

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Effetti della precessione sull’evoluzione secolare di due
pianeti vicini alla stella

Relatore

Prof. Francesco Marzari

Laureando

Pietro Facchini

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione	3
Teoria secolare	5
1.1 Teoria secolare per due pianeti	5
1.2 Teoria secolare per N pianeti	7
1.3 Introduzione del termine relativistico	7
Presentazione ed analisi dati	9
1.4 Configurazione con $a_2 = 0.5 AU$	9
1.4.1 Analisi configurazioni con eccentricità basse	10
1.4.2 Analisi configurazioni con eccentricità alte	12
1.4.3 Analisi riassuntiva	13
1.5 Configurazione con $a_2 = 1.5 AU$	14
Conclusioni	17

Introduzione

Nel presente elaborato si tratterà del problema a tre corpi, estendibile poi a N corpi, il quale è un problema ben noto e ben studiato. Ci occuperemo di descrivere dapprima il problema utilizzando gli elementi orbitali con un'approssimazione lineare, per poi includere gli effetti della GR .

Utilizzando un algoritmo per l'integrazione di equazioni differenziali, saremo in grado di osservare l'evoluzione temporale degli elementi orbitali che determinano l'orbita finale dei pianeti. Si osserva che per sistemi di due giganti gassosi non tutte le condizioni iniziali in termini di semiassi maggiori ed eccentricità portano a configurazioni stabili nel tempo. In particolare le configurazioni con eccentricità maggiore saranno quelle più instabili. Nell'integrazione non si è tenuto conto di effetti dinamici della marea il cui effetto a lungo termine è la circolarizzazione dell'orbita del pianeta più interno.

Osserveremo anche come il contributo della GR è essenziale nell'analisi dell'evoluzione secolare delle orbite dei pianeti: a seconda delle condizioni iniziali il contributo considerato agirà in maniera differente.

Si è partiti considerando un sistema di due pianeti con $a_1 = 0.1$ e $a_2 = 0.5 AU$, analizzando il contributo della GR sulle varie configurazioni con diverse eccentricità.

Il sistema con queste condizioni iniziali, però, non mostra una rilevante differenza tra evoluzione con GR ed evoluzione puramente N-body. Si è quindi passati ad un nuovo sistema, considerando il primo pianeta posto ad $a_1 = 0.1 AU$ e il secondo ad $a_2 = 1.5 AU$. Le nuove configurazioni presenteranno un'evoluzione significativamente diversa quando il contributo della GR è incluso.

Teoria secolare

1.1 Teoria secolare per due pianeti

Consideriamo, inizialmente, il moto di due pianeti di massa m_1 e m_2 che si muovono sotto mutua interazione gravitazionale attorno ad una stella di massa M . L'equazione del moto è:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{G(M + m_1)}{r_1^3} \vec{r}_1 - Gm_2 \left[\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right] = -\nabla(U + R)$$

con R funzione di disturbo e data da:

$$R = Gm_2 \left[\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right]$$

Conviene però scrivere la funzione di disturbo come funzione degli elementi orbitali: l'anomalia vera f , la longitudine del pericentro ϖ , la longitudine del nodo Ω , eccentricità e , semiasse maggiore a e inclinazione i . Tutti gli angoli variano tra 0 e 2π mentre introduciamo un nuovo elemento orbitale λ tale che $\lambda = f + \bar{\omega}$.

Sviluppando R in serie di Fourier otteniamo

$$R = R(a, e, i, \lambda, \bar{\omega}, \Omega) = \sum_{j_1, j_2, m_1, m_2, n_1, n_2} S(a_1, a_2, e_1, e_2, i_1, i_2) \cos(j_1 \lambda_1 + j_2 \lambda_2 + m_1 \bar{\omega}_1 + m_2 \bar{\omega}_2 + n_1 \Omega_1 + n_2 \Omega_2)$$

indicizzando con 1 i termini riferiti al primo pianeta e con 2 quelli riferiti al secondo.

Notando che $\bar{\omega}$ e Ω variano molto lentamente rispetto a λ , possiamo mediare la funzione di disturbo su λ_1, λ_2 ottenendo:

$$\langle R \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\lambda_1 d\lambda_2 R$$

Semplifichiamo ulteriormente il problema supponendo che sia eccentricità che inclinazione assumano valori molto piccoli (in questo modo possiamo trascurare i termini di grado due di tali elementi orbitali). L'aver effettuato una media su tali angoli ha una grande importanza: i semiasse maggiori non variano considerevolmente.

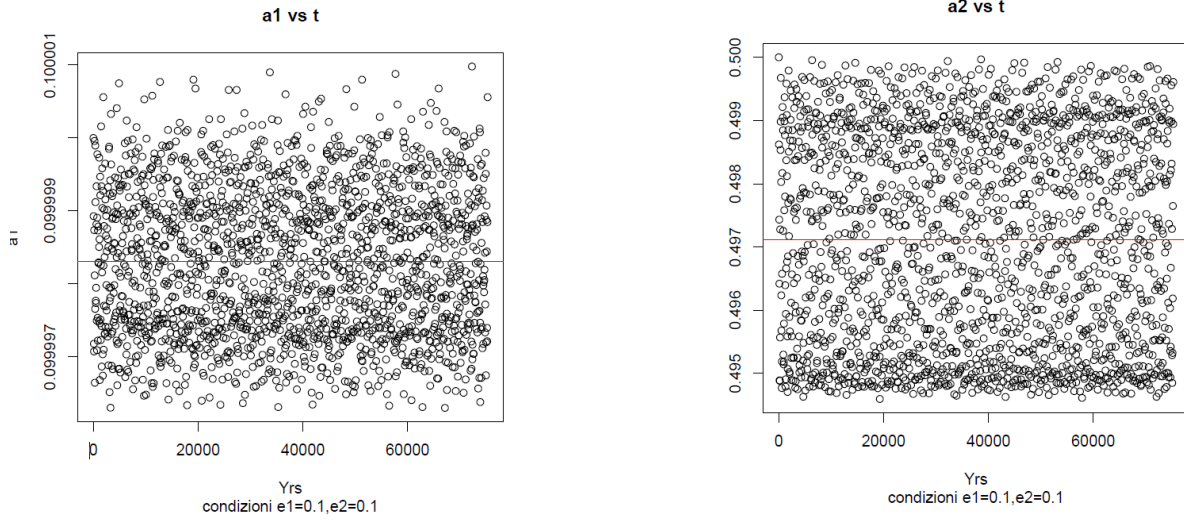


Figura 1.1: Andamento semiassi maggiori di due pianeti con valori iniziali di $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0.5$ AU, $e_1 = e_2 = 0.1$. Si osserva facilmente che i valori possono essere considerati sostanzialmente costanti.

