



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA
DELL'INNOVAZIONE DEL PRODOTTO

DIPARTIMENTO DI TECNICA E GESTIONE DEI SISTEMI INDUSTRIALI

TESI DI LAUREA

**UN CRITERIO ELASTO-PLASTICO PER LA
VALUTAZIONE DELLE TENSIONI ALL'APICE
DELL'INTAGLIO IN FATICA MULTIASSIALE**

Relatore: Ch.mo Prof. PAOLO LAZZARIN

Correlatori: Ing. FILIPPO BERTO

Ing. CHRISTIAN MARANGON

Laureando: MARCO GIOVANNI PIERANTONI

ANNO ACCADEMICO 2011-2012

RINGRAZIAMENTI

Innanzitutto, vorrei esprimere la mia gratitudine al Prof. Paolo Lazzarin e all'Ingegnere Filippo Berto, per il prezioso aiuto e il sostegno fornitomi durante la stesura della tesi.

Un sincero ringraziamento va all'Ingegnere Christian Marangon per le numerose ore dedicate allo sviluppo della seguente tesi; senza la sua pazienza, la fiducia dimostrata nei miei confronti e i continui incoraggiamenti questo lavoro non sarebbe stato possibile.

Ringrazio tutti i ricercatori e i dottorandi del laboratorio che in questi mesi hanno reso meno pesante il lavoro svolto.

Ringrazio i miei amici e i compagni di università che hanno condiviso le mie preoccupazioni e hanno allietato anche le giornate più intense.

Ringrazio gli amici del calcetto per le piacevoli serate passate insieme. Anche grazie alla vostra compagnia l'ultimo periodo è stato meno duro.

Ringrazio di cuore mia sorella Stefania e mio fratello Michele per ogni momento passato insieme, per l'affetto e la comprensione dimostratami in questi anni.

Il mio più sentito e grande ringraziamento è per mamma e papà. Grazie per i vostri sacrifici, per il vostro imprescindibile sostegno e affetto, per essermi sempre stati accanto con discrezione e fiducia in questi lunghi anni di studio.

*Ai miei genitori,
a Stefania e a Michele.*

Indice

Indice	I
Sommario	V
1. METODI APPROSSIMATI PER IL CALCOLO DELLE TENSIONI REALI ALL' APICE DELL'INTAGLIO	1
1.1 Regola di Neuber	1
<i>1.1.1 Generalizzazione della regola di Neuber</i>	5
1.2 Metodo ESED	7
<i>1.2.1 Generalizzazione del metodo ESED</i>	10
1.3 Analisi elasto-plastica di un componente intagliato soggetto a carico monotono e ciclico	12
<i>1.3.1 Relazione fisica tra regola di Neuber e metodo ESED</i>	19
1.4 Metodo ESED modificato applicato alla fatica multiassiale	30
2. LA TEORIA DELLA PLASTICITA' CICLICA	33
2.1 Terminologia	33
<i>2.1.1 Incrudimento ciclico (cyclic hardening)</i>	33
<i>2.1.2 Addolcimento ciclico (cyclic softening)</i>	34
<i>2.1.3 Effetto Bauschinger</i>	35
<i>2.1.4 Comportamento masing e non masing</i>	36
<i>2.1.5 Carico proporzionale e non proporzionale</i>	37
<i>2. 1. 6 Ratchetting</i>	38
2.2 Introduzione alla teoria della plasticità ciclica	39

2.2.1	<i>Incrudimento isotropo</i>	40
2.2.2	<i>Incrudimento cinematico</i>	42
2.3	Funzioni costituenti il modello elasto-plastico	43
2.3.1	<i>Funzione di snervamento</i>	43
2.3.2	<i>Regola di flusso</i>	49
2.3.3	<i>Legge di incrudimento</i>	56
2.4	Modelli di incrudimento cinematico	56
2.4.1	<i>Regola di incrudimento lineare</i>	57
2.4.2	<i>Regola di incrudimento di Armstrong - Frederick</i>	58
2.4.3	<i>Modello di incrudimento cinematico di Chaboche</i>	59
2.4.4	<i>Regola di incrudimento di Mròz</i>	62
3.	MODELLO ELASTO-PLASTICO DI JIANG-SEHITOGLU	67
3.1	Modello elasto-plastico di Ohno-Wang	67
3.2	Concetti base del modello di Jiang-Sehitoglu	70
3.2.1	<i>Introduzione alla regola di incrudimento</i>	70
3.3	La regola di incrudimento di Jiang-Sehitoglu	73
3.4	Superficie di memoria	76
3.5	Incrudimento/addolcimento ciclico	81
3.6	Effetto dei carichi nonproporzionali e del livello di tensione sul ratchetting	82
3.7	Conclusioni e ulteriori osservazioni	83
4.	DETERMINAZIONE DELLE COSTANTI DEL MATERIALE DEL MODELLO DI JIANG-SEHITOGLU	85
4.1	Curva tensione compressione monoassiale	86
4.2	Determinazione dei coefficienti $\chi^{(i)}$	87

4.3 Determinazione delle costanti $c^{(i)}$ E $r^{(i)}$	89
4.3.1 Determinazione di $r^{(i)}$ se $c^{(i)}$ è ipotizzato	92
4.3.2 Determinazione di $c^{(i)}$ se $r^{(i)}$ è ipotizzato	95
4.4 Calcolo delle costanti del materiale	97
4.4.1 Determinazione delle costanti per il materiale 1045	98
4.4.2 Determinazione delle costanti per il materiale S460N	102
4.4.3 Determinazione delle costanti per il materiale 16MnR	104
4.4.4 Determinazione delle costanti per il materiale 1070	106
4.5 Influenza dei parametri sulle simulazioni numeriche	108
5. ESTENSIONE DEL METODO ESED MODIFICATO ALLA FATICA MULTIASSIALE: IMPLEMENTAZIONE DELL'ALGORITMO DI CALCOLO	113
5.1 Estensione dell' espressione unificata alla fatica multiassiale	113
5.2 Utilizzo del modello di Jiang-Sehitoglu: determinazione delle equazioni incrementali	118
5.3 Implementazione del software	121
5.3.1 Definizione dei parametri iniziali	123
5.3.2 Valori iniziali e valori al passo n	124
5.5.3 Reference state	125
5.5.4 Calcolo delle tensioni e delle deformazioni elastiche	126
5.5.5 La condizione di snervamento	128
5.5.6 Calcolo delle tensioni e delle deformazioni plastiche	129
6. VALUTAZIONE DEI RISULTATI OTTENUTI	131
6.1 risultati ottenuti per l'acciaio S460N	131
6.1.1 Prima simulazione: metodo ESED modificato	133

6.1.2	<i>Seconda simulazione: aumento del momento torcente</i>	139
6.1.3	<i>Terza simulazione: regola di Neuber</i>	142
6.1.4	<i>Quarta simulazione: metodo ESED</i>	145
6.2	Risultati ottenuti per l'acciaio 16MnR	148
6.2.1	<i>Utilizzo dell'espressione unificata incrementale</i>	150
6.2.2	<i>Utilizzo dell'equazione dell'energia</i>	152
6.3	Altre simulazioni effettuate	158
6.3.1	<i>Simulazione con un elevato numero di isteresi</i>	158
6.3.2	<i>Simulazione con l'aumento dell'ampiezza del carico</i>	161
6.3.3	<i>Implementazione e simulazione per i carichi non proporzionali</i>	164
6.4	Conclusioni	172
	CONCLUSIONI FINALI E SVILUPPI FUTURI	173
	BIBLIOGRAFIA	175
	APPENDICE	181

Sommario

Lo scopo della seguente tesi consiste nell'implementazione di un software in grado di calcolare le tensioni e le deformazioni locali di componenti meccanici intagliati soggetti a fatica oligociclica multiassiale. Infatti, la resistenza a fatica oligociclica dipende dalle tensioni e dalle deformazioni all'apice dell'intaglio. È quindi di fondamentale importanza, per caratterizzare la vita a fatica di un componente intagliato, utilizzare dei metodi approssimati che stimano correttamente le tensioni e le deformazioni locali.

Nel primo capitolo, per il caso di carichi monoassiali monotoni e ciclici, si descrivono i metodi approssimati della regola di Neuber [1] e del metodo Molski-Glinka [2] e si ricava, sulla base di considerazioni energetiche, il metodo ESED modificato, in accordo con Ye et al. [5]. In seguito i metodi approssimati citati verranno estesi nel caso di una sollecitazione ciclica multiassiale, sulla base del lavoro di Ye et al. [6]. Al fine di determinare le equazioni che caratterizzano il comportamento del materiale in termini di tensioni e di deformazioni locali, è stato utilizzato un modello elasto-plastico basato sulla teoria della plasticità.

Nel secondo capitolo, si definisce la base teorica-analitica della teoria della plasticità ciclica ed è stata riportata una sintesi dello stato dell'arte relativo ai principali modelli plastici presenti in letteratura.

È stato descritto, nel terzo capitolo, il modello di Jiang-Sehitoglu [13], il quale definisce un modello matematico che consente un'ottima approssimazione del comportamento reale del materiale in campo elasto-plastico.

Le procedure per il calcolo delle costanti del materiale utilizzate nel modello di Jiang-Sehitoglu sono descritte nel quarto capitolo. Si confrontano inoltre i parametri calcolati con le due metodologie con quelli presenti in letteratura, definendo il metodo ottimale per la determinazione delle costanti del materiale.

Successivamente nel quinto capitolo, utilizzando il modello elasto-plastico, l'espressione unificata del metodo ESED modificato e le equazioni energetiche ricavate con le ipotesi definite da Singh et al. [3], sono state calcolate le equazioni che caratterizzano le tensioni e le deformazioni all'apice dell'intaglio, in accordo con quanto riportato da Ye et al. [6] e Gao et al. [31]. Inoltre sempre nel capitolo 5, sulla base degli

studi effettuati da Gao et al. [31], è stato descritto l'algoritmo di calcolo e la base logica utilizzata per l'implementazione del sistema di equazioni e del modello elasto-plastico in Mathematica.

Nel capitolo 6, sono stati illustrati i risultati ricavati dall'utilizzo del programma, confrontando le tensioni e le deformazioni locali calcolate con i tre metodi approssimati. Infine, è stato effettuato un raffronto fra i dati ottenuti dal software e quelli presenti in letteratura, in base agli studi di Ye et al. [6] e di Gao et al. [31].

Capitolo 1

METODI APPROSSIMATI PER IL CALCOLO DELLE TENSIONI REALI ALL'APICE DI UN INTAGLIO

Nel primo capitolo si definiscono i due metodi approssimati più importanti e utilizzati per il calcolo delle tensioni e delle deformazioni all'apice di un intaglio di un componente soggetto a fatica oligociclica. I metodi analizzati sono rispettivamente la regola di Neuber [1] e il metodo ESED [2]. Successivamente, sulla base degli studi sviluppati da Singh et al.(1996) [3] e Singh (1998) [4], si riporta l'espressione incrementale generalizzata dei due metodi nel caso di fatica multiassiale. In accordo con Ye et al. (2004) [5], sono state valutate le equazioni delle componenti di energia agenti sul materiale, nel caso di carico monotono e ciclico. Sulla base delle espressioni energetiche ricavate e mediante delle ipotesi termodinamiche, Ye et al. (2004) [5] ricavarono le espressioni che definiscono il metodo ESED modificato. Questo metodo, verrà successivamente esteso al caso di carichi ciclici multiassiali secondo gli studi di Ye et al.(2008) [6].

1.1 REGOLA DI NEUBER

Uno dei metodi più frequentemente utilizzato nel calcolo delle tensioni e delle deformazioni all'apice di un intaglio è la regola di Neuber [1]. Neuber, analizzando un provino intagliato soggetto a taglio antiplanare, ha ricavato l'uguaglianza tra il quadrato del fattore teorico di concentrazione delle tensioni K_t e il prodotto K_σ e K_ϵ . Nel caso di tensione monoassiale la regola di Neuber può essere scritta nella seguente forma:

$$K_t^2 = K_\sigma \cdot K_\epsilon \qquad \text{Eq.1-1}$$

dove K_σ rappresenta il fattore di concentrazione plastico delle tensioni ed è definito come il rapporto tra la tensione locale σ e la tensione nominale S .

$$K_\sigma = \frac{\sigma}{S} \quad \text{Eq.1-2}$$

K_ε invece, rappresenta il fattore di concentrazione plastico della deformazione ed è definito come il rapporto tra la deformazione locale ε e la deformazione e , indotta dal carico imposto.

$$K_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{e} \quad \text{Eq.1-3}$$

Sostituendo le equazioni 1-2 e 1-3 all'interno dell'equazione 1-1 si ricava:

$$K_t^2 S e = \sigma \varepsilon \quad \text{Eq.1-4}$$

La relazione 1-4 rappresenta ancora la regola di Neuber e relaziona le tensioni e le deformazioni locali, all'apice dell'intaglio, con le tensioni e le deformazioni nominali indotte dall'applicazione di un carico esterno. L'equazione 1-4 nel piano σ - ε rappresenta un'iperbole che congiunge il punto A' al punto A, ciò è visibile in Fig. 1-1. Attraverso l'equazione dell'iperbole di Neuber è possibile ricavare le tensioni e le deformazioni locali conoscendo la curva caratteristica del materiale e i risultati derivanti da analisi lineari elastiche.

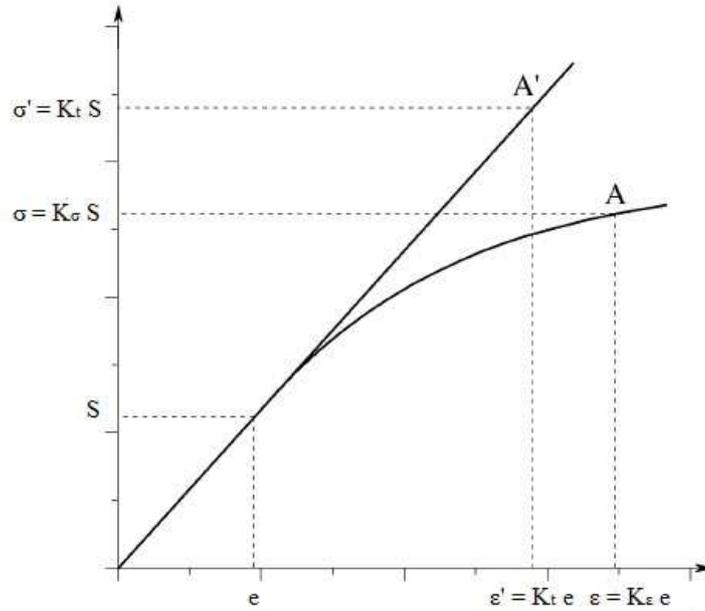


Figura 1-1 Rappresentazione della regola di Neuber

Una espressione equivalente alla regola di Neuber è stata sviluppata da Singh et al. (1996) [3] ed è riportata di seguito:

$$\sigma^e \varepsilon^e = \sigma^N \varepsilon^N \quad \text{Eq.1-5}$$

Dove l'apice N si riferisce alle componenti elasto-plastiche ricavate con la regola di Neuber. Le σ^e e ε^e indicano rispettivamente le tensioni e le deformazioni all'apice dell'intaglio calcolate attraverso un'analisi lineare elastica, mentre le σ^N e ε^N individuano le tensioni e le deformazioni all'apice dell'intaglio calcolate mediante un'analisi elasto-plastica. La rappresentazione grafica della regola di Neuber è visibile in Fig. 1-2.

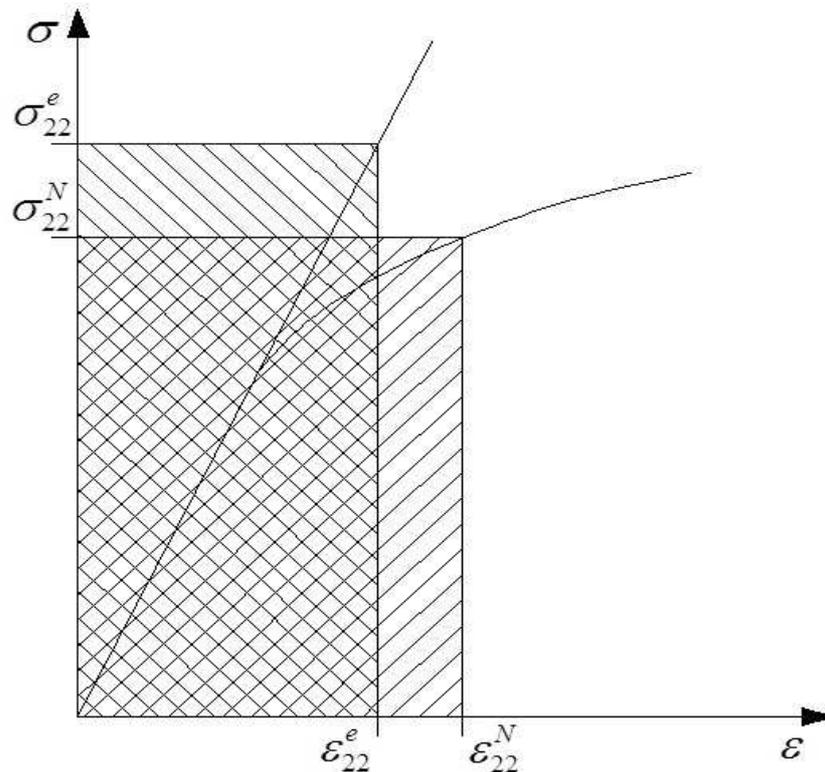


Figura 1-2 Rappresentazione della regola di Neuber

L'equazione 1-4 è stata successivamente modificata da Topper utilizzando gli intervalli di tensione ΔS e deformazione Δe applicati nominalmente attraverso carichi ciclici. All'apice dell'intaglio, l'intervallo di tensione e deformazione nominale è collegato al range di tensione locale $\Delta\sigma$ e deformazione locale $\Delta\varepsilon$ mediante il fattore teorico di concentrazione delle tensioni.

$$K_t^2 \Delta S \Delta e = \Delta \sigma \Delta \varepsilon \quad \text{Eq.1-6}$$

La regola di Neuber è utilizzata per la sua semplicità di applicazione, anche se dal confronto dei risultati numerici con quelli sperimentali, il metodo sovrastima le tensioni e le deformazioni locali.

1.1.1 Generalizzazione della regola di Neuber

Per affrontare il problema di sollecitazioni cicliche multiassiali è stata proposta, da Singh et al. (1996) [3] in accordo con gli studi effettuati da Ellyin e Kujawski (1989) [7], una nuova equazione della regola di Neuber:

$$\Delta\sigma_{ij}^e \Delta\varepsilon_{ij}^e = \Delta\sigma_{ij}^N \Delta\varepsilon_{ij}^N \quad \text{Eq.1-7}$$

Considerando ora uno stato di tensione multiassiale all'apice dell'intaglio, l'utilizzo del solo fattore di concentrazione delle tensioni K_t non è più sufficiente per caratterizzare lo stato tensionale all'apice dell'intaglio, poiché esso fornisce informazioni solo per una singola componente di tensione. Per questo motivo sono stati introdotti due nuovi parametri chiamati "tensione e deformazione ipotetici all'apice dell'intaglio σ^e e ε^e ", ricavati attraverso un'analisi in campo lineare elastico. Come riportato nel lavoro di Singh et al. (1996) [3], Mofkhar et al. (1995) [8] dimostrarono che per un componente sollecitato da una storia di carico proporzionale, la densità totale di energia di deformazione all'apice dell'intaglio, in campo elasto-plastico, può essere approssimata con quella ottenuta attraverso un'analisi lineare elastica. In questo modo è possibile calcolare l'incremento dell'energia nelle diverse direzioni considerate.

Singh et al.(1996) [3], sulla base degli studi effettuati da Hoffman e Seeger (1985) [9] nel caso di carico monotono, semplificarono il calcolo delle tensioni e delle deformazioni locali, introducendo un intervallo di tensione e deformazione equivalente:

$$\Delta\sigma_{eq}^e \Delta\varepsilon_{eq}^e = \Delta\sigma_{eq} \Delta\varepsilon_{eq} \quad \text{Eq.1-8}$$

La trattazione è valida nel caso di carichi ciclici multiassiali proporzionali e di un componente intagliato con comportamento isotropo.

L'equazione 1-5 è stata modificata come segue per poter ricavare le componenti di tensione e di deformazione nel caso di carichi multiassiali:

$$\sigma_{ij}^e \varepsilon_{ij}^e = \sigma_{ij}^N \varepsilon_{ij}^N \quad \text{Eq.1-9}$$

Moftkhar et al.(1995)[8] dimostrarono che per un componente sollecitato da una storia di carico proporzionale, la densità totale di energia di deformazione all'apice dell'intaglio in campo elasto-plastico può essere approssimata con quella ottenuta attraverso un'analisi lineare elastica. Singh et al.(1996) [2], svilupparono in seguito la relazione 1-9, che rappresenta la regola di Neuber in forma incrementale. Quindi per effetto dell'incremento del carico applicato esternamente, all'interno del materiale sarà presente un corrispondente aumento dell'energia totale di deformazione. L'incremento dell'energia totale di deformazione per unità di volume (densità totale di energia di deformazione), è equivalente alla somma degli incrementi della densità di energia ($\sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}$) e della densità complementare ($\varepsilon_{ij}\Delta\sigma_{ij}$) di energia di deformazione:

$$\Delta\Phi = \sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}\Delta\sigma_{ij} \quad \text{Eq.1-10}$$

Si consideri adesso un componente intagliato soggetto ad uno stato di tensione biassiale. Si ipotizzi che le tensioni nominali siano elastiche, le deformazioni locali siano plastiche e che nell'intorno dell'intaglio sia presente una regione elastica che controlla il comportamento all'apice. Ad un dato incremento del carico esterno, l'aumento della densità di energia di deformazione totale reale all'apice dell'intaglio può essere ottenuta qualora il provino ipoteticamente rimanga ipoteticamente in campo lineare elastico per tutta la storia di carico:

$$\Delta\Phi^e = \Delta\Phi^N \quad \text{Eq.1-11}$$

Sviluppando la sommatoria delle energie, dall'equazione 1-11 si ottiene:

$$\sigma_{ij}^e\Delta\varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^e\Delta\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^N\Delta\varepsilon_{ij}^N + \varepsilon_{ij}^N\Delta\sigma_{ij}^N \quad \text{Eq.1-12}$$

L'equazione 1-11 è definita come la relazione incrementale di Neuber. Essa rappresenta l'equivalenza tra l'incremento della densità totale dell'energia di deformazione, all'apice dell'intaglio, ottenuto in campo lineare elastico e in campo elasto-plastico. Dall'equazione 1-12 si ricava la regola incrementale di Neuber per uno stato di tensione

monoassiale all'apice dell'intaglio. La rappresentazione grafica della relazione incrementale di Neuber è visibile nella figura seguente:

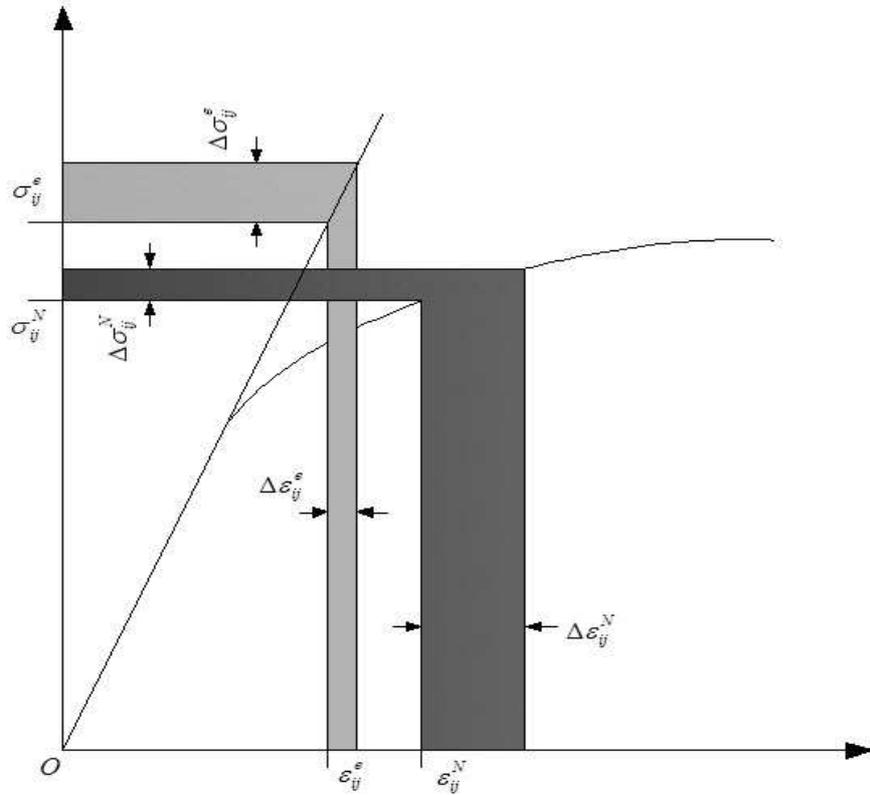


Figura 1-3 Rappresentazione grafica generalizzazione regola di Neuber

In Fig.1-3, si può notare che in accordo con la relazione 1-11, alla fine del ciclo di carico, la somma di tutti gli incrementi della densità totale di energia di deformazione in campo elasto-plastico è uguale alla somma di tutti gli incrementi della densità totale di energia di deformazione ottenuti da un'analisi lineare elastica.

1.2 METODO ESED

Nel lavoro svolto da Molski e Glinka (1981) [2], gli autori determinano un ulteriore metodo approssimato per il calcolo delle tensioni e delle deformazioni all'apice dell'intaglio. Il criterio è conosciuto come equivalent strain energy density (ESED). Le ipotesi adottate nel metodo sono le seguenti:

- condizione di tensione monoassiale all'apice dell'intaglio;
- comportamento lineare elastico del materiale al nominale.

Utilizzando queste semplificazioni, è possibile eguagliare la densità equivalente di energia di deformazione calcolata rispettivamente nella zona di applicazione del carico W_S e all'apice dell'intaglio W_σ :

$$W_\sigma = W_S \quad \text{Eq. 1-13}$$

Dove:

$$W_\sigma = \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \quad \text{Eq. 1-14}$$

Integrando la tensione rispetto la deformazione locale all'apice si ricava la densità equivalente di energia di deformazione.

La densità di energia nominale si ricava ipotizzando una relazione lineare elastica tra tensione e deformazione:

$$W_S = \int_0^e S(e) de = \int_0^e Ee \cdot de = E \frac{e^2}{2} = \frac{S^2}{2E} \quad \text{Eq. 1-15}$$

Sostituendo le equazioni 1-14 e 1-15 all'interno dell'espressione 1-13 si ricava che:

$$K_t^2 \cdot S \cdot e = 2 \cdot W_\sigma \quad \text{Eq.1-16}$$

dove W_σ è l'energia di deformazione per unità di volume dovuta alle tensioni e alle deformazioni locali all'apice dell'intaglio, mentre W_S è la densità di energia di deformazione per unità di volume dovuta alla tensione nominale S . La relazione tra il

fattore teorico di concentrazione delle tensioni K_t , e la densità di energia di deformazione si può ottenere attraverso lo sviluppo della seguente formula:

$$K_t = \frac{\sigma}{S} = \frac{\sqrt{2 E W_\sigma}}{\sqrt{2 E W_s}} = \left(\frac{W_\sigma}{W_s} \right)^{0.5} \quad \text{Eq.1-17}$$

Nell'articolo di Singh et al. (1996) [3] e [4], gli autori definiscono l'eguaglianza tra le densità di energia di deformazione calcolate in campo elastico e in campo elastoplastico come segue:

$$\int_0^{\varepsilon^e} \sigma^e d\varepsilon^e = \int_0^{\varepsilon^E} \sigma^E d\varepsilon^E \quad \text{Eq.1-18}$$

L'apice e si riferisce alle tensioni e alle deformazioni calcolate in campo lineare elastico, mentre E si riferisce alle tensioni e alle deformazioni ricavate attraverso il metodo ESED. La rappresentazione grafica del criterio e della formula 1-18 è visibile nella figura seguente:

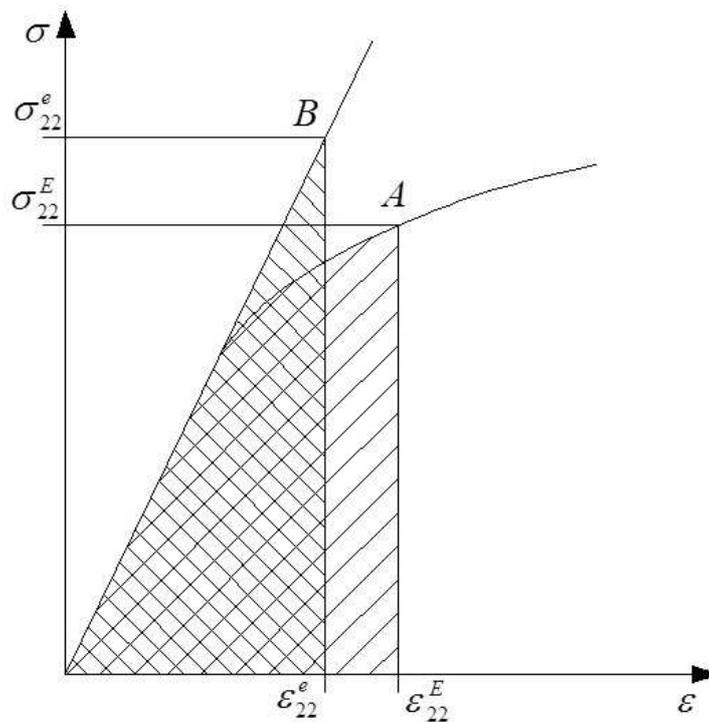


Figura 1-4 Rappresentazione grafica metodo ESED.

Dall'analisi della Fig.1-4 è possibile verificare l'equivalenza energetica stabilita dalla formula 1-18. Infatti, l'area sottesa dalla retta congiungente l'origine degli assi e il punto B, deve essere uguale all'area definita dalla curva che unisce l'origine degli assi e il punto A. Tramite questa equivalenza energetica e se è nota l'equazione della curva, ossia la legge costitutiva del materiale, è possibile ricavare tensioni e deformazioni elasto-plastiche di componenti intagliati soggetti a carichi monotoni in condizioni di tensione piana.

Il metodo ESED è stato successivamente ampliato per il caso di carichi ciclici a fatica sulla base delle relazioni ricavate da Topper (1969). L'equazione 1-16 è stata estesa utilizzando gli intervalli di tensioni e deformazione:

$$K_t^2 \cdot \Delta S \Delta e = 2 \cdot W_{\Delta\sigma} \quad \text{Eq.1-19}$$

Il metodo ESED, dal confronto con dati sperimentali, sottostima le tensioni e le deformazioni locali.

1.2.1 Generalizzazione del metodo ESED

Come descritto nel lavoro di Singh et al.(1996) [3], Mofkhar et al.(1995) [8] nei loro studi, ricavarono la relazione generalizzata del metodo ESED per il calcolo dello stato tensionale multiassiale all'apice dell'intaglio nel caso di componenti soggetti a carichi proporzionali. La relazione del metodo ESED nel caso di stati tensionali multiassiali è la seguente:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij}^e \varepsilon_{ij}^e = \int_0^{\varepsilon_{ij}^E} \sigma_{ij}^E d\varepsilon_{ij}^E \quad \text{Eq.1-20}$$

Come riportato nella generalizzazione della regola di Neuber, anche per il metodo ESED, l'utilizzo del solo K_t non è più sufficiente per descrivere l'aumento delle tensioni nelle tre direzioni di carico. Per questo motivo sono utilizzate σ^e e ε^e ossia "tensione e deformazione ipotetici all'apice dell'intaglio."

Si consideri il caso di componenti intagliati sottoposti a carichi multiassiali non proporzionali. Per calcolare lo stato di tensione e deformazione elasto-plastico all'apice dell'intaglio è necessario sviluppare l'equazione 1-20 nella forma incrementale. Quando viene applicato un incremento di carico al provino, esso causerà un incremento dell'energia di deformazione effettiva all'interno del materiale. Quindi l'aumento della densità di energia di deformazione può essere espresso come segue:

$$\Delta W = \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij} \quad \text{Eq.1-21}$$

Al fine di semplificare la trattazione si assumono le seguenti ipotesi:

- la tensione nominale applicata sia elastica;
- la deformazione all'apice dell'intaglio sia plastica;
- l'apice dell'intaglio sia ampiamente circondato da un campo lineare elastico.

Sulla base delle seguenti assunzioni, è stato proposto da Singh et al.(1995) [3] che per un dato incremento del carico esterno, l'incremento di densità di energia di deformazione in campo elasto-plastico sia equivalente a quello ottenuto in campo lineare elastico. Questa ipotesi può essere espressa come segue:

$$\Delta W^e = \Delta W^E \quad \text{Eq.1-22}$$

Utilizzando l'equazione 1-21 all'interno dell'espressione 1-22 si ottiene che:

$$\sigma_{ij}^e \Delta \varepsilon_{ij}^e = \sigma_{ij}^E \Delta \varepsilon_{ij}^E \quad \text{Eq. 1-23}$$

L'equazione 1-23 definisce il criterio ESED incrementale. Questa espressione determina l'equivalenza delle energie calcolate con tensioni e deformazioni ottenute

rispettivamente in campo elastico e in campo elasto-plastico. Un'ulteriore interpretazione dell'equazione 1-23 risulta quella fornita da Singh et al.(1996) [3] in cui viene ipotizzato che alla fine del ciclo di carico, la sommatoria di tutti gli incrementi di tensione e deformazione elastiche siano equivalenti alla sommatoria delle tensioni e delle deformazioni calcolate attraverso un'analisi elasto-plastica. L'interpretazione grafica del metodo ESED incrementale è visibile nella figura sottostante.

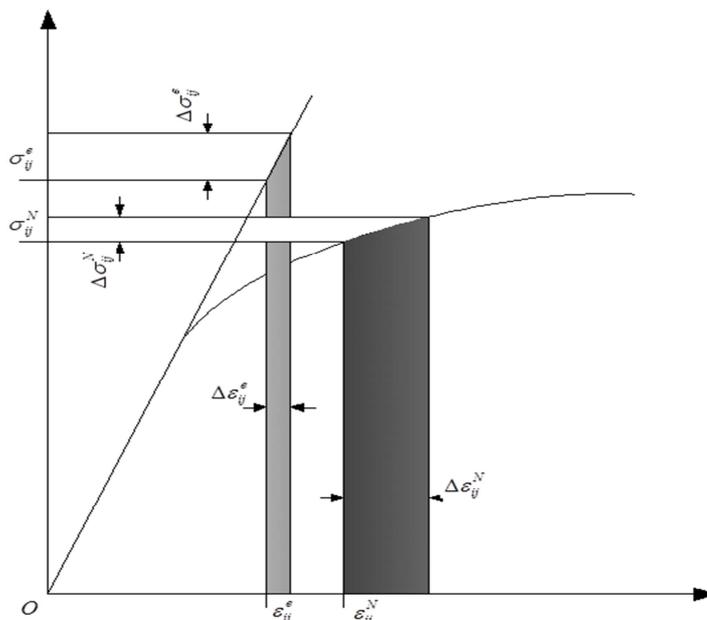


Figura 1-5: Rappresentazione grafica metodo ESED incrementale

La Fig.1-5, definisce l'equivalenza energetica del metodo ESED incrementale. L'area grigia rappresentante l'incremento delle tensioni e delle deformazioni elastiche, deve essere equivalente all'area nera, ossia all'incremento delle tensioni e deformazioni elasto-plastiche. Attraverso questa equivalenza energetica è possibile ricavare l'aumento delle tensioni e delle deformazioni utilizzando il metodo ESED.

1.3 ANALISI ELASTO-PLASTICA DI UN COMPONENTE INTAGLIATO SOGGETTO A CARICO MONOTONO E CICLICO

Si consideri la curva monotona in campo lineare-elastico visibile nella Fig.1-6 . Si può notare che la deformazione è divisa in due parti, una parte elastica e una parte plastica. Durante il ciclo di carico, raffigurato dalla linea OAB il sistema si deforma sia elasticamente che plasticamente. Alla fine del ciclo di scarico invece, rappresentato

dissipata in calore, mentre la restante viene immagazzinata all'interno del materiale sotto forma di tensioni residue.

Come descritto da Aravas et al.(1990) [11], l'energia immagazzinata W_s può essere determinata attraverso la seguente formula:

$$W_s = \int_0^{\sigma} \varepsilon d\sigma - \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_e \quad \text{Eq.1-25}$$

L'energia immagazzinata è derivante dalle tensioni residue esistenti all'interno del materiale per effetto del comportamento elasto-plastico di quest'ultimo. L'energia immagazzinata è rappresentata in Fig. 1-6 dall'area tratteggiata.

In accordo col primo principio della termodinamica, l'energia termica dissipata W_q viene calcolata con la seguente formula:

$$W_q = W_p - W_s \quad \text{Eq.1-26}$$

Si consideri adesso la relazione costitutiva di Ramberg-Osgood che descrive la risposta elasto-plastica di un materiale soggetto a carico monotono:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K} \right)^n \quad \text{Eq.1-27}$$

dove ε_e e ε_p sono rispettivamente la parte elastica e plastica della deformazione totale ε , E il modulo elastico, K il coefficiente di resistenza ed n l'indice di incrudimento del materiale. Si effettui la sostituzione dell'equazione 1-27 all'interno dell'equazione 1-25 per calcolare l'effettivo valore dell'energia immagazzinata in funzione delle tensioni locali, delle deformazioni locali e delle proprietà del materiale.

$$\begin{aligned}
 W_s &= \int_0^{\sigma} \varepsilon \, d\sigma - \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_e = \int_0^{\sigma} (\varepsilon_e + \varepsilon_p) \, d\sigma - \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_e = \\
 &= \int_0^{\sigma} \frac{\sigma}{E} \, d\sigma + \int_0^{\sigma} \left(\frac{\sigma}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \, d\sigma - \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_e = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\sigma^{\frac{1}{n}+1}}{K^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}+1} - \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_e \\
 &= \frac{E \cdot \varepsilon_e \cdot \varepsilon_e}{2} + \frac{\sigma^{\frac{1}{n}}}{K^{\frac{1}{n}}} \cdot \sigma \cdot \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_e = \frac{\sigma \cdot \varepsilon_e}{2} + \varepsilon_p \cdot \sigma \cdot \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_e
 \end{aligned}$$

L'espressione finale dell'energia immagazzinata è quindi la seguente:

$$W_s = \varepsilon_p \cdot \sigma \cdot \frac{n}{n+1} \quad \text{Eq. 1-28}$$

L'energia di deformazione plastica W_p si ricava attraverso i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
 W_p &= \sigma \cdot \varepsilon - \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_e - \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_e - W_s \\
 &= \sigma \cdot (\varepsilon_e + \varepsilon_p) - \sigma \cdot \varepsilon_e - \sigma \cdot \varepsilon_p \cdot \frac{n}{n+1} = \sigma \cdot \varepsilon_p - \sigma \cdot \varepsilon_p \cdot \frac{n}{n+1}
 \end{aligned}$$

L'espressione finale dell'energia immagazzinata è quindi la seguente:

$$W_p = \frac{1}{n+1} \cdot \varepsilon_p \cdot \sigma \quad \text{Eq. 1-29}$$

Sostituendo le espressioni 1-29 e 1-28 all'interno dell'equazione 1-26 si ricava la formula dell'energia termica W_q :

$$W_q = W_p - W_s = \frac{1-n}{1+n} \sigma \cdot \varepsilon_p \quad \text{Eq. 1-30}$$

Si consideri adesso la risposta elasto-plastica di un componente soggetto a carico ciclico visibile in Fig. 1-7.

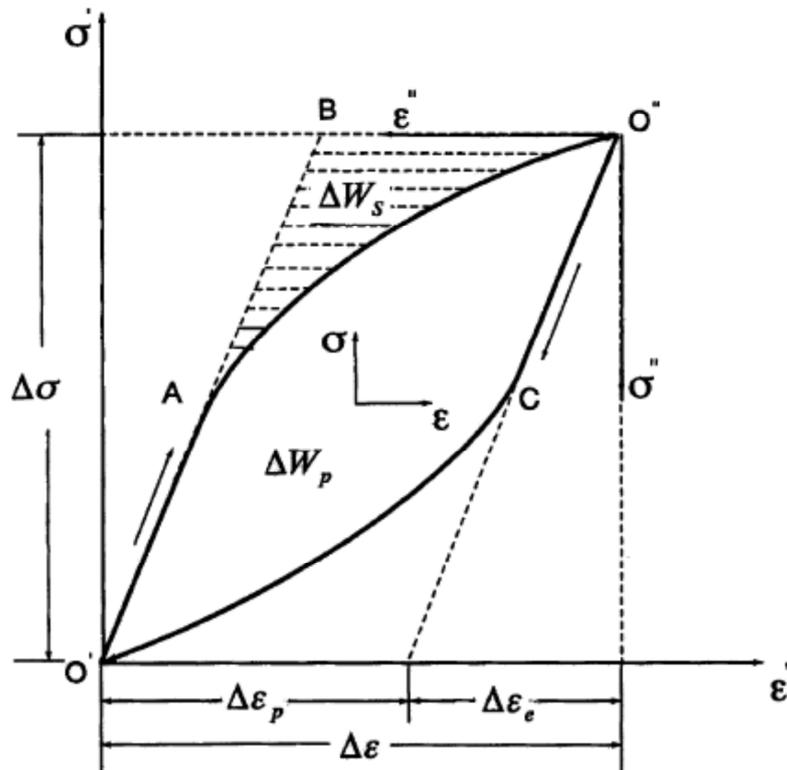


Figura 1-7 Energia immagazzinata e energia di deformazione plastica spesa durante il carico ciclico.

La trattazione redatta per il caso monotono si può estendere al caso di carichi cicli. La variazione continua della deformazione plastica induce nel sistema una variazione della densità di energia di deformazione. L'ipotesi alla base della trattazione è che il ramo in carico cioè $O'A O''$ sia assunto uguale alla parte in scarico ossia $O''C O'$. Attraverso questa semplificazione si possono applicare le stesse formule sia per la parte in carico che per la parte in scarico, in cui la nuova origine del sistema delle coordinate viene posta nel punto O'' . L'energia di deformazione plastica riferita nel caso della risposta all'applicazione di carichi ciclici è rappresentata dall'area dell'isteresi $O'A O''C O'$ come visibile in Fig. 1-7. L'espressione è data dalla seguente formula:

$$\Delta W_p = \Delta \sigma \cdot \Delta \varepsilon - 2 \int_0^{\frac{\Delta \sigma}{\sigma'}} \varepsilon' d\sigma' \quad \text{Eq. 1-31}$$

Durante il ciclo di carico, l'energia d'isteresi è principalmente trasformata in calore mentre una piccola parte di essa viene immagazzinata dal materiale. L'energia

immagazzinata ΔW_s in un ciclo di carico rappresentata dall'area campita in Fig.1-7, può essere espressa dalla seguente relazione:

$$\Delta W_s = \int_0^{\Delta\sigma} \varepsilon' d\sigma' - \frac{1}{2} \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_e \quad \text{Eq. 1-32}$$

dove $\Delta\varepsilon_e$ è la quota parte di deformazione elastica.

L'energia termica ΔW_q dissipata in un ciclo di carico può essere ricavata tramite il primo principio della termodinamica.

$$\Delta W_q = \Delta W_p - \Delta W_s \quad \text{Eq. 1-33}$$

Se il materiale esibisce comportamento Masing, i rami di carico e scarico dell'isteresi risultano simmetrici, la relazione costitutiva tensione-deformazione può essere descritta dall'equazione di Morrow.

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad \text{Eq. 1-34}$$

dove $\Delta\varepsilon_e$ e $\Delta\varepsilon_p$ sono rispettivamente la parte della deformazione elastica e plastica della deformazione totale $\Delta\varepsilon$, E è il modulo elastico, K' è il coefficiente di resistenza ciclico, n' è il coefficiente di incrudimento ciclico.

Utilizzando le equazioni 1-31 e 1-34 e sviluppando alcuni passaggi matematici si trova che:

$$\begin{aligned}
 \Delta W_p &= \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon - 2 \int_0^{\Delta\sigma} \varepsilon' d\sigma' = \Delta\sigma (\Delta\varepsilon_e + \Delta\varepsilon_p) - 4 \cdot \left(\int_0^{\Delta\sigma} \frac{\Delta\varepsilon}{2} d\Delta\sigma \right) \\
 &= \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_e + \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_p - 4 \cdot \left(\int_0^{\Delta\sigma} \left(\frac{\Delta\varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} \right) d\Delta\sigma \right) \\
 &= \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_e + \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_p - 4 \cdot \left(\int_0^{\Delta\sigma} \frac{\Delta\sigma}{2E} d\Delta\sigma + \int_0^{\Delta\sigma} \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'} \right)^{\frac{1}{n'}} d\Delta\sigma \right) \\
 &= \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_e + \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_p - 4 \cdot \frac{\Delta\sigma^2}{4E} - 4 \cdot \frac{n'}{n'+1} \frac{(\Delta\sigma)^{\frac{1}{n'}+1}}{(2K')^{\frac{1}{n'}}} \\
 &= \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_e + \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_p - \Delta\sigma \cdot \frac{\Delta\sigma}{E} - 4 \cdot \frac{n'}{n'+1} \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \cdot \Delta\sigma \\
 &= \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_e + \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_p - \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_e - 4 \cdot \frac{n'}{n'+1} \cdot \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} \cdot \Delta\sigma \\
 &= \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_p - 2 \cdot \frac{n'}{n'+1} \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_p
 \end{aligned}$$

$$\Delta W_p = \frac{1-n'}{1+n'} \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_p$$

Eq. 1-35

Utilizzando le equazioni 1-32 e 1-34 si ricava l'energia immagazzinata nel materiale:

$$\begin{aligned}
 \Delta W_s &= \int_0^{\Delta\sigma} \varepsilon' d\sigma' - \frac{1}{2} \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_e = 2 \cdot \int_0^{\Delta\sigma} \frac{\varepsilon'}{2} d\sigma' - \frac{1}{2} \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_e \\
 &= 2 \cdot \int_0^{\Delta\sigma} \frac{\Delta\varepsilon}{2} d\Delta\sigma - \frac{1}{2} \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_e = 2 \cdot \int_0^{\Delta\sigma} \left(\frac{\Delta\varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} \right) d\Delta\sigma - \frac{1}{2} \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_e \\
 &= 2 \cdot \left(\int_0^{\Delta\sigma} \left(\frac{\Delta\sigma}{2E} \right) d\Delta\sigma + \int_0^{\Delta\sigma} \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'} \right)^{\frac{1}{n'}} d\Delta\sigma \right) - \frac{1}{2} \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_e \\
 &= 2 \cdot \left(\frac{\Delta\sigma^2}{4E} + \frac{n'}{n'+1} \cdot \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \cdot \Delta\sigma \right) - \frac{1}{2} \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_e \\
 &= \frac{\Delta\sigma^2}{2E} + \frac{n'}{n'+1} \cdot \Delta\varepsilon_p \cdot \Delta\sigma - \frac{1}{2} \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_e \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_e + \frac{n'}{n'+1} \cdot \Delta\varepsilon_p \cdot \Delta\sigma - \frac{1}{2} \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon_e
 \end{aligned}$$

$$\Delta W_s = \frac{n'}{n'+1} \cdot \Delta \varepsilon_p \cdot \Delta \sigma \quad \text{Eq. 1-36}$$

L'energia termica è ricavata per differenza tra l'energia di deformazione plastica e l'energia immagazzinata nel materiale:

$$\Delta W_q = \Delta W_p - \Delta W_s = \frac{1-2 \cdot n'}{n'+1} \cdot \Delta \varepsilon_p \cdot \Delta \sigma \quad \text{Eq. 1-37}$$

1.3.1 Relazione fisica tra regola di Neuber e metodo ESED

Si consideri l'espressione della regola di Neuber (1-4), attraverso l'utilizzo dell'espressione di Ramberg-Osgood 1-27, si ricava la seguente espressione:

$$\frac{(K_t S)^2}{E} = \frac{\sigma^2}{E} + \sigma \cdot \left(\frac{\sigma}{K} \right)^n \quad \text{Eq.1-38}$$

Se sono noti K_t , le proprietà del materiale E , K ed n e la tensione nominale S , si può ricavare la tensione e la deformazione locale all'apice dell'intaglio (σ , ε) utilizzando le equazioni 1-27 e 1-38.

Per il caso di carico ciclico si considerino rispettivamente le equazioni 1-6 e 1-34. Con una semplice sostituzione è possibile ricavare la seguente formula:

$$\frac{(K_t \Delta S)^2}{4E} = \frac{\Delta \sigma^2}{4E} + \frac{\Delta \sigma}{2} \cdot \left(\frac{\Delta \sigma}{2K'} \right)^n \quad \text{Eq.1-39}$$

È possibile in questo modo ricavare le tensioni e le deformazioni reali all'apice dell'intaglio calcolate tramite la regola di Neuber.

Utilizzando la stessa casistica è possibile calcolare le tensioni e le deformazioni all'apice dell'intaglio utilizzando il metodo ESED.

Si consideri l'equazione 1-16. In presenza di una zona snervata localizzata all'apice dell'intaglio, la densità di energia di deformazione W_σ può essere ricavata dall'equazione 1-24 e dall'equazione 1-14:

$$W_\sigma = W_p + \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_e \quad \text{Eq.1-40}$$

Si sostituisca ora l'espressione 1-40 e l'equazione di Ramberg-Osgood 1-27 all'interno dell'espressione 1-16:

$$\frac{(K_t^2 \cdot S)^2}{E} = 2 \cdot \left(W_p + \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_e \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{n+1} \cdot \varepsilon_p \cdot \sigma + \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_e \right)$$

$$\frac{(K_t^2 \cdot S)^2}{E} = \frac{\sigma^2}{E} + \frac{2 \cdot \sigma}{n+1} \left(\frac{\sigma}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{Eq.1-41}$$

Da questa equazione quindi ricaviamo le tensioni e le deformazioni locali all'apice dell'intaglio calcolate utilizzando il metodo ESED.

È possibile estendere questa trattazione ricavata per il ciclo monotono al caso di carichi ciclici. L'espressione del metodo ESED per carichi ciclici è fornita dall'espressione 1-18. Si sviluppi ora la definizione della densità dell'energia di deformazione W_σ per il caso ciclico:

$$W_{\Delta\sigma} = \int_0^{\Delta\varepsilon} \Delta\sigma \, d\Delta\varepsilon \quad \text{Eq.1-42}$$

$$W_{\Delta\sigma} = \Delta\sigma \Delta\varepsilon - \frac{1}{2} \Delta\sigma \Delta\varepsilon_e - \Delta W_s = \Delta\sigma \Delta\varepsilon_e + \Delta\sigma \Delta\varepsilon_p - \frac{1}{2} \Delta\sigma \Delta\varepsilon_e - \frac{n'}{1+n'} \Delta\sigma \Delta\varepsilon_p$$

$$W_{\Delta\sigma} = \frac{1}{2} \Delta\sigma \Delta\varepsilon_e + \frac{1}{1+n'} \Delta\sigma \Delta\varepsilon_p \quad \text{Eq.1-43}$$

Utilizzando l'espressione 1-19 e l'equazione di Morrow 1-34 si ottiene:

$$K_t^2 \cdot \Delta S \Delta e = 2 \cdot W_{\Delta\sigma}$$

$$K_t^2 \cdot \frac{\Delta S \Delta e}{4} = \frac{2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \Delta\sigma \Delta\epsilon_e + \frac{1}{1+n'} \Delta\sigma \Delta\epsilon_p \right)$$

$$\frac{(K_t \Delta S)^2}{4E} = \frac{\Delta\sigma^2}{4E} + \frac{1}{1+n'} \Delta\sigma \frac{\Delta\epsilon_p}{2}$$

$$\frac{(K_t \Delta S)^2}{4E} = \frac{\Delta\sigma^2}{4E} + \frac{\Delta\sigma}{1+n'} \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad \text{Eq.1-44}$$

Combinando l'equazione 1-44 con l'equazione 1-34 è possibile calcolare le tensioni e le deformazioni locali all'apice dell'intaglio se sono noti K_t e ΔS e le proprietà cicliche del materiale.

Confrontando le tensioni e le deformazioni ottenute rispettivamente con il metodo ESED e la regola di Neuber è possibile determinare quale metodo fornisce una stima migliore. In campo lineare-elastico, tensioni e deformazioni locali calcolate con la regola di Neuber coincidono con quelle ottenute col metodo ESED (Fig.1-8).

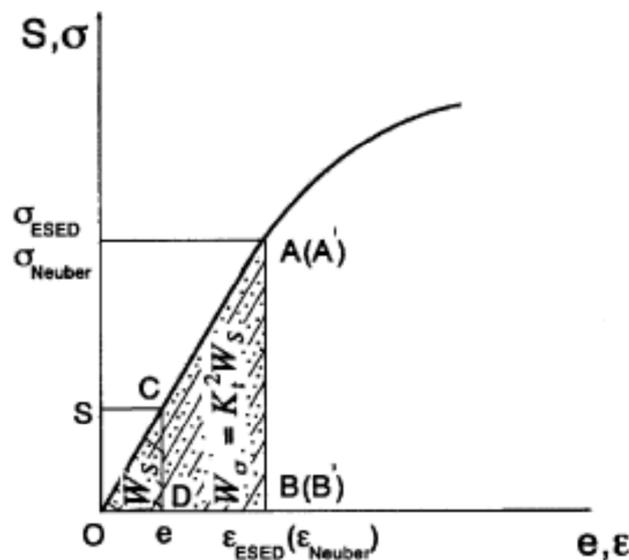


Figura 1-8 Interpretazione grafica metodo ESED e regola Neuber

Nel caso di plasticità localizzata, le tensioni e le deformazioni calcolate attraverso la regola di Neuber sono sempre maggiori rispetto a quelle calcolate con il metodo ESED (Fig.1-9).

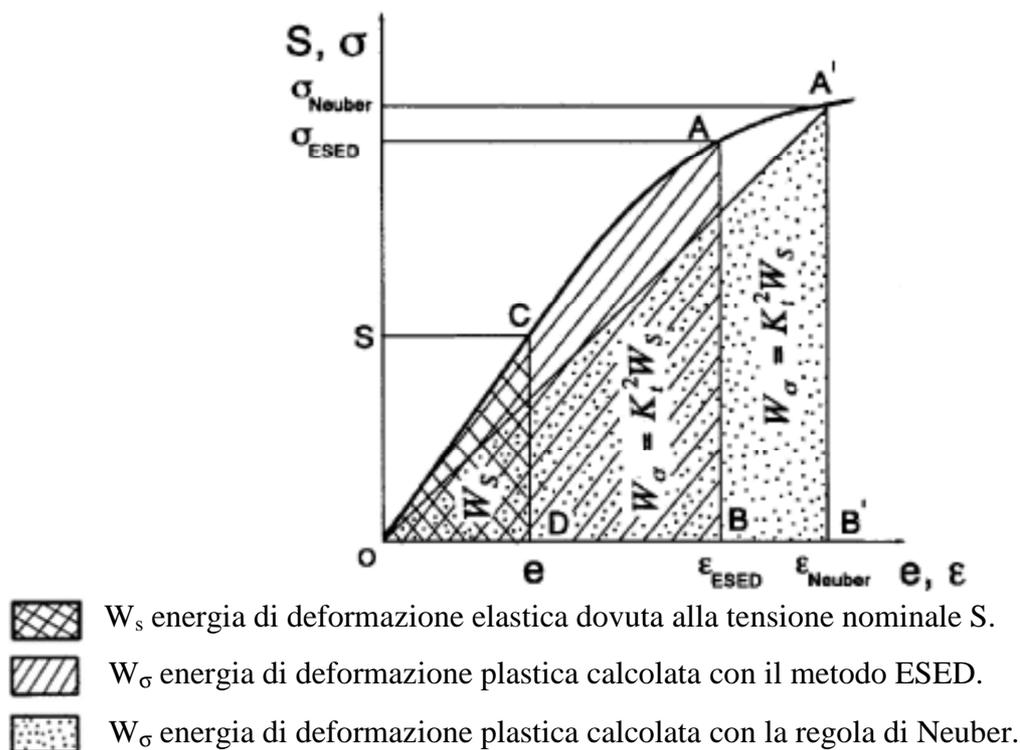


Figura 1-9 Interpretazione grafica metodo ESED e regola di Neuber.

Possiamo scrivere la densità di energia di deformazione W_σ , equazione 1-14, in una forma alternativa in accordo con la Fig.1-6.

$$W_\sigma = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon + \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_p - W_s \quad \text{Eq.1-45}$$

Per garantire e verificare l'accuratezza della definizione di W_σ si ricava la W_p dalla relazione 1-45. In questo modo si dimostra che l'espressione appena definita, di difficile interpretazione grafica, è comunque coerente e corretta.

$$W_\sigma = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon + \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_p - W_s$$

$$W_p = W_\sigma - \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_e$$

$$W_p = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_e + \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_p + \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_p - \frac{n}{n+1} \sigma \varepsilon_p = \sigma \varepsilon_p - \frac{n}{n+1} \sigma \varepsilon_p$$

$$W_p = \frac{1}{n+1} \sigma \varepsilon_p \quad \text{Eq.1-46}$$

Sostituendo le equazioni 1-27 e 1-29 all'interno dell'equazione 1-46 si trova che:

$$W_\sigma = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon + \frac{1-n}{2(1+n)} \sigma \varepsilon_p \quad \text{Eq.1-47}$$

Sostituendo ancora l'equazione 1-47 nell'equazione 1-19 ed utilizzando la definizione di energia termica dissipata presente nell'equazione 1-30 si trova che:

$$K_t^2 S e = \sigma \varepsilon + \frac{1-n}{(1+n)} \sigma \varepsilon_p \quad \text{Eq.1-48}$$

$$K_t^2 S e = \sigma \varepsilon + W_q \quad \text{Eq.1-49}$$

L'equazione 1-49 è un'espressione alternativa del metodo ESED in carico monotono.

Il lavoro teorico $K_t^2 S e$ viene trasformato nell'energia di deformazione locale $\sigma \varepsilon$ assorbita dal materiale e nell'energia termica W_q dissipata durante la deformazione plastica.

Il criterio ESED 1-49 restituisce quindi la regola di Neuber (1-4) se W_q è uguale a zero. La regola di Neuber è vista come un caso particolare del metodo ESED se non si considera la dissipazione di energia sotto forma di calore. L'energia termica dissipata è comunque sicuramente non nulla ed è per questo che, a parere degli autori, la regola di Neuber sovrastima le tensioni e le deformazioni locali. In accordo con l'analisi effettuata precedentemente da Ye et al. (2004) [5], si può asserire che il metodo ESED descrive il reale comportamento delle tensioni e delle deformazioni all'apice dell'intaglio durante la deformazione plastica. Inoltre, considerando le equazioni 1-49 e 1-26, si può dedurre che l'energia immagazzinata nel metodo ESED è stata considerata come un contributo additivo della tensione e della deformazione locale all'apice dell'intaglio.

