

Ai miei genitori

Indice

1	Hedge Funds	13
1.1	Introduzione agli Hedge funds	14
1.2	Strategie operative	17
1.2.1	Emerging market	17
1.2.2	Equity	17
1.2.3	Event Driven	18
1.2.4	Macro	18
1.2.5	Relative Value	19
2	Allocazione del portafoglio ottimo	21
2.1	Decisione di investimento in generale	21
2.2	Funzione di utilità	26
2.2.1	Funzione di utilità esponenziale	26
2.2.2	Funzione power utility	27
2.3	Ottimizzazione diretta	28
2.3.1	Ottimizzazione diretta sotto l'ipotesi di normalità	28
2.3.2	Bootstrap	30
2.3.3	Bootstrap a blocchi	31
2.4	Risolvere il problema di ottimo	32
3	I dati	37

4	Il problema dell'ottimizzazione	45
4.1	Introduzione	45
4.2	Metodi Numerici Tradizionali e Approcci con algoritmi	46
4.3	Metodi Deterministici Tradizionali Versus Metodi Euristici e Stocastici	49
4.3.1	Tecniche di ottimizzazione euristica	50
5	Analisi empirica: hedge funds	55
5.1	Risultati	56
6	Analisi empirica: Stocks	67
6.1	Risultati	67
7	Conclusioni	75
	Bibliografia	77
A	Test sugli hedge fund	81
B	Pesi ottimi	86
C	Rendimenti cumulati	98
D	Algoritmo Matlab	101

Elenco delle tabelle

2.1	Numero dei parametri da stimare delle matrici dei co-momenti . . .	33
3.1	Matrice di correlazione	39
3.2	Matrice di co-asimmetria (10^{-4})	40
3.3	Matrice di co-curtosi (10^{-4})	41
3.4	Descrizione dei dataset	43
3.5	Statistiche univariate per DS1	43
3.6	Statistiche univariate per DS2	43
5.1	Indici di sharpe, tra parentesi gli standard error	64
5.2	Percentuale di rendimenti negativi	66
6.1	Indici di sharpe, tra parentesi gli standard error	71
6.2	Percentuale di rendimenti negativi	72
A.1	Test di Jarque-Bera sulle finestre mobili di DS1	82
A.2	Test di Lilliefors sulle finestre mobili di DS1	83
A.3	Test di Ljung-Box sulle finestre mobili di DS1	84
A.4	Test di Eteroschedasticità sulle finestre mobili di DS1	85
B.1	Allocazione ottima con espansione fino al 2° ordine nel caso della power utility	87
B.2	Allocazione ottima con espansione fino al 3° ordine nel caso della power utility	88

B.3	Allocazione ottima con espansione fino al 4° ordine nel caso della power utility	89
B.4	Allocazione ottima con espansione fino al 2° ordine nel caso dell'utilità esponenziale	90
B.5	Allocazione ottima con espansione fino al 3° ordine nel caso dell'utilità esponenziale	91
B.6	Allocazione ottima con espansione fino al 4° ordine nel caso dell'utilità esponenziale	92
B.7	Allocazione ottima diretta sotto ipotesi di normalità nel caso della power utility	93
B.8	Allocazione ottima diretta via bootstrap nel caso della power utility	94
B.9	Allocazione ottima diretta via bootstrap a blocchi nel caso della power utility	95
B.10	Allocazione ottima diretta via bootstrap nel caso dell'utilità esponenziale	96
B.11	Allocazione ottima diretta via bootstrap a blocchi nel caso dell'utilità esponenziale	97
C.1	Valori dei rendimenti cumulati, Power utility	99
C.2	Valori dei rendimenti cumulati, Utilità Esponenziale	100

Elenco delle figure

3.1	Statistiche descrittive	39
5.1	Pesi ottimi dell'approssimazioni in serie di Taylor con funzione di utilità power	58
5.2	Pesi ottimi dell'approssimazioni in serie di Taylor con funzione di utilità esponenziale	59
5.3	Pesi ottimi dell'ottimizzazione diretta con funzione di utilità power	62
5.4	Pesi ottimi dell'ottimizzazione diretta con funzione di utilità esponenziale	63
5.5	Rendimenti cumulati Power Utility	65
5.6	Rendimenti cumulati Exponential Utility	65
6.1	Pesi ottimi con funzione di utilità power	69
6.2	Pesi ottimi con funzione di utilità esponenziale	70
6.3	Rendimenti cumulati Power Utility	71
6.4	Rendimenti cumulati Exponential Utility	72

Introduzione

Da molto tempo è appurato che i rendimenti delle attività finanziarie presentano una distribuzione non-normale. Molti esempi empirici hanno dimostrato come tali rendimenti seguano distribuzioni asimmetriche e/o a code pesanti. Da una parte, molti autori hanno dimostrato come i periodi di recessione del mercato siano più frequenti dei periodi di forte espansione (Fama 1965, Arditti 1967, Singleton e Wingeder 1986, Peiro 1999), dall'altra parte rendimenti estremi si verificano più spesso per essere considerati normali (Mandelbrot 1963, Fama 1963, Kon 1984, Longin 1996).

Di conseguenza, si è sviluppata una fiorente letteratura in merito alla validità del modello di Markowitz (1952) che si limita a considerare solo i primi due momenti, molti autori invece hanno valutato come la funzione di utilità attesa possa essere approssimata da una funzione di momenti superiori. Le prime testimonianze sull'utilità di ulteriori momenti è piuttosto varia. In alcuni lavori in cui veniva confrontata l'utilità attesa (ottenuta da ottimizzazione diretta) con quella ottenuta dall'approssimazione con il criterio di media-varianza (Levy e Markovitz 1979, Pulley 1981, Simaan 1993), nella maggior parte delle prove effettuate, gli autori ottenevano dei risultati pressochè equivalenti con le due strategie. Una spiegazione di tale risultato è che sebbene i rendimenti non presentino una distribuzione normale, essi seguono una distribuzione ellittica. Per tali distribuzioni, Charmberlain (1983) ha dimostrato come l'approssimazione dell'utilità attesa con il criterio con media e varianza sia esatta per tutte le funzioni di utilità.

Solo più recentemente sono state sviluppate altre tecniche che permettano di includere i momenti di ordine superiore, che si basano sulla programmazione polinomiale e hanno permesso di affrontare il problema dell'allocazione di portafoglio introducendo il momento terzo (Lai 1991, Prakash, Chang e Pactwa 2003 e Sunh e Yan 2003). Tutti questi studi hanno dimostrato come l'introduzione dell'asimmetria abbiamo prodotto dei cambiamenti nel portafoglio ottimo. Nonostante ciò, questo tipo di approccio presenta un difetto. L'allocazione risolta con la programmazione polinomiale infatti non è connessa all'approssimazione dell'utilità attesa, non è possibile perciò misura la bontà di approssimazione.

Un altro modo di approcciare il problema di asset allocation è quello di utilizzare l'espansione in serie di Taylor per derivare un'approssimazione dell'utilità attesa. Sebbene questo approccio sia stato largamente usato in applicazioni empiriche per verificare il CAPM con momenti di ordine superiore, pochi studi hanno considerato il problema di allocazione di portafoglio utilizzando l'espansione in serie di Taylor.

Sono state avanzate molte critiche all'uso dell'espansione in serie Taylor nel contesto dell'allocazione di portafoglio. Come verrà spiegato più avanti, l'espansione in serie di Taylor può convergere all'utilità attesa solo sotto condizione restrittive (Lhabitant 1998). Inoltre, la scelta dell'ordine dell'espansione presenta alcuni problemi. In particolare, in generale non vi sono regole che definiscano a quale ordine è più opportuno troncare la serie, peggio ancora è il fatto che talvolta l'inserimento di ulteriori momenti non migliori necessariamente la qualità dell'approssimazione. (Brockett e Garven 1998, Lhabitant 1998 e Berenyi 2001).

In questo lavoro ho ripreso e sviluppato il lavoro di Jondeau e Rockinger, *Optimal Portfolio Allocation Under Higher Moments* (2004). In tale lavoro gli autori studiano quanto la non normalità dei dati influisce sull'allocazione ottima di portafoglio in cui l'investitore massimizza la sua utilità attesa. Per fare ciò, data la funzione di utilità esponenziale, hanno confrontato l'allocazione ottenuta via ottimizzazione diretta dell'utilità attesa e quella ottenuta via ottimizzazione

dell'utilità approssimata con l'espansione fino ad un dato ordine. Si sono concentrati nell'osservare i pesi ottenuti con le varie strategie. Per misurare la distanza tra i pesi delle allocazioni ottime hanno utilizzato un indicatore che riassume la differenza tra i pesi, la norma, e il costo opportunità dell'uso di una strategia sub-ottimale.

Ciò che io invece andrò a considerare è una valutazione a posteriori delle performance delle allocazioni per un investitore che massimizza l'utilità attesa. Ho considerato un investitore sia con funzione di utilità esponenziale sia con utilità power. Queste funzioni di utilità sono tra loro molto diverse in quanto catturano l'avversione al rischio in modo completamente diverso, la prima infatti presenta un'avversione al rischio costante mentre la seconda no. La funzione di utilità è stata approssimata utilizzando l'espansione in serie di Taylor fino al 2°, 3° e 4° ordine. Dunque, ho confrontato tra loro varie tecniche per il calcolo dell'allocazione ottima basate sull'approssimazione della funzione di utilità e metodologie basate sull'ottimizzazione diretta. Il fulcro del lavoro, però, è il confronto, in termini di performance, delle strategie di ottimizzazione basate sull'espansione in serie di Taylor. Gli indice di performance che sono stati utilizzati sono: l'indice di sharpe, il tasso di rendimenti negativi e i rendimenti cumulati.

Un'attenzione particolare è stata rivolta anche all'algoritmo di ottimizzazione. Per massimizzare la nostra funzione obiettivo, inizialmente eravamo ricorsi all'utilizzo di tecniche di ottimizzazione basate sulle derivate numeriche, metodi che sfruttano sia l'informazione del gradiente che dell'hessiano. Gli algoritmi non erano in grado, però, di arrivare a convergenza ed erano sensibili ai parametri iniziali. Fattori come la presenza di più punti di massimo e/o minimo locale, vincoli sullo spazio parametrico (positività dei parametri) e la non linearità nei parametri, possono rendere la ricerca molto difficoltosa. Per questo motivo abbiamo utilizzato gli algoritmi euristici, che ci hanno permesso di risolvere il problema di ottimo che, pur risolvendolo con gradi di incertezza, e non assicurando la convergenza della ricerca alla soluzione solo in casi particolari, richiedono tempi di convergenza

molto minori. Tra i metodi euristici abbiamo utilizzato sia quelli che si basano su algoritmi genetici, sia quelli di tipo stocastico (Simulated annealing) sia quelli definiti di ricerca con memoria (Differential Evolution). L'unico metodo di ottimizzazione in grado di produrre soluzioni, almeno in apparenza soddisfacente, è stato quello di ricerca con memoria.

Nella parte empirica del lavoro, inizialmente ho effettuato alcune analisi statistiche univariate e multivariate sui rendimenti utilizzati: test univariati parametrici e non parametrici di normalità, tesi di correlazione seriale sui rendimenti e sui rendimenti al quadrato. Ho considerato due differenti dataset, il primo formato dai rendimenti mensili di 5 indici di hedge fund e il secondo dai rendimenti settimanali di alcuni titoli del S&P100. Come già dimostrato da Jondeau e Rockinger, nel caso di rendimenti che deviano ampiamente dall'ipotesi di normalità, l'utilizzo di momenti di ordine superiore permette una migliore approssimazione della funzione di utilità. Alla fine di questo lavoro dimostreremo come in realtà l'uso di momenti di ordine superiore porti solo ad un miglioramento dell'approssimazione e non delle performance del portafoglio.

Il resto del paper è strutturato come segue. Nel capitolo 1 è presente una breve introduzione agli hedge fund, sono state inoltre descritte le strategie oggetto di analisi empirica. Nel capitolo 2 viene descritto il problema di allocazione, l'approssimazione in serie di Taylor e l'implementazione pratica di esso. Nel capitolo 3 sono stati illustrati i dati e alcune statistiche calcolate sui rendimenti. Nel capitolo 4 viene fatta una breve descrizione dei vari metodi di ottimizzazione mettendone in luce pregi e difetti, inoltre vengono introdotte le recenti tecniche euristiche basate sugli algoritmi genetici. Il capitolo 5 si basa sulla discussione dei risultati ottenuti, sotto ottimizzazione diretta e sotto ottimizzazione dell'utilità attesa approssimata, con DS1. Nel capitolo 6 invece vengono discussi i risultati empirici ottenuti con DS2, ed infine nel capitolo 7 sono presenti le conclusioni.

Capitolo 1

Hedge Funds

Una definizione appropriata di Hedge Fund potrebbe essere: *Qualsiasi fondo che non sia un convenzionale fondo d'investimento*, in altri termini qualsiasi fondo che utilizzi una strategia o una serie di strategie diverse dal semplice acquisto di obbligazioni, azioni (fondi comuni d'investimento a capitale variabile - mutual funds) e titoli di credito (money market funds) e il cui scopo è il raggiungimento di un rendimento assoluto e non in relazione ad un benchmark.

Il termine anglosassone *hedge* significa letteralmente copertura, protezione e, in effetti, questi fondi nascono proprio con l'intento di gestire il patrimonio eliminando in gran parte il rischio di mercato. La filosofia degli Hedge Fund è quella di ottenere risultati di gestione positivi indipendentemente dall'andamento dei mercati finanziari in cui operano. La nascita degli Hedge Funds risale al 1949 quando il giornalista americano A.W. Jones fondò il suo Fondo privato di investimento ottenuto dalla combinazione di due tecniche speculative: una posizione lunga in alcuni titoli e una corta in altri. Successivamente Jones cominciò a far entrare altri gestori trasformando così il primo hedge fund nel primo fondo multi-manager della storia.

Si possono individuare alcune caratteristiche distintive che identificano gli hedge

funds:

- Numero limitato di partecipanti
- Somme minime di ingresso solitamente elevate
- I destinatari di tali prodotti sono propriamente istituzioni finanziarie, compagnie
- comunque investitori qualificati dotati di ampie disponibilità di capitali e di cultura finanziaria adeguata
- Partecipazione dei gestori al capitale del fondo
- retribuzione per i managers legata a incentivi (performance fee)
- Possibilità di utilizzare ogni strumento e tecnica di gestione per implementare la strategia operativa

1.1 Introduzione agli Hedge funds

I fondi hedge sono nati nel mercato americano come veicoli offerti privatamente agli investitori privati dotati di importanti patrimoni: l'investitore privato ricercava, ieri come oggi, un prodotto capace di sganciarsi dalle logiche di un portafoglio costruito su un benchmark soprattutto per proteggersi nei momenti di bear market.

Il fondo hedge si sottrae alle regole stringenti di costruzione dell'asset allocation previste dalle Autorità di Vigilanza al fine di tutelare gli investitori meno consapevoli e permette, a quelli più evoluti, di beneficiare di un strumento dotato di elevata flessibilità operativa. I fondi hedge rappresentano una soluzione al problema identificato in letteratura come di agenzia tra principale e agente ovvero tra gestore e investitore. Si tratta di una soluzione che, incentrata su un'intensa attività di monitoraggio e su meccanismi di remunerazione del gestore, minimizza il ruolo

e l'incidenza della regolamentazione e dell'attività di supervisione, qualificando gli hedge fund come dei private investment vehicle. L'investitore trova in questi veicoli una opportunità di investimento a basso rischio sistemico o di mercato, compensata, però, da un profilo di rischio più pronunciato in termini sia di strategie perseguite dal singolo gestore (rischio finanziario idiosincratice), sia di possibilità di inefficienze o di frodi nella conduzione operativa dell'iniziativa. Elemento che accomuna questa tipologia di fondi infatti l'elevata libertà riconosciuta nella costruzione del portafoglio. Il lavoro di un gestore di un hedge fund consiste nel creare un portafoglio che produca rendimenti consistenti adoperando di tutti gli strumenti finanziari esistenti e assumendo una serie di posizioni volte a minimizzare il rischio di perdite durante i bear market. I fondi hedge possono poi utilizzare la leva finanziaria o leverage per amplificare i risultati del portafoglio.

La struttura organizzativa dei fondi hedge vede al centro il manager, spesso promotore del fondo e primo sottoscrittore dello stesso, e si avvalgono di una struttura commissionale incentivata nel caso in cui il fondo ottenga risultati positivi. Gli hedge fund prevedono infatti una commissione di gestione e una commissione di performance che viene prelevata esclusivamente nel caso in cui il fondo abbia ottenuto una performance positiva e abbia ripagato eventuali perdite pregresse. Gli investitori che acquistano quote di hedge funds sono investitori che vogliono investire in prodotti che gli consegnano rendimenti più grandi di quelli che in media offrono i mercati. Chi investe in hedge fund in genere ha la volontà di pagare il manager che possono raggiungere realmente questo obiettivo.

I rischi che caratterizzano l'investimento in un hedge fund sono certamente diversi da quelli a cui si è esposti sottoscrivendo un tradizionale fondo comune. I rischi sono infatti meno collegati alle dinamiche dei mercati e più connessi alla natura e all'operatività dei fondi hedge.

Le tipologie di rischio sono:

rischio di credito: è relativo alle perdite causate dall'incapacità (totale o par-

ziale) di far fronte ai propri impegni da parte dei soggetti in cui il fondo è investito da parte delle controparti con cui si hanno aperte delle operazioni (si pensi alle operazioni in derivati OTC).

rischio di mercato: è collegato alle perdite che si possono conseguire in relazione al mutamento delle variabili di mercato (prezzi, volatilità e correlazioni) che influenzano i titoli detenuti in portafoglio. Questo rischio è più o meno accentuato a seconda della specifica strategia seguita dal gestore selezionato (rischio di strategia): un long/short equity con focus sull'analisi fondamentale avrà un'esposizione al rischio di mercato diversa da un gestore long/short equity specializzato nel trading giornaliero.

rischio di liquidità: questo rischio si manifesta quando un hedge fund deve uscire da una posizione, ma a causa della scarsa liquidità del mercato, può farlo solo conseguendo un sacrificio in termini di prezzi di realizzo. Non solo, il gestore deve mantenere un corretto equilibrio tra la liquidità del portafoglio e quella riconosciuta agli investitori per non essere costretto a vendere forzatamente sul mercato di titoli illiquidi o prima che si concluda una determinata operazione (per esempio di finanza straordinaria) a causa della richiesta di rimborsi.

L'analisi del processo gestionale di un hedge fund è infatti il primo step da affrontare per capire l'effettivo rischio che si corre considerando che molto spesso i managers degli hedge funds adottano strumenti innovativi di monitoraggio del rischio di mercato e di credito dimostrandosi tra i più efficienti nella gestione dei rischi tradizionali. Per questa ragione l'attenzione va posta soprattutto sull'analisi del rischio operativo e sul rischio di liquidità che contraddistingue un hedge fund piuttosto che da possibili problematiche collegate a situazioni di mercato complesse. In sintesi le 4 caratteristiche distintive dei fondi hedge:

- Strumento per pochi: investitori istituzionali e HNWI

- Il gestore viene normalmente remunerato con una quota dei profitti realizzati dal fondo
- Possono utilizzare la leva finanziaria (leverage)
- Possono effettuare vendite allo scoperto (short selling)
- Possono sottoscrivere qualsiasi genere di contratto finanziario

1.2 Strategie operative

Gli hedge fund usano diverse strategie di trading. In questa sezione sono state descritte brevemente le strategie prese in considerazione in questo studio che si basano principalmente sulla classificazione effettuata da Credit Suisse/Tremont hedge fund database. Per una discussione ulteriore sulle strategie di hedge fund si possono consultare altri database come HFR and HFI.

1.2.1 Emerging market

Con questo nome si indicano i gestori che sono operativi nei mercati emergenti (Europa dell'est, Asia, America Latina, ecc). Questi fondi investono in valute, azioni, strumenti di debito e altri strumenti scambiati nei mercati emergenti. Usualmente non tengono posizioni corte principalmente perchè le posizioni corte non sono consentite nei mercati emergenti A volte possono anche avere più specializzazioni.

1.2.2 Equity

Manager che mantengono posizioni lunghe e corte principalmente su titoli del comparto azionario e dei derivati. Utilizzano una vasta gamma di processi di investimento per arrivare a una decisione di investimento, incluse sia le tecniche quantitative sia le tecniche fondamentali. Le strategie possono essere ampiamente

diversificate oppure possono focalizzarsi su settori specifici, inoltre hanno ampia libertà di manovra in termini di livelli di esposizione netta, leva finanziaria, periodo di mantenimento delle posizioni e concentrazioni di capitalizzazione di mercato. I manager degli equità hedge in genere detengono una quota minima del 50% nel comparto azionario, e possono in alcuni arrivare a detenere l'intero capitale investito, sia con posizioni lunghe che corte.

1.2.3 Event Driven

Questi fondi tengono posizioni su vari asset classes (azioni, obbligazioni, obbligazioni convertibili, altri strumenti ibridi) con l'obiettivo di prevedere e trarre profitto da anomalie di prezzo generate da transazioni su specifici compagnie, governo o eventi di mercato: fusioni e acquisizioni, riorganizzazioni, ricapitalizzazioni, il riacquisto di azioni proprie, bancherotte, spin-offs, controversie, regolamentazioni e cambiamenti legislativi e svalutazioni monetarie. Per approfittare completamente di queste strategie il timing è fondamentale perchè i prezzi consentono arbitraggi per tempi relativamente brevi spingendo i managers a usare il leverage per moltiplicare le opportunità di guadagno.

1.2.4 Macro

Manager che negoziano una vasta gamma di strategie in cui il processo di investimento si basa sulla base di variabili economiche e l'impatto che questi hanno sul patrimonio, reddito fisso, valuta e mercati delle materie prime. I manager utilizzano una varietà di tecniche di analisi, sia discrezionale che sistematiche, combinano strategie di tipo top-down e bottom up, approcci quantitativi e fondamentali. Anche se alcune strategie impiegano tecniche di Relative Value, le strategie Macro si distinguono dalle strategie di RV, in quanto la strategia di investimento si basa su previsioni o movimenti futuri degli strumenti sottostanti, piuttosto che la realizzazione di una differenza di valutazione tra i titoli.

1.2.5 Relative Value

Manager che mantengono delle posizioni rispetto ad una strategia di investimento che si basa sulla realizzazione di una discrepanza di valutazione nella relazione tra una serie di titoli. I manager utilizzano una varietà di tecniche fondamentali e quantitative per stabilire la strategia di investimento, e i titoli nel quale si investono variano tra il comparto azionario, a reddito fisso, strumenti derivati o altro. Questo tipo di fondo può anche essere coinvolto in operazioni societarie con l'intento che si realizzi una discrepanza nei prezzi dei titoli interessati.

Capitolo 2

Allocazione del portafoglio ottimo

In questa sezione ho affrontato il problema di allocazione del portafoglio che in presenza di non-normalità dei dati non può essere risolto analiticamente. Successivamente illustrerò come è possibile ottimizzare direttamente il problema e come possono essere usate le espansioni in serie di Taylor per approssimare il problema di allocazione, mettendo in luce i pregi e i difetti. In ultimo, ho illustrato come sono stati definiti i momenti del portafoglio a partire dai momenti dei singoli titoli.