Consideriamo $a_1 < a_2$ e sia $\alpha_{12} = \frac{a_1}{a_2}$, allora i coefficienti di Laplace sono:

$$R_j = n_j a_j^2 \left[\frac{1}{2} A_{jj} e_j^2 + A_{jk} e_1 e_2 \cos(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) + \frac{1}{2} B_{jj} I_j^2 + B_{jk} I_1 I_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \right]$$

e gli elementi delle matrici A , B si esplicitano come:

$$b_s^{(k)}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(k\varphi)}{(1 - 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2)^5} d\varphi$$

dove $\bar{\alpha}_{12} = \alpha_{12}$ se $j = 1$ (il perturbatore è esterno) e $\bar{\alpha}_{12} = 1$ se $j = 2$ (il perturbatore è interno); per quanto riguarda A_{jk} possiamo calcolarlo partendo dall'opposto di A_{jj} e sostituendo a $b_{3/2}^{(1)}$ il coefficiente $b_{3/2}^{(2)}$, mentre per B_{jk} basta prendere l'opposto di A_{jj} . Notiamo, inoltre, che gli elementi delle due matrici dipendono solamente da costanti: semiassi maggiori, masse e moti medi.

Indicizzando con j e k i due pianeti, con $j, k = 1, 2$ e $j \neq k$, e indicando l'inclinazione con I , la funzione di disturbo del pianeta j -esimo sul pianeta k -esimo diviene:

$$\begin{aligned} A_{jj} &= \frac{n_j}{4} \frac{m_k}{M+m_j} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12}) \\ B_{jj} &= -\frac{n_j}{4} \frac{m_k}{M+m_j} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12}) \end{aligned}$$

Le equazioni di Lagrange per il secondo ordine di eccentricità e inclinazione sono:

$$\begin{aligned} \dot{e}_j &= -\frac{1}{n_j a_j^2 e_j} \frac{\partial R_j}{\partial \bar{\omega}_j} & \dot{\bar{\omega}}_j &= \frac{1}{n_j a_j^2 e_j} \frac{\partial R_j}{\partial e_j} \\ \dot{I}_j &= -\frac{1}{n_j a_j^2 I_j} \frac{\partial R_j}{\partial \Omega_j} & \dot{\Omega}_j &= \frac{1}{n_j e_j^2 I_j} \frac{\partial R_j}{\partial I_j} \end{aligned}$$

che per piccoli valori di I ed e divergeranno.

Conviene quindi definire nuove variabili:

$$\begin{aligned} h_j &= e_j \sin \bar{\omega}_j & k_j &= e_j \cos \bar{\omega}_j \\ p_j &= I_j \sin \Omega_j & q_j &= I_j \cos \Omega_j \end{aligned}$$

tali per cui $e_j^2 = h_j^2 + k_j^2$ e $I_j^2 = p_j^2 + q_j^2$.

In queste nuove variabili la funzione di disturbo si riscrive come:

$$R_j = n_j a_j^2 \left[\frac{1}{2} A_{jj} (h_j^2 + k_j^2) + A_{jk} (k_j k_k + h_j h_k) + \frac{1}{2} B_{jj} (p_j^2 + q_j^2) + B_{jk} (p_j p_k + q_j q_k) \right]$$

mentre le equazioni di Lagrange diventano:

$$\begin{aligned} \dot{h}_j &= \frac{1}{n_j a_j^2} \frac{\partial R_j}{\partial k_j} & \dot{k}_j &= -\frac{1}{n_j a_j^2} \frac{\partial R_j}{\partial h_j} \\ \dot{p}_j &= \frac{1}{n_j a_j^2} \frac{\partial R_j}{\partial q_j} & \dot{q}_j &= -\frac{1}{n_j a_j^2} \frac{\partial R_j}{\partial p_j} \end{aligned}$$

Esplicitando \dot{h}_1 e \dot{h}_2 abbiamo

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

e derivando una seconda volta

$$\begin{pmatrix} \ddot{h}_1 \\ \ddot{h}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \dot{k}_1 \\ \dot{k}_2 \end{pmatrix} = -A^2 \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Questa non è altro che un'equazione del secondo ordine con soluzione:

$$h_j = \sum_{k=1}^2 e_{ji} \sin(g_i t + \beta_{ji})$$

dove e_i sono le componenti dell'autovettore associato all'autovalore g_i e β_{ji} è una fase. Relazioni analoghe valgono anche per le altre tre variabili.

Le $g_{1,2}$ sono dette **frequenze fondamentali** del sistema (queste sono le frequenze per h_j e k_j) mentre le $f_{1,2}$ sono gli autovalori della matrice B (sono le frequenze per p_j e q_j).

Notando che la matrice B presenta determinante nullo, possiamo concludere che uno dei due autovalori è nullo. Fisicamente ciò è dovuto alla conservazione del momento angolare che lega le inclinazioni dei due pianeti e quindi rende p e q non più variabili indipendenti.

1.2 Teoria secolare per N pianeti

Ci chiediamo a questo punto come estendere la teoria secolare espressa per due pianeti al caso generale di N corpi.

Nella configurazione a due corpi abbiamo trovato due frequenze fondamentali $g_{1,2}$ e una sola frequenza f_1 per q_1 e q_2 . Nel caso di N pianeti avremo N frequenze fondamentali e $N - 1$ frequenze f .

Le soluzioni sono molto simili al caso discusso nella sezione precedente:

$$\begin{aligned} h_j &= \sum_{k=1}^N e_{jk} \sin(g_k t + \beta_k) & k_j &= \sum_{k=1}^N e_{jk} \cos(g_k t + \beta_k) \\ p_j &= \sum_{k=1}^N I_{jk} \sin(s_k t + \delta_k) & q_j &= \sum_{k=1}^N I_{jk} \cos(s_k t + \delta_k) \end{aligned}$$

Per convenzione si pone $f_5 = 0$.

1.3 Introduzione del termine relativistico

Una volta definita la base della nostra teoria, possiamo introdurre nuovi fattori, come per esempio l'interazione mareale tra la stella ed i pianeti (tale effetto circolarizza l'orbita dei pianeti più interni)

e il termine di relatività generale *GR* che tratta la precessione del pericentro. Tale precessione viene descritta dalla seguente equazione:

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{3G(M+m)^{\frac{3}{2}}}{a_i^{\frac{5}{2}}c^2(1-e_i^2)} \quad (1.1)$$

dove l'indice i indica il pianeta considerato.

Come si vede dalla formula 1.1, pianeti molto vicini alla stella e molto eccentrici presenteranno un maggiore rate del moto di precessione.

Introducendo il termine di GR, otteniamo per h_j :

$$\dot{h}_j = k_1 \left(A_{j1} + \frac{3G(M+m)^{\frac{3}{2}}}{a_i^{\frac{5}{2}}c^2(1-e_i^2)} \right) + k_2 A_{j2}$$

Se il secondo pianeta è lontano dalla stella, allora il termine correttivo potrà essere ignorato, altrimenti per entrambi i corpi osserveremo una diversa evoluzione secolare. Ci aspettiamo, con l'introduzione di tale contributo, un aumento del rate di precessione del pianeta più interno, un incremento della differenza delle frequenze fondamentali e quindi un aumento della frequenza di oscillazione per l'eccentricità e una riduzione della loro ampiezza di oscillazione.

