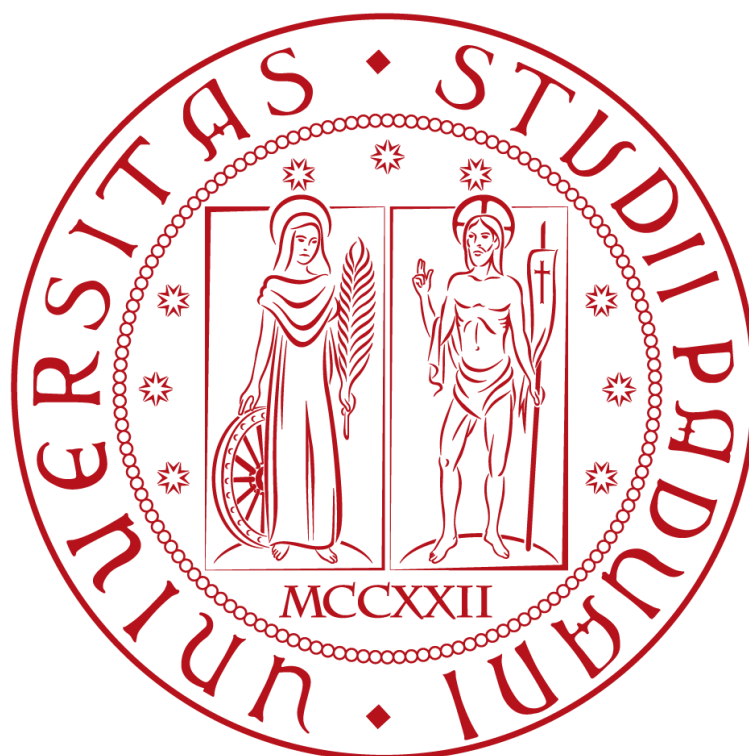


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria dell'Informazione



TESI DI LAUREA

Progetto di un sistema di controllo per un ascensore

Relatore

Prof.ssa Maria Elena Valcher

Laureando

Riato Alex

Anno Accademico 2012-2013

Indice:

1. Introduzione	pag. 3
2. Principi Fisici	pag. 4
3. Analisi del Modello Matematico	pag. 4
3.1. Equazioni del modello	pag.5
3.2. Modello di stato	pag.6
3.3. Funzione di trasferimento	pag.7
3.4. Diagrammi di Bode	pag.8
3.5. Stabilità del sistema	pag.9
4. Progetto di un controllore	pag.11
4.1. Progetto del controllore statico	pag.12
4.2. Progetto del controllore dinamico	pag.15
5. Conclusioni	pag.28
6. Bibliografia	pag.29

1. Introduzione

Un ascensore si definisce come un impianto meccanico dedito al sollevamento e al trasporto verticale di persone e cose, per raggiungere piani in altezza o in profondità rispetto al suolo. Grazie al movimento di un argano elettrico si permette di salire o scendere ad una cabina collegata con funi, solitamente d'acciaio, all'argano stesso e ad un contrappeso.

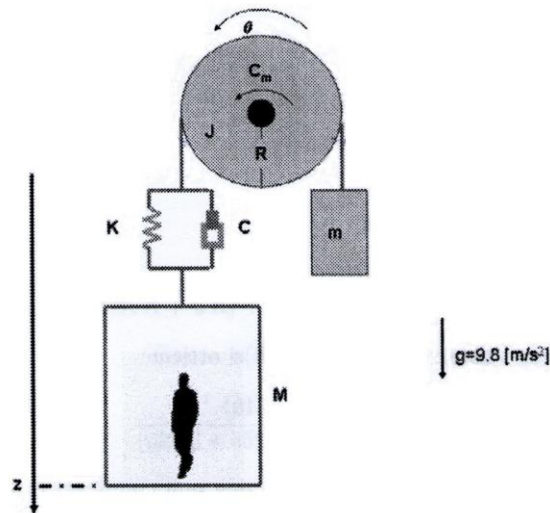


Figura 1.1 – Modello dell'ascensore

Come si osserva nella Figura 1.1 le principali componenti di un ascensore sono:

- La cabina, ovvero uno spazio che può essere più o meno grande che funge da contenitore per la merce o le persone che si desidera spostare ai diversi livelli di altezza
- Un cavo metallico che collega le varie parti dell'ascensore stesso e che permette la trasmissione del moto
- Un argano elettrico che funge da cuore dell'ascensore e decreta l'inizio e la fine di tutti i movimenti
- Un contrappeso che ha lo scopo di ridurre il lavoro svolto dall'argano per sollevare il carico e di tenere in tensione le funi in modo da esercitare attrito sufficiente a non far scivolare la fune metallica

L'ascensore moderno trova i suoi primi utilizzi agli inizi del XIX secolo nelle cave minerarie, dove svolge la funzione di montacarichi. Nel corso degli anni questa tecnologia si sviluppa e si raffina, fino ai giorni nostri dove gli ascensori sono presenti ovunque: condomini, centri commerciali, fabbriche, uffici, edifici di più svariato genere. Al giorno d'oggi esistono

ascensori in grado di raggiungere oltre i 1000 metri di altezza in solo un minuto. Essi viaggiano a velocità dell'ordine di 18 m/s (64km/h) e si può ben pensare che è proprio in questi casi, oltre che in tutti gli altri, che i dispositivi di controllo automatico dell'altitudine giocano un ruolo fondamentale. Lo scopo di questa tesi è proprio quello di controllare la quota della cabina dell'ascensore tramite la progettazione di un opportuno sistema di controllo, il quale agirà sulla coppia motrice dell'organo elettrico in modo da poter compensare opportunamente la forza di gravità.

2. Principi Fisici

I principi fisici che regolano il funzionamento di un ascensore sono principalmente due. Il primo si riferisce al moto compiuto dalla cabina e dal contrappeso sotto l'effetto della forza di gravità ed è espresso dalle prime due leggi della dinamica di Newton, esplicitate qui di seguito:

Prima legge della dinamica:

“un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità, ovvero resta in stato di quiete se era fermo ($v=0$) oppure si muove di moto rettilineo uniforme (velocità costante non nulla)”

Seconda legge della dinamica:

$$F = ma \quad (2.1)$$

“L'interazione di un punto con l'ambiente circostante, espresso tramite la forza F , determina l'accelerazione del punto, ovvero la variazione della sua velocità nel tempo. La massa m è la massa inerziale del punto”

Il secondo si riferisce al moto compiuto dall'organo che viene descritto nella dinamica del corpo rigido, in particolare nelle rotazioni rigide attorno ad un asse fisso. In questo caso ricordiamo che ciascun punto P_i del corpo descrive in un piano ortogonale all'asse una traiettoria circolare con centro sull'asse e raggio R_i , pari alla distanza del punto dall'asse. La velocità del punto è v_i , di modulo ωR_i , l'accelerazione è a_i , con componente normale $\omega^2 R_i$ e tangenziale αR_i .

3. Analisi del Modello Matematico

Le equazioni che descrivono la dinamica di un ascensore sono:

$$\begin{cases} J\ddot{\theta} = KR(z - \theta R) + CR(\dot{z} - \dot{\theta}R) + C_m(t) - mgR \\ M\ddot{z} = -K(z - \theta R) - C(\dot{z} - \dot{\theta}R) + Mg \end{cases} \quad (3.1)$$

Dove il significato dei vari simboli che compaiono in (3.1) è il seguente:

Simbolo	Grandezza espressa	Unità di misura
J	momento d'inerzia dell'organo	Kg m^2
θ	spostamento angolare	Rad
K	costante elastica	N/m
R	raggio dell'organo	m
z	altitudine della cabina dell'ascensore	m
C	coefficiente smorzamento viscoso	Ns/m
C_m	coppia motrice	Nm
g	accelerazione di gravità	m/s^2
m	massa del contrappeso dell'ascensore	Kg
M	massa della cabina dell'ascensore	Kg

Figura 3.1 - Descrizioni variabili e unità di misura

In fisica un corpo rigido si dice in equilibrio meccanico quando sono rispettate due condizioni particolari: la sommatoria di tutte le forze esterne e quella dei momenti devono risultare nulle. Osservando le due equazioni si capisce che la prima esprime la relazione di equilibrio tra i momenti dell'organo, mentre la seconda esprime il bilancio delle forze che agiscono verticalmente sulla cabina.