2.1 Decisione di investimento in generale

Ho considerato un investitore che investe in un portafoglio con l'intento di massimizzare la propria funzione di utilità attesa $U(W)$ rispetto alla sua ricchezza finale W . Ho considerato n asset rischiosi con vettore dei rendimenti $R = (R_1, R_2, \dots, R_k)'$ e la funzione di distribuzione congiunta cumulata $F(R_1, \dots, R_k)$. La ricchezza di fine periodo è data da $W = (1 + r_p)W_0$, con $r_p = \alpha' R$, dove il vettore $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ rappresenta la quantità di ricchezza investita nei vari titoli rischiosi. Ho considerato il caso in cui non sia possibile investire in un titolo non rischioso e ho imposto il vincolo di positività dei pesi, in tal modo escludo lo 'short-selling':

- $0 \leq \alpha_j \leq 1$
- $\sum_{i=1}^n \alpha_j = 1$

Formalmente , l'allocazione ottimale si ottiene risolvendo il seguente problema:

$$\begin{cases} \max_{\alpha} & E[U(W)] = E[U(1 + \alpha'R)] = \int \cdots \int U(1 + \sum_{i=1}^N \alpha_i R_i) dF(R_1, \dots, R_n) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \end{cases}$$

Le prime n condizioni di primo ordine (FOCs) del problema sono:

$$\frac{\partial E[U(W)]}{\partial \alpha} = E[R \cdot U^{(1)}(W)] = 0 \quad (2.1)$$

A causa dell'ipotesi della presenza di una funzione di distribuzione congiunta cumulata per R , le FOCs in (2.1) in generale non hanno una soluzione in forma chiusa. In letteratura tale problema è stato affrontato attraverso il metodo dell'integrazione numerica che però presenta dei limiti, in quanto la complessità computazionale dell'algoritmo cresce esponenzialmente con il numero degli asset, e già con un numero di asset superiore a tre diventa alquanto impegnativo in termini di tempo impiegato. Per ovviare a tale problema ho utilizzato metodi più generali basati sulla simulazione Montecarlo (in 2 varianti) e un metodo ideato da Nicholas Barberis (1999).

Ciò a cui sono maggiormente interessato è la misurazione dell'effetto dei momenti nel 'asset allocation', ho quindi approssimato l'utilità attesa per mezzo di una espansione in serie di Taylor in un intorno della ricchezza attesa. Per questo scopo la funzione di utilità attesa l'ho espressa in termini di distribuzione della ricchezza

$$E[U(W)] = \int U(w) f(w) dw \quad (2.2)$$

Dove $f(w)$ è la distribuzione di probabilità della ricchezza di fine periodo, che dipende dalla distribuzione multivariata dei rendimenti e dal vettore dei pesi. Se la ricchezza iniziale è arbitrariamente posta uguale ad uno, t è il tempo corrente e $t + 1$ è l'orizzonte di investimento allora l'espansione in serie di Taylor di ordine m della funzione di utilità è

$$U(W) = \sum_{k=0}^m \frac{U^{(k)}(\bar{W})(W - \bar{W})^k}{k!} + O(W^{m+1}) \quad (2.3)$$

$U^{(k)}$ denota la k -esima derivata della funzione di utilità rispetto alla ricchezza finale e $\bar{W} = E[W] = 1 + \alpha'\mu$ rappresenta la ricchezza attesa di fine periodo dove $\mu = E[R]$ è il vettore dei rendimenti attesi. Si dimostra che: (i) la serie di Taylor converge al vero valore, (ii) la distribuzione della ricchezza è determinata unicamente dai momenti, (iii) l'ordine dei valori attesi e delle sommatorie può essere scambiato, allora l'espansione si estende al valore atteso della funzione di utilità

$$\begin{aligned} E[U(W)] &= E \left[\sum_{k=0}^m \frac{U^{(k)}(\bar{W})(W - \bar{W})^k}{k!} \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^{(k)}(\bar{W})}{k!} E[(W - \bar{W})^k] + E[O(W^{m+1})] \end{aligned} \quad (2.4)$$

In tal modo si può notare come l'utilità attesa dipenda da tutti i momenti centrati della distribuzione della ricchezza di fine periodo.

La regione di convergenza della serie dipende dalla funzione di utilità utilizzata. In particolare, la funzione di utilità esponenziale e polinomiale non pongono alcuna restrizione sul range della ricchezza, mentre la 'power utility function' converge per livelli di ricchezza compresi tra $[0, 2\bar{W}]$. E' bene far osservare che tale limite è sufficientemente ampio nel caso si lavori con stocks e bonds con il vincolo di 'short-selling', ma ciò non è altrettanto vero nel caso si lavori con le opzioni. Questi

risultati sono validi per una qualsiasi arbitraria distribuzione.

Vistochè l'espansione in serie di Taylor di ordine infinito non è adatta per un'implementazione numerica, una soluzione è approssimare l'utilità attesa troncando l'espansione ad un dato valore \bar{k} . Per esempio, il criterio di media-varianza proposto da Markovitz(1952) corrisponde al caso $\bar{k} = 2$. In generale, un'espansione troncata a k porta ad una soluzione esatta quando l'utilità attesa è descritta da un polinomio di ordine k . Resta comunque il fatto che non è chiaro, a priori, a quale livello debba essere troncata l'espansione in serie di Taylor. In alcuni esempi è stato dimostrato come l'introduzione di ulteriori termini porti ad un peggioramento dell'approssimazione (Hlawitschka, 1994) mentre in altri l'introduzione di termini di ordine superiore ha portato ad un miglioramento (Lhabitant, 1998). Ederington(1986) e Berenyi (2001) hanno suggerito che l'introduzione del momento quarto, in generale, porta ad un miglioramento dell'approssimazione dell'utilità attesa.

Focalizzandoci sulla serie troncata fino all'ordine quarto si ottiene:

$$\begin{aligned} E[U(W)] &= U(\bar{W}) + U^{(1)}(\bar{W})E[W - \bar{W}] + \frac{1}{2}U^{(2)}(\bar{W})E[(W - \bar{W})^2] + \\ &+ \frac{1}{3!}U^{(3)}(\bar{W})E[(W - \bar{W})^3] + \frac{1}{4!}U^{(4)}(\bar{W})E[(W - \bar{W})^4] + \\ &+ O(W^4) \end{aligned}$$

dove $O(W^4)$ rappresenta il resto dell'espansione in serie di Taylor. Ho definito i primi quattro momenti dei rendimenti di fine periodo: il valore atteso, la varianza, l'asimmetria e la curtosi:

$$\begin{aligned} \mu_P^2 &= E[r_P] = \alpha' \mu \\ \sigma_P^2 &= E[(r_P - \mu_P)^2] = E[(W - \bar{W})^2] \\ s_P^3 &= E[(r_P - \mu_P)^3] = E[(W - \bar{W})^3] \\ k_P^4 &= E[(r_P - \mu_P)^4] = E[(W - \bar{W})^4] \end{aligned}$$

Si può notare come queste definizioni di asimmetria e curtosi differiscono dalla definizione statistica intesa come momenti centrati standardizzati $E[((r_p - \mu_p)/\sigma_p)^j]$ per $j = 3, 4$, esse infatti non vengono scalate per la deviazione standard.

Quindi, la funzione di utilità attesa può essere approssimata dalla seguente funzione

con $k = 2$

$$E[U(W)] \approx U(\bar{W}) + \frac{1}{2}U^{(2)}(\bar{W})\sigma_P^2 \quad (2.5)$$

con $k = 3$

$$E[U(W)] \approx U(\bar{W}) + \frac{1}{2}U^{(2)}(\bar{W})\sigma_P^2 + \frac{1}{3!}U^{(3)}(\bar{W})s_P^3 \quad (2.6)$$

con $k = 4$

$$E[U(W)] \approx U(\bar{W}) + \frac{1}{2}U^{(2)}(\bar{W})\sigma_P^2 + \frac{1}{3!}U^{(3)}(\bar{W})s_P^3 + \frac{1}{4!}U^{(4)}(\bar{W})k_P^4 \quad (2.7)$$

Sotto delle condizioni stabilite da Scott e Horvath (1980), l'utilità attesa, funzione della ricchezza finale W_{t+1} , è crescente rispetto ai rendimenti attesi e all'asimmetria così rendimenti attesi elevati e una asimmetria positiva determinano un'alta utilità attesa. Viceversa l'utilità attesa dipende negativamente dalla varianza e dalla curtosi.

2.2 Funzione di utilità

Nel mio lavoro ho preso in considerazione due tipologie di funzioni di utilità: l'esponenziale che presenta un coefficiente di avversione al rischio assoluto costante (CARA) e *power utility* che presenta un coefficiente di avversione al rischio relativo costante (CRRA).

2.2.1 Funzione di utilità esponenziale

La funzione di utilità CARA (Costant Absolute Risk Aversion), più comunemente conosciuta come funzione di utilità esponenziale, è definita come

$$U(W) = -exp(-\lambda(W)) \quad (2.8)$$

dove λ rappresenta il coefficiente assoluto di avversione al rischio. L'approssimazione per l'utilità attesa è data da:

$$E(U(W)) \approx -exp(-\lambda W) \left[1 + \frac{\lambda^2}{2} \sigma_P^2 - \frac{\lambda^3}{3!} s_P^3 + \frac{\lambda^4}{4!} k_P^4 \right] \quad (2.9)$$

Con alcune semplice semplificazione si ottengono le FOCs:

$$\mu \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \sigma_P^2 - \frac{\lambda^3}{3!} s_P^3 + \frac{\lambda^4}{4!} k_P^4 \right) = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial \sigma_P^2}{\partial \alpha} - \frac{\lambda^2}{3!} \frac{\partial s_P^3}{\partial \alpha} + \frac{\lambda^3}{4!} \frac{\partial k_P^4}{\partial \alpha} \quad (2.10)$$

I pesi ottimi del portafoglio (α) possono essere ottenuti o massimizzando la prima equazione oppure risolvendo l'ultima equazione. Si può notare come

quest'ultima equazione sia semplicemente risolvibile qualora si conosca media, varianza, asimmetria e kurtosi del portafoglio e le relative derivate.

2.2.2 Funzione power utility

La funzione di utilità CRRA (Constant Relative Risk Aversion), più comunemente conosciuta come power utility, è definita come

$$U(W) = \begin{cases} \frac{W^{1-\lambda}}{1-\lambda} & \forall \lambda > 0, \lambda \neq 1 \\ \log(W) & \lambda = 1 \end{cases}$$

dove λ rappresenta il coefficiente relativo di avversione al rischio.

Le proprietà della funzione di utilità CRRA sono tre:

- 1. la funzione è crescente in $W^{1-\lambda}$ se $\lambda < 1$ e decrescente se $\lambda > 1$
- 2. $U^k(W) > 0$ indica un motivo positivo di precauzione al risparmio

L'approssimazione per l'utilità attesa è data da:

$$E[U(W)] \approx \frac{\bar{W}^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{\lambda \bar{W}^{-\lambda-1}}{2} \sigma_P^2 + \frac{\lambda(\lambda+1) \bar{W}^{-\lambda-2}}{3!} s_P^3 - \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2) \bar{W}^{-\lambda-3}}{4!} k_P^4 \quad (2.11)$$

A differenza del caso della funzione di utilità CARA, le FOCs della power utility sono più complesse e perciò sono state riportate nell'appendice.

2.3 Ottimizzazione diretta

Come ho precedentemente illustrato, per ottimizzare direttamente la funzione di utilità attesa, ho utilizzato tre metodi che si basano su tre ipotesi distinte sugli asset sottostanti. Il primo metodo che si basa sulla normalità dei dati è stato preso da un lavoro di Nicholas Barberis (1999) ed è stato definito 'ottimizzazione diretta sotto l'ipotesi di normalità'. Gli altri due metodi invece si basano sulla tecnica della simulazione Monte Carlo: Bootstrap sotto l'ipotesi di incorrelazione seriale dei dati, Bootstrap a blocchi sotto l'ipotesi di correlazione seriale di forma ignota.

2.3.1 Ottimizzazione diretta sotto l'ipotesi di normalità

Si suppone che i rendimenti degli asset seguano tale modello:

$$r_t = \mu + \epsilon_t \quad (2.12)$$

dove $r_t = (r_{1t}, \dots, r_{kt})'$ è il vettore dei rendimenti al tempo t , $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)'$ è il vettore dei rendimenti medi e $\epsilon_t \sim N_k(0_k, \Omega_t)$. Con Ω_t matrice di varianza e covarianza dei rendimenti.

L'investitore deve risolvere il seguente problema di ottimo

$$\max_{\alpha} E_T(U(W)) \quad (2.13)$$

con $W = \alpha_1 \exp(R_{1,T+1}) + \dots + \alpha_5 \exp(R_{2,T+1})$. E_T denota il fatto che l'investitore calcola il valore atteso condizionatamente ad una finestra mobile mentre $R_{i,T+1}$

rappresenta invece la variabile aleatoria degli shock futuri, la cui distribuzione è condizionata ai dati osservati r , $p(R_{T+1}|r, \mu, \Omega)$.

L'investitore allora risolve

$$\max_{\alpha} \int u(W_{T+1})p(R_{i,T+1}|z, \mu, \sigma^2)dR_{T+1} \quad (2.14)$$

L'integrale è stato calcolato numericamente via simulazione. Per spiegare meglio l'idea che sta dietro al metodo della simulazione, si immagini di dover calcolare

$$\int g(y)p(y)dy \quad (2.15)$$

dove $p(y)$ è la funzione di densità. E' possibile approssimare l'integrale

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I g(y^{(i)}) \quad (2.16)$$

dove $y^{(1)}, \dots, y^{(I)}$ sono estrazioni casuali dalla distribuzione di probabilità $p(y)$. Per assicurare un alto livello di accuratezza ho posto $I=1000000$.

Nel nostro caso si suppone che $R_{T+1} \sim N_k(\mu, \Sigma)$, dove μ e Σ sono rispettivamente il vettore delle medie e la matrice di varianza e covarianza del campione in oggetto. L'integrale per il calcolo dell'utilità attesa è stato quindi approssimato prendendo un campione $(R_{T+1}^{(i)})_{i=1}^I$ dalla rispettiva distribuzione e calcolando

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I U(\alpha_1 \exp(r^{(i)}_{1,T+1}) + \dots + \alpha_k \exp(r^{(i)}_{k,T+1})) \quad (2.17)$$

dove $r^{(i)}_{j,T+1}$ rappresenta la i -esima realizzazione del j -esimo elemento della

normale multivariata.

Ai fini pratici per ottenere il massimo di tale valor medio al variare dei pesi α , ho proceduto calcolando il valor medio per ogni possibile combinazione di pesi con una data griglia. Successivamente ho preso tutte quelle combinazioni dei pesi il cui valor medio era superiore ad un dato percentile della distribuzione delle utilità calcolate precedentemente, e su tali pesi ho riapplicato una griglia più fine. Tra tutte le nuove utilità medie ottenute ho estratto il valore massimo e il corrispondente vettore dei pesi. Tale vettore dei pesi è stato considerato l'ottimo.

2.3.2 Bootstrap

L'ipotesi di normalità dei dati precedentemente valutata risulta essere poco plausibile, specialmente nel campo finanziario. Tale ipotesi potrebbe perciò portare a risultati inconsistenti. Per questo motivo una metodologia statistica non vincolante alla distribuzione dei dati è il bootstrap. Esso infatti si basa sulla distribuzione empirica dei dati che supponiamo essere indipendente e identicamente distribuita (i.i.d.).

Consideriamo l'insieme dei rendimenti realizzati $r = (r_1, \dots, r_k)$ dove r_i rappresenta il vettore dei rendimenti dell' i -esimo asset, con numerosità n . Da esso ho ricampionato B ($B=10000$) volte con campionamento casuale semplice ottenendo dei campioni bootstrap r_1^*, \dots, r_B^* , dove il generico campione è così definito $r_j^* = (r_{j,1}^*, \dots, r_{j,k}^*)$.

Sia dato poi lo stimatore dei rendimenti cumulati del j -esimo asset $T_j(r) = \sum_{i=1}^n r_{j,i}$, con $T(r) = (T_1(r), \dots, T_k(r))$. Ho calcolato tale quantità per ogni campione bootstrap ottenendo $T_1^*(r), \dots, T_B^*(r)$ con $T_j^*(r) = (T_{j,1}^*(r), \dots, T_{j,k}^*(r))$ e dove $T_{j,i}^*(r) = \sum_{g=1}^n r_{j,i,g}^*$.

In tal caso l'integrale per il calcolo dell'utilità attesa è stato approssimato prendendo $(T_{(i)}^*)_{i=1}^B$ e calcolando

$$\frac{1}{B} \sum_{j=1}^B U(\alpha_1 T_{j,1}^*(r) + \dots + \alpha_k T_{j,k}^*(r)) \quad (2.18)$$

Procedendo in modo analogo a quanto effettuato nel caso di ottimizzazione diretta sotto l'ipotesi di normalità, ho proceduto calcolando il valor medio per ogni possibile combinazione di pesi con una data griglia. Successivamente ho preso tutte quelle combinazione dei pesi il cui valor medio era superiori ad un dato percentile della distribuzione delle utilità attese calcolate precedentemente, e su tali pesi ho riapplicato una griglia più fine. Tra tutte le nuove utilità medie ottenute ho estratto il valore massimo e il corrispettivo vettore dei pesi. Tale vettore dei pesi è stato considerato l'ottimo.

2.3.3 Bootstrap a blocchi

Sebbene il bootstrap classico sia una valida soluzione, esso non tiene in considerazione il fatto che le serie dei rendimenti potrebbero presentare una qualche forma di autocorrelazione non nota. Per questo motivo conviene implementare il bootstrap a blocchi.

Consideriamo l'insieme dei rendimenti realizzati $r = (r_1, \dots, r_k)$ dove r_i rappresenta il vettore dei rendimenti dell' i -esimo hedge fund, di numerosità n . Su tale campione ho proceduto estraendo tutti i possibili blocchi di lunghezza variabile compresa tra 3 e 12, dove per blocco si intende un insieme di rendimenti consecutivi. A partire dall'insieme di tutti i blocchi precedentemente definiti, ho costruito i miei campioni bootstrap estraendo con campionamento casuale semplice da tale insieme; tronandolo all' n -esima osservazione qualora eccedesse la lunghezza campionaria iniziale.

Una volta ottenuti i campioni bootstrap ho calcolato l'utilità attesa in modo del tutto analogo al bootstrap classico. Ho proceduto calcolando il valor medio per ogni possibile combinazione di pesi con una data griglia. Successivamente ho preso tutte quelle combinazione dei pesi il cui valor medio era superiori ad un dato percentile della distribuzione delle utilità attese calcolate precedentemente, e su tali pesi ho riapplicato una griglia più fine. Tra tutte le nuove utilità medie ottenute ho estratto il valore massimo e il corrispettivo vettore dei pesi. Tale vettore dei pesi è stato considerato l'ottimo.

2.4 Risolvere il problema di ottimo

Ora andrò a descrivere brevemente come i momenti dei portafoglio posso essere espressi in un modo molto conveniente e come ottenere le loro derivate in modo tale da risolvere le FOCs. Questo approccio è stato largamente discusso da Athayde e Flores (2001) e usato da Harvey et al. (2002) e Prakash, Chang e Patcwa(2003).

Prima definisco la matrice di covarianza (n, n)

$$M_2 = E[(R - \mu)(R - \mu)'] = v_{ij}$$

la matrice di 'co-skewness' (n, n^2)

$$M_3 = E[(R - \mu)(R - \mu)' \otimes (R - \mu)'] = s_{ijk}$$

la matrice di 'co-kurtosis' (n, n^3)

$$M_4 = E[(R - \mu)(R - \mu)' \otimes (R - \mu)' \otimes (R - \mu)'] = k_{ijkl}$$

con elementi

$$v_{ij} = E[(R_i - \mu)(R_j - \mu)] \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$s_{ijk} = E[(R_i - \mu)(R_j - \mu)(R_k - \mu)] \quad i, j, k = 1, \dots, n$$

$$k_{ijkl} = E[(R_i - \mu)(R_j - \mu)(R_k - \mu)(R_l - \mu)] \quad i, j, k, l = 1, \dots, n$$

Non tutti però gli elementi di tali matrici devono essere calcolati, in quanto è presente in esse una sorta di simmetria. Per la matrice di covarianza (n, n) solo $n(n + 1)/2$ elementi devono essere calcolati. Analogamente, per la matrice di 'co-skewness' (n, n^2) e di 'co-kurtosis' (n, n^3) gli elementi che differiscono sono rispettivamente $n(n + 1)(n + 2)/6$ e $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)/24$. Si può notare come tali quantità siano funzione del numero di asset rischiosi e che crescano molto velocemente all'aumentare di n . Un'idea di ciò la si può avere osservando la tabella che segue che mostra il numero di parametri che si deve stimare al variare del numero degli asset considerati nell'analisi.

	μ	M_2	M_3	M_4	Tot. param
3	3	6	10	15	34
5	5	15	35	70	125
10	10	55	220	715	1000
50	50	1275	22100	292825	316250
100	100	5050	171700	4421275	4598125

Tabella 2.1: Numero dei parametri da stimare delle matrici dei co-momenti

Questo, a mio avviso, risulta essere un forte limite di tale procedura di allocazione di portafoglio in quanto necessita di una mole di dati notevole, soprattutto nei casi reali dove il numero di asset presenti in portafoglio risulta essere dell'ordine del centinaio.

Ritornando al problema di ottimo si può notare come i momenti del portafoglio possono essere facilmente definiti. Per un dato vettore dei pesi, il rendimento atteso,

la varianza, l'asimmetria e la curtosi del portafoglio sono dati rispettivamente da:

$$\begin{aligned}\mu_p &= \alpha' \mu & \sigma_p^2 &= \alpha' M_2 \alpha \\ s_p^3 &= \alpha' M_3 (\alpha \otimes \alpha) & k_p^4 &= \alpha' M_4 (\alpha \otimes \alpha \otimes \alpha)\end{aligned}$$

Alternativamente, i momenti del portafoglio possono essere espressi come segue:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= E \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i (R_i - \mu_i) (r_p - \mu_p) \right] = \alpha' \Sigma_p \\ s_p^3 &= E \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i (R_i - \mu_i) (r_p - \mu_p)^2 \right] = \alpha' S_p \\ k_p^4 &= E \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i (R_i - \mu_i) (r_p - \mu_p)^3 \right] = \alpha' K_p\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\Sigma_p &= E[(R_i - \mu_i)(r_p - \mu_p)] = M_2 \alpha \\ S_p &= E[(R_i - \mu_i)(r_p - \mu_p)^2] = M_3 (\alpha \otimes \alpha) \\ K_p &= E[(R_i - \mu_i)(r_p - \mu_p)^3] = M_4 (\alpha \otimes \alpha \otimes \alpha)\end{aligned}$$

Le derivate delle quantità precedentemente illustrate sono le seguenti:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mu_p}{\partial \alpha} &= \mu & \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial \alpha} &= 2M_2 \alpha \\ \frac{\partial s_p^3}{\partial \alpha} &= 3M_3 (\alpha \otimes \alpha) & \frac{\partial k_p^4}{\partial \alpha} &= 4M_4 (\alpha \otimes \alpha \otimes \alpha)\end{aligned}$$

L'equazioni 2.9 e 2.11, che corrispondono alle FOCs per le due funzioni di utilità, possono perciò essere riscritte come

$$\mu - \delta_1(\alpha)[M_2 \alpha] + \delta_2(\alpha)[M_3 (\alpha \otimes \alpha)] - \delta_3(\alpha)[M_4 (\alpha \otimes \alpha \otimes \alpha)] = 0 \quad (2.19)$$

dove δ_1 , δ_2 e δ_3 sono delle funzioni non lineari rispetto ai parametri α .

