (Figura [2.1](#) nei primi due casi) in $m = 0$, quindi c'è un unico equilibrio $\bar{m} = 0$.

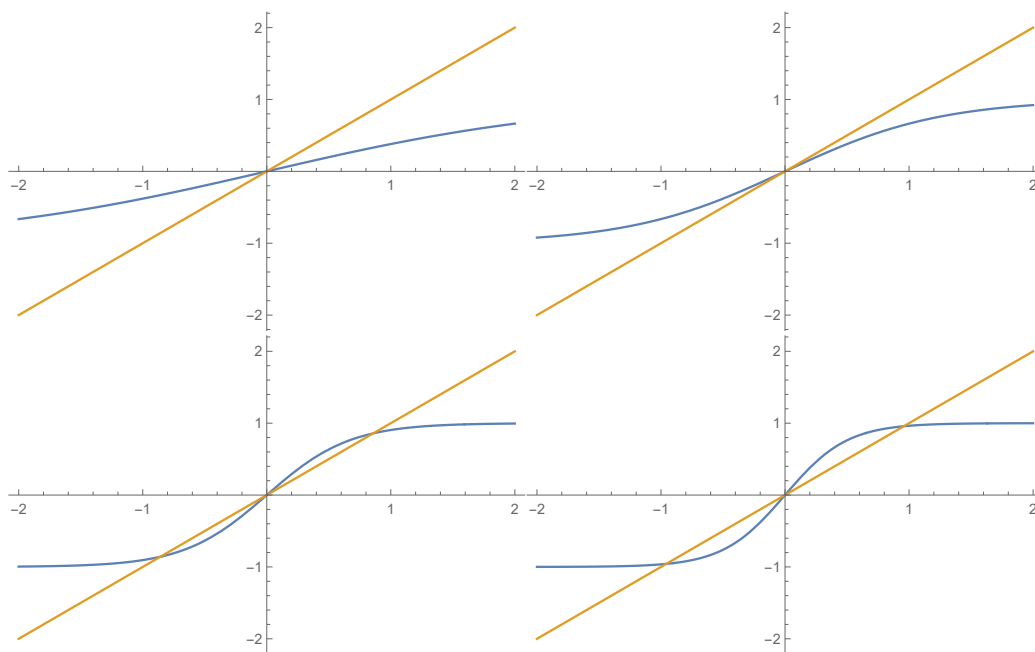


Figura 2.1: Intersezione tra i grafici di m e $\tanh(\beta m)$ per valori di β , in ordine da sinistra a destra, 0.4, 0.8, 1.5 e 2.

$\beta > 1$ (quindi derivata in 0 di $\tanh(\beta m) > 1$): i due grafici hanno tre intersezioni (Figura [2.1](#) negli ultimi due casi): una in $m = 0$ e altre due in $m = \pm m^*$ (la simmetria è dovuta al fatto che entrambe le funzioni m e $\tanh(\beta m)$ sono *dispari*).

Passiamo all'analisi della stabilità.

Analisi stabilità degli equilibri.

Tracciamo il ritratto in fase dell'equazione differenziale in [2.15](#) per studiare la stabilità egli equilibri.

Caso $\beta \leq 1$

Osserviamo che la derivata in 0 di $b(m)$ è $\beta - 1$, quindi negativa o nulla per $\beta \leq 1$. Sappiamo inoltre dalla precedente analisi che il grafico ha una sola intersezione con l'asse delle m in $m = 0$. Ne segue che la funzione $b(m)$ è positiva per $m < 0$, negativa per $m > 0$. Quindi 0 è equilibrio stabile (Figura [2.2](#)).

Caso $\beta > 1$

In questo caso abbiamo visto che la funzione si annulla in tre punti: $-m^*$, 0 e m^* . Si vede con facili calcoli che in questi punti la derivata è, rispettivamente, negativa, positiva e negativa. Sapendo che non ci sono altri punti in cui