Presentazione ed analisi dati

Si procederà ora con lo studio dell'apporto della teoria della GR alla teoria secolare, per farlo ci siamo serviti di un algoritmo per l'integrazione delle equazioni differenziali presentate nel Paragrafo 1.2: osserveremo con un passo di 40yrs l'evoluzione degli elementi orbitali di due pianeti giganti sia con la GR che senza.

1.4 Configurazione con $a_2 = 0.5 AU$

Abbiamo studiato il caso planare ($I_1 = I_2 = 0$), posto i pianeti allineati inizialmente con semiassi maggiori $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0.5 AU$, $e_1 = 0.1$ ed infine fatto variare con un passo di 0.1 l'eccentricità del secondo pianeta.

Per le configurazioni presentate saremo in grado di osservare un discostamento tra evoluzione secolare con e senza GR . Tali contributi, però non saranno così netti, soprattutto per il secondo pianeta.

Bisogna sottolineare la scelta dei semiassi maggiori dei pianeti: tali valori infatti devono essere tali da rispettare il criterio di stabilità. Questo criterio dice che la differenza dei semiassi maggiori deve essere maggiore di $2\sqrt{3}R_H$ dove R_H è il raggio di Hill per ogni pianeta considerato.

Per il nostro studio considereremo l'evoluzione di $w(t)$ ed $e(t)$.

Per le eccentricità possiamo definire come ampiezza propria del sistema l'ampiezza dell'oscillazione dell'eccentricità mentre l'ampiezza della forzante sarà l'offset dell'andamento sinusoidale.

Possiamo facilmente stimare tali valori in due modi: si può procedere con un fit sinusoidale o più semplicemente, notando che l'andamento per alcuni valori iniziali si può discostare da un andamento sinusoidale, si può effettuare una media dei valori di $e(t)$ per la forzante e poi prendere metà della differenza fra valor massimo e valor minimo di $e(t)$.

La stima del rate del moto di precessione invece, dovrà essere ricavata dall'evoluzione di $w(t)$. Anche in questo caso ci si presentano due diversi approcci per l'analisi:

- il metodo più ingegnoso consisterebbe nel creare un segnale "fittizio" del tipo $y = \cos(w)$ per poi estrapolare $\frac{dw}{dt}$ dal fit sinusoidale;
- il metodo più rigoroso si basa su una serie di fit lineari di $w(t)$ per estrapolare da ogni fit $\frac{dw}{dt}$ e poi restituire una media pesata di tali valori.

Sebbene il secondo metodo sia più laborioso, dato che bisogna stimare i diversi periodi per poter effettuare accurati fit, si è ritenuta questa scelta più appropriata e precisa e quindi l'analisi si baserà sui risultati ottenuti attraverso questa procedura.

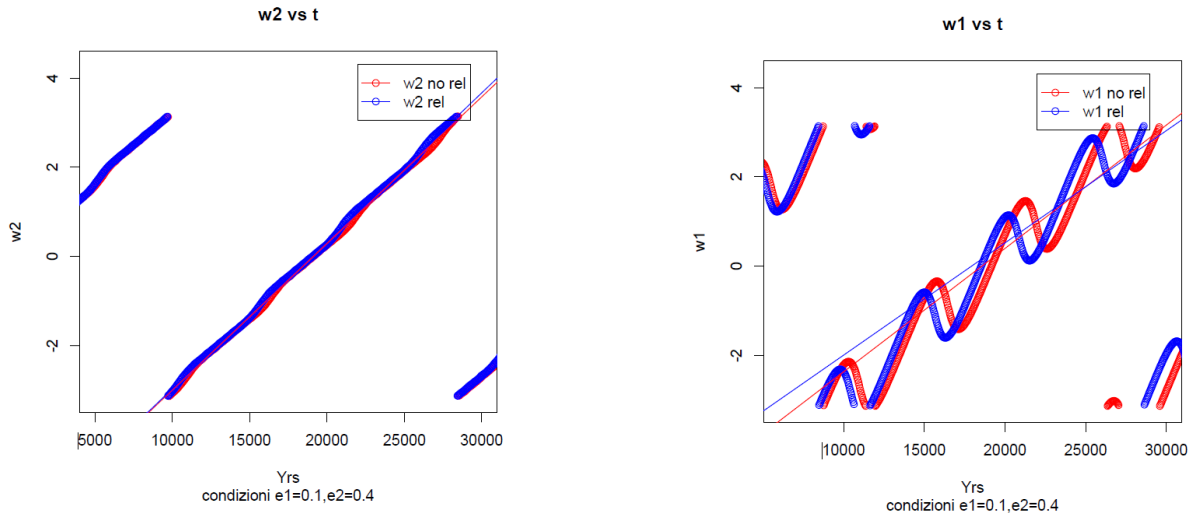


Figura 1.2: Andamento non lineare per $w_1(t)$ e $w_2(t)$ per una configurazione con $e_2 = 0.4$. Costruire un segnale fittizio da una distribuzione non lineare creerebbe ulteriori complicazioni nell'analisi.

Una giustificazione grafica e immediata si ottiene dalla Figura 1.2 : pur non essendo un andamento lineare, risulta più facile analizzare tale distribuzione che passare da un segnale fittizio per estrapolare $\frac{dw}{dt}$.

Non tutte le configurazioni sono stabili per il secondo pianeta anche se soddisfano il criterio di stabilità di Hill, il quale è stato derivato in approssimazioni di piccole eccentricità. Nell'esempio seguente, il pianeta posto inizialmente a $0.5 AU$ ha una serie di incontri gravitazionali con il primo pianeta e finisce per impattare sulla superficie stellare. Tutte le configurazioni in cui $e_2 > 0.6$ risultano instabili allo stesso modo e l'evoluzione secolare è interrotta da instabilità. Nelle due figure sono riportati semiasse ed eccentricità di una configurazione instabile che termina con impatto del secondo pianeta sulla stella.