Nel caso di carico ciclico, con riferimento alla Fig.1-7, l'equazione 1-19 può essere espressa come la somma delle densità di energia di deformazione $W_{\Delta\sigma}^{O'AO''}$ (carico) e $W_{\Delta\sigma}^{O''CO'}$ (scarico).

$$2W_{\Delta\sigma} = W_{\Delta\sigma}^{O'AO''} + W_{\Delta\sigma}^{O''CO'} \quad \text{Eq.1-50}$$

dove

$$W_{\Delta\sigma}^{O'AO''} = W_{\Delta\sigma}^{O''CO'} \quad \text{Eq.1-51}$$

$$W_{\Delta\sigma}^{O'AO''} = \int_0^{\Delta\varepsilon} \sigma' d\varepsilon', \quad W_{\Delta\sigma}^{O''CO'} = \int_0^{\Delta\varepsilon} \sigma'' d\varepsilon'' \quad \text{Eq.1-52}$$

Sostituendo le equazioni 1-51 e 1-52 all'interno dell'equazione 1-50 si trova che:

$$K_t^2 \Delta S \Delta e = W_{\Delta\sigma}^{O'AO''} + W_{\Delta\sigma}^{O''CO'} \quad \text{Eq.1-53}$$

Utilizzando l'interpretazione energetica determinata dalla Fig.1-7, l'equazione 1-53 si può scrivere nella seguente forma:

$$K_t^2 \Delta S \Delta e = \Delta\sigma \Delta\varepsilon + \Delta W_p \quad \text{Eq.1-54}$$

dove W_p è l'energia plastica d'isteresi in un singolo ciclo.

L'equazione 1-54 è un'espressione alternativa del criterio ESED nel caso di carico ciclico. Il lavoro teorico applicato $K_t^2 \Delta S \Delta e$ si trasforma in energia di deformazione $\Delta\sigma \Delta\varepsilon$ assorbita dal materiale e nell'energia d'isteresi ΔW_p dissipata durante la deformazione plastica ciclica. Confrontando il metodo ESED 1-54 con la regola di Neuber 1-6 si ottiene che la regola di Neuber è un caso particolare del metodo ESED quando l'energia di deformazione plastica d'isteresi ΔW_p è nulla. Dato che l'energia d'

isteresi ΔW_p è sempre positiva nel caso di plasticità, la regola di Neuber inevitabilmente sovrastima tensione e deformazione locali.

Durante la deformazione plastica la maggior parte dell'energia d'isteresi ΔW_p è convertita in calore ΔW_q e la parte rimanente, cioè ΔW_s , è immagazzinata nel materiale sotto forma di tensioni residue. Questa analisi implica che l'equazione 1-54 sottostimi gli intervalli reali di tensione e di deformazione locale poiché, in questa relazione, tutta l'energia plastica d'isteresi è considerata come dissipata.

È stata proposta quindi una versione modificata del criterio ESED che considera l'energia di isteresi come somma dell'energia dissipata in calore e dell'energia immagazzinata dal materiale. Quest'ultima è considerata come un contributo additivo alla tensione e alla deformazione locale.

In formule si ha che:

$$K_t^2 \Delta S \Delta e = \Delta \sigma \Delta \varepsilon + \Delta W_q \quad \text{Eq.1-55}$$

Utilizzando l'espressione 1-33 e sostituendola all'interno dell'equazione 1-55 si ricava l'espressione del metodo ESED modificato:

$$K_t^2 \Delta S \Delta e + \Delta W_s = \Delta \sigma \Delta \varepsilon + \Delta W_p \quad \text{Eq.1-56}$$

Generalmente, in presenza di una deformazione plastica, all'apice dell'intaglio si ha che $0 < \Delta W_q < \Delta W_p$, quindi tensione e deformazione locale calcolati con il metodo ESED modificato 1-56 saranno più elevati del metodo ESED 1-54 e minori della regola di Neuber 1-6.

Utilizzando l'espressione di Morrow 1-34, 1-37 e 1-56 si ottiene:

$$\begin{aligned}
 K_t^2 \Delta S \Delta e + \Delta W_s &= \Delta \sigma \Delta \varepsilon + \Delta W_p \\
 \frac{(K_t \Delta S)^2}{4E} + \frac{\Delta W_s}{4} &= \frac{\Delta \sigma \Delta \varepsilon}{4} + \frac{\Delta W_p}{4} \\
 \frac{(K_t \Delta S)^2}{4E} &= \frac{\Delta \sigma}{4} (\Delta \varepsilon_e + \Delta \varepsilon_p) + \frac{\Delta W_p}{4} - \frac{\Delta W_s}{4} \\
 \frac{(K_t \Delta S)^2}{4E} &= \frac{\Delta \sigma \Delta \varepsilon_e}{4} + \frac{\Delta \sigma \Delta \varepsilon_p}{4} + \frac{1-n'}{n'+1} \cdot \Delta \varepsilon_p \cdot \frac{\Delta \sigma}{4} - \frac{n'}{n'+1} \frac{\Delta \sigma}{4} \cdot \Delta \varepsilon_p \\
 \frac{(K_t \Delta S)^2}{4E} &= \frac{\Delta \sigma}{2} \cdot \frac{\Delta \varepsilon_e}{2} + \frac{2-n'}{1+n'} \cdot \frac{\Delta \sigma}{2} \cdot \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} \\
 \frac{(K_t \Delta S)^2}{4E} &= \frac{\Delta \sigma}{2} \cdot \frac{\Delta \sigma}{2E} + \frac{2-n'}{1+n'} \cdot \frac{\Delta \sigma}{2} \cdot \frac{\Delta \varepsilon_p}{2} \\
 \frac{(K_t \Delta S)^2}{4E} &= \frac{\Delta \sigma^2}{4E} + \frac{2-n'}{1+n'} \cdot \frac{\Delta \sigma}{2} \cdot \left(\frac{\Delta \sigma}{2K'} \right)^{\frac{1}{n'}}
 \end{aligned}$$

Eq.1-57

Utilizzando le equazioni 1-34, 1-57 e le proprietà del materiale è possibile andare a calcolare le tensioni e le deformazioni cicliche all'apice dell'intaglio.

Nella tabella seguente viene presentata una schematizzazione delle formule utilizzate nei tre approcci locali presentati precedentemente:

	Regola di Neuber	di Criterio ESED originale	Criterio ESED modificato
Carico monotono	$K_t^2 S \varepsilon = \sigma \varepsilon$	$K_t^2 S \varepsilon = \sigma \varepsilon + W_q$	
Carico ciclico	$K_t^2 \Delta S \Delta e = \Delta \sigma \Delta \varepsilon$	$K_t^2 \Delta S \Delta e = \Delta \sigma \Delta \varepsilon + \Delta W_p$	$ \begin{aligned} K_t^2 \Delta S \Delta e &= \Delta \sigma \Delta \varepsilon + \Delta W_q \\ K_t^2 \Delta S \Delta e &= \Delta \sigma \Delta \varepsilon + \Delta W_p - \Delta W_s \\ K_t^2 \Delta S \Delta e + \Delta W_s &= \Delta \sigma \Delta \varepsilon + \Delta W_p \end{aligned} $

Tabella 1-1 Tabella riassuntiva dei tre metodi approssimati

Il criterio dell'ESED modificato su basa quindi su considerazioni energetiche ottenute attraverso l'analisi della curva d'isteresi per carichi ciclici.

Analizzando ulteriormente le equazioni 1-35, 1-36 e 1-37, ossia le espressioni che definiscono le tre energie considerate nel caso di carico ciclico, in base agli studi effettuati da Ye et al.(2008) [6], è possibile correlare le tre espressioni ad un unico parametro dipendente esclusivamente dal tipo di materiale. Si può asserire infatti, che la conversione dell'energia dipende sia dal tipo di deformazione che dalle proprietà del materiale. Al fine di poter confrontare l'energia dissipata al variare delle sollecitazioni imposte e del materiale utilizzato è stato introdotto il coefficiente C_q . Tale coefficiente è definito come il rapporto tra l'energia termica dissipata e il lavoro di deformazione plastica compiuto durante un ciclo di carico.

$$C_q = \frac{\Delta W_q}{\Delta W_p} = \frac{1 - 2n'}{1 - n'} \quad \text{Eq.1-58}$$

Per numerosi materiali metallici, il valore dell'indice di incrudimento ciclico n' è solitamente compreso tra 0,1 e 0,3. C_q assume quindi un valore compreso tra 0.6 e 0.9, ciò si ricava dall'equazione 1-58. Ciò significa che circa il 60-90% del lavoro di deformazione plastica viene dissipato in calore durante un ciclo di fatica, tale dato è in accordo con quanto riportato in letteratura per differenti materiali in esercizio sottoposti a differenti cicli di carico.

Il criterio dell'ESED modificato, ricavato nel caso monoassiale, viene successivamente ampliato nel caso di componenti intagliati sottoposti a fatica multiassiale.

In base all'articolo di Ye et al.(2008) [6], gli autori affermano che quando un corpo intagliato è soggetto ad un carico ciclico esso genera un'energia di deformazione plastica localizzata nell'apice dell'intaglio. Di questa energia solo una piccola parte, cioè l'energia immagazzinata, contribuisce alla deformazione locale mentre la restante parte viene dissipata sotto forma di calore e non influenza lo stato della tensione e della deformazione all'apice dell'intaglio.

Nel caso di uno stato di tensione multiassiale all'apice dell'intaglio, le equazioni 1-35, 1-36 e 1-37 definite per uno stato di tensione monoassiale possono essere riscritte come segue:

$$\Delta W_p = \int_0^{\Delta \varepsilon_{ij}} \sigma'_{ij} d\varepsilon'_{ij} - \int_0^{\Delta \sigma_{ij}} \varepsilon'_{ij} d\sigma'_{ij} \quad \text{Eq.1-59}$$

$$\Delta W_s = \int_0^{\Delta\sigma_{ij}} \varepsilon'_{ij} d\sigma'_{ij} - \frac{1}{2} \Delta\sigma'_{ij} \Delta\varepsilon'_{ij(e)} \quad \text{Eq.1-60}$$

$$\Delta W_q = \int_0^{\Delta\varepsilon_{ij}} \sigma'_{ij} d\varepsilon'_{ij} - 2 \int_0^{\Delta\sigma_{ij}} \varepsilon'_{ij} d\sigma'_{ij} + \frac{1}{2} \Delta\sigma'_{ij} \Delta\varepsilon'_{ij} \quad \text{Eq.1-61}$$

dove i, j valgono rispettivamente 1, 2, 3 e viene applicata la convenzione della sommatoria implicita. In questo modo si riescono a considerare tutti i possibili contributi di tensione e di deformazione derivanti dallo stato multiassiale presente all'apice dell'intaglio.

Le espressioni 1-59, 1-60 e 1-61 sono matematicamente esatte per componenti intagliati soggetti a carico proporzionale, mentre sono approssimate per il caso di carichi non proporzionali. Il contributo di Ye et al. (2008) [6], vuole estendere la trattazione monoassiale al caso di carico ciclico multiassiale generando una corrispondenza tra i due casi.

Gli autori, sulla base degli studi sviluppati da Singh et al. (1996)[3] , Singh (1998) [4] e come riportato nel paragrafo 1.1.1, introducono un intervallo di tensione equivalente ed una deformazione plastica equivalente al fine di semplificare la trattazione. Le ipotesi considerate alla base della metodologia sono l'utilizzo di un provino intagliato isotropo in campo elasto-plastico e un carico proporzionale multiassiale. L'intervallo di tensione equivalente è definito come la tensione equivalente di von Mises.

$$\Delta\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \Delta S_{ij} \Delta S_{ij}} \quad \text{Eq.1-62}$$

dove ΔS_{ij} è la tensione deviatorica definita nel seguente modo:

$$\Delta S_{ij} = \Delta\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \Delta\sigma_{kk} \delta_{ij} \quad \text{Eq.1-63}$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker e $\Delta\sigma_{kk}$ rappresenta la sommatoria delle componenti di tensione nel sistema di riferimento principale, cioè

$$\Delta\sigma_{kk} = \Delta\sigma_{11} + \Delta\sigma_{22} + \Delta\sigma_{33} \quad \text{Eq.1-64}$$

L'intervallo di deformazione plastica equivalente è dipendente dall'intervallo di tensione equivalente ed è definito come di seguito rispettando l'equazione di Ramberg-Osgood:

$$\Delta\varepsilon_{eq}^p = 2 \left(\frac{\Delta\sigma_{eq}}{2K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad \text{Eq.1-65}$$

dove $\Delta\sigma_{eq}$ è l'intervallo di tensione equivalente precedentemente definito, n' è il coefficiente di incrudimento e K' è il parametro di resistenza del materiale, tutti definiti per il caso ciclico. Utilizzando la semplificazione introdotta dall'utilizzo della tensione e della deformazione equivalente, le equazioni 1-59, 1-60, 1-61 assumono la seguente forma:

$$W_p = \frac{1-n'}{1+n'} \Delta\sigma_{eq} \Delta\varepsilon_{eq}^p \quad \text{Eq.1-66}$$

66

$$W_s = \frac{n'}{1+n'} \Delta\sigma_{eq} \Delta\varepsilon_{eq}^p \quad \text{Eq.1-67}$$

$$W_q = \frac{1-2n'}{1+n'} \Delta\sigma_{eq} \Delta\varepsilon_{eq}^p \quad \text{Eq.1-68}$$

Il coefficiente C_q è sempre definito dalla formula riportata nell'equazione 1-58. Questa grandezza è insensibile al carico applicato, assume lo stesso valore sia nel caso monoassiale che nel caso multiassiale ed è dipendente solamente dal tipo di materiale utilizzato.

Le relazioni 1-59, 1-60 e 1-61 sono l'estensione al caso multiassiale delle relazioni ricavate nel caso monoassiale. Si può quindi estendere la regola di Neuber e il criterio ESED per il caso di fatica multiassiale sulla base delle relazioni 1-7 e 1-23 ricavate precedentemente:

$$\Delta\sigma_{ij}^e \Delta\varepsilon_{ij}^e = \Delta\sigma_{ij}^N \Delta\varepsilon_{ij}^N \quad \text{Eq.1-69}$$

$$\Delta\sigma_{ij}^e \Delta\varepsilon_{ij}^e = \Delta\sigma_{ij}^E \Delta\varepsilon_{ij}^E + \Delta W_p (\Delta\sigma_{ij}^E, \Delta\varepsilon_{ij}^E) \quad \text{Eq.1-70}$$

Il termine a sinistra dell'uguale rappresenta il lavoro teorico di deformazione nel caso ideale di elasticità lineare. Dalle formule 1-69 e 1-70 si ricava che la regola di Neuber è un caso particolare del metodo ESED nel caso in cui l'energia di deformazione plastica sia nulla.

Dall'analisi termodinamica precedentemente trattata, si può dedurre che la regola di Neuber sovrastima le tensioni e le deformazioni locali. Il metodo ESED invece le sottostima a causa del fatto che tutta l'energia di deformazione plastica è dissipata dal materiale.

1.4 METODO ESED MODIFICATO APPLICATO ALLA FATICA MULTIASSIALE

Nell'articolo di Ye et al.(2008) [6] viene proposta una nuova espressione unificata per il calcolo delle tensioni e delle deformazioni locali all'apice dell'intaglio. Nell'ipotesi di "small scale yielding", l'espressione unificata per il calcolo delle tensioni e delle deformazioni locali è la seguente:

$$\Delta\sigma_{ij}^e \Delta\varepsilon_{ij}^e = \Delta\sigma_{ij}^U \Delta\varepsilon_{ij}^U + C_q \Delta W_p (\Delta\sigma_{ij}^U, \Delta\varepsilon_{ij}^U) \quad \text{Eq.1-71}$$

dove C_q è il coefficiente di energia dissipata, mentre $C_q \Delta W_p (\Delta\sigma_{ij}^U, \Delta\varepsilon_{ij}^U)$ rappresenta l'energia termica dissipata durante un ciclo di deformazione plastica, e il pedice U indica le componenti di tensione e deformazione elasto-plastiche all'apice dell'intaglio calcolate con l'espressione unificata.

Il significato fisico dell'espressione 1-71 si può descrivere nel fatto che l'energia in ingresso, dovuta ai carichi ciclici esterni, applicata all'elemento di materiale all'apice dell'intaglio, si trasforma parzialmente nella densità di energia di deformazione che è assorbita dall'elemento di materiale all'apice dell'intaglio, mentre la restante parte di

energia $C_q \Delta W_q(\Delta \sigma_{ij}^U \Delta \varepsilon_{ij}^U)$ viene dissipata come energia termica durante la deformazione plastica ciclica.

Se nell'equazione 1-71 il coefficiente C_q viene posto uguale a zero si ricava l'equazione della regola di Neuber. Invece, nel caso in cui venga posto C_q uguale ad uno, si ritrova l'equazione dell'ESED 1-69. La regola di Neuber e il metodo ESED sono quindi due casi particolari dell'espressione unificata. L'equazione 1-71 può assumere anche la seguente forma:

$$\Delta \sigma_{ij}^e \Delta \varepsilon_{ij}^e = \Delta \sigma_{ij}^U \Delta \varepsilon_{ij}^U + \frac{1-2n'}{1-2n} \Delta W_p(\Delta \sigma_{ij}^U, \Delta \varepsilon_{ij}^U) \quad \text{Eq.1-72}$$

Confrontando le componenti di tensione e deformazione calcolati rispettivamente con la regola di Neuber, metodo ESED e metodo ESED modificato, si può asserire che le componenti ricavate con l'espressione unificata si collocano al centro rispetto ai valori ottenuti con la regola di Neuber e con il metodo ESED.

$$\Delta \sigma_{ij}^N \Delta \varepsilon_{ij}^N \leq \Delta \sigma_{ij}^U \Delta \varepsilon_{ij}^U \leq \Delta \sigma_{ij}^E \Delta \varepsilon_{ij}^E \quad \text{Eq.1-73}$$

La disuguaglianza presente nella formula 1-73 stabilisce che in base ad analisi termodinamiche, i valori calcolati con il metodo ESED modificato si collocano al centro rispetto ai valori ricavati rispetto agli altri due metodi e quindi dovrebbero interpolare più accuratamente i risultati sperimentali. Il metodo dell'ESED modificato verrà utilizzato per calcolare le tensioni e le deformazioni all'apice di un intaglio soggetto a fatica multiassiale. In riferimento a quanto definito precedentemente, al fine di caratterizzare l'aumento di energia locale è necessario calcolare l'incremento di tensione e deformazione. Questo è possibile solo attraverso l'utilizzo di un modello elasto-plastico basato sulla teoria plastica incrementale ciclica.

Capitolo 2

LA TEORIA DELLA PLASTICITA' CICLICA

Al fine di caratterizzare il comportamento del materiale in campo elasto-plastico, è necessario considerare un modello matematico che consenta una buona approssimazione del comportamento reale del materiale. In letteratura infatti, sono presenti molti modelli che cercano di prevedere come il materiale si comporta dopo aver abbandonato il comportamento lineare elastico. I concetti alla base dei modelli matematici sono riferiti alla teoria della plasticità. Questa teoria è divisa in numerosi rami, nel seguente capitolo verranno descritte le basi teoriche della teoria della plasticità ciclica. Questa teoria rappresenta lo strumento più importante e affidabile per determinare l'incremento dello stato tensionale e delle deformazioni di un componente intagliato soggetto a carico ciclico multiassiale. Inoltre, si riassumeranno in modo molto conciso i modelli plastici di Prager[15], Armstrong-Frederick (1966) [16], Chaboche (1989)[17], (1991)[18] e Mròz(1967) [19], (1969)[20] che rappresentano la base teorica-analitica più importante presente in letteratura . In primo luogo però, si ritiene indispensabile una definizione corretta della terminologia utilizzata.

2.1 TERMINOLOGIA

2.1.1 Incrudimento ciclico (cyclic hardening)

Supponiamo di sottoporre un materiale a fatica in controllo di deformazione. Si consideri un'ampiezza costante di deformazione applicata al materiale. Se la risposta in termini di tensione aumenta allora il materiale si dice incrudente e quindi si verifica il fenomeno dell'incrudimento ciclico. Il ciclo d'isteresi aumenta la sua area in quanto aumenta la tensione massima per l'effetto dell'incrudimento. Questo è visibile in Fig. 2-

1. Il comportamento del materiale può essere previsto dai valori ottenuti effettuando la prova di trazione monoassiale. Infatti, in base al rapporto tra la tensione di snervamento e la tensione di rottura, si può stabilire se il materiale incrudisce. In particolare il materiale ha un comportamento incrudente se:

$$\frac{\sigma_{UTS}}{\sigma_{sn}} \geq 1,4$$

dove la σ_{UTS} rappresenta la tensione di rottura mentre la σ_{sn} indica la tensione di snervamento del materiale.

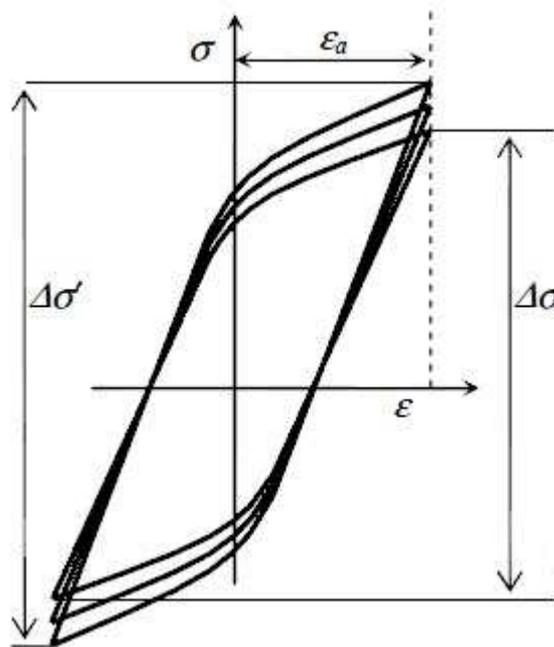


Figura 2-1 Cicli di isteresi per materiale con comportamento incrudente

2. 1. 2 Addolcimento ciclico (cyclic softening)

Nel caso in cui si sottoponga un materiale ad una stessa ampiezza di deformazione e la risposta in termini di tensione diminuisca all'aumentare dei cicli di carico, allora il materiale presenta il fenomeno dell'addolcimento ciclico. Questo è visibile nella

Fig.2-2. In relazione ai dati ricavati dalla prova di trazione monoassiale, un materiale presenta addolcimento ciclico se:

$$\frac{\sigma_{UTS}}{\sigma_{sn}} \leq 1,2$$

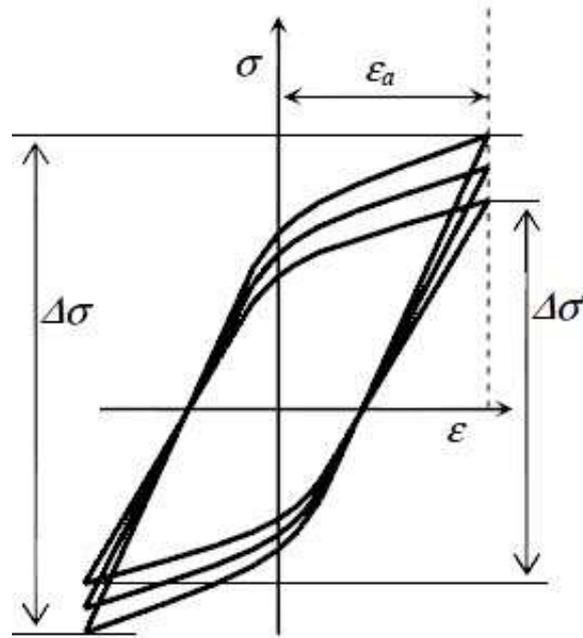


Figura 2-2 Cicli di isteresi di un materiale che subisce addolcimento ciclico.

Per la maggior parte dei materiali però il rapporto fra la tensione di rottura e la tensione di snervamento è compreso tra i valori 1,2 e 1,4 e quindi non si riesce a definire il comportamento del materiale utilizzando solamente i dati riguardanti la prova a trazione.

2. 1. 3 Effetto Bauschinger

In generale nei materiali metallici, come ad esempio l'acciaio, la tensione di snervamento a compressione è uguale a quella a trazione. Quando un materiale viene sottoposto ad una sollecitazione di trazione superiore allo snervamento, nella successiva fase di scarico, il comportamento del materiale risulta elastico solo fino a quando il

decremento di tensione $\Delta\sigma$ rispetto a σ_{max} raggiunge il valore $\Delta\sigma = 2\sigma_s$. Questo equivale ad asserire che la tensione di snervamento a compressione di un materiale portato a snervamento a trazione, è inferiore a quella del materiale originale. Si ottiene lo stesso effetto quando il materiale viene prima snervato per compressione e successivamente a trazione. Questo fenomeno è chiamato effetto Bauschinger ed è definito come l'asimmetria del ciclo d'isteresi di un materiale duttile.

Questo è visibile nella figure sottostanti:

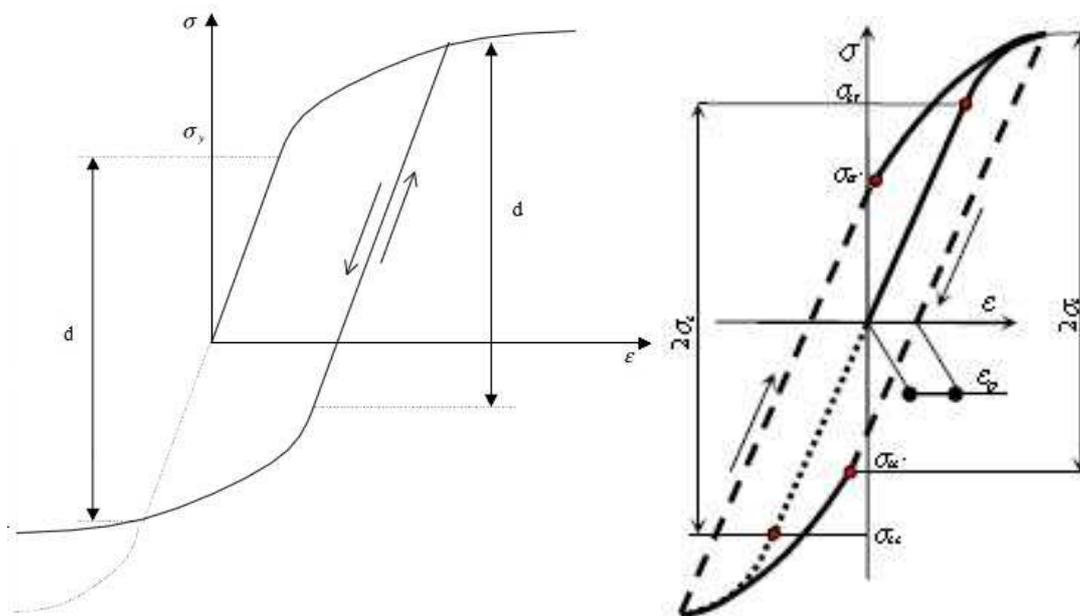


Figura 2-3: Effetto Bauschinger.

Nella Fig.2-3 si può vedere che essendo determinata una nuova condizione di snervamento nella fase in carico, lo snervamento in scarico sarà meno elevato rispetto al caso precedente. Questo effetto è descritto dall'incrudimento cinematico.

2. 1. 4 Comportamento masing e non masing

Il comportamento non masing è definito come un'asimmetria dei rami superiori ed inferiori della curva ciclica d'isteresi stabilizzata (CCS). Il ramo inferiore infatti, è più elevato rispetto al ramo in carico della curva. Il comportamento masing invece, è definito come la simmetria di entrambi i rami di carico e scarico.

La CCS è definita come la curva congiungente i vari apici delle curve d'isteresi stabilizzate calcolate variando l'ampiezza della deformazione. I vertici dei cicli d'isteresi vengono interpolati secondo l'equazione di Ramberg-Osgood (1-27).

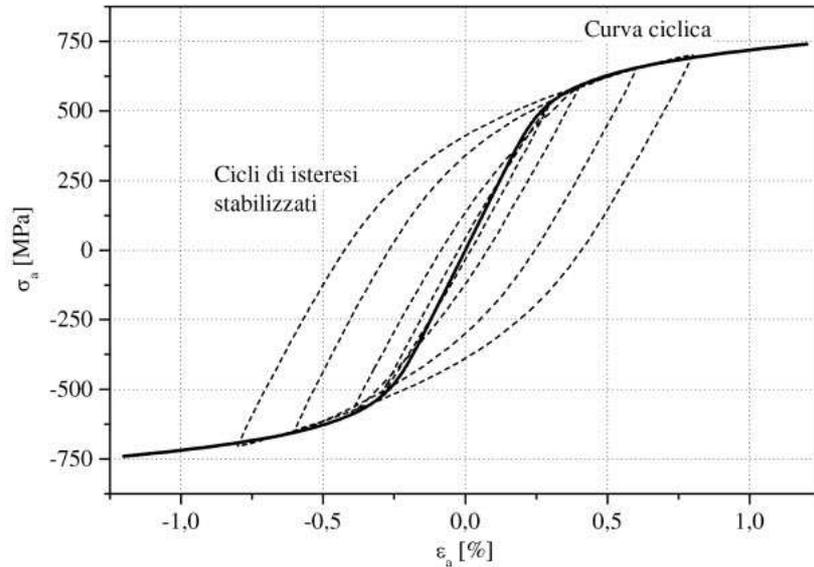


Figura 2-4: Curva ciclica stabilizzata

2. 1. 5 Carico proporzionale e non proporzionale

Un carico proporzionale è definito come il carico a cui corrisponde una linea fissa coincidente con gli assi nello spazio deviatorico. Con il carico proporzionale quindi, ho un rapporto costante tra le tre componenti principali della tensione, ossia tra σ_{11} , σ_{22} e σ_{33} .

Qualsiasi altro carico differente da quello proporzionale è considerato come non proporzionale. Questa definizione è visibile nella figura seguente.

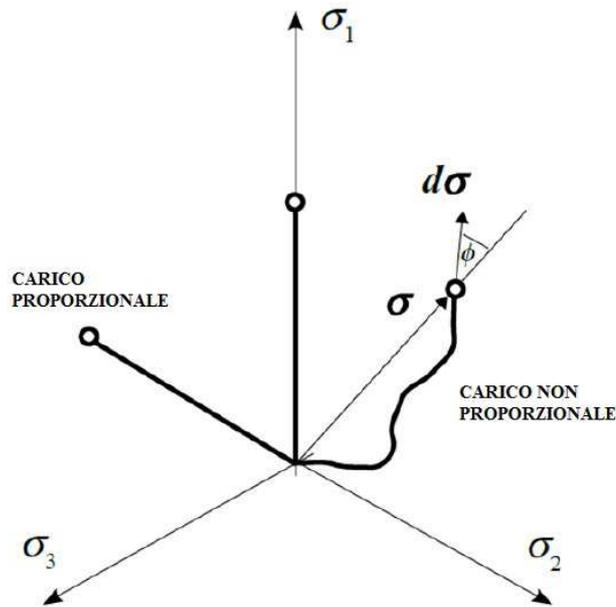


Figura 2-5: Definizione di carico proporzionale e non proporzionale

2.1.6 Ratchetting

Si consideri un materiale sottoposto ad un carico ciclico monoassiale in controllo di deformazione con la tensione media diversa da zero. Diagrammando l'andamento della tensione in funzione della deformazione plastica, è possibile notare che la deformazione plastica aumenta di ciclo in ciclo e questo fenomeno è chiamato creep ciclico o ratchetting. Il ratchetting quindi è definito come la traslazione dei cicli d'isteresi per effetto di fenomeni plastici.

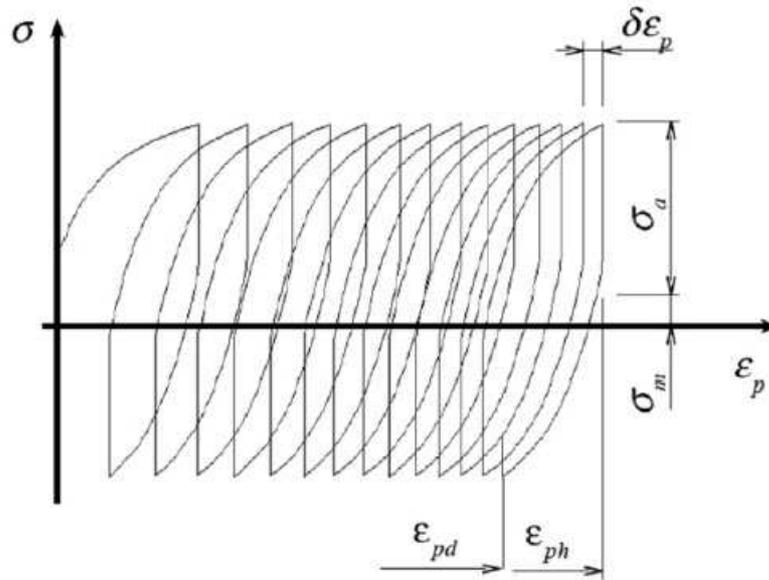


Figura 2-6: Esempio di ratchetting

2.2 INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLA PLASTICITA' CICLICA

La teoria della plasticità ciclica definisce le relazioni costitutive utilizzate per descrivere il comportamento del materiale nella regione plastica. Attraverso le equazioni definite nel modello elasto-plastico basato sulla teoria della plasticità, si può ricavare la risposta in termini di tensione e deformazione del materiale soggetto ad un carico specifico. La teoria plastica più comunemente utilizzata è la Teoria incrementale della plasticità, la quale è basata su relazioni costitutive scritte in termini di incrementi infinitesimi di tensioni, deformazioni e spostamenti. Nel seguente elaborato, si pone l'attenzione su un particolare ramo della teoria della plasticità, ossia sulla teoria della plasticità ciclica. Questa teoria consente di analizzare la risposta del materiale soggetto a carichi sia proporzionali che non proporzionali, considerando il modello di incrudimento cinematico non proporzionale e una corretta previsione del ratchetting multiassiale.

I modelli matematici esistenti nell'ambito della plasticità ciclica sono divisi nei seguenti gruppi:

- modelli sovrapposti (*Besseling, 1958*);
- modelli a singola superficie (*Armstrong-Frederick, 1966*);
- modelli a multi-superficie (*Mroz, 1967*);

- modelli a doppia superficie (*Dafalias-Popov, 1976*);
- modelli endocrini (*Valanis, 1971*);
- modelli con la distorsione della superficie di snervamento (*Kurtyka, 1988*).

I molteplici modelli elasto-plastici presenti in letteratura sono tutti ugualmente definiti dalle seguenti funzioni, come descritto nel lavoro di Jiang (1994) [12]:

1. la funzione di snervamento è rappresentata dalla superficie di snervamento. Essa indica il luogo dei punti che separa, nello spazio tensionale, il comportamento elastico da quello plastico. Sostanzialmente rappresenta il limite elasto-plastico nello spazio σ_{ij} ;
2. il potenziale plastico o regola di flusso, il quale descrive in che modo avvengono le deformazioni plastiche ϵ_p . In altre parole definisce l'incremento delle deformazione plastiche;
3. la legge di incrudimento, la quale definisce l'espansione o la traslazione della superficie di snervamento. Questa legge o regola stabilisce l'entità dell'espansione o della traslazione della superficie di snervamento in funzione delle deformazioni plastiche.

In particolare, esistono principalmente due leggi di incrudimento:

1. legge di incrudimento isotropo;
2. legge di incrudimento cinematico.

2. 2. 1 Incrudimento isotropo

L'incrudimento isotropo è definito come l'espansione omotetica della superficie di snervamento in tutte le direzioni. Quindi all'aumentare della deformazione plastica cumulata aumenta proporzionalmente anche la dimensione della superficie di

snervamento. In riferimento alla Fig. 2-7, si considera il materiale caricato fino al punto B e successivamente avviene lo scarico. Nella successiva fase di carico lo snervamento non avviene più nel punto A (tensione di snervamento del materiale vergine), ma il materiale ricorda il precedente carico e il nuovo snervamento è rappresentato dal punto B. La fase di carico finisce nel punto C e viene invertito il carico. Nella fase di compressione lo snervamento avviene nel punto D che in modulo coincide con la tensione nel punto C. In questo caso quindi lo snervamento a tensione e a compressione coincidono. Si può sostenere che durante il flusso plastico la superficie limite si espande in tutte le direzioni allo stesso modo, senza cambiamenti di forma o traslazioni. Questo modello infatti descrive una curva d'isteresi simmetrica, ossia lo snervamento nella fase di scarico sarà in modulo uguale allo snervamento nella fase di carico.

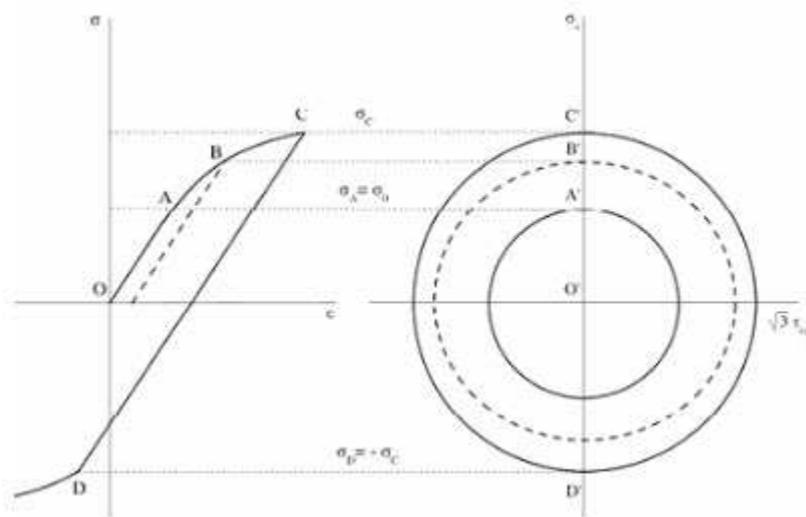


Figura 2-7: Incrudimento isotropo

Se si considera una storia di carico in controllo di deformazione, il modello di incrudimento isotropo prevede un aumento dei valori massimi e minimi di sforzo raggiunto.

Nel caso di una storia di carico ad ampiezza di tensione costante e in controllo di sforzo, il modello isotropo prevede una deformazione completamente elastica dopo il primo ciclo.

2. 2. 2 Incrudimento cinematico

L'incrudimento cinematico è utilizzato per descrivere l'effetto Bauschinger. L'effetto Bauschinger consiste nella riduzione del valore dello snervamento quando si carica in direzione opposta a quella precedente, se il carico applicato è stato tale da far superare il limite di snervamento del materiale vergine. La superficie limite in questo modello non cambia né forma né dimensione ma può traslare nello spazio delle tensioni.

Si consideri il materiale scarico e vergine. La superficie di snervamento è centrata all'origine degli assi. Adesso si consideri il materiale sollecitato a trazione fino al punto B. Essendo che la superficie limite può spostarsi liberamente nello spazio delle tensioni, essa si alza fino a raggiungere il punto finale del carico, ossia il punto B.

L'entità dello spostamento è chiamato backstress ed è rappresentato da α . Il backstress è definito come lo spostamento del centro della superficie limite dalla condizione iniziale fino alla condizione finale di carico. In Fig. 2-8 è visibile la rappresentazione grafica del backstress. Siccome è stata considerata una prova di tensione compressione monoassiale, il backstress è definito solamente lungo un asse. Nel caso di una prova multiassiale il dominio elastico si sposterà nelle tre direzioni all'interno dello spazio tridimensionale delle tensioni.

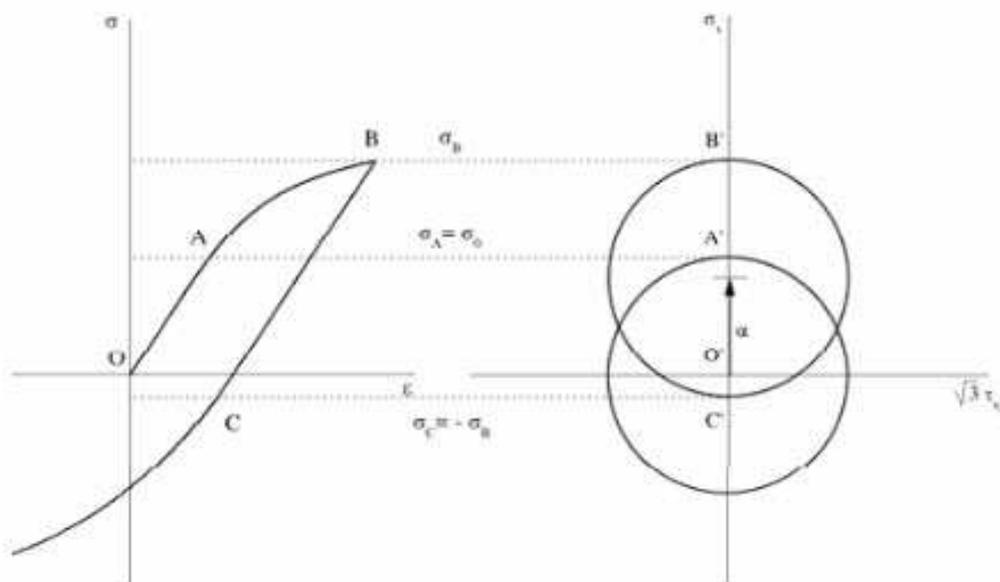


Figura 2-8: Effetto Bauschinger e rappresentazione del backstress.

Il modello di incrudimento cinematico produce una risposta ciclica stabilizzata dopo il primo ciclo di carico, sia in controllo di sforzo che di deformazione. La legge di incrudimento considerata nel seguente elaborato è quella dell'incrudimento cinematico in quanto questa funzione analizza in modo più accurato e reale il vero comportamento del materiale.

Si analizzano nel paragrafo successivo le funzioni principali costituenti un modello plastico.

2.3 FUNZIONI COSTITUENTI IL MODELLO ELASTO-PLASTICO

2.3.1 Funzione di snervamento

La superficie di snervamento permette di stabilire se ad uno stato tensionale corrisponde una condizione elastica o elasto-plastica. Attraverso la funzione di snervamento è possibile determinare partendo da uno stato di tensione multiassiale, una tensione monoassiale equivalente. Il materiale è assunto in campo elastico, quindi con deformazione plastica nulla fino a che lo stato tensionale soddisfa la condizione di snervamento. Per valori più elevati della tensione, il comportamento del materiale sarà in campo elasto-plastico

I due criteri di snervamento più utilizzati sono il criterio Tresca (criterio di tensione massima di taglio) e il criterio di von Mises (criterio della massima energia deviatorica). Nel seguente lavoro si utilizza il criterio di von Mises. Il criterio di von Mises è quello più utilizzato e la condizione di snervamento è raggiunta quando il secondo invariante della parte deviatorica del tensore delle tensioni raggiunge un valore limite caratteristico del materiale.

$$f(J_2) = J_2 - k^2 \qquad \text{Eq.2-1}$$

dove J_2 rappresenta l'invariante secondo del tensore delle tensioni e k indica il valore limite caratteristico del materiale.

Il criterio di von Mises infatti stabilisce che solo la densità di energia deviatorica, cioè l'energia che provoca variazione di forma a parità di volume, è quella che provoca il cedimento del materiale. La parte idrostatica invece provoca solo variazioni di volume a parità di forma e non è direttamente responsabile del raggiungimento della condizione di snervamento limite del materiale.

Considerando un generico tensore definito nell'equazione 2-2, è possibile calcolare il tensore deviatorico determinato dalla differenza tra le tensioni totali e la parte idrostatica. Si considerano reciproche le tensioni tangenziali.

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.2-2}$$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma_{11} - \frac{1}{3}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \frac{2}{3}\sigma_{22} - \frac{1}{3}(\sigma_{33} + \sigma_{11}) & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \frac{2}{3}\sigma_{33} - \frac{1}{3}(\sigma_{22} + \sigma_{11}) \end{bmatrix} \quad \text{Eq.2-3}$$

Si applica adesso la definizione di invariante secondo alla matrice deviatorica di cui sopra e sostituendo all'interno del formula 2-1 si trova che:

$$\frac{1}{3}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{33}) + 2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{23}^2 + 2\sigma_{13}^2 - k^2 = 0$$

Eq.2-4

In termini di tensioni deviatoriche, sulla base degli studi di Singh et al. [3], è possibile esprimere la σ_{eq} nel seguente modo:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} \quad \text{Eq.2-5}$$

dove S_{ij} rappresentano le componenti del tensore deviatorico definito in 2-3 ed è applicata la convenzione della sommatoria implicita. Sviluppando la formula 2-5 è possibile ritrovare la σ_{eq} calcolata attraverso il criterio di von Mises 2-4.

La rappresentazione grafica dei due criteri di snervamento nello spazio tridimensionale delle tensioni è visibile nella figura sottostante:

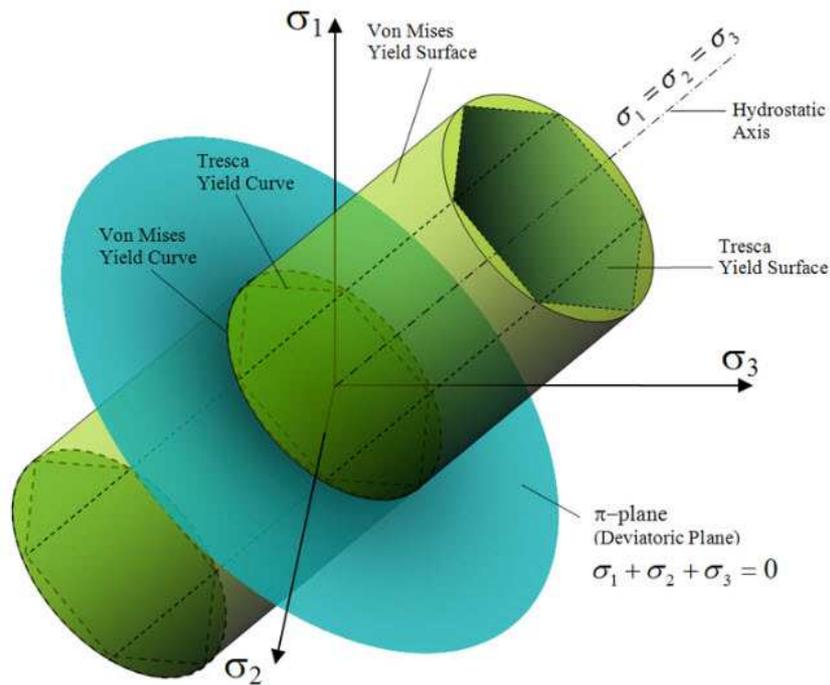


Figura 2-9 Rappresentazione grafica del criterio di Tresca e von Mises [36].

Si può notare che la superficie limite nel caso del criterio di von Mises è definita da un'ellisse nello spazio tridimensionale σ_1 - σ_2 - σ_3 .

Inoltre, nella figura sovrastante sono definiti rispettivamente l'asse idrostatico delle tensioni e il π -plane o piano delle tensioni deviatoriche. Il π -plane è definito come il piano dove la somma delle tensioni principali è nulla. L'asse idrostatico invece, è definito come la retta dove le tensioni principali sono uguali tra loro. Se si considera l'asse idrostatico come nuovo asse di riferimento, allora la superficie limite rappresentata da un'ellisse nel criterio di von Mises, tramite una sezione con un piano ortogonale all'asse stesso, si trasforma in una circonferenza di raggio pari al valore limite caratteristico del materiale. Questo è visibile nella figura sottostante:

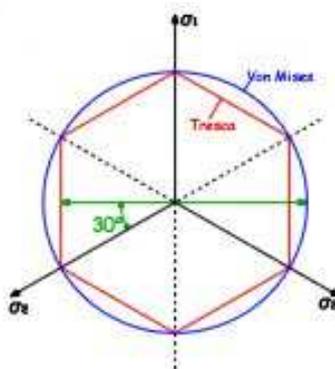


Figura 2-10 Superficie limite criteri di snervamento visti dall'asse idrostatico

Si può asserire quindi che la superficie limite nel criterio di von Mises è rappresentata da un ellissoide nello spazio tridimensionale, mentre è rappresentata da una circonferenza se si considera l'asse idrostatico come nuovo sistema di riferimento.

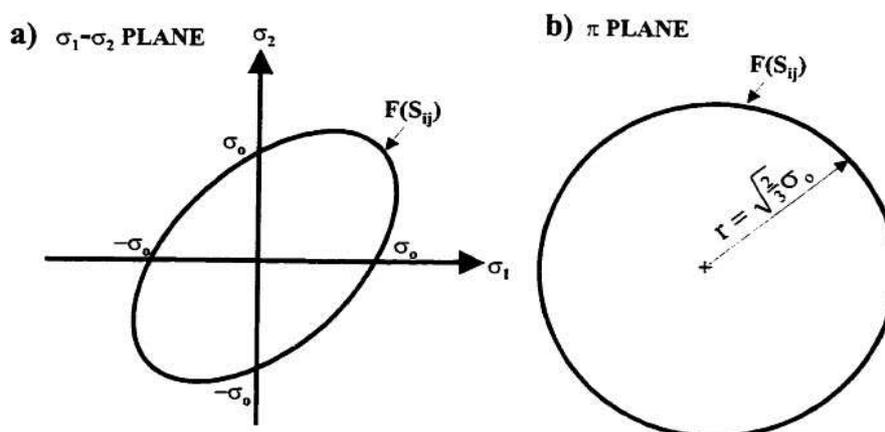


Figura 2-11 rappresentazione del criterio di von Mises nel: a) piano σ_{11} - σ_{22} ; b) π - plane.

Per una reale e più completa descrizione del comportamento del materiale in campo elasto-plastico è necessario considerare una variabile aggiuntiva all'interno della funzione dello snervamento. Il termine in questione è rappresentato dal backstress definito nel paragrafo 2.2.2. Attraverso il backstress è possibile descrivere il moto di traslazione della superficie di snervamento, quando lo stato di tensione applicata al materiale supera la condizione elasticità limite definita nell'equazione 2-4. In base agli studi di Jiang(1994) [12] e Jiang-Sehitoglu(1996) [13], la nuova condizione di snervamento è definita nell'equazione sottostante:

$$f = (\underline{S} - \underline{\alpha}) : (\underline{S} - \underline{\alpha}) - 2k^2 = 0 \quad \text{Eq.2-5}$$

dove \underline{S} rappresenta il tensore deviatorico delle tensioni, $\underline{\alpha}$ rappresenta il tensore deviatorico del backstress (il centro della superficie di snervamento) e k è la tensione di snervamento a taglio semplice. Nel seguente elaborato, la lettera sottolineata rappresenta una matrice. I due punti invece, rappresentano il prodotto scalare tra la differenza dei due tensori. L'equazione 2-5 può essere espressa nei termini di sommatoria delle singole componenti dei tensori:

$$f = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) - 2k^2 = 0 \quad \text{Eq.2-6}$$

Nella figura sottostante è visibile una rappresentazione schematica della traslazione della superficie di snervamento dovuta al backstress:

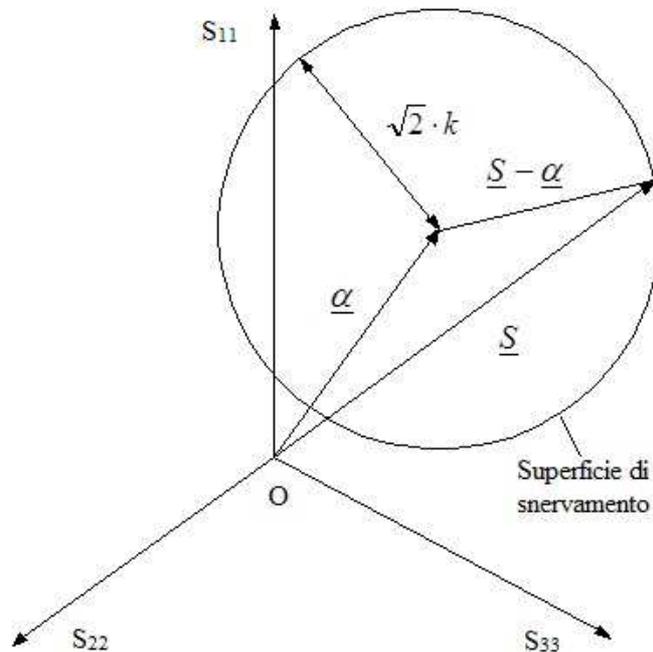


Figura 2-12 Superficie di snervamento e traslazione della stessa per effetto del backstress.

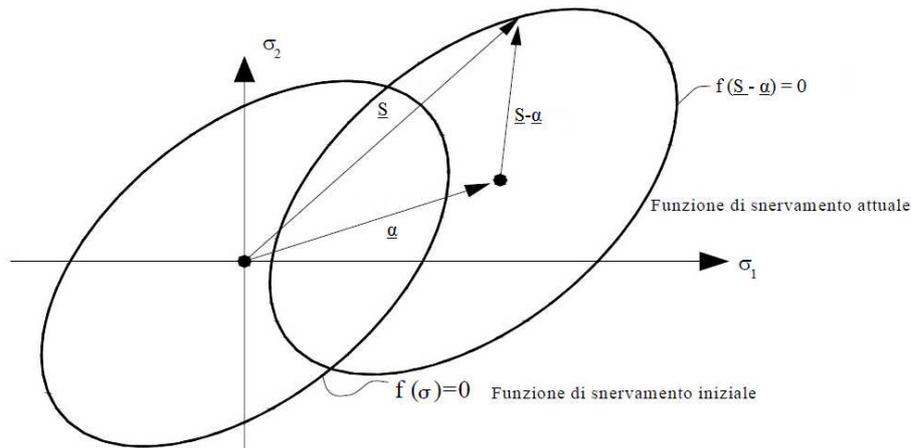


Figura 2-13 Rappresentazione del backstress nel piano delle tensioni. La superficie limite è rappresentata da un'ellisse.

Se si considera la superficie di snervamento vista dall'asse idrostatico delle tensioni, l'ellisse di von Mises si trasforma nella circonferenza indicata in Fig. 2-12. Nel piano delle tensioni invece, la superficie di snervamento è rappresentata da un'ellisse, Fig. 2-13.

Le ipotesi considerate per la superficie limite alla base dei numerosi modelli plastici sono le seguenti:

- essendo i vari modelli sviluppati per la descrizione dell'effetto Bauschinger e quindi dell'incrudimento cinematico, la forma e la dimensione della superficie limite è assunta costante;
- la superficie di snervamento può traslare ma non ruotare;
- la dimensione della superficie di snervamento può cambiare in funzione della tensione di snervamento in taglio semplice, come definito da Jiang(1994)[12]; questo fenomeno può essere considerato per descrivere il comportamento transitorio del materiale.

Sostanzialmente, la funzione di snervamento ha lo scopo di indicare se lo stato delle tensioni applicato al materiale induce un comportamento elastico o plastico, ossia se siamo un campo elastico o plastico. Se $f(\sigma) = 0$ allora il materiale presenta flusso plastico, quindi snervamento. Nel caso in cui $f(\sigma) < 0$ è associato al materiale uno stato

elastico, mentre $f(\sigma) > 0$ corrisponde ad uno stato di tensione non ammissibile. In sintesi:

- $f(\sigma) < 0$ regime elastico;
- $f(\sigma) = 0$ regime elasto-plastico;
- $f(\sigma) > 0$ stato di tensione non ammissibile.

2.3.2 Regola di flusso

La regola di flusso consente di valutare l'incremento di deformazione plastica in funzione dell'incremento della tensione applicata al materiale. In campo elasto-plastico questo legame può essere stabilito solo in forma incrementale. La regola di flusso inoltre, stabilisce la direzione dello spostamento della superficie limite.

Secondo gli studi effettuati da Jiang(1994)[12] e Jiang-Sehitoglu(1996)[13], la regola di flusso più comunemente utilizzata sui metalli è stata sviluppata da Drucker (1960) [14]. In accordo con quanto stabilito da questa legge, l'incremento di deformazione plastica è collineare con la normale esterna allo stato di tensione esistente nel materiale. Questa legge viene appunto chiamata anche condizione normale. Matematicamente la regola di flusso viene espressa con la seguente formula:

$$d\underline{\varepsilon}^p = \frac{1}{h} \langle d\underline{S} : \underline{n} \rangle \underline{n} \tag{Eq.2-7}$$

Oppure se si considerano le singole componenti di tensioni, anziché i tensori, la formula 2-7 assume la seguente forma:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{h} \langle dS_{ij} n_{ij} \rangle n_{ij} \tag{Eq.2-8}$$

dove il simbolo $\langle \rangle$ indica il raggruppamento di Macaulay che viene espresso con l'equazione sottostante:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2}(x + |x|) \quad \text{Eq.2-9}$$

Il raggruppamento di Macauley può essere più semplicemente definito dalla seguente formula:

$$\langle dS:n \rangle = \begin{cases} 0, & dS < 0 \\ dS, & dS \geq 0 \end{cases} \quad \text{Eq.2-10}$$

Quindi se è applicata una condizione di carico allora l'output del raggruppamento è dS e questo determina un incremento della deformazione plastica, altrimenti un dS negativo comporta solamente una deformazione elastica del materiale e un incremento nullo della deformazione plastica. Una rappresentazione grafica della regola di flusso è visibile nella figura sottostante:

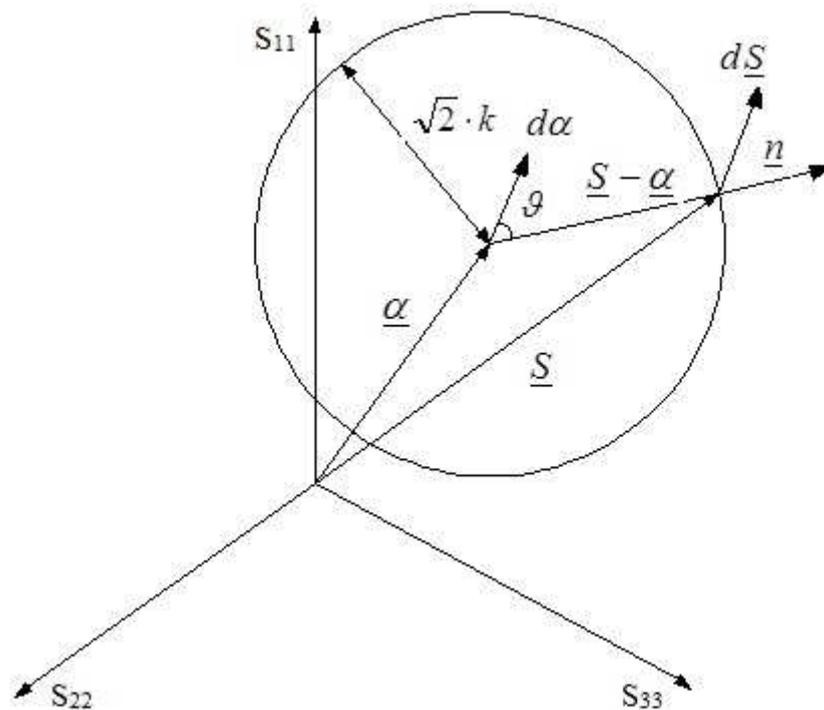


Figura 2-14 Rappresentazione grafica della regola di flusso.