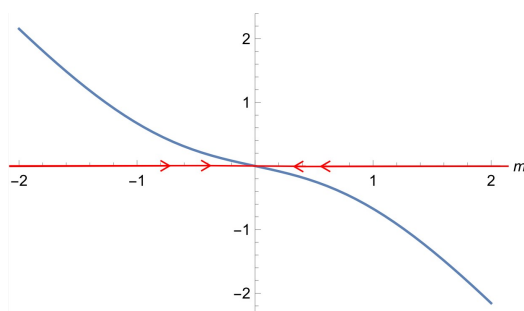


Figura 2.2: Ritratto in fase del sistema (2.15) per $\beta = 0.8$

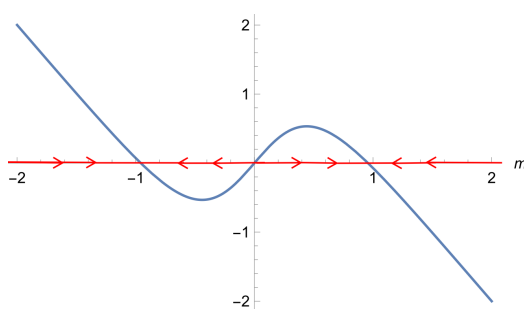


Figura 2.3: Ritratto in fase del sistema (2.15) per $\beta = 2$

$b(m)$ si annulla, segue che la funzione è positiva per $m < -m^*$ e $0 < m < m^*$, negativa per $-m^* < m < 0$ e $m > m^*$. Quindi, per ogni $\beta > 1$, 0 è equilibrio instabile, $\pm m^*$ sono equilibri stabili (Figura 2.3).

Il diagramma di biforcazione, che è di tipo *pitchfork*, è rappresentato nella Figura 2.4. Quindi l'andamento della soluzione sarà, al variare della condizione iniziale m_0 , come quello della Figura 2.5, che mostra la soluzione di (2.15) per $m_0 = \pm 3$.

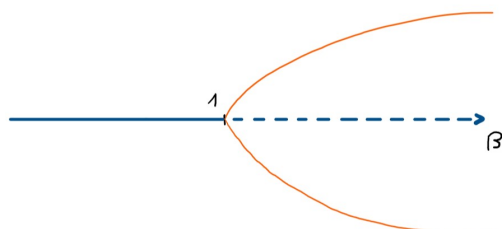


Figura 2.4: Diagramma di biforcazione del modello di Curie-Weiss.

La linea blu rappresenta l'equilibrio 0, continua quando è stabile, tratteggiata quando instabile. La linea arancione indica invece i due equilibri stabili $\pm m^*$. La biforcazione che avviene a $\beta = 1$ viene detta *pitchfork*.

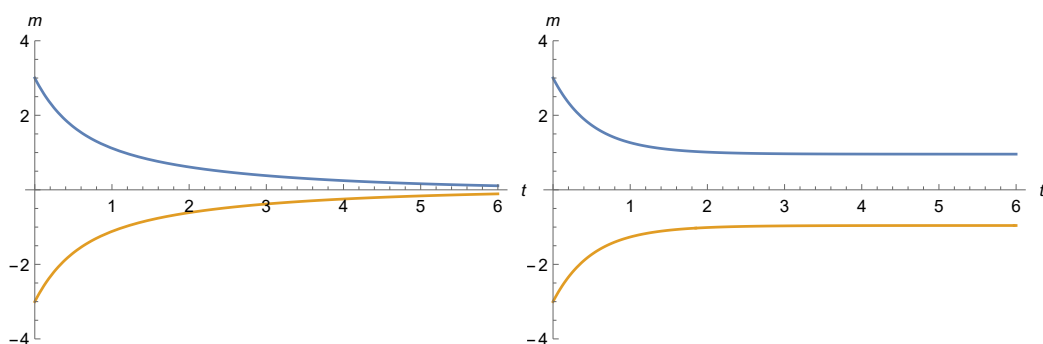


Figura 2.5: Grafico di $m(t)$ prendendo $m_0 = \pm 3$, nel caso $\beta = 0.8$ (figura a sinistra) e $\beta = 2$ (figura a destra).

Si osservi che, come ci aspettavamo grazie all'analisi fatta sopra, fissato un parametro $\beta \leq 1$ (figura a sinistra) le soluzioni dell'equazione differenziale (2.15) tendono a 0 sia con condizioni iniziali positive (curva blu) che negative (curva arancione). Fissato invece $\beta > 1$ (figura a destra), le soluzioni tendono a $m^* > 0$ se le condizioni iniziali sono positive (curva arancione), a $-m^* < 0$ se le condizioni iniziali sono negative (curva blu). Solo nel caso $m_0 = 0$ la soluzione resterà costantemente nulla (perché 0 è equilibrio).

Capitolo 3

Modello di Curie-Weiss con dissipazione

In questo capitolo definiremo e analizzeremo il *modello di Curie-Weiss con dissipazione*.