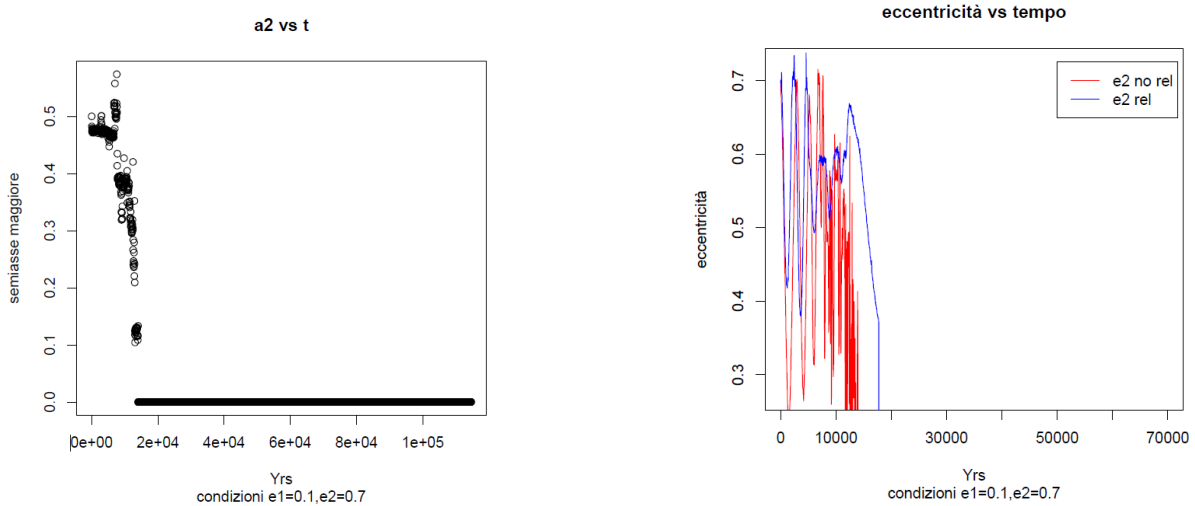


Figura 1.3: A sinistra è mostrato il moto spiraleggiante del secondo pianeta fino all'impatto con la stella. A destra è mostrato l'evoluzione caotica dell'eccentricità nel processo di incontri gravitazionali.

Procederemo quindi con le analisi delle simulazioni con $e_2 \in [0.1, 0.6]$.

1.4.1 Analisi configurazioni con eccentricità basse

Consideriamo dapprima i casi in cui i valori dell'eccentricità iniziali siano piccoli.

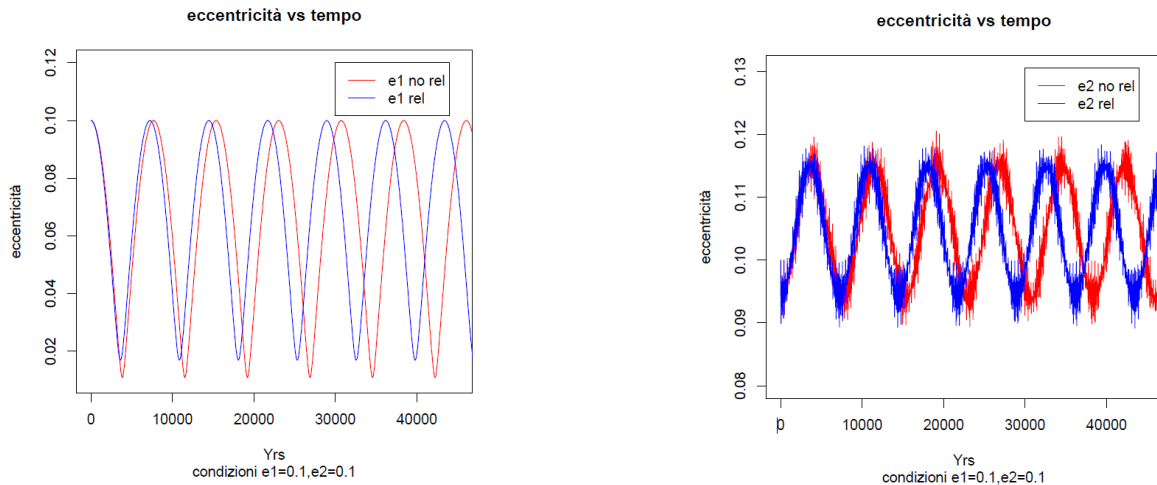


Figura 1.4: Andamento $e_{1,2}$ in funzione del tempo. Come ci aspettavamo il contributo della GR diminuisce $e_{forzante}$ ed $e_{propria}$ e aumenta la frequenza di oscillazione.

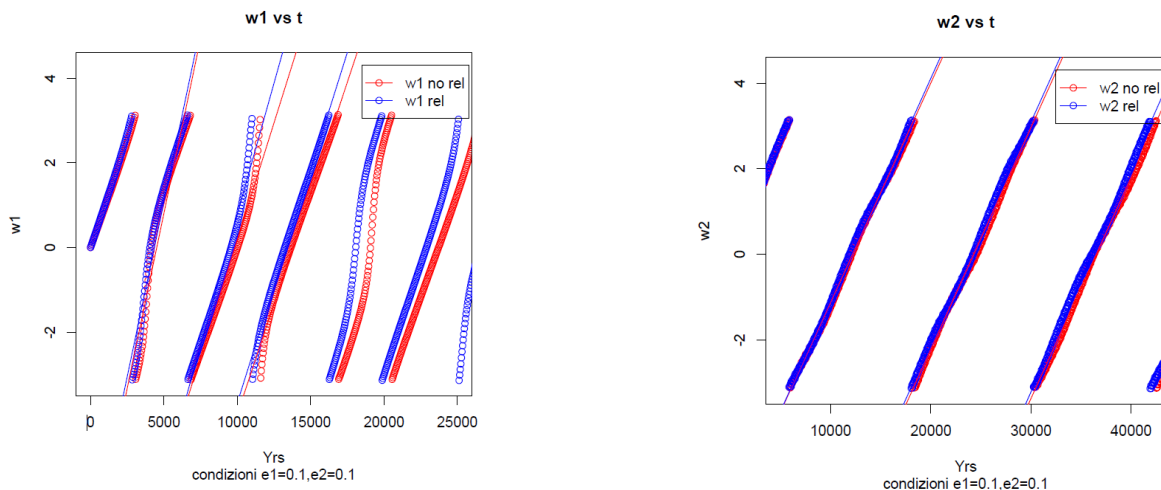


Figura 1.5: Andamento di w in funzione del tempo. Si osserva un percettibile discostamento tra le configurazioni considerate per il rate del moto di precessione.

Come ci aspettavamo, quando entrambi i pianeti sono vicini alla stella, il contributo della GR non è trascurabile. Ciò si evince facilmente dalla Figura 1.4 dove si osserva non solo una diminuzione sia dell'ampiezza forzante $e_{forzante}$ che di quella propria $e_{propria}$ del sistema, ma anche un aumento della frequenza delle oscillazioni.

Una situazione analoga si osserva anche per il secondo pianeta, seppure ridotta.

Anche il rate di precessione subisce modifiche inserendo il termine di GR .

Dalle Figure 1.8 e 1.9 osserviamo che il comportamento del pianeta più interno rispetta le previsioni dell'introduzione del termine di GR , con un decremento, seppur minimo, dell'ampiezza propria del sistema. Se consideriamo invece l'ampiezza della forzante, noteremo che il pianeta più interno subisce un sostanziale decremento con l'introduzione del termine di GR .

Consideriamo invece il pianeta posto a $0.5 AU$, avremo un effetto ridotto del termine della GR , ma pur sempre osservabile. Anche per il secondo pianeta l'ampiezza forzante e propria del sistema nel caso di GR attiva è minore rispetto ai casi senza GR . Questo non è un effetto diretto della relatività ma è dovuto all'interazione secolare dei due pianeti che è modificata dalla precessione forzata di quello più interno.