Si consideri la formula 2-8 e la Fig.2-14. Si può asserire che n_{ij} è la normale esterna unitaria alla superficie di snervamento ed è definito nel punto di carico della superficie limite. Questo versore indica solamente la direzione della deformazione plastica ed è calcolabile dall'espressione sottostante:

$$n_{ij} = \frac{S_{ij} - \alpha_{ij}}{\|\underline{S} - \underline{\alpha}\|} \quad \text{Eq. 2-11}$$

dove il simbolo $\|\underline{S} - \underline{\alpha}\|$ rappresenta la norma euclidea o norma di Frobenius. Infatti, come definito in 2-3, \underline{S} rappresenta il tensore deviatorico delle tensioni, ossia una matrice di dimensioni 3×3 . $\underline{\alpha}$ indica invece la matrice del backstress e la sua dimensione è sempre 3×3 . Per definizione, una matrice quadrata d'ordine n , si può considerare come un vettore in uno spazio di dimensione n^2 . Quindi, La norma di un vettore è definita nella formula 2-12:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad \text{Eq. 2-12}$$

Dove x_i rappresenta la componente i -esima del vettore x .

Estendendo quindi la definizione di norma vettoriale ed in base alle considerazioni riportate precedentemente, si può calcolare la norma di una matrice che rappresenta un vettore nello spazio di dimensione n^2 .

La formula generale per il calcolo della norma euclidea o norma di Frobenius, per una generica matrice A , è definita nella formula sottostante:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad \text{Eq. 2-13}$$

Applicando la definizione di norma di matrice, definita nella formula 2-13, alla differenza tra i tensori deviatorico e del backstress, si può calcolare $\|\underline{S} - \underline{\alpha}\|$:

$$\|\underline{S} - \underline{\alpha}\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n (S_{ij} - \alpha_{ij})^2} \quad \text{Eq.2-14}$$

Si consideri per semplicità uno stato di tensione triassiale nello spazio delle tensioni deviatoriche. La distanza euclidea nello spazio tridimensionale è così definita:

$$\|\underline{S} - \underline{\alpha}\| = \sqrt{(S_{11} - \alpha_{11})^2 + (S_{22} - \alpha_{22})^2 + (S_{33} - \alpha_{33})^2 + (S_{12} - \alpha_{12})^2 + (S_{23} - \alpha_{23})^2 + (S_{13} - \alpha_{13})^2} \quad \text{Eq. 2-15}$$

La normale n è un versore e quindi vale che:

$$\|\underline{S} - \underline{\alpha}\| = 1 \quad \text{Eq. 2-16}$$

Si consideri adesso lo sviluppo della formula 2-11 per le tre direzioni principali considerate:

$$n_{11} = \frac{S_{11} - \alpha_{11}}{\sqrt{(S_{11} - \alpha_{11})^2 + (S_{22} - \alpha_{22})^2 + (S_{33} - \alpha_{33})^2 + (S_{12} - \alpha_{12})^2 + (S_{23} - \alpha_{23})^2 + (S_{13} - \alpha_{13})^2}} \quad \text{Eq. 2-17}$$

$$n_{22} = \frac{S_{22} - \alpha_{22}}{\sqrt{(S_{11} - \alpha_{11})^2 + (S_{22} - \alpha_{22})^2 + (S_{33} - \alpha_{33})^2 + (S_{12} - \alpha_{12})^2 + (S_{23} - \alpha_{23})^2 + (S_{13} - \alpha_{13})^2}} \quad \text{Eq. 2-18}$$

$$n_{33} = \frac{S_{33} - \alpha_{33}}{\sqrt{(S_{11} - \alpha_{11})^2 + (S_{22} - \alpha_{22})^2 + (S_{33} - \alpha_{33})^2 + (S_{12} - \alpha_{12})^2 + (S_{23} - \alpha_{23})^2 + (S_{13} - \alpha_{13})^2}} \quad \text{Eq. 2-19}$$

Le equazioni 2-17, 2-18 e 2-19 rappresentano la definizione dei coseni direttori nello spazio delle tensioni deviatoriche, in quanto rappresentano le componenti del versore n . In realtà esistono anche le proiezioni del vettore unitario nei tre piani che costituiscono lo spazio delle tensioni. I vettori proiettati sono conseguentemente n_{12} , n_{13} , n_{23} . Nella formula sottostante è riportata l'espressione della proiezione del vettore nel piano 2-3.

$$n_{23} = \frac{S_{23} - \alpha_{23}}{\sqrt{(S_{11} - \alpha_{11})^2 + (S_{22} - \alpha_{22})^2 + (S_{33} - \alpha_{33})^2 + (S_{12} - \alpha_{12})^2 + (S_{23} - \alpha_{23})^2 + (S_{13} - \alpha_{13})^2}}$$

Eq. 2-20

Nella Fig.2-15 è visibile una rappresentazione grafica del concetto:

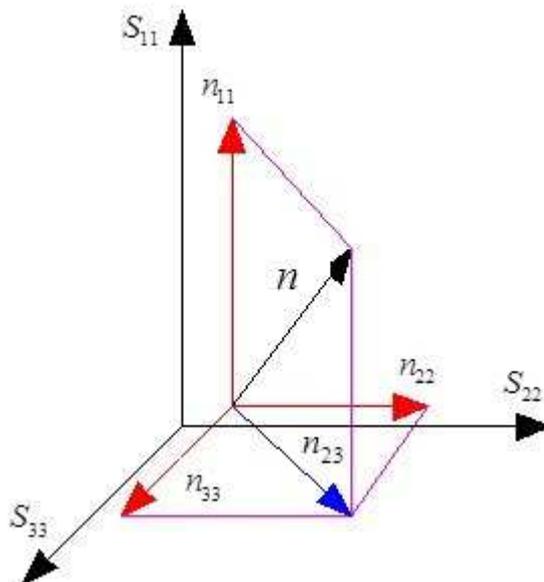


Figura 2-15 Rappresentazione grafica dei versori nel piano delle tensioni deviatoriche

Quindi in ogni piano individuato da due direzioni principali nello spazio tridimensionale, è possibile identificare la proiezione del versore n . Attraverso il calcolo delle normali n , è possibile calcolare il flusso plastico e quindi lo spostamento della superficie limite.

Sempre in riferimento alla formula 2-8, la lettera h è una funzione scalare chiamata funzione di modulo plastico.

Per determinare l'espressione della funzione del modulo plastico, è necessario soddisfare una condizione di coerenza. Durante la deformazione elasto-plastica infatti, la funzione dello snervamento f definita nella formula 2-5 deve essere uguale a zero. La condizione di coerenza infatti stabilisce che durante la deformazione plastica, lo stato delle tensioni deve giacere nella superficie limite. Matematicamente si può esprimere nel seguente modo:

$$df = 0 \quad \text{Eq.2-21}$$

La condizione di coerenza può essere scritta, modificando l'espressione 2-21, nel seguente modo:

$$d\underline{S} : \underline{n} - d\underline{a} : \underline{n} - \sqrt{2} dk = 0 \quad \text{Eq.2-22}$$

Se non è presente un cambiamento nel raggio della superfici limite allora l'equazione 2-22 assume la seguente forma:

$$d\underline{S} : \underline{n} = d\underline{a} : \underline{n} \quad \text{Eq.2-23}$$

L'equazione 2-23 implica che l'incremento del backstress lungo la direzione normale è equivalente all'incremento della tensione deviatorica nella stessa direzione durante il carico elasto-plastico. Sviluppando l'equazione di coerenza 2-22 e l'equazione della regola di flusso 2-8 si può ottenere la funzione del modulo plastico h :

$$h = \frac{\underline{n} : d\underline{\alpha}}{dp} + \sqrt{2} \frac{dk}{dp} \quad \text{Eq.2-24}$$

dove dp rappresenta l'incremento di deformazione plastica equivalente:

$$dp = \sqrt{d\underline{\epsilon}^p : d\underline{\epsilon}^p} \quad \text{Eq.2-25}$$

La funzione h è ricavata sulla frontiera della superficie di snervamento utilizzando la condizione di ammissibilità, cioè $f(\sigma) = 0$ e si può considerare come il contributo di due addendi separati. Il primo addendo indica l'incremento di backstress rispetto alla deformazione plastica equivalente, ossia lo spostamento del dominio elastico. Il secondo addendo considera l'incremento del raggio della superficie di snervamento rispetto alla deformazione plastica equivalente e questo corrisponde ad una variazione omotetica con la deformazione, ossia un aumento del raggio del dominio elastico. Nella modellazione dell'incrudimento cinematico, l'aumento del raggio della superficie limite non viene considerato, in quanto si ipotizza che il dominio elastico possa traslare liberamente nello spazio deviatorico ma non possa aumentare di dimensione. Nell'incrudimento isotropo invece è di fondamentale importanza l'aumento del raggio della superficie di snervamento per una descrizione esauriente del fenomeno. Nella fig.2-16 è descritto quest'effetto che però non verrà valutato nella trattazione perché si considera solamente l'incrudimento cinematico.

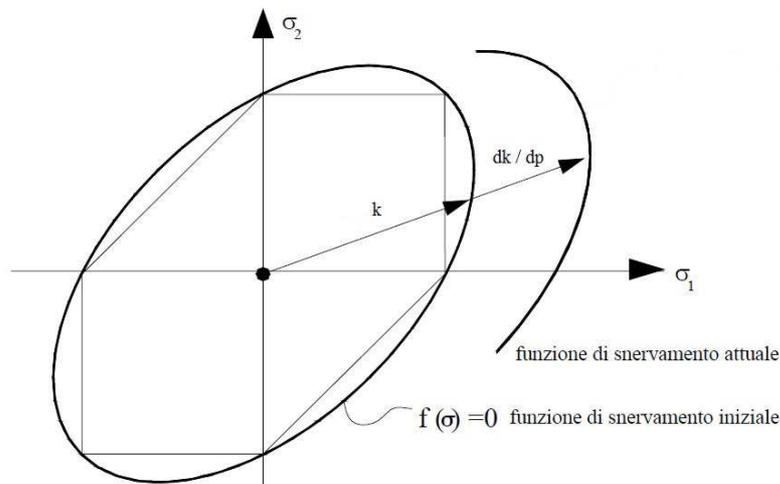


Figura 2-16 Rappresentazione aumento raggio superficie snervamento.

L'equazione 2-24 nel caso dell'incrudimento cinematico assume la seguente forma:

$$h = \frac{\underline{n} : d\underline{\alpha}}{dp} \quad \text{Eq.2-26}$$

Con l'espressione 2-26 si ricava la funzione del modulo plastico h , una volta nota l'evoluzione del backstress.

2.3.3 Legge di incrudimento

Nella maggior parte dei modelli incrementali di plasticità ciclica le formule definite per descrivere la funzione di snervamento e la regola di flusso sono uguali o molto simili alle espressioni definite nei paragrafi precedenti. Quindi, il discriminante tra i diversi modelli di plasticità esistenti è la legge di incrudimento. Nell'ipotesi di analizzare e di descrivere l'incrudimento cinematico, la legge di incrudimento deve modellare matematicamente la traslazione della superficie di snervamento o l'evoluzione del backstress in funzione dei carichi esterni applicati o dell'accumulo della deformazione plastica.

Come stabilito nella Fig.2-12, il backstress può essere trattato come un vettore. Per definire l'incremento del backstress, si deve calcolare sia il modulo del vettore che la direzione. Il modulo plastico h è funzione dell'incremento del backstress ed è di fondamentale importanza nel calcolo delle tensioni e delle deformazioni elasto-plastiche. Dall'analisi dell'equazione 2-24 si può asserire che per caratterizzare le tre variabili, ossia la direzione del backstress, il modulo del vettore e la funzione del modulo plastico, sono necessarie due variabili indipendenti. Una legge di incrudimento può specificare sia la direzione dell'incremento del backstress che la funzione del modulo plastico oppure l'entità dell'incremento o la direzione del backstress.

2.4 MODELLI DI INCRUDIMENTO CINEMATICO

Fra i numerosi modelli esistenti riferiti alla teoria della plasticità ciclica si pone l'attenzione su quelli che utilizzano il concetto di superficie limite. Essa divide le deformazioni elastiche da quelle plastiche. I modelli matematici più importanti sono derivati dalla regola di incrudimento lineare sviluppata da Prager[15], dalle equazioni calcolate da Armstrong-Frederick[16] e da Mròz[19] e [20]. Questi ultimi due modelli descrivono in modo più o meno accurato l'incrudimento cinematico che subisce il

materiale al variare del carico, definendo delle leggi di incrudimento associate alla traslazione della superficie limite. Di fondamentale importanza è anche il modello di incrudimento cinematico proposto da Chaboche (1989) [17] e (1991) [18].

Come descritto nel lavoro di Jiang et al.(1994)[12], il modello di Mròz definisce:

- la funzione d'incrudimento (hardening modulus function);
- la direzione della traslazione;
- l'entità della traslazione della superficie limite è determinata da una condizione di coerenza.

L'algorithmo di Amstrong Frederick specifica:

- la direzione della traslazione della superficie limite;
- l'entità della traslazione della superficie di snervamento e la condizione di coerenza è forzata per ottenere il modulo di incrudimento.

2. 4. 1 Regola di incrudimento lineare

La regola di incrudimento lineare è stata sviluppata da Prager (1955) [15], il quale propose un'espressione per considerare l'effetto Bauschinger. Le ipotesi alla base del modello sono che la superficie limite può traslare liberamente nel piano delle tensioni ma non può cambiare la sua dimensione. Questa condizione viene espressa considerando la tensione di snervamento in taglio semplice, costante per tutta la durata del ciclo di carico che subisce il materiale. La direzione della traslazione della superficie di snervamento è determinata dal vettore risultante dall'unione del centro della superficie limite con il punto caratterizzante lo stato delle tensioni nel bordo della superficie di snervamento. La costruzione geometrica è visibile in Fig. 2-12.

L'espressione della regola di incrudimento lineare è la seguente:

$$d\underline{a} = a_p d\underline{\epsilon}^p \quad \text{Eq.2-27}$$

dove a_p è una funzione scalare dello stato della tensione e della deformazione plastica. La legge definita da Prager è chiamata appunto lineare in quanto l'entità dello spostamento della superficie limite è linearmente dipendente dall'incremento dalla

deformazione plastica. La funzione del modulo plastico si può ricavare dalle espressioni 2-27e 2-24:

$$h = a_p + \sqrt{2} \frac{dk}{dp} \quad \text{Eq.2-28}$$

Questo modello è molto limitativo nella previsione del ratchetting. Infatti se k e a_p sono costanti per tutta la fase di carico, il modello di Prager non è in grado di prevedere il ratchetting per carichi proporzionali. Nel caso di carichi non proporzionali, il modello prevede ratchetting solo per i primi cicli di carico. L'entità del ratchetting predetto dal modello è dipendente dal ciclo di carico e dall'intensità del carico applicato. Il valore del ratchetting calcolato dal modello analitico è notevolmente superiore rispetto a quello derivante da misure sperimentali.

2. 4. 2 Regola di incrudimento di Armstrong - Frederick

Come descritto nel lavoro di Jiang (1994) [12], Armstrong Frederick (1966) [16] svilupparono una regola non lineare di incrudimento cinematico introducendo un termine proporzionale alla deformazione plastica. Questa grandezza è definita termine di recupero e si basa sull'effetto memoria insito nel materiale. Il modello di Armstrong-Frederick utilizza il termine di recupero nella definizione dell'incremento del backstress durante le varie fasi di carico e scarico. La formula del backstress incrementale è definita nella seguente equazione:

$$d\alpha = a_a d\varepsilon_p - c_a \alpha dp \quad \text{Eq.2-29}$$

dove a_a è una costante caratteristica del materiale, c_a è una funzione scalare della deformazione plastica e dp è l'incremento equivalente della deformazione plastica definito nell'equazione 2-25. Attraverso la combinazione dell'equazione 2-29 con l'equazione 2-24 si può ricavare l'espressione della funzione del modulo plastico:

$$h = a_a - c_a n : \underline{\alpha} + \sqrt{2} \frac{dk}{dp} \quad \text{Eq.2-30}$$

Con l'introduzione del termine non lineare, ossia il termine di recupero, il modello prevede ratchetting costante se il materiale è soggetto a carichi ad ampiezza costante. In base agli studi effettuati da Ohno e Wang (1993) [21], la previsione del ratchetting effettuata da questo modello è largamente sovrastimata. Analizzando l'equazione 2-30 si può dedurre che per un carico monoassiale di trazione-compressione, la relazione tra il modulo plastico e la tensione assiale è lineare, cioè differente dalla risposta sperimentale tensione deformazione. Infatti, il modello prevede solo due costanti del materiale che non sono sufficienti per una descrizione accurata della curva d'isteresi ricavata sperimentalmente.

2. 4. 3 Modello di incrudimento cinematico di Chaboche

Chaboche (1989) [17], nei suoi studi, ha proposto un modello non lineare di incrudimento cinematico. Questa regola elimina gli svantaggi esistenti nel modello di Armstrong-Frederick, utilizzando un algoritmo specifico per la creazione del backstress. Infatti il backstress non è più formato da un'unica componente, ma viene ricavato attraverso la sommatoria di M parti. In formula:

$$\alpha = \sum_{i=1}^M \alpha^{(i)} \quad \text{Eq.2-31}$$

Dove $\alpha^{(i)}$ è definita in modo analogo all'equazione di Armstrong-Frederick, espressa in 2-30:

$$d\alpha^{(i)} = \frac{2}{3} C_i d\varepsilon_p - \gamma_i \alpha^{(i)} dp \quad \text{Eq.2-}$$

dove C_i e γ_i sono parametri del materiale, $d\varepsilon_p$ è l'incremento di deformazione plastica, $d\rho$ è l'incremento di deformazione plastica equivalente. Chaboche considera quindi il backstress come la risultante della somma di tre contributi. In lavori più recenti, il backstress viene ottenuto dalla somma di cinque o più contributi. Sono necessarie quindi due costanti del materiale per ogni parte in cui viene diviso il backstress. Nelle figure sottanti è visibile una rappresentazione geometrica della divisione del backstress e lo schema utilizzato per la determinazione delle costanti attraverso il ciclo d'isteresi.

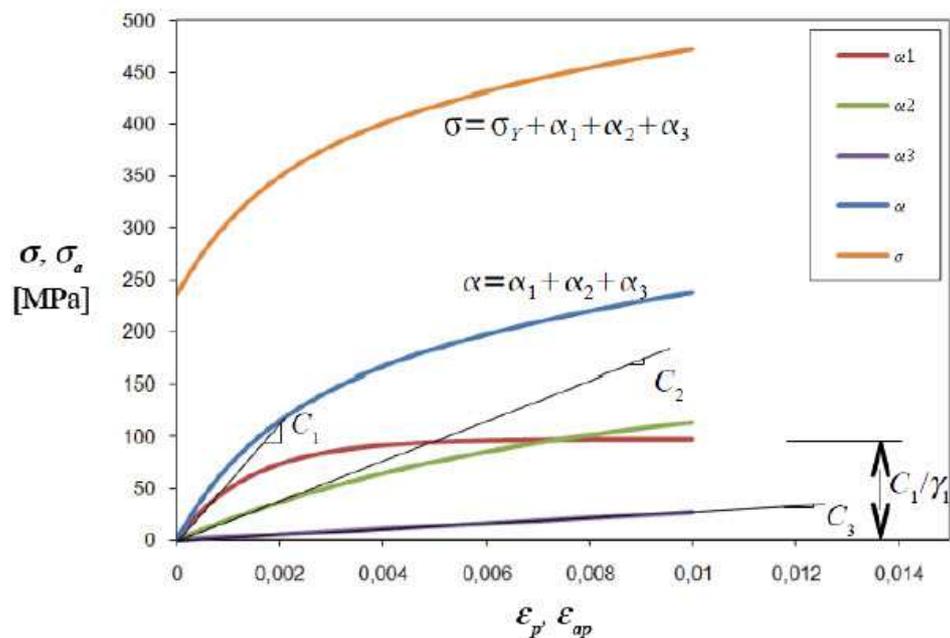


Figura 2-17 Divisione in tre parti del backstress

Secondo Chaboche[17], il backstress α è quello che determina la curva ciclica stabilizzata e, in base ai suoi studi, questa componente di tensione viene divisa in tre parti per avere una corretta descrizione della curva. Una componente del backstress determina la prima parte della curva, cioè come varia la tensione subito dopo lo snervamento. L'andamento in questo tratto è molto inclinato. La seconda componente definisce il comportamento nel transitorio elasto-plastico. La terza parte è lineare e determina l'aumento del backstress in funzione della deformazione plastica. Il backstress viene considerato per le condizioni limite di "saturazione" cioè è sempre riferito alla curva ciclica stabilizzata.

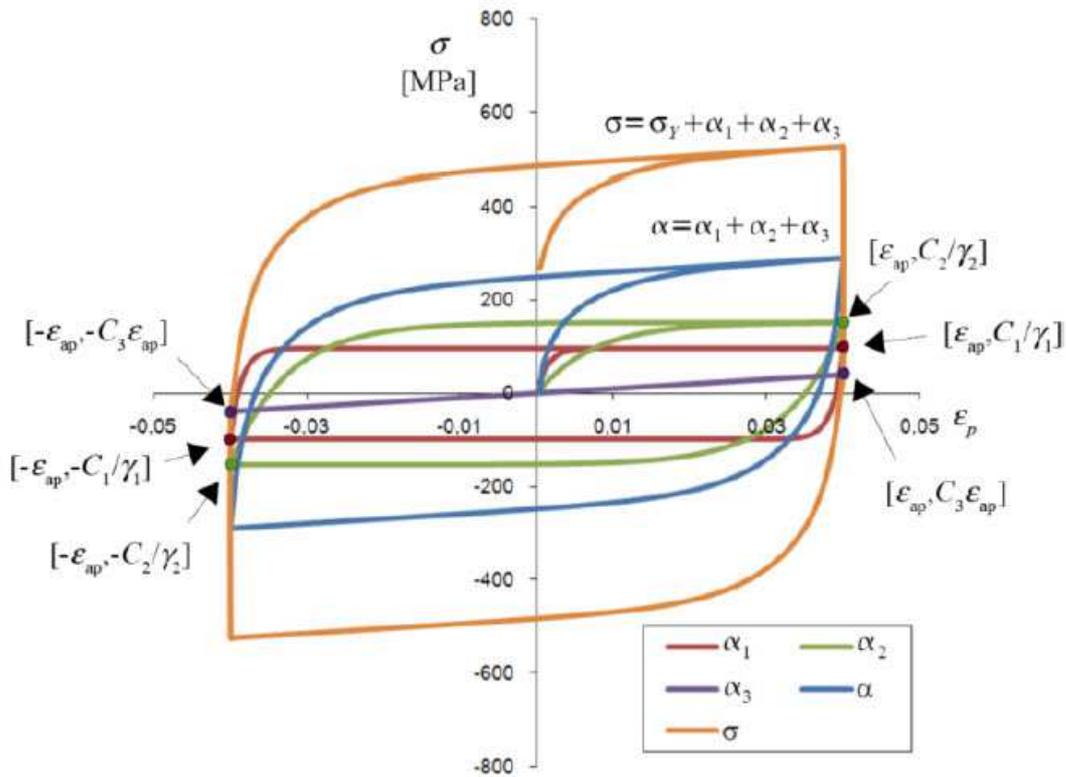


Figura 2-18 Determinazione delle costanti del materiale attraverso il ciclo d'isteresi.

Chaboche (1991) [18] ha esteso la relazione di Armstrong-Frederick introducendo, all'interno dell'equazione 2-32, un termine funzione dello stato tensionale presente nel materiale:

$$d\alpha^{(i)} = c^{(i)} \left(r^{(i)} d\varepsilon^p - W^{(i)} \alpha^{(i)} dp \right) \quad \text{Eq.2-32}$$

dove i varia da 1 a M , $c^{(i)}$ e $r^{(i)}$ sono costanti del materiale associate all' i -esima parte del backstress $\alpha^{(i)}$ e $W^{(i)}$ è una funzione dello stato di tensione ed è definita nella formula sottostante:

$$W^{(i)} = \left\langle 1 - \frac{\xi^{(i)}}{\alpha^{(i)} : \alpha^{(i)}} \right\rangle \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad \text{Eq.2-33}$$

dove $\xi^{(i)}$ rappresenta il livello di soglia per il recupero dinamico dell' i -esima parte di backstress $\alpha^{(i)}$. Il simbolo $\langle \rangle$ indica il raggruppamento di Macauley. Se il valore del

backstress $\alpha^{(i)}$ è inferiore ad un certo valore allora $W^{(i)}$ è posto uguale a zero e quindi si ricava la legge lineare di incrudimento. Nel caso in cui il backstress sia superiore ad un certo valore allora $W^{(i)}$, esso può assumere tutti i valori compresi nel seguente intervallo:
 $0 < W^{(i)} < 1$ e l'incrudimento cinematico non sarà più lineare.

Se $W^{(i)}$ si pone uguale ad 1 allora si ricava la seguente espressione:

$$d\underline{\alpha}^{(i)} = c^{(i)} \left(r^{(i)} d\varepsilon^p - \underline{\alpha}^{(i)} dp \right) \quad \text{Eq.2-34}$$

L'espressione 2-34 rappresenta il modello iniziale di Chaboche (1989) [17], il termine non lineare nell'equazione 2-32, rappresenta il parametro che descrive il ratchetting. Considerando l'espressione 2-33, si può asserire che il modello con il parametro rappresentante il livello di soglia effettua una previsione inferiore del valore del ratchetting rispetto al modello senza il termine di soglia. Infatti il termine $W^{(i)}$ attenua l'influenza del termine non lineare.

2. 4. 4 Regola di incrudimento di Mròz

Mròz (1967) [19] e (1969) [20] introdusse il concetto del campo dei moduli plastici e infatti il modello da lui sviluppato è denominato modello di incrudimento a superfici multiple. Nella curva monoassiale tensione deformazione, invece di considerare una sola componente di tensione come limite elastico della curva, vengono selezionati diversi punti. Il concetto è visibile graficamente nella Fig. 2-19.

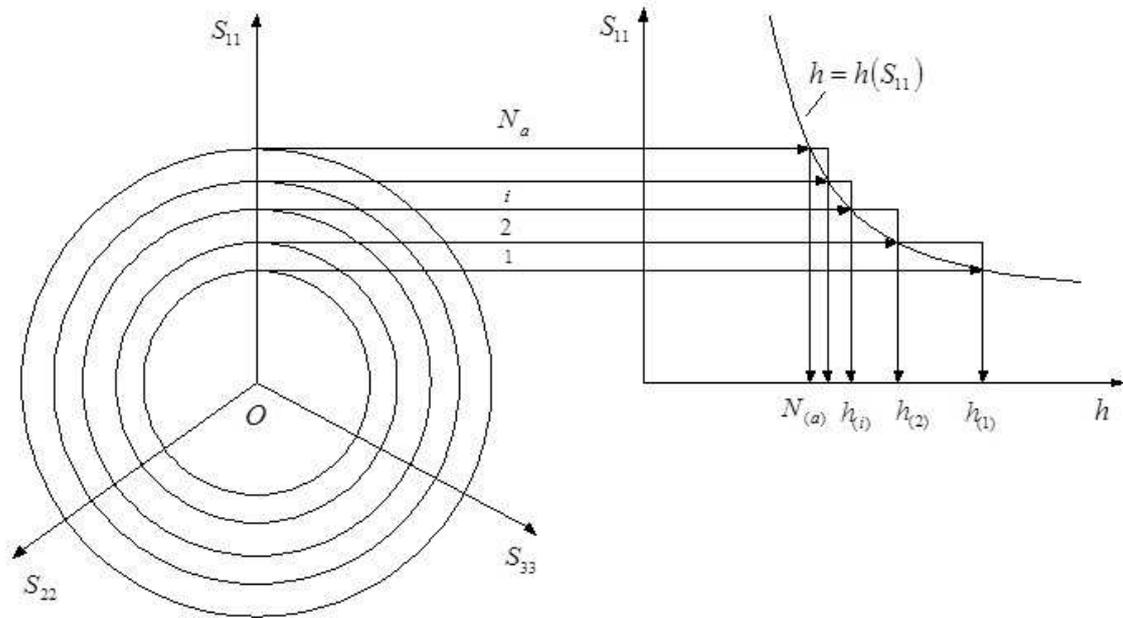


Figura 2-19 Intervalli costanti di funzioni del modulo plastico di Mròz.

Mròz ha ipotizzato che le superfici, definite nello spazio deviatorico, abbiano tutte una funzione costante del modulo plastico. Ogni superficie, quindi, ha un modulo di incrudimento costante nello spazio delle tensioni. In questo modo è stata inserita una non linearità nell'andamento tensione-deformazione attraverso il modello multi superficie introdotto dall'autore.

Inoltre nella sua trattazione, Mròz (1967,1969) [19], [20] ha proposto la legge che determina la traslazione della superficie limite, visibile nella Fig.2-20.

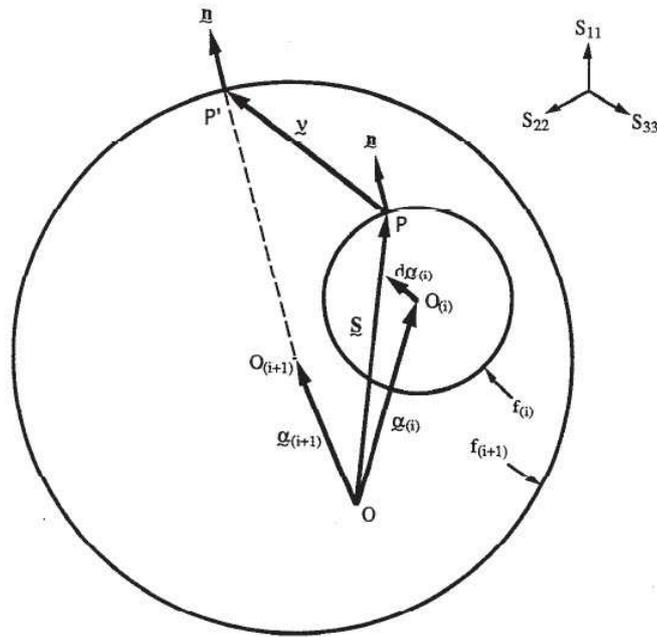


Figura 2-20 Schematizzazione della direzione di traslazione della regola di incrudimento di Mròz.

La direzione della superficie di snervamento è determinata da un vettore che unisce il punto P con P'. Il punto P rappresenta lo stato delle tensioni nella superficie di snervamento i-esima, mentre P' definisce lo stato delle tensioni nella superficie successiva, cioè i+1-esima. Si può notare in Fig.2-20 che le due superfici considerate hanno in comune la direzione della normale n. La regola di incrudimento di Mròz può essere espressa nella formula sottostante:

$$d\underline{\alpha}^{(i)} = \frac{d\underline{S}:\underline{n}}{\underline{v}:\underline{n}} \underline{v} \quad \text{Eq.2-35}$$

dove \underline{v} è definito come:

$$\underline{v} = \sqrt{\frac{2}{3}} (R^{(i+1)} - R^{(i)}) \underline{n} + \underline{\alpha}^{(i+1)} \underline{\alpha}^{(i)} \quad \text{Eq.2-36}$$

dove $\underline{\alpha}^{(i)}$ e $R^{(i)}$ rappresentano il centro e il raggio della superficie di snervamento i-esima. La formula 2-33 non considera la variazione nel raggio della superficie limite, quindi è applicabile per la descrizione dell'incrudimento cinematico. L'interpretazione

della regola di incrudimento di Mròz, ossia del backstress $\underline{\alpha}^{(i)}$, è differente rispetto al concetto definito da Armstrong-Frederick. In base a numerosi lavori di Garud proposti da Jiang (1994)[12], Garud esaminando la regola di incrudimento di Mròz, trova che la direzione della traslazione della superficie di snervamento risulta indipendente dall'incremento delle tensioni e questo potrebbe creare dei problemi nello sviluppo della trattazione analitica. Sulla base di queste considerazioni, Garud propose una nuova regola di incrudimento basata sulle relazioni stabilite da Mròz, in cui si mette in relazione la direzione della traslazione della superficie di snervamento con la direzione dell'incremento della deformazione plastica. La rappresentazione grafica è visibile nella figura sottostante:

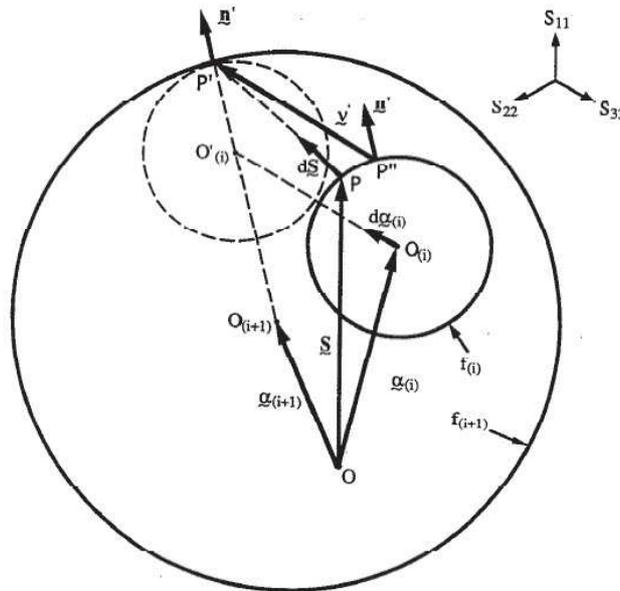


Figura 2-21 Schematizzazione della regola di incrudimento di Garud

L'incremento della tensione deviatorica deve essere tale da congiungere il punto P sull' i -esima superficie con P' che si trova sulla superficie $i+1$ -esima. Affinché le due superfici possano essere considerate tangenti nel punto P' , dove il centro della superficie i -esima è in O_i , essa dovrà traslare nella direzione individuata dal vettore congiungente O_i e O_{i+1} , mentre l'entità dello spostamento viene individuata da una particolare condizione di coerenza. Dopo aver determinato la posizione del punto P' si può calcolare la normale unitaria a P' . Il vettore congiungente il punto P' con il punto P può essere espresso mediante la seguente formula:

$$\underline{v}' = \sqrt{\frac{2}{3}} (R^{(i+1)} - R^{(i)}) \underline{n}' + \underline{\alpha}^{(i+1)} \underline{\alpha}^{(i)} \quad \text{Eq.2-37}$$

dove \underline{n}' è la normale unitaria al punto P' ed indica la direzione dell'incremento dello stato di tensione. La formula della traslazione della superficie di riferimento i -esima è molto simile all'equazione 2-35:

$$d \underline{\alpha}^{(i)} = \frac{d S : \underline{n}}{\underline{v}' : \underline{n}} \underline{v}' \quad \text{Eq.2-38}$$

Per l'ipotesi assunta all'inizio della trattazione, ossia che la superficie di snervamento può traslare ma non ruotare, il vettore congiungente O_i e O'_i è geometricamente equivalente al vettore congiungente P e P' . Quindi per effetto di questa semplificazione le formule utilizzate da Garud sono equivalenti alle formule definite da Mròz. L'unica differenza tra le due trattazioni è che nel modello di Mròz la direzione della traslazione è individuata dalla normale \underline{n} allo stato di tensione presente nel materiale, mentre nella regola di Garud la direzione della traslazione è determinata dalla normale \underline{n}' , ossia la direzione dell'incremento dello stato di tensione. Il modello di Mròz – Garud riesce a duplicare accuratamente l'effetto Bauschinger ma non a prevedere il ratchetting se il carico è proporzionale. Comunque se il numero delle superfici è abbastanza elevato, questi due modelli determinano un'uguale previsione delle tensioni-deformazioni. Infatti, la direzione di traslazione è dipendente dalla posizione relativa di due superfici consecutive, ed è evidente che il numero delle superfici impiegate ha una notevole influenza sulla direzione della traslazione e quindi sui risultati ottenuti.

Come suggerito da Jiang(1994) [12], le equazioni 2-35 – 2-38 non determinano una direzione corretta del backstress e quindi della traslazione della superficie limite.

Comunque, questo modello è in grado di prevedere ratchetting costante se il carico è non proporzionale. Il valore calcolato però, non decresce al variare della storia di carico e quindi è largamente sovrastimato rispetto ai dati sperimentali.

Capitolo 3

MODELLO ELASTO-PLASTICO DI JIANG-SEHITOGLU

Sulla base dei modelli precedentemente esposti, Jiang (1994) [12], Jiang-Sehitoglu (1996)[13] svilupparono un nuovo modello elasto-plastico per prevedere il comportamento del materiale sottoposto a carichi ciclici proporzionali e non proporzionali. Il modello utilizzato come base, al fine di giungere all'estensione effettuata dagli autori, è il modello di Ohno-Wang (1991) [21] e (1993) [22].

Secondo Jiang (1994)[12], il modello di Ohno-Wang presenta alcune lacune, tra cui il fatto di non riuscire a predire un ratchetting costante per carichi non proporzionali. Il nuovo modello invece, elimina questa carenza migliorando ulteriormente la previsione del comportamento del materiale sottoposto a carichi non proporzionali. Si ritiene indispensabile, al fine di poter comprendere il modello di Jiang-Sehitoglu, effettuare una breve digressione sul modello elasto-plastico sviluppato da Ohno-Wang.

3.1 MODELLO ELASTO-PLASTICO DI OHNO-WANG

Nei vari modelli elasto-plastici sviluppati da Ohno-Wang (1991) [21] e (1993) [22], gli autori hanno ampliato diversi concetti associati al livello di soglia introdotto da Chaboche. In letteratura sono presenti due differenti metodi sviluppati dagli autori, in cui viene modificato il termine $W^{(i)}$ definito nell'equazione 2-33. Di seguito sono definite le espressioni di $W^{(i)}$ per i due modelli.

- Ohno-Wang I:

$$W^{(i)} = H(g^{(i)}) \langle \underline{n} : \underline{L}^{(i)} \rangle \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad \text{Eq.3-1}$$

- Ohno-Wang II:

$$W^{(i)} = \left(\frac{\|\underline{\alpha}^{(i)}\|}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)}} \langle \underline{n} : \underline{L}^{(i)} \rangle \quad (i=1, 2, \dots, M) \quad \text{Eq.3-2}$$

dove $\chi^{(i)}$ ($i=1, \dots, M$) rappresentano costanti del materiale e H è una funzione a gradino definita nel seguente modo:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{Eq.3-3}$$

Gli altri termini espressi nelle equazioni (96) e (97) sono definiti di seguito:

$$\underline{L}^{(i)} = \frac{\underline{\alpha}^{(i)}}{\|\underline{\alpha}^{(i)}\|} \quad (i=1, 2, \dots, M) \quad \text{Eq.3-4}$$

$$\|\underline{\alpha}^{(i)}\| = \sqrt{\underline{\alpha}^{(i)} : \underline{\alpha}^{(i)}} \quad (i=1, 2, \dots, M) \quad \text{Eq.3-5}$$

$$g^{(i)} = \|\underline{\alpha}^{(i)}\| - r^{(i)} \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, M) \quad \text{Eq.3-6}$$

dove $\underline{L}^{(i)}$ è il vettore unitario e $\|\underline{\alpha}^{(i)}\|$ è la dimensione del backstress. Il simbolo $g^{(i)} = 0$ rappresenta una superficie centrata nell'origine e con raggio $r^{(i)}$. Secondo l'equazione 2-33, si può asserire che $\|\underline{\alpha}^{(i)}\| \leq r^{(i)}$ e quindi l'espressione 3-1, che definisce il modello di Ohno-Wang I, può essere considerata come un caso particolare del modello di Ohno-Wang II (3-2) quando $\chi^{(i)} = \infty$. L'incremento del backstress è definito mediante la seguente espressione:

$$d\underline{\alpha}^{(i)} = c^{(i)} \left(r^{(i)} d\varepsilon^p - \left(\frac{\|\underline{\alpha}^{(i)}\|}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)}} \langle \underline{n} : \underline{L}^{(i)} \rangle \underline{\alpha}^{(i)} dp \right) \quad \text{Eq.3-7}$$

La rappresentazione grafica del modello è visibile nella figura sottostante:

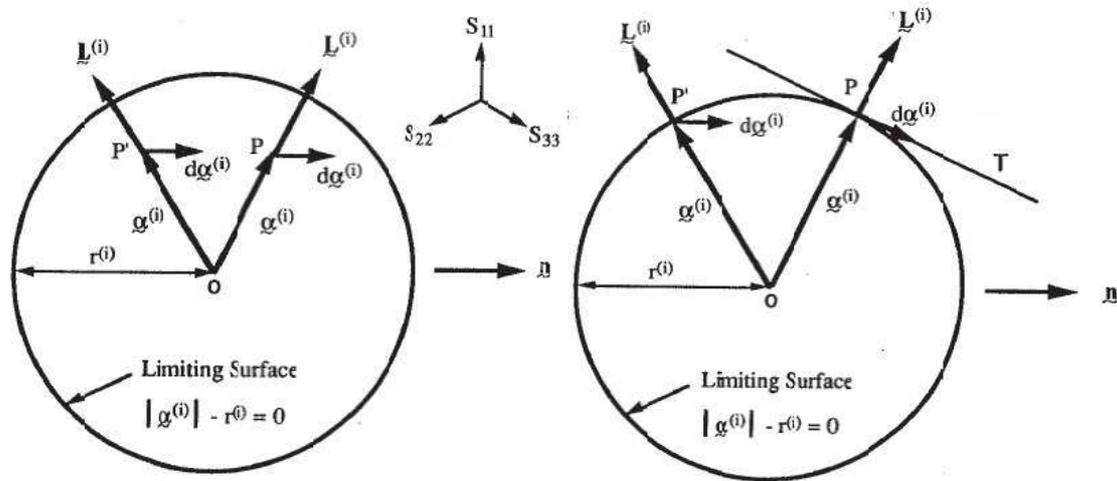


Figura 3-1 Generalizzazione della regola di incrudimento di Ohno-Wang.

Nei modelli di Ohno-Wang, ogni componente di backstress si può trovare all'interno oppure sul limite di una superficie definita da $g^{(i)} = 0$. Se il backstress è all'interno della superficie i due modelli forniscono una differente interpretazione del fenomeno:

- Ohno-Wang I: considerando la funzione a gradino definita nell'equazione 3-3, una funzione $g^{(i)} < 0$ determina $H(g^{(i)}) = 0$, cioè $W^{(i)} = 0$ e quindi l'espressione 3-1 si trasforma nella regola di incrudimento lineare;
- Ohno-Wang II: se $\chi^{(i)}$ diventa elevato allora $W^{(i)}$ tende a zero e il backstress è all'interno della superficie limite.

Il risultato di queste considerazioni è che l'incrudimento corrispondente ad $\underline{\alpha}^{(i)}$ è approssimativamente nella stessa direzione di \underline{n} , come visibile in Fig.2-14.

Nel caso in cui il backstress sia sul limite della superficie, cioè $g^{(i)} = 0$, il modello determina una previsione $d\underline{\alpha}^{(i)} : \underline{n} = 0$, indipendentemente dalla scelta di $\chi^{(i)}$. Questo implica che quando $\underline{\alpha}^{(i)}$ è sulla superficie limite, la direzione della traslazione del backstress sarà nella direzione tangenziale alla superficie limite. L'incremento del backstress $d\underline{\alpha}^{(i)}$ può uscire dalla superficie limite, mentre la componente del backstress

$\underline{\alpha}^{(i)}$ non uscirà mai dalla sua superficie limite per la condizione di coerenza espressa dalla formula 3-6.

In generale si può affermare, in base agli studi di Jiang (1994) [12], che il modello di Ohno-Wang I fornisce un andamento della curva d'isteresi coerente con i dati sperimentali, mentre non è adatto per la previsione del ratchetting. Nel modello Ohno-Wang II la scelta delle costanti $\chi^{(i)}$ è di fondamentale importanza per una corretta previsione della direzione e dell'entità del ratchetting. Se le costanti sono scelte in modo appropriato, il modello fornisce un'ottima stima e previsione del ratchetting.

3.2 CONCETTI BASE DEL MODELLO DI JIANG-SEHITOGLU

Il modello elasto-plastico sviluppato da Jiang-Sehitoglu (1996) [13] estende il modello di Ohno-Wang, utilizzando il concetto della superficie limite con l'espansione in serie del backstress. Questo modello comunque, anche se utilizza questo nuovo concetto, continua a far parte della categoria dei modelli di tipo Armstrong-Frederick.

3.2.1 Introduzione alla regola di incrudimento

Si consideri l'espansione in serie del backstress definita da Chaboche (2-31). È possibile generalizzare la regola di incrudimento, ossia l'espressione di ogni componente di backstress, attraverso la seguente forma tensoriale:

$$d \underline{\alpha}^{(i)} = f_1^{(i)} \left(\underline{n} - f_2^{(i)} \underline{L}^{(i)} \right) dp \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad \text{Eq.3-8}$$

dove \underline{n} è la normale unitaria alla superficie di snervamento definita nell'equazione 2-11, dp è l'incremento di deformazione plastica equivalente espresso nell'equazione 2-25 ed $\underline{L}^{(i)}$ è il vettore normalizzato riferito all'i-esima parte del backstress, equazione 3-4. Le quantità $f_1^{(i)}$ e $f_2^{(i)}$ sono funzioni scalari del backstress e devono soddisfare le seguenti ipotesi:

1. $f_1^{(i)}$ deve essere positiva e può assumere un singolo valore;

2. $f_2^{(i)} \geq \underline{n} : \underline{L}^{(i)}$ quando $\|\underline{\alpha}^{(i)}\| = r^{(i)}$ con $r^{(i)} > 0$.

Attraverso l'equazione 3-6 e le due ipotesi riportate sopra, è possibile costruire il concetto di superficie limite. Si sviluppi l'equazione 3-8 moltiplicando ambo i membri per il vettore unitario $L^{(i)}$:

$$\begin{aligned} d\underline{\alpha}^{(i)} : \underline{L}^{(i)} &= f_1^{(i)} (\underline{n} : \underline{L}^{(i)} - f_2^{(i)} \underline{L}^{(i)} : \underline{L}^{(i)}) dp & (i = 1, 2, \dots, M) \\ d\underline{\alpha}^{(i)} : \underline{L}^{(i)} &= f_1^{(i)} (\underline{n} : \underline{L}^{(i)} - f_2^{(i)}) dp & (i = 1, 2, \dots, M) \end{aligned} \quad \text{Eq.3-9}$$

In relazione all'ipotesi 1, $f_1^{(i)}$ è sempre maggiore o uguale a zero e anche la deformazione plastica equivalente dp è positiva. Quindi dall'equazione 3-9, si può ricavare che $d\underline{\alpha}^{(i)} : \underline{L}^{(i)}$ e $(\underline{n} : \underline{L}^{(i)} - f_2^{(i)})$ hanno lo stesso segno. Estendendo l'ipotesi 2 all'espressione 3-8, si determina che:

$$d\underline{\alpha}^{(i)} : \underline{L}^{(i)} \leq 0 \quad \text{quando} \quad \|\underline{\alpha}^{(i)}\| = r^{(i)}$$

Poiché le componenti del backstress sono inizialmente nulle, la disuguaglianza precedente implica che ogni volta che $\underline{\alpha}^{(i)}$ raggiunge una superficie con raggio $r^{(i)}$, l'incremento di $\underline{\alpha}^{(i)}$, cioè $d\underline{\alpha}^{(i)}$, forma un angolo ottuso o retto rispetto ad $\underline{\alpha}^{(i)}$. Il risultato di questa considerazione riguardante la traslazione del backstress è che $\underline{\alpha}^{(i)}$ non uscirà mai dalla superficie di raggio $r^{(i)}$ centrata nell'origine. Lo spazio delimitato dal raggio $r^{(i)}$ è definito, nel resto della trattazione, come superficie limite per le componenti del backstress. Si può asserire che l'equazione 3-8 in relazione alle ipotesi 1 e 2, rappresenta la struttura generale delle regole di incrudimento non lineari definite nel capitolo 2. Infatti, nei modelli di Chaboche e Ohno-Wang il backstress viene diviso in più parti e ogni porzione del backstress totale ha una superficie limite dipendente dalle caratteristiche del materiale.

Si consideri l'espressione dell'incremento del backstress secondo il modello di Armstrong-Frederick definita nell'equazione 2-29. In questa regola di incrudimento il backstress è considerato come un'unica componente, quindi si possono definire le due funzioni scalari $f_1^{(i)}$ e $f_2^{(i)}$ nel seguente modo:

$$f_1^{(1)} = a_a \quad \text{Eq.3-10}$$

$$f_2^{(1)} = \frac{c_a}{a_a} \|\underline{\alpha}\| \quad \text{Eq.3-11}$$

Per questo modello, esiste la superficie limite per il backstress totale $\underline{\alpha}$ ed è definita dallo spazio delimitato dal raggio:

$$r^{(1)} = \frac{a_a}{c_a} \quad \text{Eq.3-12}$$

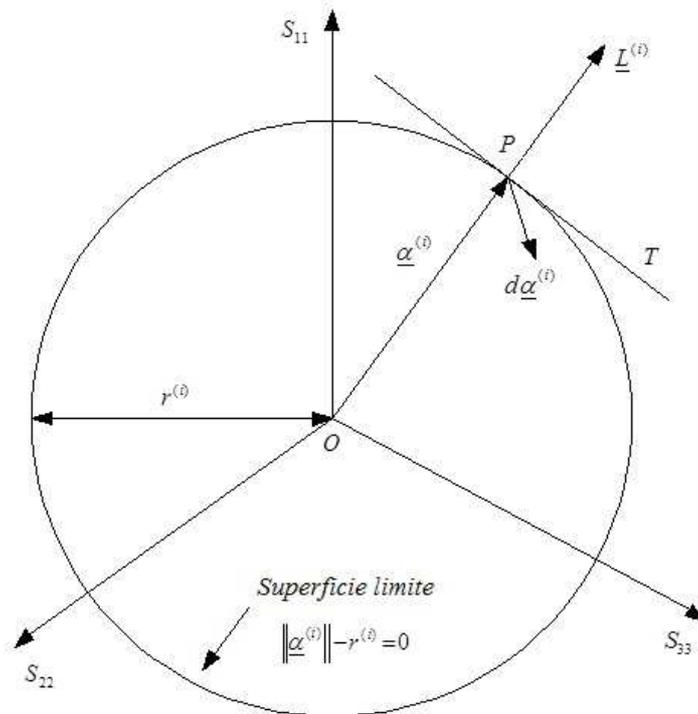


Figura 3-2 Superficie limite del modello Armstrong-Frederick.

Nella Fig.3-2 è visibile la rappresentazione grafica della regola di incrudimento di Armstrong-Frederick. Si può notare che l'incremento di backstress forma un angolo acuto con la tangente alla superficie ed è rivolto verso l'interno della circonferenza. Anche il modello di Chaboche, definito nell'equazione 2-34, può essere generalizzato mediante le due funzioni scalari $f_1^{(i)}$ e $f_2^{(i)}$:

$$f_1^{(i)} = c^{(i)} r^{(i)} \quad \text{Eq.3-13}$$

$$f_2^{(i)} = \frac{\|\underline{\alpha}^{(i)}\|}{r^{(i)}} \quad \text{Eq.3-14}$$

Il modello di Chaboche è anch'esso rappresentabile attraverso il concetto della superficie limite.

Con questa generalizzazione si possono esprimere le diverse regole di incrudimento mediante il concetto della superficie limite. Infatti, i modelli di incrudimento descritti, definiti nella categoria delle regole di incrudimento di tipo Armstrong-Frederick, differiscono tra loro per l'interpretazione della superficie limite per le componenti del backstress. I vari modelli differiscono tra loro per la caratterizzazione della direzione e dell'entità del backstress all'interno della superficie limite. Inoltre, tale interpretazione consente la determinazione delle costanti del materiale utilizzando una procedura standard. Il concetto di superficie limite fornisce un'utile base per la costruzione di un nuovo modello di incrudimento.

3.3 LA REGOLA DI INCRUDIMENTO DI JIANG-SEHITOGLU

Nel modello elasto-plastico sviluppato da Jiang (1994) [12] e Jiang-Sehitoglu (1996)[13], le formule utilizzate per caratterizzare la funzione di snervamento e la regola di flusso sono equivalenti a quelle già utilizzate nella definizione dei modelli elasto-plastici precedentemente descritti. La regola sviluppata dagli autori propone una nuova definizione della regola di incrudimento, ossia dell'incremento del backstress in funzione della deformazione plastica accumulata.

La nuova formula dell'incremento del backstress suggerita dagli autori è presentata nell'equazione sottostante:

$$d\underline{\alpha}^{(i)} = c^{(i)} r^{(i)} \left(\underline{n} - \left(\frac{\|\underline{\alpha}^{(i)}\|}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)+1}} \underline{L}^{(i)} \right) dp \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad \text{Eq.3-15}$$

dove $c^{(i)}$, $r^{(i)}$ e $\chi^{(i)}$ sono funzioni scalari che dipendono dalle caratteristiche del materiale. La rappresentazione grafica della regola di incrudimento è visibile nelle Fig3-3 e 3-4. Si consideri l'incremento del backstress per i punti P' e P . Nella Fig.3-2 la i -esima parte del backstress $\underline{\alpha}^{(i)}$ è all'interno della superficie limite di raggio $r^{(i)}$. Questo equivale ad affermare che se l'esponente $\chi^{(i)}$ del termine non lineare nell'equazione 3-9 è approssimativamente zero, allora il backstress $\underline{\alpha}^{(i)}$ è all'interno della superficie limite, ossia:

$$\|\underline{\alpha}^{(i)}\| \leq r^{(i)} \quad \text{Eq.3-16}$$

Il risultato della seguente considerazione è che l'incremento della componente del backstress $\underline{\alpha}^{(i)}$ è parallela alla normale alla superficie limite, n . Questo concetto è valido sia per carichi proporzionali che per carichi non proporzionali.

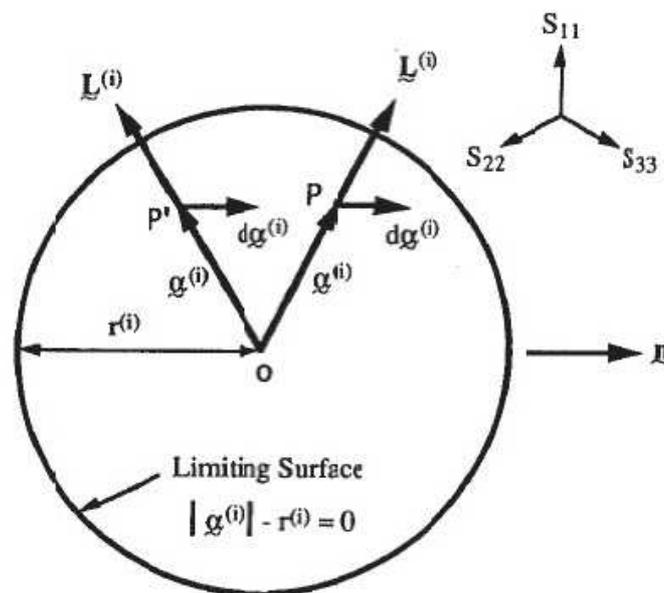


Figura 3-3 Rappresentazione grafica regola di incrudimento Jiang-Sehitoglu.

Nel caso in cui il backstress sia sulla superficie limite, il termine non lineare nell'equazione 3-15 è completamente ristabilito, cioè $\|\underline{\alpha}^{(i)}\| = r^{(i)}$. Inoltre, la direzione dell'incremento del backstress $d\underline{\alpha}^{(i)}$ non è lungo la normale alla superficie di snervamento. Questa condizione è denominata in letteratura recupero dinamico. Per carichi proporzionali, $\underline{L}^{(i)}$ è coerente con la direzione n o è opposta ad essa, cioè

$\underline{L}^{(i)} = \pm n$. Si consideri l'equazione d'incrudimento stabilita dalla regola di Ohno-Wang 3-7 e l'espressione definita da Jiang-Sehitoglu 3-15. La differenza tra le due regole è che il metodo di Ohno-Wang include il raggruppamento di MacCauley $\langle n : L(i) \rangle$. Questo termine implica che quando una parte i -esima del backstress $\underline{\alpha}^{(i)}$ è sulla superficie limite, l'incremento del backstress $d\underline{\alpha}^{(i)}$ è nella direzione tangenziale alla superficie, cioè $\underline{L}^{(i)} : \underline{n} \geq 0$, oppure è nella stessa direzione della normale alla superficie di snervamento, $\underline{L}^{(i)} : \underline{n} \leq 0$. Quando $\underline{\alpha}^{(i)}$ è all'interno della superficie limite, la traslazione della parte del backstress è nella direzione normale alla superficie di snervamento. Questo è visibile nella Fig. 3-3

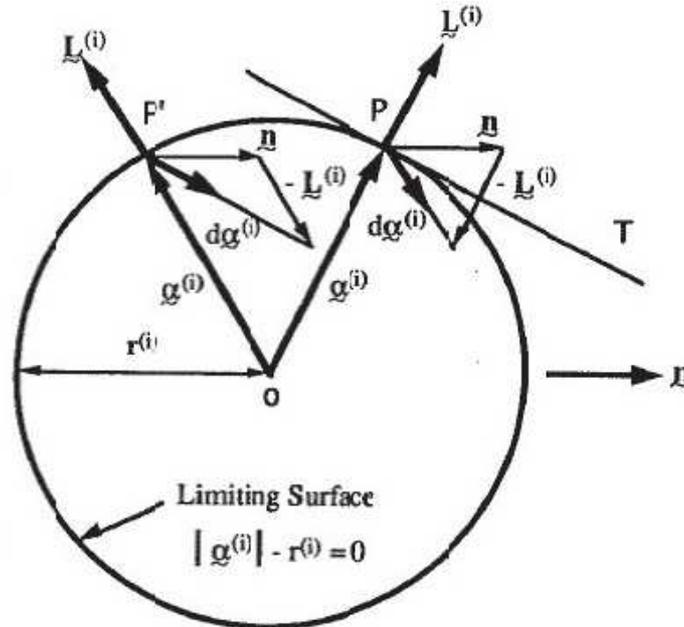


Figura 3-4 Rappresentazione grafica regola di incrudimento Jiang-Sehitoglu con il backstress sulla superficie limite.

Rispetto al metodo di Ohno-Wang, nella regola di incrudimento di Jiang-Sehitoglu, il backstress $d\underline{\alpha}^{(i)}$ forma sempre un angolo ottuso con $\underline{\alpha}^{(i)}$ nel caso di carichi non proporzionali e quando il backstress è sulla superficie limite. Comunque nel caso di carichi proporzionali, le due regole di incrudimento non differiscono molto nella previsione della deformazione, specialmente quando $\chi^{(i)}$ assume valori elevati. Per i carichi non proporzionali invece, il termine $\chi^{(i)}$ diventa fondamentale per la descrizione del fenomeno. Si può notare che quando $\chi^{(i)} = 0$, dalla nuova regola di incrudimento è

possibile ricavare l'equazione originale di Chaboche, equazione 2-32, ponendo $W^{(i)}=1$. Il modello di Chaboche, infatti, ha l'abilità di prevedere ratchetting costante sia per carichi proporzionali che per carichi non proporzionali. La nuova regola di incrudimento ha lo scopo di superare l'incapacità del modello di Ohno-Wang nella previsione del ratchetting per carichi non proporzionali. Attraverso la presenza di termini $\chi^{(i)}$ non nulli, la nuova regola di incrudimento è in grado di modellare materiali che mostrano una diminuzione del ratchetting all'aumentare dei cicli di carico.