Analogamente a quanto fatto nel capitolo precedente, dopo aver definito il modello, ne studieremo il limite per $N \rightarrow \infty$ ottenendo che il processo che lo descrive tende ancora alla soluzione di un'equazione differenziale.

Studieremo quindi, qualitativamente, tale funzione, osservando un comportamento *oscillatorio* per alcuni valori del parametro β , nonostante l'assenza di forze periodiche esterne coinvolte nel modello. Tale comportamento viene detto *periodicamente autonomo*.

3.1 Definizione del modello

Consideriamo un sistema a N spin, rispettivamente $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_N(t))$, dove $t \in [0, T]$, $T < \infty$ e $\sigma_i \in \{-1, +1\}$ per ogni i , con transizione $\sigma_i(t) \rightarrow -\sigma_i(t)$ di rate

$$1 + \tanh(\sigma_i(t)\lambda_N(t)), \quad (3.1)$$

dove $\lambda_N(t)$ è un processo stocastico descritto dall'equazione differenziale

$$d\lambda_N(t) = -\alpha\lambda_N(t)dt - \beta dm_N(t), \quad (3.2)$$

con $\alpha, \beta \geq 0$ parametri positivi. Si può mostrare che il processo $(m_N(t), \lambda_N(t))_{t \geq 0}$ è una catena di Markov e, in particolare, una RJHMC. Valgono quindi le osservazioni fatte nel precedente capitolo a proposito dei rate.

Di seguito considereremo α fissato e studieremo il modello al variare di β .

Facciamo alcune osservazioni sul modello appena introdotto.

Osservazione 3.1. Se $\alpha = 0$ l'equazione (3.2) si riduce a

$$d\lambda_N(t) = -\beta dm_N(t), \quad (3.3)$$

che ha come soluzioni

$$\lambda_N(t) = c - \beta m_N(t) \quad (3.4)$$

dove $c = \lambda_N(0) + \beta m_N(0)$ dipende dalle condizioni iniziali. In particolare, se $\lambda_N(0) = 0$ siamo nel caso del modello di Curie-Weiss studiato nel capitolo precedente (si confronti con (2.15)).

Se invece $\alpha > 0$, è presente anche un effetto dissipativo, cioè di attrazione a 0, per $t \rightarrow +\infty$.

Infatti, in un intervallo $dt = t - t_0$ in cui lo spin (e quindi m_N) resta invariato, $\lambda_N(t)$ varierà secondo la legge:

$$\lambda_N(t) = \lambda_N(t_0) + (e^{-\alpha t} - e^{-\alpha t_0})dt \quad (3.5)$$

e l'addendo di destra chiaramente tende a zero per $t \rightarrow +\infty$.

Siamo ora interessati a studiare il comportamento del modello per $N \rightarrow +\infty$.

Da [3] sappiamo che l'equazione limite nel caso dissipativo è:

$$\begin{cases} \dot{m}(t) = -2(m(t) + \tanh(\lambda(t))) \\ \dot{\lambda}(t) = -\alpha\lambda(t) + 2\beta(m(t) + \tanh(\lambda(t))) \\ (m(0), \lambda(0)) = (m_0, \lambda_0) \end{cases} \quad (3.6)$$

Studiamo, anche in questo caso, il comportamento della soluzione del sistema di ODE (3.6).

3.2 Analisi (locale) degli equilibri

Cominciamo determinando gli equilibri del sistema (3.6) al variare di $\beta > 0$, per α fissato. Chiameremo in seguito, laddove non fosse necessaria la notazione completa,

$$x \doteq \begin{pmatrix} m \\ \lambda \end{pmatrix}$$

e (3.6) come

$$\begin{cases} \dot{x} = f_\beta(x) \\ x((0, 0)) = x_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Cerchiamo dunque $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $f_\beta(\bar{x}) = 0$. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -2(m + \tanh(\lambda)) = 0 \\ -\alpha\lambda + 2\beta(m + \tanh(\lambda)) = 0 \end{cases}$$

osserviamo che il primo membro si annulla solo per $m = -\tanh(\lambda)$, e che sostituendo quest'ultimo nel secondo si ottiene $\lambda = 0$. Dunque l'unico equilibrio del sistema è

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Proviamo, scrivendo il sistema linearizzato e utilizzando il metodo spettrale, a capire di che tipo è.