Le k equazioni possono essere risolte numericamente, usando un pacchetto di

ottimizzazione. In uno dei capitoli che seguirà verrà approfondito maggiormente il problema dell'ottimizzazione che non risulta essere banale. In poco tempo comunque è possibile ottenere un'accurata soluzione anche nel caso di un gran numero di asset. Il prezzo da pagare è il fatto che ci si focalizza su un numero finito di momenti.

Capitolo 3

I dati

Ho esplorato due data set differenti, il primo composto dagli indici di performance mensile degli hedge funds dell'area Equity, Event Driven, Macro, Relative Value ed Emerging Markets nel periodo che va da Gennaio 1990 a Gennaio 2009. Il secondo composto dai 10 titoli dello S&P100 aventi le serie storiche giornaliere dei prezzi più lunghe, con dati aggiustati che vanno dal 2 Gennaio 1962 al 6 Aprile 2009. La scelta degli hedge fund è dovuta al fatto che questi settori rappresentano quelli a maggiore massa di gestione, perciò quelli che tendono a racchiudere maggior informazione. Gli stock invece sono stati scelti per effettuare una simulazione di investimento che maggiormente si avvicinasse ad un caso reale, e avere così la possibilità di raffronti in un contesto maggiormente realistico.

I data set utilizzati sono stati descritti in Tabella 3.1. Ho posto R_{it} , $t = 1, \dots, T$, il rendimento o performance del titolo o settore i al tempo t . Per un'analisi preliminare dei dati, in Tabella 3.2 e 3.3 sono riportate delle statistiche univariate sui dataset considerati e in figura 3.1 sono presenti gli istogrammi dei rendimenti, alcune statistiche descrittive e il test di normalità. Per ognuno dei data set ho calcolato una stima dei primi quattro momenti e ho testato l'ipotesi nulla di normalità per ogni finestra mobile di ogni singolo asset via test parametrico e non parametrico.

Per valutare l'ipotesi di normalità ho utilizzato il test proposto da Jarque e Bera (1980), che valuta se la asimmetria e l'eccesso di curtosi sono congiuntamente nulli. Il test di Lilliefors, invece, è un test non parametrico per valutare la normalità dei dati che consiste nel confronto tra la distribuzione cumulata empirica e teorica. In Tabella A.1 si può notare come il test parametrico (Jarque-Bera) rigetti l'ipotesi nulla di normalità dei dati ad un livello del 5% per ogni finestra mobile considerata, mentre i risultati per il test non parametrico, presenti in tabella A.2, non rifiutano l'ipotesi nulla di normalità dei dati nel caso degli Event Driven e in generale, a meno di alcune finestre mobili, rifiutano l'ipotesi nulla di normalità dei dati. È preferibile basarsi sulle conclusioni inferenziali ottenute con il test non parametrico in quanto è più robusto ai dati.

Per quanto riguarda, invece, i test di normalità applicati al dataset 2 (DS2), sia il test parametrico sia quello non parametrico, hanno rigettato l'ipotesi nulla di normalità per ogni finestra mobile considerata al un livello del 5%. I dati relativi ai valori dei test di normalità e ai p-value associati non sono stati riportati per una questione di spazi, il numero di finestre mobili considerate, infatti, era sufficientemente elevato e si è preferito non riportare tali risultati. Analoga scelta è stata fatta per tutti gli altri test proposti, applicati a DS2.

Per quanto riguarda le analisi multivariate ho riportato una stima campionaria della matrice di correlazione, di co-skewness e di co-kurtosis in tabella 3.1, 3.2 e 3.3. A causa della dimensione eccessiva di tali matrici, dovuta al numero elevato di parametri nel caso del secondo dataset (DS2), per una questione di comodità non sono state riportate le stime. Ho preferito non considerare i test multivariati per la valutazione della normalità congiunta a causa della loro scarsa robustezza, specialmente con dati di tipo finanziario.

Ho inoltre considerato un test per valutare l'autocorrelazione seriale dei rendimenti, il test di Ljung-Box. Si basa sulla seguente statistica:

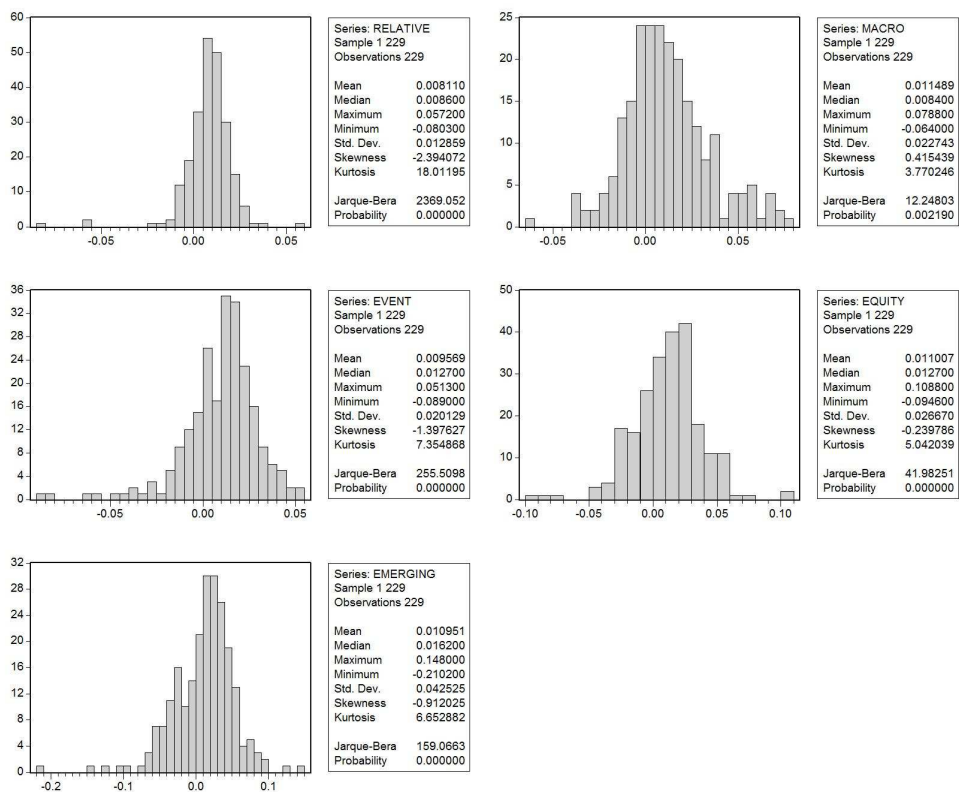


Figura 3.1: Statistiche descrittive

Matrice di covarianza

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1.0000	0.7065	0.7329	0.5805	0.5726
x_2		1.0000	0.8190	0.5716	0.6472
x_3			1.0000	0.5201	0.7285
x_4				1.0000	0.3428
x_5					1.0000

Tabella 3.1: Matrice di correlazione

Matrice di co-asimmetria

	x_1^2	x_2^2	x_3^2	x_4^2	x_5^2
x_1	-0.6967	-0.1612	-0.2063	0.0294	-0.1099
x_2	-0.3052	-0.0452	-0.1099	0.0291	-0.0693
x_3	-0.3820	-0.0999	-0.1132	0.0057	-0.0609
x_4	-0.0561	0.0185	-0.0245	0.0486	-0.0069
x_5	-0.2646	-0.0843	-0.0745	0.0042	-0.0506
	x_3	x_4	x_5		
x_1x_2	-0.1962	-0.0106	-0.1524		
x_1x_3		-0.0491	-0.1412		
x_1x_4			-0.0274		
x_2x_3		-0.0120	-0.0819		
x_2x_4			-0.0104		
x_3x_4			-0.0118		

Tabella 3.2: Matrice di co-asimmetria (10^{-4})

$$Q(h) = n(n+2) \sum_{j=1}^h \frac{\hat{\rho}_j^2}{n-j}$$

dove n è la numerosità campionaria, $\hat{\rho}_j^2$ è l'autocorrelazione campionaria al ritardo j e h è il numero di ritardi che si vogliono testare. Sotto l'ipotesi nulla di incorrelazione fino al ritardo h , $Q(h) \sim \chi_h^2$.

Utilizzando dati mensili nel primo caso e settimanali nel secondo, il valore di h che ho ritenuto essere più opportuno scegliere è stato 4 nel primo caso e 4 nel secondo. Perciò le statistiche test, sotto l'ipotesi nulla di incorrelazione, sono distribuite come un $\chi^2(4)$ e un $\chi^2(4)$. Osservando i p-value associati alla statistica Q (tabella A.3) si nota che, per quanto riguarda le finestre mobili relative a Event Driven e Relative Value, non si rifiuta l'ipotesi nulla incorrelazione seriale, mentre per gli altri asset sembrano essere presenti dipendenze lineari significativamente diverse da zero.

Il test applicato sulle varie finestre mobili di DS2, analogamente a quanto mostrato per DS1, ha però mostrato che alcuni titoli presentavano una qualche

Matrici di co-curtosi

	x_1^3	x_2^3	x_3^3	x_4^3	x_5^3
x_1	0.2157	0.0322	0.0205	0.0101	0.0097
x_2	0.0965	0.0253	0.0119	0.0057	0.0059
x_3	0.0870	0.0162	0.0119	0.0032	0.0015
x_4	0.0527	0.0089	0.0040	0.0030	0.0059
x_5	0.0555	0.0109	0.0082	0.0032	0.0049
	$x_1x_2^2$	$x_1x_3^2$	$x_1x_4^2$	$x_1x_5^2$	$x_2x_3^2$
x_1	0.0527	0.0410	0.0201	0.0224	
x_2		0.0207	0.0090	0.0124	0.0131
x_3	0.0236		0.0064	0.0115	
x_4	0.0122	0.0078		0.0032	0.0040
x_5	0.0165	0.0143	0.0044		0.0082
	$x_2x_4^2$	$x_2x_5^2$	$x_3x_4^2$	$x_3x_5^2$	$x_5x_4^2$
x_1					
x_2	0.0063	0.0078	0.0036	0.0043	
x_3			0.0120	0.0062	0.0021
x_4		0.0015		0.0015	
x_5	0.0017		0.0021		0.0054
	$x_3x_1^2$	$x_4x_1^2$	$x_5x_1^2$	$x_4x_2^2$	$x_5x_2^2$
x_1					
x_2	0.0420	0.0226	0.0287		
x_3		0.0184	0.0280	0.0051	0.0091
x_4			0.0093		0.0025
x_5					
	x_1x_2	x_3x_4			
x_3x_4	0.0081				
x_3x_5	0.0150	0.0021			
x_4x_5	0.0043				

Tabella 3.3: Matrici di co-curtosi (10^{-4})

forma di autocorrelazione seriale mentre altri presentavano rendimenti serialmente incorrelati.

Sebbene sia presente in taluni titoli una correlazione seriale, non abbiamo volutamente scelto di modellare tale componente. Seguendo il framework di Jondeau e Rockinger (2004), infatti, ci focalizziamo solo sui momenti non condizionali; il possibile utilizzo dell'informazione presente nei momenti condizionali potrebbe essere un'idea per una possibile estensione in lavori futuri.

Succeivamente ho testato l'ipotesi nulla di omoschedasticità dei dati regredendo il quadrato dei rendimenti sul primo e sul secondo ritardo dei rendimenti al quadrato. La statistica test standard, introdotta da Engle (1982), (LM), è distribuita come un $\chi^2(2)$. I relativi p-value associati al test su DS1 si possono osservare in tabella A.4. I p-value sono tutti ampiamente superiori alla soglia del 5% e quindi non rifiutiamo l'ipotesi nulla di eteroschedasticità dei singoli asset, fatta eccezione che per il titolo relativo agli Event Driven. Il test calcolato sulle finestre mobili di DS2 ha mostrato una maggior eterogeneità nei risultati. Circa nella metà dei titoli il test di Engle rifiutava l'ipotesi nulla di omoschedasticità mentre nell'altra metà accettava l'ipotesi nulla. Tali risultati non ci devono sorprendere in quanto stiamo lavorando con rendimenti mensili e settimanali.

Dataset	Descrizione	Periodo	Frequenza	Num. osservazioni
DS1	indici di performance mensile degli hedge funds dell'area Equity, Event Driven, Macro, Relative Value ed Emerging Markets	Dal 1/1990 al 1/2009	Mensile	229
DS2	10 titoli dello S&P100 (Alcoa, Boeing, Caterpillar Inc, Du Pont E I De Nem, Walt Disney, Gen Electric, General Motors, Hewlett Packard, International Business Machines, Coca Cola)	Dal 2/1/1962 al 6/4/2009	Settimanale	CONTROLLARE

Tabella 3.4: Descrizione dei dataset

T=229	Emerging Markets	Equity	Event Driven	Macro	Relative Value
Statistiche univariate	Valori				
Media	0.011	0.011	0.010	0.012	0.008
Std. Err.	0.043	0.027	0.020	0.023	0.013
Asimmetria	-0.912	-0.240	-1.398	0.415	-2.394
Curtosi	6.653	5.042	7.355	3.770	18.012

Tabella 3.5: Statistiche univariate per DS1

T=2465	AA	BA	CAT	DD	DIS	GE	GM	HPQ	IBM	KO
Statistiche univariate	Valori									
Media	0.001	0.0020	0.001	0.001	0.002	0.002	0.0000	0.002	0.002	0.002
Std. Err.	0.047	0.047	0.044	0.035	0.048	0.037	0.050	0.051	0.035	0.039
Asimmetria	-0.982	-0.279	-1.370	-0.180	-0.286	0.071	-0.647	-0.272	-0.171	-4.117
Curtosi	15.156	6.942	24.020	5.128	6.273	9.208	40.348	5.027	6.029	70.277

Tabella 3.6: Statistiche univariate per DS2

Capitolo 4

Il problema dell'ottimizzazione

In questo capitolo, affronterò tutte le problematiche relative all'ottimizzazione che ho incontrato nel mio lavoro. Illustrerò le varie tecniche usate e le confronterò, mettendo alla luce i pregi e i difetti. Inizialmente verrà proposto un breve excursus sui metodi numerici tradizionali per poi passare ad approcci basati su algoritmi stocastici, e i più evoluti algoritmi genetici.

4.1 Introduzione

In generale l'ottimizzazione prevede di trovare i valori di una o più variabili di interesse che raggiungano uno o più obiettivi senza violare le costrizioni eventualmente imposte. L'identificazione di un portafoglio efficiente nel modello di Markovitz è chiaramente un problema di ottimizzazione: i valori dei pesi dei portafogli (x_i) (i) devono rispettare certe costrizioni ($0 < x_i < 1$ e $\sum_{i=1}^n x_i = 1$) e (ii) il rendimento del portafoglio deve essere pari ad un certo valore atteso; l'obiettivo è trovare dei valori per i pesi degli asset che minimizzino il rischio. Questo problema però in generale non ha una soluzione in forma chiusa a causa della costrizione di non-

negatività dei pesi. Sebbene non sia risolvibile analiticamente, esistono procedure numeriche che permettono di risolvere il modello di Markovitz.

A seconda della funzione obiettivo utilizzata, i problemi di ottimo possono avere più soluzioni e alcune di queste sono degli ottimi locali. Nelle applicazioni reali, in presenza di più variabili di interesse, distinguere gli ottimi locali da quelli assoluti risulta spesso difficile a causa della multidimensionalità dello spazio. Nell'area del portfolio management, queste difficoltà relative alle funzioni obiettivo sono frequentemente osservate quando si considerano le frizioni del mercato. Per trovare delle soluzioni ci sono comunque delle tecniche comuni che prevedono l'eliminazione di queste frizioni rapportandosi a dei modelli che semplificano il mondo reale o, alternativamente, l'uso di modelli inappropriati che portano a soluzioni subottimali. Per ottenere dei risultati più affidabili sarà opportuno perciò considerare delle tecniche di ottimizzazione capaci di trattare le frizioni del mercato senza doversi rapportare ad una eccessiva semplificazione del mondo reale, tale tecniche prendono il nome di 'tecniche di ottimizzazione euristica'.

4.2 Metodi Numerici Tradizionali e Approcci con algoritmi

I metodi numerici tradizionali sono di solito basati su un algoritmo iterativo di ricerca che parte da una data soluzione e la migliora secondo delle regole date. Per problemi di ottimizzazione finanziaria, i metodi della 'Mathematical Programming' sono spesso applicati in quanto permettono di operare non solo con costrizioni di uguaglianza ma anche di disuguaglianza. Il tipo di metodo usato dipende in primo luogo dal problema sottostante:

Programmazione lineare: è applicato quando il problema di ottimizzazione presenta una funzione obiettivo lineare e le stesse costrizioni sono lineari.

Il metodo più comune è il 'Simplex Algorithm' nel quale prima le disuguaglianze vengono trasformate in uguaglianze aggiungendo 'slack variable' e poi includendo ed escludendo 'base variable' finché l'ottimo non viene trovato. Sebbene la complessità computazionale del metodo sia esponenziale, risulta lavorare molto efficientemente in molti casi.

Programmazione quadratica e concava: è applicato quando le costrizioni sono lineari e la funzione obiettivo è quadratica. Questo è il caso per il modello di Markovitz.

Programmazione dinamica: è un concetto generale piuttosto che un vero e proprio algoritmo e si applica a problemi che hanno una struttura temporale. L'idea di base è di suddividere il problema in molti sotto-problemi miopi tra loro. Si parte risolvendo il sotto-problema per il periodo T , e poi si procede a ritroso per tutti i sotto-problemi.

Programmazione stocastica: è applicata in quei problemi di ottimizzazione dove le informazioni incluse nella funzione obiettivo sono incerte. Tali approcci usualmente fanno ricorso a previsioni di differenti scenari e a studi di 'sensitivity analyses'.

Greedy algorithms: sono degli algoritmi che data una soluzione (sub ottimale), cercano un'altra soluzione modificata e scelgono la migliore tra le due. Visto che questi algoritmi si basano sulla valutazione di un punto alla volta, è facile che si 'incastrino' in quei casi di molti ottimi locali se il valore iniziale non è scelto correttamente. Perciò, questo tipo di approccio richiede uno spazio delle soluzioni sufficientemente liscio e una funzione obiettivo monotona affinché possa produrre delle buone soluzioni.

Gradient Search: può essere usato quando la funzione obiettivo $f(x)$ è differenziabile e strettamente convessa e l'ottimo può essere ottenuto attraverso le condizioni di primo ordine $\partial f/\partial x = 0$. Data una soluzione iniziale, il gradiente $\nabla f(x') = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ è calcolato per $x'=x$. La soluzione, ad ogni iterazione, viene aggiustata secondo questa regola: $x' = x' + \delta \cdot \nabla f(x)$ che corrisponde a $x'_j := x'_j + \delta \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} |_{x=x'} \forall j$. Questo aggiustamento viene ripetuto finchè l'ottimo x^* con $\nabla f(x^*) = 0$ non viene raggiunto

Divide and Conquer Algorithms: iterativamente suddividono il problema in sottoproblemi finchè i sottoproblemi non sono risolvibili in un tempo ragionevole. Questi risultati parziali vengono poi riuniti per formare la soluzione del problema completo. Questo tipo approccio richiede che il problema iniziale possa essere partizionato in modo tale che i vari sottoproblemi non dipendano tra di loro.

Come detto precedentemente il limite di tale metodi appena illustrati è che funzionano bene solo se soddisfano certe condizioni: la funzione obiettivo deve essere di un certo tipo, le costrizioni devono essere esprimibili in un certo formato, e così via. La loro applicazione è perciò ristretta ad un set piuttosto limitato di problemi. In pratica, queste limitazioni sono spesso sorpassate modificando il problema in modo che esso sia risolvibile. Inoltre essi sono per la maggior parte basati su regole deterministiche piuttosto rigorose. Perciò, possono produrre delle soluzioni sbagliate quando il problema considerato non ne ha solo una di globale, ma anche una o più soluzioni locali. Per definizione questi algoritmi che si basano su regole deterministiche producono lo stesso risultato per un dato problema a parità di strategia iniziale e di valori iniziali. Ripetendo così la ricerca dell'ottimo con tali algoritmi, in particolare quando il valore iniziale è dato da regole deterministiche, si avrà sempre lo stesso ottimo locale. In mancanza di alternative, comunque, i problemi di ottimizzazione finanziaria sono stati spesso modellati in modo tale

che possano essere risolti con uno di questi metodi. Di conseguenza, si devono accettare delle forti semplificazioni oppure si deve accettare il fatto che le soluzioni possano essere sub ottimali. Resta comunque il fatto che senza questo adattamento di tali problemi ai metodi disponibili, la maggior parte dei problemi di gestione del portafoglio non sarebbe facilmente risolvibile. Grazie a questo adattamento, dall'altra parte, è difficile dire se la soluzione ottenuta è unica oppure una tra le tante possibili e quanto essa si discosta dall'ottimo globale.

4.3 Metodi Deterministici Tradizionali Versus Metodi Euristici e Stocastici

Le tecniche classiche di ottimizzazione come illustrate finora possono essere divise in due gruppi principali. Il primo gruppo di metodi è basato sull'enumerazione. Il succo di tali approcci come 'branch and bounds' è di ridurre il più possibile lo spazio delle soluzioni e perciò di eliminare quei gruppi dello spazio che possono essere identificati come inferiori a priori. Il secondo gruppo comprende tecniche che sono tipicamente basate sul calcolo differenziale. Una assunzione implicita è che ci sia solo un ottimo e/o che l'ottimo possa essere raggiunto attraverso un 'percorso diretto' a partire dal punto iniziale. Il processo di ricerca è generalmente basato su regole numeriche deterministiche. Questo implica che, dato lo stesso valore iniziale, ripetendo il processo più volte, con lo stesso valore iniziale, il metodo ritornerebbe lo stesso risultato; in tal modo non si è in grado di giudicare se tale punto sia un ottimo locale o globale.