Il modulo di deformazione plastica corrispondente alla nuova regola di incrudimento è:

$$h = \sum_{i=1}^M c^{(i)} r^{(i)} \left(1 - \left(\frac{\|\underline{\alpha}^{(i)}\|}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)+1}} \underline{L}^{(i)} : \underline{n} \right) + \sqrt{2} \frac{dk}{dp} \quad \text{Eq.3-17}$$

dove il primo termine rappresenta il cambiamento del modulo plastico in funzione del backstress, mentre il secondo addendo è il contributo alla funzione del modulo plastico dovuto all'incrudimento isotropo.

3.4 SUPERFICIE DI MEMORIA

Negli studi effettuati da Jiang (1994) [12] e Jiang-Sehitoglu (1996)[13], è stata introdotta una superficie di memoria nel piano deviatorico delle tensioni per migliorare la previsione nel comportamento transitorio del materiale. Lo scopo di una superficie di memoria è quello di considerare il comportamento ciclico del materiale che non è né funzione della storia di carico, né funzione di una variabile interna come il backstress. Infatti, quando viene variato il valore del carico, potrebbe verificarsi un momentaneo cambiamento nella risposta tensione-deformazione. Questo cambiamento potrebbe portare a un incremento o ad una diminuzione del ratchetting. Attraverso il concetto di superficie di memoria è possibile quantificare la variazione della tensione e della deformazione nel transitorio. Inoltre, la superficie di memoria è stata introdotta nello spazio delle tensioni per memorizzare il backstress massimo della storia di carico precedente.

La superficie di memoria è stata sviluppata da numerosi altri autori come Chaboche et al. [17] e (1979) [24], Ohno-Wang [21] e [22] e McDowell (1985) [23]. Le differenze tra i numerosi concetti delle superfici di memoria esistenti in letteratura, si trovano nella scelta:

- dello spazio tensione o deformazione in cui è definita la superficie;
- dell'intervallo oppure del valore massimo utilizzato per misurare l'effetto memoria;
- nell'esistenza o meno del termine di recupero.

Nei modelli di Chaboche e Ohno-Wang, la superficie di memoria è definita nello spazio delle deformazioni plastiche e gli autori utilizzarono l'intervallo di deformazione come misura della storia di carico precedente. Una rappresentazione grafica è visibile nella figura sottostante:

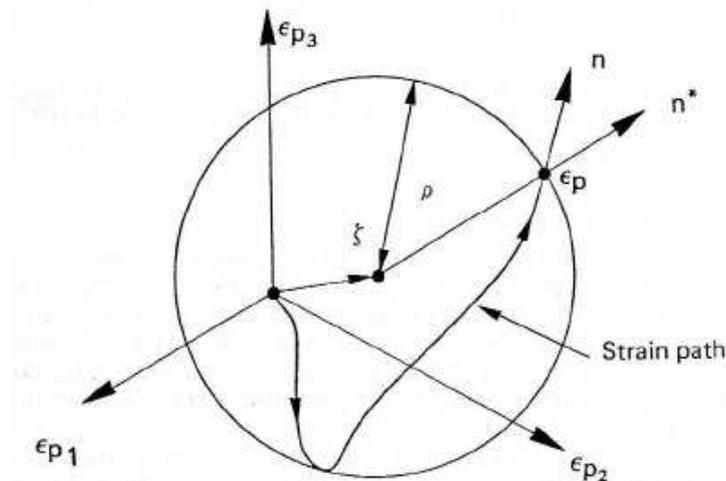


Figura 3-5 Superficie di memoria nello spazio delle deformazioni plastiche.

Attraverso il concetto della superficie di memoria, si introduce nella regola di incrudimento una nuova variabile interna che memorizza l'intervallo massimo di deformazione plastica. La superficie di memoria è stata denominata da Ohno (1982) [25] come la regione ciclica di non incrudimento. In entrambi i modelli non viene considerato il termine di recupero. Nel modello di McDowell [23] invece, l'autore incorporò un termine di recupero nell'evoluzione dell'equazione della superficie nello

spazio delle deformazioni, utilizzando l'intervallo di deformazione come parametro per misurare l'effetto memoria. In letteratura, esistono numerosi altri modelli in cui la superficie di memoria è definita nello spazio delle tensioni. Comunque, dopo aver analizzato i vari modelli esistenti, Jiang (1994) [12] ritiene che la tensione massima è il parametro più appropriato per caratterizzare la superficie di memoria. Nella superficie di memoria definita da Jiang infatti, viene utilizzato il massimo backstress $\|\underline{\alpha}\|$, per definire il raggio della superficie di memoria. È utilizzata una funzione scalare g per rappresentare questa superficie:

$$g = \|\underline{\alpha}\| - R_M \leq 0 \quad \text{Eq.3-18}$$

dove $\|\underline{\alpha}\|$ è l'intensità del backstress totale $\underline{\alpha}$, H è la funzione a gradino definita nell'equazione 3-3 e R_M è il raggio della superficie di memoria. L'evoluzione della variabile risulta:

$$d R_M = H(g) \langle \underline{L} : d\underline{\alpha} \rangle - c_M \left\langle 1 - \frac{\|\underline{\alpha}\|}{R_M} \right\rangle dp \quad \text{Eq.3-19}$$

La quantità tensoriale \underline{L} è definita in funzione del backstress totale:

$$\underline{L} = \frac{\underline{\alpha}}{\|\underline{\alpha}\|} \quad \text{Eq.3-20}$$

Inizialmente R_M è posto uguale a zero. Nelle analisi numeriche invece, per evitare problemi di convergenza causati da condizioni iniziali errate, il raggio della superficie di memoria è considerato un numero piccolo ma finito. Nella Fig.3-6 è visibile una rappresentazione dell'espansione della superficie di memoria.

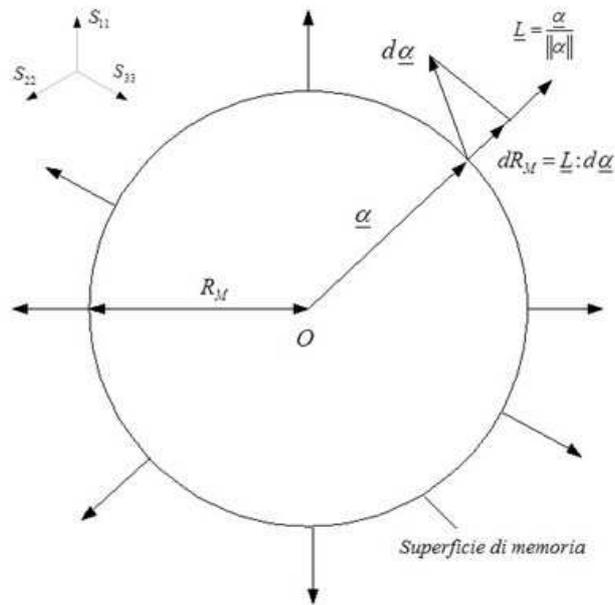


Figura 3-6 Meccanismo di espansione della superficie limite.

Quando il backstress totale $\underline{\alpha}$ è sulla superficie di memoria e si sta muovendo verso l'esterno, la superficie si espande coerentemente con la condizione espressa dall'equazione 3-17, ossia $g = 0$. L'incremento del raggio della superficie è funzione dell'incremento del backstress come stabilito nella equazione 3-18.

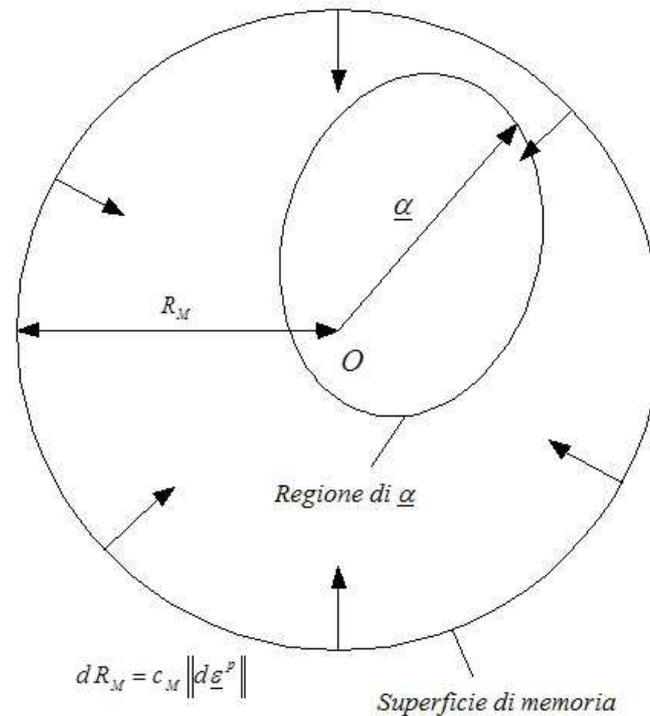


Figura 3-7 Contrazione superficie memoria.

Come visibile nella Fig.3-7, quando il backstress si muove all'interno della superficie di memoria, essa può contrarsi se c_M è maggiore di zero con una deformazione plastica sequenziale. La riduzione della superficie di memoria, è espressa in modo equivalente dalle seguenti formule:

$$d R_M = -c_M \left\langle 1 - \frac{|\underline{\alpha}|}{R_M} \right\rangle dp \quad \text{Eq.3-21}$$

$$d R_M = c_M \left\| d\underline{\varepsilon}^p \right\| \quad \text{Eq.3-22}$$

La superficie di memoria ha quindi l'abilità di rispecchiare risultati sperimentali dove l'effetto memoria di eventi precedenti diminuisce con l'aumentare dei cicli.

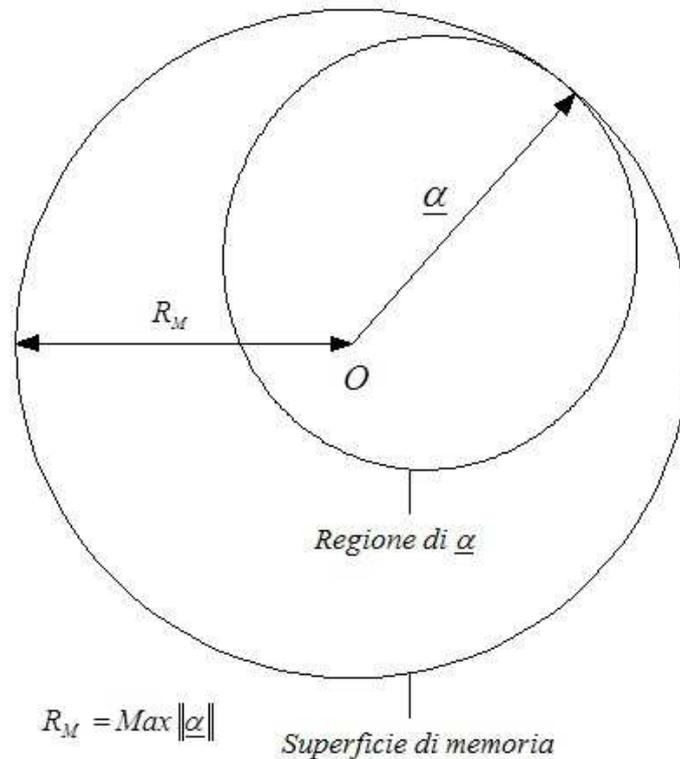


Figura 3-8 Superficie di memoria stabilizzata

Nella Fig.3-8 è presente la descrizione della superficie di memoria stabilizzata. Il raggio della superficie è il massimo valore del backstress $\|\underline{\alpha}\|$, ottenuto dalla storia di carico per la quale il materiale si stabilizza. Geometricamente questo implica che la superficie di memoria e la regione degli $\underline{\alpha}$ sono tangenti in un punto. Il valore attuale di R_m riflette

fortemente la storia di carico recente rispetto all'intera storia di carico che ha subito il materiale.

3.5 INCRUDIMENTO/ADDOLCIMENTO CICLICO

All'aumentare del numero dei cicli il materiale può assumere due comportamenti differenti. Se la risposta del materiale in termini di tensione aumenta allora si parla di incrudimento ciclico, altrimenti si verifica il fenomeno dell'addolcimento ciclico.

L'incrudimento ciclico, ossia l'aumento della tensione all'aumentare del numero dei cicli, può essere considerato dai coefficienti $c^{(i)}$ presenti nella relazione 3-15. Questi coefficienti si possono esprimere in funzione della deformazione plastica accumulata:

$$c^{(i)} = c_0^{(i)} \left(1 + a_1^{(i)} e^{-b_1^{(i)} p} + a_2^{(i)} e^{-b_2^{(i)} p} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad \text{Eq.3-23}$$

dove $c_0^{(i)}$, $a_1^{(i)}$, $a_2^{(i)}$, $b_1^{(i)}$ e $b_2^{(i)}$ sono costanti del materiale. Se il materiale presenta incrudimento o addolcimento monotono, sono necessari solo due termini nell'equazione 3-23. Invece, nel caso in cui il comportamento del materiale sia misto incrudimento/addolcimento, sono necessari tutti i termini per una corretta descrizione del fenomeno.

In una modifica della regola di incrudimento di Ohno-Wang, McDowell (1992) [26] suggerisce che l'incrudimento ciclico è considerato attraverso i coefficienti $r^{(i)}$, i quali sono funzioni della deformazione plastica accumulata. In questo caso, c'è la possibilità per il backstress $\underline{\alpha}^{(i)}$ di uscire dalla superficie limite violando l'ipotesi 2 stabilita nel paragrafo 3.2.1. Il seguente fenomeno può portare ad un cambiamento qualitativo nella traslazione del backstress. Al fine di descrivere questa possibilità, si consideri una prova monoassiale tensione-compressione. Si assumi che il materiale sia sottoposto ad una deformazione elasto-plastica e il backstress $\underline{\alpha}^{(i)}$ sia saturo, ossia si trovi sulla superficie limite di raggio $r^{(i)}$. In accordo sia con il modello di Ohno-Wang che con la regola di incrudimento di Jiang-Sehitoglu, la parte del backstress $\underline{\alpha}^{(i)}$ dovrebbe stare sulla superficie limite purché il carico monoassiale sia mantenuto nella stessa direzione. Inoltre, si consideri che in funzione della deformazione plastica, la superficie limite può

contrarsi quando viene simulato l'addolcimento ciclico. La contrazione della superficie limite, quando il backstress $\underline{\alpha}^{(i)}$ è saturo, comporta un $\underline{\alpha}^{(i)}$ uscente dalla superficie, se non sono considerate ulteriori condizioni al contorno. Per eliminare questa possibile incoerenza, si preferisce utilizzare il coefficiente $c^{(i)}$ nella modellazione dell'incrudimento e dell'addolcimento ciclico.

3.6 EFFETTO DEI CARICHI NONPROPORZIONALI E DEL LIVELLO DI TENSIONE SUL RATCHETTING

I carichi non proporzionali hanno un effetto molto evidente sull'evoluzione del backstress. Inoltre, il ratchetting dipende esplicitamente dal recupero dinamico realizzato alla tensione massima. Se il livello di tensione e la non proporzionalità dei carichi hanno effetti sul ratchetting, allora è plausibile una modifica dei coefficienti $\chi^{(i)}$. Al fine di considerare il contributo dei carichi non proporzionali sul ratchetting, la quantità $n:\underline{L}^{(i)}$ è incorporata nella formula che definisce $\chi^{(i)}$:

$$\chi^{(i)} = \chi_0^{(i)} \left(2 - n:\underline{L}^{(i)} \right) \quad (i=1, 2, \dots, M) \quad \text{Eq.3-24}$$

dove $c_0^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, M$) sono costanti determinate per un dato livello di tensione. Il valore di $\chi_0^{(i)}$ può essere ulteriormente relazionato alla dimensione della superficie di memoria R_m , per considerare l'effetto del livello di tensione nel ratchetting. La seguente relazione è usata per modellare questa caratteristica è la seguente:

$$\chi_0^{(i)} = Q^{(i)} \left(1 + a_x e^{b_x R_m} \right) \quad (i=1, 2, \dots, M) \quad \text{Eq.3-25}$$

dove $Q^{(i)}$ varia da 1 ad M e a_x e b_x sono costanti. Combinando l'equazione 3-24 con l'equazione 3-23 si ottiene che:

$$\chi^{(i)} = Q^{(i)} \left(1 + a_x e^{b_x R_m} \right) \left(2 - n:\underline{L}^{(i)} \right) \quad (i=1, 2, \dots, M) \quad \text{Eq.3-26}$$

Dato che $n:\underline{L}^{(i)}$ può essere interpretata come una misura della non proporzionalità, il termine $(2-n:\underline{L}^{(i)})$ considera l'effetto della non proporzionalità nel ratchetting. L'equazione 3-26 implica che gli esponenti $\chi^{(i)}$ sono più elevati se il carico non è proporzionale. Infatti, il termine $(1+a_x e^{b_x R_m})$ nell'equazione 3-26 valuta l'effetto del livello di tensione. Per tensioni elevate, la superficie di memoria si allarga causando un valore di $\chi^{(i)}$ elevato, e questo comporta una previsione del ratchetting minore rispetto alla previsione effettuata se $\chi^{(i)}$ fosse costante. Pertanto, la previsione del ratchetting è quantitativamente inferiore se $\chi^{(i)}$ non è una costante.

3.7 CONCLUSIONI E ULTERIORI OSSERVAZIONI

Il modello elasto-plastico di Jiang-Sehitoglu è stato ideato dagli autori prendendo come riferimento la teoria plastica incrementale, che include superficie di snervamento, traslazione della superficie di snervamento e regola di flusso. Inoltre, dalla regola di incrudimento di Armstrong-Frederick, è stato generalizzato il concetto della superficie limite per il backstress, che è stata utilizzata per lo sviluppo del nuovo modello. Il nuovo modello sviluppato dagli autori, consente una migliore descrizione del ratchetting ciclico.

Di fondamentale importanza, nella caratterizzazione della non proporzionalità sul ratchetting, è il parametro $n:\underline{L}^{(i)}$. Per carichi proporzionali il termine $n:\underline{L}^{(i)}$ è unitario, mentre per carichi non proporzionali è minore di uno. A causa di questa differenza, la superficie di snervamento trasla in maniera diversa, per effetto di un differente incremento del backstress.

L'ampiezza della superficie di memoria è utilizzata per valutare il livello della tensione sia nel ratchetting che nel comportamento non-Masing. I comportamenti ciclici transitori sono considerati nella regola d'incrudimento attraverso le costanti del materiale. L'incrudimento ciclico è calcolato mediante i coefficienti $c^{(i)}$, che sono funzioni esponenziali della deformazione plastica accumulata. I coefficienti $r^{(i)}$ rappresentano il raggio della superficie limite e sono assunti costanti indipendentemente dal carico applicato. I parametri esponenziali $\chi^{(i)}$ possono essere ulteriormente considerati come funzioni dello stato di tensione al fine di valutare il comportamento ciclico transitorio. Questi coefficienti sono relativi alla dimensione della superficie di memoria per caratterizzare l'effetto del livello di tensione. Il comportamento non-

Masing è considerato attraverso la funzione di snervamento che dipende dalla dimensione della superficie di memoria. La maggiore differenza tra il modello sviluppato da Jiang-Sehitoglu e quello proposto da Ohno-Wang si trova nell'abilità del nuovo modello di prevedere ratchetting costante per carichi non proporzionali. Il modello di Jiang-Sehitoglu quindi, migliora sensibilmente la previsione del comportamento del materiale sottoposto sia a carichi proporzionali che non proporzionali.

Capitolo 4

DETERMINAZIONE DELLE COSTANTI DEL MATERIALE DEL MODELLO DI JIANG-SEHITOGLU

Nel seguente capitolo, in base agli studi effettuati da Jiang(1994) [12], Jiang Sehitoglu(1996) [27] e Jiang Kurath (1996) [28], viene descritta la procedura ottimale utilizzata per calcolare le costanti del materiale, presenti nell’algoritmo del metodo elasto-plastico definito nel capitolo 3. Il modello plastico di Jiang-Sehitoglu coinvolge molte costanti, la cui numerosità dipende dal numero di divisioni del backstress, ed è indispensabile che siano facilmente calcolabili attraverso una semplice procedura di interpolazione dei dati sperimentali. In letteratura comunque, sono presenti due diverse metodologie per il calcolo dei coefficienti. I due metodi verranno entrambi descritti. La curva utilizzata nell’interpolazione fa riferimento alla curva ciclica stabilizzata del materiale oppure ad una funzione logaritmica. L’introduzione del concetto della superficie limite per il backstress facilita la determinazione delle costanti. Inoltre, sulla base degli studi pubblicati da Jiang Kurath (1996) [29], si cercherà di identificare una scelta ottimale dei seguenti parametri:

- la tensione di snervamento definita dal parametro k o σ_y ;
- l’esponente del ratchetting $\chi^{(i)}$;
- il numero dei termini M in cui viene diviso il backstress;
- il valore ottimale della tensione σ_{max} o della deformazione massima.

Si confronteranno infine le costanti del materiale presenti in letteratura con il metodo utilizzato per la determinazione delle stesse, facendo quindi chiarezza sulla procedura e sulla curva del materiale utilizzata nell’analisi.

4.1 CURVA TENSIONE COMPRESSIONE MONOASSIALE

Come descritto nel lavoro di Jiang (1994) [12], si consideri una prova monoassiale tensione compressione dove $\sigma = \sigma_{11}$ ed $\varepsilon_p = \varepsilon_p^{11}$ rappresentano rispettivamente la tensione e la deformazione plastica assiale. Considerando il problema monodimensionale, è possibile effettuare le seguenti semplificazioni:

$$\|\underline{\alpha}^{(i)}\| = \sqrt{\frac{3}{2}} |\alpha_{11}^{(i)}| \quad \text{Eq.4-1}$$

$$L_{11}^{(i)} = \frac{\alpha_{11}^{(i)}}{\|\underline{\alpha}^{(i)}\|} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{Eq.4-2}$$

$$n_{11} = \frac{S_{11} - \alpha_{11}}{\|S - \alpha\|} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{Eq.4-3}$$

Al fine di determinare le costanti del materiale, si ipotizza che la curva inizi dallo stato di compressione dove tutte le componenti del backstress sono sature. Con queste condizioni iniziali, l'equazione 2-25 si considera nella seguente forma:

$$dp = \sqrt{\frac{3}{2}} d(\Delta\varepsilon^p) \quad \text{Eq.4-4}$$

dove $\Delta\varepsilon^p$ è l'intervallo di deformazione plastica assiale misurato con riferimento allo stato di compressione limite. La regola di incrudimento, (equazione 3-15) può essere semplificata per il problema monodimensionale nel seguente modo:

$$d \left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \alpha_{11}^{(i)}}{r^{(i)}} \right) = \left[1 - \left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} |\alpha_{11}^{(i)}|}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)}} \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} |\alpha_{11}^{(i)}|}{r^{(i)}} \right] d(c^{(i)} \Delta \varepsilon^p) \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad \text{Eq.4-5}$$

(117)

L'equazione 4-5 rappresenta un'equazione differenziale dove $\Delta \varepsilon^p$, cioè l'intervallo di deformazione plastica, è l'unica variabile indipendente e $\alpha_{11}^{(i)}$ con i che varia da 1 ad M , è funzione di $\Delta \varepsilon^p$, come definito nell'equazione 3-15.

4.2 DETERMINAZIONE DEI COEFFICIENTI $\chi^{(i)}$

Attraverso le semplificazioni introdotte nel paragrafo 4.1, si può determinare il valore dei coefficienti $\chi^{(i)}$. Si analizzi l'equazione 4-5 e si eseguono le seguenti sostituzioni per semplificare la trattazione:

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}} c^{(i)} \Delta \varepsilon^p ; \quad y = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \alpha_{11}^{(i)}}{r^{(i)}} ; \quad m = \chi^{(i)} \quad \text{Eq.4-6}$$

Sfruttando le semplificazioni definite in 4-6, l'equazione differenziale 4-5 diventa:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - |y|^m y \quad \text{Eq.4-7}$$

Le condizioni iniziali, per la risoluzione dell'equazione differenziale, sono determinate dal fatto che il carico inizia alla tensione di compressione più elevata, dove tutto il backstress è considerato saturo in quella direzione:

$$\alpha_{11}^{(i)} = -\sqrt{\frac{2}{3}} r^{(i)} \quad \text{quando} \quad \Delta \varepsilon^p = 0 \quad \text{Eq.4-8}$$

che corrisponde alla seguente semplificazione nell'equazione 4-6 e 4-7:

$$y|_{x=0} = -1 \quad \text{Eq.4-9}$$

L'equazione differenziale 4-7 può essere risolta impiegando la condizione iniziale definita in 4-9. Il metodo di risoluzione numerica utilizzato è il metodo di integrazione Gaussiana. Tramite l'applicazione della tecnica di integrazione appena citata, si trovano rispettivamente tre possibili risultati, cioè $m = 0$, $m = 2$ ed $m = \infty$. Nella figura sottostante è visibile l'andamento delle soluzioni dell'equazione differenziale.

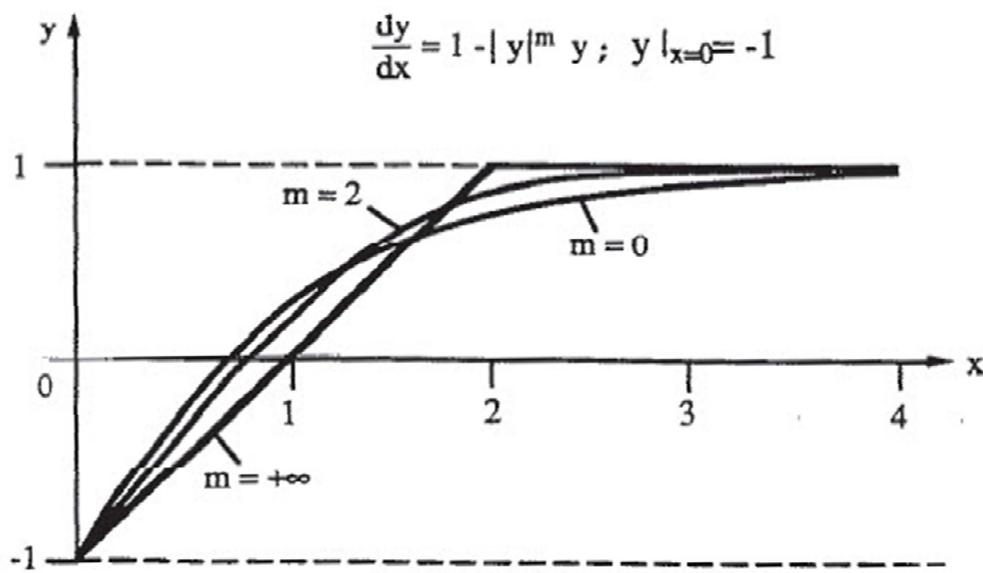


Figura 4-1 Soluzioni numeriche dell'equazione differenziale

Si può notare dal diagramma che tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono curve asintotiche a $y = 1$. Le successive analisi numeriche hanno verificato che questa curva asintotica è valida per le seguenti condizioni iniziali:

$$1 \geq y|_{x=0} \geq -1 \quad \text{Eq.4-10}$$

Dato che $\|\underline{\alpha}^{(i)}\| = -\sqrt{\frac{3}{2}}|\alpha_{11}^{(i)}|$ nel caso di tensione compressione monoassiale, la curva asintotica rappresenta una superficie limite per il problema monodimensionale.

L'andamento delle curve presenti nella Fig.4-1, indicano che le soluzioni dell'equazione differenziale non hanno una forte dipendenza dall'esponente m . Quando l'esponente m è più elevato di un certo valore, la relazione tra le variabili x e y è approssimativamente bilineare. Ne consegue che $y = 1$ quando $x = 2$.

Utilizzando questo risultato con le formule 4-6, si ottiene che:

$$\alpha_{11}^{(i)} = \sqrt{\frac{2}{3}} r^{(i)} \quad \text{quando} \quad \sqrt{\frac{2}{3}} c^{(i)} \Delta \varepsilon^p = 2 \quad (i=1,2,\dots,M) \quad \text{Eq.4-11}$$

Se si sostituisce l'espressione 4-11 all'interno dell'equazione 4-1 si ricava il seguente risultato:

$$\frac{\|\underline{\alpha}^{(i)}\|}{r^{(i)}} = 1 \quad \text{quando} \quad \sqrt{\frac{2}{3}} c^{(i)} \Delta \varepsilon^p = 2 \quad (i=1,2,\dots,M) \quad \text{Eq.4-12}$$

dove $\Delta \varepsilon^p$ è l'intervallo di deformazione plastica nel quale l' i -esima parte del backstress $\underline{\alpha}^{(i)}$ è satura. Coinvolgendo il concetto di superficie limite, è stata formulata una relazione speciale tra $c^{(i)}$ e $\Delta \varepsilon^p$ che sarà di vitale importanza nella determinazione delle due costanti del materiale.

4.3 DETERMINAZIONE DELLE COSTANTI $c^{(i)}$ E $r^{(i)}$

Nel seguente paragrafo, in relazione agli studi presenti in letteratura svolti da Jiang(1994) [12] e Jiang-Sehitoglu(1996) [27], vengono descritte le due differenti procedure utilizzate per la determinazione delle costanti del materiale. I due metodi utilizzati si basano sulla determinazione di una costante assumendo fissa l'altra:

- determinazione di $r^{(i)}$ se la costante $c^{(i)}$ è ipotizzata;
- determinazione di $c^{(i)}$ se la costante $r^{(i)}$ è ipotizzata.

Nel calcolo delle costanti sono assunte diverse ipotesi necessarie a semplificare la procedura:

- non è considerato il comportamento transitorio del materiale e quindi viene utilizzata la curva ciclica stabilizzata;
- $c^{(i)}$ e k (tensione di snervamento) sono ipotizzati costanti anche se dovrebbero essere funzione del comportamento transitorio del materiale;
- le M costanti $\chi^{(i)}$ sono assunte infinitamente elevate.

Vengono ora brevemente analizzate le implicazioni dell'ultima ipotesi descritta. In primo luogo, $\chi^{(i)}$ influenza notevolmente il calcolo del ratchetting, che però non viene considerato nel calcolo delle costanti $c^{(i)}$ e $r^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, M$). Un altro effetto di questa ipotesi è che viene linearizzata la curva monoassiale tensione-deformazione utilizzata nel calcolo delle costanti. La trattazione prevede infatti che la curva stabilizzata sia divisa in parti in M parti, effettuando una multilinearizzazione della stessa. Suddividendo la curva in M porzioni, si ottengono M coppie di punti (σ, ϵ_p) che sono utilizzate per calcolare i coefficienti del materiale mediante il metodo esposto nei paragrafi successivi.

Utilizzando le ipotesi riportate sopra, è possibile determinare una soluzione dell'equazione differenziale 4-5:

$$\left(\frac{\|\underline{\alpha}^{(i)}\|}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)}+1} = 0 \quad \text{quando} \quad \|\underline{\alpha}^{(i)}\| < r^{(i)} \quad \text{Eq.4-13}$$

Essendo la norma del tensore i -esimo del backstress inferiore al raggio della superficie limite, l'equazione 4-13 stabilisce che non è presente l'effetto memoria. Invece, nel caso in cui:

$$\left(\frac{\|\underline{\alpha}^{(i)}\|}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)}+1} = 1 \quad \text{quando} \quad \|\underline{\alpha}^{(i)}\| = r^{(i)} \quad \text{Eq.4-14}$$

è presente effetto memoria nel materiale. Se $\|\underline{\alpha}^{(i)}\| = r^{(i)}$ allora la i -esima parte del backstress $\underline{\alpha}^{(i)}$ è satura. Si utilizzino le equazioni 4-13 e 4-14 con l'equazione 3-16. La funzione del modulo plastico si può esprimere utilizzando l'espressione 4-15 in cui le componenti backstress da $j=1$ a $i-1$ sono sature.

$$h_{(i)} = \sum_{j=1}^M c^{(j)} r^{(j)} \quad \text{Eq.4-15}$$

Lo scalare $h_{(i)}$ è il valore della funzione del modulo plastico nell'intervallo corrispondente dal punto i al punto $i+1$. Nella figura sottostante è visibile la procedura grafica per la determinazione delle costanti. Il metodo sarà ampiamente trattato nel paragrafo successivo.

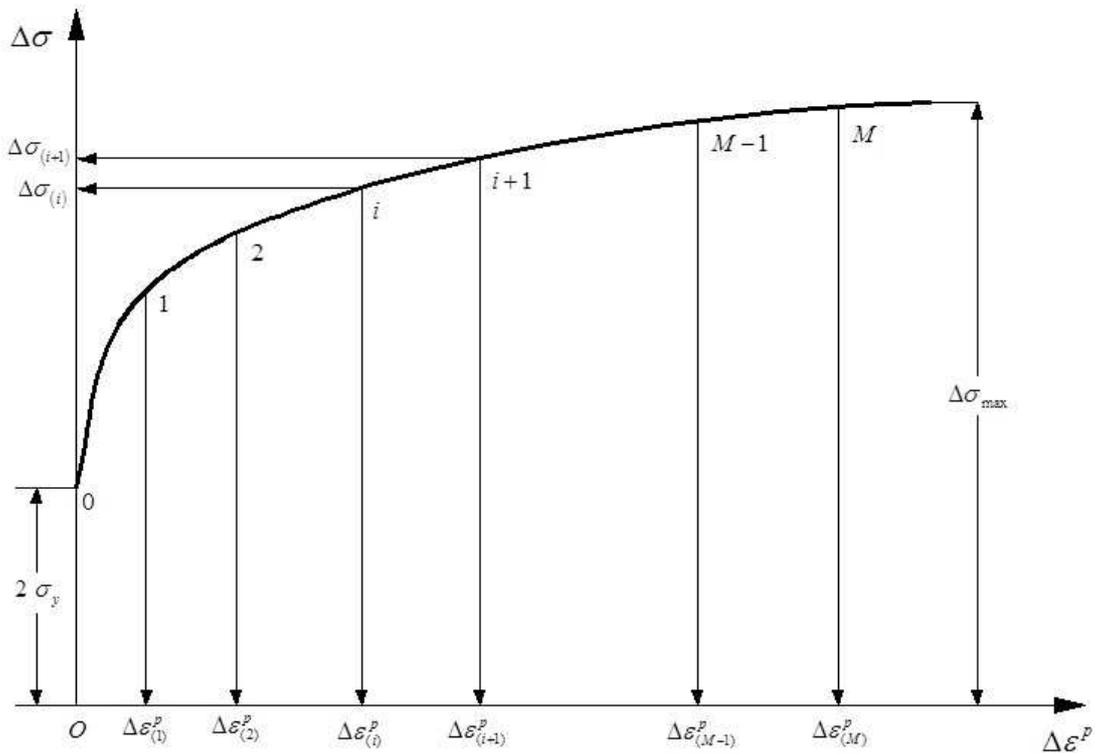


Figura 4-2 Procedura per la determinazione delle costanti r, c dalla curva di tensione monoassiale

Se $\Delta\varepsilon_{(i)}^p$ definisce l'intervallo di deformazione plastica nel quale la i -esima parte del backstress $\underline{\alpha}^{(i)}$ è satura, allora in relazione all'equazione 4-11 si può scrivere che:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} c^{(i)} \Delta \varepsilon^p = 2 \quad (i=1,2,\dots,M) \quad \text{Eq.4-16}$$

Le equazioni 4-15 e 4-16 stabiliscono la base del frame analitico utilizzato per la determinazione delle costanti del materiale $c^{(i)}$ e $r^{(i)}$. Sono comunque necessarie delle altre equazioni per calcolare le costanti.

Di seguito si descrivono le due differenti procedure stabilite da Jiang(1994) [12], Jiang Sehitoglu(1996) [27].

4.3.1 Determinazione di $r^{(i)}$ se $c^{(i)}$ è ipotizzato

L'ipotesi alla base della procedura è che il comportamento transitorio del materiale come l'incrudimento ciclico venga ignorato. Questa ipotesi nega qualsiasi relazione tra il coefficiente $c^{(i)}$ e la storia di carico applicata. Inoltre, viene introdotta una semplificazione nel metodo per il calcolo delle costanti $r^{(i)}$.

Il procedimento consiste nella selezione di M punti nella curva monoassiale tensione-deformazione plastica visibile nella Fig.4-2. In questo modo sono note, per ogni punto i -esimo considerato, le coppie $\Delta \sigma_{(i)} - \Delta \varepsilon^p_{(i)}$. L'intervallo di deformazione plastica $\Delta \varepsilon^p_{(i)}$ è il valore nel quale l' i -esima parte del backstress $\underline{\alpha}^{(i)}$ è satura e $\Delta \sigma_{(i)}$ è l'intervallo corrispondente a $\Delta \varepsilon^p_{(i)}$. Dall'equazione 4-16 si può scrivere che:

$$c^{(i)} = 2 \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\Delta \varepsilon^p_{(i)}}; \quad c^{(i)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\varepsilon^p_{(i)}} \quad (i=1,2,\dots,M) \quad \text{Eq.4-17}$$

Nel caso di prova monoassiale la funzione del modulo plastico calcolato al punto i è calcolata secondo l'equazione 4-15. Utilizzando sempre l'equazione 4-15 e l'equazione 4-17 è possibile definire l'equazione del raggio dell' i -esima superficie limite:

$$r^{(i)} = \frac{2}{3} \frac{H_{(i)} - H_{(i+1)}}{c^{(i)}} \quad (i=1,2,\dots,M) \quad \text{Eq.4-18}$$

dove

$$H_{(i)} = \frac{\Delta\sigma_{(i)} - \Delta\sigma_{(i+1)}}{\Delta\varepsilon^p_{(i)} - \Delta\varepsilon^p_{(i-1)}} \quad (i=1,2,\dots,M) \quad \text{Eq.4-19}$$

$$\Delta\sigma_{(0)} = 2\sigma_y = 2\sqrt{3}k \quad \text{Eq.4-20}$$

Le condizioni iniziali nell'utilizzo del metodo sono le seguenti:

$$\Delta\varepsilon^p_{(0)} = 0 \quad \text{e} \quad H_{(M+1)} = 0 \quad \text{Eq.4-21}$$

La σ_y è la tensione di snervamento e corrisponde a metà della parte elastica in Fig.4-2, mentre k è la tensione di snervamento in taglio semplice ed è calcolata nel caso di carico monoassiale attraverso il criterio di von Mises. Il massimo intervallo di tensione $\Delta\sigma_{(M)}$ soddisfa la seguente condizione:

$$\Delta\sigma_{(M)} = 2\sqrt{\frac{3}{2} \sum_{i=1}^M r^{(i)}} + 2\sqrt{3}k \quad \text{Eq.4-22}$$

dove la $\Delta\sigma_{(M)}$ è l'intervallo di tensione massima che il modello intende simulare. La procedura, definita dalle equazioni 4-17 fino alla 4-19 è ripetuta finché non si giunge alla determinazione di tutte le costanti del materiale, ossia $c^{(i)}$ e $r^{(i)}$ con $i = 1, 2, \dots, M$.

Le condizioni rispetto alle quali è stato ricavato il modello sono le seguenti:

- l'incrudimento ciclico è calcolato attraverso i coefficienti $c^{(i)}$ considerati funzione della deformazione plastica accumulata;
- il raggio della superficie limite $r^{(i)}$ è ipotizzato costante.

La procedura descritta nel presente paragrafo, è facile da implementare e i valori dei coefficienti $c^{(i)}$ e $r^{(i)}$ sono ricavati direttamente dalla curva tensione-deformazione

plastica. In letteratura, esistono due possibili scelte nella funzione che descrive il comportamento del materiale:

1. l'equazione di Ramberg-Osgood che definisce l'andamento del ciclo di isteresi stabilizzato;
2. un'espressione che correla le tensioni e le deformazioni mediante una funzione logaritmica.

Si analizza l'andamento della curva definita nel punto 2. Nell'articolo di Jiang e Kurath (1996) [28] è riportata la seguente formulazione per la descrizione della curva tensione-deformazione plastica:

$$\varepsilon_a^p - a \left[\exp\left(\frac{\sigma_a}{b}\right) - 1 \right] = 0 \quad \text{Eq.4-23}$$

Ossia:

$$\sigma_a = b \ln\left(\frac{\varepsilon_a^p}{a} + 1\right) \quad \text{Eq.4-24}$$

dove a e b sono costanti del materiale ricavate mediante fitting dei dati sperimentali. L'equazione sovrastante è utilizzata quando il numero degli M termini è molto elevato, ossia quando si vuole prevedere il comportamento del materiale per un intervallo elevato di tensione. Secondo gli autori l'equazione 4-24 fornisce, su un intervallo di deformazione maggiore di deformazione plastica, una rappresentazione migliore rispetto al tradizionale approccio di Ramberg-Osgood. Questo effetto è causato dal basso valore di tensione di snervamento, tipicamente molto basso assunto per le formule plastiche. Una rappresentazione grafica della curva è visibile nella Fig.4-3. Sono stati considerati due materiali diversi, l'acciaio 1040 e il 1070.

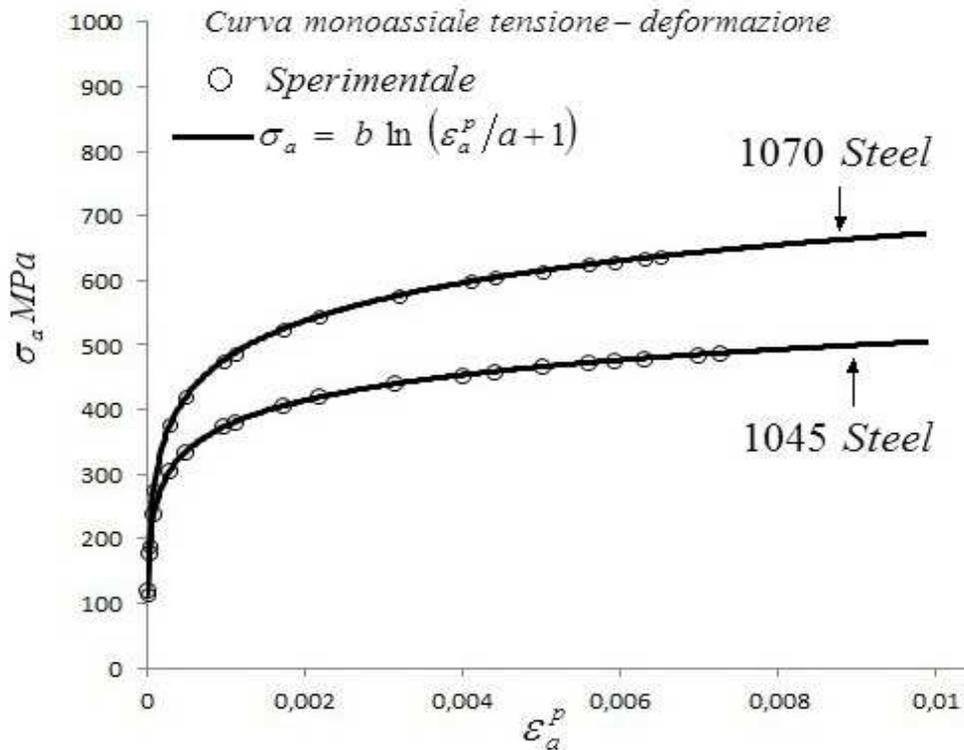


Figura 4-3 Curva monoassiale tensione-deformazione

Dividendo la seguente curva in M parti, è possibile calcolare le costanti del materiale in accordo con la procedura descritta.

4.3.2 Determinazione di $c^{(i)}$ se $r^{(i)}$ e' ipotizzato

Nel seguente paragrafo, si descrive la procedura per la determinazione delle costanti $c^{(i)}$ se il raggio della superficie limite, ossia $r^{(i)}$, è assunto costante.

Se si considera l'incrudimento ciclico, il metodo il calcolo di $c^{(i)}$ e $r^{(i)}$ è più complesso rispetto al caso precedente. Se è noto sia il massimo intervallo di tensione sia la tensione di snervamento, dall'equazione 4-22 si ricava che:

$$\sum_{i=1}^M r^{(i)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\Delta\sigma_{\max}}{2} - 2 \right) \quad \text{Eq.4-25}$$

Dopo aver calcolato la sommatoria dei coefficienti $r^{(i)}$, cioè $\sum_{i=1}^M r^{(i)}$, si possono selezionare singolarmente le costanti $r^{(i)}$, dividendo la sommatoria degli $r^{(i)}$ in M parti. Il metodo consiste nell'effettuare la ricerca per ogni punto, nell'intervallo di tensione e deformazione plastica considerato, nel quale l' i -esima parte del backstress $\alpha^{(i)}$ è satura. La procedura comincia dal punto M e prosegue in ordine decrescente fino al punto 0 . Supponendo di conoscere il coefficiente relativo al punto i -esimo, la determinazione del coefficiente al punto $i-1$ -esimo sarà ottenuto mediante la seguente formula:

$$H_{(i)} = \frac{3}{2} \sum_{j=1}^M c^{(j)} r^{(j)} \quad \text{Eq.4-26}$$

La formula 4-26 rappresenta la pendenza della segmento che congiunge i due punti. Utilizzando 4-26 si può asserire che la curva tensione deformazione è modellata come una sommatoria di segmenti lineari a tratti. L'incremento dell'intervallo della tensione, utilizzando la modellazione lineare a tratti, è descritto attraverso la seguente formula:

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma_{(i)} + H_{(i)} (\Delta\varepsilon^p - \Delta\varepsilon_{(i)}^p) \quad \text{Eq.4-27}$$

Nella Fig.4-4, si può notare che il punto $i-1$ è determinato dall'intersezione tra la curva sperimentale tensione-deformazione plastica ($\Delta\sigma = f(\Delta\varepsilon^p)$) e il segmento lineare utilizzato per la discretizzazione della curva. Determinate le coordinate al punto $i-1$, $c^{(i-1)}$ è calcolato utilizzando l'equazione 4-17 con $\Delta\varepsilon_{(i-1)}^p$ noto. La ripetizione della procedura continua fino alla completa determinazione degli M coefficienti.

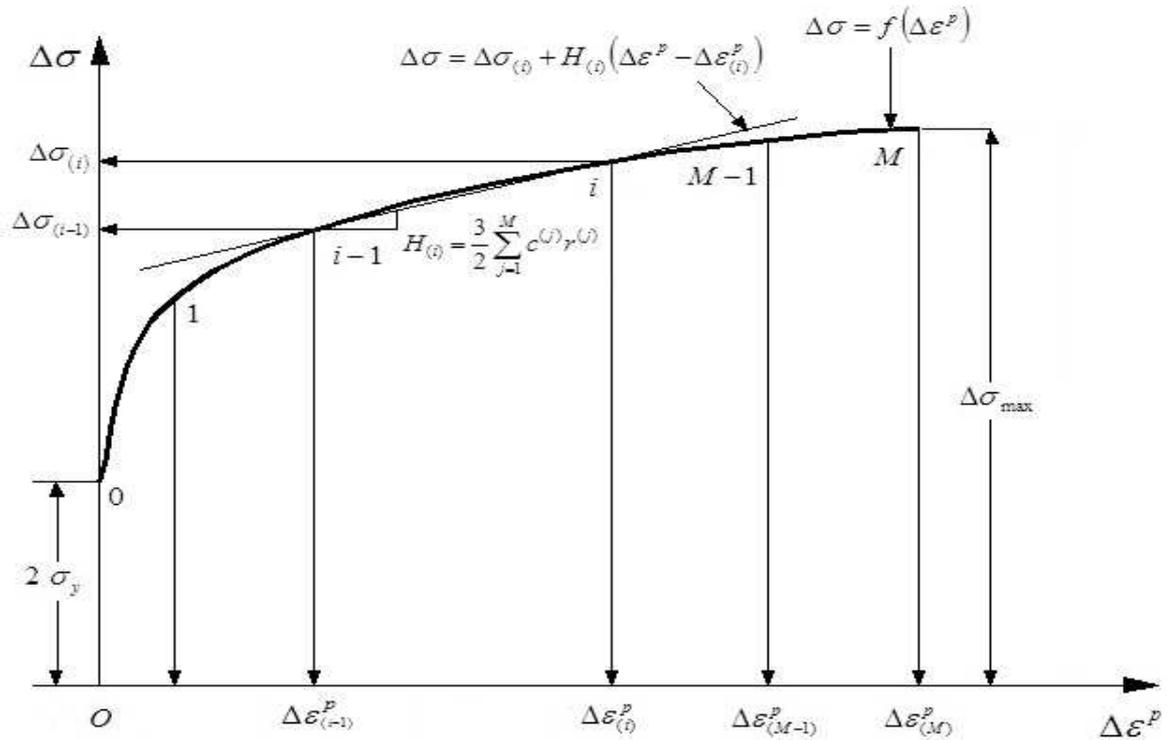


Figura 4-4 Procedura per determinare $c^{(i)}$ dalla curva monoassiale tensione-deformazione plastica con $r^{(i)}$ noto.

La procedura definita nel presente paragrafo dovrebbe essere utilizzata per determinare le costanti $c^{(i)}$ relative alle curve d'isteresi tensione-deformazione rappresentative del comportamento transitorio del materiale.

4.4 CALCOLO DELLE COSTANTI DEL MATERIALE

Utilizzando la procedura descritta nel paragrafo 4.3.2 si determinano le costanti $r^{(i)}$ e $c^{(i)}$ per i seguenti materiali: l'acciaio 1045, 16Mnr, S460N e 1070. Successivamente si effettua un confronto tra i dati calcolati e i dati presenti in letteratura. Il metodo, come descritto nel paragrafo 4.3.2, consiste nella suddivisione in M parti della curva ciclica stabilizzata tensione-deformazione plastica. Questa curva è definita dall'equazione di Ramberg-Osgood. Si devono conoscere per ogni materiale, le costanti K' e n' , le quali rappresentano rispettivamente il parametro di resistenza del materiale e il coefficiente di incrudimento ciclico.

4.4.1 Determinazione delle costanti per il materiale 1045

L'acciaio 1045 è un comune acciaio da costruzione con una bassa percentuale di carbonio. Nel lavoro di Jiang (1994)[12] sono riportate le proprietà meccaniche del materiale: la tensione di snervamento del materiale è $\sigma_y = 380 \text{ MPa}$; la tensione di rottura è $\sigma_R = 620 \text{ MPa}$.

In letteratura, sono presenti differenti articoli pubblicati da diversi autori in cui sono riportate le costanti del materiale calcolate mediante la procedura discussa nel paragrafo 4.3. I coefficienti sono riportati rispettivamente negli articoli di Kurath, Jiang, Fatemi (1999) [29] e nell'articolo di Jiang, Vormwald [30].

Nell'articolo di Kurath, Jiang, Fatemi (1999) [29], sono riportate anche le proprietà meccaniche del materiale. Gli autori dividono la curva tensione-deformazione plastica in dieci parti. Le costanti del materiale corrispondenti alla seguente suddivisione sono presenti nella tabella sottostante:

i	$c^{(i)}$	$r^{(i)}$ (MPa)	$\chi^{(i)}$
1	3265	13,8	5
2	1637	33,2	5
3	820	36	5
4	411	37,9	5
5	206	38,6	5
6	103	38	5
7	51,9	36,3	5
8	26	33,6	5
9	13	30,3	5
10	6,5	46,5	5

Tabella 4-1 Coefficienti ricavati per nel modello plastico di Jiang per l'acciaio 1045.

La tensione di snervamento in taglio semplice, k , è equivalente a 100 MPa .

Mediante l'inversione della tecnica illustrata nel paragrafo 4.3.1 e nel paragrafo 4.3.2 ed utilizzando le costanti definite nella Tab.4-1, si vuole ricavare l'andamento della curva monoassiale tensione-deformazione plastica utilizzata dagli autori. Nell'articolo infatti, non viene specificata se è stata applicata l'equazione di Ramberg-Osgood oppure la funzione logaritmica 4-24.

La procedura utilizzata è la seguente:

1. attraverso il valore delle costanti $c^{(i)}$ e la formula 4-17 è possibile ricavare il valore della deformazione plastica;
2. mediante la formula 4-22, si ricava la tensione massima considerata. Questo valore sarà il primo valore considerato nella curva tensione-deformazione plastica;
3. servendosi della formula 4-26 è possibile calcolare il valore di $H_{(i)}$, corrispondente alla pendenza della retta lineare a tratti;
4. il valore della tensione correlato alla deformazione plastica è ricavato dalla formula 4-27;
5. sono stati ricavati tutti i valori tensione-deformazione plastica associati alle costanti del materiale; i calcoli sono stati effettuati considerando le ampiezze e non gli intervalli;
6. utilizzando la formula di Ramberg-Osgood è possibile calcolare il valore della tensione associata alla deformazione plastica ricavata precedentemente;
7. con l'espressione 4-24 si ricava l'andamento della curva logaritmica tensione-deformazione plastica;
8. si confrontano le due curve e si valuta quella che ha una maggiore corrispondenza con la curva ricavata dalle costanti del materiale.

Si effettua questa procedura in quanto, le costanti del materiale dipendono fortemente dal valore di deformazione plastica utilizzato nei calcoli, ossia dal tipo di suddivisione effettuata. In questo modo è possibile attuare una piena verifica tra il valore delle costanti e la curva utilizzata per il calcolo delle stesse. Ricavata la curva utilizzata dagli autori, è possibile utilizzare la procedura descritta nel paragrafo 4.3.1 per il calcolo delle costanti anche per numerosi altri materiali.

Nel seguente grafico sono confrontate le tre curve ricavate rispettivamente dall'equazione di Ramberg-Osgood, funzione logaritmica e dalle costanti del materiale.

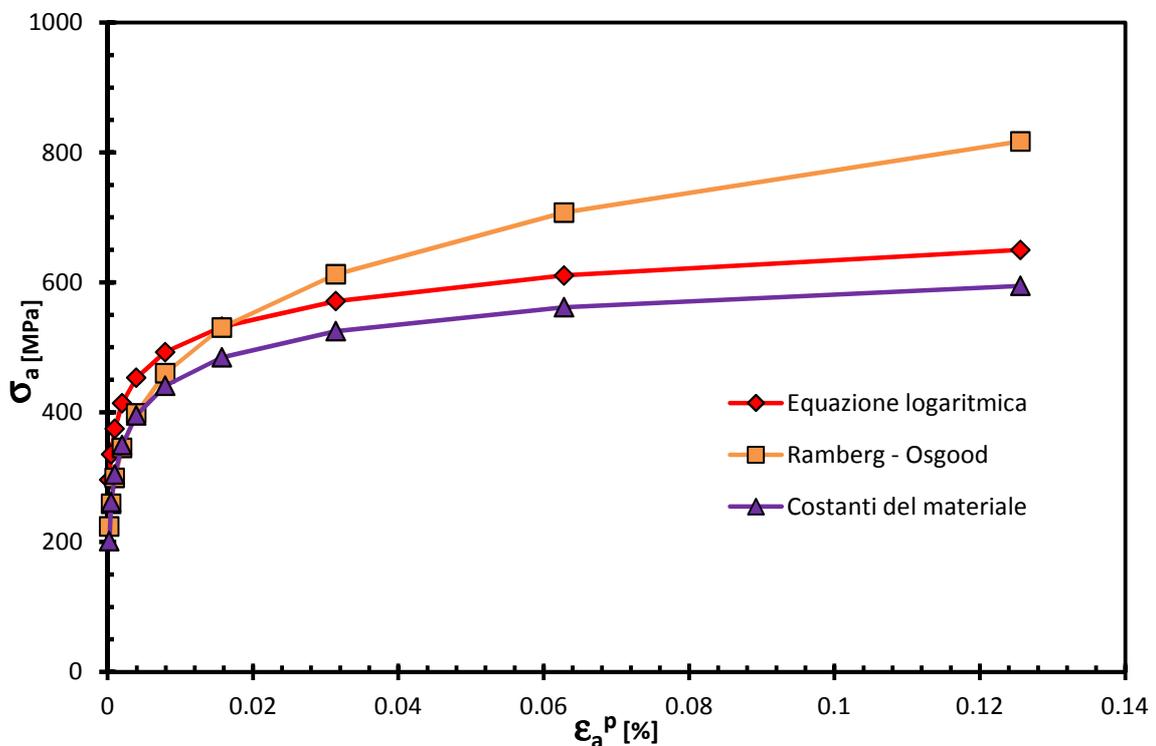


Figura 4-5 Andamento curve nel grafico σ_a - ϵ_a^p

Le costanti utilizzate nella formula 4-24 sono rispettivamente:

$$a = 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ e } b = 57 \text{ MPa}$$

I coefficienti utilizzati nell'equazione di Ramberg-Osgood sono:

$$n = 0,208 \quad \text{e} \quad K = 1258$$

Dal grafico sovrastante si nota che l'equazione di Ramberg-Osgood non interpola nel modo corretto i dati ricavati dalle costanti del materiale. Infatti, per elevati valori di deformazione plastica, l'ampiezza di tensione corrispondente è molto più elevata rispetto a quella risultante dall'interpolazione dei dati delle costanti del materiale. L'equazione logaritmica invece ha un andamento molto simile alla curva delle costanti del materiale, anche se è leggermente traslata verso l'alto. I dati riguardanti le costanti del materiale definiti nella Tab.4-1 e i coefficienti del materiale definiti sopra, riguardano due diversi articoli e una leggera differenza tra l'andamento delle due curve è più che plausibile. Si può quindi presumere che le costanti del materiale siano state ricavate utilizzando l'equazione logaritmica.

Si analizzino adesso le costanti definite nell'articolo di Jiang et al. (2009) [30].

i	$c^{(i)}$	$r^{(i)}$ (MPa)	$\chi^{(i)}$
1	2400	11,84	5
2	988,5	31,72	5
3	467,5	31,61	5
4	244,7	31,54	5
5	138,3	31,49	5
6	83	31,45	5
7	52,3	31,43	5
8	34,3	31,41	5
9	23,3	31,39	5
10	16,3	131,3	5

Tabella 4-2 Coefficienti ricavati per nel modello plastico di Jiang per l'acciaio 1045.

La tensione di snervamento in taglio semplice, k , è pari a *110 MPa*.