Calcoliamo innanzitutto A_β , lo Jacobiano di f_β , in \bar{x} .

$$\begin{aligned} Df(x) &= \begin{pmatrix} -2 & -2(1 - \tanh^2(\lambda)) \\ 2\beta & -\alpha + 2\beta(1 - \tanh^2(\lambda)) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow A_\beta = Df(\bar{x}) &= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2\beta & 2\beta - \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

E quindi il sistema linearizzato è

$$\begin{pmatrix} \dot{m} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2\beta & 2\beta - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Calcoliamo ora gli autovalori di A_β :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -2 - x & -2 \\ 2\beta & 2\beta - \alpha - x \end{pmatrix} &= x^2 + (\alpha + 2 - 2\beta)x + 2\alpha = 0 \\ \Leftrightarrow x_\pm &= \beta - \frac{\alpha}{2} - 1 \pm \sqrt{\left(\beta - \frac{\alpha}{2} - 1\right)^2 - 2\alpha}. \end{aligned}$$

Deduciamo quindi, grazie al metodo spettrale, che si possono presentare le seguenti possibili situazioni:

- (a) $\beta < \frac{\alpha}{2} + 1$: i due autovalori hanno entrambi parte reale negativa, quindi l'equilibrio è *asintoticamente stabile*.
- (b) $\beta = \frac{\alpha}{2} + 1$: i due autovalori sono puramente immaginari, dunque non si può concludere nulla sulla sua stabilità.
- (c) $\beta > \frac{\alpha}{2} + 1$: i due autovalori hanno entrambi parte reale positiva: l'equilibrio è *instabile*.

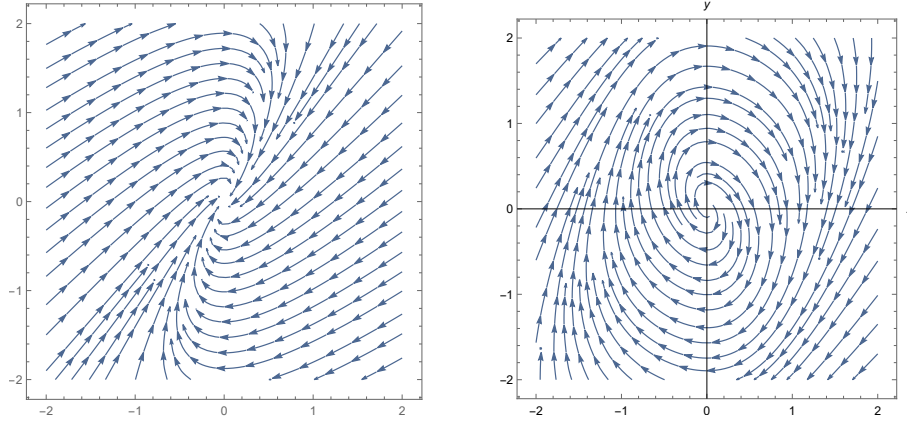


Figura 3.1: Ritratto in fase di (3.6), al variare delle condizioni iniziali e prendendo $\alpha = 1$, nei casi $\beta = 0.3$ (a sinistra) e $\beta = 2$ (a destra). Si noti che nel primo caso $(0, 0)$ è equilibrio attrattivo, nel secondo repulsivo.

Proviamo ad utilizzare il metodo di Lyapunov per cercare di capire cosa succede in (b).

Effettuiamo innanzitutto un cambio di variabili che ci sarà utile anche in seguito. Sostituiamo m con $y \doteq 2(\lambda + \beta m)$ e lasciamo λ invariato.

Il cambio di coordinate avviene cioè tramite il diffeomorfismo

$$\mathcal{C}(m, \lambda) = \begin{pmatrix} 2(\lambda + \beta m) \\ \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Il nuovo campo dell'equazione differenziale sarà quindi definito dal campo $\tilde{f}_\beta = \mathcal{C}' f_\beta \circ \mathcal{C}^{-1}$ che ci porta con calcoli rapidi al sistema equivalente:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = y - g(\lambda) \\ \dot{y} = -2\alpha\lambda. \end{cases} \quad (3.10)$$

Consideriamo ora la funzione di Lyapunov

$$\mathcal{W}(\lambda, y) \doteq \frac{\lambda^2}{2} + \frac{y^2}{4\alpha}. \quad (3.11)$$

Essa ha un minimo stretto in \bar{x} (è strettamente positiva per ogni $(\lambda, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e nulla in $(0, 0)$) e la sua derivata di Lie vale:

$$L_{f_\beta} \mathcal{W}(\lambda, y) = \lambda \dot{\lambda} + \frac{1}{2\alpha} y \dot{y} = \lambda(y - g(\lambda)) + \frac{1}{2\alpha} y(-2\alpha\lambda) = -\lambda g(\lambda), \quad (3.12)$$

dove $g(\lambda) = (\alpha + 2)\lambda - 2\beta \tanh(\lambda)$.