3.1 Equazioni del modello

Analizziamo dettagliatamente la prima equazione e le sue componenti. Un momento è definito come il prodotto vettoriale tra la forza e il braccio, ovvero la distanza dal centro del punto su cui viene applicata la forza stessa. Perché sia rispettata la relazione di equilibrio deve valere:

$$J\ddot{\alpha} = \sum \vec{M}_{est} \quad (3.2)$$

Dove J rappresenta il momento d'inerzia, α l'accelerazione angolare e M_{est} i momenti agenti sul corpo rigido. Nel nostro caso i momenti che agiscono sono:

Momento dovuto alla forza elastica: $M_e = KR(z - \theta R)$

Momento dovuto allo smorzatore viscoso: $M_v = CR(\dot{z} - \dot{\theta}R)$

Momento dovuto alla coppia motrice: $M_m = C_m(t)$

Momento dovuto al contrappeso: $M_c = mgR$

Applicando la relazione di equilibrio osservata in precedenza, abbiamo:

$$J\alpha = M_e + M_v + M_m - M_c \quad (3.3)$$

E sostituendo individuiamo la prima delle due equazioni cercate:

$$J\ddot{\theta} = KR(z - \theta R) + CR(\dot{z} - \dot{\theta}R) + C_m(t) - mgR \quad (3.4)$$

Soffermiamoci ora sulla seconda equazione del sistema, essa esprime il bilancio delle forze di traslazione ed è regolata dalla ben nota seconda legge della dinamica. Perché venga rispettata la relazione di equilibrio deve valere:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{est} \quad (3.5)$$

Dove m rappresenta la massa, a l'accelerazione del centro di massa e F_{est} le forze agenti sul corpo rigido. Nel nostro specifico caso le forze in gioco sono:

Forza elastica: $F_e = K(z - \theta R)$

Forza dello smorzatore viscoso: $F_v = C(\dot{z} - \dot{\theta}R)$

Forza peso della cabina: $F_p = Mg$

Applicando la relazione di equilibrio precedentemente osservata abbiamo:

$$Ma = -F_e - F_v + F_p \quad (3.6)$$

E sostituendo individuiamo la seconda delle equazioni cercate:

$$M\ddot{z} = -K(z - \theta R) - C(\dot{z} - \dot{\theta}R) + Mg \quad (3.7)$$

3.2 Modello di stato

Il sistema descritto in (3.1) dalle due precedenti equazioni risulta essere in forma lineare. Di esso è possibile derivare i punti di equilibrio (ad ingresso costante) e in seguito darne una descrizione attraverso un modello di stato lineare, che descriva la dinamica per piccole variazioni attorno al punto di equilibrio (e per piccole variazioni rispetto al valore costante imposto per l'ingresso).

Definiamo l'ingresso e l'uscita del nostro sistema SISO come:

$$\begin{aligned} u(t) &= C_m(t) \text{ ovvero il momento della coppia torcente dell'argano} \\ y(t) &= z(t) \text{ ovvero l'altezza della cabina dell'ascensore} \end{aligned}$$

Per trovare i punti di equilibrio si azzerano le derivate e si ricava un ingresso tale da preservare le uguaglianze dal sistema stesso. Si ottiene in tal modo:

$$\begin{cases} KR(z - \theta R) + C_m - mgR = 0 \\ -K(z - \theta R) + Mg = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Una volta risolto il semplice sistema di equazioni, l'ingresso di equilibrio risulta essere $C_m = gR(m - M)$. Scegliendo in modo arbitrario $\bar{\theta} = 0$ e quindi avendo $\bar{z} = Mg/K$ posso definire gli stati x_1, x_2, x_3 e x_4 come segue: $x_1 = \theta - \bar{\theta}$, $x_2 = z - \bar{z}$, $x_3 = \dot{\theta} = \dot{x}_1$, $x_4 = \dot{z} = \dot{x}_2$. Così facendo è possibile rappresentare il sistema sotto forma di equazioni di stato.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.9)$$

Dove x è il vettore di componenti sopra elencate mentre A , B e C sono matrici. Nello specifico le tre matrici risultano essere:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-KR^2}{J} & \frac{KR}{J} & \frac{-CR^2}{J} & \frac{CR}{J} \\ \frac{KR}{M} & \frac{-K}{M} & \frac{CR}{M} & \frac{-C}{M} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

3.3 Funzione di trasferimento

A questo punto è opportuno ricavarci la funzione di trasferimento del sistema linearizzato. Avendo il modello di stato essa si ricava utilizzando la relazione:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (3.10)$$

Risolvendo (3.10) si ricava la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{R(Cs + K)}{s^2[JMs^2 + (JC + CR^2M)s + (KJ + KR^2M)]} \quad (3.11)$$

Assumiamo, da adesso in avanti, che i parametri finora elencati abbiano i seguenti valori numerici:

$$R = 0.25[m]; \quad J = 10[Kgm^2]; \quad M = 1000[Kg]; \quad m = 500[Kg]; \\ C = 100[Nsec/m]; \quad K = 500[N/m]$$

Allora la funzione di trasferimento diventa:

$$G(s) = 1.25 \cdot 10^{-3} \frac{(s + 10)}{s^2(s^2 + 0.3625s + 3.625)} \quad (3.12)$$

E rappresentata nella forma di Bode:

$$G(s) = 3.45 \cdot 10^{-3} \frac{(1 + \frac{s}{10})}{s^2(1 + 0.1s + \frac{s^2}{3.625})} \quad (3.13)$$

Si può notare che la funzione di trasferimento presenta un guadagno di Bode $K_B = 3.45 \cdot 10^{-3}$, uno zero reale e negativo in $z_1 = -10$, un polo doppio nell'origine $p_1 = 0$ e due poli complessi coniugati stabili in $p_{2,3} = -0.1813 \pm 1.8953j$.

3.4 Diagramma di Bode

La risposta in frequenza di un sistema SISO è una funzione complessa $G(j\omega)$ della variabile ω , corrispondente ad una certa funzione di trasferimento $G(s)$. Quando, come nel nostro caso, lavoriamo con sistemi reali abbiamo:

$$\overline{G(j\omega)} = G(j\omega) = G(-j\omega) \quad (3.14)$$

Ovvero la risposta in frequenza possiede simmetria hermitiana e per questa considerazione il grafico della risposta in frequenza si può fare solo per valori di ω appartenenti all'intervallo $[0, +\infty]$. Sulla base delle considerazioni fatte e della funzione di trasferimento prima esaminata possiamo tracciare i diagrammi di Bode dell'ampiezza e della fase.

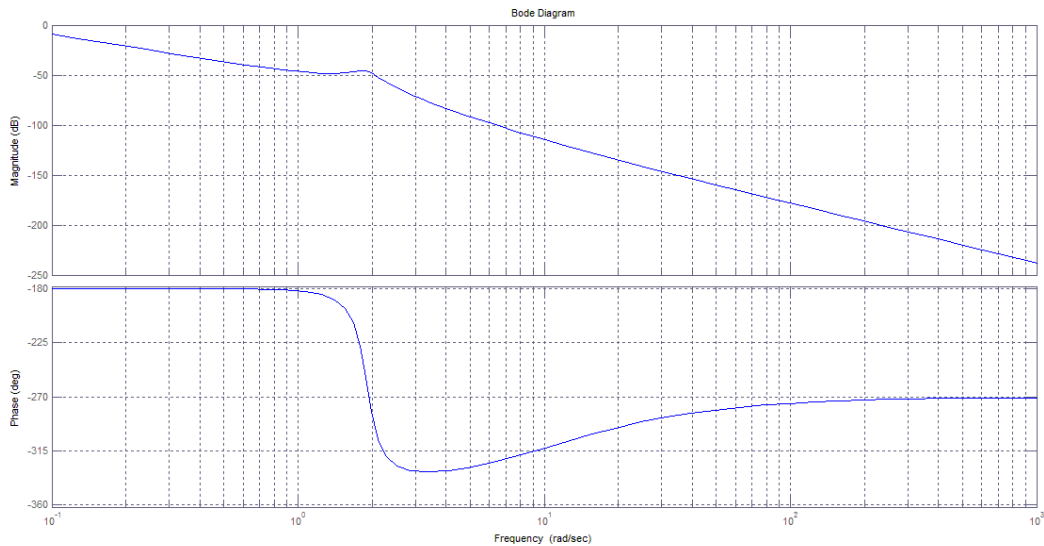


Figura 3.2 – Diagramma di Bode di $G(s)$

Fino a questo momento abbiamo analizzato il sistema di un ascensore dinamico come un sistema SISO in catena aperta, descritto dal suo ingresso, dalla funzione di trasferimento e dalla sua uscita. Esso può essere rappresentato mediante il semplice schema a blocchi sottostante.

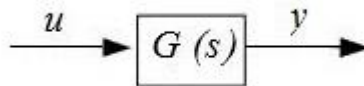


Figura 3.3 – Diagramma a blocchi sistema SISO

Da questo punto in avanti discuteremo invece dello stesso sistema in catena chiusa, ovvero in presenza della retroazione unitaria negativa. Le sue variabili descrittive sono $r(t)$ che rappresenta l'ingresso del sistema complessivo, $y(t)$ che rappresenta l'uscita ed $e(t)$ che rappresenta la differenza tra l'ingresso $r(t)$ e l'uscita $y(t)$, e quindi anche l'effettivo ingresso al controllore che progetteremo in seguito.

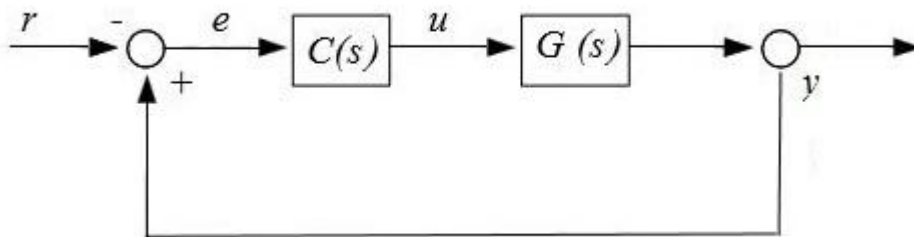


Figura 3.4 – Diagramma a blocchi sistema retroazionato

3.5 Stabilità del sistema

Iniziamo a studiare la BIBO stabilità del sistema. L'analisi in catena aperta si conclude osservando che la funzione di trasferimento ha due poli complessi coniugati a parte reale negativa, quindi stabili, e un polo doppio nell'origine che ci porta a dire che il sistema non è BIBO stabile. Un sistema lineare descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti propria è infatti BIBO stabile se e solo se la sua funzione di trasferimento $G(s)$ è razionale propria e ha tutti i poli nel semipiano sinistro aperto $Re(s) < 0$.