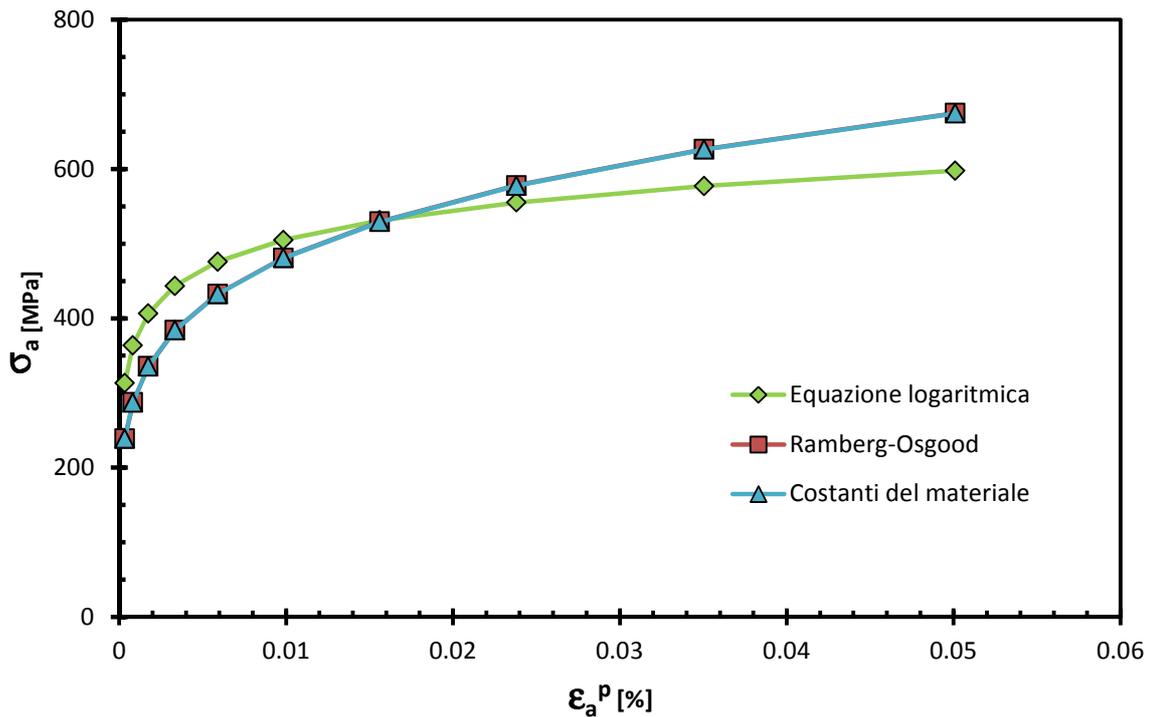


Figura 4-6 Andamento curve nel grafico σ_a - ϵ_a^p

Mediante la metodologia descritta precedentemente, si è ricavato l'andamento delle tre curve in funzione delle costanti del materiale definite nella tabella sovrastante. Si può notare la sovrapposizione tra la curva che interpola le costanti e quella risultante dell'equazione di Ramberg-Osgood. La deformazione plastica considerata nel calcolo dei coefficienti è minore rispetto a quella del caso precedente, quindi l'equazione di Ramberg-Osgood da un'ottima approssimazione del comportamento del materiale ed è stata utilizzata per il calcolo delle costanti. L'equazione logaritmica invece, approssima il comportamento del materiale per deformazioni plastiche elevate.

4. 4. 2 Determinazione dei parametri per il materiale S460N

Le proprietà meccaniche dell'acciaio S460N utilizzate da Ye et al. (2008) [6] sono definite nella tabella sottostante:

Modulo di Elasticità [GPa]	σ_y [Mpa]	n	K [MPa]
208,5	510	0,161	1115

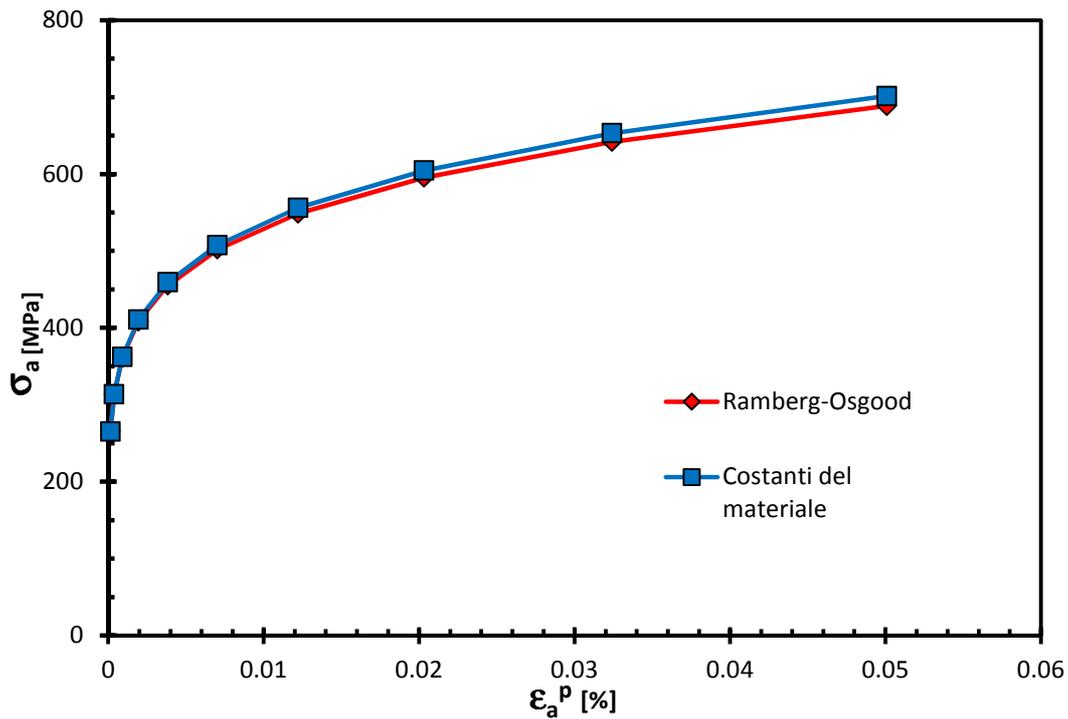
Tabella 4-3 Proprietà meccaniche S460N

In letteratura, per il materiale S460N non sono presenti i valori delle costanti a e b usati nell'espressione 4-24. Per questo materiale quindi, non è possibile effettuare il confronto tra l'equazione logaritmica di Jiang-Kurath [28] e le altre due curve. I valori delle costanti del materiale ricavate da Jiang et al. (2009) [30] sono riportati nella tabella sottostante:

i	$c^{(i)}$	$r^{(i)}$ (MPa)	$\chi^{(i)}$
1	5959,9	17,22	5
2	2152,2	33,52	5
3	900,1	33,41	5
4	420,1	33,33	5
5	213,5	33,25	5
6	116,2	33,24	5
7	66,8	33,21	5
8	40,2	33,19	5
9	25,2	33,17	5
10	16,3	112,43	5

Tabella 4-4 Costanti ricavate per il S460N.

La tensione di snervamento k vale 125 MPa . Nel grafico sottostante è visibile l'andamento delle curve considerate. È possibile asserire che le costanti del materiale sono ricavate considerando l'equazione di Ramberg-Osgood, ossia la curva ciclica stabilizzata del materiale.


 Figura 4-7 Andamento curve nel grafico σ_a - ϵ_a^p

4. 4. 3 Determinazione delle costanti per il materiale 16MnR

Gao et al. (2010) [31], definiscono le costanti del materiale da utilizzare nel modello plastico di Jiang. Esse sono riportate nella tabella sottostante.

i	$c^{(i)}$	$r^{(i)}$ (MPa)	$\chi^{(i)}$
1	3266	113,6	5
2	816,5	71,7	5
3	408,2	45,3	5
4	163,3	50,2	5
5	46,7	57,2	5

Tabella 4-5 Coefficienti utilizzati nel modello plastico di Jiang.

Nell'articolo gli autori però, non definiscono tutti i coefficienti necessari alla descrizione della curva interpolante i dati sperimentali. Infatti, sono riportati la tensione

di snervamento a taglio semplice, il coefficiente di incrudimento ciclico del materiale e il modulo di elastico. In letteratura, è possibile recuperare un articolo dello stesso autore [32], in cui sono riportate le proprietà mancanti del materiale considerato.

Modulo di Elasticità [GPa]	σ_f [Mpa]	σ_y [Mpa]	n'	k [Mpa]
220	385	588	0,163	150

Tabella 4-6 Proprietà meccaniche 16MnR

Comunque, nei numerosi articoli visionati, non è stato possibile ricavare il valore del parametro di resistenza ciclico del materiale e i coefficienti dell'equazione logaritmica di Jiang-Kurath. Attraverso l'implementazione nel foglio excel della procedura descritta precedentemente, si ricava l'andamento della curva ricavata dalle costanti. Inoltre, tramite numerosi tentativi, è stato possibile ottenere l'andamento sia di Ramberg-Osgood che della funzione logaritmica. Nella figura sottostante è visibile il grafico e le tre curve menzionate:

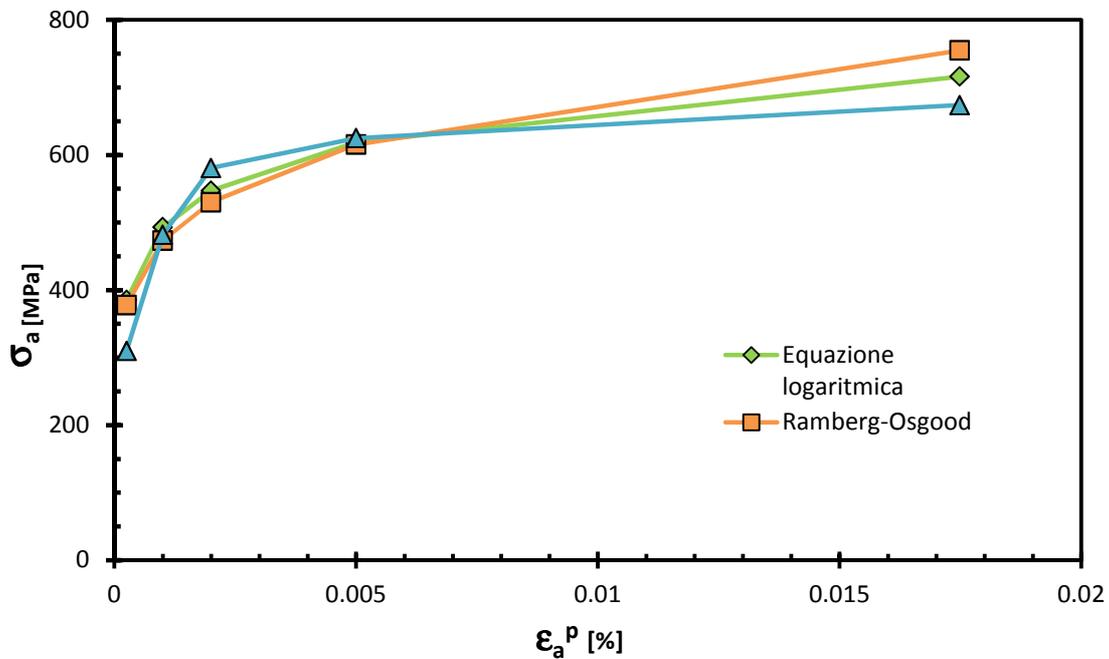


Figura4-8 Andamento curve nel grafico σ_a - ϵ_a^p per il 16Mnr

I valori dei coefficienti utilizzati per l'interpolazione delle curve sono riportati di seguito:

$$a=1,8 \cdot 10^{-6}; \quad b = 80 \text{ MPa}; \quad K = 1460 \text{ MPa}$$

Dal grafico è possibile notare che nessuna delle due funzioni interpola precisamente la curva ricavata dall'analisi delle costanti del materiale. Per questo particolare materiale è necessaria un'ulteriore approfondimento riguardante la determinazione delle proprietà del materiale.

4. 4. 4 **Determinazione delle costanti per il materiale 1070**

Nell'articolo di Jiang e Sehitoglu (1996) [27], sono presenti sia le costanti del materiale utilizzate nel modello plastico, che le proprietà meccaniche del materiale. Nelle tabelle sottostanti sono riportati tutti i coefficienti:

i	$c^{(i)}$	$r^{(i)}$ (MPa)	$\chi^{(i)}$
1	1510	63,5	5
2	461	63,5	5
3	177	63,5	5
4	77	63,5	5
5	39	63,5	5
6	20	63,5	5
7	12	63,5	5
8	6,7	63,5	5
9	4,8	63,5	5
10	2,7	245	5

Tabella 4-7 Coefficienti utilizzati nel modello plastico di Jiang.

Modulo di Elasticità [GPa]	σ_f [Mpa]	σ_y [Mpa]	K [Mpa]	n'	k [Mpa]
210	499	1250	1485	0,17	150

Tabella 4-8 Proprietà meccaniche 1070

Nell'articolo di Jiang e Kurath (1996) [28] sono riportate anche i coefficienti a e b da utilizzare nell'equazione logaritmica:

$$a = 3.6 \cdot 10^{-6}; \quad b = 80 \text{ MPa}$$

Nel grafico sottostante è visibile l'andamento delle tre curve:

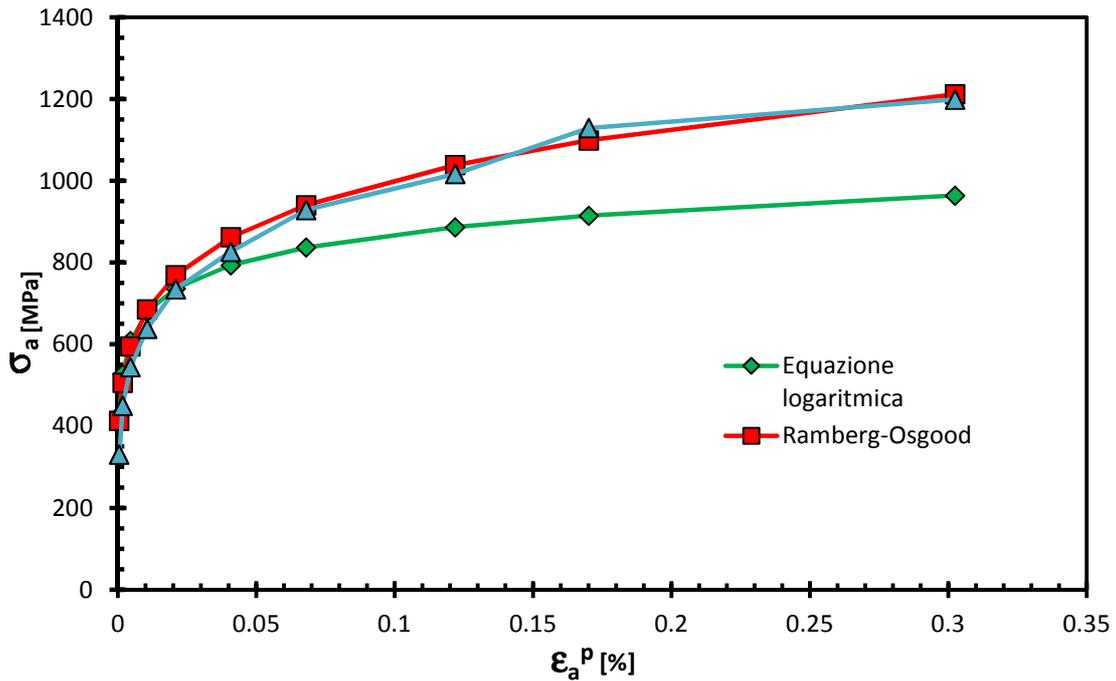


Figura 4-9 Andamento curve nel grafico σ_a - ϵ_a^p per il 1070

Si può notare che le costanti $c^{(i)}$ e $r^{(i)}$ sono state ricavate utilizzando l'equazione di Ramberg-Osgood. Con i seguenti valori della deformazione plastica è infatti più attinente usare l'espressione di Ramberg-Osgood.

4.5 INFLUENZA DEI PARAMETRI SULLE SIMULAZIONI NUMERICHE

Nell'articolo di Jiang e Kurath (1996) [28], sono riportati gli andamenti delle curve derivate dai risultati delle simulazioni numeriche effettuate variando i parametri del materiale. I termini considerati sono:

- la costante del materiale $\chi^{(i)}$;
- il numero M delle divisioni del backstress;
- il valore dello snervamento σ_y e della tensione massima σ_{max} .

Come visibile nella Fig.4-10, il valore assunto dalla costante $\chi^{(i)}$ non influenza in modo considerevole il risultato ottenuto dall'analisi numerica. Il carico considerato nell'analisi numerica è monoassiale e bilanciato. Per bilanciato si intende un carico che non determina né ratchetting né rilassamento delle tensioni. Il valore di $\chi^{(i)}$ è considerato tra due estremi possibili, cioè valore nullo ed infinito. L'andamento della curva è comunque molto simile, quasi coincidente in entrambi i casi.

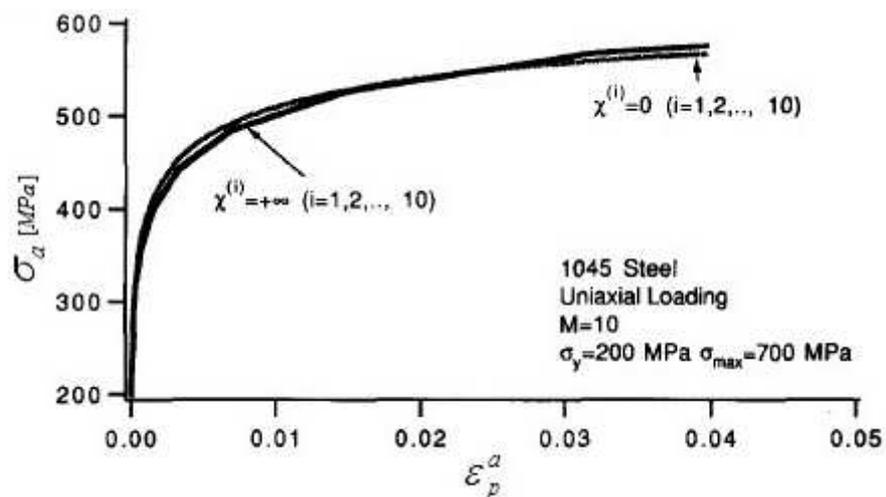


Figura 4-10 Effetto della variazione di $\chi^{(i)}$ per carico monoassiale bilanciato.

Il numero delle parti in cui viene diviso il backstress influenza notevolmente i risultati ottenuti. Infatti, maggiore è il valore di M , più elevato è il grado di equivalenza tra la

curva reale e quella ricavata da simulazioni numeriche. La divisione del backstress, influisce sul numero dei segmenti lineari in cui viene approssimata la curva monoassiale tensione-deformazione plastica. Nella Fig.4-11 è visibile l'andamento della curva in funzione del numero di parti del backstress.

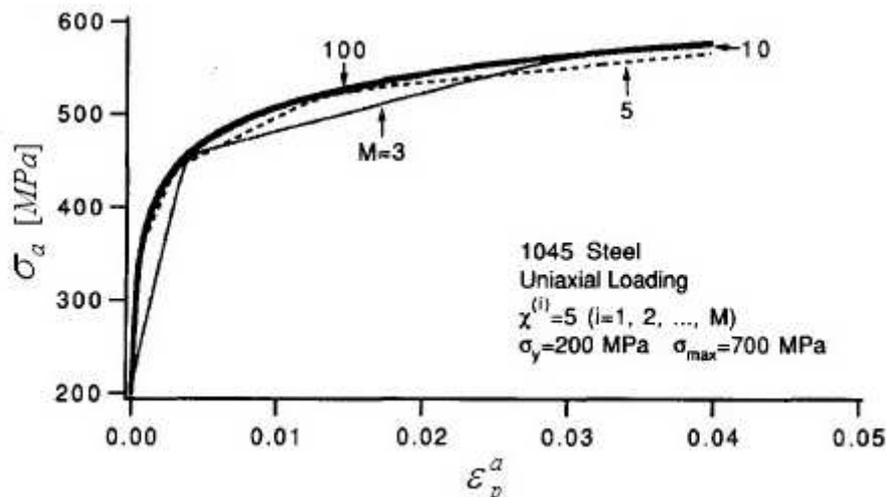


Figura 4-11 Effetto del numero delle parti del backstress M sulla previsione della curva tensione-deformazione monoassiale.

Il valore dello snervamento considerato condiziona significativamente i risultati numerici. In Fig.4-12, è visibile l'andamento delle curve calcolate considerando diversi valori di snervamento. Per bassa deformazione nella zona transitoria elasto-plastica, la tensione di snervamento utilizzata nell'analisi numerica implica un andamento completamente differente della curva. Infatti, per σ_y pari a 400 MPa , la curva non presenta una convessità tipica del passaggio elasto-plastico, ma il risultato ricavato è un andamento a gradino della stessa. Per valori più bassi dello snervamento invece, l'evoluzione dei risultati è molto più simile al comportamento reale del materiale. Comunque per valori elevati di deformazione plastica, le curve tendono asintoticamente allo stesso valore. Quindi per deformazioni elevate, il comportamento ricavato dall'analisi numerica è insensibile dalla tensione di snervamento considerata.

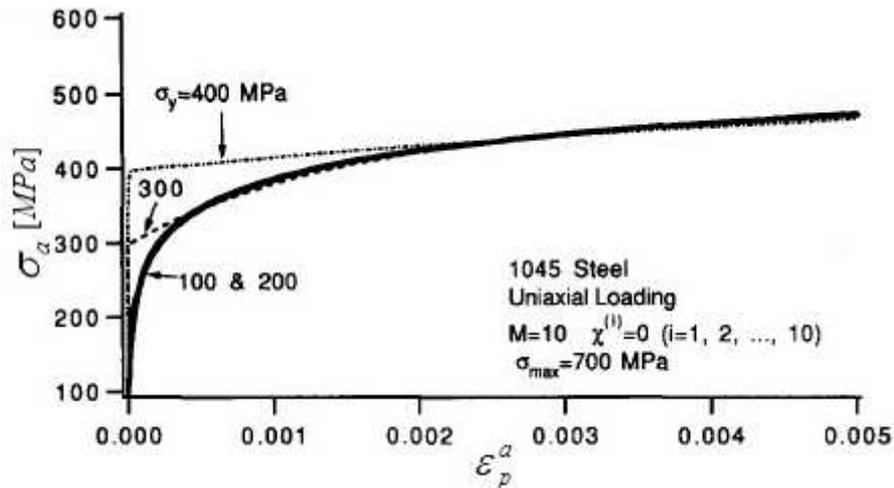


Figura 4-12 Effetto del valore della tensione di snervamento sulla previsione della curva monoassiale.

Sempre nell'articolo di Jiang-Kurath (1996) [28], sono presenti gli andamenti delle simulazioni numeriche nel caso di carico non proporzionale. Anche in questo caso si analizzano i risultati ottenuti variando i tre parametri considerati precedentemente.

La costante $\chi^{(i)}$ non influisce in modo considerevole sull'andamento dei risultati dell'analisi numerica. La scelta di $\chi^{(i)}$ non altera quantitativamente i risultati ottenuti. Questo è in accordo con quanto asserito per il caso monoassiale proporzionale.

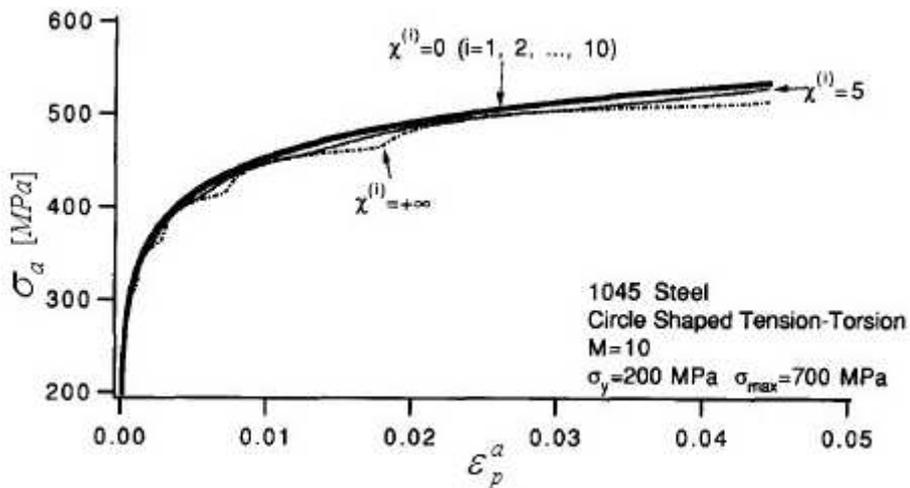


Figura 4-13 Influenza del parametro $\chi^{(i)}$ per il carico non proporzionale.

Il numero delle divisioni M del backstress influisce in modo più evidente sui risultati numerici ottenuti. Con M inferiore a dieci il numero delle parti in cui viene discretizzata la curva tensione-deformazione plastica è troppo piccolo per consentire un'adeguata rappresentazione del comportamento reale del materiale.

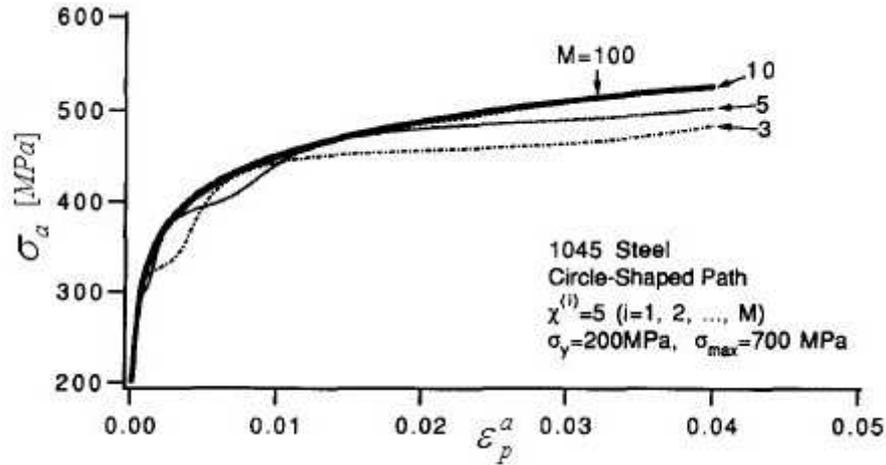


Figura 4-14 Effetto del numero delle parti del backstress M per carico non proporzionale.

La scelta della tensione di snervamento ha un effetto molto simile a quello riscontrato per il carico monoassiale visibile in Fig.4-12. Se si considera lo snervamento troppo elevato, per basse deformazioni plastiche l'andamento della curva è a gradino, mentre per deformazioni maggiori le curve tendono asintoticamente allo stesso valore. Questo è in accordo con il caso monoassiale proporzionale.

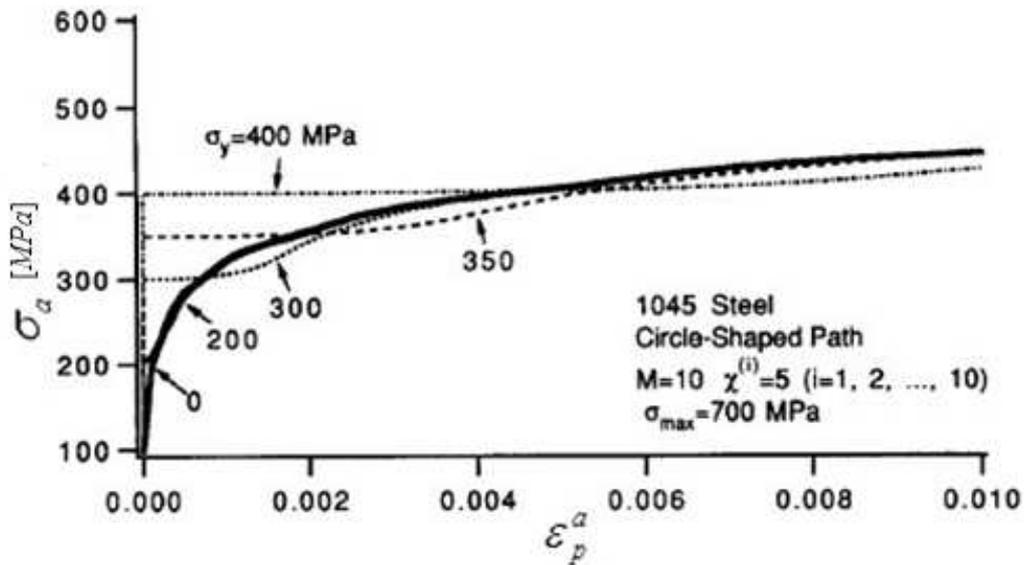


Figura 4-15 Effetto del valore della tensione di snervamento per carico non proporzionale.

Il valore dello snervamento ottimale per il materiale in questione, in accordo sia con il caso proporzionale che non proporzionale, è di circa 100MPa . In letteratura, si consiglia di scegliere il valore di σ_y prossimo al limite di fatica del materiale e la tensione massima σ_{\max} attinga alla tensione di rottura del materiale, σ_{UTS} .

La scelta della tensione di snervamento è uno dei maggiori problemi riguardante le teorie incrementali plastiche. Comunque come definito precedentemente, la tensione di snervamento condiziona i risultati numerici solamente per valori bassi di deformazione plastica. La natura asintotica dell'algoritmo determina una sovrapposizione, per valori elevati di deformazione, delle curve ricavate con diversi valori di snervamento.

Capitolo 5

ESTENSIONE DEL METODO ESED MODIFICATO ALLA FATICA MULTIASSIALE: IMPLEMENTAZIONE DELL'ALGORITMO DI CALCOLO

Nel seguente capitolo, al fine di determinare l'equazione generale che caratterizza le tensioni e le deformazioni all'apice dell'intaglio, si sviluppa nella forma incrementale la definizione del metodo ESED modificato definita nel capitolo 1. Mediante un'ipotesi basata sui lavori di Singh et al. (1996) [3], Singh (1998) [4] e Moftakahr et al. (1995) [8], si determinano le equazioni energetiche definite nelle varie direzioni considerate. Le equazioni appena citate sono espresse in forma incrementale. Per ricavare le espressioni che definiscono gli incrementi delle componenti delle tensioni e delle deformazioni si utilizza il modello elasto-plastico di Jiang(1994) [12] e Jiang-Sehitoglu (1996) [13] descritto nel capitolo 3. Impiegando rispettivamente l'espressione unificata, le equazioni energetiche e il modello plastico si definiscono le equazioni che regolano le tensioni e le deformazioni all'apice dell'intaglio. In Mathematica, un software di calcolo numerico, è stato implementato il sistema delle equazioni incrementali e le formule definite nel modello plastico.

5.1 ESTENSIONE DELL' ESPRESSIONE UNIFICATA ALLA FATICA MULTIASSIALE

Si consideri un componente indebolito da un intaglio raccordato soggetto ad un carico ciclico multiassiale. L'intaglio dà luogo ad uno stato di tensione multiassiale, con una concentrazione delle tensioni localizzata all'apice dell'intaglio. In Fig.5-1 è visibile lo stato di tensione a cui è soggetto un generico componente intagliato.

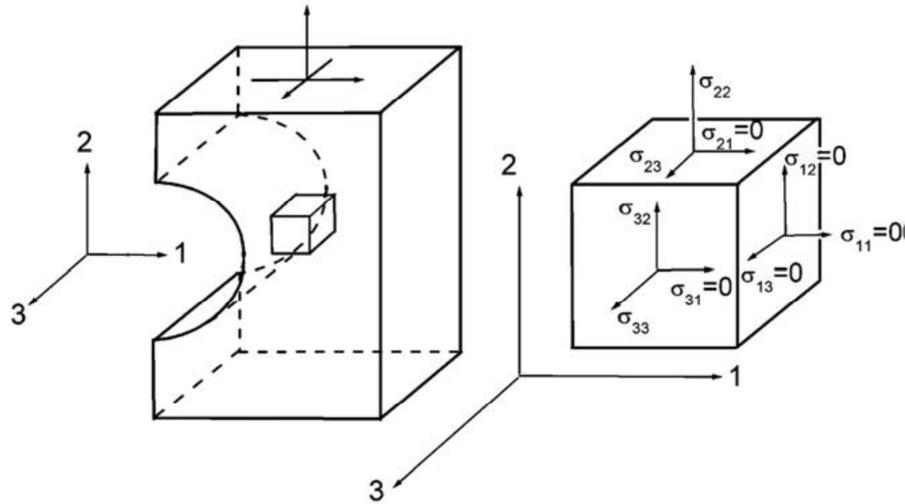


Figura 5-1 Stato tensionale all'apice dell'intaglio.

Come mostrato in Fig.5-1, lo stato di tensione all'apice dell'intaglio è biassiale. Analizzando l'elemento di materiale all'apice, per l'ipotesi dei bordi liberi le tensioni σ_{11} , σ_{12} , σ_{13} sono nulle. Sono inoltre rispettate le condizioni di equilibrio e quindi la reciprocità delle tensioni tangenziali ($\sigma_{23} = \sigma_{32}$). Il tensore delle tensioni assume la seguente forma:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.5-1}$$

Il tensore delle deformazioni è esprimibile nel seguente modo:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.5-2}$$

Al fine di calcolare lo stato di tensione e deformazione locale all'apice dell'intaglio, è necessario conoscere tre componenti di tensione (σ_{22} , σ_{23} , σ_{33}) e quattro componenti di deformazione (ε_{11} , ε_{22} , ε_{23} , ε_{33}). Sono quindi richieste sette equazioni indipendenti per determinare la risposta del materiale all'apice dell'intaglio.

In campo lineare elastico le tensioni e le deformazioni locali sono determinate mediante un'analisi agli elementi finiti in campo lineare elastico, oppure attraverso l'utilizzo del fattore teorico di concentrazione delle tensioni K_t .

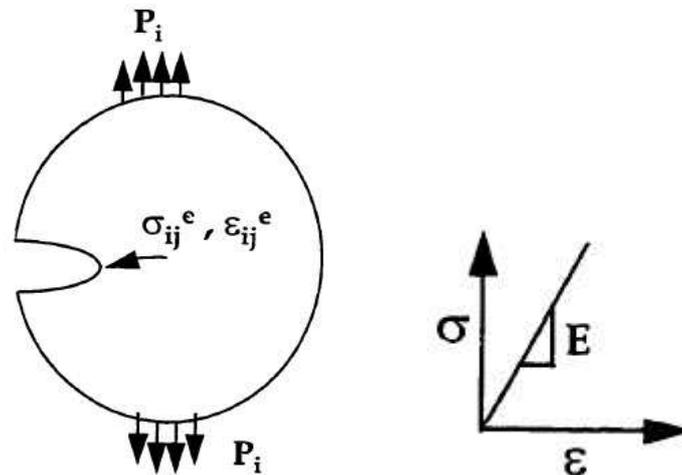


Figura 5-2 Tensioni lineari elastiche all'apice dell'intaglio

Se all'apice dell'intaglio è presente una regione plasticizzata, le tensioni e le deformazioni locali si ricavano attraverso un'analisi elasto-plastica agli elementi finiti oppure utilizzando i metodi approssimati descritti nel capitolo 1. Nel seguente elaborato, per caratterizzare lo stato locale elasto-plastico è utilizzato il criterio approssimato definito dal metodo ESED modificato. Questa regola si basa sull'applicazione dell'espressione unificata (1-71).

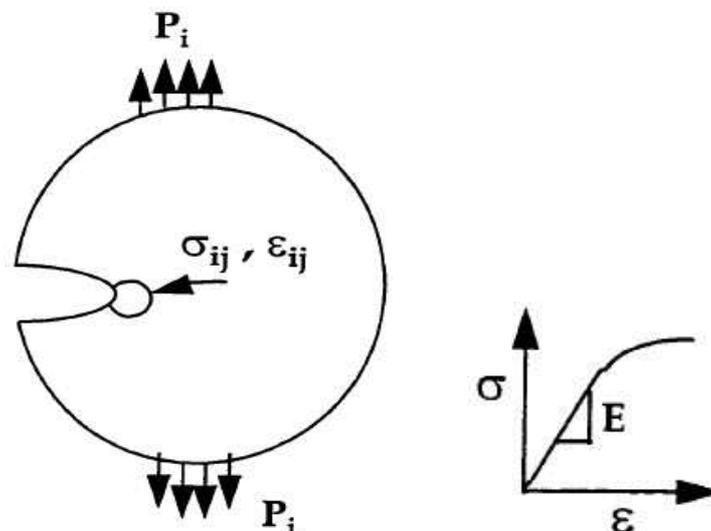


Figura 5-3 Tensioni plastiche all'apice dell'intaglio

L'espressione unificata infatti, è utilizzata per stimare la risposta della tensione e della deformazione di un corpo intagliato soggetto a carico multiassiale proporzionale e non proporzionale in campo elasto-plastico. Per valutare in modo univoco la variazione della tensione e della deformazione elasto-plastica all'apice dell'intaglio, si deve sviluppare il differenziale dell'espressione unificata unitamente alla definizione dell'energia di deformazione plastica definita nell'equazione 1-59. Ne consegue che:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ij}^e(\Delta\varepsilon_{ij}^e) + \Delta\varepsilon_{ij}^e(\Delta\sigma_{ij}^e) &= \Delta\sigma_{ij}^U(\Delta\varepsilon_{ij}^U) + \Delta\varepsilon_{ij}^U(\Delta\sigma_{ij}^U) + C_q \Delta W_p(\Delta\sigma_{ij}^U, \Delta\varepsilon_{ij}^U) \\ \Delta\sigma_{ij}^e d(\Delta\varepsilon_{ij}^e) + \Delta\varepsilon_{ij}^e d(\Delta\sigma_{ij}^e) &= \Delta\sigma_{ij}^U d(\Delta\varepsilon_{ij}^U) + \Delta\varepsilon_{ij}^U d(\Delta\sigma_{ij}^U) + C_q d\left(\int_0^{\Delta\varepsilon_{ij}^U} \sigma_{ij}' d\Delta\varepsilon_{ij}' - \int_0^{\Delta\sigma_{ij}^U} \varepsilon_{ij}' d\Delta\sigma_{ij}'\right) \\ \Delta\sigma_{ij}^e d(\Delta\varepsilon_{ij}^e) + \Delta\varepsilon_{ij}^e d(\Delta\sigma_{ij}^e) &= \Delta\sigma_{ij}^U d(\Delta\varepsilon_{ij}^U) + \Delta\varepsilon_{ij}^U d(\Delta\sigma_{ij}^U) + C_q (\Delta\sigma_{ij}^U d(\Delta\varepsilon_{ij}^U) - \Delta\varepsilon_{ij}^U d(\Delta\sigma_{ij}^U)) \\ \Delta\sigma_{ij}^e d(\Delta\varepsilon_{ij}^e) + \Delta\varepsilon_{ij}^e d(\Delta\sigma_{ij}^e) &= (1 + C_q) \cdot (\Delta\sigma_{ij}^U d(\Delta\varepsilon_{ij}^U)) + (1 - C_q) \cdot (\Delta\varepsilon_{ij}^U d(\Delta\sigma_{ij}^U)) \quad \text{Eq.5-3} \end{aligned}$$

Ad ogni istante (t) del ciclo di carico, l'equazione 5-3 può essere scritta nel seguente modo:

$$\sigma_{ij}^e(t) d\varepsilon_{ij}^e(t) + \varepsilon_{ij}^e(t) d\sigma_{ij}^e(t) = (1 + C_q) \cdot \sigma_{ij}^U(t) d\varepsilon_{ij}^U(t) + (1 - C_q) \cdot \varepsilon_{ij}^U(t) d\sigma_{ij}^U(t) \quad \text{Eq.5-4}$$

Oppure si può esprimere l'equazione 5-4 nella seguente forma incrementale:

$$\sigma_{ij}^e(t) \delta\varepsilon_{ij}^e(t) + \varepsilon_{ij}^e(t) \delta\sigma_{ij}^e(t) = (1 + C_q) \cdot \sigma_{ij}^U(t) \delta\varepsilon_{ij}^U(t) + (1 - C_q) \cdot \varepsilon_{ij}^U(t) \delta\sigma_{ij}^U(t) \quad \text{Eq.5-5}$$

dove il prefisso δ indica l'incremento delle componenti delle tensioni e delle deformazioni. Questa equazione è utilizzata per stimare la risposta istantanea di un corpo intagliato soggetto a carico multiassiale.

La prima equazione indipendente è definita dalla forma incrementale dell'espressione unificata, che è ottenuta sviluppando le sommatorie implicite per le varie componenti di tensione e deformazione diverse da zero:

$$\begin{aligned} & \sigma_{22}^e \delta \varepsilon_{22}^e + \varepsilon_{22}^e \delta \sigma_{22}^e + \sigma_{33}^e \delta \varepsilon_{33}^e + \varepsilon_{33}^e \delta \sigma_{33}^e + 2(\sigma_{23}^e \delta \varepsilon_{23}^e + \varepsilon_{23}^e \delta \sigma_{23}^e) = \\ & (1 + C_q) \cdot (\sigma_{22}^U \delta \varepsilon_{22}^U + \sigma_{33}^U \delta \varepsilon_{33}^U + 2\sigma_{23}^U \delta \varepsilon_{23}^U) + (1 - C_q) \cdot (\varepsilon_{22}^U \delta \sigma_{22}^U + \varepsilon_{33}^U \delta \sigma_{33}^U + 2\varepsilon_{23}^U \delta \sigma_{23}^U) \end{aligned} \quad \text{Eq.5-6}$$

Le ultime due equazioni indipendenti sono ricavate tramite un'assunzione in accordo con gli studi sviluppati da Singh et al. (1996) [3], Singh (1998) [4] e Moftakahr et al. (1995) [8]. La condizione proposta da Ye et al. (2008) [6] è la normale estensione dei contributi appena citati nel caso in cui si consideri l'energia termica dissipata tramite il coefficiente C_q e questa ipotesi può essere espressa attraverso la seguente formula:

$$\frac{\sigma_{(\alpha\beta)}^e \delta \varepsilon_{(\alpha\beta)}^e + \varepsilon_{(\alpha\beta)}^e \delta \sigma_{(\alpha\beta)}^e}{\sigma_{(ij)}^e \delta \varepsilon_{(ij)}^e + \varepsilon_{(ij)}^e \delta \sigma_{(ij)}^e} = \frac{(1 + C_q) \sigma_{(\alpha\beta)}^U \delta \varepsilon_{(\alpha\beta)}^U + (1 - C_q) \varepsilon_{(\alpha\beta)}^U \delta \sigma_{(\alpha\beta)}^U}{(1 + C_q) \sigma_{(ij)}^U \delta \varepsilon_{(ij)}^U + (1 - C_q) \varepsilon_{(ij)}^U \delta \sigma_{(ij)}^U} \quad \text{Eq.5-7}$$

Nell'equazione di cui sopra, i pedici i, j, α, β valgono 1, 2, 3 ed è applicata la sommatoria implicita per i pedici i e j , mentre non viene utilizzata la sommatoria per gli indici α e β . Il concetto alla base dell'uguaglianza 5-7 è il seguente:

- il termine a sinistra dell'uguale esprime il rapporto tra la densità di energia di deformazione di ogni componente rispetto alla totale densità di energia adottando l'ipotesi di elasticità lineare;
- il termine a destra dell'uguale esprime il rapporto tra la densità di energia di deformazione di ogni singolo componente rispetto alla totale densità di energia assumendo l'ipotesi di elasto-plasticità e di scambio termico.

Il rapporto energetico espresso nella formula 5-7, è applicabile per componenti intagliati soggetti sia a carico proporzionale che a carico non proporzionale, secondo gli studi di Singh et al. (1996) [3].

Sostituendo l'equazione 5-16 con l'equazione 5-5 si ricava che:

$$\sigma_{(\alpha\beta)}^e \delta \varepsilon_{(\alpha\beta)}^e + \varepsilon_{(\alpha\beta)}^e \delta \sigma_{(\alpha\beta)}^e = (1 + C_q) \sigma_{(\alpha\beta)}^U \delta \varepsilon_{(\alpha\beta)}^U + (1 - C_q) \varepsilon_{(\alpha\beta)}^e \delta \sigma_{(\alpha\beta)}^e \quad \text{Eq.5-8}$$

Utilizzando l'equazione 5-8 per le tre componenti di tensione diverse da zero, ossia σ_{22} , σ_{23} e σ_{33} , si ricavano tre equazioni energetiche ma solo due di esse sono linearmente indipendenti. Le equazioni calcolate con il rapporto energetico sono:

$$\sigma_{(22)}^e \delta \varepsilon_{(22)}^e + \varepsilon_{(22)}^e \delta \sigma_{(22)}^e = (1 + C_q) \sigma_{(22)}^U \delta \varepsilon_{(22)}^U + (1 - C_q) \varepsilon_{(22)}^e \delta \sigma_{(22)}^e \quad \text{Eq.5-9}$$

$$\sigma_{(33)}^e \delta \varepsilon_{(33)}^e + \varepsilon_{(33)}^e \delta \sigma_{(33)}^e = (1 + C_q) \sigma_{(33)}^U \delta \varepsilon_{(33)}^U + (1 - C_q) \varepsilon_{(33)}^e \delta \sigma_{(33)}^e \quad \text{Eq.5-10}$$

$$\sigma_{(23)}^e \delta \varepsilon_{(23)}^e + \varepsilon_{(23)}^e \delta \sigma_{(23)}^e = (1 + C_q) \sigma_{(23)}^U \delta \varepsilon_{(23)}^U + (1 - C_q) \varepsilon_{(23)}^e \delta \sigma_{(23)}^e \quad \text{Eq.5-11}$$

Dove δ definisce l'incremento delle incognite. L'aumento delle tensioni e delle deformazioni locali viene calcolato mediante l'utilizzo di equazioni incrementali. Queste equazioni determinano l'aumento della deformazione se è noto l'incremento della tensione locale. In campo elastico le equazioni appena citate sono definite dalle equazioni incrementali elastiche di Lamè. In campo elasto-plastico invece, le equazioni incrementali sono ricavate attraverso lo sviluppo del modello plastico proposto da Jiang-Sehitoglu che consente una descrizione realistica dei fenomeni di hardening, softening, effetto Bauschinger e del ratchetting.

5.2 UTILIZZO DEL MODELLO DI JIANG-SEHITOGLU: DETERMINAZIONE DELLE EQUAZIONI INCREMENTALI

Il modello di Jiang-Sehitoglu, come definito nel capitolo 3, è formato da tre equazioni fondamentali, ossia la funzione di snervamento, la regola di flusso e la regola di incrudimento cinematico. La regola di flusso, definita dall'espressione 2-8, stabilisce il gradiente della deformazione plastica. Le equazioni incrementali sono ottenute sviluppando la regola di flusso e considerando il tensore delle tensioni e delle deformazioni agenti.

Si consideri la componente $\delta \varepsilon_{11}$. La deformazione totale sarà determinata dalla somma della deformazione elastica e plastica.

$$\delta \varepsilon_{11}^U = \delta \varepsilon_{11}^e + \delta \varepsilon_{11}^p \quad \text{Eq.5-12}$$

L'incremento della deformazione elastica è determinata dalle equazioni di Lamè:

$$\delta \varepsilon_{11}^e = -\frac{\nu}{E} \delta \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \delta \sigma_{33} \quad \text{Eq.5-13}$$

Dove E è il modulo di Young e ν è il coefficiente di Poisson.

L'incremento della deformazione plastica è definito dalla formula sottostante:

$$\delta \varepsilon_{11}^p = \frac{\delta S_{11} \cdot n_{11} \cdot n_{11}}{h} + \frac{\delta S_{22} \cdot n_{22} \cdot n_{11}}{h} + \frac{\delta S_{23} \cdot n_{23} \cdot n_{11}}{h} + \frac{\delta S_{23} \cdot n_{23} \cdot n_{11}}{h} + \frac{\delta S_{33} \cdot n_{33} \cdot n_{11}}{h} \quad \text{Eq.5-14}$$

La formula che definisce l'espressione incrementale della tensione deviatorica è riportata di seguito:

$$\delta S_{ij} = \delta \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad \text{Eq.5-15}$$

Dove δS rappresenta l'incremento della tensione deviatorica, mentre δ_{ij} indica il delta di Kronecker.

Sostituendo all'interno dell'espressione 5-11 la formula dell'incremento della tensione deviatorica riportata nell'espressione 5-15, si ricava che:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{11}^p = & \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{3} \delta \sigma_{22} - \frac{1}{3} \delta \sigma_{33} \right) \cdot n_{11} \cdot n_{11} + \frac{1}{h} \left(\frac{2}{3} \delta \sigma_{22} - \frac{1}{3} \delta \sigma_{33} \right) \cdot n_{22} \cdot n_{11} \\ & + 2 \cdot \frac{\delta \sigma_{23} \cdot n_{23} \cdot n_{11}}{h} + \frac{1}{h} \left(\frac{2}{3} \delta \sigma_{33} - \frac{1}{3} \delta \sigma_{23} \right) \cdot n_{33} \cdot n_{11} \end{aligned} \quad \text{Eq.5-16}$$

Sommando rispettivamente la componente elastica 5-13 con quella plastica 5-16, si ricava l'espressione dell'incremento della deformazione in direzione 11:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{11}^U = & \left[\frac{1}{h} \left(\frac{2}{3} \cdot n_{11} \cdot n_{22} - \frac{1}{3} n_{11}^2 - \frac{1}{3} \cdot n_{11} \cdot n_{33} \right) - \frac{\nu}{E} \right] \delta \sigma_{22}^U + \frac{2}{h} n_{11} \cdot n_{23} \delta \sigma_{23}^U \\ & + \left[\frac{1}{h} \left(\frac{2}{3} \cdot n_{11} \cdot n_{22} - \frac{1}{3} n_{11}^2 - \frac{1}{3} \cdot n_{11} \cdot n_{22} \right) - \frac{\nu}{E} \right] \delta \sigma_{33}^U \end{aligned} \quad \text{Eq.5-17}$$

Raccogliendo, sostituendo e applicando la medesima procedura anche per le altre componenti di deformazione si trovano le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{22}^U = & \left[\frac{1}{h} \left(\frac{2}{3} n_{22}^2 - \frac{1}{3} \cdot n_{11} \cdot n_{22} - \frac{1}{3} \cdot n_{22} \cdot n_{33} \right) - \frac{\nu}{E} \right] \delta \sigma_{22}^U + \frac{2}{h} n_{22} \cdot n_{23} \delta \sigma_{23}^U \\ & + \left[\frac{1}{h} \left(\frac{2}{3} \cdot n_{22} \cdot n_{33} - \frac{1}{3} n_{22}^2 - \frac{1}{3} \cdot n_{11} \cdot n_{22} \right) - \frac{\nu}{E} \right] \delta \sigma_{33}^U \end{aligned} \quad \text{Eq.5-18}$$

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{33}^U = & \left[\frac{1}{h} \left(\frac{2}{3} \cdot n_{22} \cdot n_{33} - \frac{1}{3} \cdot n_{11} \cdot n_{33} - \frac{1}{3} \cdot n_{11}^2 \right) - \frac{\nu}{E} \right] \delta \sigma_{22}^U + \frac{2}{h} n_{33} \cdot n_{23} \delta \sigma_{23}^U \\ & + \left[\frac{1}{h} \left(\frac{2}{3} \cdot n_{33}^2 - \frac{1}{3} n_{11} \cdot n_{33} - \frac{1}{3} \cdot n_{22} \cdot n_{33} \right) - \frac{\nu}{E} \right] \delta \sigma_{33}^U \end{aligned} \quad \text{Eq.5-19}$$

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{23}^U = & \frac{1}{h} \left(\frac{2}{3} \cdot n_{22} \cdot n_{33} - \frac{1}{3} \cdot n_{11} \cdot n_{23} - \frac{1}{3} \cdot n_{22} \cdot n_{23} \right) \delta \sigma_{22}^U + \left[\frac{2}{h} n_{22} \cdot n_{23} + \frac{2(1+\nu)}{E} \right] \delta \sigma_{23}^U \\ & + \frac{1}{h} \left(\frac{2}{3} \cdot n_{33} \cdot n_{23} - \frac{1}{3} \cdot n_{11} \cdot n_{23} - \frac{1}{3} \cdot n_{22} \cdot n_{23} \right) \delta \sigma_{33}^U \end{aligned} \quad \text{Eq.5-}$$

20

Dove h è la funzione del modulo plastico definita nell'espressione 3-17, n è il versore normale alla superficie di snervamento esplicitato nell'equazione 2-11.

Il modello plastico costitutivo del materiale fornisce quattro equazioni linearmente indipendenti.

Le sette equazioni linearmente indipendenti necessarie a descrivere lo stato di tensione e deformazione all'apice dell'intaglio sono le equazioni 5-6, due tra le equazioni 5-9, 5-10, 5-11 e due tra le equazioni 5-17, 5-18, 5-19, 5-20.

5.3 IMPLEMENTAZIONE DEL SOFTWARE

In letteratura, il modello matematico che implementa la teoria della plasticità ciclica è ottenuto in due modi completamente differenti tra loro. Nel metodo sviluppato da Firat (2011) [33], (2012) [34] e (2012) [35], l'autore ricava le tensioni e le deformazioni all'apice dell'intaglio considerando l'insieme delle espressioni come un sistema di equazioni differenziali, la cui risoluzione implica l'utilizzo dell'algoritmo del tempo implicito di Eulero. Attraverso la risoluzione iterativa del sistema, l'integrazione delle variabili e l'impiego di opportune condizioni di convergenza, l'autore ricava tutte le incognite del problema. Il secondo metodo invece, è stato sviluppato da Gao et al. (2010) [31] e da Ye et al. (2008) [6]. In questi ultimi articoli infatti, viene esplicitato chiaramente che le espressioni costituenti il sistema non sono delle equazioni differenziali, ma il calcolo dell'aumento delle tensioni e delle deformazioni è ottenuto in modo incrementale. Questo significa che il carico esterno applicato è discretizzato in un numero finito di parti. Utilizzando l'incremento piccolo ma finito determinato dalla discretizzazione, è possibile risolvere il sistema al passo $n+1$ -esimo se sono note tutte le variabili al passo n -esimo. Quindi, l'incremento delle tensioni e deformazioni locali è ottenuto risolvendo in modo incrementale le sette equazioni indipendenti del sistema. Nel seguente elaborato è utilizzato appunto il secondo metodo descritto. La risoluzione numerica del sistema lineare è conseguita attraverso l'implementazione del sistema di equazioni e del modello plastico di Jiang-Sehitoglu utilizzando il software di calcolo simbolico e numerico multiplatforma Mathematica 8.0.

Nel flow-chart definito nella Fig.5-4, è illustrata la metodologia utilizzata per l'implementazione dell'algoritmo di calcolo. Il seguente flow-chart è basato sugli studi effettuati da Gao et al. (2010) [31].

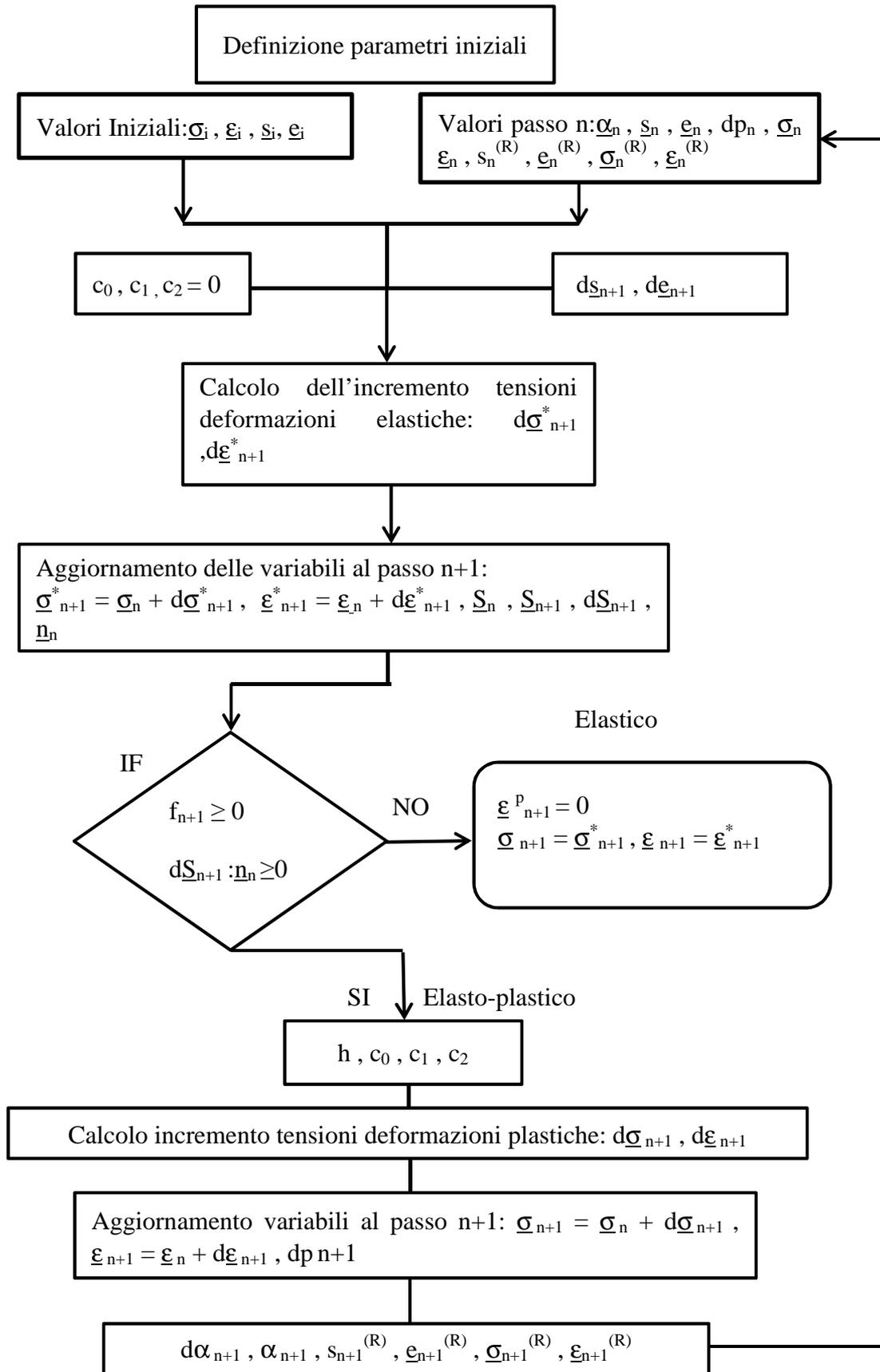


Figura 5-4 Flow-chart dell'algoritmo implementato.

Il sistema lineare è risolto in modo incrementale. Si riescono a calcolare tutte le incognite al passo $n+1$ -esimo se al passo precedente, ossia al passo n -esimo, sono note tutte le variabili caratterizzanti il sistema. Dato che si utilizza questo metodo incrementale, la definizione delle condizioni iniziali è di fondamentale importanza per una corretta risoluzione del sistema. Le condizioni iniziali sono quindi determinanti per due aspetti fondamentali. In primo luogo una errata definizione comporta l'ottenimento di risultati sbagliati nel calcolo delle tensioni e delle deformazioni locali. Il secondo aspetto riguarda la risoluzione di tutto l'algoritmo. Delle errate condizioni iniziali infatti, possono determinare valori coerenti e corretti delle tensioni e delle deformazioni elastiche, ma in campo elasto-plastico le componenti calcolate risultano sbagliate. Le condizioni iniziali infatti, influenzano i calcoli delle variabili plastiche e nel caso di valori in ingresso errati, l'algoritmo determina valori in uscita incoerenti con i risultati precedentemente calcolati.

Nei paragrafi successivi si descrive l'implementazione del software basato sul flow-chart visibile in Fig.5-4. Il codice del programma sviluppato è riportato in appendice A.

5.3.1 Definizione dei parametri iniziali

La definizione dei parametri iniziali è il primo passo da compiere per una corretta risoluzione del sistema. L'utente infatti dovrà immettere manualmente all'interno del programma, le varie specifiche che definiscono il problema. In particolare, i valori da inserire sono i seguenti:

- Momento torcente e forza di trazione;
- Diametro del provino da analizzare;
- Fattore teorico di concentrazione delle tensioni nelle varie direzioni considerate;
- Parametri che definiscono le proprietà meccaniche del materiale, cioè modulo di Young, coefficiente di Poisson, coefficiente di incrudimento e tensione di snervamento;
- L'eventuale forza di trazione media e il momento torcente medio applicati;
- Lo sfasamento tra le sollecitazioni, al fine di caratterizzare carichi multiassiali non proporzionali;

- Il numero dei cicli di isteresi che il programma deve valutare;
- La quantità che determina la discretizzazione della curva di carico;
- L'incremento dell'ampiezza di sollecitazione ciclo per ciclo;
- Il numero delle parti in cui si divide il backstress;
- Le costanti del materiale, $c^{(i)}$, $r^{(i)}$, $\chi^{(i)}$.