Studiamo il segno di $L_{f_\beta} \mathcal{W}(\lambda, y)$ in un intorno di $(0, 0)$ e al variare di $\beta \leq \frac{\alpha}{2} + 1$.

Chiaramente $g(0) = 0$ e $g(\lambda)$ è dispari (differenza di funzioni dispari). Inoltre è strettamente crescente per $\lambda \geq 0$ poiché:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}g(\lambda) &= \alpha + 2 - 2\beta(1 - \tanh^2(\lambda)) \\ &\geq \alpha + 2 - (\alpha + 2)(1 - \tanh^2(\lambda)) > 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

dove l'ultima disuguaglianza vale perché $\tanh^2(\lambda) < 1$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Di conseguenza $-\lambda g(\lambda) \leq 0$ per $\lambda \geq 0$ e ha come unico punto di minimo $\lambda = 0$, in cui vale 0. Per la simmetria di $\lambda g(\lambda)$ (pari in quanto prodotto di funzioni dispari), $-\lambda g(\lambda) \leq 0$ per $\lambda \leq 0$.

Siamo quindi nel caso $L_{f_\beta}\mathcal{W}(\lambda, y) \leq 0$ per ogni $(\lambda, y) \in W$, dove W è un (qualsiasi) intorno dell'equilibrio $(0, 0)$: per il metodo della funzione di Lyapunov, $(0, 0)$ è L-stabile.

Si può in realtà, nel caso (c), avere più di un'informazione locale sul comportamento della soluzione $x(t)$. In particolare, mostreremo nel prossimo paragrafo che, per $\beta > \frac{\alpha}{2} + 1$, le soluzioni di (3.6) hanno un comportamento periodico (in un senso che verrà chiarito nella prossima sezione) attorno all'origine (ossia esiste un *ciclo limite*).

3.3 Esistenza e unicità del ciclo limite

Ricordiamo che un ciclo limite è un'orbita periodica attrattiva.

Dagli autovalori di A_β (entrambi con parte reale negativa per $\beta < \frac{\alpha}{2} + 1$, positiva per $\beta > \frac{\alpha}{2} + 1$), sappiamo (si veda la Sezione 8.2 in [4]) che il diagramma di biforcazione di β presenta una *biforcazione di Hopf* a $\beta = \frac{\alpha}{2} + 1$ (Figura 3.2). Questo significa che in prossimità della biforcazione l'equilibrio \bar{x} perde stabilità e nasce un ciclo limite. Sottolineiamo che questa è un'informazione di tipo *locale*.

Per capire come si comporta il sistema per $\beta > \frac{\alpha}{2} + 1$ e arbitrariamente lontano dalla biforcazione, diamo il seguente teorema valido per sistemi del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = y - A(x) \\ \dot{y} = -b(x), \end{cases} \quad (3.14)$$

detti anche *sistemi di Liénard*. Nel nostro caso (si veda la forma con le nuove coordinate ricavata in (3.10)), $A(x)$ è $g(\lambda) = (\alpha + 2)\lambda - 2\beta \tanh(\lambda)$ e $b(x)$ è $2\alpha\lambda$.

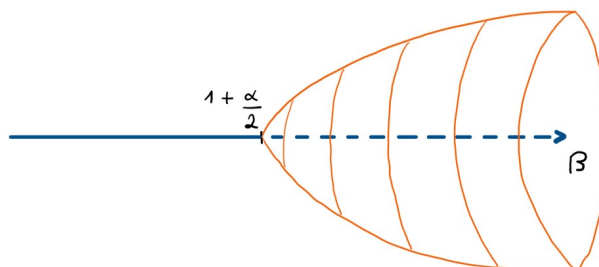


Figura 3.2: Diagramma di biforcazione del modello di Curie-Weiss con dissipazione. La linea blu rappresenta l'equilibrio \bar{x} , continua quando è stabile, tratteggiata quando instabile. La superficie arancione rappresenta invece il ciclo limite. La biforcazione che avviene a $\beta = 1 + \frac{\alpha}{2}$ viene detta *biforcazione di Hopf*.