Una radicale alternativa alternativa ai metodi deterministici è l'uso del metodo Monte Carlo: vengono generate un gran numero di possibili soluzioni e ne vengono calcolati i rispettivi della funzione obiettivo. Con un numero sufficientemente grande di generazioni casuali, questo approccio è tale da poter identificare l'ottimo o al minimo una regione entro cui è possibile trovarlo. Questo metodo è maggiormente

flessibile rispetto ai metodi numerici, di contro però richiede un generatore di numeri casuali adeguato e molto tempo per elaborare tutte le possibili soluzioni generate. Può essere perciò applicato congiuntamente ad un metodo numerico, in una prima fase il metodo Monte Carlo restringe lo spazio di ricerca e successivamente il metodo numerico ricerca nel sottospazio precedentemente ottenuto. In generale, il suo maggior difetto è che è abbastanza inefficiente e inesatto. I metodi e le tecniche di ottimizzazione euristica sono anch'esse basate su elementi stocastici. A differenza del metodo Monte Carlo, comunque, presentano dei meccanismi che guidano la ricerca verso sottospazi delle possibili soluzioni che vengono considerati più plausibili. Loro perciò combinano i vantaggi dei metodi precedenti: molto simili ai metodi numerici, tendono a convergere verso l'ottimo attraverso varie ricerche iterate ma hanno meno probabilità di finire in un ottimo locale in quanto si basano su regole stocastiche e non deterministiche. Oltretutto, questi metodi sono molto flessibili e perciò meno limitati rispetto a certe forme di costrizioni.

4.3.1 Tecniche di ottimizzazione euristica

La caratteristica comune di tutti i metodi di ottimizzazione euristica (HO) è che partono con una soluzione più o meno arbitraria, iterativamente producono nuove soluzioni attraverso alcune regole di generazione e valutano queste nuove soluzioni, ed eventualmente segnalano la soluzione di ottimo trovata durante il processo di ricerca. L'esecuzione del processo di ricerca viene usualmente fermata quando non vi è un miglioramento significativo dopo un dato numero di iterazioni; quando la soluzione è sufficientemente buona oppure quando alcuni parametri interni terminano l'esecuzione dell'algoritmo. Dacchè i metodi HO possono differire sostanzialmente rispetto ai loro criteri, è difficile trovare uno schema di classificazione generale. Tuttavia, di seguito ho riportato una lista di alcuni aspetti centrali che permettono un confronto tra i metodi.

Generazione di nuove soluzioni. Una soluzione può essere generata modificando la soluzione corrente oppure costruendone un'altra basata su risultati passati. In tal modo, può essere impiegata una regola deterministica, una soluzione casuale o una combinazione di entrambi.

Trattamento di nuove soluzioni. Nel tentativo di far fronte agli ottimi locali, i metodi HO usualmente considerano non solo quelle soluzioni che ad un miglioramento immediato, ma anche quelle che sono inferiori alla soluzione ottima trovata finora.

Numero di agenti di ricerca. Siccome in alcuni metodi, il singolo agente tende a migliorare la propria soluzione, i metodi basati sulla popolazione spesso fanno spesso uso delle informazioni raccolte nelle precedenti iterazioni.

Limitazioni dello spazio di ricerca. Dato che lo spazio delle soluzioni è generalmente molto vasto, nuove soluzioni possono essere trovate cercando nei dintorni delle attuali soluzioni considerate. Altri metodi, invece escludono a priori certe aree del possibile spazio per evitare di spendere troppo tempo in soluzioni apparentemente irrilevanti.

Conoscenze priori. Quando esistono delle linee guida che permettono di individuare una buona soluzione, tale conoscenze a priori possono essere incorporate nel processo di ricerca. Sebbene tale informazione a priori permetta di ridurre significativamente lo spazio di ricerca e aumentare la velocità di convergenza, può anche portare a delle soluzioni non ottimali dato che la ricerca può essere stata guidata nella direzione sbagliata o l'algoritmo può aver avuto dei problemi nel superare il problema degli ottimi locali. L'informazione a priori viene perciò utilizzata in un numero piuttosto limitato di metodi HO e, visti i limiti nel suo utilizzo, viene vista più come un'opzione che non come un prerequisito.

Flessibilità rispetto a specifiche costrizioni. Vi sono metodi di uso generale che possono essere applicati virtualmente a qualsiasi tipo di problema di ottimizzazione, mentre altri metodi sono stati costruiti su misura per particolari tipi di vincoli e sono pertanto difficili da applicare ad altre classi di problemi di ottimizzazione.

Altri aspetti ci permettono di testare e valutare i differenti algoritmi, influenzando così sulla decisione del metodo più opportuno da selezionare per un particolare problema di ottimizzazione:

Facilità di implementazione. La flessibilità del concetto, il numero dei parametri e il tempo necessario per trovare dei valori ottimali per essi sono dei criteri comuni per valutare, in prima fase, il metodo più opportuno.

Complessità computazionale. Per i metodi HO la complessità dipende da più fattori: dal costo per valutare le possibili soluzioni, dal numero di iterazioni. Sebbene il numero di iterazione cresca all'aumentare dello spazio delle soluzioni, l'aumento della complessità computazionale è sostanzialmente più bassa rispetto a quello che si avrebbe nel caso dei metodi tradizionali.

Velocità di convergenza. Il tempo che impiega la CPU a trovare la soluzione ottimale (o, alternativamente, il numero di soluzioni valutate) viene spesso usato come metro di confronto tra differenti algoritmi. La velocità di convergenza è una proprietà desiderabile, anche se non troppo significativa se considerata come unico criterio in quanto non si va a valutare la bontà della soluzione, se è un ottimo locale o globale.

Affidabilità. Per la maggior parte dei metodi euristici, esistono prove che questi metodi convergono verso l'ottimo globale, dato un sufficiente tempo di calcolo e un'appropriata scelta dei parametri. Nella pratica, uno spesso deve accettare

un compromesso tra un basso tempo di calcolo (o alta velocità di convergenza)
e la possibilità che non venga raggiunto l'ottimo locale.

Capitolo 5

Analisi empirica: hedge funds

In questa sezione verranno illustrati i risultati ottenuti con il dataset relativo agli hedge fund (DS1), confrontando i risultati ottenuti con varie metodologie. Verranno proposti i pesi ottenuti dalla massimizzazione della funzione di utilità attesa approssimata con l'espansione in serie di Taylor fino al secondo, terzo e quarto termine.

Successivamente si mostreranno i risultati ottenuti attraverso la massimizzazione diretta della funzione di utilità attesa, che viene fatto tramite simulazioni basate su varie ipotesi: sotto l'ipotesi di normalità dei dati, sotto l'ipotesi di distribuzione empirica dei dati non nota ma indipendente, identicamente distribuita (i.i.d.) e sotto l'ipotesi di distribuzione empirica non nota ma identicamente distribuita, assumiamo perciò la presenza di indipendenza. Quest'ultimi tre metodi verranno usati come termine di confronto in quanto rappresentano un tentativo di ottimizzazione diretta della funzione di utilità attesa, al contrario dei primi tre che massimizzano un'approssimazione di essa.

Ci soffermeremo inoltre sull'approccio di ottimizzazione implementato basato sulla Differential Equation, un algoritmo di ottimizzazione basato su algoritmi genetici. Per confrontare le performance di tali metodi sono stati utilizzati degli

indice di performance quali l'indice di sharpe, la percentuale di rendimenti negativi e i rendimenti cumulati.

5.1 Risultati

Nei grafici che seguono verranno mostrati i pesi dei portafogli ottimi ottenuti attraverso le varie metodologie utilizzate:

- Espansione in serie di Taylor fino al 2° momento
- Espansione in serie di Taylor fino al 3° momento
- Espansione in serie di Taylor fino al 4° momento
- Ottimizzazione diretta sotto l'ipotesi di normalità
- Ottimizzazione diretta sotto l'ipotesi di distribuzione empirica non nota, ma iid (bootstrap)
- Ottimizzazione diretta sotto l'ipotesi di distribuzione empirica non nota, ma id (bootstrap a blocchi)

La nostra attenzione però non è posta sulla composizione di tali portafogli o sulla differenza tra i pesi ottimi, la nostra attenzione è focalizzata sulle performance che si ottengono dall'introduzione di momenti superiori nell'espansione di Taylor. Nei grafici 5.1 e 5.2¹ si possono notare i pesi ottimi ottenuti rispettivamente dalla massimizzazione dell'equazione 2.5, 2.6 e 2.7 con il vincolo di positività dei pesi (α) e con $\lambda = 10$, sia nel caso di funzione di utilità power che esponenziale. Per massimizzare tale funzione siamo ricorsi all'utilizzo di tecniche di ottimizzazione

¹in appendice B sono presenti le tabelle dei pesi ottimi calcolati con le metodologie basate sull'approssimazione della funzione di utilità per mezzo dell'espansione in serie di Taylor fino al 2°, 3° e 4° ordine. Accanto ad ogni peso sono stati riportati i momenti di ogni singolo portafoglio ad ogni istante temporale.

euristica, nello specifico di algoritmi di differential evolution. Inizialmente infatti eravamo ricorsi ai pacchetti di ottimizzazione forniti da Matlab (software applicativo per l'elaborazione dei dati), ma gli algoritmi forniti in dotazione non erano in grado di ottenere delle soluzioni ottime soddisfacenti. Nè gli algoritmi basati sulle derivate numeriche (Newton-Rapson, BFGS, BHHH, DFP,..) nè i più evoluti algoritmi genetici di simulated annealing erano in grado di convergere verso un punto di ottimo. Dopo una moltitudine di prove, l'unico algoritmo in grado di ottenere soluzioni che almeno all'apparenza potessero sembrare ottime è stato appunto quello di differential evolution. I parametri utilizzati² nell'algoritmo sono:

- **numero agenti:** 500
- **numero iterazioni:** 500
- **probabilità di crossover:** 0.8
- **valore minimo della funzione:** 1.e-7
- **strategia:** casuale/bin

Come si può facilmente notare i pesi sono molto estremi in quanto la ricchezza viene investita solo in due hedge fund, Emerging Markets e Equity. L'unica eccezione è nel caso di funzione di utilità esponenziale approssimata fino al momento 4°. In questo caso, infatti, una parte della ricchezza viene investita nel comparto Macro. Sebbene la presenza di pesi limite possa lasciare perplessi, dopo numerose prove modificando il numero di asset considerati e il loro ordine, i pesi tendono sempre e comunque a concentrarsi in questi due titoli, ciò sta a significare che se i pesi ottimi sono così estremi ciò è dovuto ai dati presi in considerazione³.

²alcuni dei parametri sono stati impostati secondo dopo vari tentativi mentre altri sono stati impostati seguendo le direttive dei creatori

³Dei risultati limite, comunque, erano stati ottenuti anche da Jondeau e Rockinger (2004) nel loro lavoro nel caso di dati che deviavano fortemente dall'ipotesi di normalità.

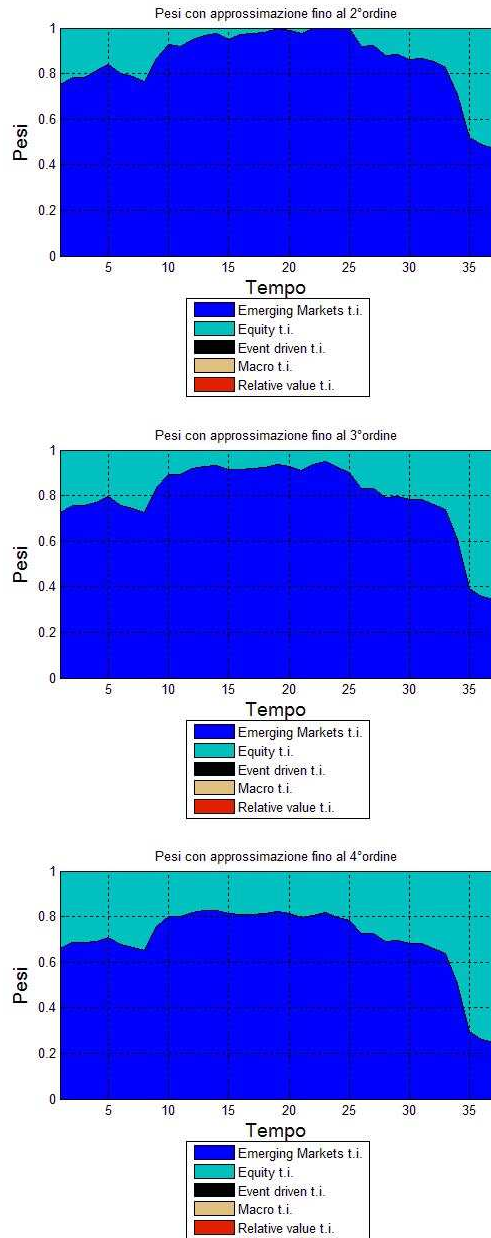


Figura 5.1: Pesì ottimi dell'approssimazioni in serie di Taylor con funzione di utilità power

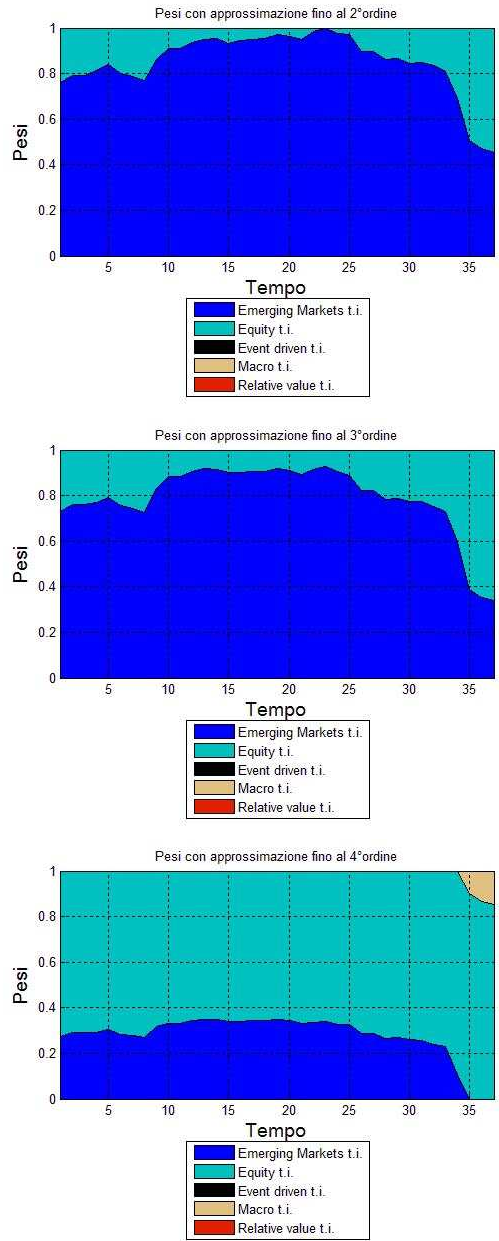


Figura 5.2: Pesi ottimi dell'approssimazioni in serie di Taylor con funzione di utilità esponenziale

Osservando i grafici si può notare come la componente Emerging Markets sia molto alta (superiore al 50%) nel primo periodo, in concomitanza con il periodo di espansione del mercato finanziario. I mercati emergenti in questa fase, infatti, hanno prodotto performance di gran lunga superiori al mercato, mentre nell'ultimo periodo la quota detenuta in Emerging Markets diminuisce fortemente, sia nel caso in cui venga utilizzata la funzione di utilità esponenziale sia con quella power. Quel periodo infatti coincide con il crollo dei mercati azionari di tutto il mondo, e tale crisi si è ripercossa maggiormente nei mercati emergenti rendendoli meno appetibili. Nel periodo di crisi, invece, l'allocazione ottima tende ad investire buona parte della ricchezza nel comparto Equity. Nel caso della funzione di utilità esponenziale approssimata fino al 4° ordine invece notiamo che i pesi degli asset differiscono ampiamente dalle altre allocazioni ottime. Notiamo infatti come la componente Emerging Markets non superi mai il 40% e come nel periodo di crisi tale componente abbia peso nullo e venga rimpiazzata dalla componente Macro. Il titolo preponderante è invece quello del comparto Equity. Osservando le statistiche descrittive presenti in tabella 3.2 si può notare come entrabi le componenti (Equity e Macro) presentino delle curtosi inferiori a quelle delle altre componenti, il che ci fa supporre che nel periodo di crisi l'allocazione ottima tenda a spostarsi verso titoli che presentano meno posizioni estreme⁴.

Nei grafici che seguono, figura 5.3 e 5.4, invece ho riportato i pesi che ottimizzano direttamente la funzione di utilità. Nel caso dell'ottimizzazione diretta i dati sono stati simulati da una normale multivariata di media e matrice di varianza e covarianza pari ai momenti empirici calcolati sulle finestre mobili. La combinazione dei pesi ottenuti in prima fase è stata prodotta con una griglia a 1/30. Nella seconda fase invece ho preso tutti i casi in cui l'utilità media fosse stata superiore al percentile 99,95% della distribuzione data dalle utilità attese precedentemente calcolate, e sui rispettivi pesi, ho riapplicato una griglia all'1% con un limite del

⁴la curtosi infatti è una statistica che da un'indicazione di quanto sono più probabili eventi estremi rispetto ad una distribuzione normale

$\pm 5\%$. La stessa procedura è stata applicata ai campioni di bootstrap semplice e del bootstrap a blocchi.

Anche in questi casi i pesi tendono a essere estremi, fatta eccezione che per il caso dell'ottimizzazione diretta. Il costo computazionale, in termini di tempo impiegato, per il calcolo di questi pesi non mi ha permesso di verificare pienamente la correttezza dei valori stimati, in particolare nel caso dell'ottimizzazione diretta sotto ipotesi di normalità. D'altro canto il framework imposto da questo tipo di ottimizzazioni è fortemente vincolante, oltre che dalle ipotesi sottostanti anche dai vincoli che ho dovuto imporre (discretizzazione dello spazio parametrico e limiti inferiori e superiori dello spazio parametrico) e quindi tali pesi vanno presi con le dovute precauzioni.

Per valutare a posteriori le performance delle varie allocazioni con l'approssimazione in serie di Taylor ho utilizzato alcuni indicatori largamente usati in finanza: l'indice di sharpe, la percentuale di rendimenti negativi e i rendimenti cumulati. L'indice di sharpe misura in generale l'eccesso di rendimento per unità di rischio ed è dato da:

$$I_s = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}$$

dove μ_p rappresenta il rendimento del portafoglio, r_f il rendimento del titolo privo di rischio e σ è lo scarto quadratico medio dei rendimenti del portafoglio: tanto più è alto questo indice I_s tanto il portafoglio viene giudicato positivamente. L'indice di sharpe presuppone che il rischio del portafoglio venga misurato con σ_p , cioè che ci si basi solo sui primi due momenti del portafoglio. Nel nostro caso, non avendo un titolo privo di rischio, abbiamo preferito porre $r_f = 0$. La percentuale dei rendimenti negativi dà invece una misura della probabilità di ottenere un rendimento positivo in altre parole di ottenere un guadagno, mentre i rendimenti cumulati ci permettono di avere un'idea di quale strategia ci avrebbe fatto guadagnare di più.

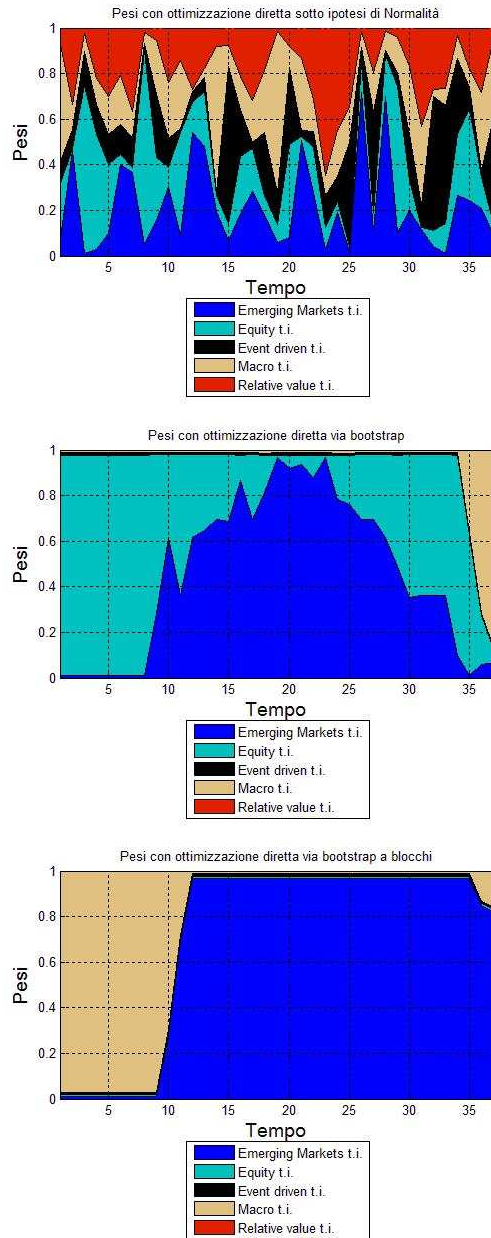


Figura 5.3: Pesì ottimi dell'ottimizzazione diretta con funzione di utilità power

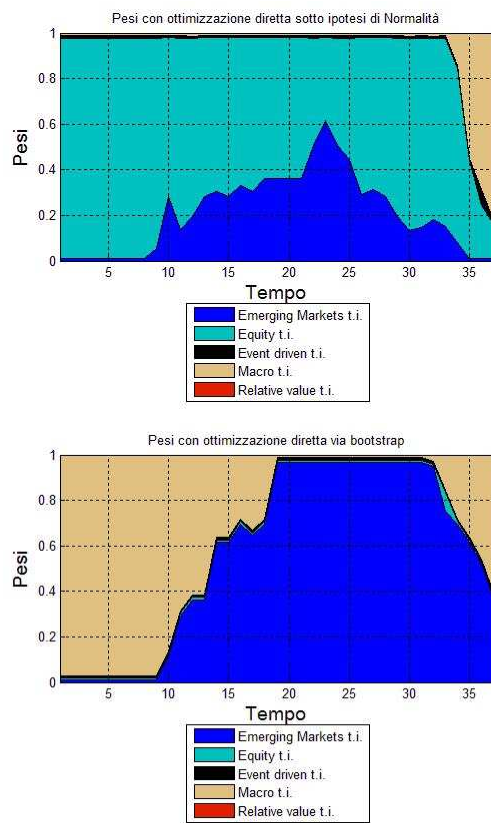


Figura 5.4: Pesì ottimi dell'ottimizzazione diretta con funzione di utilità esponenziale

POWER UTILITY		EXPONENTIAL UTILITY	
Taylor 2°ordine	0.0041 (0.0270)	Taylor 2°ordine	0.0039 (0.0270)
Taylor 3°ordine	0.0074 (0.0270)	Taylor 2°ordine	0.0066 (0.0270)
Taylor 4°ordine	0.0024 (0.0270)	Taylor 2°ordine	-0.0290 (0.0270)

Tabella 5.1: Indici di sharpe, tra parentesi gli standard error

La tabella 5.1 mostra gli indici di sharpe calcolati sui portafogli. Notiamo che la migliore performance è data dal portafoglio ottenuto dalla massimizzazione dell'utilità attesa approssimata fino al 3°ordine, sia nel caso in cui si consideri l'utilità esponenziale che la power, $I_{s_{power}} = 0.0074$ e $I_{s_{espon}} = 0.0066$. Effettuando però dei test di uguaglianza tra i valori stimati abbiamo verificato che tale differenza non risulta essere significativa, non vi è differenza tra gli indici di sharpe ottenuti con le varie approssimazioni.