1.4.2 Analisi configurazioni con eccentricità alte

Passiamo ora ad esaminare casi in cui l'eccentricità del secondo pianeta è inizialmente maggiore, pur rimanendo inferiore ai casi mostrati di instabilità completa del sistema.

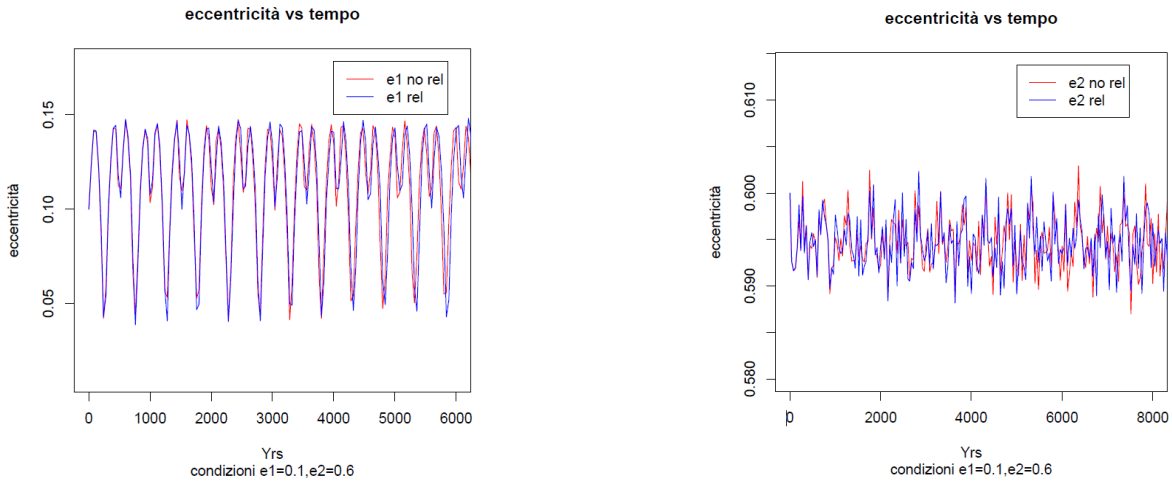


Figura 1.6: Andamento eccentricità per configurazione con valore iniziale $e_2 = 0.6$. Si nota immediatamente come il sistema sia maggiormente "disturbato" rispetto ai casi con eccentricità basse.

Osservando la Figura 1.6 notiamo come il sistema differisce dai casi con eccentricità bassa. Ricordiamo infatti che la teoria secolare discussa nel primo capitolo è valida al primo ordine, quindi con valori iniziali di eccentricità non grandi, cosa che nel nostro caso non è più rigorosamente vera. Nonostante questa osservazione, i sistemi considerati risultano essere ancora stabili, e quindi possiamo studiarli. L'analisi diviene più sofisticata non solo per un corretto andamento sinusoidale per l'eccentricità dei pianeti, ma anche per una distribuzione non perfettamente lineare per le $w(t)$ come si può vedere in Figura 1.7.

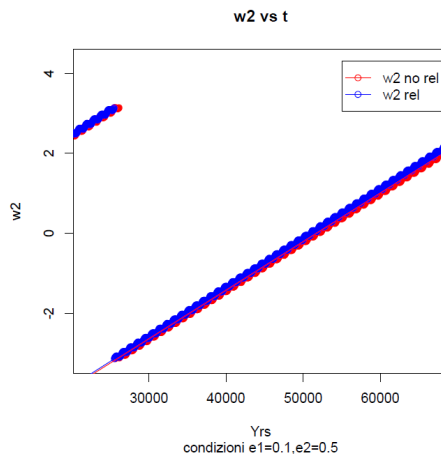


Figura 1.7: Andamento non perfettamente lineare di $w(t)$ configurazione con valore iniziale di $e_2 = 0.5 AU$

Facendo riferimento alla Figura 1.8 possiamo osservare come per eccentricità crescenti, l'ampiezza della forzante includendo la GR è maggiore rispetto al caso senza il contributo della GR .

1.4.3 Analisi riassuntiva

In conclusione, nelle Tabelle 1.1 e 1.2 mostriamo i valori numerici ottenuti dall'analisi delle differenti configurazioni con $a_2 = 0.5 AU$.

Tabella 1.1: Risultati per il primo pianeta.

configurazione		$e_{forzante}(10^{-4})$	$e_{propria}(10^{-2})$	$\frac{dw}{dt}(10^{-6}rad/Yrs)$
$e_2 = 0.1$	no rel	644.6982	4.455579	1074.433
	rel	666.4146	4.154723	1135.197
$e_2 = 0.3$	no rel	1364.731	3.363929	582.0428
	rel	1270.279	2.612536	601.9655
$e_2 = 0.4$	no rel	1968.629	8.472644	247.0526
	rel	1894.323	7.898056	251.3915
$e_2 = 0.5$	no rel	990.3198	0.5052335	-6509.284
	rel	990.1006	0.508724	-6455.872
$e_2 = 0.6$	no rel	1117.994	5.479274	-10754
	rel	1122.381	5.49555	-10627.32

Tabella 1.2: Risultati per il secondo pianeta.

configurazione		$e_{forzante}(10^{-4})$	$e_{propria}(10^{-2})$	$\frac{dw}{dt}(10^{-6}rad/Yr)$
$e_2 = 0.1$	no rel	1049.9805	5.482843	515.7619
	rel	1045.6781	5.073502	521.0363
$e_2 = 0.3$	no rel	2869.923	10.006958	593.6028
	rel	2890.476	10.007144	600.3376
$e_2 = 0.4$	no rel	3759.262	15.024733	328.5176
	rel	3778.045	15.022100	331.6024
$e_2 = 0.5$	no rel	4949.8150	20.3969325	121.4548
	rel	4949.8023	20.400507	123.0869
$e_2 = 0.6$	no rel	5946.852	28.256260	449.3437
	rel	5946.234	28.26028	448.8112