Teorema 3.1. *Siano f e g funzioni continue, con g localmente lipschitziana, tali che $f(0) < 0$, $f(x) > 0$ per $|x| > \delta$, $\delta > 0$, e $xb(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$. Siano inoltre $F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi$ e $B(x) = \int_0^x b(\xi)d\xi$ e supponiamo che F e G verifichino le seguenti condizioni:*

1. *A ha solo tre zeri reali e distinti $x_0 = 0$, $x_1 < x_0 < x_2$ e F è monotona crescente nell'intervallo $[x_1, x_2]$*
2. *$B(x_1) = B(x_2)$*
3. *$\limsup_{x \rightarrow \pm\infty} [A(x) \pm B(x)] = +\infty$.*

Allora il sistema (3.14) ha un'unica orbita globalmente periodica e stabile (ossia ammette un unico ciclo limite).

È facile verificare che il sistema preso in esame soddisfa per $\beta > \frac{\alpha}{2} + 1$ le condizioni sufficienti per l'esistenza e unicità del ciclo limite date nel Teorema 3.1.

Daremo di seguito una dimostrazione valida nel nostro caso specifico e non per tutti i sistemi di Liénard che soddisfano le ipotesi di (3.1) (per una dimostrazione nel caso generale di si veda [2]).

Teorema 3.2. *Per $\beta > \frac{\alpha}{2} + 1$ il sistema (3.10) ha un'unica orbita periodica e stabile che attrae tutte le altre orbite a eccezione del punto fisso \bar{x} .*

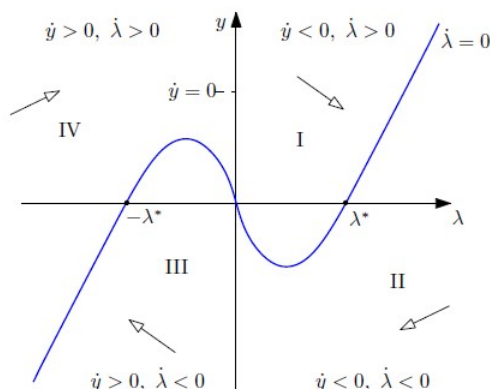


Figura 3.3: Comportamento qualitativo delle soluzioni di (3.10). Le frecce indicano le differenti direzioni che prende il campo magnetico nelle quattro diverse regioni. La curva blu è il grafico di g . Immagine da [3].

Dimostrazione. (Esistenza)

Mostriamo che, qualunque sia la condizione iniziale, la soluzione $x(t)$ si avvolge attorno all'origine. Supponiamo di partire dalla regione I mostrata nella Figura 3.3. In tale regione $\dot{\lambda} > 0$ e $\dot{y} < 0$. Quindi, al crescere di λ , y decresce e deve necessariamente attraversare la curva $y = g(\lambda)$ (\bar{x} è l'unico equilibrio, ed è repulsivo).

Ci troviamo quindi nella regione II: qui $\dot{\lambda} < 0$ e $\dot{y} < 0$: al decrescere di λ , anche y decresce. Abbiamo ora due possibilità:

- (1) $x(t)$ va in III,
- (2) $x(t)$ va a $-\infty$ senza andare in III

Osserviamo che (2) può avvenire solo se $y \rightarrow -\infty$ per $\lambda \rightarrow c$, con $c \geq 0$. Supponiamo di essere in questo caso.

Allora avremmo che la derivata della soluzione è

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{\dot{y}}{\dot{\lambda}} = \frac{-2\alpha}{y - g(\lambda)} \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 0 \quad \text{per ogni } \lambda \geq 0 \quad (3.15)$$

e quindi anche in questo caso finiamo nella regione III.

Per la disparità di g , le regioni III e IV si comportano in modo analogo.

(Unicità)

Sia y_0 (y_1) l'intersezione di un'orbita con l'asse positivo (negativo) delle y (abbiamo provato sopra che tale intersezione esiste per ogni soluzione $x(t)$),