Di seguito ho riportato i grafici dei rendimenti cumulati ottenuti con l'approssimazione dell'utilità attesa. Il primo rappresenta il grafico dei rendimenti cumulati, utilizzando i pesi calcolati sulla power utility, mentre il secondo è il caso della utilità esponenziale.

I grafici tendono ad essere molto vicini per questo motivo ho riportato anche un tabella con i valori dei rendimenti cumulati.

Osservando direttamente i rendimenti cumulati in tabella C.1 e C.2 possiamo notare come i rendimenti tendano essere in linea tra di loro, nessuna approssimazione tende a dominare le altre. Nonostante ciò notiamo comunque che nel periodo considerato la performance migliore sia data, in entrambe le funzione di utilità, dai pesi ottenuti con l'approssimazione fino al 3°ordine.

La percentuale dei rendimenti cumulati, in tabella 5.2, non dà invece alcuna indicazione utile al confronto delle metodologie di approssimazione. Entrambe presentano un tasso di rendimenti negativi pari al 37.8% circa.

Nessuno dei tre indici ha fornito indicazioni significative al fine di individuare la approssimazione che si comporta meglio in termini di performance realizzate.

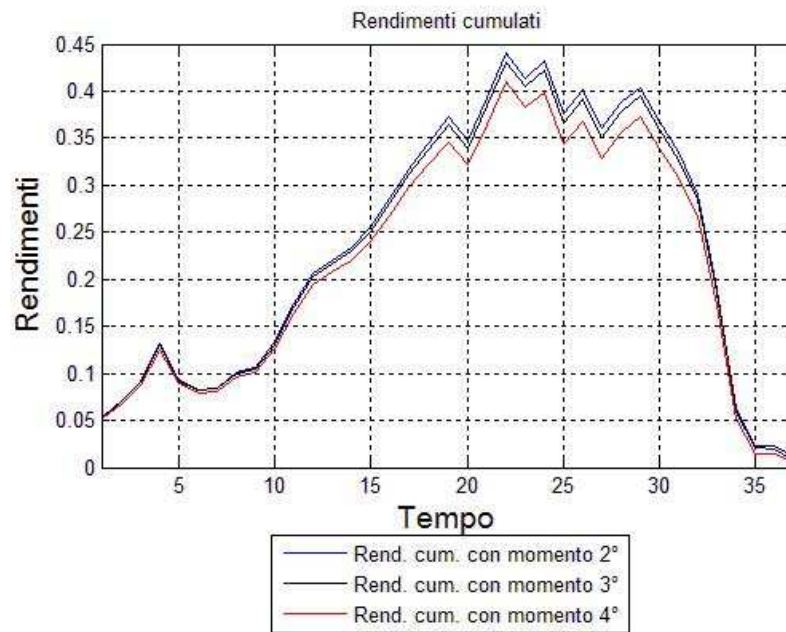


Figura 5.5: Rendimenti cumulati Power Utility

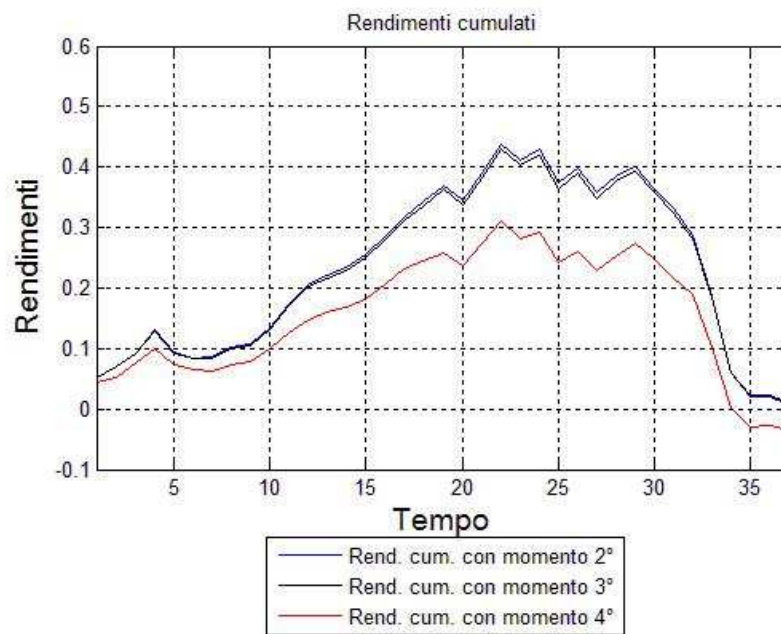


Figura 5.6: Rendimenti cumulati Exponential Utility

POWER UTILITY		EXPONENTIAL UTILITY	
Taylor 2°ordine	37.8%	Taylor 2°ordine	37.8%
Taylor 3°ordine	37.8%	Taylor 3°ordine	37.8%
Taylor 4°ordine	37.8%	Taylor 4°ordine	37.8%

Tabella 5.2: Percentuale di rendimenti negativi

Capitolo 6

Analisi empirica: Stocks

In questa sezione verranno illustrati i risultati ottenuti con il dataset relativo agli stock (DS2), confrontando i risultati ottenuti con le varie metodologie basate sull'approssimazione dell'utilità attesa, fino al 2°, 3° e 4° ordine. La scelta di non presentare i dati ottenuti via ottimizzazione diretta dell'utilità attesa, è stata dettata dalla complessità computazionale del calcolo. Il tempo di elaborazione delle soluzioni, infatti, era eccessivamente elevato.

6.1 Risultati

Nei grafici che seguono verranno mostrati i pesi dei portafogli ottimi ottenuti attraverso le metodologie basate sulla massimizzazione dell'approssimazione dell'utilità attesa:

- Espansione in serie di Taylor fino al 2° momento
- Espansione in serie di Taylor fino al 3° momento
- Espansione in serie di Taylor fino al 4° momento

Analogamente con quanto fatto nel caso dell'analisi empirica relativi agli hedge fund, ci concentreremo sulla valutazione delle performance dei vari portafogli con

le varie approssimazioni in serie di Taylor. Andremo a verificare se le conclusioni tratte nel capitolo precedente sono valide anche nel caso si utilizzi un dataset più ampio e maggiormente realistico. Nei grafici 6.1 e 6.2 si possono notare i pesi ottimi ottenuti rispettivamente dalla massimizzazione dell'equazione 2.5, 2.6 e 2.7 con il vincolo di positività dei pesi (α) e con $\lambda = 10$, sia nel caso di funzione di utilità power che esponenziale.

Come si può facilmente notare i pesi sono molto estremi in quanto la ricchezza viene investita solo in due titoli principali, IBM e KO, e solo una minima quota negli altri asset. Analogamente a quanto successo con DS1, nell'ultimo periodo, che coincide con la crisi dei mercati finanziari, notiamo che il portafoglio ottimo si compone anche del titolo GF di una quota significativa (intorno al 20%). Tale cosa però accade solo nel caso in cui si utilizzano momenti superiori al secondo.

Osservando le statistiche descrittive relative ai titoli in portafoglio notiamo che GE presenta una deviazione standard tendenzialmente tra le più basse ed è l'unico titolo a presentare un'asimmetria positiva, proprio come era successo con il comparto Macro nell'analisi empirica precedente. Mentre il titolo KO risulta essere quello con la curtosi maggiore e l'asimmetria tra le più negative.

La tabella 6.1 mostra gli indici di sharpe calcolati sui portafogli. A differenza dell'analisi empirica effettuata sugli hedge fund, che mostrava una differenza statisticamente non significativa dagli indici calcolati, nel caso degli stock gli indici di sharpe calcolati per l'approssimazione fino al secondo e quarto ordine sono diversi da zero (con $\alpha = 5\%$), sia nel caso dell'utilità esponenziale che della power. Nonostante ciò, un test congiunto di uguaglianza degli indici di sharpe ha mostrato che la loro differenza non è significativamente diversa da zero.

Di seguito ho riportato i grafici dei rendimenti cumulati ottenuti con l'approssimazione dell'utilità attesa. Il primo rappresenta il grafico dei rendimenti cumulati, utilizzando i pesi calcolati sulla power utility, mentre il secondo è il caso della utilità esponenziale.

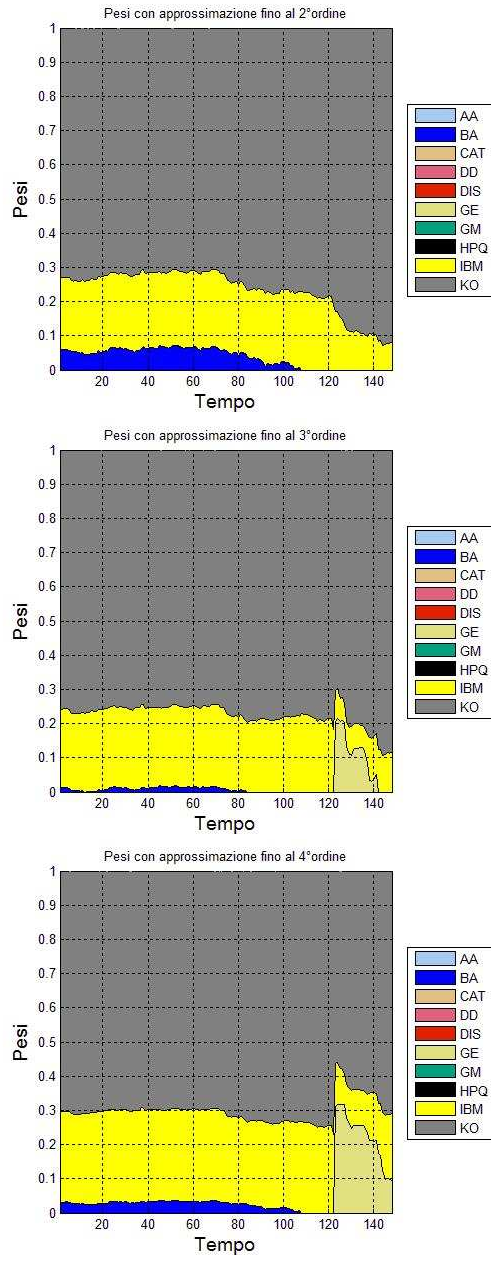


Figura 6.1: Pesi ottimi con funzione di utilità power

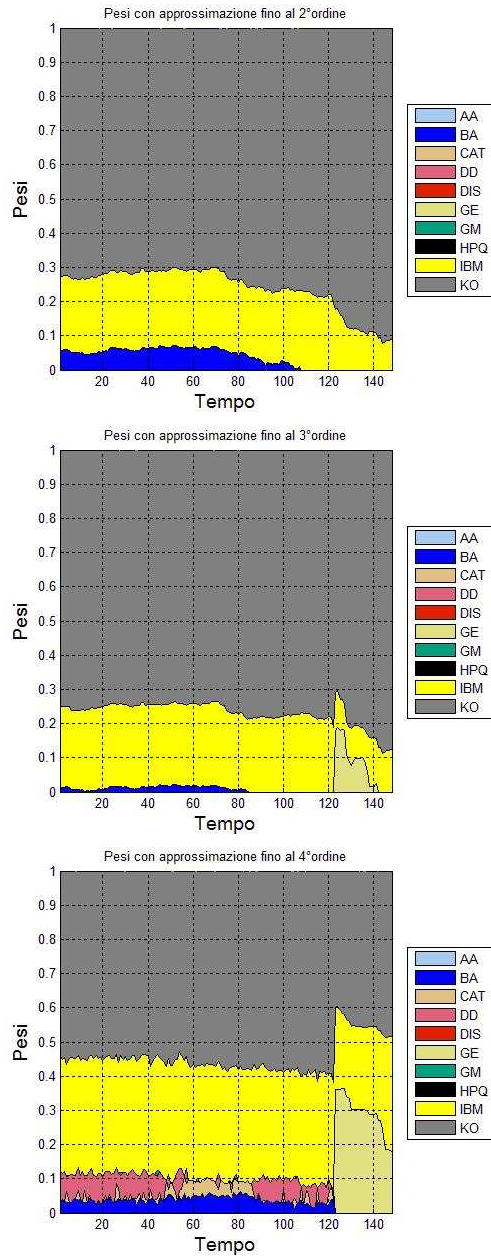


Figura 6.2: Pesi ottimi con funzione di utilità esponenziale

POWER UTILITY		EXPONENTIAL UTILITY	
Taylor 2°ordine	0.0232 (0.0068)	Taylor 2°ordine	0.0236 (0.0068)
Taylor 3°ordine	0.0043 (0.0068)	Taylor 2°ordine	0.0092 (0.0068)
Taylor 4°ordine	-0.0185 (0.0068)	Taylor 2°ordine	-0.0270 (0.0068)

Tabella 6.1: Indici di sharpe, tra parentesi gli standard error

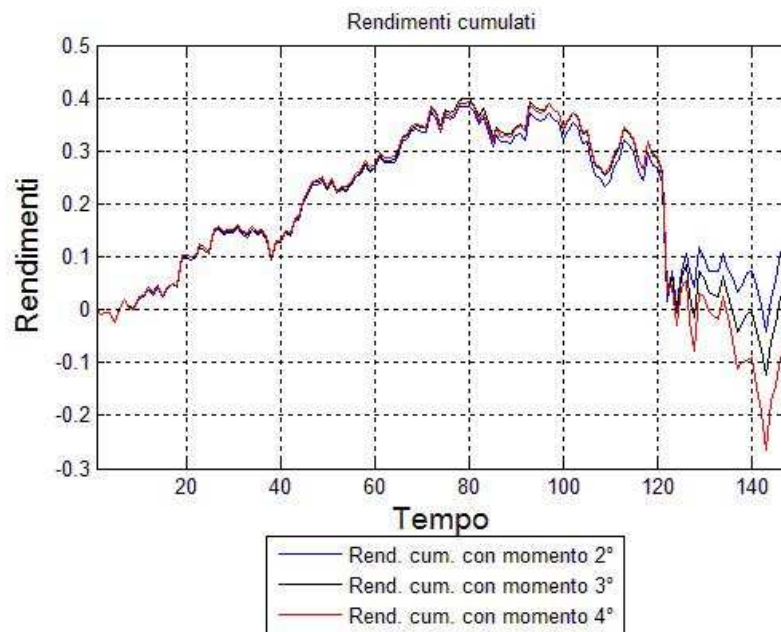


Figura 6.3: Rendimenti cumulati Power Utility

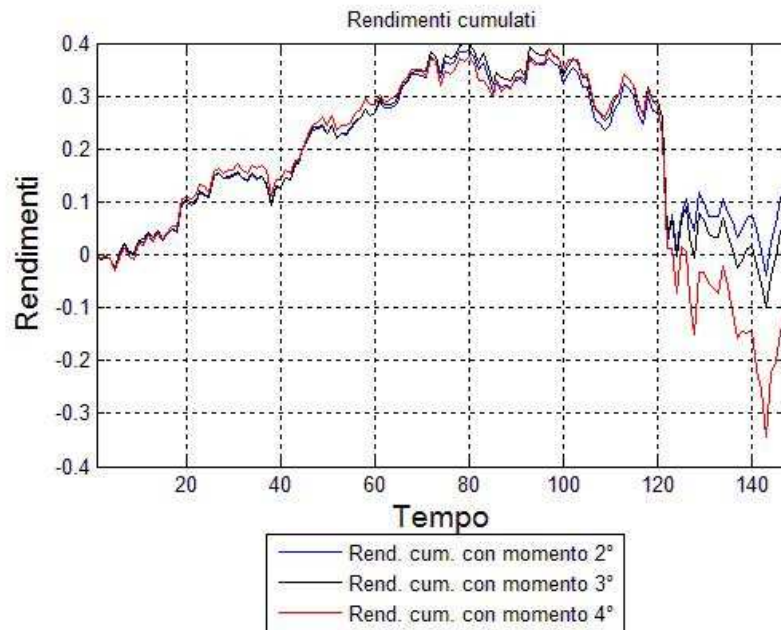


Figura 6.4: Rendimenti cumulati Exponential Utility

POWER UTILITY		EXPONENTIAL UTILITY	
Taylor 2°ordine	46.0%	Taylor 2°ordine	46.6%
Taylor 3°ordine	46.6%	Taylor 3°ordine	47.3%
Taylor 4°ordine	46.6%	Taylor 4°ordine	48.7%

Tabella 6.2: Percentuale di rendimenti negativi

I grafici tendono ad essere molto vicini tra loro. Notiamo che non vi è una strategia che domina sistematicamente le altre, non è possibile perciò affermare che una strategia sia superiore all'altra in termini di rendimenti cumulati. Anzi, nel periodo di crisi notiamo che le approssimazioni che considerano più momenti si comportano peggio.

Osservando la tabella 6.2 che riporta la percentuale dei rendimenti cumulati, notiamo che è in tendenza con gli indici di sharpe, infatti utilizzando l'approssimazione in serie di Taylor si ha meno probabilità di ottenere rendimenti negativi. La differenza nella probabilità di avere rendimenti negativi comunque è non

significativa.

Anche in questo caso, nessuno dei tre indici ha fornito indicazioni empiriche significative al fine di individuare la strategia che si comporta meglio in termini di performance realizzate.

Capitolo 7

Conclusioni

In questo lavoro, ho considerato un generico investitore che massimizza la sua funzione di utilità attesa, al fine di ottenere l'allocazione ottimale. Abbiamo usato l'espansione in serie di Taylor per approssimare la funzione di utilità attesa come funzione di momenti di ordine superiore. Il problema di ottimo è stato poi impostato, seguendo il framework sviluppato da Jondeau e Rockinger (2004), che permette di esplicitare in modo semplice i momenti dei rendimenti del portafoglio in relazione al vettore dei pesi. Diversamente dagli autori del paper, non ci siamo interessati a valutare il miglioramento nella qualità dell'approssimazione, ma abbiamo valutato quale funzione obiettivo producesse, in termini di performance a posteriori, un'allocazione significativamente migliore delle altre.

Per tale scopo abbiamo considerato 2 differenti dataset, entrambi che fossero lontani dall'ipotesi di normalità dei dati. Sebbene le conclusioni del paper a cui ci rifacciamo, abbiano asserito che l'introduzione di momenti di ordine superiore porta ad un miglioramento significativo dell'approssimazione dell'utilità attesa, tanto più se i rendimenti deviano dall'ipotesi di normalità, le evidenze empiriche in nostro possesso mostrano come, in termini di performance, misurata attraverso alcuni indici finanziari, quali l'indice di Sharpe, i rendimenti cumulati e la percentuale di rendimenti cumulati, le varie approssimazioni non siano significativamente diverse

tra loro.

Quindi visti i problemi legati alla numerosità dei parametri e alla complessità nella funzione obiettivo dovuta all'introduzione di momenti di ordine superiore, non si ritiene opportuno complicarsi la vita introducendo momenti di ordine superiore. Il criterio di media e varianza risulta essere un buon compromesso.

Per quanto riguarda i metodi di ottimizzazione, vista la complessità del problema di allocazione ottima dovuta ai vincoli e alla struttura della funzione di stima, un ottimo compromesso tra velocità di convergenza e ottimalità della soluzione è stato quello di differential evolution. Sia gli algoritmi basati sul gradiente e sull'hessiano, sia gli algoritmi genetici hanno mostrato di non essere in grado di produrre soluzioni ottimali, in quanto il vettore ottimo risultava essere sensibile ai parametri iniziali degli algoritmi.

Un'ovvia estensione del mio lavoro potrebbe essere quello di considerare un framework in cui l'allocazione di portafoglio è condizionata. Si dovrebbe quindi stimare un modello per i rendimenti che tenga conto dell'asimmetria e delle code pesanti. Alternativamente si potrebbe procedere considerando una modellazione dei co-momenti diversa da quella proposta, per esempio utilizzando l'approccio sviluppato da Sahu, Dey e Branco (2001) e Bauwens e Laurent (2002).

Bibliografia

- [1] Arditti, F. (1967), 'Risk and the Required Return on Equity', Journal of Finance.
- [2] Athayde, G. M., e R. G. FLORES Jr (2001), ' Finding a Maximum Skewness Portfolio - A General Solution to Three-Moments Portfolio Choice, Working Paper Series.
- [3] Barberis, N. (1999), 'Investing fog Long Run when Return are Predictable', Journal of Finance, Vol. 55, No. 1, February 2000.
- [4] Bauwens, L., e S. Laurent (2002), A New Class of Multivariate Skew Densities,with Application to GARCH Models, CORE Discussion Paper 2002/20.
- [5] Berenyi, Z. (2001), 'Accounting for Illiquidity and Non-Normality of Returns in the Performance Assessment, Working Paper Series.
- [6] Brockett, P. L., e J. R. Garven (1998), A Reexamination of the Relationship Between Preferences and Moment Orderings by Rational Risk Averse Investors, Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, 23(2), 127-137.
- [7] Chamberlain, G. (1983), A Characterization of the Distributions That Imply Mean-Variance Utility Functions, Journal of Economic Theory, 29(1), 185.201.

- [8] Cvitanic J., Polimenis V. e Zapatero F. (2008), 'Optimal portfolio allocation with higher moments', *Annals of Finance*, Volume 4, Numero 1/Gennaio
- [9] Ederington, L. (1986), Mean-Variance as an Approximation to Expected Utility Maximisation, Working Paper 86-5, Washington University.
- [10] Engle, R. F. (1982), Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, 50(4), 987-1007.
- [11] Fama, E. (1963), Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis, *Journal of Business*, 36, 420-429.
- [12] Fama, E. (1965), The Behavior of Stock Market Prices, *Journal of Business*, 38, 34-105.
- [13] Guidolin, M. e Timmermann, A. (2006), 'International Asset Allocation under Regime Switching, Skew and Kurtosis Preference', *Review of Financial Studies*, Volume 21, Numero 2.
- [14] Harvey, Liechty J., Liechty M., Muller (2004), 'Portfolio selection with higher moments', Working Paper Series.
- [15] Harvey, C. e Siddique, A. (2000), 'Conditional Skewness in Asset Pricing Test', *The Journal of Finance*, Volume 55 Numero 3/June.
- [16] Hlawitschka, W. (1994), The Empirical Nature of Taylor Series Approximations to Expected Utility, *American Economic Review*, 84(3), 713-719.
- [17] Jondeau, E. e Rockinger, M. (2004), 'Optimal Portfolio Allocation Under Higher Moments', *European Financial Management*.
- [18] Kenneth Price (1998), 'Differential Evolution: a practical approach to global optimization', Springer, Capitolo 2 e 6.