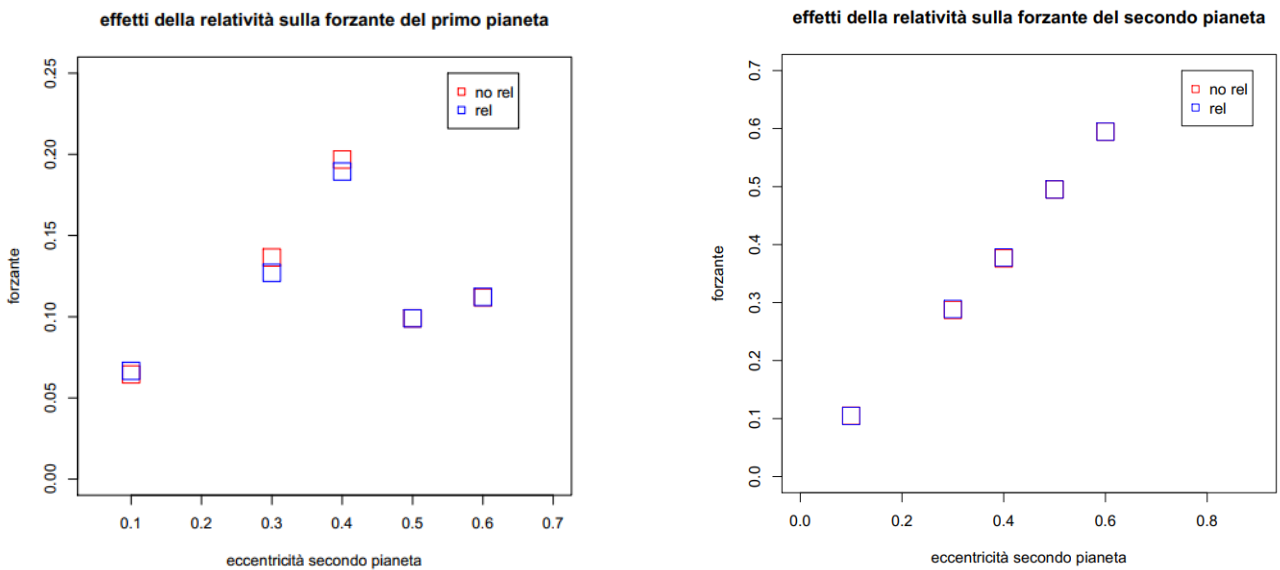


Figura 1.8: Stime ottenute per le differenti configurazioni per $e_{forzante}$ sia col termine della GR , che senza. Si osservano dei risultati in accordo con l'andamento che ci aspettavamo. In particolare segnaliamo che nel caso del quadratino di un solo colore per una configurazione, si ha una vicinanza dei valori stimati da non permettere la visualizzazione dei due diversi andamenti.

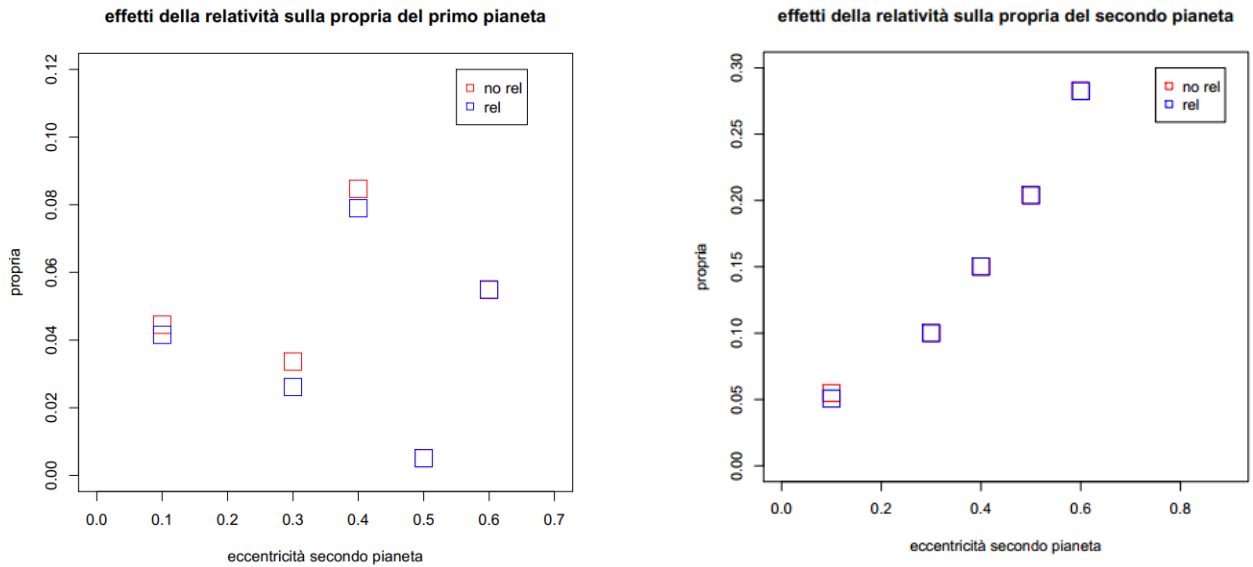


Figura 1.9: Stime ottenute per le differenti configurazioni per $e_{propria}$ sia col termine della GR , che senza. Si osservano dei risultati in accordo con l'andamento che ci aspettavamo.

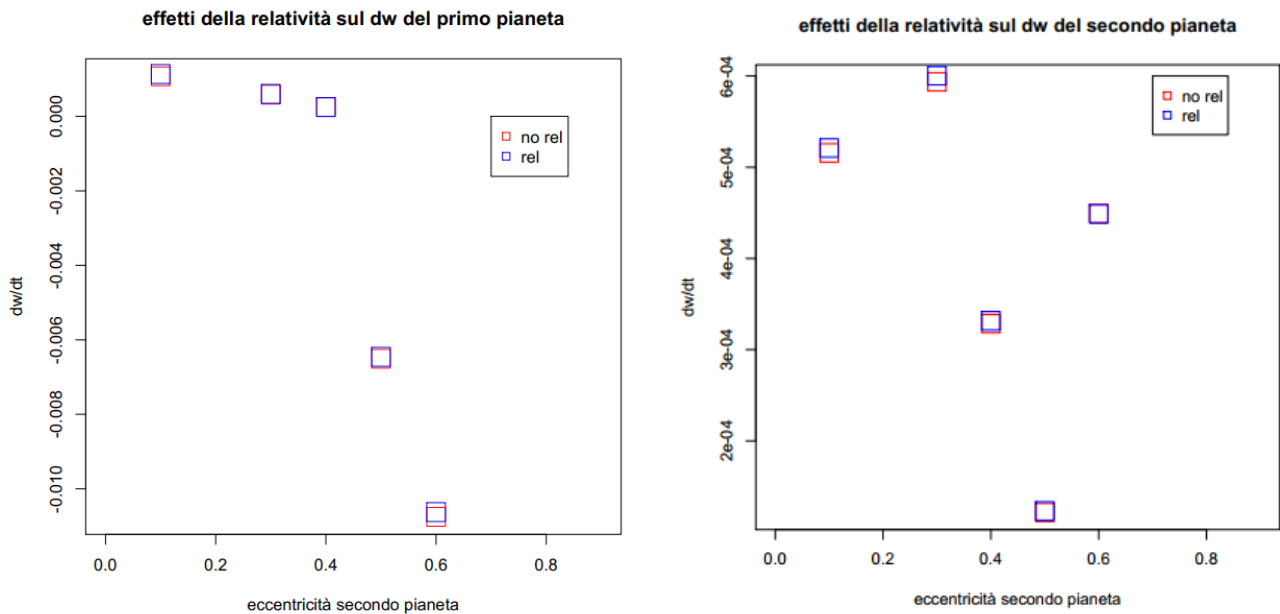


Figura 1.10: Andamento dei $\frac{dw}{dt}$ calcolati nelle differenti configurazioni, nel caso di GR attiva o meno.