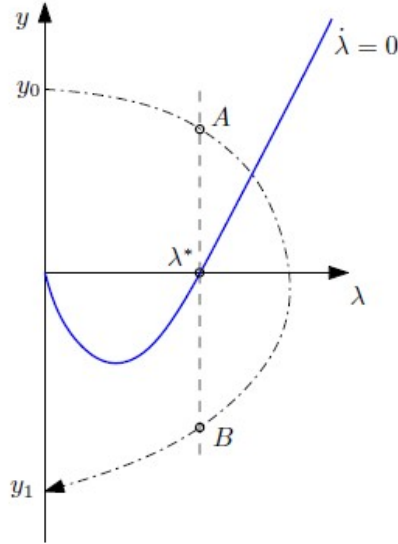


Figura 3.4: Spazio delle fasi del sistema per $\lambda > 0$. La linea blu rappresenta la funzione g e la curva tratteggiata l'orbita di (3.10), prendendo le condizioni iniziali $(\lambda(0), y(0)) = (0, y_0)$. A (B) denota il punto in cui la componente λ dell'orbita diventa maggiore (minore) di λ^* . Immagine da [3].

mostrato nella Figura 3.4.

Sia \mathcal{W} la funzione di Lyapunov definita sopra. Definiamo la funzione

$$\Delta W(y_0) = \mathcal{W}(0, y_1) - \mathcal{W}(0, y_0) = \frac{y_1^2 - y_0^2}{4\alpha}. \quad (3.16)$$

Gli zeri di $\Delta W(y_0)$ corrispondono a orbite periodiche.

Sia y_0^* l'intersezione con l'asse delle y positive dell'orbita che passa per $(\lambda^*, 0)$ e sia t_1 il tempo in cui l'orbita suddetta raggiunge l'intersezione con l'asse delle y negative. Osserviamo allora che

$$\Delta W(y_0^*) = \int_0^{t_1} \dot{W}(t) dt = - \int_0^{t_1} \lambda(t) g(\lambda(t)) dt > 0, \quad (3.17)$$

poiché $g(\lambda) < 0$ per $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Per $y_0 < y_0^*$ l'intersezione con l'asse $y = 0$ è più piccola di λ^* (altrimenti dovrebbe intersecare l'orbita che passa per $(0, \lambda^*)$, contro l'unicità delle soluzioni), e quindi, di nuovo, $\Delta W > 0$.

Consideriamo ora il caso $y_0 > y_0^*$. In questo caso è conveniente dividere ΔW

come segue:

$$\Delta W(y_0) = - \int_0^{t_A} \lambda(t)g(\lambda(t))dt - \int_{t_A}^{t_B} \lambda(t)g(\lambda(t))dt - \int_{t_B}^{t_1} \lambda(t)g(\lambda(t))dt \quad (3.18)$$

dove A e B sono, rispettivamente, i punti dell'orbita in cui la componente λ diventa maggiore e minore di λ^* (e t_A e t_B i rispettivi tempi in cui l'orbita raggiunge tali punti). Chiamiamo, da sinistra a destra, i tre termini di (3.18) (a), (b) e (c). Il primo termine, per quanto visto sopra, è chiaramente positivo e può essere riscritto con un cambio di variabile come

$$(a) = \int_0^{\lambda^*} \frac{\lambda d\lambda}{1 - y(\lambda)/g(\lambda)}. \quad (3.19)$$

Mostriamo che (a) tende monotonicamente a 0 per $y_0 \rightarrow +\infty$. Osserviamo innanzitutto che, se la condizione iniziale è $(0, \tilde{y}_0) = (0, y_0 + \epsilon)$ con $\epsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, allora $\tilde{y}(\lambda) > y(\lambda)$ per ogni λ compreso tra 0 e l'intersezione dell'orbita con l'asse delle λ .

Quindi la pendenza dell'orbita

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{2\alpha\lambda}{g(\lambda) - y} \quad (3.20)$$

è limitata in ogni intervallo compatto di λ tale che y non intersechi la curva $y = g(\lambda)$. Questo mostra che, dato un numero positivo qualsiasi M , possiamo sempre trovare una condizione iniziale $(0, y_0)$ e un $\tilde{\lambda} \geq \lambda^*$ tali che $y(\lambda) > M$ per $\lambda \in (0, \tilde{\lambda})$, da cui, come volevamo, (a) $\searrow 0$ per $y_0 \rightarrow +\infty$.

In modo analogo, si prova che (c) è positivo e decresce monotonicamente a 0 per $y_0 \rightarrow +\infty$.