Studiamo ora la BIBO stabilità del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa, assumendo che in catena aperta, oltre al processo, ci sia un compensatore con guadagno costante $C(s) = k$, e pertanto la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema retroazionato sia uguale a:

$$W(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)} \quad (3.15)$$

Considerando la rappresentazione della funzione $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ otteniamo:

$$W(s) = \frac{\frac{kn(s)}{d(s)}}{1 + \frac{kn(s)}{d(s)}} = \frac{kn(s)}{d(s) + kn(s)} \quad (3.16)$$

E sostituendo i valori numerici ricavati in precedenza $W(s)$ diventa:

$$W(s) = \frac{k3.45 \cdot 10^{-3} \left(1 + \frac{s}{10}\right)}{s^2 \left(1 + 0.1s + \frac{s^2}{3.625}\right) + k3.45 \cdot 10^{-3} \left(1 + \frac{s}{10}\right)} \quad (3.17)$$

Per studiare la stabilità della funzione sopra, al variare del parametro k , possiamo ricorrere al *Criterio di Routh* e valutare la collocazione dei poli della funzione di trasferimento. Andremo ad analizzare in particolare gli zeri del denominatore di $W(s)$, ovvero gli zeri del polinomio $d(s) + kn(s)$, e a verificare che tale polinomio sia di *Hurwitz* ovvero che tutte le sue radici siano a parte reale negativa. Questo equivale ad affermare che $W(s)$ ha tutti i poli nel semipiano sinistro aperto e quindi sarà BIBO stabile.

Considerato il polinomio $d(s) + kn(s)$, ovvero:

$$d(s) + kn(s) = \frac{1}{3.625} s^4 + 0.1s^3 + s^2 + k3.45 \cdot 10^{-4} s + k3.45 \cdot 10^{-3} \quad (3.18)$$

se ne costruisce la *tabella di Routh* e si valuta quando i termini della prima colonna sono non nulli e dello stesso segno, ovvero quando ci sono solo permanenze.

La *tabella di Routh* in questione risulta essere:

4	$\frac{1}{3.625}$	1	$k3.45 \cdot 10^{-3}$
3	0.1	$k3.45 \cdot 10^{-4}$	0
2	$1 - \frac{k3.45 \cdot 10^{-4}}{0.3625}$	$k3.45 \cdot 10^{-3}$	0
1	$\frac{(k3.45 \cdot 10^{-4})^2}{k3.45 \cdot 10^{-4} - 0.3625}$	0	0
0	$k3.45 \cdot 10^{-3}$	0	0

Figura 3.2 – Tabella di Routh

Il polinomio allora è di Hurwitz se e solo se:

$$\begin{cases} 1 - \frac{k3.45 \cdot 10^{-4}}{0.3625} > 0 \\ \frac{(k3.45 \cdot 10^{-4})^2}{k3.45 \cdot 10^{-4} - 0.3625} > 0 \\ k3.45 \cdot 10^{-3} > 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} 0.3625 > k3.45 \cdot 10^{-4} \\ k3.45 \cdot 10^{-4} > 0.3625 \\ k > 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Risolviendo il sistema si nota che per nessun valore di k il polinomio analizzato risulta di Hurwitz, questo significa che il denominatore della funzione di trasferimento $W(s)$ avrà sicuramente almeno uno zero a parte reale positiva. Si conclude che un compensatore con guadagno costante, $C(s) = k$, non è sufficiente a garantire la BIBO stabilità al nostro sistema. Sarà quindi necessario progettare dei compensatori più complessi e più efficienti.

4. Progetto di un controllore

Il progetto di un controllore consiste nell'individuare un sistema lineare e tempo-invariante, con una funzione di trasferimento razionale e propria $C(s)$, in modo che il sistema retroazionato abbia una funzione di trasferimento pari a:

$$W(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} \quad (4.1)$$

e che soddisfi delle specifiche di progetto ben definite. Nel nostro caso esse sono:

1. Errore a regime nullo nell'inseguimento di riferimenti di posizione e velocità
2. Inseguimento di un profilo di accelerazione costante unitario con errore minore di 0.1 m/s^2
3. Risposta al gradino con sovraelongazione minore del 5% e con un tempo di assestamento non superiore a 0.15 s.
4. Supposto che la massa M abbia un'incertezza del 10% rispetto al valore nominale (dovuta alla presenza di un utente), la quota a regime vari entro $\pm 1 \text{ cm}$.

4.1 Progetto del controllore statico

Il Tipo di un sistema è definito come segue:

“dato un sistema SISO, lineare e tempo-invariante, causale e BIBO stabile, a tempo continuo, la funzione di trasferimento $W(s)$ sia strettamente propria e soddisfi $W(0) \neq 0$. Diciamo che tale sistema è di tipo k se esso insegue con errore di regime permanente costante, ma non nullo, il segnale canonico $\delta_{-(k+1)}(t) = \frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t)$. Detto in altre parole, indicando con $\omega_{-(k+1)}(t)$ la risposta (forzata) del sistema al segnale d'ingresso $u(t) = \delta_{-(k+1)}(t)$ il sistema è di tipo k se:

$$e_{rp}^{(k+1)} := \lim_{t \rightarrow \infty} [\delta_{-(k+1)}(t) - \omega_{-(k+1)}(t)] \quad (4.2)$$

esiste finito ed è un numero reale non nullo.”

Nel caso in esame, l'errore a regime per un riferimento di posizione viene definito come:

$$e_{rp}^{(1)} := \lim_{t \rightarrow \infty} [\delta_{-1}(t) - \omega_{-1}(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} [\delta_{-1}(t) - W(0)\delta_{-1}] = 1 - W(0) \quad (4.3)$$

E sostituendo $s = 0$ nella nostra funzione di trasferimento otteniamo $W(0) = 1$ e quindi un errore a regime permanente, per un riferimento di posizione, nullo. Il sistema non è di Tipo 0, ma risulterà essere di Tipo 1 o superiore. Consideriamo ora il problema dell'inseguimento di un riferimento di velocità.

Prima di passare al controllo vero e proprio dell'errore a regime permanente osserviamo che, nelle condizioni sopra espresse, il sistema risponde al segnale canonico $\delta_{-(k+1)}(t) = \frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t)$ con un segnale del tipo:

$$\omega_{-(k+1)}(t) = W(0)\delta_{-(k+1)}(t) + W^{(1)}(0)\delta_{-k}(t) + \frac{W^{(2)}(0)}{2!}\delta_{-(k-1)}(t) + \dots + \frac{W^{(k)}(0)}{k!}\delta_{-1}(t) + c(t) \quad (4.4)$$

con $c(t)$ segnale convergente a zero. Questo implica che il sistema risulta essere di tipo $k \geq 1$ se e solo se

$$W(0) = 1, \quad W^{(1)}(0) = \dots = W^{(k-1)}(0) = 0 \quad e \quad W^{(k)}(0) \neq 0 \quad (4.5)$$

e in questo caso l'errore a regime è: $e_{rp}^{(k+1)} = -\frac{W^{(k)}(0)}{k!}$.

Ritornando al sistema in esame si osserva che $W^{(1)}(0) = 0$, e quindi $e_{rp}^{(2)} = 0$, ovvero che l'errore a regime permanente di un riferimento di velocità è nullo anch'esso. Il sistema sarà allora di Tipo 2 o superiore. A questo punto si può affermare che la prima delle specifiche richieste è già rispettata. Concludiamo che il sistema risulta di Tipo 2 analizzando la derivata seconda della funzione di trasferimento e osservando che $W^{(2)}(0) \neq 0$.

La successiva specifica richiesta è l'inseguimento un profilo di accelerazione costante unitario con un errore inferiore a 0.1 m/s^2 . Giacché il sistema è di Tipo 2 questa specifica mira a fissare l'errore di regime permanente alla rampa parabolica, poiché l'accelerazione costante e unitaria è equivalente a un riferimento di posizione che vale $\delta_{-2}(t)$. Al termine dell'analisi otterremo un determinato valore per la costante di Bode K_c del compensatore. Prima di procedere con il calcolo diretto di K_c seguiamo il ragionamento che ci porterà alla formula finale.

Consideriamo un processo lineare e tempo-invariante, con funzione di trasferimento razionale e propria $G(s)$ ed un compensatore, anch'esso lineare e tempo-invariante con funzione di trasferimento razionale e propria $C(s)$. Per evidenziare i poli nell'origine scriviamo in questa forma:

$$C(s)G(s) = \frac{1}{s^\nu} G_1(s) \quad (4.6)$$

Nel nostro particolare caso avremo $\nu = 2$, poiché la funzione $G(s)$ presenta due poli in zero. Per come è stata scelta $G_1(0) \neq 0$ e $G_1(0) \neq \infty$.