Per avere una visione complessiva dell'analisi si possono visualizzare le Figure 1.8 e 1.9, grafici riassuntivi per i contributi dovuti alla GR per entrambi i pianeti. I risultati ottenuti rispettano le previsioni teoriche, sia per l'ampiezza forzante che per quella propria del sistema.

Le deviazioni fra teoria secolare con e senza GR sono osservabili nella diversa evoluzione temporale, ma non così ampie. Proponiamo quindi alcune configurazioni con valori di semiasse maggiore per il secondo pianeta di $1.5 AU$.

1.5 Configurazione con $a_2 = 1.5 AU$

Come si evince dai Grafici 1.8 e 1.9 la relatività modifica lievemente l'evoluzione secolare del sistema considerato.

Risolvendo, però, analiticamente le equazioni differenziali di Laplace-Lagrange, includendo il termine relativistico, possiamo ricavare i seguenti Grafici.

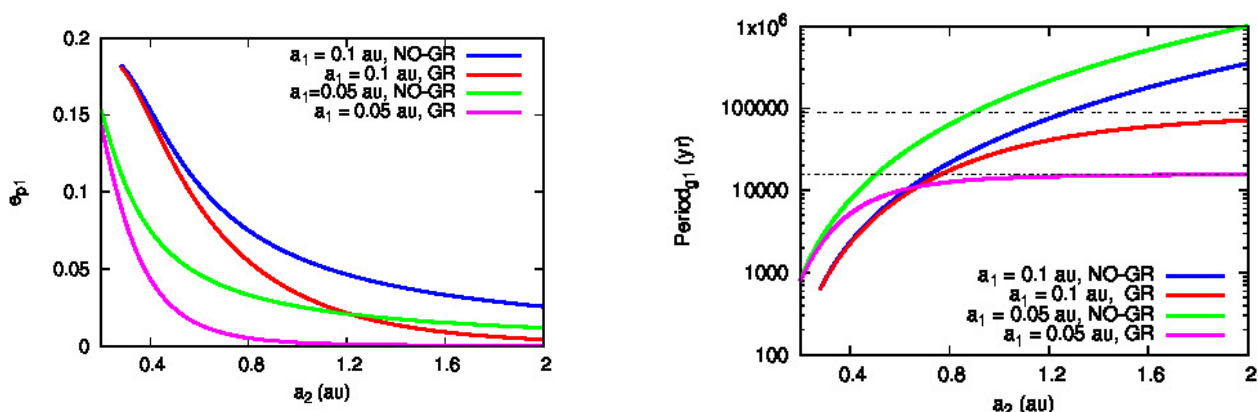


Figura 1.11: A sinistra è mostrato l'andamento di $e_{propria}$ per due diverse configurazioni aventi $a_1 = 0.1$ ed $a_1 = 0.05$ AU al variare di a_2 . A destra invece è mostrato l'andamento del periodo in funzione di a_2 per le stesse condifurazioni.

Osserviamo che le configurazioni analizzate e presentate nei capitoli precedenti presentano effettivamente un contributo della *GR* osservabile ma non cospicuo. Come si evince dalla Figura 1.11, le differenze maggiori tra caso di *GR* e il caso privo di tale contributo risulteranno maggiormente evidenti per una configurazione in cui $a_1 = 0.1$ ed $a_2 = 1.5$ AU.

Presentiamo quindi alcune configurazioni sempre planari ($I_1 = I_2 = 0$), con $a_1 = 0.1$, $a_2 = 1.5$, $e_1 = 0.1$ ed $e_2 \in [0.4, 0.6]$.

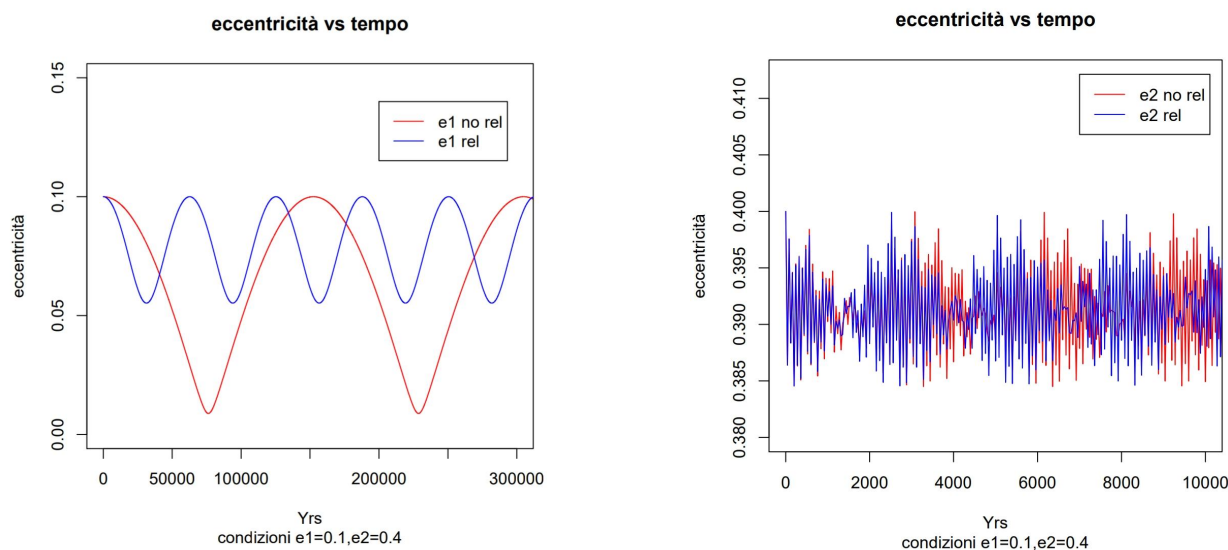


Figura 1.12: Andamento di $e_{1,2}(t)$ per la configurazione con $a_2 = 1.5$ AU e $e_2 = 0.4$. Osserviamo che per il secondo pianeta l'evoluzione dell'eccentricità non è dominata da una singola frequenza e ciò è dovuto al fatto che la teoria secolare è valida solo a piccole eccentricità.