Rimane da vedere cosa succede in (b), che è chiaramente negativo ($g(\lambda) > 0$ per $\lambda > \lambda^*$). Riscriviamolo con

$$(b) = - \int_{y(t_B)}^{y(t_A)} g(\lambda(y))dy. \quad (3.21)$$

Mostriamo che tende monotonicamente a $-\infty$ per $y_0 \rightarrow +\infty$. Conviene spezzare (b) ulteriormente come

$$(b) = \int_{t_A}^{t_A+\delta} \dot{W}dt + \int_{t_A+\delta}^{t_B-\delta} \dot{W}dt + \int_{t_B-\delta}^{t_B} \dot{W}dt, \quad (3.22)$$

con $\delta > 0$ arbitrariamente piccolo. Il primo e il terzo termine del membro destro di (3.22) rimangono negativi e finiti nel limite $y \rightarrow +\infty$. Per quanto

riguarda il secondo termine, riscrivendo come in 3.3

$$- \int_{y(t_B - \delta)}^{y(t_A + \delta)} g(\lambda(y)) dy, \quad (3.23)$$

si vede che la funzione integranda è maggiore di 0 per ogni $\delta > 0$ (cosa non vera in 3.3) e $y(t_A + \delta) \rightarrow +\infty$ monotonicamente per $y \rightarrow +\infty$, che è una conseguenza della dimostrazione del fatto che (a) tende monotonicamente a 0 per $y_0 \rightarrow +\infty$.

In conclusione:

- $\Delta W(y_0) > 0$ per $y_0 \leq y_0^*$,
- $\Delta W(y_0)$ è monotona decrescente e tende a $-\infty$ per $y \rightarrow +\infty$.

Questo prova che esiste un solo punto in cui $\Delta W(y_0)$ si annulla, cioè esiste un'unica orbita periodica.

(Stabilità)

Basta osservare che $\Delta W(y_0) > 0$ quando $y_0 < y_0^p$ e $\Delta W(y_0) < 0$ quando $y_0 > y_0^p$, dove y_0^p è l'intersezione dell'orbita periodica con l'asse delle y positive. □

Capitolo 4

Conclusioni e applicazioni

Mettendo a confronto i modelli analizzati nei Capitoli 2 e 3, abbiamo ottenuto che per temperature sufficientemente alte l'aggiunta del termine dissipativo non cambia la dinamica del sistema. A temperature sufficientemente basse, invece, emerge un comportamento periodico.

Quest'ultimo è frutto della compresenza di due forze opposte che influenzano la dinamica del sistema: la prima tende ad allontanare la magnetizzazione media dall'equilibrio instabile 0 e a portarla a un valore m^* o $-m^*$, a seconda di quale sia il segno della magnetizzazione iniziale, come visto nel modello di Curie-Weiss senza dissipazione; la seconda, dovuta all'aggiunta del termine dissipativo, tende a spostare la magnetizzazione verso l'equilibrio instabile, fino a quando il sistema non tende nuovamente verso quello stabile, questa volta di segno opposto rispetto a prima. Lo schema si ripete, producendo così un moto periodico. Abbiamo quindi ottenuto che la presenza di dissipazione non “distrukge” la tendenza del sistema a raggiungere autonomamente un certo ordine (*self-organization*).

Ringraziamenti

Riservo questo spazio per ringraziare alcune tra le tante persone che sono state fondamentali per portare a termine questo percorso di studi: innanzitutto il mio relatore, il Prof. Marco Formentin, per la pazienza e la disponibilità con cui mi ha seguita durante la stesura di questa tesi.

Ringrazio poi la mia famiglia, per l'appoggio e la fiducia nelle scelte fatte e nei percorsi intrapresi in questi anni, e la mia insegnante di pianoforte, la M^a Lorella Ruffin, per l'entusiasmo e la passione che da sempre mi trasmette, non solo nello studio della musica, ma in tutto ciò che faccio.

Desidero, infine, ringraziare tutto il Dipartimento di Matematica, con tutti i docenti e i colleghi che mi hanno accompagnata in questo percorso, per essere stato un ambiente di crescita non solo culturale ma anche personale.

Bibliografia

- [1] Brémaud, P.: *Markov Chains*, Springer-Verlag, New-York (1999)
- [2] Carletti, T., Villari, G: *A note on existence and uniqueness of limit cycles for Liénard systems*, J. Math. Anal. Appl., 307(2):763–773, (2005)
- [3] Dai Pra, P., Fischer, M., Regoli, D.: *A Curie-Weiss model with dissipation*, arXiv:1305.0288 [math.PR], (2013)
- [4] Strogatz, S. H.: *Nonlinear dynamics and chaos*, Perseus Books, New-York (1994)
- [5] Swart, J. M.: *A Course in Interacting Particle Systems*, arXiv:1703.10007v4 [math.PR] (2022)