La funzione $W(s)$, ovvero la funzione di trasferimento del sistema retroazionato, tenendo conto del fatto che $G_1(s) = \frac{n_1(s)}{d_1(s)}$, risulterà:

$$W(s) = \frac{G_1(s)}{s^2 + G_1(s)} = \frac{n_1(s)}{d_1(s)s^2 + n_1(s)} \quad (4.7)$$

Arrivati a questo punto non ci resta che applicare l'ingresso canonico $r(t) = \frac{t^2}{2!}\delta_{-1}(t)$, il quale ha trasformata di Laplace $R(s) = \frac{1}{s^3}$ e trovare l'errore corrispondente $e(t) = r(t) - y(t)$.

$$E(s) = R(s) - R(s)W(s) = R(s)[1 - W(s)] = \left[1 - \frac{n_1(s)}{d_1(s)s^2 + n_1(s)}\right] \frac{1}{s^3} = \frac{s^2}{s^3} \frac{d_1(s)}{d_1(s)s^2 + n_1(s)} \quad (4.8)$$

Notiamo che resta un polo nell'origine di molteplicità 1 e avrò $E(s) = \frac{A}{s} + \text{termini convergenti a zero}$. Antitrasformando otterremo $e(t) \rightarrow A$ (con $A \neq 0, A \neq \infty$) per $t \rightarrow \infty$. In questo caso il sistema è proprio di Tipo 2, in quanto risponde all'ingresso canonico con un errore finito e diverso da zero.

La costante A si trova facilmente come:

$$A = s \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d_1(s)}{s[d_1(s)s^\nu + n_1(s)]} \quad (4.8)$$

Distinguendo i due casi:

$$A = \begin{cases} \frac{d_1(0)}{d_1(0) + n_1(0)} = \frac{1}{1 + G_1(0)} & \text{per } \nu = 0 \\ \frac{d_1(0)}{n_1(0)} = \frac{1}{G_1(0)} & \text{per } \nu > 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Osservando ora che la funzione $G_1(s)$ valutata in zero coincide con la costante di Bode relativa alla funzione di trasferimento $C(s)G(s)$, possiamo scrivere:

$$e_{rp}(t) = \begin{cases} \frac{1}{1 + K_C K_G} & \text{per } \nu = 0 \\ \frac{1}{K_C K_G} & \text{per } \nu > 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Ritornando al progetto del controllore in esame è richiesto un errore a regime permanente minore di 0.1 m/s^2 , ed essendo un sistema di Tipo 2 siamo nel caso $\nu > 0$. Teniamo inoltre conto del fatto che la costante di Bode della funzione $G(s)$ vale $K_G = 3.45 \cdot 10^{-3}$. Allora deve valere la disequazione:

$$e_{rp}(t) = \frac{1}{K_C K_G} \leq 0.1 \quad (4.11)$$

Da cui:

$$K_C \geq \frac{1}{0.1 * 3.45 \cdot 10^{-3}} = 2899 \quad (4.12)$$

Quindi per ottenere un errore a regime minore di quello assegnato per quanto riguarda l'inseguimento di un profilo di accelerazione costante unitaria occorre che la costante di Bode del compensatore sia maggiore del valore ricavato, nello specifico $K_C \geq 2899$. Da adesso in avanti assumeremo per semplicità di calcoli $K_C = 2900$.

4.2 Progetto del controllore dinamico

Arriviamo poi alla terza specifica chiesta dal nostro studio, ovvero una risposta al gradino con sovraelongazione percentuale minore del 5% e con tempo di assestamento non superiore a 0.15 s.

Analizziamo nel dettaglio il significato dei parametri precedentemente citati.

La *sovraelongazione (overshoot)* è definita come il massimo scostamento che la risposta al gradino $\omega_{-1}(t)$ presenta nella sua evoluzione temporale rispetto al valore finale $\omega_{-1}(+\infty)$. Tale scostamento viene espresso in percentuale con riferimento al valore finale stesso.

Il *tempo di assestamento (settling-time)* è definito come il tempo necessario alla risposta a portarsi definitivamente in un intorno del valore di regime $\omega_{-1}(+\infty)$.

Questi parametri possono essere tradotti nel dominio della frequenza sotto forma di specifiche su margine di fase m_ψ^* e pulsazione di attraversamento ω_A^* ricavate dalle formule approssimate:

$$s = e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \rightarrow \delta \approx 0.7 \quad (4.13)$$

Il valore di δ approssimato che ricaviamo dalla specifica sulla sovraelongazione si riferisce al coefficiente di smorzamento del sistema di secondo grado approssimante il sistema ad anello chiuso in esame. Una volta ottenuto il valore di δ possiamo trovare le condizioni:

$$\omega_A^* = \frac{3}{\delta T_A} \approx 30 \text{ rad/s} \quad (4.14)$$

$$m_\psi^* \approx 100\delta = 70^\circ \quad (4.15)$$

Esaminiamo per un attimo questi due parametri, e per fare ciò consideriamo la funzione $\tilde{G}(j\omega) = C(j\omega)G(j\omega)$ che corrisponde alla risposta in frequenza del sistema in catena aperta.

Per definizione la *pulsazione di attraversamento* ω_A è definita come la pulsazione in corrispondenza alla quale il diagramma di Bode dei moduli interseca l'asse delle ascisse, corrispondente a un guadagno di 0 dB

$$|\tilde{G}(j\omega_A)|_{dB} = 20 \log_{10} |\tilde{G}(j\omega_A)| = 0 \quad (4.16)$$

o equivalentemente

$$|\tilde{G}(j\omega_A)| = 1 \quad (4.17)$$

Il *margin di fase* m_ψ è invece definito come la differenza tra la fase della risposta in frequenza alla pulsazione di attraversamento ω_A e -180° :

$$m_\psi = \arg(\tilde{G}(j\omega_A)) + 180^\circ \quad (4.18)$$

Riassumendo brevemente, il progetto del controllore per il nostro sistema ha già soddisfatto alcune delle specifiche richieste, quali che il sistema sia di Tipo 2 e che l'errore a regime permanente per un riferimento di accelerazione sia limitato a 0.1 m/s . Questo necessita che la costante di Bode del nostro controllore sia $K_C \geq 2899$. Considerando la funzione di trasferimento del compensatore composta come segue:

$$C(s) = C'(s)C''(s) \quad (4.19)$$

possiamo affermare dall'analisi fin'ora effettuata di esserci ricavati $C'(s) = 2900$ ed ora dobbiamo trovare un $C''(s)$ che permetta di soddisfare le specifiche di margine di fase $m_\psi^* = 70^\circ$ e di pulsazione di attraversamento $\omega_A^* = 30 \text{ rad/s}$.

Per perseguire questo obiettivo procediamo per mezzo della tecnica nota in letteratura come sintesi per tentativi nel seguente modo:

- Verifica se un compensatore proporzionale $C(s) = k$ sia sufficiente a rispettare tutte le specifiche in esame
- Utilizzo di un controllore PID, come $C''(s)$, per migliorare le prestazioni del sistema nel caso l'azione proporzionale non fosse sufficiente
- Progetto di una o più reti ritardatrici o anticipatrici, come $C''(s)$, atte a rispettare tutte le specifiche del progetto se neanche il controllore PID bastasse

Compensatore Costante

Procediamo quindi con la progettazione del compensatore proporzionale $C(s) = k$. Tenendo conto dei risultati ottenuti fin'ora sappiamo che la costante di proporzionalità k deve essere maggiore di 2899 per rispettare il vincolo imposto dall'errore a regime permanente. Tracciamo quindi i diagrammi di Bode della funzione $C(s)G(s)$, con $C(s)=2900$, per avere un quadro più completo della situazione.

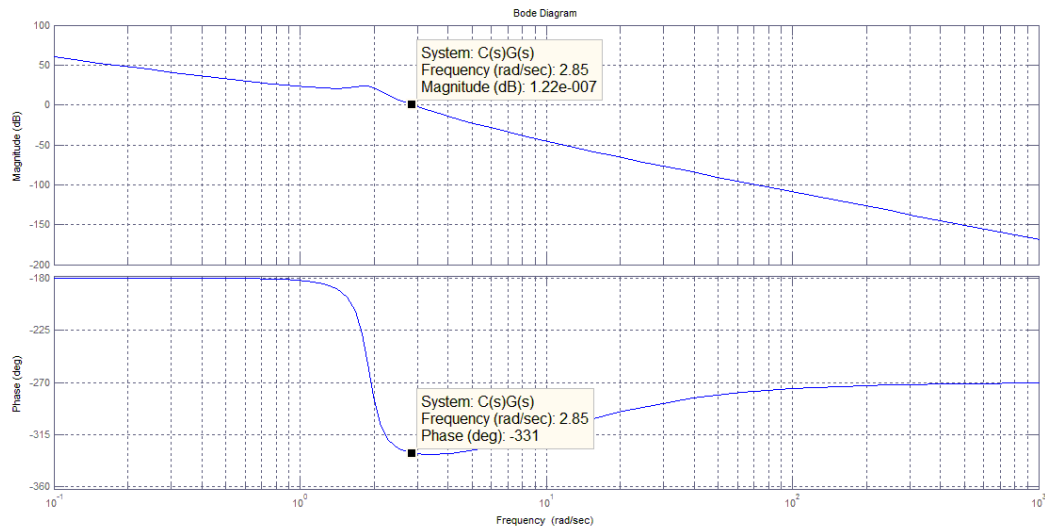


Figura 4.1 – Diagramma di Bode $C(s)G(s)$

Dal diagramma si nota immediatamente che pulsazione di attraversamento e margine di fase non sono quelli richiesti. La prima risulta uguale a $\omega_A = 2.85 \text{ rad/s}$ (mentre è richiesto $\omega_A^* = 30 \text{ rad/s}$) e rappresenta il valore dell'ascissa quando la funzione del modulo di $C(s)G(s)$ incrocia la retta dei 0 dB . Il margine di fase invece si ricava facendo la differenza tra la fase alla pulsazione di attraversamento e -180° , quindi risulta $m_\psi = \arg(C(j\omega_A)G(j\omega_A)) + 180^\circ = -331^\circ + 180^\circ = -151^\circ$ (mentre è richiesto $m_\psi^* = 70^\circ$).