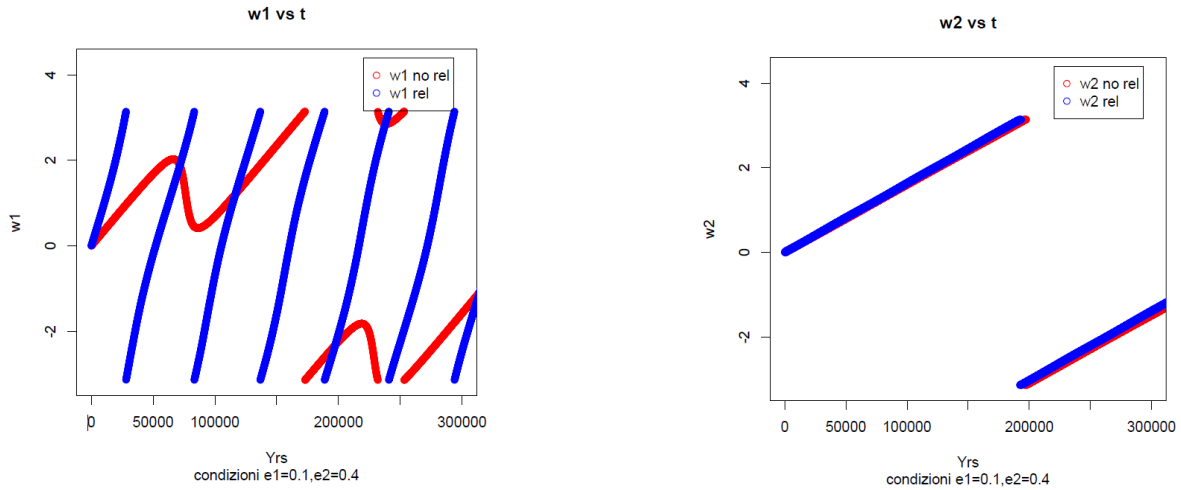


Figura 1.13: Andamento di $w_{1,2}(t)$ per la configurazione con $a_2 = 1.5 AU$ e $e_2 = 0.4$. Il termine di GR determina una variazione sostanziale del periodo, rendendo il sistema anche più stabile.

Dalla Figura 1.12 vediamo che effettivamente il contributo della GR risulta maggiormente distinguibile. Inoltre per il secondo pianeta si osserva un fenomeno di battimenti dovuto alla presenza di ulteriori frequenze non incluse nella teoria di Laplace-Lagrange. Notiamo infine che la relatività rende il sistema considerato maggiormente stabile, rendendo lineare l'andamento di $w_1(t)$ come si osserva dalla Figura 1.14, cambiandone sostanzialmente il periodo.

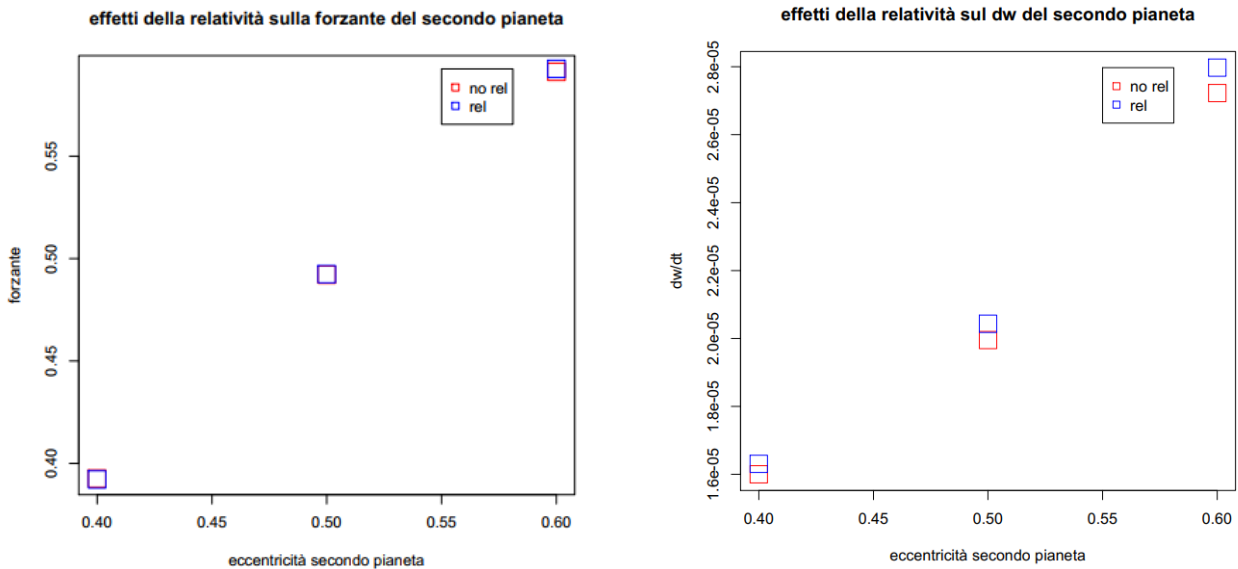


Figura 1.14: A sinistra riportiamo le stime ottenute per le differenti configurazioni per $e_{forzante}$ sia col termine della GR , che senza. Si osservano dei risultati in accordo con l'andamento che ci aspettavamo. A destra è mostrato l'andamento dei $\frac{dw}{dt}$ calcolati nelle differenti configurazioni, nel caso di GR attiva o meno.

Nei Grafici 1.14 possiamo osservare le differenze di evoluzione del sistema con $a_2 = 1.5 AU$ per $e_{forzante}$ e $\frac{dw}{dt}$. Come ci aspettavamo, man mano che l'eccentricità del pianeta aumenta, l'apporto della GR su $e_{forzante}$ cambia: per eccentricità basse $e_{forzante}$ con la GR attiva risulta essere minore al caso di GR spenta, viceversa, per eccentricità alte $e_{forzante}$ con il termine GR diviene sempre più grande. Notiamo inoltre che per questo sistema, la differenza fra $\frac{dw}{dt}$ diviene più importante. Concludiamo perciò, che il termine di GR determina una netta differenza evoluzione secolare per il sistema studiato.

Conclusioni

Concludiamo la nostra analisi riconoscendo che il contributo della GR nella teoria secolare gioca un ruolo importante nell'evoluzione dinamica di sistemi planetari con orbite vicine alla stella.

La GR agisce diminuendo $e_{propria}$ rendendo più stabili sistemi con elevata eccentricità che altrimenti andrebbero incontro ad una evoluzione caotica.

Le conseguenze dell'introduzione del termine della GR sono maggiormente visibili se poniamo il secondo pianeta ad una distanza dalla stella maggiore di $0.8 AU$. Per tali configurazioni, infatti, le differenze fra periodi e quella fra le eccentricità sono maggiori rispetto a quelle con a_2 più piccolo.

Osserviamo inoltre che la teoria sviluppata è valida al primo ordine e l'unico termine aggiuntivo è stato quello della GR . Si potrebbe implementare anche un termine che tratti la marea dinamica esercitata e subita dai pianeti il cui risultato, combinato al nostro studio, porterebbe molte più configurazioni ad essere stabili. E' opportuno osservare anche che le simulazioni presentate non ricoprono la vasta scelta delle condizioni iniziali, quindi non si può ricavare una funzione di distribuzione di configurazioni stabili di pianeti giganti attorno ad una stella, che potrebbe essere maggiore.

Bibliografia

- [1] Carl D. Murray, Stanley F. Dermott. *Solar System Dynamics*.
- [2] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler *Gravitation*.
- [3] F. Marzari, M. Nagasawa *Influence of general-relativity effects, dynamical tides, and collisions on planet-planet scattering close to the star*.
- [4] Jacques Henrard, Anne-Sophie Libert. *The secular planetary three body problem revisited*.