- [19] Kon, S. (1984), Models of Stock Returns .A Comparison, *Journal of Finance*, 39(1), 147-165.
- [20] Lai, T. Y. (1991), Portfolio Selection with Skewness: A Multiple-Objective Approach, *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 1, 293-305.
- [21] Levy, H., e H. M. Markowitz (1979) Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance, *American Economic Review*, 69, 308-317.
- [22] Lhabitant, F. S. (1998), On the (ab)use of Taylor Series Approximations for Portfolio Selection, *Portfolio Performance and Risk Management*, Working Paper, University of Lausanne.
- [23] Longin, F.M. (1996), The Asymptotic Distribution of Extreme Stock Market Returns, *Journal of Business*, 69(3), 383-408.
- [24] Mandelbrot, B. (1963), The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business*, 35, 394-419.
- [25] Markowitz, H. M. (1952), Portfolio Selection, *Journal of Finance*, 7, 77-91.
- [26] Peiro, A. (1999), Skewness in Financial Returns, *Journal of Banking and Finance*, 23(6), 847-862.
- [27] Prakash, A., C. Chang, and T. Pactwa (2003), Selecting a Portfolio with Skewness: Recent Evidence from US, European, and Latin American Equity Markets, *Journal of Banking and Finance*, 27(7), 1375-1390.
- [28] Pulley, L. B. (1981), A General Mean-Variance Approximation to Expected Utility for Short Holding Period, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 16(3), 361-373.
- [29] Sahu, S. K., D. K. Dey, and M. D. Branco (2001), A New Class of Multivariate Skew Distributions with Applications to Bayesian Regression Models, Working Paper, Department of Statistics, University of São Paulo.

- [30] Scott, R. C., e P. A. Horvath (1980), On the Direction of Preference for Moments of Higher Order than the Variance, *Journal of Finance*, 35(4), 915-919.
- [31] Simaan, Y. (1993), Portfolio Selection and Asset Pricing .Three-Parameter Framework, *Management Science*, 39(5), 568-577.
- [32] Singleton, J. C., e J. Wingender (1986), Skewness Persistence in Common Stock Returns, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21(3), 335-341.
- [33] Sunh, Q., e Y. Yan (2003), Skewness Persistence with Optimal Portfolio Selection, *Journal of Banking and Finance*, 27, 1111-1121.
- [34] Williams J. e Ioannidis C. (), 'Higher Moments, Utility Functions and Asset Allocation', Working Paper Series

Appendice A

Test sugli hedge fund

Sono presenti le tabelle relative alle varie statistiche calcolate un ogni singola finestra mobile di DS1: test di Jarque-Bera, tesi di Lilliefors, tesi di Ljung-Box e il test arch. Sono stati riportati solo i p-value di tali statistiche.

Come è stato accennato nel capitolo 3, per motivi di spazio non ho riportato le tabelle relative ai test calcolati sugli stock.

Jarque-Bera Test					
	Emerging Markets	Equity	Event Driven	Macro	Relative Value
T	P-value				
1	(0.001)	(0.005)	(0.001)	(0.036)	(0.001)
2	(0.001)	(0.004)	(0.001)	(0.038)	(0.001)
3	(0.001)	(0.004)	(0.001)	(0.039)	(0.001)
4	(0.001)	(0.003)	(0.001)	(0.032)	(0.001)
5	(0.001)	(0.003)	(0.001)	(0.036)	(0.001)
6	(0.001)	(0.002)	(0.001)	(0.029)	(0.001)
7	(0.001)	(0.002)	(0.001)	(0.028)	(0.001)
8	(0.001)	(0.003)	(0.001)	(0.022)	(0.001)
9	(0.001)	(0.002)	(0.001)	(0.015)	(0.001)
10	(0.001)	(0.002)	(0.001)	(0.015)	(0.001)
11	(0.001)	(0.002)	(0.001)	(0.014)	(0.001)
12	(0.001)	(0.002)	(0.001)	(0.015)	(0.001)
13	(0.001)	(0.002)	(0.001)	(0.015)	(0.001)
14	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.014)	(0.001)
15	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.011)	(0.001)
16	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.010)	(0.001)
17	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.010)	(0.001)
18	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.010)	(0.001)
19	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.009)	(0.001)
20	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.008)	(0.001)
21	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.009)	(0.001)
22	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.008)	(0.001)
23	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.009)	(0.001)
24	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.009)	(0.001)
25	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.012)	(0.001)
26	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.010)	(0.001)
27	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.014)	(0.001)
28	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.015)	(0.001)
29	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.015)	(0.001)
30	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.017)	(0.001)
31	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.017)	(0.001)
32	(0.001)	(0.002)	(0.001)	(0.021)	(0.001)
33	(0.001)	(0.002)	(0.001)	(0.021)	(0.001)
34	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.020)	(0.001)
35	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.015)	(0.001)
36	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.012)	(0.001)
37	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(0.012)	(0.001)

Tabella A.1: Test di Jarque-Bera sulle finestre mobili di DS1

Lilliefors Test					
	Emerging Markets	Equity	Event Driven	Macro	Relative Value
T	P-value				
1	(0.008)	(0.238)	(0.003)	(0.022)	(0.057)
2	(0.006)	(0.279)	(0.008)	(0.030)	(0.066)
3	(0.006)	(0.336)	(0.007)	(0.034)	(0.055)
4	(0.003)	(0.288)	(0.005)	(0.025)	(0.052)
5	(0.002)	(0.251)	(0.005)	(0.035)	(0.050)
6	(0.002)	(0.278)	(0.008)	(0.032)	(0.037)
7	(0.004)	(0.333)	(0.014)	(0.020)	(0.033)
8	(0.006)	(0.375)	(0.017)	(0.015)	(0.027)
9	(0.008)	(0.345)	(0.034)	(0.009)	(0.019)
10	(0.014)	(0.374)	(0.062)	(0.008)	(0.016)
11	(0.012)	(0.351)	(0.060)	(0.004)	(0.018)
12	(0.009)	(0.297)	(0.035)	(0.009)	(0.019)
13	(0.005)	(0.291)	(0.035)	(0.005)	(0.024)
14	(0.005)	(0.250)	(0.020)	(0.005)	(0.023)
15	(0.002)	(0.231)	(0.023)	(0.005)	(0.020)
16	(0.002)	(0.294)	(0.016)	(0.006)	(0.017)
17	(0.002)	(0.269)	(0.013)	(0.009)	(0.016)
18	(0.002)	(0.170)	(0.012)	(0.016)	(0.019)
19	(0.001)	(0.167)	(0.011)	(0.019)	(0.013)
20	(0.001)	(0.181)	(0.014)	(0.011)	(0.015)
21	(0.001)	(0.221)	(0.017)	(0.017)	(0.020)
22	(0.001)	(0.192)	(0.018)	(0.027)	(0.019)
23	(0.001)	(0.161)	(0.017)	(0.023)	(0.016)
24	(0.001)	(0.159)	(0.009)	(0.029)	(0.023)
25	(0.001)	(0.142)	(0.014)	(0.037)	(0.023)
26	(0.001)	(0.162)	(0.009)	(0.022)	(0.055)
27	(0.001)	(0.186)	(0.015)	(0.027)	(0.074)
28	(0.001)	(0.189)	(0.019)	(0.032)	(0.035)
29	(0.001)	(0.161)	(0.009)	(0.038)	(0.033)
30	(0.001)	(0.142)	(0.010)	(0.044)	(0.031)
31	(0.001)	(0.143)	(0.007)	(0.042)	(0.033)
32	(0.001)	(0.181)	(0.010)	(0.035)	(0.031)
33	(0.001)	(0.183)	(0.008)	(0.035)	(0.051)
34	(0.001)	(0.150)	(0.004)	(0.026)	(0.001)
35	(0.001)	(0.102)	(0.002)	(0.042)	(0.001)
36	(0.001)	(0.085)	(0.001)	(0.029)	(0.001)
37	(0.001)	(0.057)	(0.002)	(0.014)	(0.001)

Tabella A.2: Test di Lilliefors sulle finestre mobili di DS1

Ljung-Box Test					
	Emerging Markets	Equity	Event Driven	Macro	Relative Value
T	P-value				
1	(0.000)	(0.177)	(0.002)	(0.137)	(0.000)
2	(0.000)	(0.120)	(0.000)	(0.128)	(0.000)
3	(0.000)	(0.146)	(0.000)	(0.124)	(0.000)
4	(0.000)	(0.138)	(0.000)	(0.116)	(0.000)
5	(0.000)	(0.103)	(0.000)	(0.113)	(0.000)
6	(0.000)	(0.117)	(0.000)	(0.118)	(0.000)
7	(0.000)	(0.102)	(0.000)	(0.106)	(0.000)
8	(0.000)	(0.084)	(0.000)	(0.069)	(0.000)
9	(0.000)	(0.079)	(0.001)	(0.076)	(0.000)
10	(0.000)	(0.076)	(0.002)	(0.062)	(0.000)
11	(0.000)	(0.081)	(0.002)	(0.066)	(0.000)
12	(0.000)	(0.065)	(0.002)	(0.068)	(0.000)
13	(0.000)	(0.062)	(0.002)	(0.067)	(0.000)
14	(0.000)	(0.104)	(0.002)	(0.053)	(0.000)
15	(0.000)	(0.160)	(0.003)	(0.104)	(0.000)
16	(0.000)	(0.137)	(0.004)	(0.055)	(0.000)
17	(0.000)	(0.134)	(0.004)	(0.046)	(0.000)
18	(0.000)	(0.128)	(0.003)	(0.039)	(0.000)
19	(0.000)	(0.127)	(0.004)	(0.045)	(0.000)
20	(0.000)	(0.129)	(0.003)	(0.057)	(0.000)
21	(0.000)	(0.130)	(0.002)	(0.170)	(0.000)
22	(0.000)	(0.140)	(0.003)	(0.232)	(0.000)
23	(0.000)	(0.140)	(0.002)	(0.209)	(0.000)
24	(0.000)	(0.146)	(0.005)	(0.226)	(0.000)
25	(0.000)	(0.152)	(0.004)	(0.247)	(0.000)
26	(0.000)	(0.131)	(0.003)	(0.255)	(0.000)
27	(0.000)	(0.123)	(0.002)	(0.256)	(0.000)
28	(0.000)	(0.104)	(0.002)	(0.295)	(0.000)
29	(0.000)	(0.122)	(0.002)	(0.282)	(0.000)
30	(0.000)	(0.128)	(0.002)	(0.252)	(0.000)
31	(0.000)	(0.145)	(0.002)	(0.249)	(0.000)
32	(0.000)	(0.118)	(0.002)	(0.243)	(0.000)
33	(0.000)	(0.071)	(0.001)	(0.176)	(0.000)
34	(0.000)	(0.031)	(0.001)	(0.177)	(0.000)
35	(0.000)	(0.002)	(0.000)	(0.245)	(0.000)
36	(0.000)	(0.000)	(0.000)	(0.263)	(0.000)
37	(0.000)	(0.000)	(0.000)	(0.265)	(0.000)

Tabella A.3: Test di Ljung-Box sulle finestre mobili di DS1

Arch Test					
	Emerging Markets	Equity	Event Driven	Macro	Relative Value
T	P-value				
1	(0.985)	(0.000)	(0.955)	(0.583)	(0.971)
2	(0.985)	(0.000)	(0.928)	(0.578)	(0.971)
3	(0.985)	(0.000)	(0.931)	(0.577)	(0.971)
4	(0.985)	(0.000)	(0.933)	(0.570)	(0.971)
5	(0.985)	(0.000)	(0.933)	(0.568)	(0.971)
6	(0.985)	(0.000)	(0.933)	(0.563)	(0.971)
7	(0.988)	(0.000)	(0.938)	(0.557)	(0.971)
8	(0.988)	(0.000)	(0.939)	(0.550)	(0.971)
9	(0.989)	(0.000)	(0.942)	(0.545)	(0.971)
10	(0.990)	(0.000)	(0.942)	(0.544)	(0.971)
11	(0.990)	(0.000)	(0.942)	(0.543)	(0.971)
12	(0.990)	(0.000)	(0.942)	(0.544)	(0.972)
13	(0.990)	(0.000)	(0.946)	(0.477)	(0.974)
14	(0.990)	(0.000)	(0.946)	(0.497)	(0.974)
15	(0.991)	(0.000)	(0.946)	(0.446)	(0.975)
16	(0.991)	(0.000)	(0.947)	(0.366)	(0.976)
17	(0.991)	(0.000)	(0.947)	(0.365)	(0.976)
18	(0.991)	(0.000)	(0.947)	(0.365)	(0.976)
19	(0.991)	(0.000)	(0.947)	(0.304)	(0.976)
20	(0.991)	(0.000)	(0.948)	(0.255)	(0.976)
21	(0.991)	(0.000)	(0.948)	(0.215)	(0.976)
22	(0.991)	(0.000)	(0.948)	(0.189)	(0.976)
23	(0.993)	(0.000)	(0.948)	(0.108)	(0.976)
24	(0.992)	(0.000)	(0.950)	(0.109)	(0.972)
25	(0.993)	(0.000)	(0.952)	(0.048)	(0.981)
26	(0.994)	(0.000)	(0.953)	(0.048)	(0.989)
27	(0.994)	(0.000)	(0.952)	(0.049)	(0.989)
28	(0.993)	(0.000)	(0.952)	(0.023)	(0.989)
29	(0.993)	(0.000)	(0.952)	(0.024)	(0.989)
30	(0.993)	(0.000)	(0.952)	(0.010)	(0.989)
31	(0.993)	(0.000)	(0.952)	(0.010)	(0.989)
32	(0.993)	(0.000)	(0.952)	(0.010)	(0.990)
33	(0.993)	(0.000)	(0.952)	(0.009)	(0.990)
34	(0.992)	(0.000)	(0.940)	(0.009)	(0.973)
35	(0.993)	(0.000)	(0.433)	(0.008)	(0.000)
36	(0.994)	(0.000)	(0.506)	(0.008)	(0.000)
37	(0.990)	(0.000)	(0.500)	(0.007)	(0.002)

Tabella A.4: Test di Eteroschedasticità sulle finestre mobili di DS1

Appendice B

Pesi ottimi

Sono presenti i pesi ottimi calcolati con le metodologie basate sull'approssimazione della funzione di utilità per mezzo dell'espansione in serie di Taylor fino al 2°, 3° e 4° ordine. Accanto ad ogni peso sono stati riportati i momenti di ogni singolo portafoglio ad ogni istante temporale.

Analoga cosa è stata fatta per i pesi dei portafogli ottenuti via ottimizzazione diretta della funzione di utilità attesa.

T	Pesi del Portafoglio					Momenti del Portafoglio			
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	μ_P	σ_P^2	s_P^3	k_P^4
1	0.7508	0.2492	0.000	0.000	0.000	0.0132	0.0370	-0.9705	6.8864
2	0.7809	0.2191	0.000	0.000	0.000	0.0136	0.0377	-0.9761	6.8993
3	0.7843	0.2157	0.000	0.000	0.000	0.0136	0.0377	-0.9766	6.9005
4	0.8119	0.1881	0.000	0.000	0.000	0.0136	0.0383	-0.9809	6.9097
5	0.8416	0.1584	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0389	-0.9848	6.9172
6	0.8005	0.1995	0.000	0.000	0.000	0.0133	0.0381	-0.9792	6.9062
7	0.7887	0.2113	0.000	0.000	0.000	0.0132	0.0378	-0.9773	6.9021
8	0.7666	0.2334	0.000	0.000	0.000	0.0129	0.0374	-0.9735	6.8935
9	0.8660	0.1340	0.000	0.000	0.000	0.0135	0.0395	-0.9876	6.9217
10	0.9255	0.0745	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0408	-0.9927	6.9272
11	0.9205	0.0795	0.000	0.000	0.000	0.0138	0.0407	-0.9924	6.9271
12	0.9511	0.0489	0.000	0.000	0.000	0.0142	0.0413	-0.9943	6.9274
13	0.9684	0.0316	0.000	0.000	0.000	0.0143	0.0417	-0.9952	6.9269
14	0.9738	0.0262	0.000	0.000	0.000	0.0143	0.0418	-0.9955	6.9266
15	0.9500	0.0500	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0413	-0.9943	6.9274
16	0.9704	0.0296	0.000	0.000	0.000	0.0138	0.0418	-0.9953	6.9268
17	0.9755	0.0245	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0419	-0.9956	6.9265
18	0.9817	0.0183	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0420	-0.9958	6.9262
19	1.0000	0.0000	0.000	0.000	0.000	0.0142	0.0424	-0.9965	6.9247
20	0.9896	0.0104	0.000	0.000	0.000	0.0140	0.0422	-0.9961	6.9256
21	0.9766	0.0234	0.000	0.000	0.000	0.0138	0.0419	-0.9956	6.9265
22	1.0000	0.0000	0.000	0.000	0.000	0.0141	0.0424	-0.9965	6.9247
23	1.0000	0.0000	0.000	0.000	0.000	0.0143	0.0424	-0.9965	6.9247
24	1.0000	0.0000	0.000	0.000	0.000	0.0141	0.0424	-0.9965	6.9247
25	1.0000	0.0000	0.000	0.000	0.000	0.0135	0.0424	-0.9965	6.9247
26	0.9196	0.0804	0.000	0.000	0.000	0.0128	0.0406	-0.9923	6.9270
27	0.9219	0.0781	0.000	0.000	0.000	0.0127	0.0407	-0.9925	6.9271
28	0.8792	0.1208	0.000	0.000	0.000	0.0123	0.0397	-0.9889	6.9236
29	0.8839	0.1161	0.000	0.000	0.000	0.0124	0.0398	-0.9893	6.9242
30	0.8597	0.1403	0.000	0.000	0.000	0.0123	0.0393	-0.9869	6.9207
31	0.8662	0.1338	0.000	0.000	0.000	0.0123	0.0395	-0.9876	6.9218
32	0.8534	0.1466	0.000	0.000	0.000	0.0121	0.0392	-0.9862	6.9196
33	0.8284	0.1716	0.000	0.000	0.000	0.0119	0.0387	-0.9832	6.9141
34	0.7069	0.2931	0.000	0.000	0.000	0.0112	0.0362	-0.9608	6.8625
35	0.5214	0.4786	0.000	0.000	0.000	0.0103	0.0327	-0.8917	6.6773
36	0.4887	0.5113	0.000	0.000	0.000	0.0100	0.0322	-0.8734	6.6282
37	0.4723	0.5277	0.000	0.000	0.000	0.0098	0.0319	-0.8634	6.6016

Tabella B.1: Allocazione ottima con espansione fino al 2° ordine nel caso della power utility

T	Pesi del Portafoglio					Momenti del Portafoglio			
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	μ_P	σ_P^2	s_P^3	k_P^4
1	0.7273	0.2727	0.000	0.000	0.000	0.0133	0.0366	-0.9656	6.8744
2	0.7576	0.2424	0.000	0.000	0.000	0.0136	0.0372	-0.9718	6.8896
3	0.7584	0.2416	0.000	0.000	0.000	0.0136	0.0372	-0.9720	6.8899
4	0.7719	0.2281	0.000	0.000	0.000	0.0136	0.0375	-0.9745	6.8957
5	0.7949	0.2051	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0380	-0.9783	6.9043
6	0.7564	0.2436	0.000	0.000	0.000	0.0133	0.0372	-0.9716	6.8890
7	0.7450	0.2550	0.000	0.000	0.000	0.0132	0.0369	-0.9694	6.8836
8	0.7275	0.2725	0.000	0.000	0.000	0.0129	0.0366	-0.9656	6.8746
9	0.8370	0.1630	0.000	0.000	0.000	0.0135	0.0388	-0.9843	6.9162
10	0.8936	0.1064	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0401	-0.9902	6.9252
11	0.8909	0.1091	0.000	0.000	0.000	0.0138	0.0400	-0.9900	6.9250
12	0.9167	0.0833	0.000	0.000	0.000	0.0141	0.0406	-0.9921	6.9269
13	0.9292	0.0708	0.000	0.000	0.000	0.0143	0.0408	-0.9930	6.9273
14	0.9303	0.0697	0.000	0.000	0.000	0.0142	0.0409	-0.9930	6.9274
15	0.9128	0.0872	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0405	-0.9918	6.9267
16	0.9152	0.0848	0.000	0.000	0.000	0.0138	0.0405	-0.9920	6.9268
17	0.9188	0.0812	0.000	0.000	0.000	0.0138	0.0406	-0.9922	6.9270
18	0.9224	0.0776	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0407	-0.9925	6.9271
19	0.9382	0.0618	0.000	0.000	0.000	0.0141	0.0410	-0.9935	6.9275
20	0.9276	0.0724	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0408	-0.9929	6.9273
21	0.9093	0.0907	0.000	0.000	0.000	0.0137	0.0404	-0.9915	6.9265
22	0.9352	0.0648	0.000	0.000	0.000	0.0140	0.0410	-0.9934	6.9275
23	0.9497	0.0503	0.000	0.000	0.000	0.0142	0.0413	-0.9942	6.9275
24	0.9239	0.0761	0.000	0.000	0.000	0.0140	0.0407	-0.9926	6.9272
25	0.9019	0.0981	0.000	0.000	0.000	0.0134	0.0402	-0.9909	6.9259
26	0.8330	0.1670	0.000	0.000	0.000	0.0127	0.0388	-0.9838	6.9153
27	0.8326	0.1674	0.000	0.000	0.000	0.0126	0.0387	-0.9837	6.9152
28	0.7934	0.2066	0.000	0.000	0.000	0.0123	0.0379	-0.9781	6.9038
29	0.7970	0.2030	0.000	0.000	0.000	0.0124	0.0380	-0.9787	6.9050
30	0.7824	0.2176	0.000	0.000	0.000	0.0122	0.0377	-0.9763	6.8998
31	0.7825	0.2175	0.000	0.000	0.000	0.0122	0.0377	-0.9763	6.8999
32	0.7628	0.2372	0.000	0.000	0.000	0.0120	0.0373	-0.9728	6.8919
33	0.7398	0.2602	0.000	0.000	0.000	0.0119	0.0368	-0.9683	6.8810
34	0.6054	0.3946	0.000	0.000	0.000	0.0111	0.0342	-0.9295	6.7796
35	0.3928	0.6072	0.000	0.000	0.000	0.0103	0.0307	-0.8063	6.4529
36	0.3579	0.6421	0.000	0.000	0.000	0.0099	0.0302	-0.7763	6.3773
37	0.3438	0.6562	0.000	0.000	0.000	0.0098	0.0300	-0.7633	6.3451

Tabella B.2: Allocazione ottima con espansione fino al 3° ordine nel caso della power utility