Per cercare di soddisfare le specifiche richieste possiamo andare a lavorare solo sulla costante k del compensatore. Non possiamo diminuirla perché andremo a violare le condizioni citate in precedenza, quindi l'unica cosa possibile e ragionata da fare è aumentarla. Così facendo andiamo ad aumentare la pulsazione di attraversamento e anche il margine di fase.

Continuando a far crescere k arriveremo a soddisfare la richiesta di avere una pulsazione di attraversamento $\omega_A^* = 30 \text{ rad/s}$. Notiamo però che per $\omega \rightarrow +\infty$ la fase di $C(s)G(s)$ si stabilizza in un intorno di -270° e quindi il margine di fase sarà uguale a $m_\psi = -90^\circ$. Da questo si evince che anche aumentando il valore di k possiamo soddisfare solo la condizione sulla pulsazione di attraversamento, ma non quella sul margine di fase.

Questo risultato non dovrebbe sorprenderci in quanto dallo studio della stabilità effettuato precedentemente con il *criterio di Routh* era emerso che la funzione di trasferimento $C(s)G(s)$, con $C(s) = k$, era instabile per qualsiasi valore di k . Questo fatto viene riconfermato dal margine di fase che risulta essere sempre minore di zero.

In conclusione possiamo affermare che non si consegue nessun risultato utile con questo tipo di compensatore, anzi addirittura si è al di fuori dei limiti di BIBO stabilità.

Compensatori PID

Una volta verificato che un compensatore costante non soddisfa i requisiti necessari a migliorare il sistema in questione si passa ad una classe di controllori un po' più complessi.

Le considerazioni e le analisi fatte fin'ora non ci hanno fatto avvicinare al nostro obiettivo di progettare un controllore che soddisfi tutte le specifiche richieste, di ottenere una pulsazione di attraversamento $\omega_A^* = 30 \text{ rad/s}$ e un margine di fase $m_\psi^* = 70^\circ$. Abbiamo però soddisfatto le richieste riguardanti l'errore a regime imponendo una costante $K_C \geq 2899$. Possiamo allora considerare completata la progettazione della parte statica del nostro compensatore con $C'(s) = 2900$ ed ora possiamo dedicarci esclusivamente alla progettazione della parte dinamica partendo dall'analizzare i diagrammi di Bode di Figura 4.2 ponendo particolare attenzione a quello che accade alla pulsazione di 30 rad/s .

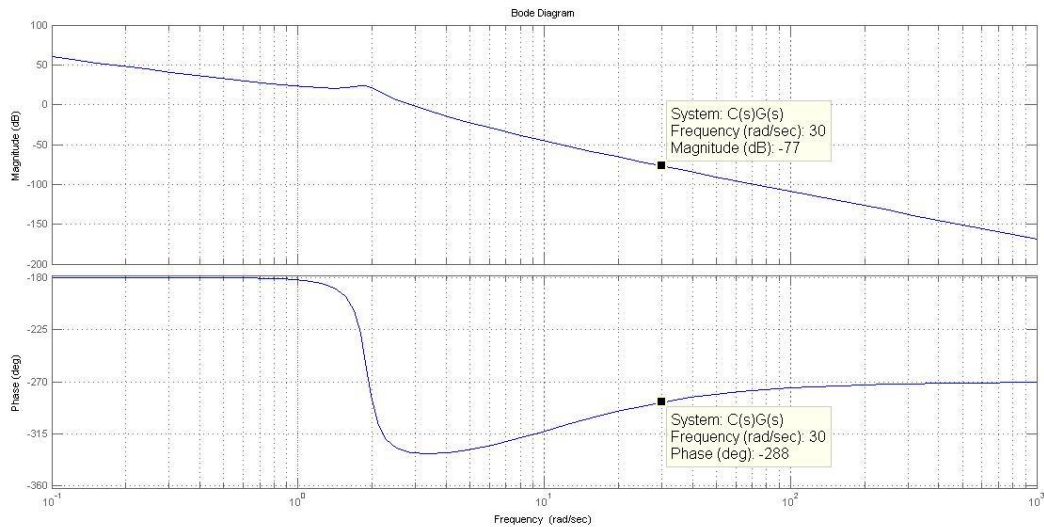


Figura 4.2 – Diagramma di Bode $C'(s)G(s)$ per compensatore $C'(s) = 2900$

Focalizzandoci sulla pulsazione di attraversamento richiesta notiamo che sia il diagramma di Bode delle ampiezze che quello della fasi richiedono di essere spostati verso l'alto. In particolare il modulo della funzione di trasferimento in catena aperta $C'(s)G(s)$ necessita di uno spostamento verso l'alto di 77 dB , mentre il diagramma delle fasi, per ottenere i valori voluti dalle specifiche, necessita uno spostamento verso l'alto di almeno 178° . Saranno indispensabili 108° per ottenere la stabilità del sistema e ulteriori 70° per soddisfare i requisiti cercati.

Iniziamo il nostro progetto analizzando un tipo di compensatori di molto utilizzati, per la loro semplicità, all'interno di sistemi industriali ovvero i controllori PID. Essi elaborano il segnale attraverso tre blocchi che compiono tre differenti azioni: un'azione proporzionale (P), un'azione integrativa (I) e un'azione derivativa (D).

Sono caratterizzati da funzioni di trasferimento in generale non proprie, del tipo:

$$C_{PID}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (4.20)$$

A seconda dei casi e dell'utilizzo sono possibili compensatori più semplici come il PI (se $k_d = 0$), il PD (se $k_i = 0$), oppure il P (se $k_d = k_i = 0$) e il I (se $k_d = k_p = 0$).

Andando ad analizzare il nostro particolare sistema notiamo che la cosa che creava problemi nell'utilizzo del solo compensatore proporzionale era il margine di fase che restava minore di -90° . Una soluzione potrebbe essere l'utilizzo di un controllore PD che, a causa dello zero presente nella sua funzione di trasferimento, ha proprio lo scopo di innalzare il margine di fase. Questo particolare tipo di compensatore presenta infatti una funzione di trasferimento uguale a:

$$C_{PD}(s) = k_p + k_d s = k_p \left(1 + \frac{k_d}{k_p} s \right) \quad (4.21)$$

con un guadagno pari a k_p e uno zero in $-\frac{k_p}{k_d}$.

Purtroppo questo tipo di compensatore alza la fase di soli 90° , che porterebbero il margine di fase al massimo a 0° che non sono ancora sufficienti per soddisfare la specifica richiesta di $m_\psi^* = 70^\circ$. Anche in quest'analisi il compensatore non è sufficiente ad assolvere tutti i requisiti avanzati dal progetto.

Rete anticipatrice

Facendo riferimento alla Figura 4.2 possiamo definire due parametri, che utilizzeremo in seguito, proprio per esplicitare le differenze tra i valori attuali e quelli desiderati:

$$M := -|C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)| = 77dB \quad (4.22)$$

e

$$\Delta m_\psi = m_\psi^* - m_\psi(\omega_A^*) = 70^\circ - (-108^\circ) = 178^\circ \quad (4.23)$$

Essi rappresentano la differenza tra la retta a zero dB e il modulo della risposta in frequenza alla pulsazione designata ad essere quella di attraversamento, e analogamente la differenza tra il margine di fase desiderato e quello attuale alla pulsazione ω_A^* .

Arrivati a questo punto del progetto sono possibili quattro situazioni:

- I. $\omega_A < \omega_A^*$ e $m_\psi(\omega_A^*) \geq m_\psi^*$
- II. $\omega_A < \omega_A^*$ e $m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^*$
- III. $\omega_A > \omega_A^*$ e $m_\psi(\omega_A^*) \geq m_\psi^*$
- IV. $\omega_A > \omega_A^*$ e $m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^*$

Noi ci troviamo esattamente nel secondo dei quattro casi, in cui la pulsazione di attraversamento è situata a sinistra di quella desiderata e il margine di fase è inferiore al margine desiderato. Questa situazione può essere risolta sollevando entrambi i diagrammi, sia quello dei moduli che delle fase. Per fare questo tipo di operazione, una volta che si è escluso l'utilizzo di un compensatore PID, si ricorre ad una o più *reti anticipatrici*, le quali sono caratterizzate dalla seguente funzione di trasferimento:

$$C_{ant}(s) = \frac{1 + sT}{1 + \alpha sT} \quad T > 0, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.24)$$

dove si nota facilmente la presenza di uno zero stabile in $s = -\frac{1}{T}$ e di un polo anche esso stabile in $s = -\frac{1}{\alpha T}$. Introducendo uno zero ad una frequenza minore di quella relativa al polo, la rete anticipatrice permette di alzare la fase del diagramma di Bode fino ad un massimo di 90° (per valori di α molto prossimi allo zero) e inoltre di spostare la frequenza di taglio verso destra. Queste sono esattamente le due cose di cui necessitiamo. Prima di attribuire i corretti valori ai parametri propri della rete, occorre ricordare che il nostro obiettivo è di innalzare il margine di fase di 178° , quindi avremo bisogno di più reti anticipatrici che combinate tra loro soddisfino questo requisito.