5.3.2 Valori iniziali e valori al passo n

Le tensioni e le deformazioni lineari elastiche agenti all'apice dell'intaglio per effetto del carico esterno, sono calcolate mediante le seguenti formule:

$$s_{22} = Kt_{22} \cdot \sigma_{nom} \quad \text{Eq.5-21}$$

$$s_{33} = Kt_{33} \cdot \sigma_{nom} \quad \text{Eq.5-22}$$

$$s_{23} = Kt_{23} \cdot \tau_{nom} \quad \text{Eq.5-23}$$

$$e_{22} = \frac{1}{E} (Kt_{22} - \nu Kt_{33}) \cdot \sigma_{nom} \quad \text{Eq.5-24}$$

$$e_{33} = \frac{1}{E} (Kt_{33} - \nu Kt_{22}) \cdot \sigma_{nom} \quad \text{Eq.5-25}$$

$$e_{23} = \frac{Kt_{23}}{2G} \tau_{nom} \quad \text{Eq.5-26}$$

Dove Kt è il fattore teorico di concentrazione delle tensioni calcolato nelle diverse direzioni considerate, σ_{nom} e τ_{nom} rappresentano il carico nominale applicato. Il carico nominale esterno viene discretizzato in un numero elevato di parti. I valori iniziali delle tensioni e delle deformazioni locali elasto-plastiche, $\underline{\sigma}_i$, $\underline{\epsilon}_i$, sono calcolati utilizzando una formula specifica presente nel codice, che dipende dal numero delle suddivisioni del carico. Successivamente, il software utilizza le variabili iniziali per calcolare le tensioni e le deformazioni locali al primo passo. Questi valori calcolati sono considerati i valori iniziali da inserire nuovamente all'interno dell'algoritmo, al passo successivo. Il software, dopo aver posto le condizioni iniziali nulle, continuerà nell'elaborazione

incrementando passo per passo sia i valori locali che nominali, fino alla completa discretizzazione del ciclo di carico.

5.3.3 Reference state

Il reference state o stato di riferimento è stato utilizzato da Gao et al. (2010) [31], sulle base degli studi effettuati da Chu. L'autore è stato il primo ad introdurre lo stato di riferimento all'interno dell'espressione unificata e alle equazioni energetiche al fine di estendere la risoluzione del sistema lineare al caso di carico ciclico. Le equazioni definite nel paragrafo 5.1 assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned} & (s_{22} - s_{22}^{(R)}) de_{22} + (e_{22} - e_{22}^{(R)}) ds_{22} + (s_{33} - s_{33}^{(R)}) de_{33} + (e_{33} - e_{33}^{(R)}) ds_{33} \\ & \quad + 2((s_{23} - s_{23}^{(R)}) de_{23} + (e_{23} - e_{23}^{(R)}) ds_{23}) = \\ & \quad (1 + C_q) \cdot ((\sigma_{22} - \sigma_{22}^{(R)}) d\epsilon_{22} + (\sigma_{33} - \sigma_{33}^{(R)}) d\epsilon_{33} + 2(\sigma_{23} - \sigma_{23}^{(R)}) d\epsilon_{23}) \\ & + (1 - C_q) \cdot ((\epsilon_{22} - \epsilon_{22}^{(R)}) d\sigma_{22} + (\epsilon_{33} - \epsilon_{33}^{(R)}) d\sigma_{33} + 2(\epsilon_{23} - \epsilon_{23}^{(R)}) d\sigma_{23}) \end{aligned} \quad \text{Eq.5-27}$$

$$(s_{22} - s_{22}^{(R)}) de_{22} + (e_{22} - e_{22}^{(R)}) ds_{22} = (1 + C_q) \cdot (\sigma_{22} - \sigma_{22}^{(R)}) d\epsilon_{22} + (1 - C_q) \cdot (\epsilon_{22} - \epsilon_{22}^{(R)}) d\sigma_{22} \quad \text{Eq.5-28}$$

$$(s_{33} - s_{33}^{(R)}) de_{33} + (e_{33} - e_{33}^{(R)}) ds_{33} = (1 + C_q) \cdot (\sigma_{33} - \sigma_{33}^{(R)}) d\epsilon_{33} + (1 - C_q) \cdot (\epsilon_{33} - \epsilon_{33}^{(R)}) d\sigma_{33} \quad \text{Eq.5-29}$$

Le tensioni e le deformazioni in cui è presente l'apice (R), rappresentano lo stato di riferimento per quella particolare componente di tensione o deformazione. Lo stato di riferimento è rappresentato dal punto più elevato, positivo o negativo, raggiunto da una singola componente di tensione o di deformazione. Il punto in questione quindi, definisce il nuovo sistema di riferimento utilizzato all'interno delle equazioni costitutive del sistema. Sostanzialmente, il reference state consiste nella traslazione del sistema di riferimento dall'origine degli assi, al fine di considerare l'applicazione di carichi ciclici. Nel software, lo stato di riferimento è definito utilizzando il seguente metodo:

- si considera ad esempio una componente di tensione ricavata al passo n -esimo;
- usufruendo di un ciclo “if”, si effettua l'operazione riportata di seguito:

$$(\sigma(n) - \sigma(n-1)) \cdot (\sigma(n-1) - \sigma(n-2)) \leq 0 \quad \text{Eq.5-30}$$

Dove la lettera n rappresenta il passo n -esimo della discretizzazione della curva ciclica di carico. Se questo prodotto è minore o al limite uguale a zero, allora la tensione ricavata al passo $n-1$ è lo stato di riferimento per quella particolare componente di tensione. Altrimenti, se il prodotto è maggiore di zero il reference state è posto uguale a zero e il sistema di riferimento è definito nell'origine degli assi. Questa operazione viene effettuata per ogni step di carico e si considerano sia le componenti locali che quelle nominali. Lo stato di riferimento di ogni tensione o deformazione è indipendente l'uno dall'altro.

5.3.4 Calcolo delle tensioni e delle deformazioni elastiche

L'incremento delle tensioni e delle deformazioni elastiche, $d\bar{\sigma}_{n+1}^*$ e $d\bar{\epsilon}_{n+1}^*$, sono ricavate dalla risoluzione del sistema definito nel paragrafo 5.1. Le equazioni coinvolte sono 5-27, 5-28 e 5-29. Le equazioni incrementali elasto-plastiche 5-17, 5-18, 5-19 e 5-20, sono definite all'interno del software nel seguente modo:

$$d\epsilon_{11} = \left(c_0 n_{11} - \frac{\nu}{E} \right) d\sigma_{22} + \left(c_1 n_{11} - \frac{\nu}{E} \right) d\sigma_{33} + c_2 n_{11} d\sigma_{23} \quad \text{Eq.5-30}$$

$$d\epsilon_{22} = \left(c_0 n_{22} + \frac{1}{E} \right) d\sigma_{22} + \left(c_1 n_{22} - \frac{\nu}{E} \right) d\sigma_{33} + c_2 n_{22} d\sigma_{23} \quad \text{Eq.5-31}$$

$$d\epsilon_{33} = \left(c_0 n_{33} - \frac{\nu}{E} \right) d\sigma_{22} + \left(c_1 n_{33} + \frac{1}{E} \right) d\sigma_{33} + c_2 n_{33} d\sigma_{23} \quad \text{Eq.5-32}$$

$$d\epsilon_{23} = c_0 n_{23} d\sigma_{22} + c_1 n_{23} d\sigma_{33} + \left(\frac{1+\nu}{E} + c_2 n_{23} \right) d\sigma_{23} \quad \text{Eq.5-33}$$

Dove:

$$c_0 = \frac{-\frac{1}{3} n_{11} + \frac{2}{3} n_{22} - \frac{1}{3} n_{33}}{h} \quad \text{Eq.5-34}$$

$$c_1 = \frac{-\frac{1}{3} n_{11} - \frac{1}{3} n_{22} + \frac{2}{3} n_{33}}{h} \quad \text{Eq.5-35}$$

$$c_2 = \frac{2 n_{23}}{h} \quad \text{Eq.5-36}$$

Per risolvere il caso elastico si pongono uguali a zero i coefficienti c_0 , c_1 e c_2 . Si ottengono in questo modo le equazioni incrementali di Lamè definite sotto:

$$d\varepsilon_{11} = -\frac{\nu}{E} d\sigma_{22} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{33} \quad \text{Eq.5-37}$$

$$d\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} d\sigma_{22} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{33} \quad \text{Eq.5-38}$$

$$d\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} d\sigma_{33} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{22} \quad \text{Eq.5-39}$$

$$d\varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{23} \quad \text{Eq.5-40}$$

L'incremento nella tensione e nella deformazione nominale, ossia $d\underline{s}_{n+1}$ e $d\underline{e}_{n+1}$ è ricavato mediante la differenza tra il carico attuale e il carico applicato al materiale al passo successivo. In questo modo, il software è in grado di risolvere il sistema lineare elastico. Le variabili locali ottenute non sono quelle che effettivamente agiscono all'apice dell'intaglio, ma sono dei valori di tentativo elastico. L'incremento calcolato è successivamente sommato al valore della tensione e della deformazione ricavato al passo n -esimo. Si ricavano ora i tensori deviatorici \underline{S}_{n+1} e l'incremento degli stessi effettuando una differenza tra il tensore al passo $n+1$ calcolato ipotizzando una tensione elastica, e il tensore \underline{S}_n reale ricavato al passo precedente. Considerando il valore del backstress ottenuto al passo n , si ricava la normale \underline{n}_n .

5.3.5 La condizione di snervamento

Utilizzando i valori delle tensioni e delle deformazioni calcolati nel paragrafo 5.2.4, si definisce all'interno del codice la condizione di snervamento definita dalle seguenti equazioni:

- funzione di snervamento, f_{n+1} , indicata nella formula 2-6;

$$f_{n+1} \geq 0 \quad \text{Eq.5-41}$$

- regola di flusso, formula 2-7, si ricava la seguente espressione:

$$d \underline{S}_{n+1} : \underline{n}_n \geq 0 \quad \text{Eq.5-42}$$

La formula 5-42 rappresenta la condizione espressa dal raggruppamento di Macauley nell'equazione della regola di flusso. Infatti, la regola di flusso stabilisce che c'è un incremento nella deformazione plastica solo nel caso in cui sia verificata la formula 5-42. Quindi se entrambe le condizioni sono verificate, allora le tensioni esterne applicate comportano uno stato elasto-plastico locale. Altrimenti, lo stato tensionale è elastico e le tensioni e le deformazioni reali sono quelle ricavate in precedenza, ossia sono i valori di tentativo elastico. L'espressione 5-41 indica la condizione di snervamento espressa nella formula 2-6. Come definito precedentemente, lo stato di snervamento è definito unicamente nel caso in la funzione f sia equivalente a zero, cioè lo stato delle tensioni è sulla superficie limite del materiale. Nel caso in cui f è maggiore di zero, è presente una condizione di non ammissibilità, ossia è impossibile che la risultante delle tensioni sia rappresentata da un punto esterno alla superficie limite. Nel software non è possibile implementare la formula $f=0$ in quanto, per problemi riguardanti la risoluzione numerica, questa condizione è praticamente impossibile da ottenere. Per questo motivo, è stata utilizzata l'espressione definita in 5-41.

5.3.6 Calcolo delle tensioni e delle deformazioni plastiche

L'incremento delle tensioni e delle deformazioni plastiche locali, al passo $n+1$ -esimo, è calcolato attraverso l'implementazione del sistema di equazioni definito dalle equazioni 5-27, 5-28, 5-29, 5-30, 5-31, 5-32, 5-33. Per risolvere il sistema è necessario calcolare la funzione del modulo plastico h (3-17), i coefficienti c_0 , c_1 e c_2 e le normali n (2-15). L'incremento calcolato viene poi sommato alle tensioni e alle deformazioni elasto-plastiche ricavate al passo n -esimo. In seguito il software calcola l'incremento del backstress da (3-15) e l'aumento della deformazione plastica accumulata. Come ultimo step, è stato implementato all'interno del codice, il calcolo del reference state per le tensioni e le deformazioni locali e nominali determinate dal carico esterno.

In appendice A è possibile trovare l'intero listato di comandi utilizzato commentato riga per riga. Tale operazione è stata effettuata al fine di rendere il codice sviluppato più intuitivo e chiaro possibile.

Capitolo 6

VALUTAZIONE DEI RISULTATI OTTENUTI

Nel seguente capitolo verranno valutati i risultati ottenuti dalle numerose simulazioni effettuate. E' stato ricavato, in accordo i dati presenti in letteratura di Ye et al. (2008) [6] e Gao et al.(2010) [31], l'andamento del ciclo d'isteresi delle tensioni e delle deformazioni presenti all'apice di un intaglio. Nelle simulazioni numeriche effettuate si considerano due diversi acciai, i tre metodi approssimati descritti nel capitolo 1 e un numero elevato di cicli di carico. I carichi ciclici multiassiali utilizzati nelle simulazioni sono proporzionali. Viene inoltre descritta la metodologia utilizzata per l'implementazione del codice nel caso di carichi ciclici non proporzionali.

6.1 RISULTATI OTTENUTI PER L'ACCAIO S460N

Nell'articolo di Ye et al. (2008) [6], gli autori verificano l'accuratezza dell'espressione unificata nel calcolo della tensione e della deformazione elasto-plastica all'apice dell'intaglio. Il metodo dell'ESED modificato viene confrontato con la regola di Neuber, il criterio ESED classico ed alcuni test sperimentali nel caso di cicli di carico proporzionali e non proporzionali. Il materiale utilizzato nell'analisi è il S460N con grana fine e le proprietà del materiale sono definite in Tab. 4-3. Per le prove sperimentali è stato utilizzato il provino cilindrico intagliato circonferenzialmente, e la geometria utilizzata è riportata in Fig. 6-1.

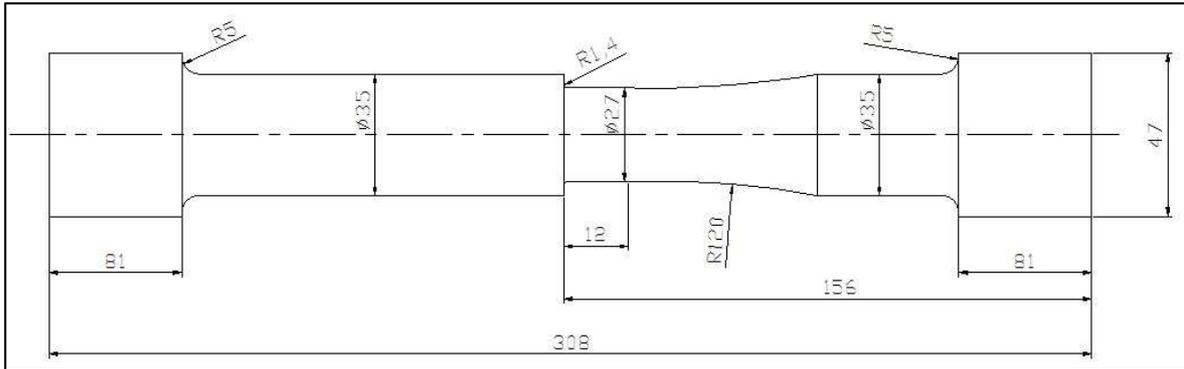


Figura 6-1 Geometria del provino utilizzata nell'analisi sperimentale e numerica

Nell'articolo, la risposta del materiale ai cicli di sollecitazione nell'intorno dell'intaglio viene misurata tramite estensimetria. Il posizionamento degli estensimetri e le dimensioni dell'intaglio circolare sono visibili in Fig.6-2.

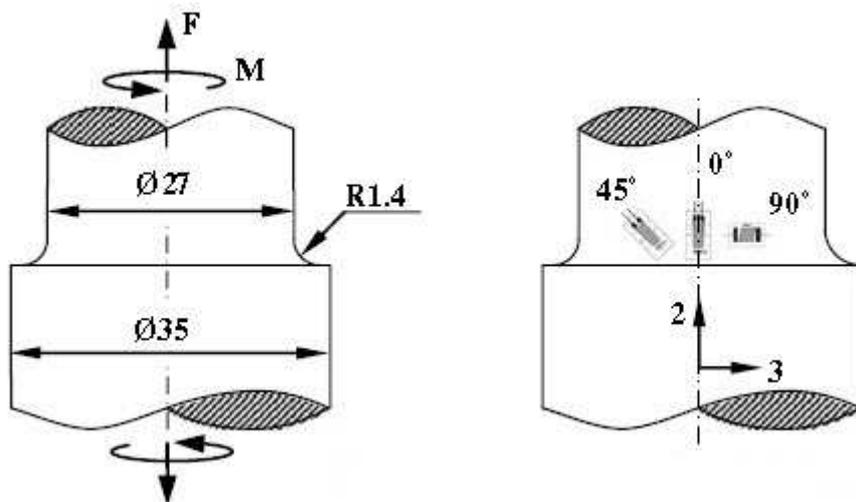


Figura 6-2 Geometria intaglio e disposizione estensimetri

Gli autori riportano il valore dei coefficienti teorici di concentrazione delle tensioni calcolati nelle varie direzioni:

- $K_{t22} = 2,45;$
- $K_{t23} = 1,56;$
- $K_{t33} = 0,565.$

Il componente è sollecitato da uno stato di tensione multiassiale, in fase e fuori fase, ossia carico proporzionale e non proporzionale. Il carico esterno applicato è determinato dall'applicazione di una forza di trazione e di un momento torcente. Le tensioni nominali di trazione e le tensioni torsionali, S_{22} e S_{23} , agenti sulla sezione netta sono ricavate mediante l'utilizzo delle seguenti formule:

$$S_{22} = \frac{F}{(\pi/4)d^2} \quad \text{Eq. 6-1}$$

$$S_{23} = \frac{M}{(\pi/16)d^3} \quad \text{Eq. 6-2}$$

La forza F induce all'apice dell'intaglio due componenti di tensione: la tensione normale assiale σ_{22}^e e la tensione normale cerchiante (hoop stress) σ_{33}^e . Entrambe le componenti sono calcolate in campo lineare elastico. Il momento torcente M_t comporta una tensione tangenziale di taglio σ_{23}^e . Nell'articolo non è presente nessun valore né della forza F applicata esternamente, né del momento torcente M_t . Le simulazioni effettuate con il software non hanno lo scopo di eguagliare esattamente i dati ricavati da Ye et al.(2008) [6], ma si vuole ottenere un andamento qualitativo dei cicli d'isteresi ricavati attraverso il calcolo delle tensioni e delle deformazioni all'apice dell'intaglio.

6. 1. 1 Prima simulazione: metodo ESED modificato

Nella prima analisi vengono immessi nel software i seguenti dati:

- Momento torcente = 300 Nm;
- Forza trazione = 200 kN;
- Il carico considerato è proporzionale quindi lo sfasamento è nullo;
- I fattori teorici di concentrazione delle tensioni definiti precedentemente;
- Le costanti del materiale esplicitate nella Tab. 4-4;
- La tensione di snervamento $k = 125$ MPa;

- Le proprietà meccaniche specificate in Tab. 4-3;
- Il diametro del componente, $d = 27\text{mm}$;
- La simulazione viene effettuata per due cicli di carico.

In Fig. 6-3 è raffigurata la relazione lineare quindi proporzionale, tra il momento torcente M_t e la forza di trazione F .

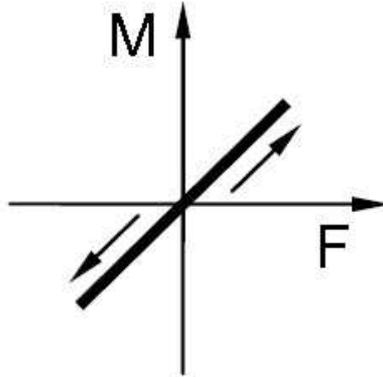


Figura 6-3 Relazione di proporzionalità nel carico applicato

Di seguito si riporta il grafico dell'andamento della tensione assiale e tangenziale nominale in funzione del numero di divisioni effettuate. L'unità di misura di tutte le tensioni considerate nei grafici sottostanti è il MPa.

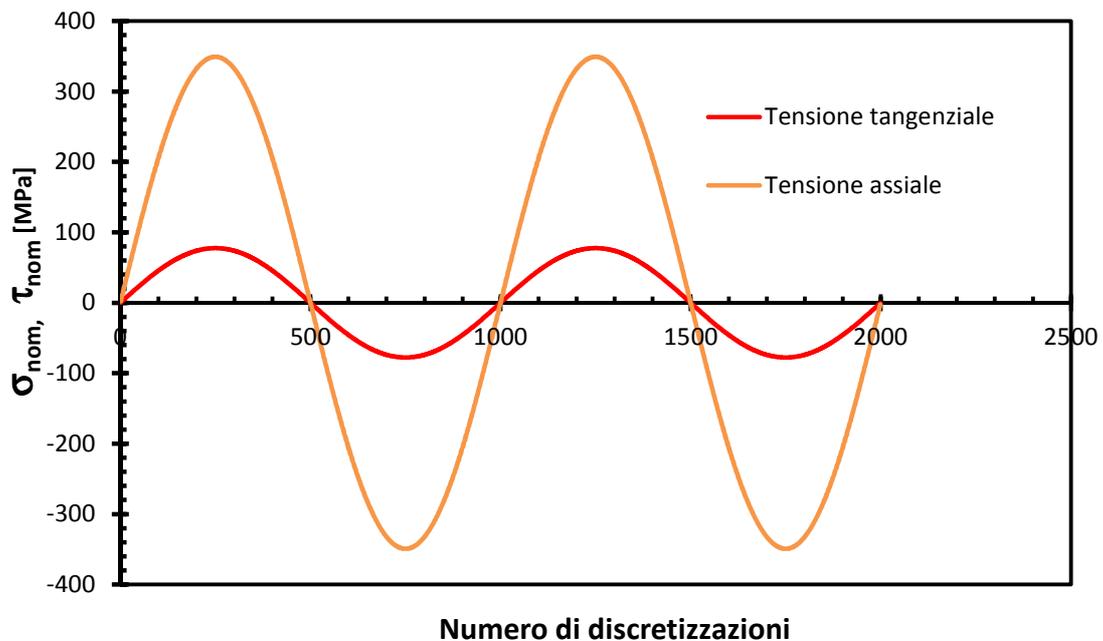


Figura 6-4 Andamento tensione nominale di trazione e di torsione in funzione del numero di discretizzazioni

Nel grafico presente in Fig.6-5, è visibile la relazione tra le tensioni assiali e tangenziali nominali calcolate dal software in relazione alla Fig.6-3.

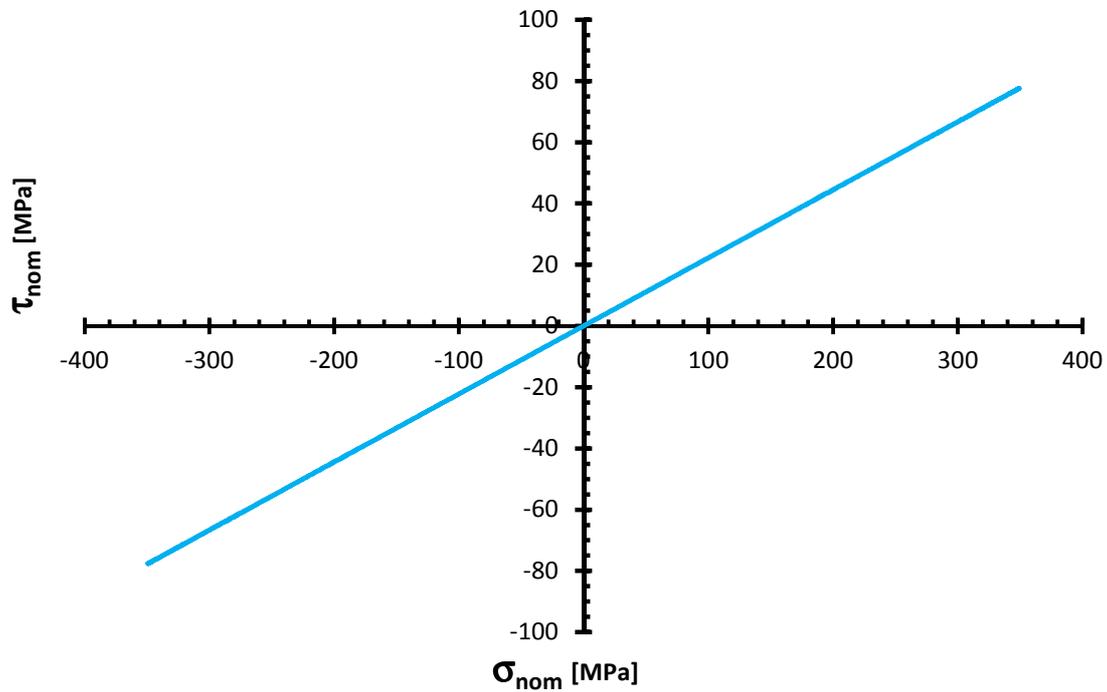


Figura 6-5 Proporzionalità tra le tensioni assiali e tangenziali.

Le Fig. 6-4 e 6-5 rappresentano il ciclo di carico a cui è sottoposto il componente. Nelle figure sottostanti sono rappresentati gli andamenti dei cicli d'isteresi per le varie componenti di tensione e di deformazione considerate.

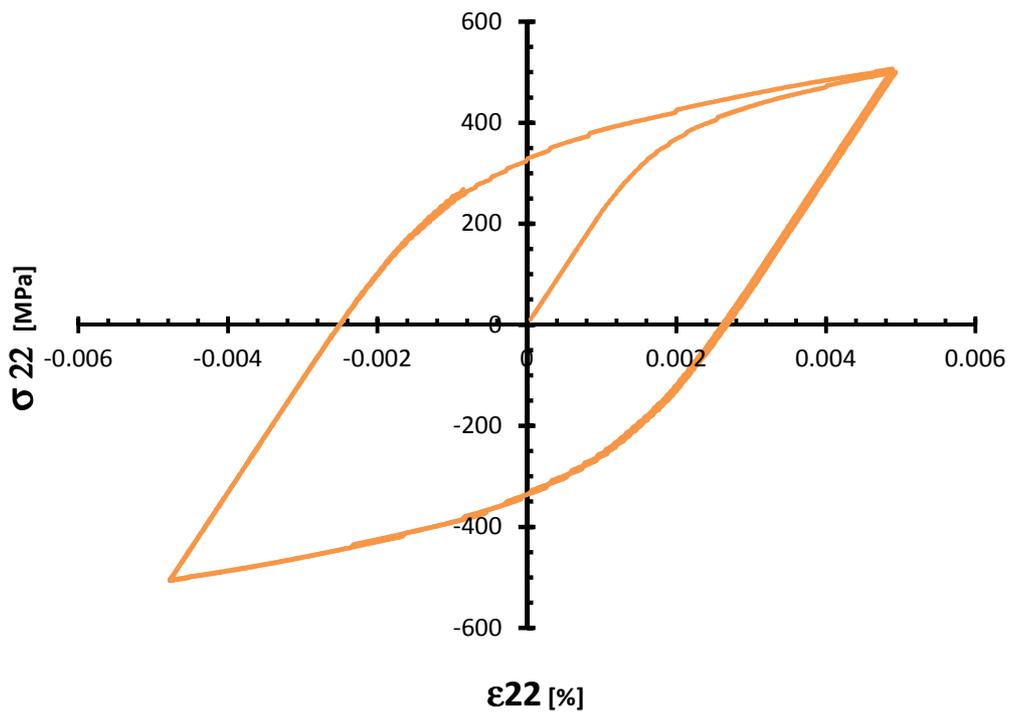


Figura 6-6 Cicli d'isteresi σ_{22} - ϵ_{22}

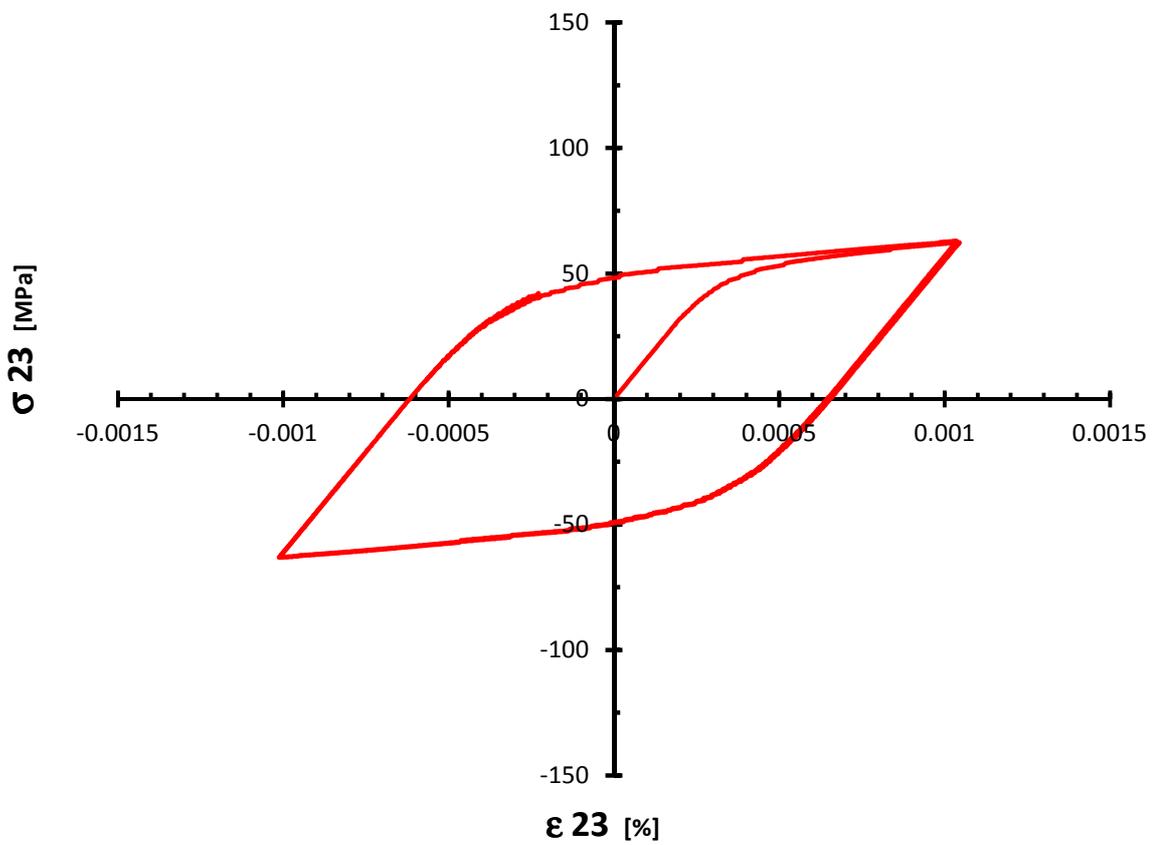


Figura 6-7 Cicli d'isteresi σ_{23} - ϵ_{23}

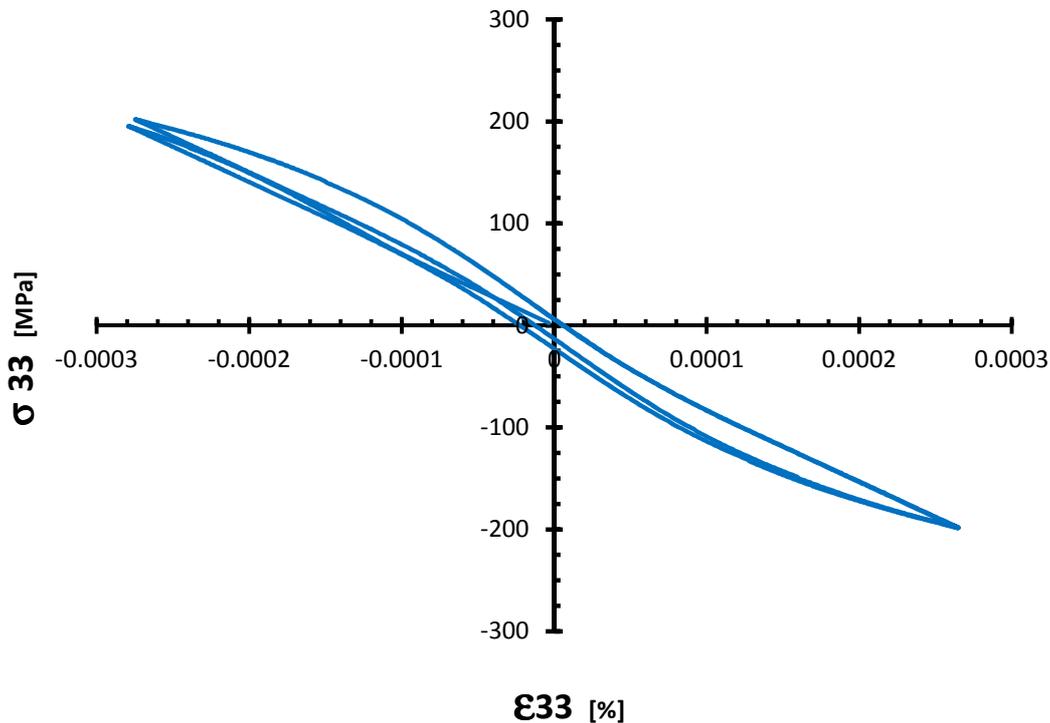


Figura 6-8 Cicli d'isteresi σ_{33} - ϵ_{33}

Nelle Fig. 6-6, 6-7 e 6-8 sono raffigurati i cicli d'isteresi delle incognite presenti nel sistema definito nel capitolo 5. Si può notare che per le tensioni e le deformazioni calcolate nelle direzioni 22 e 23 l'andamento del ciclo di isteresi è corretto. Nel caso della tensione e deformazione cerchiante σ_{33} - ϵ_{33} (hoop stress), il ciclo d'isteresi ricavato dal programma ha un andamento leggermente differente rispetto agli altri due casi. Infatti, le deformazioni ricavate in direzione 33 sono molte piccole, inferiori di due ordini di grandezza rispetto ai risultati precedenti. Si può ipotizzare che a causa dei valori limitati delle deformazioni, il ciclo assume questo andamento non conforme. In Fig. 6-9 sono rappresentati i cicli d'isteresi ricavati attraverso il calcolo delle tensioni e delle deformazioni nelle varie direzioni. Si può notare che le tensioni e le deformazioni in direzione 23, sono molto piccole rispetto alle altre direzioni. Questo è visibile anche in Fig. 6-10.

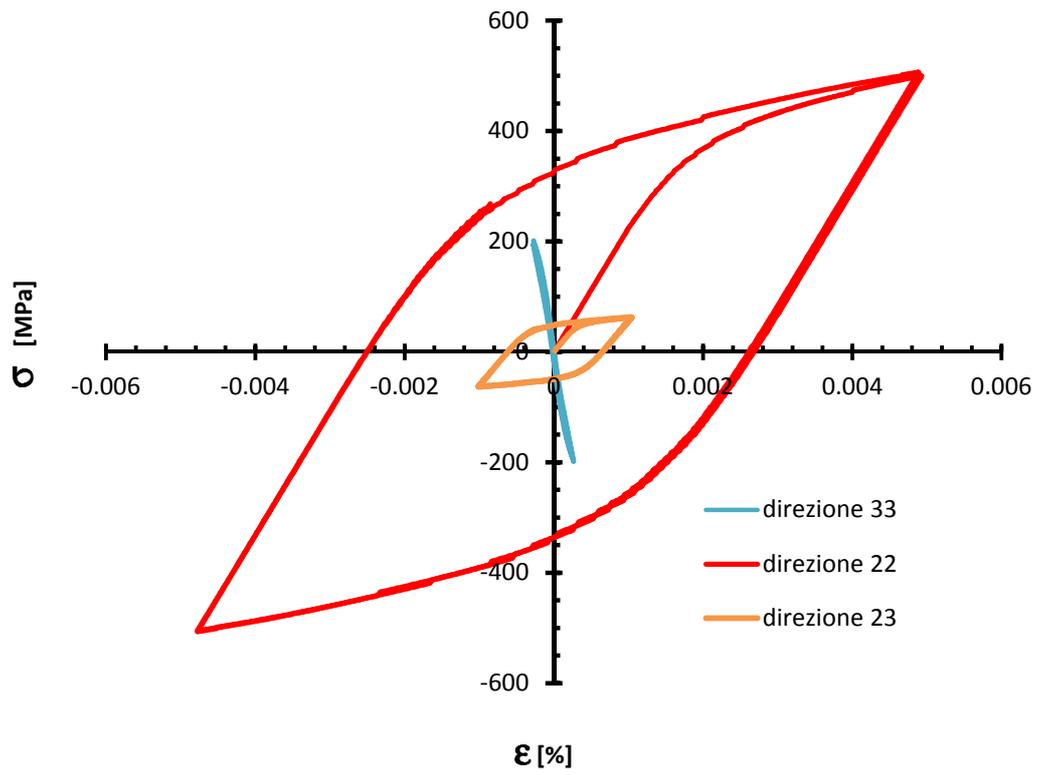


Figura 6-9 Cicli d'isteresi calcolati nelle varie direzioni.

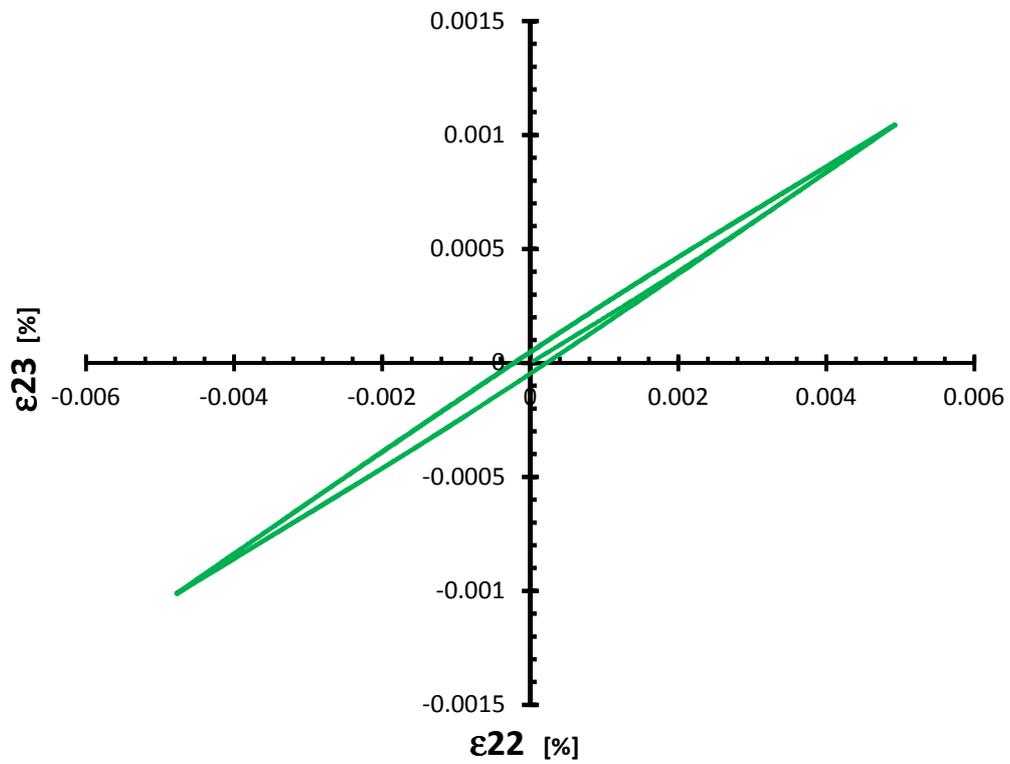


Figura 6-10 Cicli d'isteresi ϵ_{23} - ϵ_{22} .

In Fig. 6-10 è rappresentato il ciclo d'isteresi ottenuto considerando in ascissa le ε_{22} e in ordinata le ε_{23} . Si può notare che le deformazioni calcolate in direzione 23 sono molto inferiori rispetto alle deformazioni ricavate in direzione 22. Questo risultato comporta che il momento torcente utilizzato nella simulazione è troppo basso. Nei risultati illustrati nell'articolo di Ye et al. (2008) [6], le deformazioni calcolate nelle due direzioni hanno circa lo stesso ordine di grandezza. Sono state effettuate quindi delle altre analisi al fine di ricavare una buona corrispondenza tra i valori calcolati da Ye e i valori ottenuti dalle simulazioni numeriche con il software.

6.1.2 Seconda simulazione: aumento del momento torcente

Rispetto alla simulazione effettuata nel paragrafo 6.1.1., l'unico parametro cambiato all'interno del software è il valore del momento torcente applicato. In questo caso si imposta un momento torcente pari a 1000 Nm. In Fig. 6-11 è riprodotto l'andamento della tensione tangenziale.

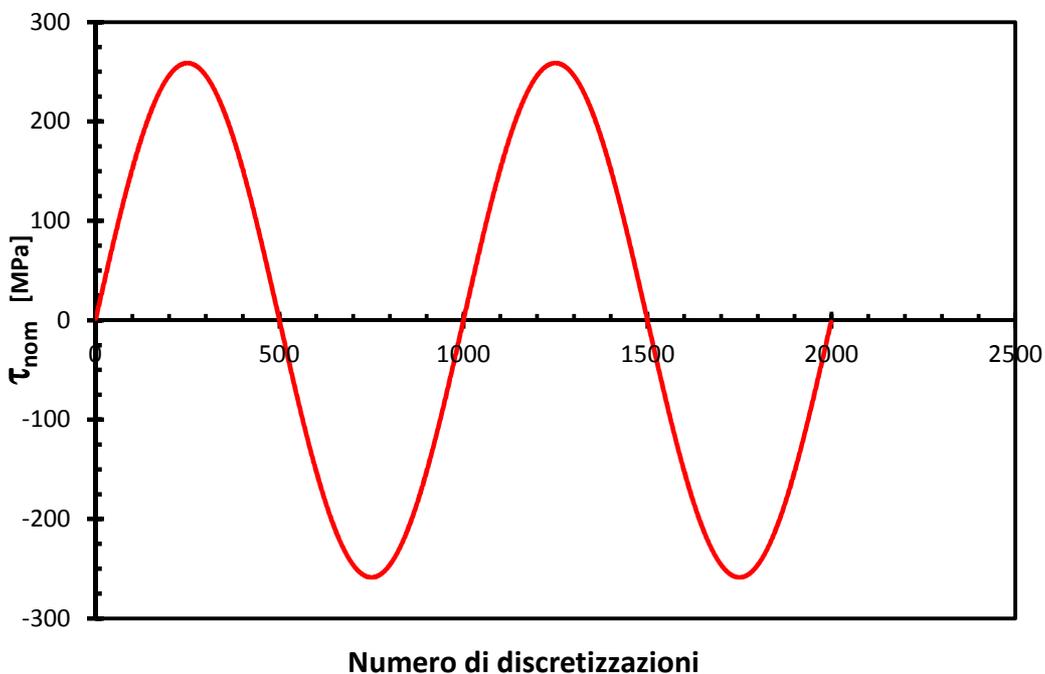


Figura 6-11 Andamento tensione nominale di torsione in funzione del numero di divisioni

Confrontando la Fig.6-11 con la Fig.6-4 si può notare che la tensione nominale è molto più elevata nella seconda simulazione rispetto a quella utilizzata nella prima analisi.

Si riporta di seguito il grafico riassuntivo dei cicli d'isteresi calcolati nelle diverse direzioni.

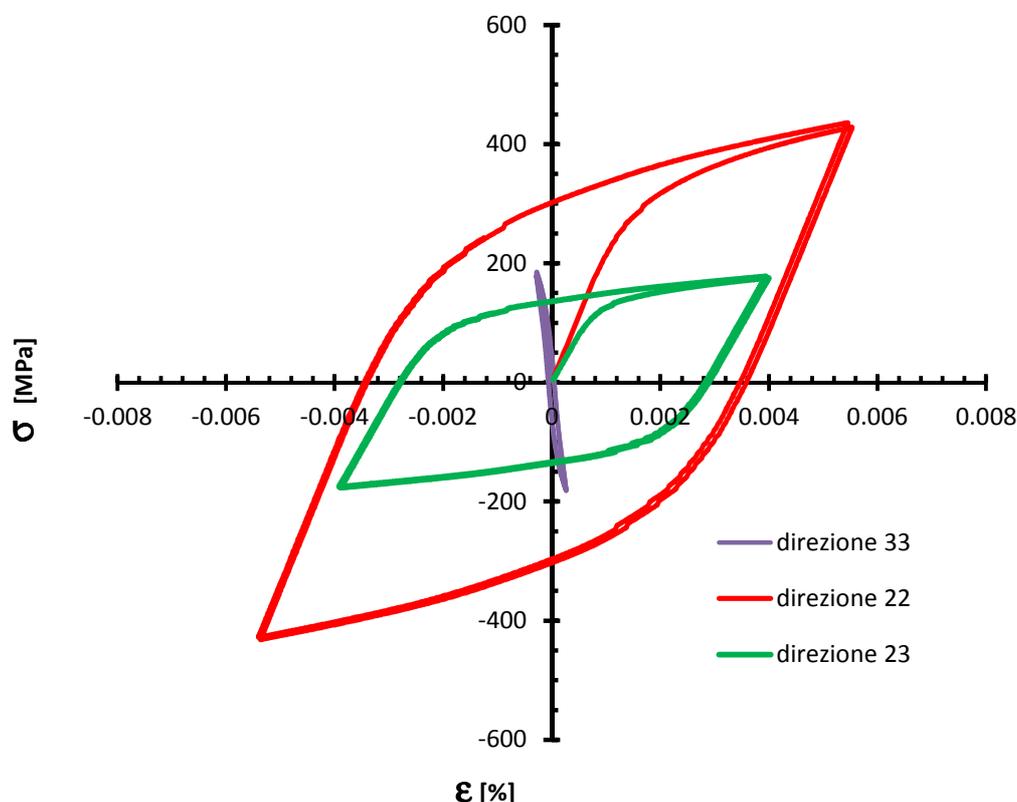


Figura 6-12 Cicli d'isteresi calcolati nelle varie direzioni.

Dalla figura 6-12 si può notare che le deformazioni calcolate in direzione 22 e 23 hanno un valore massimo molto simile tra loro. Nella figura 6-13 è diagrammato l'andamento delle deformazioni 23 in funzione delle deformazioni 22. In figura 6-14 invece è riportato il grafico con i valori calcolati da Ye et al.(2008) [6]. Si può notare, dal confronto dei due grafici, che le deformazioni in direzione 22 hanno dei valori di picco simili. In direzione 23 invece, i valori ricavati da Ye et al.(2008) [6] sono più elevati rispetto a quelli ottenuti dalla simulazione numerica. Purtroppo non avendo informazioni aggiuntive sui carichi applicati da Ye, è stato possibile effettuare solo un confronto qualitativo sui risultati ottenuti.

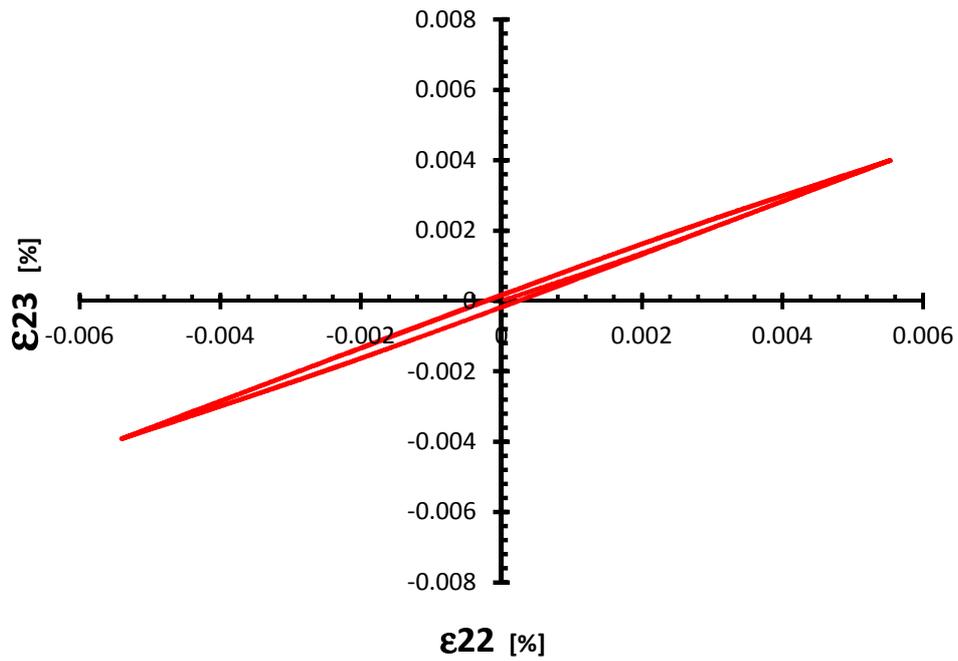


Figura 6-13 Cicli d'isteresi ϵ_{23} – ϵ_{22} .

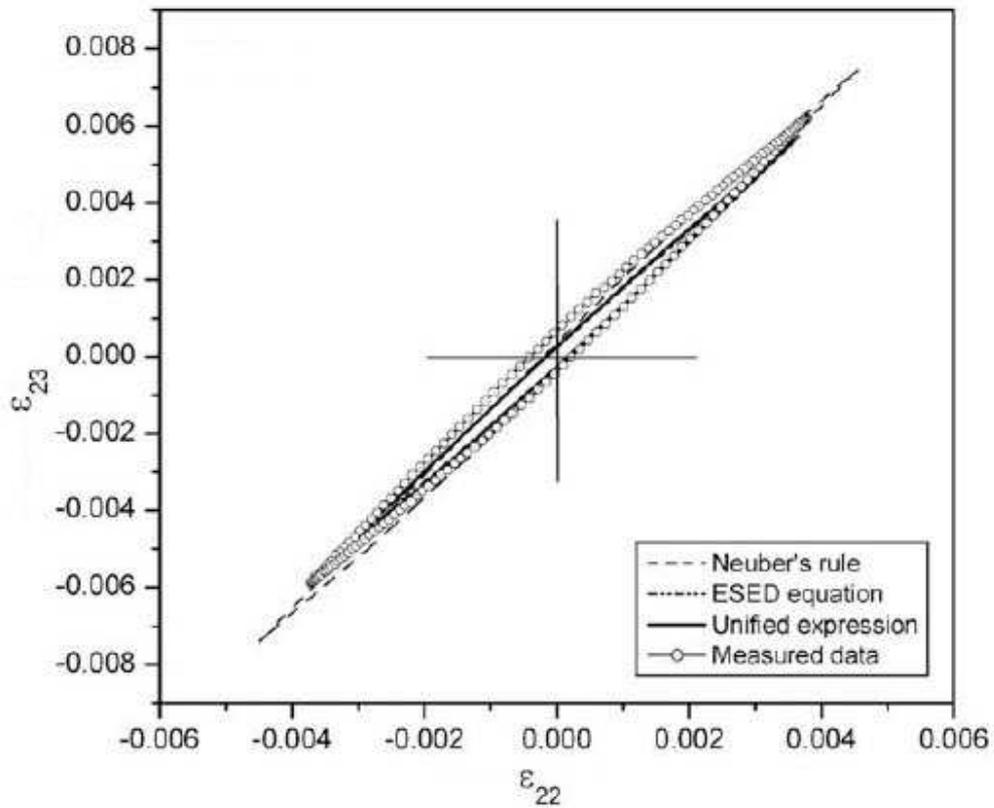


Figura 6-14 Cicli d'isteresi ϵ_{23} – ϵ_{22} calcolati da Ye.

In Fig. 6.14 sono riportati i risultati ottenuti considerando tutti i metodi approssimati descritti nel capitolo 1. Nei paragrafi successivi si riporta l'andamento delle componenti di tensione e deformazione calcolate rispettivamente con la regola di Neuber e il metodo ESED. Inoltre, viene effettuato un confronto qualitativo sulle previsioni, in termini di tensione e deformazione locali, ottenute mediante i tre metodi.

6. 1. 3 Terza simulazione: regola di Neuber

Utilizzando i parametri definiti nei paragrafi 6.1.1 e 6.1.2, si ricavano le tensioni e deformazioni locali utilizzando la regola di Neuber. Come definito nel paragrafo 1.4, se il coefficiente C_q viene posto uguale a zero, dall'espressione unificata 1-70 si ricava la regola di Neuber. All'interno del software si imposta il coefficiente C_q pari a zero, lasciando gli altri parametri invariati. I risultati ottenuti dalla seguente simulazione non sono però corretti. Infatti, il ciclo d'isteresi ricavato dalla soluzione numerica non è coerente con l'andamento delle curve conseguite in precedenza. La regola di Neuber, come riportato nel paragrafo 1.4, sovrastima le tensioni e le deformazioni locali rispetto al metodo ESED e all'ESED modificato. Per questo motivo quindi, la tensione calcolata dalla regola di Neuber è più elevata rispetto a quella calcolata con il metodo ESED. Nella definizione delle costanti del materiale descritta nel paragrafo 6.4, viene riportata la formula 4-22 per il calcolo della tensione massima utilizzata nella discretizzazione della curva di Ramberg-Osgood. Attraverso la divisione della curva ciclica si calcolano le costanti utilizzate nel modello elasto-plastico. La tensione massima rappresenta il valore massimo di tensione che il modello riesce a simulare. Nel caso del metodo ESED modificato, i carichi esterni applicati non inducono una tensione locale maggiore della tensione massima definita nel calcolo delle costanti. La regola di Neuber invece, determina una tensione locale maggiore della massima tensione che il modello è in grado di simulare. Per questo motivo quindi, la simulazione effettuata con un momento esterno applicato di 1000Nm ed utilizzando la regola di Neuber non garantisce dei risultati corretti. Al fine di confrontare i valori di tensione e deformazione ottenuti utilizzando la regola di Neuber e il metodo ESED modificato, è stata imposto nel software un momento torcente pari a 700Nm. I risultati ricavati sono diagrammati nelle figure sottostanti.

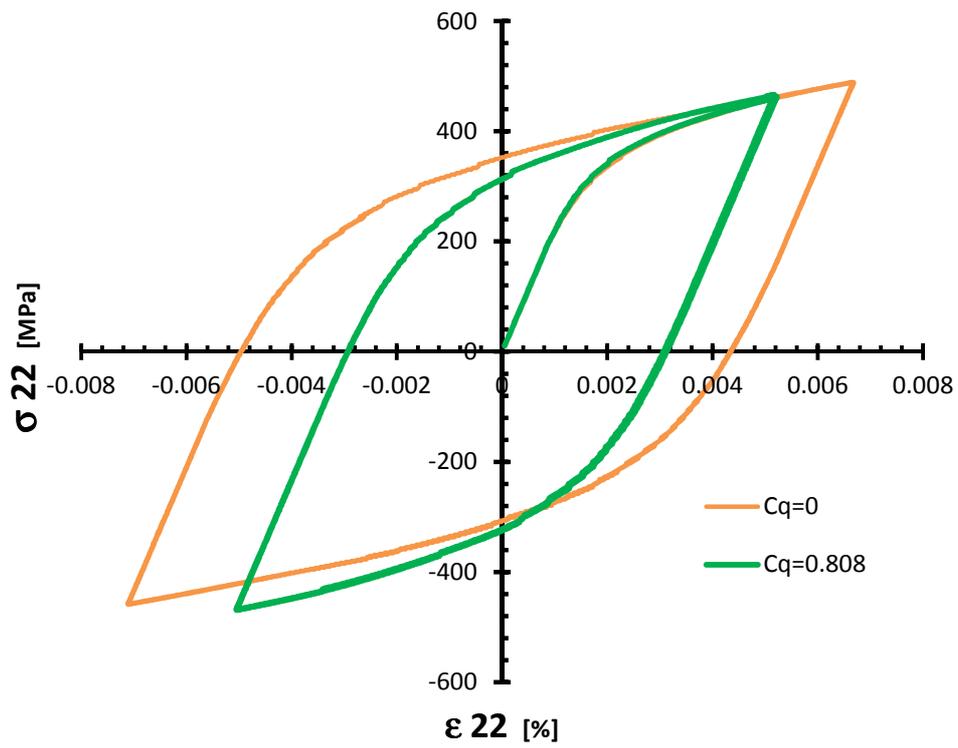


Figura 6-15 Cicli d'isteresi σ_{22} - ϵ_{22} .

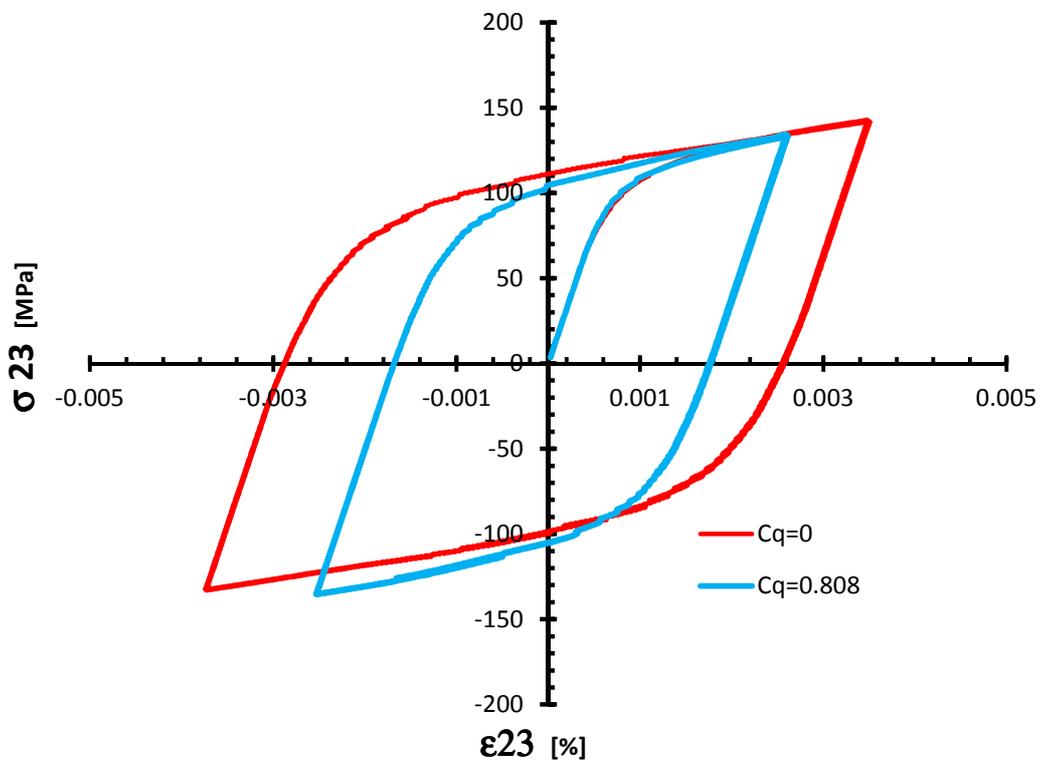


Figura 6-16 Cicli d'isteresi σ_{23} - ϵ_{23} .