T	Pesi del Portafoglio					Momenti del Portafoglio			
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	μ_P	σ_P^2	s_P^3	k_P^4
1	0.6607	0.3393	0.000	0.000	0.000	0.0133	0.0353	-0.9483	6.8298
2	0.6881	0.3119	0.000	0.000	0.000	0.0136	0.0358	-0.9560	6.8502
3	0.6871	0.3129	0.000	0.000	0.000	0.0136	0.0358	-0.9558	6.8495
4	0.6920	0.3080	0.000	0.000	0.000	0.0136	0.0359	-0.9571	6.8529
5	0.7105	0.2895	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0362	-0.9617	6.8647
6	0.6766	0.3234	0.000	0.000	0.000	0.0133	0.0356	-0.9529	6.8420
7	0.6658	0.3342	0.000	0.000	0.000	0.0132	0.0354	-0.9498	6.8339
8	0.6513	0.3487	0.000	0.000	0.000	0.0129	0.0351	-0.9454	6.8222
9	0.7564	0.2436	0.000	0.000	0.000	0.0135	0.0372	-0.9716	6.8890
10	0.7996	0.2004	0.000	0.000	0.000	0.0138	0.0380	-0.9791	6.9059
11	0.7990	0.2010	0.000	0.000	0.000	0.0137	0.0380	-0.9790	6.9057
12	0.8199	0.1801	0.000	0.000	0.000	0.0141	0.0385	-0.9820	6.9119
13	0.8282	0.1718	0.000	0.000	0.000	0.0142	0.0387	-0.9832	6.9141
14	0.8266	0.1734	0.000	0.000	0.000	0.0141	0.0386	-0.9829	6.9137
15	0.8124	0.1876	0.000	0.000	0.000	0.0138	0.0383	-0.9810	6.9098
16	0.8076	0.1924	0.000	0.000	0.000	0.0136	0.0382	-0.9803	6.9084
17	0.8110	0.1890	0.000	0.000	0.000	0.0137	0.0383	-0.9808	6.9094
18	0.8130	0.1870	0.000	0.000	0.000	0.0137	0.0383	-0.9811	6.9100
19	0.8237	0.1763	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0386	-0.9825	6.9129
20	0.8154	0.1846	0.000	0.000	0.000	0.0138	0.0384	-0.9814	6.9107
21	0.7949	0.2051	0.000	0.000	0.000	0.0136	0.0380	-0.9783	6.9043
22	0.8070	0.1930	0.000	0.000	0.000	0.0138	0.0382	-0.9802	6.9082
23	0.8172	0.1828	0.000	0.000	0.000	0.0140	0.0384	-0.9817	6.9112
24	0.7954	0.2046	0.000	0.000	0.000	0.0137	0.0380	-0.9784	6.9045
25	0.7843	0.2157	0.000	0.000	0.000	0.0133	0.0377	-0.9766	6.9005
26	0.7259	0.2741	0.000	0.000	0.000	0.0126	0.0365	-0.9653	6.8736
27	0.7248	0.2752	0.000	0.000	0.000	0.0125	0.0365	-0.9650	6.8730
28	0.6906	0.3094	0.000	0.000	0.000	0.0122	0.0358	-0.9567	6.8519
29	0.6938	0.3062	0.000	0.000	0.000	0.0123	0.0359	-0.9575	6.8540
30	0.6836	0.3164	0.000	0.000	0.000	0.0122	0.0357	-0.9548	6.8470
31	0.6802	0.3198	0.000	0.000	0.000	0.0122	0.0356	-0.9539	6.8446
32	0.6582	0.3418	0.000	0.000	0.000	0.0119	0.0352	-0.9475	6.8278
33	0.6386	0.3614	0.000	0.000	0.000	0.0118	0.0348	-0.9413	6.8113
34	0.5071	0.4929	0.000	0.000	0.000	0.0111	0.0325	-0.8840	6.6565
35	0.2953	0.7047	0.000	0.000	0.000	0.0103	0.0293	-0.7142	6.2270
36	0.2614	0.7386	0.000	0.000	0.000	0.0099	0.0289	-0.6759	6.1384
37	0.2485	0.7515	0.000	0.000	0.000	0.0097	0.0288	-0.6605	6.1035

Tabella B.3: Allocazione ottima con espansione fino al 4° ordine nel caso della power utility

T	Pesi del Portafoglio					Momenti del Portafoglio			
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	μ_P	σ_P^2	s_P^3	k_P^4
1	0.7588	0.2412	0.000	0.000	0.000	0.0132	0.0372	-0.9721	6.8901
2	0.7913	0.2087	0.000	0.000	0.000	0.0136	0.0379	-0.9778	6.9031
3	0.7912	0.2088	0.000	0.000	0.000	0.0135	0.0379	-0.9778	6.9030
4	0.8139	0.1861	0.000	0.000	0.000	0.0136	0.0383	-0.9812	6.9103
5	0.8403	0.1597	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0389	-0.9847	6.9169
6	0.8006	0.1994	0.000	0.000	0.000	0.0133	0.0381	-0.9792	6.9062
7	0.7880	0.2120	0.000	0.000	0.000	0.0132	0.0378	-0.9772	6.9019
8	0.7684	0.2316	0.000	0.000	0.000	0.0129	0.0374	-0.9739	6.8943
9	0.8602	0.1398	0.000	0.000	0.000	0.0135	0.0393	-0.9870	6.9208
10	0.9098	0.0902	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0404	-0.9916	6.9265
11	0.9088	0.0912	0.000	0.000	0.000	0.0138	0.0404	-0.9915	6.9264
12	0.9371	0.0629	0.000	0.000	0.000	0.0142	0.0410	-0.9935	6.9275
13	0.9506	0.0494	0.000	0.000	0.000	0.0143	0.0413	-0.9943	6.9274
14	0.9525	0.0475	0.000	0.000	0.000	0.0143	0.0414	-0.9944	6.9274
15	0.9316	0.0684	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0409	-0.9931	6.9274
16	0.9464	0.0536	0.000	0.000	0.000	0.0138	0.0412	-0.9940	6.9275
17	0.9517	0.0483	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0413	-0.9944	6.9274
18	0.9558	0.0442	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0414	-0.9946	6.9273
19	0.9725	0.0275	0.000	0.000	0.000	0.0141	0.0418	-0.9954	6.9267
20	0.9610	0.0390	0.000	0.000	0.000	0.0140	0.0416	-0.9949	6.9272
21	0.9474	0.0526	0.000	0.000	0.000	0.0138	0.0412	-0.9941	6.9275
22	0.9839	0.0161	0.000	0.000	0.000	0.0141	0.0421	-0.9959	6.9260
23	1.0000	0.0000	0.000	0.000	0.000	0.0143	0.0424	-0.9965	6.9247
24	0.9779	0.0221	0.000	0.000	0.000	0.0141	0.0419	-0.9957	6.9264
25	0.9718	0.0282	0.000	0.000	0.000	0.0135	0.0418	-0.9954	6.9267
26	0.8974	0.1026	0.000	0.000	0.000	0.0127	0.0401	-0.9905	6.9256
27	0.8985	0.1015	0.000	0.000	0.000	0.0127	0.0402	-0.9906	6.9257
28	0.8604	0.1396	0.000	0.000	0.000	0.0123	0.0393	-0.9870	6.9208
29	0.8657	0.1343	0.000	0.000	0.000	0.0124	0.0395	-0.9876	6.9217
30	0.8460	0.1540	0.000	0.000	0.000	0.0123	0.0390	-0.9854	6.9181
31	0.8506	0.1494	0.000	0.000	0.000	0.0123	0.0391	-0.9859	6.9190
32	0.8344	0.1656	0.000	0.000	0.000	0.0121	0.0388	-0.9839	6.9156
33	0.8108	0.1892	0.000	0.000	0.000	0.0119	0.0383	-0.9807	6.9094
34	0.6906	0.3094	0.000	0.000	0.000	0.0112	0.0358	-0.9567	6.8519
35	0.5074	0.4926	0.000	0.000	0.000	0.0103	0.0325	-0.8842	6.6570
36	0.4724	0.5276	0.000	0.000	0.000	0.0100	0.0319	-0.8635	6.6018
37	0.4559	0.5441	0.000	0.000	0.000	0.0098	0.0316	-0.8529	6.5737

Tabella B.4: Allocazione ottima con espansione fino al 2° ordine nel caso dell'utilità esponenziale

T	Pesi del Portafoglio					Momenti del Portafoglio			
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	μ_P	σ_P^2	s_P^3	k_P^4
1	0.7298	0.2702	0.000	0.000	0.000	0.0132	0.0366	-0.9661	6.8758
2	0.7612	0.2388	0.000	0.000	0.000	0.0136	0.0373	-0.9725	6.8912
3	0.7601	0.2399	0.000	0.000	0.000	0.0136	0.0372	-0.9723	6.8907
4	0.7712	0.2288	0.000	0.000	0.000	0.0136	0.0375	-0.9744	6.8955
5	0.7925	0.2075	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0379	-0.9780	6.9035
6	0.7549	0.2451	0.000	0.000	0.000	0.0133	0.0371	-0.9713	6.8884
7	0.7432	0.2568	0.000	0.000	0.000	0.0132	0.0369	-0.9690	6.8827
8	0.7270	0.2730	0.000	0.000	0.000	0.0129	0.0366	-0.9655	6.8743
9	0.8316	0.1684	0.000	0.000	0.000	0.0135	0.0387	-0.9836	6.9149
10	0.8822	0.1178	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0398	-0.9892	6.9240
11	0.8818	0.1182	0.000	0.000	0.000	0.0138	0.0398	-0.9892	6.9239
12	0.9064	0.0936	0.000	0.000	0.000	0.0141	0.0403	-0.9913	6.9263
13	0.9170	0.0830	0.000	0.000	0.000	0.0143	0.0406	-0.9921	6.9269
14	0.9164	0.0836	0.000	0.000	0.000	0.0142	0.0406	-0.9921	6.9269
15	0.9005	0.0995	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0402	-0.9908	6.9258
16	0.9007	0.0993	0.000	0.000	0.000	0.0137	0.0402	-0.9908	6.9258
17	0.9045	0.0955	0.000	0.000	0.000	0.0138	0.0403	-0.9911	6.9261
18	0.9071	0.0929	0.000	0.000	0.000	0.0138	0.0404	-0.9913	6.9263
19	0.9207	0.0793	0.000	0.000	0.000	0.0140	0.0407	-0.9924	6.9271
20	0.9110	0.0890	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0404	-0.9917	6.9266
21	0.8925	0.1075	0.000	0.000	0.000	0.0137	0.0400	-0.9901	6.9251
22	0.9153	0.0847	0.000	0.000	0.000	0.0140	0.0405	-0.9920	6.9268
23	0.9283	0.0717	0.000	0.000	0.000	0.0142	0.0408	-0.9929	6.9273
24	0.9041	0.0959	0.000	0.000	0.000	0.0139	0.0403	-0.9911	6.9261
25	0.8873	0.1127	0.000	0.000	0.000	0.0134	0.0399	-0.9897	6.9246
26	0.8219	0.1781	0.000	0.000	0.000	0.0127	0.0385	-0.9823	6.9125
27	0.8211	0.1789	0.000	0.000	0.000	0.0126	0.0385	-0.9822	6.9123
28	0.7839	0.2161	0.000	0.000	0.000	0.0123	0.0377	-0.9766	6.9004
29	0.7878	0.2122	0.000	0.000	0.000	0.0123	0.0378	-0.9772	6.9018
30	0.7750	0.2250	0.000	0.000	0.000	0.0122	0.0375	-0.9750	6.8970
31	0.7744	0.2256	0.000	0.000	0.000	0.0122	0.0375	-0.9749	6.8967
32	0.7532	0.2468	0.000	0.000	0.000	0.0120	0.0371	-0.9710	6.8876
33	0.7309	0.2691	0.000	0.000	0.000	0.0119	0.0366	-0.9664	6.8764
34	0.5979	0.4021	0.000	0.000	0.000	0.0111	0.0341	-0.9266	6.7718
35	0.3887	0.6113	0.000	0.000	0.000	0.0103	0.0306	-0.8030	6.4443
36	0.3528	0.6472	0.000	0.000	0.000	0.0099	0.0301	-0.7717	6.3659
37	0.3387	0.6613	0.000	0.000	0.000	0.0098	0.0299	-0.7584	6.3332

Tabella B.5: Allocazione ottima con espansione fino al 3° ordine nel caso dell'utilità esponenziale

T	Pesi del Portafoglio					Momenti del Portafoglio			
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	μ_P	σ_P^2	s_P^3	k_P^4
1	0.2747	0.7253	0.000	0.0000	0.000	0.0135	0.0291	-0.6914	6.1738
2	0.2927	0.7073	0.000	0.0000	0.000	0.0138	0.0293	-0.7114	6.2204
3	0.2918	0.7082	0.000	0.0000	0.000	0.0137	0.0293	-0.7104	6.2180
4	0.2928	0.7072	0.000	0.0000	0.000	0.0136	0.0293	-0.7115	6.2206
5	0.3032	0.6968	0.000	0.0000	0.000	0.0138	0.0294	-0.7227	6.2470
6	0.2849	0.7151	0.000	0.0000	0.000	0.0134	0.0292	-0.7029	6.2004
7	0.2785	0.7215	0.000	0.0000	0.000	0.0132	0.0291	-0.6956	6.1836
8	0.2693	0.7307	0.000	0.0000	0.000	0.0130	0.0290	-0.6852	6.1595
9	0.3188	0.6812	0.000	0.0000	0.000	0.0134	0.0296	-0.7388	6.2856
10	0.3333	0.6667	0.000	0.0000	0.000	0.0134	0.0298	-0.7532	6.3204
11	0.3327	0.6673	0.000	0.0000	0.000	0.0134	0.0298	-0.7526	6.3189
12	0.3446	0.6554	0.000	0.0000	0.000	0.0137	0.0300	-0.7641	6.3470
13	0.3489	0.6511	0.000	0.0000	0.000	0.0138	0.0300	-0.7680	6.3568
14	0.3478	0.6522	0.000	0.0000	0.000	0.0136	0.0300	-0.7670	6.3542
15	0.3415	0.6585	0.000	0.0000	0.000	0.0133	0.0299	-0.7611	6.3397
16	0.3404	0.6596	0.000	0.0000	0.000	0.0131	0.0299	-0.7601	6.3373
17	0.3423	0.6577	0.000	0.0000	0.000	0.0132	0.0300	-0.7619	6.3417
18	0.3435	0.6565	0.000	0.0000	0.000	0.0131	0.0300	-0.7630	6.3443
19	0.3485	0.6515	0.000	0.0000	0.000	0.0132	0.0300	-0.7677	6.3560
20	0.3435	0.6565	0.000	0.0000	0.000	0.0131	0.0300	-0.7630	6.3443
21	0.3310	0.6690	0.000	0.0000	0.000	0.0129	0.0298	-0.7509	6.3149
22	0.3354	0.6646	0.000	0.0000	0.000	0.0130	0.0299	-0.7552	6.3253
23	0.3408	0.6592	0.000	0.0000	0.000	0.0131	0.0299	-0.7604	6.3380
24	0.3273	0.6727	0.000	0.0000	0.000	0.0130	0.0298	-0.7474	6.3062
25	0.3262	0.6738	0.000	0.0000	0.000	0.0126	0.0297	-0.7462	6.3035
26	0.2878	0.7122	0.000	0.0000	0.000	0.0121	0.0292	-0.7060	6.2077
27	0.2871	0.7129	0.000	0.0000	0.000	0.0120	0.0292	-0.7052	6.2059
28	0.2658	0.7342	0.000	0.0000	0.000	0.0118	0.0290	-0.6811	6.1503
29	0.2677	0.7323	0.000	0.0000	0.000	0.0119	0.0290	-0.6833	6.1553
30	0.2616	0.7384	0.000	0.0000	0.000	0.0120	0.0289	-0.6762	6.1390
31	0.2571	0.7429	0.000	0.0000	0.000	0.0119	0.0289	-0.6708	6.1268
32	0.2410	0.7590	0.000	0.0000	0.000	0.0116	0.0287	-0.6512	6.0829
33	0.2298	0.7702	0.000	0.0000	0.000	0.0115	0.0286	-0.6372	6.0518
34	0.1096	0.8904	0.000	0.0000	0.000	0.0109	0.0274	-0.4634	5.7000
35	0.0000	0.8998	0.000	0.1002	0.000	0.0102	0.0254	-0.2004	5.0898
36	0.0000	0.8646	0.000	0.1354	0.000	0.0098	0.0249	-0.1729	4.9794
37	0.0000	0.8517	0.000	0.1483	0.000	0.0096	0.0247	-0.1626	4.9381

Tabella B.6: Allocazione ottima con espansione fino al 4° ordine nel caso dell'utilità esponenziale

T	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	0.0767	0.2433	0.0933	0.5133	0.0733
2	0.4633	0.0100	0.0833	0.1067	0.3367
3	0.0100	0.7400	0.1467	0.0800	0.0233
4	0.0300	0.5033	0.1333	0.1100	0.2233
5	0.1000	0.3000	0.1333	0.1667	0.3000
6	0.4033	0.0400	0.1333	0.2133	0.2100
7	0.3667	0.0200	0.1333	0.1133	0.3667
8	0.0500	0.8500	0.0300	0.0500	0.0200
9	0.1567	0.2767	0.2733	0.2367	0.0567
10	0.3033	0.0833	0.1300	0.2433	0.2400
11	0.0900	0.4500	0.0200	0.2967	0.1433
12	0.5433	0.1300	0.0467	0.0100	0.2700
13	0.4800	0.2433	0.0600	0.0400	0.1767
14	0.1933	0.0700	0.0167	0.6400	0.0800
15	0.0667	0.0767	0.6867	0.0933	0.0767
16	0.1867	0.2500	0.2067	0.1433	0.2133
17	0.2833	0.1900	0.0267	0.1800	0.3200
18	0.1833	0.0800	0.2800	0.2700	0.1867
19	0.0600	0.0800	0.1333	0.7100	0.0167
20	0.0800	0.4100	0.3367	0.0900	0.0833
21	0.5067	0.0167	0.0267	0.3167	0.1333
22	0.2767	0.2000	0.0700	0.1400	0.3133
23	0.0300	0.0967	0.1367	0.0900	0.6467
24	0.1900	0.0500	0.1100	0.2000	0.4500
25	0.0200	0.0200	0.4567	0.1533	0.3500
26	0.7167	0.1300	0.0667	0.0700	0.0167
27	0.1100	0.0800	0.4433	0.1733	0.1933
28	0.7000	0.1833	0.0200	0.0833	0.0133
29	0.1033	0.6400	0.0600	0.1567	0.0400
30	0.2000	0.1333	0.2000	0.3000	0.1667
31	0.1167	0.0100	0.0967	0.3433	0.4333
32	0.0400	0.0700	0.5900	0.0300	0.2700
33	0.0100	0.1333	0.5167	0.0767	0.2633
34	0.2667	0.2667	0.3333	0.1000	0.0333
35	0.2433	0.4033	0.0933	0.0767	0.1833
36	0.2100	0.1333	0.0300	0.3433	0.2833
37	0.0867	0.0400	0.5000	0.3467	0.0267

Tabella B.7: Allocazione ottima diretta sotto ipotesi di normalità nel caso della power utility

T	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	0.010	0.967	0.010	0.010	0.003
2	0.010	0.967	0.010	0.010	0.003
3	0.010	0.967	0.010	0.010	0.003
4	0.010	0.967	0.010	0.010	0.003
5	0.010	0.967	0.010	0.010	0.003
6	0.010	0.967	0.010	0.010	0.003
7	0.010	0.967	0.010	0.010	0.003
8	0.010	0.967	0.010	0.010	0.003
9	0.283	0.697	0.010	0.010	0.000
10	0.617	0.363	0.010	0.010	0.000
11	0.363	0.617	0.010	0.010	0.000
12	0.617	0.363	0.010	0.010	0.000
13	0.647	0.333	0.010	0.010	0.000
14	0.697	0.283	0.010	0.010	0.000
15	0.687	0.293	0.010	0.010	0.000
16	0.867	0.110	0.010	0.010	0.003
17	0.697	0.283	0.010	0.010	0.000
18	0.813	0.163	0.010	0.010	0.003
19	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
20	0.920	0.057	0.010	0.010	0.003
21	0.937	0.040	0.010	0.010	0.003
22	0.880	0.097	0.010	0.010	0.003
23	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
24	0.783	0.193	0.010	0.010	0.003
25	0.763	0.213	0.010	0.010	0.003
26	0.697	0.283	0.010	0.010	0.000
27	0.697	0.283	0.010	0.010	0.000
28	0.617	0.363	0.010	0.010	0.000
29	0.487	0.490	0.010	0.010	0.003
30	0.353	0.627	0.010	0.010	0.000
31	0.363	0.617	0.010	0.010	0.000
32	0.363	0.617	0.010	0.010	0.000
33	0.363	0.617	0.010	0.010	0.000
34	0.097	0.880	0.010	0.010	0.003
35	0.010	0.617	0.010	0.363	0.000
36	0.060	0.213	0.010	0.717	0.000
37	0.070	0.047	0.010	0.870	0.003

Tabella B.8: Allocations ottima diretta via bootstrap nel caso della power utility

T	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	0.010	0.010	0.010	0.967	0.003
2	0.010	0.010	0.010	0.967	0.003
3	0.010	0.010	0.010	0.967	0.003
4	0.010	0.010	0.010	0.967	0.003
5	0.010	0.010	0.010	0.967	0.003
6	0.010	0.010	0.010	0.967	0.003
7	0.010	0.010	0.010	0.967	0.003
8	0.010	0.010	0.010	0.967	0.003
9	0.010	0.010	0.010	0.967	0.003
10	0.283	0.010	0.010	0.697	0.000
11	0.697	0.010	0.010	0.283	0.000
12	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
13	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
14	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
15	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
16	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
17	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
18	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
19	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
20	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
21	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
22	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
23	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
24	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
25	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
26	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
27	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
28	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
29	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
30	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
31	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
32	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
33	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
34	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
35	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
36	0.847	0.010	0.010	0.130	0.003
37	0.820	0.010	0.010	0.157	0.003

Tabella B.9: Allocazione ottima diretta via bootstrap a blocchi nel caso della power utility

T	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	0.010	0.967	0.010	0.010	0.003
2	0.010	0.967	0.010	0.010	0.003
3	0.010	0.967	0.010	0.010	0.003
4	0.010	0.967	0.010	0.010	0.003
5	0.010	0.967	0.010	0.010	0.003
6	0.010	0.967	0.010	0.010	0.003
7	0.010	0.967	0.010	0.010	0.003
8	0.010	0.967	0.010	0.010	0.003
9	0.057	0.920	0.010	0.010	0.003
10	0.283	0.697	0.010	0.010	0.000
11	0.137	0.840	0.010	0.010	0.003
12	0.193	0.783	0.010	0.010	0.003
13	0.283	0.697	0.010	0.010	0.000
14	0.303	0.677	0.010	0.010	0.000
15	0.283	0.697	0.010	0.010	0.000
16	0.333	0.647	0.010	0.010	0.000
17	0.303	0.677	0.010	0.010	0.000
18	0.363	0.617	0.010	0.010	0.000
19	0.363	0.617	0.010	0.010	0.000
20	0.363	0.617	0.010	0.010	0.000
21	0.363	0.617	0.010	0.010	0.000
22	0.507	0.470	0.010	0.010	0.003
23	0.617	0.363	0.010	0.010	0.000
24	0.507	0.470	0.010	0.010	0.003
25	0.447	0.530	0.010	0.010	0.003
26	0.293	0.687	0.010	0.010	0.000
27	0.313	0.667	0.010	0.010	0.000
28	0.283	0.697	0.010	0.010	0.000
29	0.197	0.780	0.010	0.010	0.003
30	0.133	0.843	0.010	0.010	0.003
31	0.147	0.830	0.010	0.010	0.003
32	0.183	0.793	0.010	0.010	0.003
33	0.150	0.827	0.010	0.010	0.003
34	0.083	0.763	0.010	0.143	0.000
35	0.010	0.430	0.010	0.547	0.003
36	0.010	0.233	0.070	0.687	0.000
37	0.010	0.147	0.010	0.830	0.003

Tabella B.10: Allocazione ottima diretta via bootstrap nel caso dell'utilità esponenziale

T	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	0.010	0.010	0.010	0.967	0.003
2	0.010	0.010	0.010	0.967	0.003
3	0.010	0.010	0.010	0.967	0.003
4	0.010	0.010	0.010	0.967	0.003
5	0.010	0.010	0.010	0.967	0.003
6	0.010	0.010	0.010	0.967	0.003
7	0.010	0.010	0.010	0.967	0.003
8	0.010	0.010	0.010	0.967	0.003
9	0.010	0.010	0.010	0.967	0.003
10	0.117	0.010	0.010	0.860	0.003
11	0.293	0.010	0.010	0.687	0.000
12	0.363	0.010	0.010	0.617	0.000
13	0.363	0.010	0.010	0.617	0.000
14	0.617	0.010	0.010	0.363	0.000
15	0.617	0.010	0.010	0.363	0.000
16	0.697	0.010	0.010	0.283	0.000
17	0.647	0.010	0.010	0.333	0.000
18	0.697	0.010	0.010	0.283	0.000
19	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
20	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
21	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
22	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
23	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
24	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
25	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
26	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
27	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
28	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
29	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
30	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
31	0.967	0.010	0.010	0.010	0.003
32	0.950	0.010	0.010	0.027	0.003
33	0.753	0.083	0.010	0.153	0.000
34	0.697	0.010	0.010	0.283	0.000
35	0.617	0.010	0.010	0.363	0.000
36	0.520	0.010	0.010	0.457	0.003
37	0.363	0.010	0.010	0.617	0.000

Tabella B.11: Allocazione ottima diretta via bootstrap a blocchi nel caso dell'utilità esponenziale

Appendice C

Rendimenti cumulati

Sono stati riportati i valori dei rendimenti cumulati calcolati, sia utilizzando la funzione di utilità esponenziale sia quella power, con le approssimazioni in serie di Taylor fino al 2°, 3° e 4° ordine.