Nulla vieta di scegliere due reti che portino un eguale miglioramento al margine di fase, quindi due reti perfettamente identiche che alzino la fase ognuna di metà del valore richiesto. Definito l'innalzamento totale di fase come la somma dei singoli innalzamenti di fase avremo:

$$\Delta m_\psi = \sum_i \varphi_i \quad (4.25)$$

e nel nostro specifico caso, visto che abbiamo scelto che tutti i $\varphi_i = \varphi$ siano tra loro uguali avremo:

$$\varphi = \frac{\Delta m_\psi}{i} = \frac{178^\circ}{2} = 89^\circ \quad (4.26)$$

Ora che abbiamo trovato il guadagno di fase per ogni rete anticipatrice possiamo passare alla sua progettazione vera e propria ricavandoci i parametri peculiari della rete stessa.

Sappiamo che per una rete anticipatrice:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}\right) \quad (4.27)$$

da cui si ricava:

$$\alpha = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} \quad (4.28)$$

E inoltre che:

$$\omega_A^* = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad (4.29)$$

Inserendo i valori ricavati in precedenza otteniamo:

$$\alpha = \frac{1 - \sin(89^\circ)}{1 + \sin(89^\circ)} = 0.0000762 \quad e \quad T = \frac{1}{\omega_A^*\sqrt{\alpha}} = 3.8196 \quad (4.30)$$

A questo punto le due reti anticipatrici sono ben definite, ed entrambe hanno una funzione di trasferimento:

$$C_{ant}(s) = \frac{1 + 3.8196s}{1 + 0.00029s} \quad (4.31)$$

Il controllore atto a soddisfare le specifiche dinamiche risulterà:

$$C''(s) = (C_{ant}(s))^2 = \left(\frac{1 + 3.8196s}{1 + 0.00029s} \right)^2 = \left(\frac{1 + \frac{s}{0.2618}}{1 + \frac{s}{3448.3}} \right)^2 \quad (4.32)$$

Combinando il compensatore dinamico appena trovato con quello statico ricavato in precedenza otteniamo il compensatore risultante:

$$C(s) = C'(s)C''(s) = 2900 \frac{\left(1 + \frac{s}{0.2618}\right)^2}{\left(1 + \frac{s}{3448.3}\right)^2} \quad (4.33)$$

La funzione di trasferimento in catena aperta del nostro sistema è:

$$C(s)G(s) = 10.005 \frac{\left(1 + \frac{s}{10}\right) \left(1 + \frac{s}{0.2618}\right)^2}{s^2 \left(1 + 0.1s + \frac{s^2}{3.625}\right) \left(1 + \frac{s}{3448.3}\right)^2} \quad (4.34)$$

Essa è già scritta nella forma di Bode, è possibile quindi tracciare subito i diagrammi di fase e ampiezza e verificare se il risultato è quello atteso, ovvero che vi sia una pulsazione di attraversamento $\omega_A^* = 30 \text{ rad/s}$ e un margine di fase $m_\psi^* = 70^\circ$.

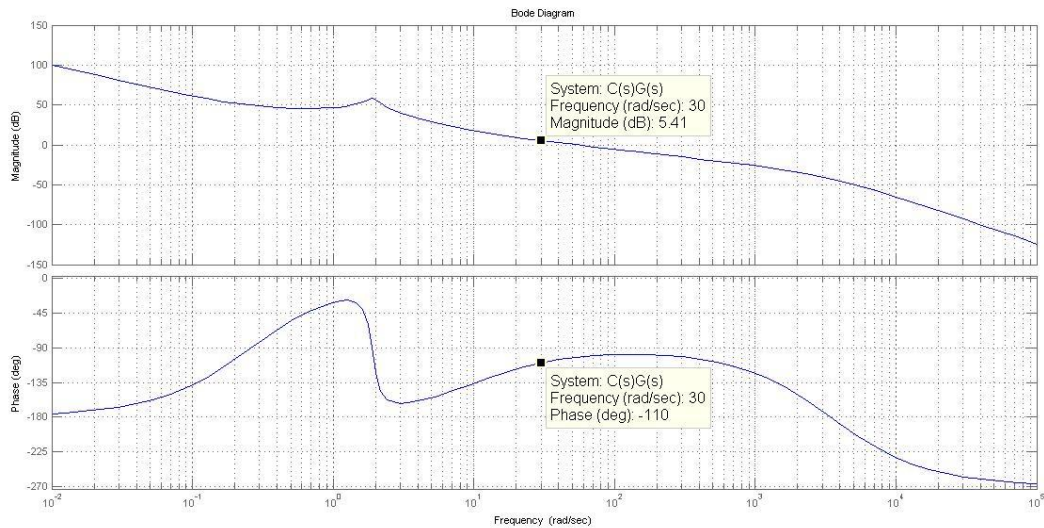


Figura 4.3 – Diagramma di Bode $C(s)G(s)$ con $T = 3.8196$ e $\alpha = 0.0000762$

Analizzando i digrammi di Bode in figura si nota subito che la specifica sul margine di fase è rispettata, difatti alla pulsazione di 30 rad/s esso assume il valore esatto di 70° . Questa parte di obiettivo è stata raggiunta. Osservando invece la pulsazione di taglio notiamo che alla frequenza stabilita il diagramma delle ampiezza non vale 0 dB , ma è $5,41 \text{ dB}$. Questo di per se non è un gravissimo problema in quanto basterebbe abbassare il guadagno di K_c di $1,78$ (corrispondente a circa 5.41 dB) e il problema sarebbe risolto. Tuttavia nel nostro particolar caso questo non è possibile perché andremo a compromettere l'errore a regime permanente calcolato in precedenza e richiesto dalle specifiche del sistema. Procederemo allora a variare sperimentalmente i parametri caratteristici della rete anticipatrice α e T .

Riprendiamo in esame la funzione relativa ad una rete anticipatrice (4.24). Osservandola è chiaro che essa presenta uno zero stabile in $s = -\frac{1}{T}$ e di un polo anche esso stabile in $s = -\frac{1}{\alpha T}$, sarà quindi possibile modificare la posizione di tali punti cambiando α e T .

Più nello specifico aumentando T e mantenendo costante α sia il polo che lo zero si sposteranno verso sinistra nel diagramma di Bode.

Nel nostro specifico caso lo zero influenza la pulsazione di attraversamento molto di più del polo (che si trova in alta frequenza), e alzando T otterremo un aumento del valore del grafico dei moduli alla pulsazione desiderata $\omega_A^* = 30 \text{ rad/s}$. Questo è esattamente il risultato ottenuto quando è stata svolta la simulazione per tentativi con Matlab con i valori $T = 4$ e $\alpha = 0.0000762$.

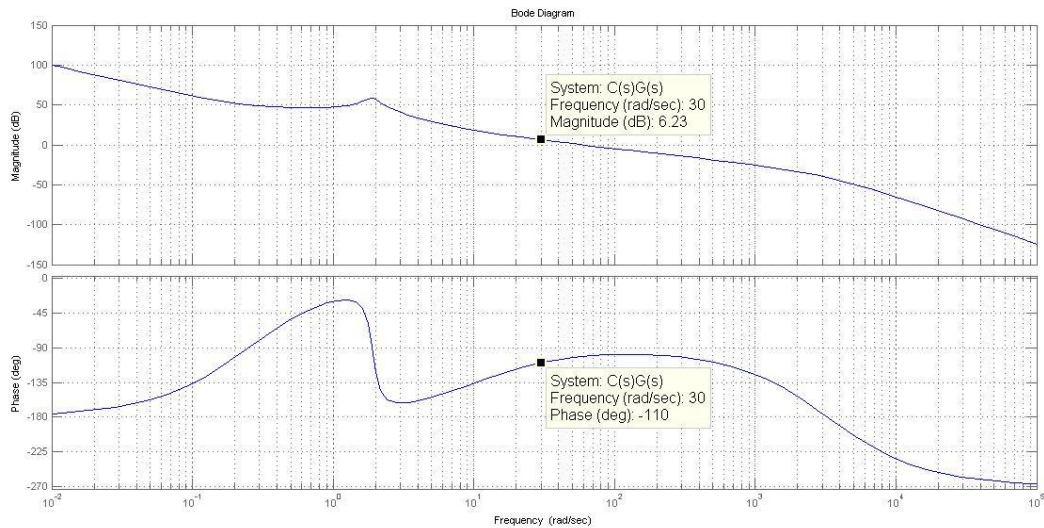


Figura 4.4 – Diagramma di Bode $C(s)G(s)$ con $T = 4$ e $\alpha = 0.0000762$

Sappiamo dunque che per abbassare il modulo della funzione di trasferimento $C(s)G(s)$ occorre abbassare il valore di T . Il nostro obiettivo è che alla pulsazione designata $C(s)G(s)$ in modulo valga 0dB, ma va bene anche se otteniamo un risultato negativo in quanto poi sarà possibile aumentare la costante di Bode del compensatore statico per riequilibrare.