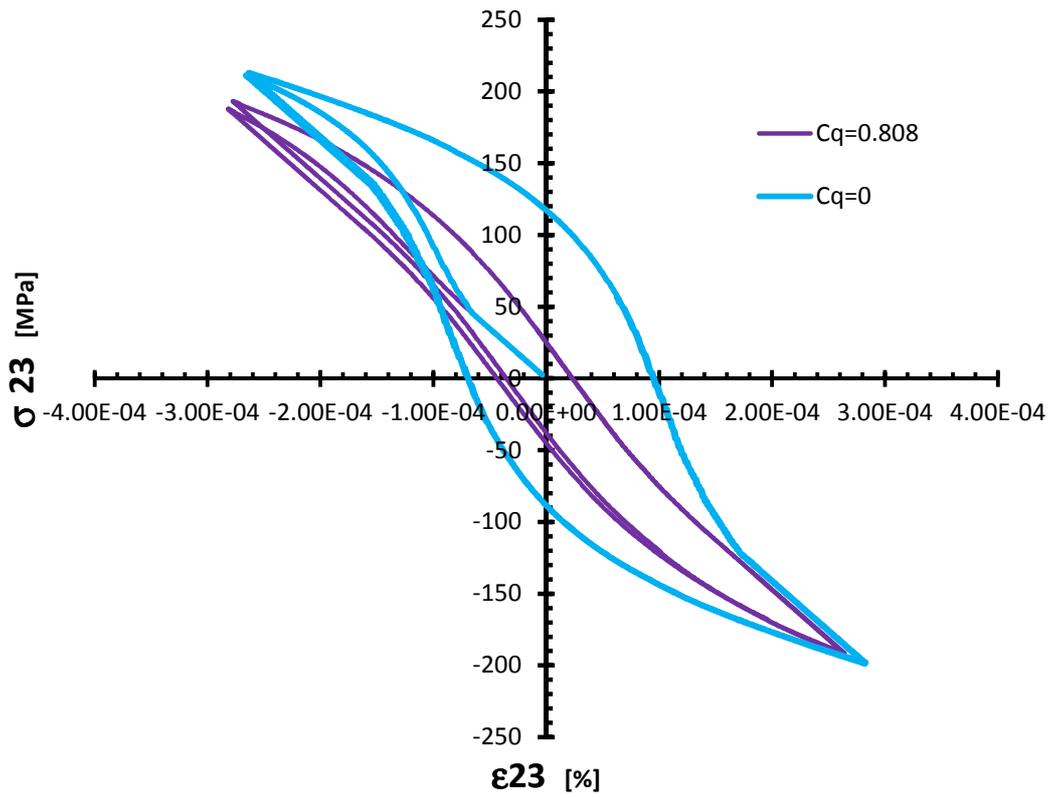


Figura 6-17 Cicli d'isteresi σ_{33} – ϵ_{33} .

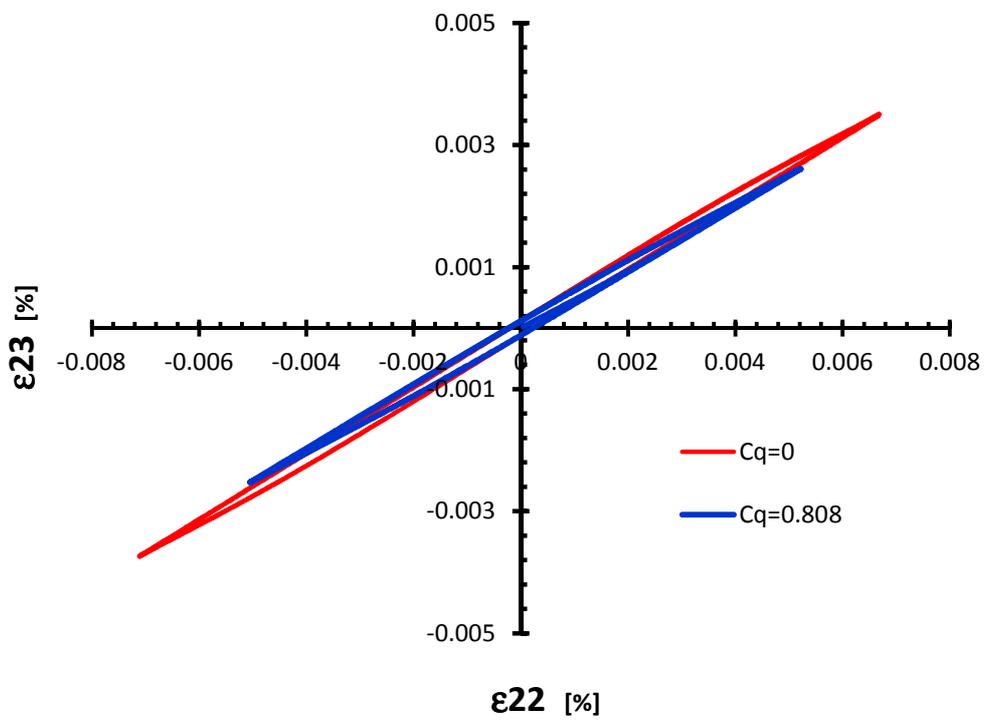


Figura 6-18 Cicli d'isteresi σ_{23} – ϵ_{23} .

Dall'analisi dei risultati è stato possibile verificare che la regola di Neuber sovrastima le tensioni e le deformazioni locali all'apice dell'intaglio rispetto ai valori ottenuti utilizzando il metodo ESED modificato.

6. 1. 4 Quarta simulazione: metodo ESED

Nella seguente simulazione si vogliono ricavare le tensioni e le deformazione utilizzando il metodo ESED. Questo metodo approssimato si ottiene ponendo C_q uguale ad uno nell'espressione unificata, come descritto nel paragrafo 1.4. I valori dei parametri inseriti nel software sono definiti nei paragrafi precedenti, con il momento torcente assunto pari a 700Nm. Il software però non riesce a completare la simulazione. Il sistema delle equazioni definito dalle formule 5-21, 5-22, 5-23, 5-25, 5-26, 5-27, 5-28, ponendo C_q uguale ad 1 diventa un sistema di equazioni linearmente dipendenti e non è più possibile la risoluzione dello stesso. Il sistema diventa quindi irrisolvibile. Al fine di poter effettuare comunque la simulazione per il metodo ESED normale, si è considerato un C_q prossimo ad 1. In particolare, dopo aver effettuato numerose prove, il valore più elevato di C_q che consente una risoluzione del sistema lineare è equivalente a 0,96. Nei grafici riportati di seguito sono confrontati i risultati ottenuti rispettivamente con il metodo ESED modificato ($C_q = 0,805$) e con il metodo ESED ($C_q=0,96$).

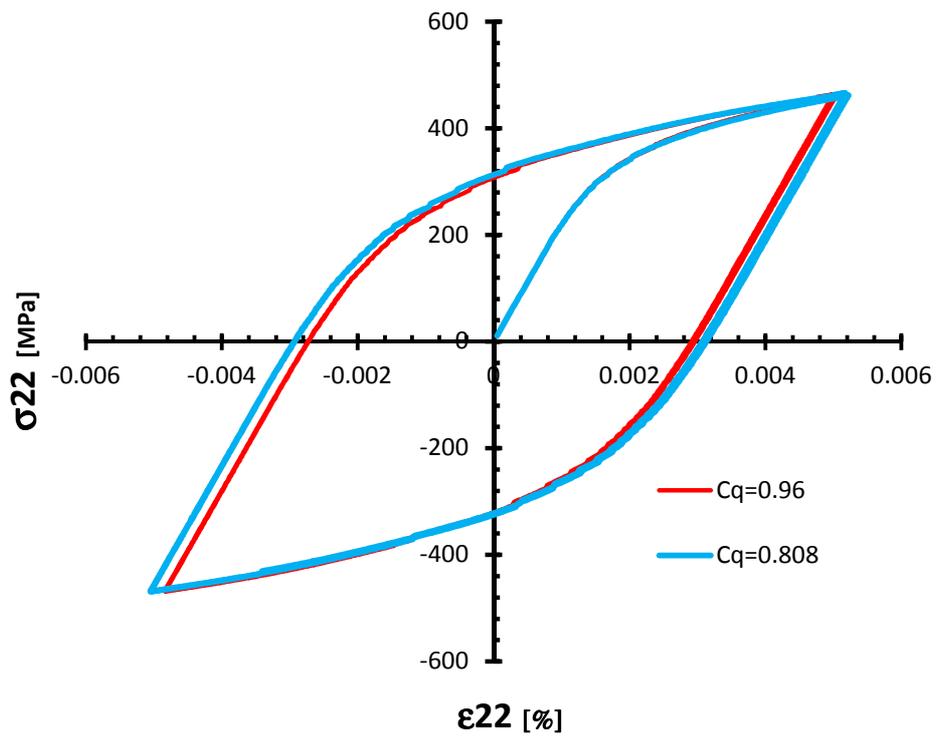


Figura 6-19 Cicli d'isteresi σ_{22} - ϵ_{22} .

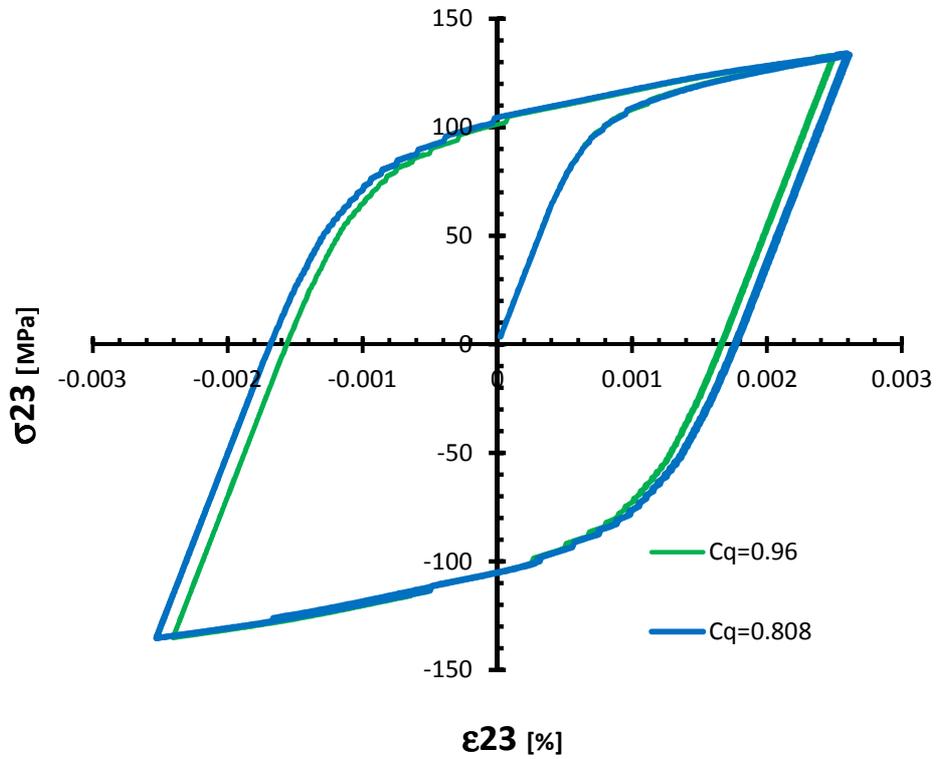


Figura 6-20 Cicli d'isteresi σ_{23} - ϵ_{23} .

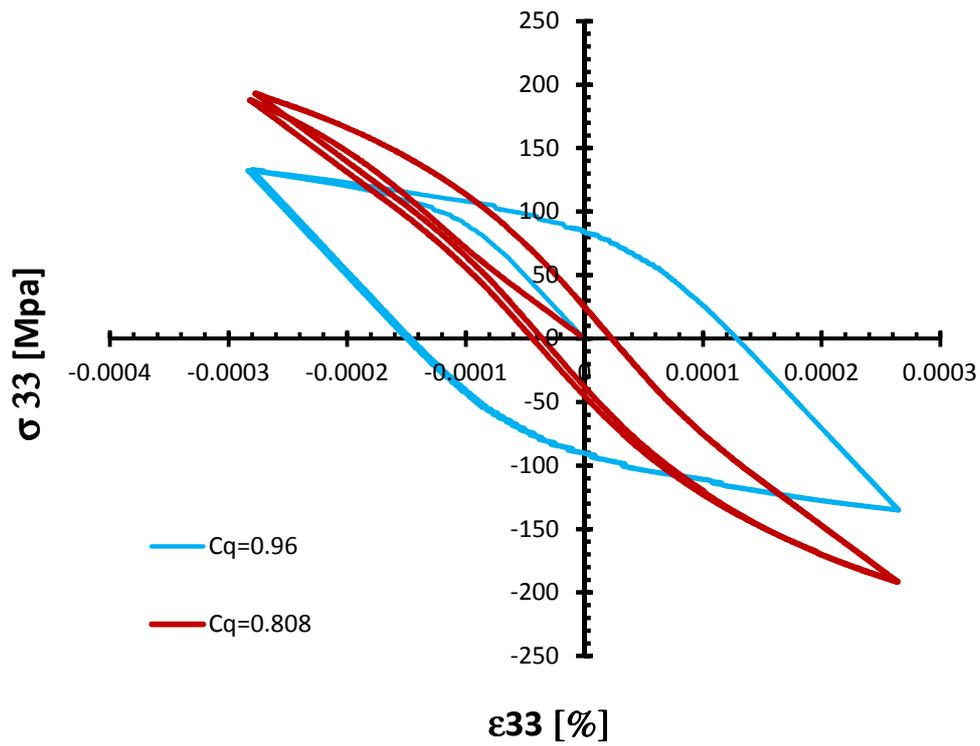


Figura 6-21 Cicli d'isteresi σ_{33} – ϵ_{33} .

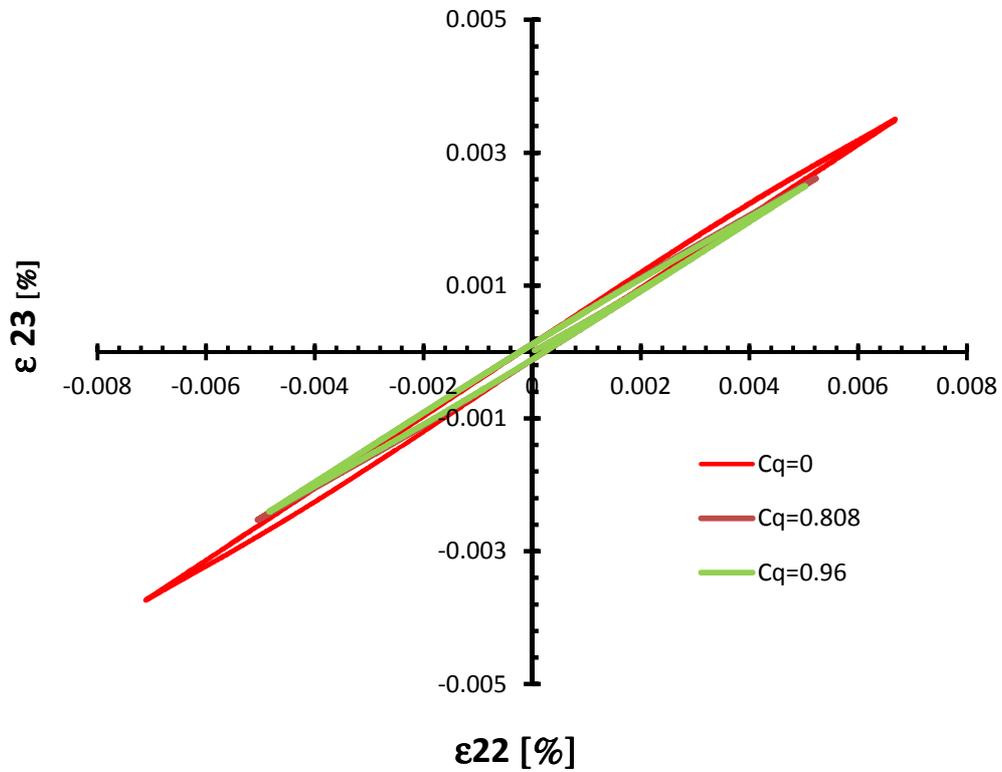


Figura 6-22 Cicli d'isteresi ϵ_{23} – ϵ_{22} .

Dalle Fig. 6-19 e 6-20 si può notare che il metodo ESED modificato sovrastima leggermente le tensioni e le deformazioni rispetto al metodo ESED originale. Le componenti calcolate in direzione 22 e 33 sono molto simili tra loro, infatti l'andamento dei cicli d'isteresi è praticamente coincidente. Nella direzione 33, Fig.6-21, i cicli d'isteresi calcolati nei due metodi assumono degli andamenti differenti tra loro. Comunque, i valori ricavati con il metodo ESED modificato sono maggiori rispetto alle soluzioni calcolate con il metodo ESED. In Fig.6-22 sono confrontati i valori delle deformazioni per i tre metodi considerati. Si può notare che la regola di Neuber sovrastima ampiamente il calcolo delle deformazioni, mentre per i metodi ESED ed ESED modificato la differenza è lieve. Comunque l'andamento delle isteresi in Fig.6-22 rispecchia con una buona approssimazione, le curve calcolate da Ye et al. (2008) [6] visibili in Fig. 6-14. Il sistema di equazioni definito all'interno del software, non consente un'ottimale risoluzione del problema per il metodo ESED, ossia $C_q=1$. Per ovviare a questo problema è stato considerato un C_q tendente ad uno e i risultati ottenuti attraverso questa soluzione sono attendibili. Si pone però la necessità di implementare un sistema di equazioni che resti linearmente indipendente per qualsiasi valore di C_q utilizzato.

6.2 RISULTATI OTTENUTI PER L'ACCIAIO 16MnR

Nell'articolo di Gao et al. (2010) [31], sono stati confrontati i risultati ottenuti dalla simulazione numerica al calcolatore, mediante l'implementazione di un software basato sul modello elasto-plastico di Jiang-Sehitoglu, con i risultati ricavati da un'analisi agli elementi finiti. Il materiale utilizzato è il 16MnR le cui proprietà meccaniche sono definite in Tab. 4-6. Il componente considerato è un provino cilindrico avente un intaglio circonferenziale sulla mezzeria. La geometria qualitativa è visibile nella Fig.6-23.

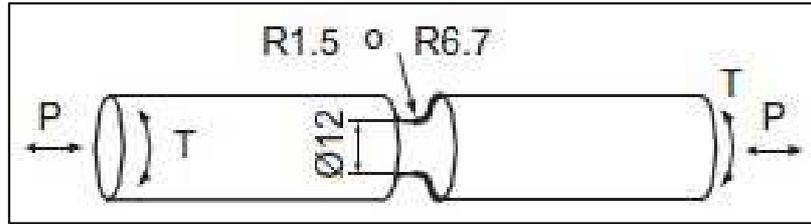


Figura 6-23 Geometria provino.

Gli autori nell'articolo non forniscono altre informazioni riguardanti le dimensioni del provino analizzato. Per questo motivo non è stato possibile calcolare in modo univoco i valori dei fattori teorici di concentrazione delle tensioni necessari per la simulazione al calcolatore. Nelle analisi effettuate si considera il raggio dell'intaglio pari a 1,5 millimetri. I coefficienti di concentrazione delle tensioni assunti sono quelli definiti nel paragrafo 6.1. Gli autori però definiscono i carichi applicati nelle varie analisi effettuate. Attraverso numerose simulazioni si confrontano i risultati ricavati dall'analisi del comportamento del materiale con i risultati riportati dagli autori. I metodi approssimati analizzati nell'articolo sono la regola di Neuber e il metodo ESED incrementale. Non viene effettuata da parte degli autori la simulazione numerica per il metodo ESED.

I parametri impostati all'interno del software sono i seguenti:

- Momento torcente = 60 Nm;
- Forza trazione = 34.62 kN;
- Il carico considerato è proporzionale, in accordo con il path presente in Fig. 6-3;
- I coefficienti di intensificazione delle tensioni definiti nel paragrafo 6.1;
- Le costanti del materiale esplicitati nella Tab. 4-5;
- Tensione di snervamento $k = 150$ MPa;
- Le proprietà meccaniche specificate in Tab. 4-6;
- Il diametro del componente, $d = 11.79$ mm;
- La simulazione viene effettuata per due cicli di carico;

Le equazioni costituenti il sistema lineare nell'articolo di Gao et al. (2010) [31], non sono quelle impiegate finora, ma gli autori, invece di considerare l'espressione unificata, utilizzano l'espressione dell'energia calcolata rispetto alla direzione 23. L'equazione che sostituisce l'espressione unificata è la seguente:

$$(s_{23} - s_{23}^{(R)}) de_{23} + (e_{23} - e_{23}^{(R)}) ds_{23} = (1 + C_q) \cdot (\sigma_{23} - \sigma_{23}^{(R)}) d\varepsilon_{23} + (1 - C_q) \cdot (\varepsilon_{23} - \varepsilon_{23}^{(R)}) d\sigma_{23} \quad \text{Eq.6-1}$$

Nei paragrafi successivi si confrontano i risultati ottenuti utilizzando i due differenti set di equazioni che costituiscono il sistema lineare.

6. 2. 1 Utilizzo dell'espressione unificata incrementale

Nel seguente paragrafo si utilizza il sistema lineare definito dall'espressione unificata e dalle altre equazioni incrementali e energetiche esplicitate nel capitolo 5. I parametri inseriti all'interno del software sono stati precedentemente definiti. L'analisi numerica viene eseguita utilizzando il metodo ESED modificato e la regola di Neuber. Successivamente si confrontano i risultati ottenuti dalla simulazione numerica con quelli determinati dalle analisi di Gao et al. (2010) [31].

Si riportano di seguito i cicli d'isteresi ricavati dalla simulazione numerica.

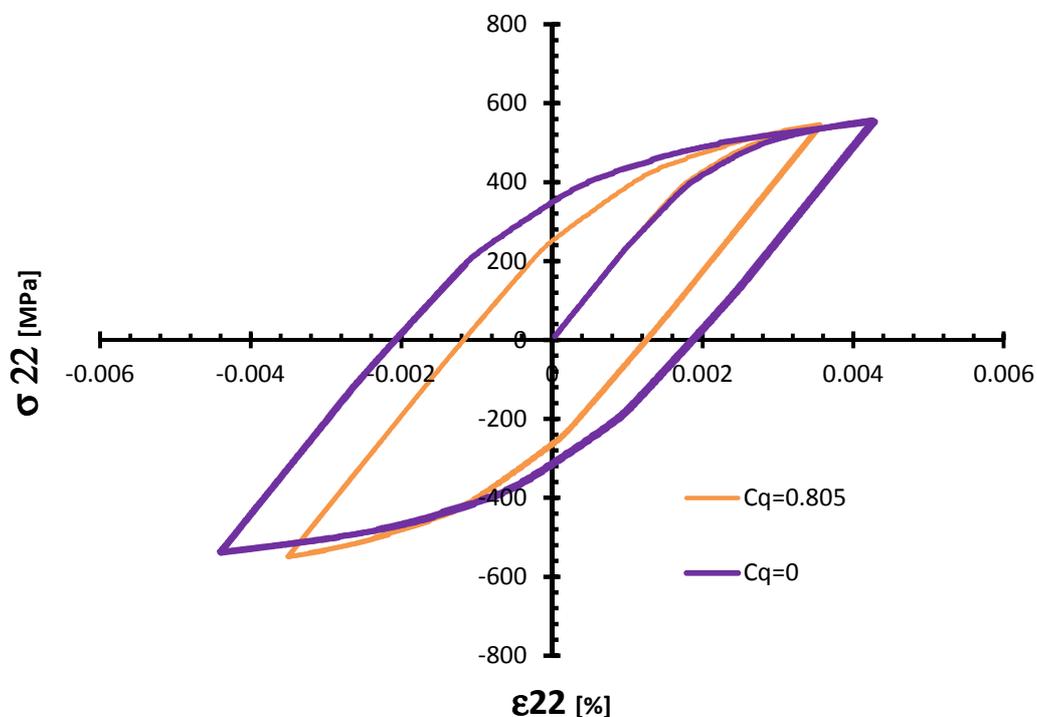


Figura 6-24 Cicli d'isteresi σ_{22} - ε_{22} .

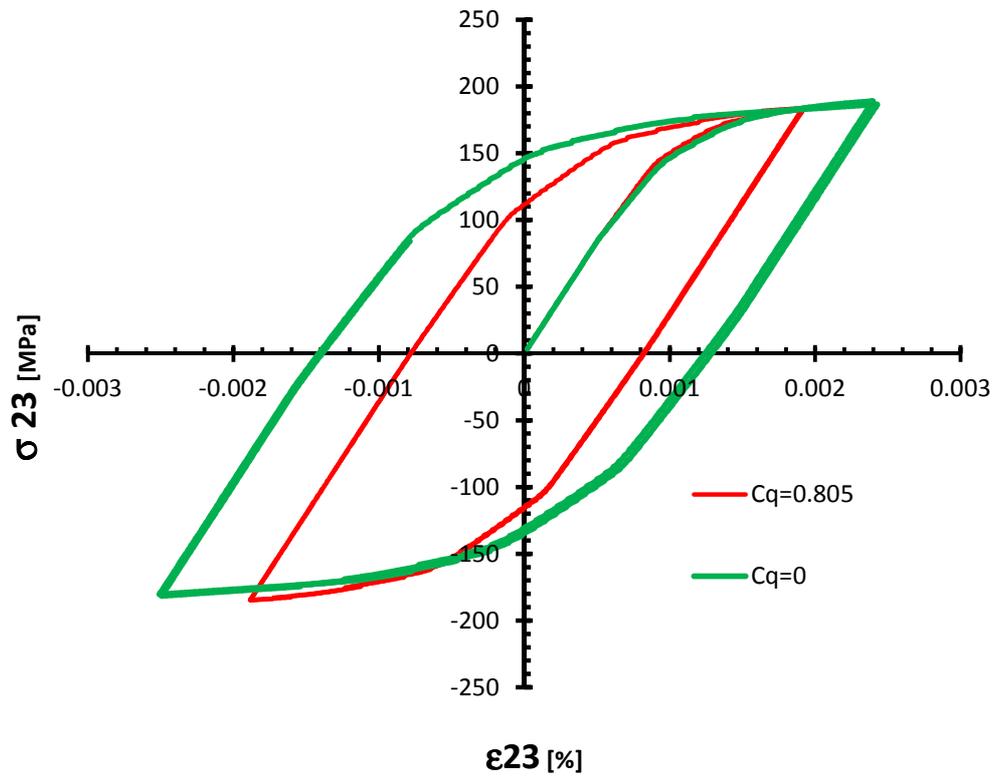


Figura 6-25 Cicli d'isteresi σ_{23} - ϵ_{23} .

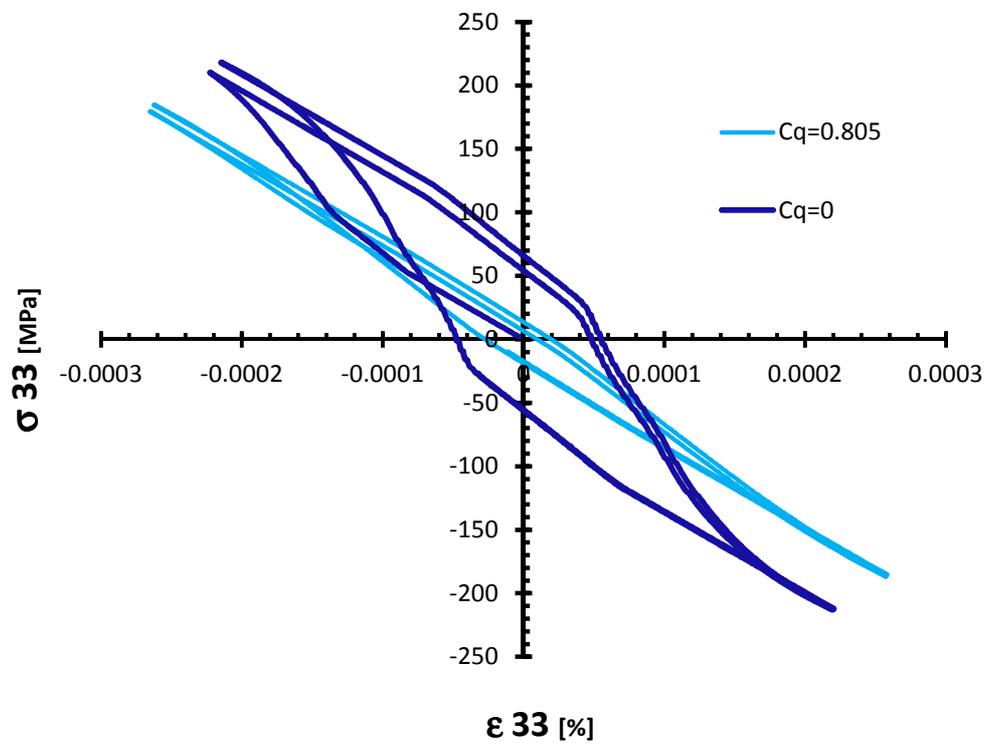


Figura 6-26 Cicli d'isteresi σ_{33} - ϵ_{33} .

Dall'analisi della Fig.6-26 si può notare che il ciclo d'isteresi riferito alla regola di Neuber ha un andamento molto irregolare rispetto a quello calcolato per il metodo ESED modificato. Questo fenomeno può essere spiegato da due ipotesi differenti:

1. Il software elaborato presenta alcune limitazioni per i valori estremi di C_q , ossia per C_q uguale a uno e a zero; questa considerazione è però in antitesi rispetto ai risultati ottenuti nel paragrafo 6.1;
2. il numero di discretizzazioni della curva ciclica stabilizzata, quindi del numero delle costanti del materiale, è troppo piccolo per garantire dei risultati coerenti e corretti anche nel caso della regola di Neuber.

Probabilmente la seconda ipotesi è la più attendibile tra le due, in relazione ai risultati ricavati precedentemente. Comunque anche in questo caso è stato dimostrato che la regola di Neuber sovrastima le tensioni e le deformazioni locali.

6. 2. 2 Utilizzo dell'equazione dell'energia

La simulazione effettuata in questo paragrafo prevede l'utilizzo dell'equazione dell'energia definita in 6-1 al posto dell'espressione unificata incrementale. È stata implementata una versione modificata del software in cui è considerata l'equazione 6-1. La prima simulazione riguarda l'applicazione del metodo ESED modificato, ossia $C_q=0.805$. Nei grafici riportati di seguito vengono confrontati i risultati ottenuti utilizzando le due versioni del software.

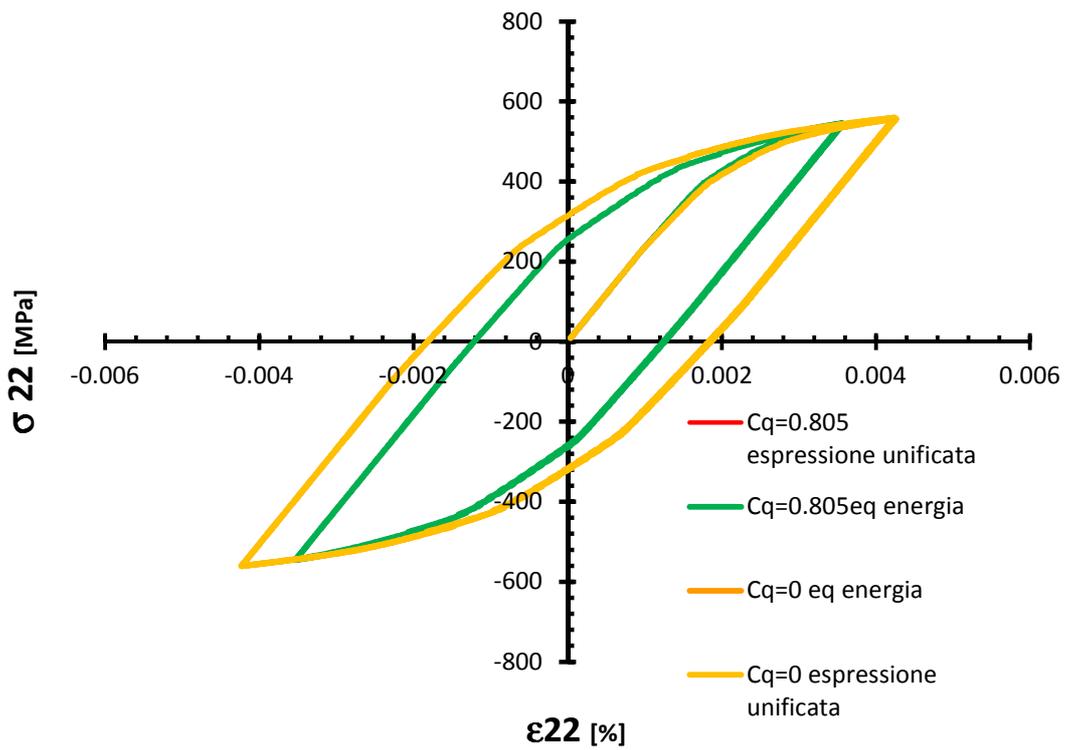


Figura 6-27 Cicli d'isteresi σ_{22} - ϵ_{22} espressione unificata e equazioni energetiche.

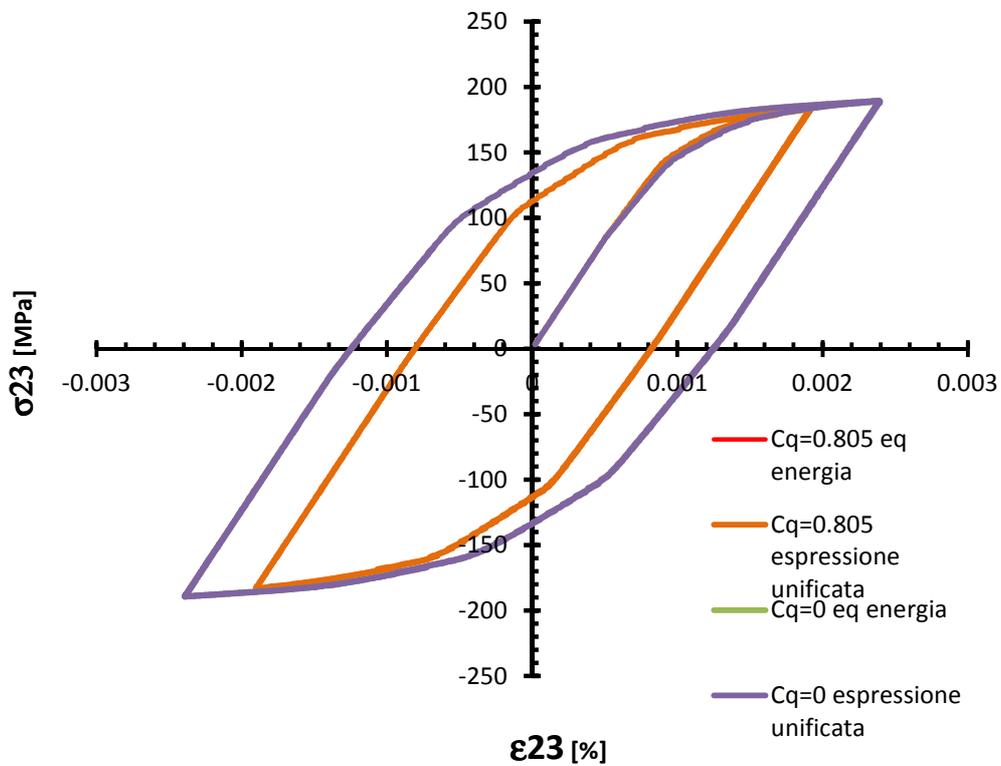


Figura 6-28 Cicli d'isteresi σ_{23} - ϵ_{23} espressione unificata e equazioni energetiche.

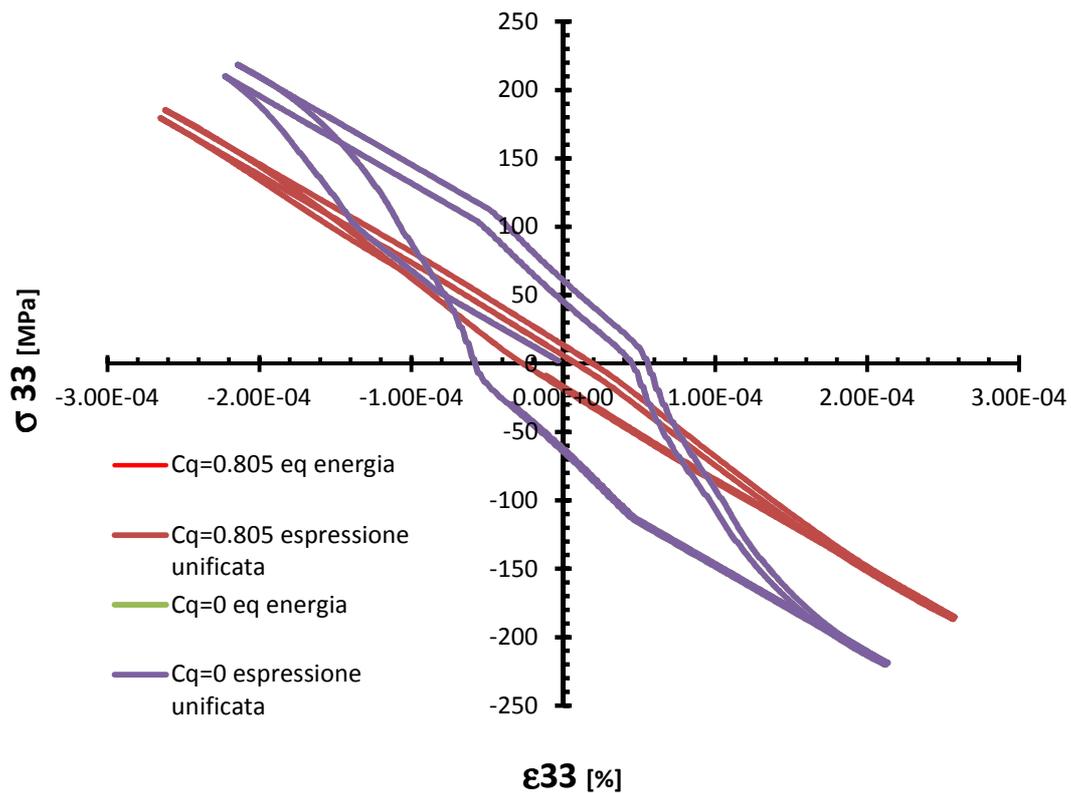


Figura 6-29 Cicli d'isteresi σ_{33} - ϵ_{33} espressione unificata e equazioni energetiche.

Dalle Fig- 6-27-28-29, si può stabilire non c'è alcuna differenza nei risultati ottenuti dalle simulazioni effettuate dalle due versioni del software. Infatti, i cicli d'isteresi ricavati nelle varie direzioni sono praticamente sovrapposti e coincidenti. Si può asserire che ai fini della simulazione numerica, utilizzare un set di equazioni oppure l'altro non determina delle differenze significative, anzi i risultati sono identici. Le analisi effettuate riguardano l'impiego della regola di Neuber e del metodo ESED modificato. Questo risultato però, è in antitesi con le basi teoriche stabilite da Singh et al. (1996)[3], Singh (1998) [4], descritte da Ye et al. (2008) [6] e riportate nel capitolo 5. Nell'articolo infatti, Gao et al. (2010) [31], spiegano chiaramente che, ai fini dei risultati numerici, non esiste alcuna differenza nell'impiego dell'espressione unificata oppure delle tre equazioni dell'energia. Inoltre, il risultato ottenuto è in contrasto con l'affermazione di Ye et al.(2008) [6]. Gli autori infatti asseriscono che delle tre equazioni dell'energia 5-18, 5-19, 5-20, solo due di esse sono linearmente indipendenti e l'utilizzo di tutte e tre le equazioni determinerebbe un sistema linearmente dipendente e quindi irrisolvibile.

Si riportano di seguito i risultati ottenuti da Gao et al. (2010) [31] e le delle curve d'isteresi ricavati mediante la simulazione numerica. Gli assi sono considerati nella stessa scala dei grafici di Gao, in modo da poter effettuare un confronto qualitativo.

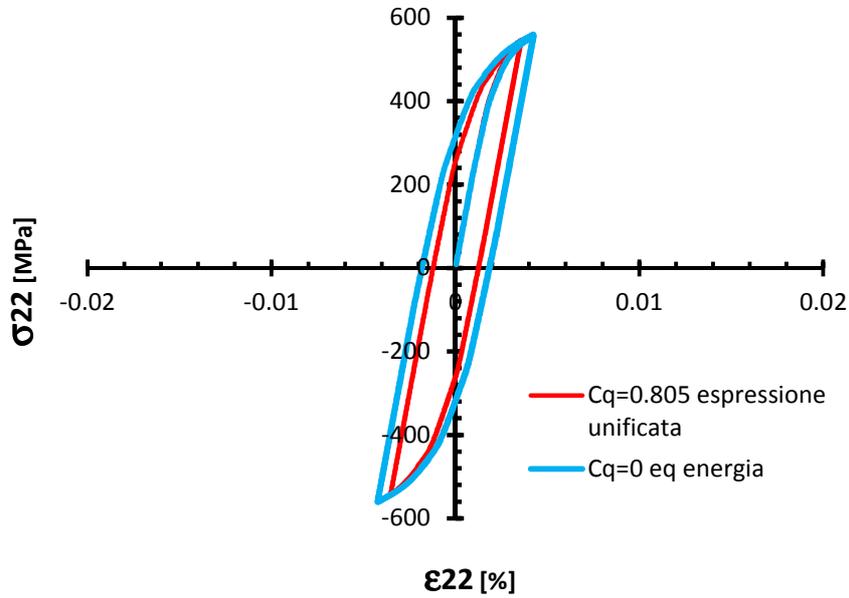


Figura 6-30 Cicli d'isteresi σ_{22} - ϵ_{22} metodo ESED modificato e regola di Neuber.

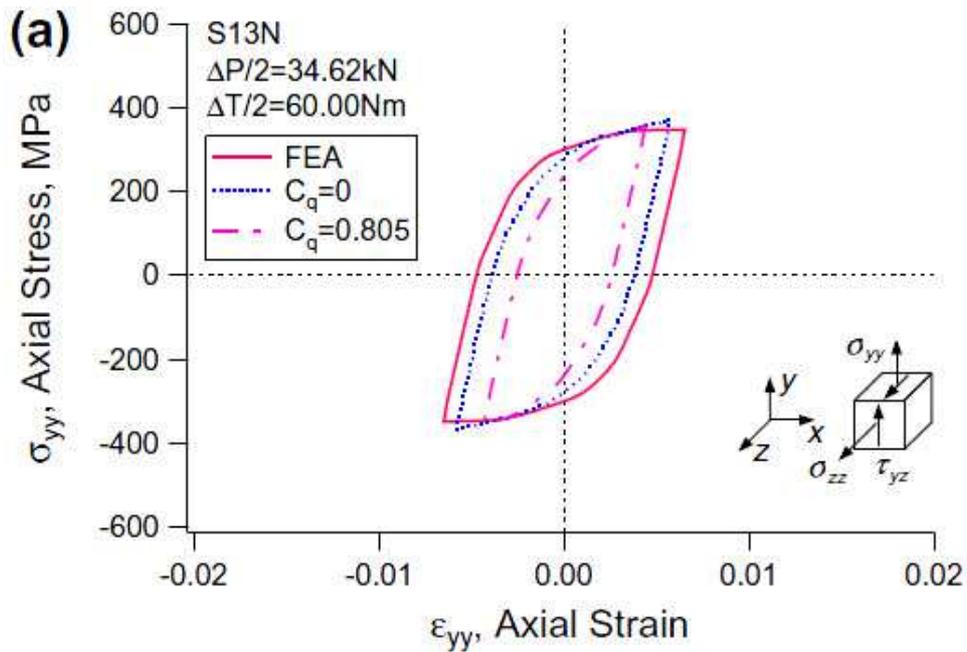


Figura 6-31 Risultati ricavati da Gao: σ_{22} - ϵ_{22} .

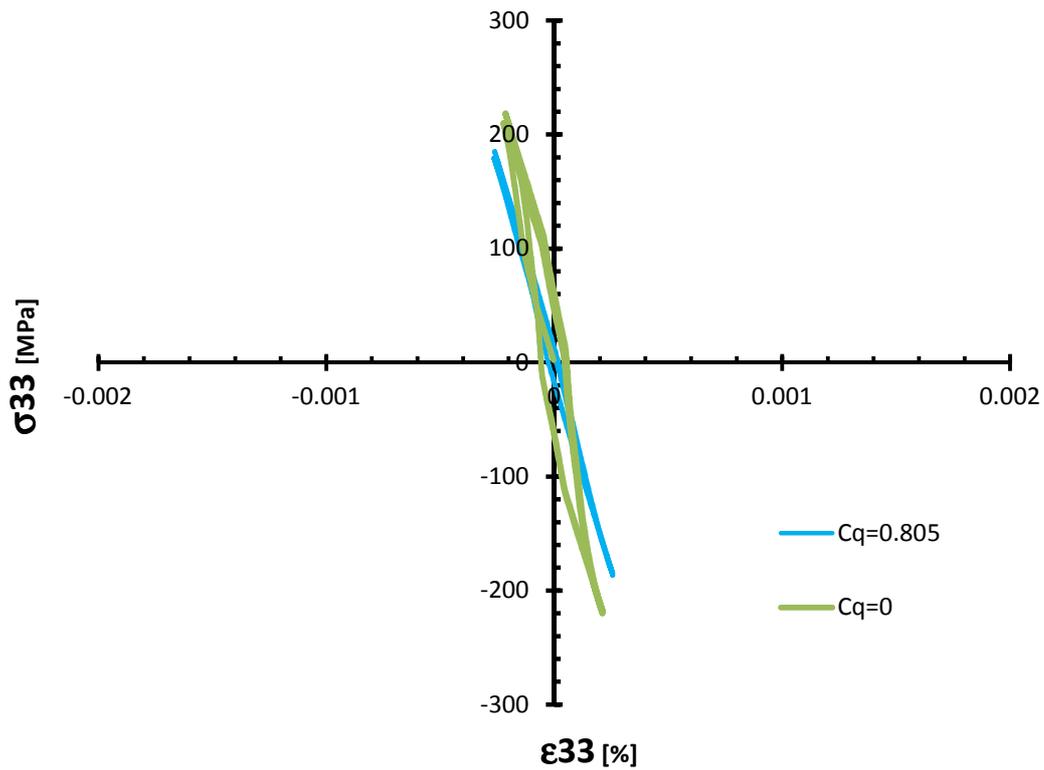


Figura 6-32 Cicli d'isteresi σ_{22} - ϵ_{22} metodo ESED modificato e regola di Neuber.

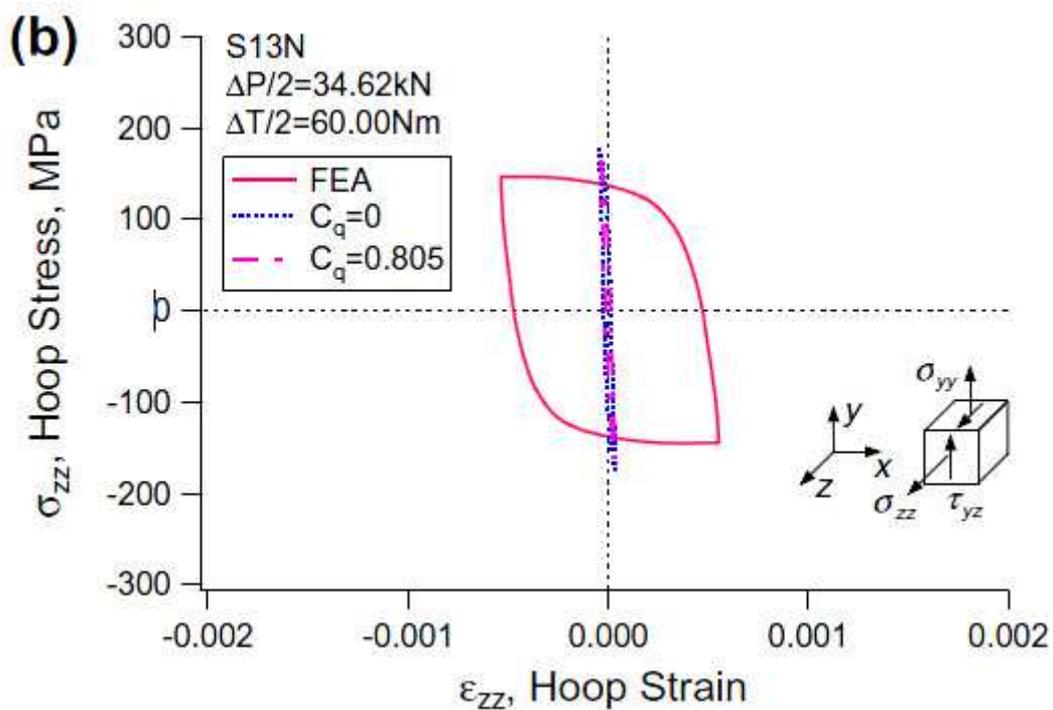


Figura 6-33 Risultati ricavati da Gao: σ_{33} - ϵ_{33} .

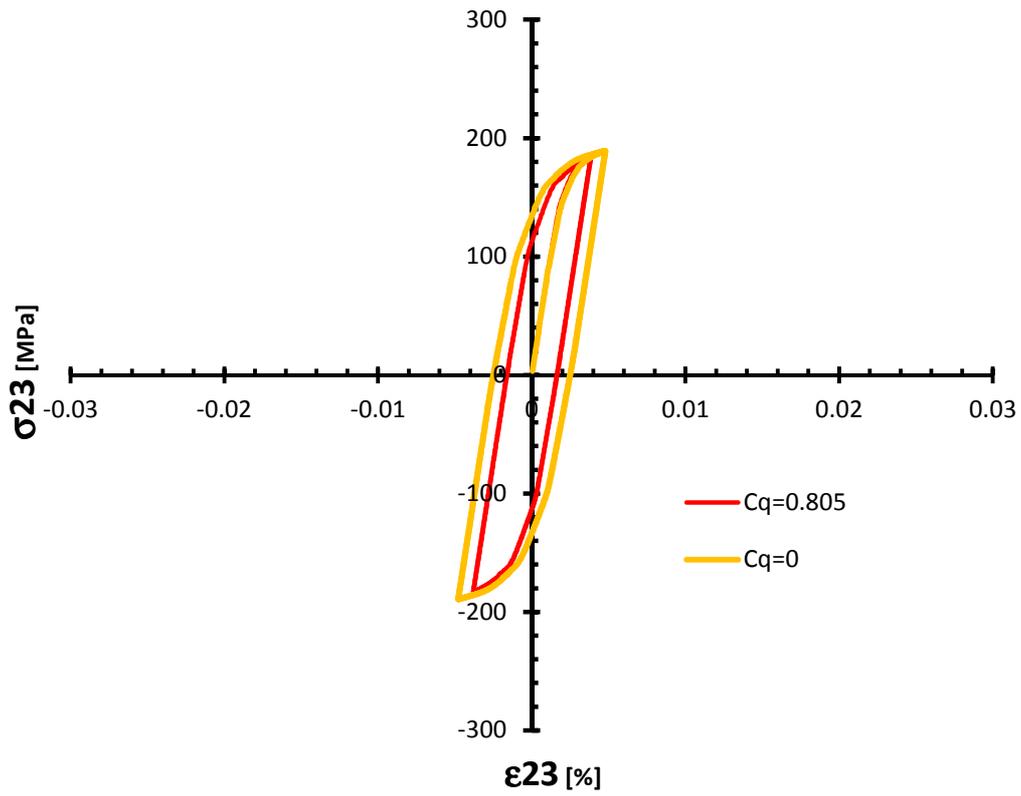


Figura 6-33 Cicli d'isteresi σ_{23} - ϵ_{23} metodo ESED modificato e regola di Neuber.

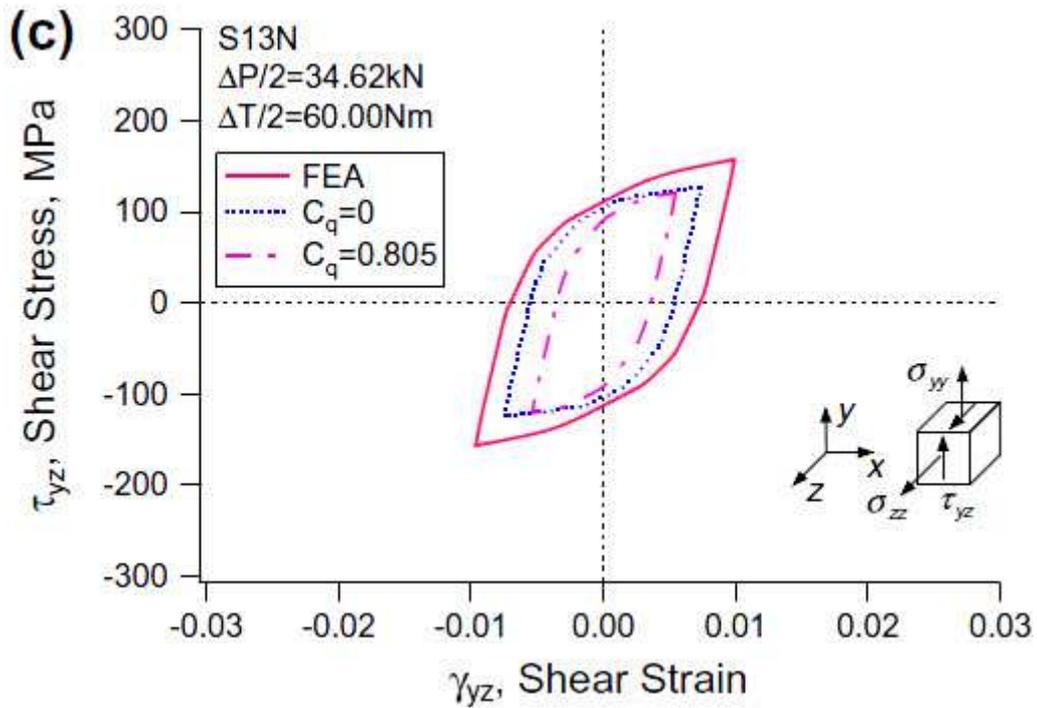


Figura 6-35 Risultati ricavati da Gao: σ_{23} - γ_{23} .

Le tensioni e le deformazioni considerate da Gao et al. (2010) [31], sono ricavate nelle stesse direzioni dei risultati calcolati dalla simulazione numerica effettuata precedentemente. Comunque si può notare, in via del tutto qualitativa, un'ottima corrispondenza tra i valori massimi e minimi di tensione e deformazione ottenuti dalla simulazione numerica e quelli ricavati da Gao. L'andamento dei cicli d'isteresi invece, sembra essere leggermente differente. Confrontando le Fig.6-30 e 6-31 si può notare che il ciclo d'isteresi ricavato dagli autori è molto più largo rispetto a quello derivato dall'analisi numerica del software. Lo stesso concetto è visibile nel confronto tra la Fig.6-33 e 6-34. In questo caso, la differenza tra le isteresi è notevolmente più marcata. Per la direzione 33 invece, ossia Fig. 6-32 e 6-33, la differenza nei due casi sembra essere minore. Il confronto tra i risultati comunque, può essere solo qualitativo, in quanto gli autori non forniscono le dimensioni del provino analizzato.

Gao et al. (2010) [31], confrontano i risultati ottenuti dalla simulazione numerica con quelli ricavati da un'analisi elasto-plastica agli elementi finiti. Come visibile in Fig. 6-31-33-35, i dati ricavati dal FEM sovrastimano le tensioni e le deformazioni rispetto a quelle calcolate dalla simulazione numerica. In Fig. 6-33, si può notare che dall'analisi FEM, si ricavano delle deformazioni molto elevate in direzione 33, dello stesso ordine di grandezza di quelle in direzione 22. Obiettivamente questo risultato sembra essere poco realistico, in relazione anche ai risultati ottenuti dalla simulazione numerica effettuata con il software. Per un'ulteriore verifica comunque si dovrebbe effettuare, con la geometria ed i carichi esatti, un'analisi numerica agli elementi finiti.

6.3 ALTRE SIMULAZIONI EFFETTUATE

6.3.1 Simulazione con un elevato numero di isteresi

Nel seguente paragrafo si riportano i risultati ottenuti utilizzando un numero elevato di cicli di carico. In particolare, sono utilizzati i parametri definiti nel paragrafo 6.1 e la simulazione viene effettuata per cinquanta cicli di carico. Si vuole valutare se all'aumentare dei cicli di carico, le isteresi ricavate hanno un andamento simile tra loro. Nella Fig. 6-36 è visibile l'andamento del ciclo di carico nominale, delle tensioni elasto-plastiche e delle tensioni lineari elastiche. È possibile notare che le tensioni lineari

elastiche calcolate all'apice dell'intaglio sono molto più elevate delle tensioni elasto-plastiche. Questo risultato è in accordo con il fatto che le tensioni lineari elastiche sono maggiori rispetto alle tensioni elasto-plastiche. All'apice dell'intaglio è presente una zona plasticizzata che ridistribuisce le tensioni, determinando uno stato tensionale molto inferiore rispetto ai valori calcolati in campo lineare elastico.

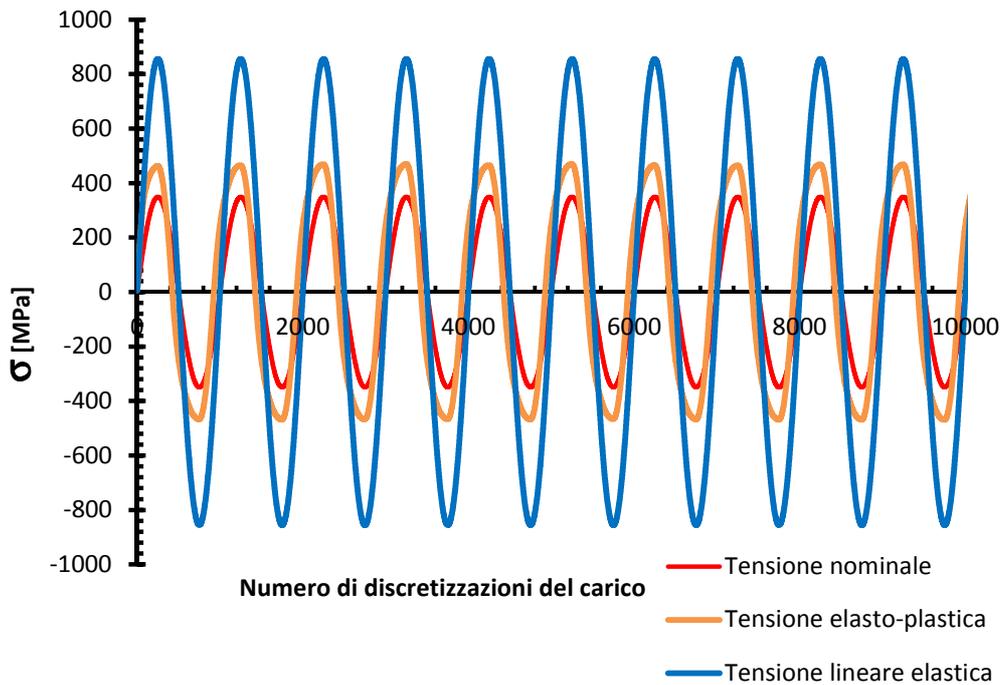


Figura 6-36 Andamento tensioni elasto-plastiche e tensioni nominali

Nei grafici sottostanti sono riportati gli andamenti delle curve d'isteresi ricavate dall'analisi. È stato considerato nell'analisi solamente il metodo dell'ESED modificato.