Iniziamo quindi a provare diversi valori di T , diminuendo di volta in volta, e calcolandoci a di conseguenza α utilizzando le formule (4.28) e (4.29). Dopo diversi tentativi per $T = 2.5$ e conseguentemente $\alpha = 0.0001778$ otteniamo finalmente un valore dell'ampiezza negativo.

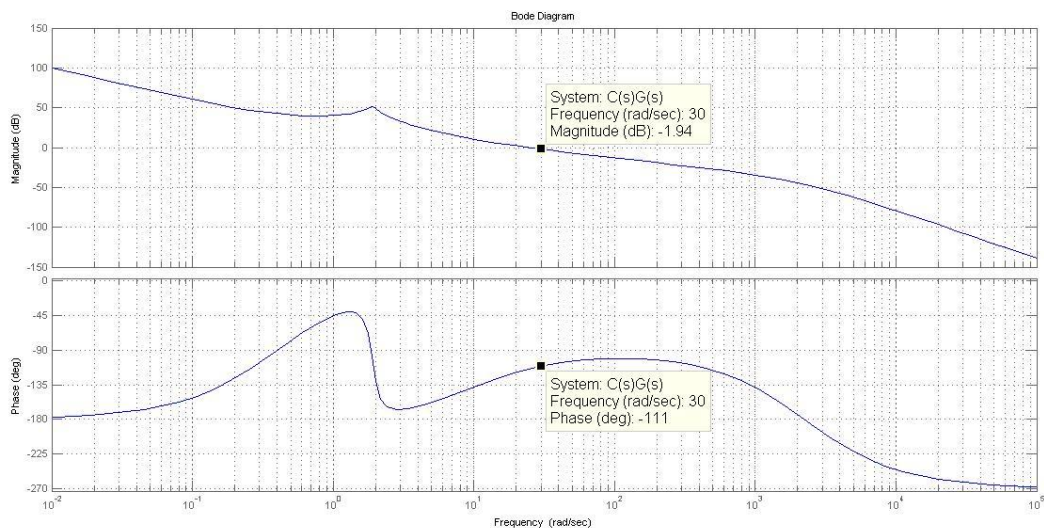


Figura 4.5 – Diagramma di Bode $C(s)G(s)$ con $T = 2.5$ e $\alpha = 0.0001778$

Il problema che sorge in questo caso riguarda il margine di fase, che è diminuito di 1° non garantendo più le richieste del problema. Esso difatti è uguale a $m_\psi = \arg(C(j\omega_A)G(j\omega_A)) + 180^\circ = -111^\circ + 180^\circ = 69^\circ$.

Supponiamo di essere scesi troppo nella ricerca di un T che soddisfacesse i nostri requisiti, quindi tentiamo con valori un po' più grandi che riportino il margine di fase al valore di 70° , ma che continuino a presentare un modulo negativo alla frequenza ω_A^* . Con il valore di $T = 2.8$ e un $\alpha = 0.000142$ otteniamo i grafici di Bode in Figura 4.6

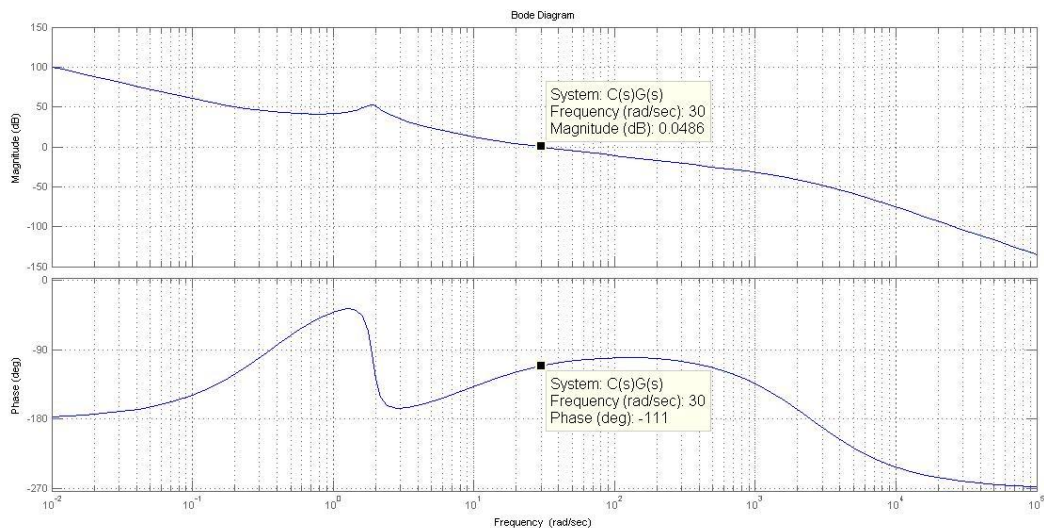


Figura 4.6 – Diagramma di Bode $C(s)G(s)$ con $T = 2.8$ e $\alpha = 0.000142$

In quest'ultimo grafico si nota che il problema relativo al margine di fase è ancora presente e che, seppure molto vicino allo zero, il modulo è addirittura positivo. Da questo punto in avanti procediamo con la ricerca di due valori non necessariamente legati da (4.29) poiché è risultato che nessuna coppia del tipo (4.29) soddisfa le nostre richieste.

Torniamo al grafico in Figura 4.5 dove $T = 2.5$ e $\alpha = 0.0001778$. In questo caso il guadagno è negativo, come da noi desiderato, e il margine di fase minore di quello voluto.

Per alzare il margine di fase occorre alzare la fase stessa e per fare questo si può spostare il polo della rete anticipatrice verso destra in modo da posticipare il suo effetto di calo della fase. Per fare questo è necessario mantenere costante T e diminuire progressivamente α .

Dopo alcuni tentativi raggiungiamo una configurazione che ci soddisfa per $T = 2.5$ e $\alpha = 0.001$. La rete anticipatrice che utilizzeremo in definitiva sarà allora:

$$C_{ant}(s) = \frac{1 + 2.5s}{1 + 0.00025s} \quad (4.35)$$

e il grafico relativo alla funzione $C(s)G(s)$ è nella figura sottostante.

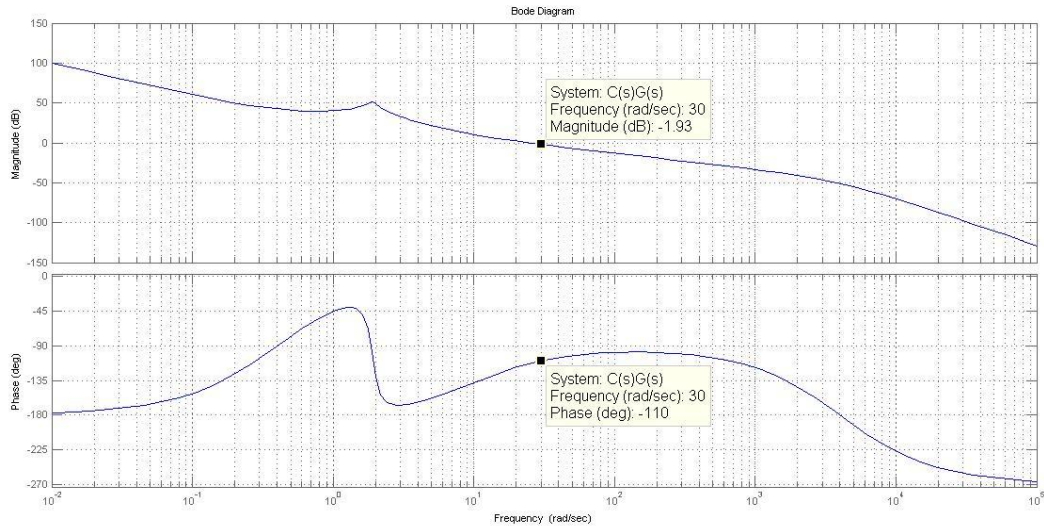


Figura 4.7 – Diagramma di Bode $C(s)G(s)$ con $T = 2.5$ e $\alpha = 0.0001$

Arrivati a questo punto per soddisfare tutte le specifiche desiderate occorre aumentare il guadagno del controllore statico di $1.93dB$, che in lineare corrispondono ad un aumento di circa 1.249.

Il controllore statico diventerà quindi $C'(s) = 2900 \cdot 1.249 = 3622.1$, e unito a quello dinamico darà come risultato il compensatore finale:

$$C(s) = C'(s)C''(s) = 3622.1 \frac{\left(1 + \frac{s}{0.4}\right)^2}{\left(1 + \frac{s}{4000}\right)^2} \quad (4.36)$$

e la funzione di trasferimento in catena chiusa, scritta nella forma di Bode, atta a soddisfare tutte le specifiche richieste fino a questo punto risulta essere:

$$C(s)G(s) = 12.496 \frac{\left(1 + \frac{s}{10}\right)\left(1 + \frac{s}{0.4}\right)^2}{s^2(1 + 0.1s + \frac{s^2}{3.625})\left(1 + \frac{s}{4000}\right)^2} \quad (4.37)$$

I grafici di Bode della (4.37) sono:

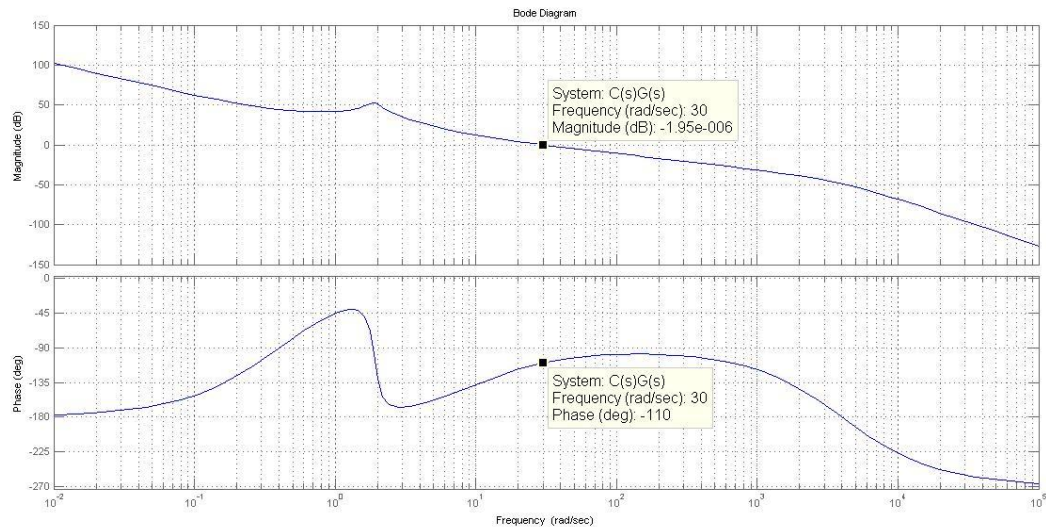


Figura 4.8 – Diagramma di Bode C(s)G(s) corretto

L'ultima richiesta del progetto in esame è che la quota a regime vari entro un intervallo di ± 1 cm, sapendo che la massa M ha un'incertezza del 10% rispetto al valore nominale. L'incertezza di quest'ultimo parametro può essere studiata mediante la valutazione della funzione sensibilità.

Nella pratica la funzione di trasferimento $W(s)$ è spesso nota in modo incerto e può modificare la sua espressione per effetto di variazioni delle condizioni operative. Queste variazioni nella $W(s)$ possono essere tenute in considerazione pensando che la funzione dipenda da un parametro: nel caso in esame questo parametro sarà M . Il parametro M nel tempo subisce delle variazioni e di conseguenza anche la funzione di trasferimento cambia. Indichiamo questa dipendenza dal parametro come $W(s, M)$, ovvero con un processo aleatorio dove M varia entro un dato intervallo, e dove $W(s, M_0)$ indica il valore nominale assunto dalla funzione di trasferimento.

Supponiamo ora che il parametro M subisca una piccola variazione, passando dal valore M al valore $M + \Delta M$, allora abbiamo:

$$W(s, M + \Delta M) \approx W(s, M) + \frac{\partial W(s, M)}{\partial M} \Delta M = W(s, M)(1 + S \Delta M) \quad (4.38)$$

dove

$$S = S(s, M) := \frac{\partial W(s, M)}{\partial M} \frac{1}{W(s, M)} \quad (4.39)$$

S è chiamata *funzione di sensitività* ed indica in che misura la funzione $W(s, M)$ risente delle variazioni del parametro M .

Analizziamo ora l'espressione nominale dell'uscita del sistema ad anello chiuso. Per fare questo consideriamo $r(t)$ come l'ingresso del sistema stesso e $R(s)$ la sua trasformata di Laplace, allora abbiamo:

$$Y(s) = W(s)R(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}R(s) \quad (4.40)$$

Per variazioni del parametro M , anche l'uscita varia:

$$Y(s) + \Delta Y(s) = (W(s) + \Delta W(s))R(s) \quad (4.41)$$

dove:

$$\Delta W(s) = \frac{\partial W(s, M)}{\partial M} \Delta M \quad (4.42)$$

Per facilità di scrittura da adesso in avanti scriveremo $G(s)$ come G e $C(s)$ come C . E' importante tenere conto che entrambe le funzioni dipendono dalla variabile s , ma solo G dipende dal parametro M poiché per costruzione il compensatore $C(s)$ è esente da variazioni parametriche. Allora la variazione della funzione di trasferimento in catena chiusa vale:

$$\Delta W = \frac{\partial \frac{CG}{1 + CG}}{\partial M} \Delta M = \frac{\frac{\partial CG}{\partial M} (1 + CG) - \frac{\partial CG(CG)}{\partial M}}{(1 + CG)^2} \Delta M = \frac{C \frac{\partial G}{\partial M}}{(1 + CG)^2} \Delta M \quad (4.43)$$

Notiamo che nella funzione $G(s, M) = \frac{n(s)}{d(s, M)}$ in realtà solo il denominatore, oltre che della variabile s , è funzione del parametro M . Questo comporta che la derivata di G rispetto a M sia:

$$\frac{\partial G}{\partial M} = \frac{\partial \frac{n}{d}}{\partial M} = n \frac{\partial \frac{1}{d}}{\partial M} = -\frac{n}{d^2} \frac{\partial d}{\partial M} = -G \frac{Js^2 + CR^2s + KR^2}{[JM s^2 + (JC + CR^2M)s + (KJ + KR^2M)]} \quad (4.44)$$

La variazione dell'uscita a regime ΔY , che rappresenta proprio la variazione del livello della quota, si rappresenta come:

$$\Delta Y = \lim_{s \rightarrow 0} |\Delta W R| = \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{C \frac{\partial G}{\partial M}}{(1 + CG)^2} \Delta M R \right| = \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{C \frac{\partial G}{\partial M}}{(1 + CG)^2} \right| \frac{M}{10} R \quad (4.45)$$

Essa per rispettare le specifiche assegnate deve restare entro $\pm 1 \text{ cm}$. Sarà quindi necessario imporre delle condizioni al compensatore, e in particolare alla sua parte statica.

Senza dilungarci in inutili calcoli si può osservare che la funzione $\frac{\partial G}{\partial M}$ possiede due poli nell'origine, mentre la funzione $\frac{1}{(1+CG)^2}$ possiede quattro zeri nell'origine. Il limite del rapporto delle due funzioni per s che tende a zero risulterà sempre zero. Abbiamo quindi:

$$\Delta Y = \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{C \frac{\partial G}{\partial M}}{(1 + CG)^2} \right| \frac{M}{10} R = 0 < 0.01 \quad (4.46)$$

Possiamo quindi concludere che la quota al variare del parametro M ha variazione nulla, quindi per definizione resta dentro l'intervallo di $\pm 1 \text{ cm}$. Non ci sono particolari condizioni da aggiungere o da modificare al nostro compensatore. Non solo la specifica risulta soddisfatta per ogni valore del guadagno del nostro specifico controllore, ma addirittura qualsiasi controllore $C(s)$, purché non cancelli i due poli in zero, risulterebbe robusto alle variazioni della massa M e soddisferebbe quest'ultima richiesta.

5. Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi era di controllare la quota della cabina dell'ascensore tramite la progettazione di un opportuno sistema di controllo. Esso doveva agire sulla coppia motrice dell'organo elettrico in modo da compensare opportunamente la forza di gravità. Dopo un certo numero di tentativi possiamo affermare di aver raggiunto i risultati desiderati riuscendo a soddisfare tutte le specifiche richieste dal problema.

Questo conseguimento è stato possibile con la progettazione di due reti anticipatrici uguali, le quali inserite nel sistema a catena aperta hanno contribuito al raggiungimento dello scopo finale. Ovviamente questo risultato non è stato immediato, sono state necessarie diverse revisioni al controllore dinamico affinché margine di fase e pulsazione di attraversamento fossero quelle desiderate. Sono state utilizzate prima le formule caratteristiche della rete anticipatrice per individuare i parametri α e T , e successivamente si è seguita una ricerca per tentativi, fino ad arrivare alla forma definitiva. In seguito è stato necessario modificare anche il compensatore statico, in precedenza progettato per assicurare un errore a regime dato, aumentando la sua costante di Bode per riuscire a garantire le prestazioni volute. A questo punto la nostra analisi e progettazione può dichiararsi conclusa con successo.

6. Bibliografia

- [1] M. Bisiacco, E. M. Valcher, *“Controlli automatici”*, Padova, Libreria Progetto, 2008
- [2] M. Bisiacco, S. Braghetto, *“Teoria dei sistemi dinamici”*, Padova, Esculapio, 2010
- [3] P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci, *“Elementi di fisica - Meccanica e Termodinamica, II Edizione”*, Padova, EdiSES, 2004
- [4] A. Bicchi, *“Fondamenti di Automata – I Parte”*, Pisa, Versione del 15 Marzo 2013
- [5] Ing. Luigi Biagiotti, Università di Modena e Reggio Emilia, Slide del corso *“Sistemi di Controllo”*.2012-2013
<http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/SistemiControllo1213.html>
- [6] *“L’ascensore”*
<http://www.rupini.it/componenti/illustrativi/ascensore.html>