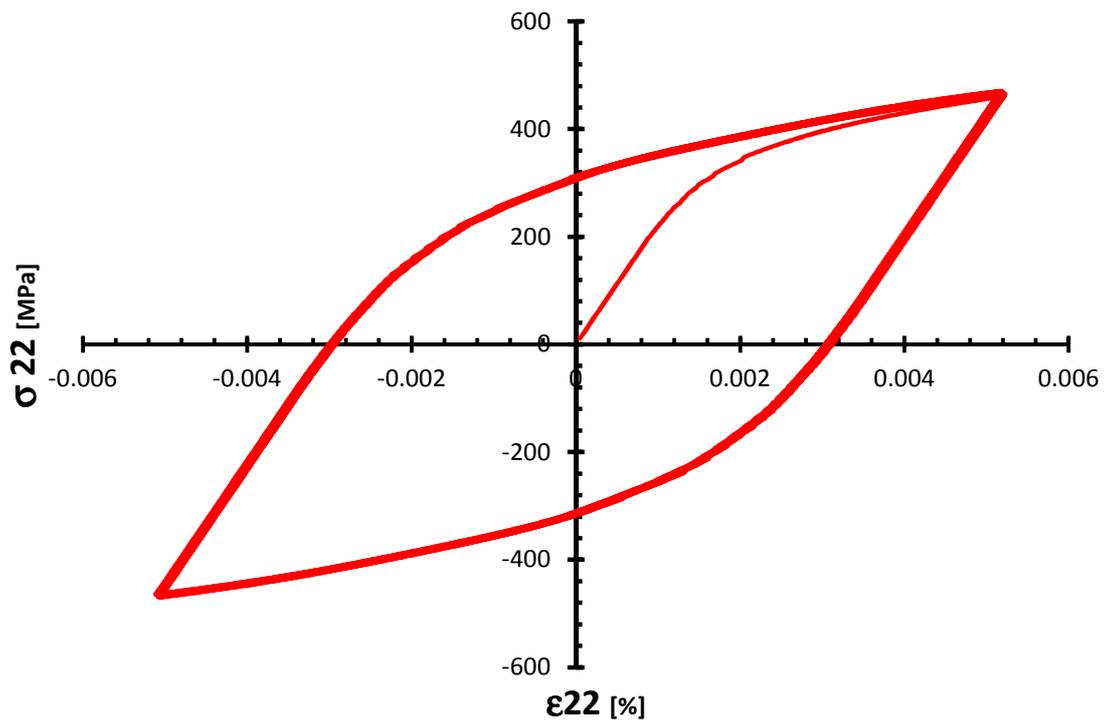


Figura 6-37 Cicli d'isteresi σ_{22} - ϵ_{22} .

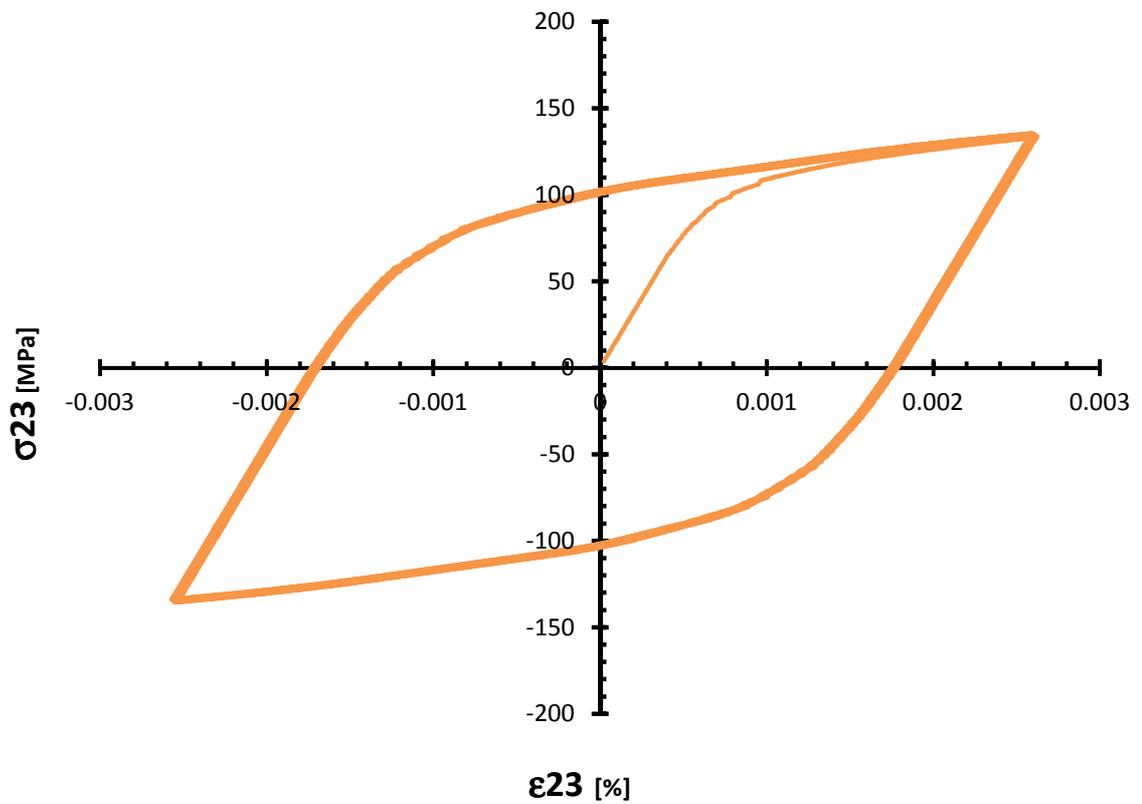


Figura 6-38 Cicli d'isteresi σ_{23} - ϵ_{23} .

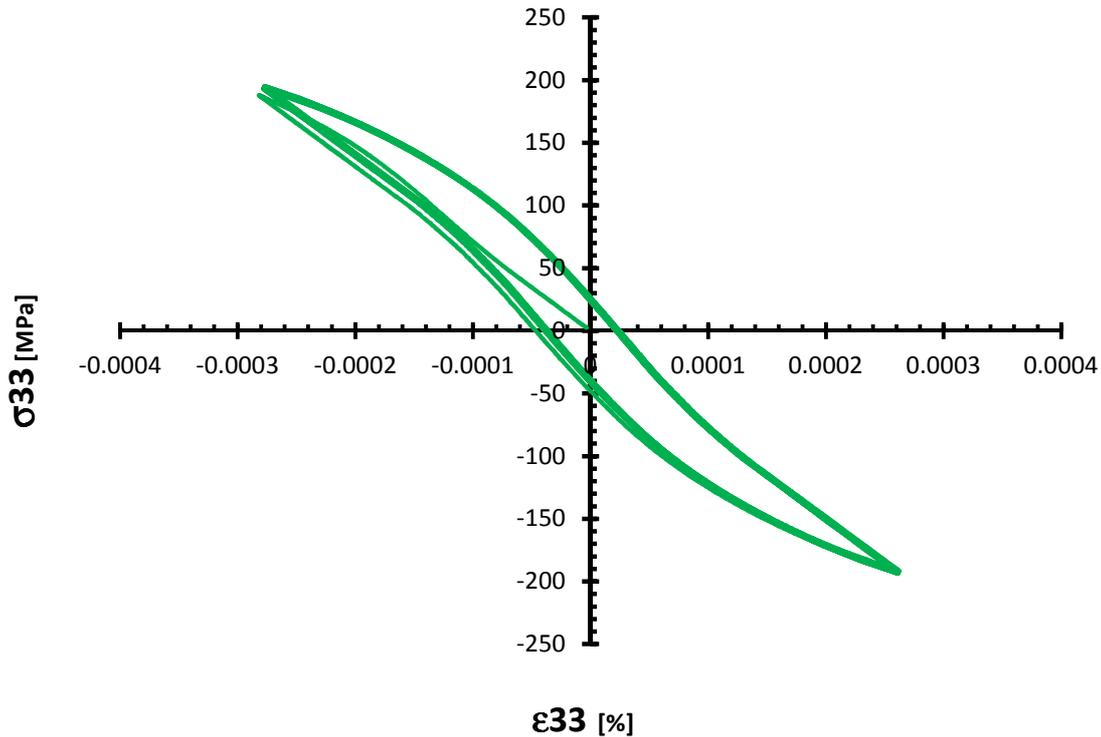


Figura 6-39 Cicli d'isteresi σ_{33} – ϵ_{33} .

Dalle Fig.6-37-38-39, si può notare che le isteresi ricavate dai dati sperimentali hanno un andamento praticamente coincidente all'aumentare del numero dei cicli. I leggeri scostamenti nei valori calcolati possono essere dovuti alla risoluzione numerica dell'algoritmo. All'aumentare del numero dei cicli quindi, l'andamento dell'isteresi calcolata non cambia e quindi è possibile stabilire con certezza che l'algoritmo in questione determina il ciclo d'isteresi stabilizzato.

6. 3. 2 Simulazione con l'aumento dell'ampiezza del carico

Nel seguente paragrafo si analizzano i risultati ottenuti dalla simulazione effettuata variando l'ampiezza del carico. Nel software infatti, è stato implementato un comando attraverso il quale è possibile effettuare delle simulazioni aumentando l'ampiezza delle tensioni nominali alla fine di ogni ciclo di carico. La simulazione è effettuata con i parametri definiti nel capitolo 6.1. I valori del momento torcente e della forza di trazione sono rispettivamente:

$$M_t = 300 Nm$$

$$F = 150 kN$$

L'aumento imposto delle tensioni nominali è del 10% per ogni ciclo di carico. In Fig. 6-40 è visibile l'andamento del ciclo di carico.

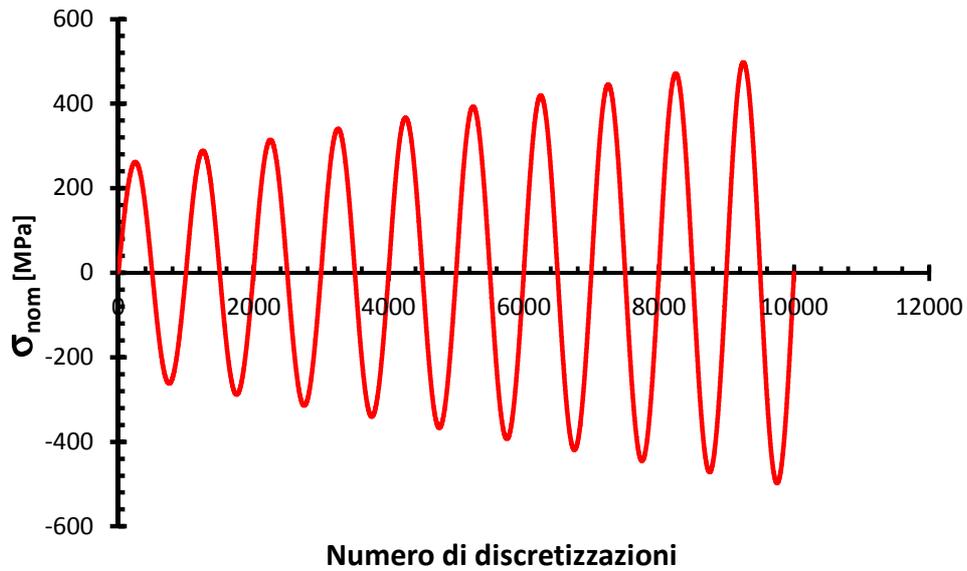


Figura 6-40 Andamento ciclo di carico

I grafici ottenuti sono riportati di seguito:

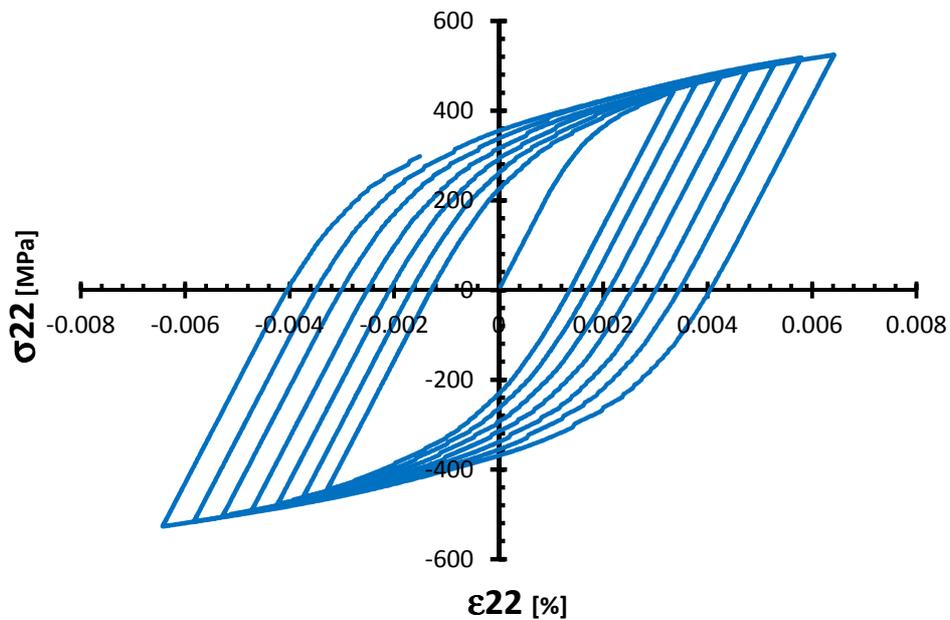


Figura 6-41 Cicli d'isteresi σ_{22} - ϵ_{22} .

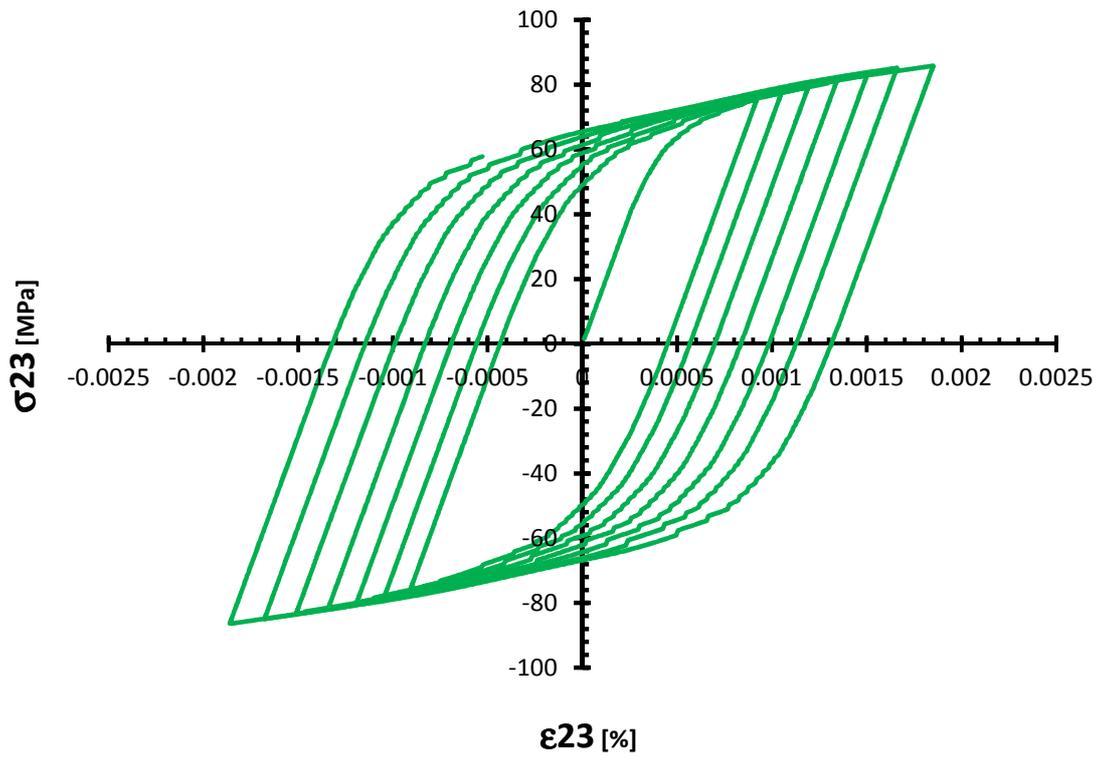


Figura 6-42 Cicli d'isteresi σ_{23} – ϵ_{23} .

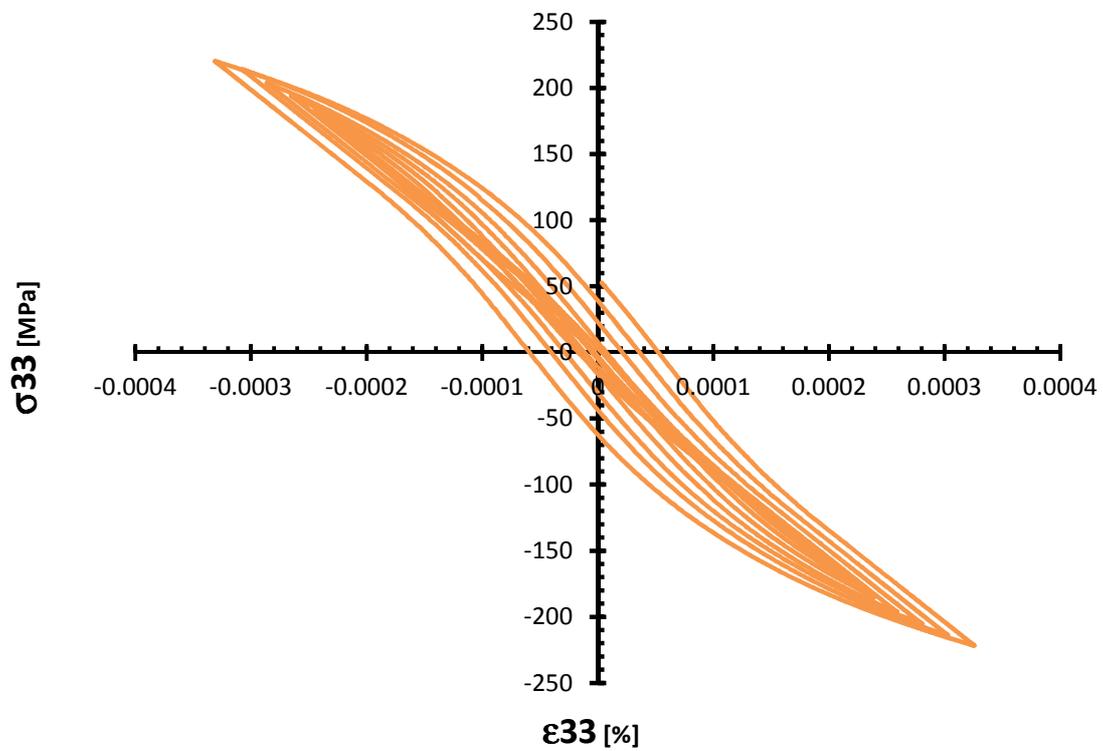


Figura 6-43 Cicli d'isteresi σ_{33} – ϵ_{33} .

Come visibile nelle Fig.6-41-42-43, il numero delle isteresi massime calcolate dalla simulazione numerica è pari a nove. Infatti, è stato imposto un incremento del carico, il quale determinerà una tensione esterna applicata superiore alla tensione massima rispetto alla quale sono state ricavate le costanti del materiale, e i dati non sono più attendibili. Comunque, dall'analisi dei grafici, si può notare che la curva d'isteresi aumenta sia in tensione che in deformazione all'aumentare del carico esterno. In Fig. 6-40 si può notare che unendo i vari apici delle curve d'isteresi si ricava la curva ciclica stabilizzata, visibile in Fig.2-4.

6.3.3 Implementazione e simulazione per i carichi non proporzionali

Negli articoli di Ye et al. (2008) [6] e Gao et al. (2010) [31], gli autori considerano nell'analisi delle tensioni e delle deformazioni locali anche l'applicazione di carichi non proporzionali. Come descritto nei paragrafi 6.1 e 6.2, i risultati ottenuti con i carichi in fase, sono simili ai risultati ricavati dagli autori. Al fine di calcolare le tensioni e le deformazioni locali, è stato implementato all'interno del software un comando in grado di simulare l'applicazione di un carico fuori fase. In particolare, è stato analizzato un carico non proporzionale con grado di sfasamento tra il carico di trazione e il momento torcente pari a 90° . Nella Fig.6-44 è rappresentato l'andamento del carico utilizzato nell'analisi:

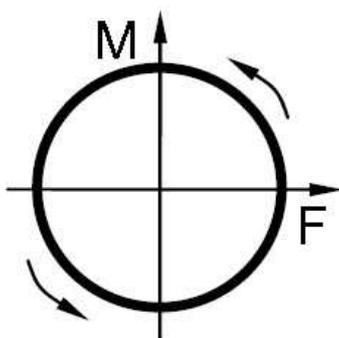


Figura 6-44 Rappresentazione carico non proporzionale.

In Fig.6-44, è visibile la rappresentazione del carico non proporzionale considerato. Per effetto dello sfasamento, quando la forza di trazione applicata raggiunge il massimo valore, il momento torcente è zero e viceversa. Lo sfasamento tra i carichi quindi, determina molteplici problemi nell'implementazione dell'algoritmo:

- Le condizioni iniziali nel caso di carico non proporzionale, sono differenti da quelle utilizzate per il carico proporzionale. È necessario quindi definire delle nuove condizioni iniziali per questo particolare tipo di carico;
- Il carico fuori fase determina, a differenza del caso proporzionale, l'applicazione di una tensione massima all'inizio del ciclo di carico. Questo potrebbe causare lo snervamento per la prima discretizzazione del carico effettuata dal software.

Quindi, il software entrerebbe istantaneamente nella parte plastica dell'algoritmo, calcolando i parametri plastici in modo non corretto. Il risultato in termini di tensioni e deformazioni locali non sarà quindi attendibile.

In prima analisi, per risolvere questo problema, è stato considerato all'interno del software, un carico fittizio iniziale che ha i seguenti scopi:

- La determinazione delle tensioni e delle deformazioni iniziali in campo lineare elastico;
- Lo sfasamento della forza di trazione e del momento torcente.

Il carico iniziale fittizio è stato implementato in analogia con l'applicazione del carico effettuato dalle macchine di prova multiassiali. Nelle prove sperimentali lo sfasamento tra i carichi esterni non avviene nello stesso istante in cui comincia la prova. Nei primi cicli di carico infatti, il carico applicato è in fase, successivamente attraverso un opportuno algoritmo la macchina di prova effettua lo sfasamento tra la forza di trazione e il momento torcente. All'interno del software è stato implementato questo concetto utilizzando il carico iniziale fittizio. I risultati ottenuti dalla simulazione numerica però, non sono corretti e attendibili.

È stata quindi utilizzata, come approssimazione semplificativa di partenza un'altra metodologia per lo studio dei carichi non proporzionali. Contrariamente a quanto definito precedentemente, utilizzando delle opportune condizioni iniziali, è possibile definire un ciclo di carico che prevede sfasamento iniziale tra il carico di trazione e il momento torcente. Le condizioni iniziali implementate all'interno del software

riguardano sia i valori iniziali di tensione e di deformazione elasto-plastici sia il reference state. La formula che definisce la condizione iniziale per le tensioni è visibile nella formula sottostante:

$$\frac{K_t^2 S^2}{E} = \frac{\sigma_{ij}^2}{E} + 2 \cdot \frac{\sigma_{ij}}{n+1} \left(\frac{\sigma}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{Eq.6-2}$$

Dove S è il carico nominale esterno. Questa formula è scritta, in prima approssimazione per le varie componenti di tensione considerate.

Per le deformazioni si utilizza la generalizzazione della legge di potenza per sollecitazioni triassiali:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} S_{ij} + \frac{1-2 \cdot \nu}{3 \cdot E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \cdot \frac{S_{ij}}{K^{\frac{1}{n}}} \cdot (\sigma_{eq})^{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - 1 \right)} \quad \text{Eq.6-3}$$

Dove S_{ij} è il tensore deviatorico e σ_{eq} è la tensione equivalente calcolata mediante l'utilizzo di un criterio di resistenza, in particolare von Mises.

L'equazione 6-3 è applicata anche per la definizione iniziale del reference state associato alle deformazioni.

I parametri utilizzati nella prima simulazione sono definiti nel paragrafo 6.1. Il momento torcente applicato è pari a 350 Nm, mentre la forza di trazione vale 57kN. Si è ipotizzato inoltre che sia la forza di trazione sfasata rispetto al momento torcente. Il numero delle divisioni è 4000. Questo significa che il momento torcente iniziale è zero, mentre la forza di trazione è massima, come visibile in Fig. 6-45.

Il ciclo di carico ottenuto dal software è il seguente:

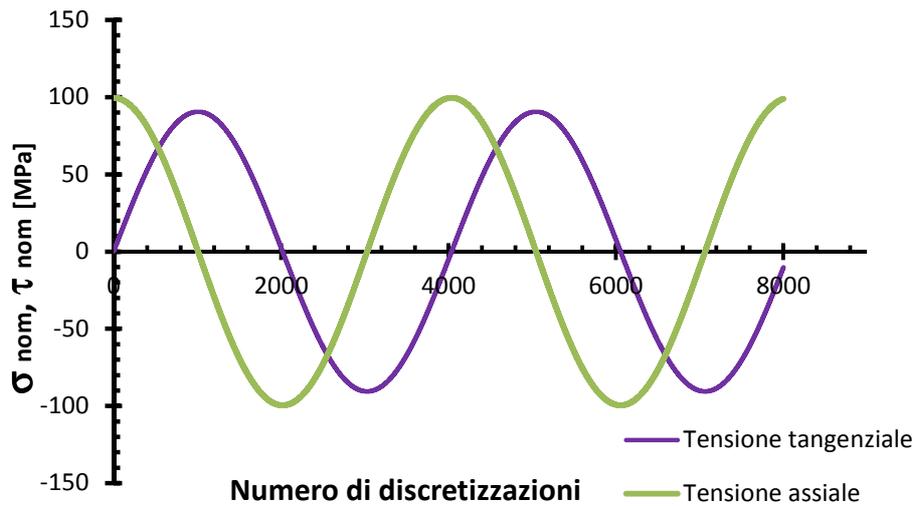


Figura 6-45 Andamento ciclo di carico non proporzionale.

Nella Fig.6-46 si può vedere l'andamento delle tensioni nominali elastiche, lineari elastiche e elasto-plastiche all'apice dell'intaglio. Si può notare che le tensioni elasto-plastiche e lineari elastiche siano praticamente coincidenti e questo fenomeno è causato da un'area plasticizzata molto limitata all'apice dell'intaglio.

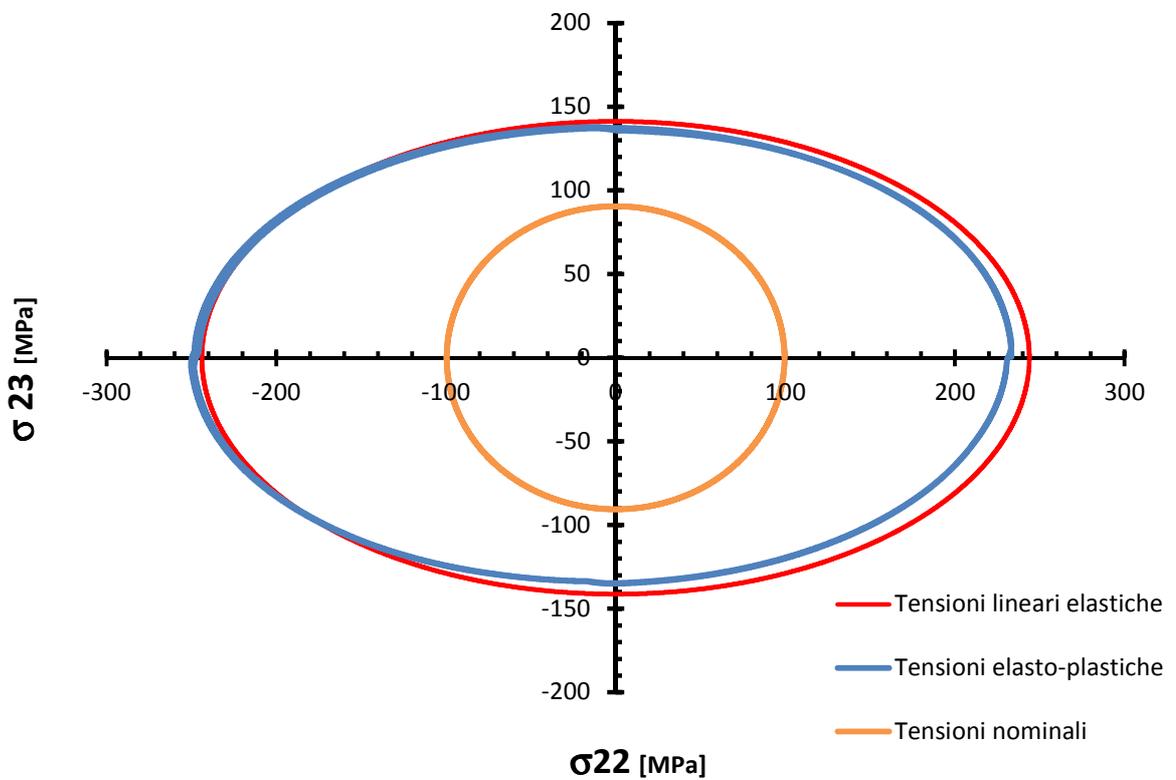


Figura 6-46 Andamento delle tensioni nominali e all'apice.

Le isteresi ricavate sono le seguenti:

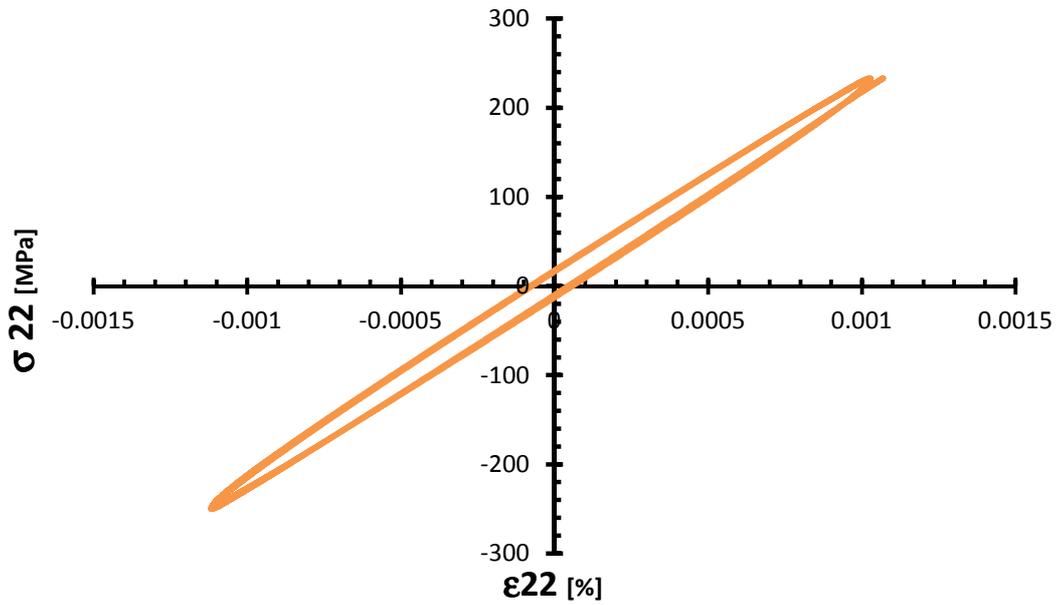


Figura 6-47 Cicli d'isteresi σ_{22} - ϵ_{22} .

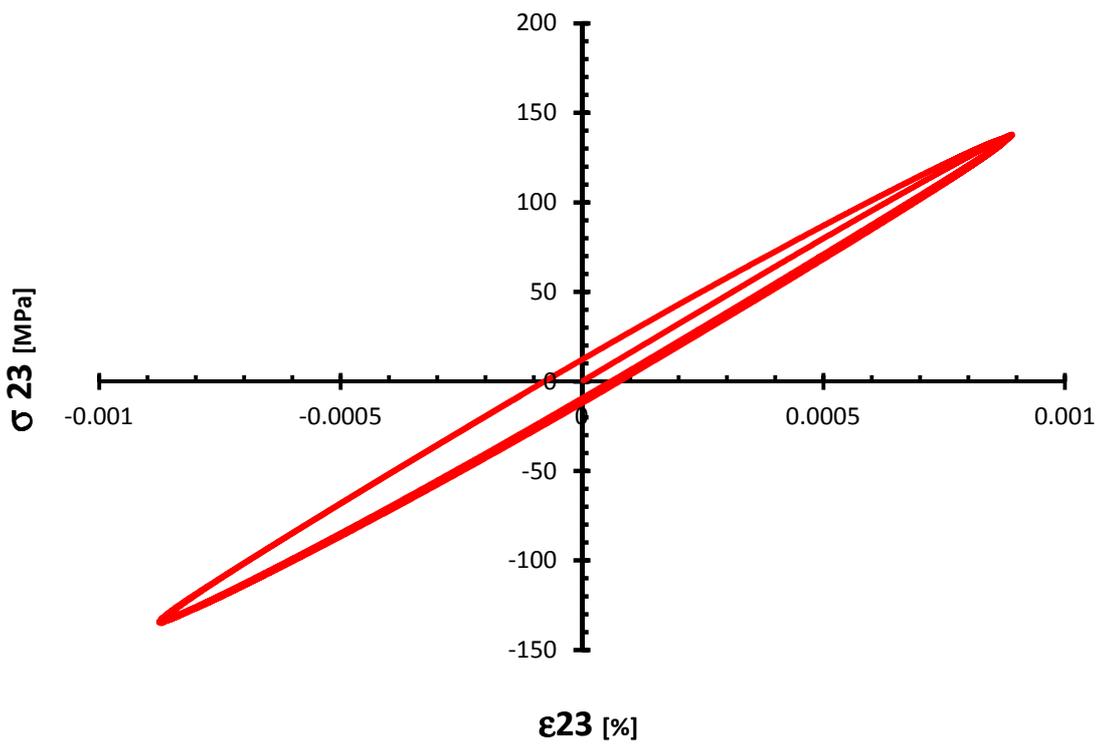


Figura 6-48 Cicli d'isteresi σ_{23} - ϵ_{23} .

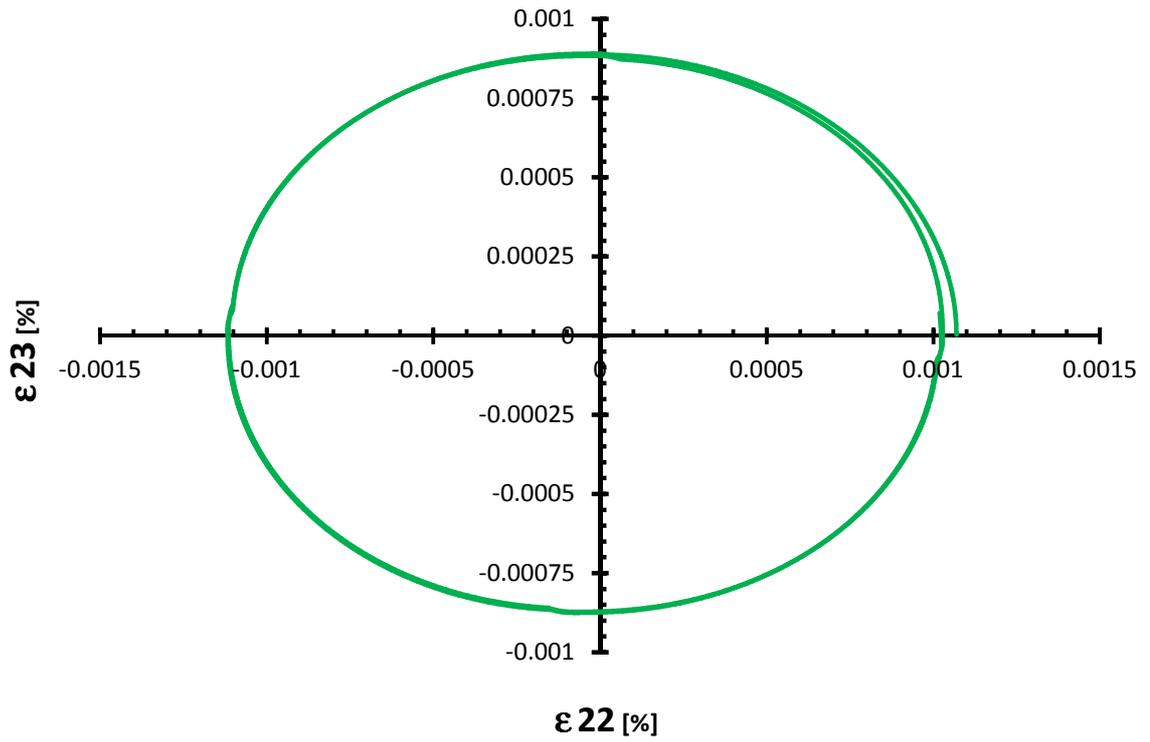


Figura 6-49 Cicli d'isteresi ϵ_{23} – ϵ_{23} .

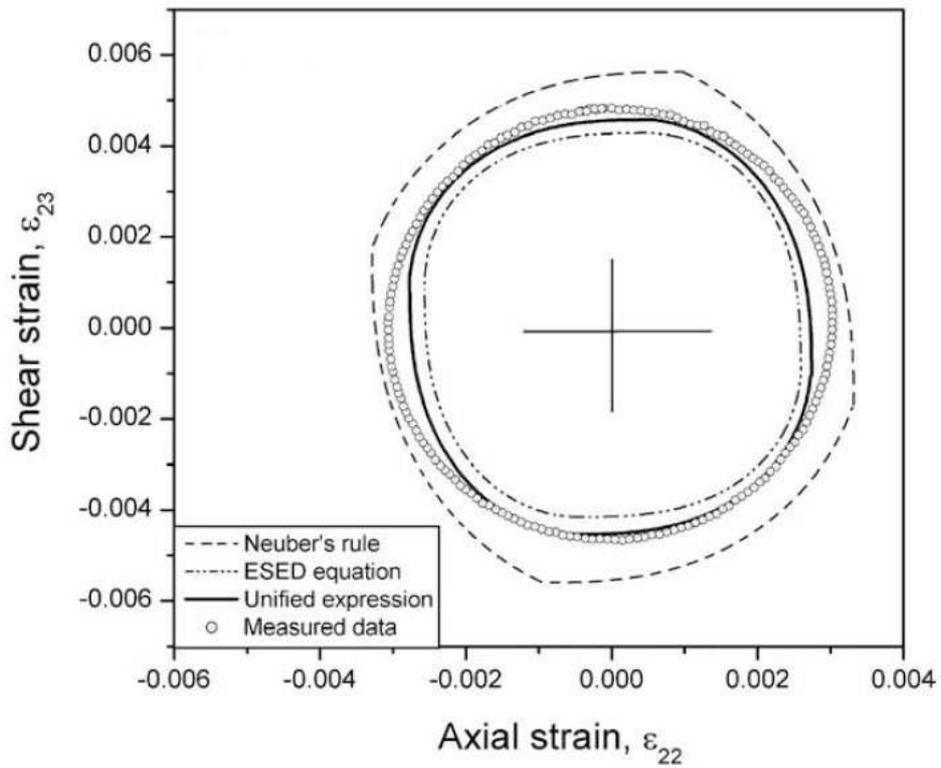


Figura 6-50 Cicli d'isteresi ϵ_{23} – ϵ_{23} ricavati da Ye.

In Fig.6-50 sono presenti i risultati ricavati da Ye et al. (2008) [6]. Confrontando la Fig.6-49 con la Fig6-50 si può notare che l'andamento dell'isteresi è simile, però i valori di picco ricavati dalla simulazione sono notevolmente inferiori rispetto ai dati calcolati da Ye. Per questo motivo è stata effettuata un'altra simulazione aumentando il valore dei carichi. Il momento torcente considerato è pari a 550 Nm, mentre la forza di trazione è di 95 kN.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

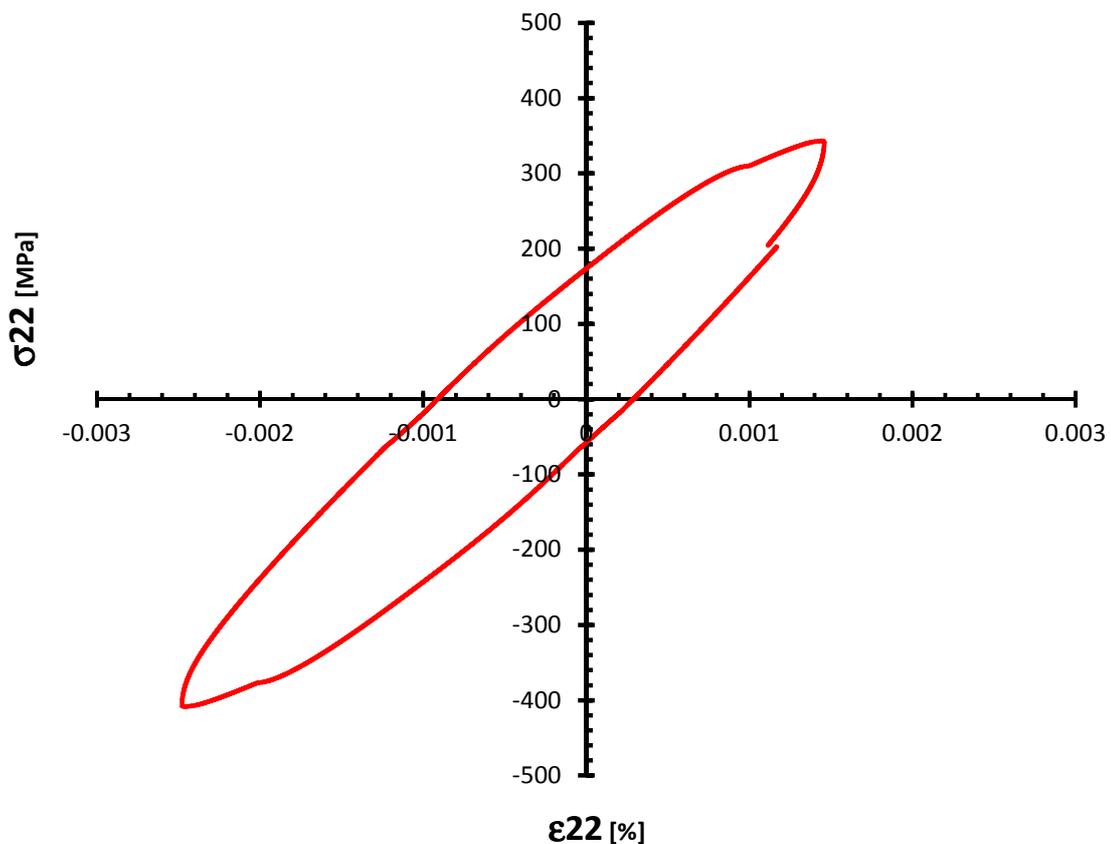


Figura 6-51 Cicli d'isteresi σ_{22} - ϵ_{22} .

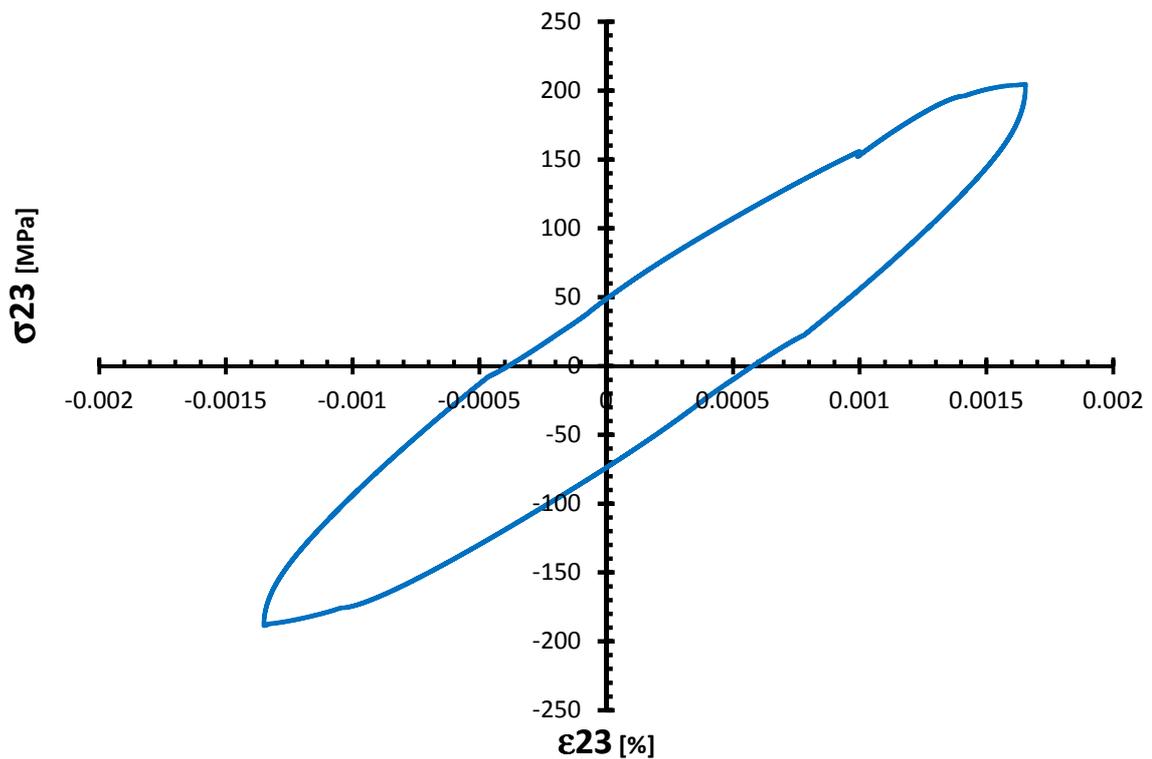


Figura 6-52 Cicli d'isteresi σ_{23} - ϵ_{23} .

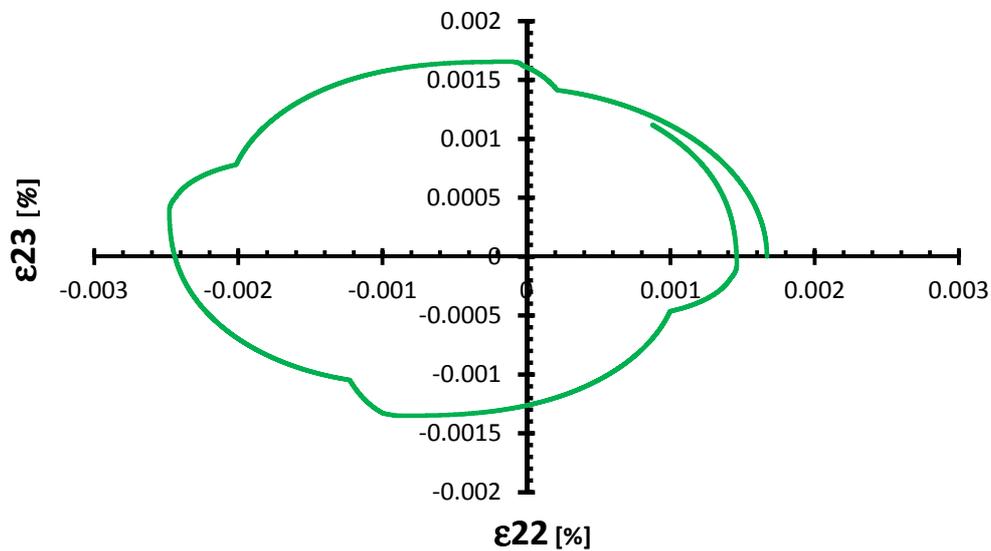


Figura 6-53 Cicli d'isteresi ϵ_{23} - ϵ_{22} .

Dal confronto tra le Fig.6-50 e Fig.6-51 si può notare che per il caso di carichi elevati non proporzionali i risultati ottenuti non sono ottimali. Il programma infatti non arriva a convergenza e il sistema non è stabile. Per i carichi non proporzionali quindi, è necessario effettuare ulteriori modifiche all'implementazione del software.

6.4 CONCLUSIONI

L'algoritmo implementato all'interno di Mathematica ha determinato dei risultati soddisfacenti e in accordo con valori presenti in letteratura. Nel caso di carico proporzionale infatti, i dati ottenuti dalle numerose simulazioni numeriche svolte sono corretti. Questo risultato quindi determina che l'algoritmo di calcolo utilizzato e l'implementazione del software sono esatti.

In particolare si è ricavato un'ottima corrispondenza sia con i valori ottenuti da Ye, sia con quelli ricavati da Gao. Si è inoltre dimostrato che l'utilizzo dell'espressione unificata o delle equazioni delle energie non comporta un cambiamento sensibile nei risultati. Infine i risultati ottenuti hanno confermato l'ipotesi iniziale che il metodo ESED sottostima le tensioni e le deformazioni locali, mentre la regola di Neuber le sovrastima. Con il metodo ESED modificato invece si ricavano delle tensioni e delle deformazioni intermedie tra i valori ricavati dai due metodi approssimati appena citati.

Nel caso di carichi non proporzionali invece, il software non dà una stima corretta delle tensioni e delle deformazioni per tutti i livelli di carico esterno. Per carichi bassi infatti, il programma calcola dei valori coerenti. Per carichi più elevati invece, il software non è stabile e quindi i dati ricavati non sono attendibili.

Sarà quindi necessario effettuare un'ulteriore analisi al fine di ottimizzare le condizioni iniziali e il reference state. Questi parametri infatti influenzano pesantemente i risultati ottenuti dalle simulazioni.

Conclusioni finali e sviluppi futuri

Il lavoro svolto nella presente tesi ha avuto come oggetto l'implementazione di un software in grado di calcolare le tensioni e le deformazioni locali per componenti meccanici soggetti a fatica oligociclica. Il programma sviluppato si basa sul criterio ESED modificato e sul modello elasto-plastico di Jiang-Sehitoglu. Il criterio ESED modificato rappresenta un nuovo criterio approssimato che migliora la stima dei valori delle tensioni e delle deformazioni. Il modello plastico di Jiang-Sehitoglu stabilisce la regola matematica utilizzata per descrivere il comportamento reale del materiale. Il suddetto modello è stato ottenuto attraverso l'ottimizzazione di modelli plastici già presenti in letteratura. Confrontando i dati sperimentali con i risultati numerici ottenuti si può asserire che il modello plastico è in grado di descrivere in modo ottimale il comportamento reale del materiale. Drucker (1987) [37], in uno dei suoi celebri lavori riguardanti la teoria della plasticità riporta la seguente frase: "il comportamento dei materiali in campo elasto-plastico è enormemente ed infinitamente complesso. Nessuna espressione matematica, neanche la più elaborata e complessa, può rappresentare la risposta del materiale nei minimi dettagli. Nessun numero di finito di esperimenti, non importa quanto accuratamente svolti, possono fornire tutte le informazioni fisiche necessarie a descrivere il fenomeno". Questa citazione dà un'idea della complessità dell'argomento trattato. Inoltre le sperimentazioni e la ricerca in questo ambito non sono finite.

I risultati ottenuti dalle simulazioni numeriche effettuate sono coerenti con i valori presenti in letteratura nel caso di carichi multiassiali proporzionali.

È stato inoltre ricavato dai dati ottenuti dalle simulazioni che la regola di Neuber sovrastima le tensioni e le deformazioni locali, mentre il metodo ESED le sottostima. Il metodo ESED però, non è correttamente implementato all'interno del software. Nel caso di cicli di carico non proporzionali, i risultati ottenuti non sono ancora soddisfacenti ed è necessario un'ulteriore analisi e ottimizzazione del software.

Inoltre, il possibile sviluppo futuro è rappresentato dall'estensione del software dallo studio delle tensioni e delle deformazioni degli intagli raccordati agli intagli severi.

Bibliografia

- [1] Neuber, H, (1961), “Theory of stress concentration for shear-strained prismatic bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law”, *Journal of Applied Mechanics*, 28, 544-553.
- [2] Molski, K., Glinka, G., (1981), “A method of elastic-plastic stress and strain calculation at a notch root”, *Material Science and Engineering*, **50**, 93-100.
- [3] Singh, M.N.K, Glinka, G., Dubey, R.N. (1996), “Elastic-plastic stress strain calculation in notched bodies subjected to non-proportional loading”, *International Journal of Fracture*, **76**, 36-60.
- [4] Singh, M.N.K, (1998), “Notch tip stress strain analysis in bodies subjected to non-proportional cyclic loads”, Ph.D. Dissertation, Department of Mechanical Engineering, University of Waterloo at Ontario.
- [5] Ye, D., Matsuoka, S., Suzuki, N., Maeda, Y. (2004), “Further investigation of Neuber’s Rule and the equivalent strain energy density (ESED) method”, *International Journal of Fracture*, **26**, 447-455.
- [6] Ye, D., Hertel, O., Vormwald, M., (2008), “A unified expression of elastic-plastic notch stress strain calculation in bodies subjected to multiaxial cyclic loading”, *International Journal of Solids and Structures*, **45**, 6177-6189.
- [7] Ellyin, F., Kujawski, D.,(1989), “Generalization of notch analysis and its extension to cyclic loading”, *International Journal of Engineering and Fracture Mechanics*, **32**, 819-826.

- [8] Moftakhar, A., Buczynski, A., Glinka, G., (1995), "Calculation of elasto-plastic strains and stresses in notches under multiaxial loading ", *International Journal Fracture Mechanics*, **70**, 357-372.
- [9] Hoffman, M., Seeger, T., (1985), "A generalized method for estimating multiaxial elastic-plastic notch stresses and strains. Part I: Theory/Part II: Application and general discussion.", *International Journal Engineering Material and Technology*, **10**, 250-260.
- [10] Klesnil, M., Lucas, P., (1980), "Fatigue of metallic materials", Amsterdam: Elsevier.
- [11] Avaras, N., Kim, K-S., Leckie, FA., (1990), "On the calculations of the stored energy of cold work.", *International Journal Engineering Material and Technology*, **112**, 465-470.
- [12] Jiang, Y., (1994), "Cyclic plasticity with an emphasis on ratchetting.", Ph.D. Dissertation, Department of Mechanical Engineering, University of Illinois, Urbana-Champaign.
- [13] Jiang, Y., Sehitoglu, H., (1996). "Modeling of cyclic ratchetting plasticity, part I: development of constitutive equations". *International Journal of Mechanics and Applications*. **63**, 720–725.
- [14] Ducker, D.C., (1960). "Plasticity in structural mechanics". *Proceeding of the First Symposium on Naval Structural Mechanics*. Goodier and Hoff, Eds., Pergamon, Macmillan, New York. 331-350.
- [15] Prager, W., (1955), "The theory of plasticity: a survey of recent Achievements ", *Institution of Mechanical Engineerig, London*, **169**, 41-57.

- [16] Armstrong, P.J, Frederick, C.O., (1966), “A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect”, Report RD/B/N **731**, Central Electricity Generating Board .
- [17] Chaboche, J.L. (1989), “Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity”, *International Journal of Plasticity*, **5**, 247-302.
- [18] Chaboche, J.L., Nouailhas, D., Pacou, D., Paulmier, D., (1991), “Modeling of the cyclic response and ratchetting effects on iconel-718 alloy”, *European Journal of Mechanics*, **10**, 101-121.
- [19] Mròz, Z. (1967), “On the description of anisotropic workhardening”, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, **15**, 163-175.
- [20] Mròz, Z. (1969), “An attempt to describe the behaviour of metals under cyclic loads using a more general workhardening models”, *Acta Mechanical*, **7**, 199-212.
- [21] Ohno, N., Wang, J.D. , (1993), “Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery: Part II: Application to experiment of ratchetting behaviour”, *Internationa Journal of Plasticity*, **9**, 391-403.
- [22] Ohno, N., Wang, J.D. , (1991), “Non linear kinematic hardening rule: proposition and application to ratchetting problems”, *Structural Mechanical in Reactor Technology*, Transaction of the 11th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Shibata, Ed., Vol.1, Tokyo, Japan, **L22/1**, 481-486.
- [23] McDowell, D.L., (1985), “A two surface models for transient non proportional cyclic plasticity, Part I: Development of appropriate equations”, *ASME, Journal of Applied Mechanics*, **52**, 303-308.

- [24] Chaboche, J.L., Dang Van, K., Cordier, G., (1979), “Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of the 316 stainless steel”, Structural Mechanical in Reactor Technology, Transaction of the 5^h International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Div.L, Berlin, L11/3.
- [25] Ohno, N., (1982), “A constitutive model for cyclic plasticity with non hardening strain region”, Journal of Applied Mechanics, **49**, 721.
- [26] McDowell, D.L., (1992), “Description of non proportional cyclic ratchetting behaviour”, Progress report on AAR, Contract No. Meta-92-195.
- [27] Jiang, Y., Sehitoglu, H., (1996). “Modeling of cyclic ratchetting plasticity, part II: comparison of model simulations with experiment”, International Journal of Mechanics and Applications. **63**, 726–733.
- [28] Jiang, Y., Kurath, P., (1996). “Characteristic of the Armstrong-Frederick type plasticity models”, International Journal of Plasticity. **12**, 387–415.
- [29] Kurath, P., Jiang, Y., Fatemi, A., (1999). “Strain path influence on multiaxial deformation and fatigue damage” , Multiaxial Fatigue of an Induction Hardened Shaft, SAE/AE 28. Chapter **12**, 117–140.
- [30] Jiang, Y., Ott, W., Baum, C., Vormwald, M., Nowack, H., (2009). “Fatigue life predictions by integrating EVICD fatigue damage model and an advanced cyclic plasticity theory”, International Journal of Plasticity. **25**, 780–801.
- [31] Gao, Z., Qiu, B., Wang, X., Jiang, Y. (2010), “An investigation of fatigue of a notched member”, International Journal of Fatigue, **32**, 1960-1969.

- [32] Gao, Z., Kangda, Z., (1999), “Comparison of the Fracture and Fatigue Properties of 16MnR Steel Weld Metal, the HAZ and the Base Metal”, *International Journal of Materials Processing Technology*, **63**, 559-562.
- [33] Firat, M., (2011), “A notch strain calculation of a notched specimen under axial-torsion loadings”, *International Journal of Materials and Design*, **32**, 3876–3882.
- [34] Firat, M., (2012), “A numerical analysis of combined bending–torsion fatigue of SAE notched shaft”, *International Journal of Finite Elements in Analysis and Design*, **54**, 16-27.
- [35] Firat, M., (2012), “Cyclic plasticity modeling and finite element analyzes of a circumferentially notched round bar under combined axial and torsion loadings”, *International Journal of Materials and Design*, **34**, 842-852.
- [36] http://it.wikipedia.org/wiki/Criterio_di_Von_Mises
- [37] Drucker, Daniel., C., (1987), “Some general preliminary comments on anisotropic/cyclic plasticity”, *Proceedings of the Second International Conference on Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications*, Tucson, Arizona, Elsevier, Desai et al., Eds., **1**, 95-97.