POWER UTILITY

T	Taylor fino al 2°ordine	Taylor fino al 3°ordine	Taylor fino al 4°ordine
1	0.0530	0.0707	0.0909
2	0.1310	0.0925	0.0830
3	0.0847	0.1009	0.1064
4	0.1326	0.1737	0.2062
5	0.2202	0.2339	0.2549
6	0.2856	0.3173	0.3433
7	0.3722	0.3465	0.3927
8	0.4408	0.4142	0.4318
9	0.3763	0.4023	0.3603
10	0.3883	0.4034	0.3674
11	0.3346	0.2892	0.1893
12	0.0594	0.0214	0.0196
13	0.0062	0.0526	0.0698
14	0.0901	0.1292	0.0915
15	0.0822	0.0835	0.0994
16	0.1047	0.1308	0.1712
17	0.2029	0.2168	0.2302
18	0.2508	0.2808	0.3120
19	0.3369	0.3641	0.3390
20	0.3842	0.4312	0.4045
21	0.4212	0.3667	0.3915
22	0.3508	0.3784	0.3944
23	0.3595	0.3271	0.2843
24	0.1863	0.0615	0.0236
25	0.0229	0.0109	0.0514
26	0.0670	0.0878	0.1247
27	0.0885	0.0796	0.0802
28	0.0955	0.1005	0.1258
29	0.1641	0.1939	0.2076
30	0.2201	0.2396	0.2683
31	0.2984	0.3214	0.3455
32	0.3214	0.3650	0.4098
33	0.3827	0.3978	0.3446
34	0.3679	0.3288	0.3560
35	0.3730	0.3394	0.3075
36	0.2676	0.1719	0.0520
37	0.0143	0.0144	0.0034

Tabella C.1: Valori dei rendimenti cumulati, Power utility

EXPONENTIAL UTILITY

T	Taylor fino al 2°ordine	Taylor fino al 3°ordine	Taylor fino al 4°ordine
1	0.0532	0.0711	0.0912
2	0.1314	0.0929	0.0834
3	0.0851	0.1013	0.1068
4	0.1329	0.1737	0.2059
5	0.2198	0.2334	0.2542
6	0.2846	0.3161	0.3416
7	0.3697	0.3443	0.3901
8	0.4379	0.4113	0.4287
9	0.3735	0.3991	0.3574
10	0.3854	0.4007	0.3649
11	0.3321	0.2873	0.1878
12	0.0587	0.0207	0.0190
13	0.0058	0.0526	0.0699
14	0.0902	0.1293	0.0916
15	0.0823	0.0836	0.0995
16	0.1048	0.1308	0.1710
17	0.2025	0.2164	0.2296
18	0.2501	0.2800	0.3110
19	0.3356	0.3624	0.3374
20	0.3824	0.4290	0.4023
21	0.4187	0.3644	0.3890
22	0.3485	0.3761	0.3922
23	0.3573	0.3250	0.2824
24	0.1846	0.0602	0.0224
25	0.0217	0.0098	0.0444
26	0.0512	0.0747	0.1005
27	0.0717	0.0649	0.0620
28	0.0743	0.0774	0.0987
29	0.1264	0.1467	0.1592
30	0.1681	0.1822	0.2050
31	0.2307	0.2455	0.2567
32	0.2369	0.2736	0.3103
33	0.2821	0.2915	0.2432
34	0.2604	0.2277	0.2533
35	0.2745	0.2465	0.2168
36	0.1885	0.1019	0.0018
37	-0.0309	-0.0276	-0.0348

Tabella C.2: Valori dei rendimenti cumulati, Utilità Esponenziale

Appendice D

Algoritmo Matlab

In questa appendice vengono riportate i codici di Matlab utilizzati per la costruzione delle funzioni di utilità attese con le varie approssimazioni in serie di Taylor.

Calcolo dei pesi ottimi con le varie approssimazioni

```
ntot=size(hedge);
nrow=ntot(1); % Numero di elementi nella serie
ncol=ntot(2); % Numero di asset considerati
outsample=hedge(limit+1:nrow,:); % Definisco il campione out-of-sample
lambda=10; % Parametro di avversione al rischio

% Parametri dell'algoritmo di ottimizzazione:
VTR = 1.e-7;
D=5;
XVmin = [0 0 0 0 0]; % Lower bound
XVmax = [1 1 1 1 1]; % Upper bound
NP = 500;
itermax = 500;
F = 0.8;
CR = 0.8;
strategy =7;
refresh = 0;

for j=1:(nrow-limit)
```

```

% Index: la finestra mobile
index=hedge(j:limit+j-1,:);
y=index;
n=size(index);
n1=n(1);
n2=n(2);

% Calcolo i momenti e i co-momenti della finestra mobile
mu(j,:)=mean(index);
stderr(j,:)=std(index,0);
zeri=zeros(n2,1);
m2=kron(zeri,zeri');
m3=kron(zeri*zeri',zeri');
m4=kron(kron(zeri*zeri',zeri'),zeri');
for i=1:n1
    r=(index(i,:)-mu(j,:))';
    m2=m2+kron(r,r');
    m3=m3+kron(r*r',r');
    m4=m4+kron(kron(r*r',r'),r');
end
m2=m2/n1;
m3=m3/n1;
m4=m4/n1;
muj=mu(j,:);
lmb=lambda;

% La funzione 'deve3' utilizzata per calcolare i pesi ottimi:
% Differential Evolution for MATLAB
% Copyright (C) 1996, 1997 R. Storn
% International Computer Science Institute (ICSI)
% 1947 Center Street, Suite 600
% Berkeley, CA 94704
% E-mail: storn@icsi.berkeley.edu
% WWW: http://http.icsi.berkeley.edu/$"approx$storn

% mom2de, mom3de, mom4de: funzioni che calcolano le FOC
% per le varie approssimazioni

% Caso di funzione di utilit" a power
if esponenziale==0

```

```

[x,f,nf] = devec3('mom2de',VTR,D,XVmin,XVmax,y,
..NP,itermax,F,CR,strategy,refresh);
xm2(j,:)=exp(-x)/sum(exp(-x));
[x,f,nf] = devec3('mom3de',VTR,D,XVmin,XVmax,y,
..NP,itermax,F,CR,strategy,refresh);
xm3(j,:)=exp(-x)/sum(exp(-x));
[x,f,nf] = devec3('mom4de',VTR,D,XVmin,XVmax,y,
..NP,itermax,F,CR,strategy,refresh);
xm4(j,:)=exp(-x)/sum(exp(-x));
end;

% mom2expde, mom3expde, mom4expde: funzioni che calcolano le FOC
% per le varie approssimazioni

% Caso di funzione di utilit" a esponenziale
if esponenziale==1
[x,f,nf] = devec3('mom2expde',VTR,D,XVmin,XVmax,y,...
..NP,itermax,F,CR,strategy,refresh);
xm2(j,:)=exp(-x)/sum(exp(-x));
[x,f,nf] = devec3('mom3expde',VTR,D,XVmin,XVmax,y,...
..NP,itermax,F,CR,strategy,refresh);
xm3(j,:)=exp(-x)/sum(exp(-x));
[x,f,nf] = devec3('mom4expde',VTR,D,XVmin,XVmax,y,...
..NP,itermax,F,CR,strategy,refresh);
xm4(j,:)=exp(-x)/sum(exp(-x));
end;

% Calcolo dei momenti dei portafogli
mup(j,1)=xm2(j,:)*mu(j,:);
stdp(j,1)=(xm2(j,:)*m2*xm2(j,:))0.5;
skewp(j,1)=xm2(j,:)*m3*(kron(xm2(j,:)',xm2(j,:)))/(stdp(j,1)3);
kurtp(j,1)=xm2(j,:)*m4*(kron(kron(xm2(j,:)',xm2(j,:))',xm2(j,:)))/(stdp(j,1)4);

mup(j,2)=xm3(j,:)*mu(j,:);
stdp(j,2)=(xm3(j,:)*m2*xm3(j,:))0.5;
skewp(j,2)=xm3(j,:)*m3*(kron(xm3(j,:)',xm3(j,:)))/(stdp(j,2)3);
kurtp(j,2)=xm3(j,:)*m4*(kron(kron(xm3(j,:)',xm3(j,:))',xm3(j,:)))/(stdp(j,2)4);

mup(j,3)=xm4(j,:)*mu(j,:);
stdp(j,3)=(xm4(j,:)*m2*xm4(j,:))0.5;

```

```

skewp(j,3)=xm4(j,:)*m3*(kron(xm4(j,:)',xm4(j,:)))/(stdp(j,3)^3);
kurtp(j,3)=xm4(j,:)*m4*(kron(kron(xm4(j,:)',xm4(j,:)),xm4(j,:)))/(stdp(j,3)^4);

```

```
end
```

Calcolo dei pesi ottimi via ottimizzazione diretta sotto ipotesi di normalità

```

fine=30; % Griglia a 1/30
I=1000000; % Numero di simulazioni

for m=1:(nrow-limit)
    index=hedge(m:limit+m-1,:);
    variance=var(index);
    n=size(index);
    n1=n(1);
    n2=n(2);
    mu(m,:)=mean(index);

    % Calcolo la matrice di covarianza
    zeri=zeros(n2,1);
    m2=kron(zeri,zeri');
    for i=1:n1
        r=(index(i,:)-mu(m,:))';
        m2=m2+kron(r,r');
    end
    m2=m2/n1;

    % Simulo da una normale multivariata
    sample1=mvnrnd(mu(m,:),m2,I);

    % Calcolo i pesi ottimi con la prima griglia
    pesi=0;
    conta=0;
    for g=0:fine
        for h=0:(fine-g)
            for i=0:(fine-(h+g))
                for j=0:(fine-(i+h+g))
                    conta=conta+1;
                    x=[g/fine;h/fine;i/fine;j/fine;(1-(g+h+i+j)/fine)];
                    wpred=x*sample1;
                end
            end
        end
    end
end

```



```

        if esponenziale==0
            wpred=wpred.^(1-lambda);
            util(conta)=(sum(wpred))/I/(1-lambda);
        end;
        if esponenziale==1
            wpred=-exp(-wpred*lambda);
            util(conta)=sum(wpred)/I;
        end;
        pesi(1:5,conta)=x;
    end
end
end
end
[util,position]=sort(util);
pesi=pesi(:,position);

% Prendo i pesi superiori ad un dato percentile
perc=prctile(util,99.95);
conta=0;
max'util=0;
max'pesi=zeros(5,1);
for i=1:length(util)
    if(util(i)>=perc)
        conta=conta+1;
        max'util(conta)=util(i);
        max'pesi(1:5,conta)=pesi(:,i);
    end;
end
range=5;
conta=0;
maxu=0;
maxp=zeros(5,1);
lower=max'pesi*100-range;
upper=max'pesi*100+range;
nmax=size(max'pesi);
ncolmax=nmax(2);
nrowmax=nmax(1);
for i=1:ncolmax
    for j=1:nrowmax
        if(lower(j,i)>0)

```

```

        lower(j,i)=0;
    end;
end
end
for i=1:ncolmax
    for j=1:nrowmax
        if(upper(j,i)<100)
            upper(j,i)=100;
        end;
    end
end
end

% Affino la griglia e ricalcolo i pesi ottimi
for l=1:length(max'util)
    for g=lower(1,l):upper(1,l)
        for h=lower(2,l):upper(2,l)
            for i=lower(3,l):upper(3,l)
                for j=lower(4,l):upper(4,l)
                    k=100-(g+h+i+j);
                    if(k<=lower(5,l) & k<=upper(5,l) & g>0 & h>0 & i>0 & j>0 & k>0)
                        conta=conta+1;
                        x=[g/100;h/100;i/100;j/100;k/100];
                        wpred=x*sample1;
                        if esponenziale==0
                            wpred=wpred.^(1-lambda);
                            maxu(conta)=(sum(wpred))/I/(1-lambda);
                        end;
                        if esponenziale==1
                            wpred=-exp(-wpred*lambda);
                            maxu(conta)=sum(wpred)/I;
                        end;
                        maxp(:,conta)=x;
                    end;
                end
            end
        end
    end
end
end

% I pesi ottimi sono in 'maxdir'

```

```

[maxu,position]=sort(maxu);
maxp=maxp(:,position);
maxdir(:,m)=maxp(:,length(maxu));
end

```

Calcolo dei pesi ottimi via bootstrap

```

B=10000; % Campionamenti dal bootstrap
fine=30;

```

```

for m=1:(nrow-limit)
    index=hedge(m:limit+m-1,:);

    %Campiono per mezzo del bootstrap
    sampleb=bootstrp(B,@sum,index);
    sampleb=sampleb';
    n=size(index);
    n1=n(1);
    n2=n(2);

    % Calcolo i pesi ottimi con la prima griglia
    conta=0;
    for g=0:fine
        for h=0:(fine-g)
            for i=0:(fine-(h+g))
                for j=0:(fine-(i+h+g))
                    conta=conta+1;
                    x=[g/fine;h/fine;i/fine;j/fine;(1-(g+h+i+j)/fine)];
                    wpredb=x*sampleb;
                    if esponenziale==0
                        wpredb=wpredb.^(1-lambda);
                        utilb(conta)=(sum(wpredb))/B/(1-lambda);
                    end
                    if esponenziale==1
                        wpredb=-exp(-wpredb*lambda);
                        utilb(conta)=sum(wpredb)/B;
                    end
                    pesib(:,conta)=x';
                end
            end
        end
    end
end

```

```

end
[utilb,position]=sort(utilb);
pesib=pesib(:,position);

% Prendo i pesi superiori ad un dato percentile
perc=prctile(utilb,99.95);
conta=0;
max'utilb=0;
max'pesib=zeros(5,1);
for i=1:length(utilb)
    if(utilb(i)>=perc)
        conta=conta+1;
        max'utilb(conta)=utilb(i);
        max'pesib(1:5,conta)=pesib(:,i);
    end;
end
range=5;
conta=0;
maxub=0;
maxpb=zeros(5,1);
lowerb=max'pesib*100-range;
upperb=max'pesib*100+range;
nmaxb=size(max'pesib);
ncolmaxb=nmaxb(2);
nrowmaxb=nmaxb(1);
for i=1:ncolmaxb
    for j=1:nrowmaxb
        if(lowerb(j,i)<0)
            lowerb(j,i)=0;
        end;
    end
end
for i=1:ncolmaxb
    for j=1:nrowmaxb
        if(upperb(j,i)<100)
            upperb(j,i)=100;
        end;
    end
end
end

```

```

% Affino la griglia e ricalcolo i pesi ottimi
for l=1:length(max'utilb)
    for g=lowerb(1,l):upperb(1,l)
        for h=lowerb(2,l):upperb(2,l)
            for i=lowerb(3,l):upperb(3,l)
                for j=lowerb(4,l):upperb(4,l)
                    k=100-(g+h+i+j);
                    if(k<=lowerb(5,l) & k<=upperb(5,l) & g>0 & h>0 & i>0 & j>0 & k>0)
                        conta=conta+1;
                        x=[g/100;h/100;i/100;j/100;k/100];
                        wpredb=x*sampleb;
                        if esponenziale==0
                            wpredb=wpredb.^(1-lambda);
                            maxub(conta)=(sum(wpredb))/B/(1-lambda);
                        end
                        if esponenziale==1
                            wpredb=-exp(-wpredb*lambda);
                            maxub(conta)=sum(wpredb)/B;
                        end
                        maxpb(:,conta)=x';
                    end;
                end
            end
        end
    end
end
[ maxub, position]=sort(maxub);
maxpb=maxpb(:,position);

% Pesi ottimi con il metodo del bootstrap
pesiboot(:,m)=maxpb(:,length(maxub));
end

```

Calcolo dei pesi ottimi via bootstrap a blocchi

```

B=10000; % Campionamenti dal bootstrap
fine=30;

for m=1:(nrow-limit)
    index=hedge(m:limit+m-1,:);
    conta=0;

```

```

for i=3:12 % per varie ampiezze dei blocchi
    for j=i:(nrow-limit)
        conta=conta+1;
        matrice=index((j-i+1:j),:);
        blocco(conta)=struct('bloc',matrice);
    end
end

% limit/3=64 -> massimo numeri di blocchi necessario
samplebb=zeros(1,5);
for h=1:B
    indicebloc=randsample(64,length(blocco),true);
    data=zeros(1,5);
    for i=1:64
        if i==1
            data=blocco(indicebloc(i)).bloc;
        else
            data=[data;blocco(indicebloc(i)).bloc];
        end
    end
    data=data(1:limit,:);
    samplebb(h,:)=sum(data);
end
n=size(samplebb);
n1=n(1);
n2=n(2);

% Calcolo i pesi ottimi con la prima griglia
conta=0;
for g=0:fine
    for h=0:(fine-g)
        for i=0:(fine-(h+g))
            for j=0:(fine-(i+h+g))
                conta=conta+1;
                x=[g/fine;h/fine;i/fine;j/fine;(1-(g+h+i+j)/fine)];
                wpredb=x'*samplebb';
                if esponenziale==0
                    wpredb=wpredb.^(1-lambda);
                    utilb(conta)=(sum(wpredb))/B/(1-lambda);
                end
            end
        end
    end
end

```

```

        if esponenziale==1
            wpredb=-exp(-wpredb*lambda);
            utilb(conta)=sum(wpredb)/B;
        end
        pesib(:,conta)=x';
    end
end
end
end
[utilb,position]=sort(utilb);
pesib=pesib(:,position);

% Prendo i pesi superiori ad un dato percentile
perc=prctile(utilb,99.95);
conta=0;
max'utilb=0;
max'pesib=zeros(5,1);
for i=1:length(utilb)
    if(utilb(i)>=perc)
        conta=conta+1;
        max'utilb(conta)=utilb(i);
        max'pesib(1:5,conta)=pesib(:,i);
    end;
end
range=5;
conta=0;
maxub=0;
maxpb=zeros(5,1);
lowerb=max'pesib*100-range;
upperb=max'pesib*100+range;
nmaxb=size(max'pesib);
ncolmaxb=nmaxb(2);
nrowmaxb=nmaxb(1);
for i=1:ncolmaxb
    for j=1:nrowmaxb
        if(lowerb(j,i)>0)
            lowerb(j,i)=0;
        end;
    end
end
end
end

```

```

for i=1:ncolmaxb
    for j=1:nrowmaxb
        if(upperb(j,i) < 100)
            upperb(j,i)=100;
        end;
    end
end

% Affino la griglia e ricalcolo i pesi ottimi
for l=1:length(max`utilb)
    for g=lowerb(1,l):upperb(1,l)
        for h=lowerb(2,l):upperb(2,l)
            for i=lowerb(3,l):upperb(3,l)
                for j=lowerb(4,l):upperb(4,l)
                    k=100-(g+h+i+j);
                    if(k >= lowerb(5,l) & k <= upperb(5,l) & g > 0 & h > 0 & i > 0 & j > 0 & k > 0)
                        conta=conta+1;
                        x=[g/100;h/100;i/100;j/100;k/100];
                        wpredb=x'*samplebb';
                        if esponenziale==0
                            wpredb=wpredb.^(1-lambda);
                            maxub(conta)=(sum(wpredb))/B/(1-lambda);
                        end
                        if esponenziale==1
                            wpredb=-exp(-wpredb*lambda);
                            maxub(conta)=sum(wpredb)/B;
                        end
                        maxpb(:,conta)=x';
                    end;
                end
            end
        end
    end
end
[ maxub, position]=sort(maxub);
maxpb=maxpb(:,position);

% Pesi ottimi con il metodo del bootstrap a blocchi
pesibb(:,m)=maxpb(:,length(maxub));
end

```


Ringraziamenti

A conclusione di questo lavoro di tesi, è doveroso porre i miei più sentiti ringraziamenti alle persone che ho avuto modo di conoscere in questo importante periodo della mia vita e che mi hanno aiutato a crescere sia dal punto di vista intellettuale sia dal punto di vista umano.

Le singole persone che più di ogni altre hanno meritato che questo lavoro fosse loro dedicato sono certamente i miei genitori, a cui lo dedico per aver aspettato e sopportato così a lungo. Ad essi vanno tutta la mia stima, il mio rispetto e la mia riconoscenza, nonostante gli screzi e le incomprensioni che inevitabilmente si sono presentati nel corso degli anni. Senza dimenticare tutta la mia famiglia: mio fratello che sebbene disapprovi il mio indirizzo mi ha sempre incoraggiato, mia sorella che mi riempiva di mille domande sui miei studi senza mai capire nulla, i miei nipotini che ho trascurato per colpa della tesi ma in un modo o nell'altro mi farò perdonare.

Non posso inoltre non menzionare il mio relatore, Prof. Massimiliano Caporin, che con pazienza e spirito critico mi ha insegnato, sostenuto, consigliato e aiutato durante tutto lo svolgimento della tesi.

Passiamo ora ai ringraziamenti più spensierati. Un grazie di cuore va a tutti i miei compagni di studio e di avventura: ad Anna e Ire più per le serate fuori che per le ore di studio, a Mattia per le mille consulenze richieste e per la tanta festa fatta, all'Andre per le mille ore di studio improduttivo trascorse insieme, però quante risate!..e ad Alice, un grazie di cuore perchè non posso scordarmi degli anni trascorsi insieme, di quanto abbiamo condiviso e di quanto sono cresciuto grazie a

te. Menzionare tutti i miei compagni di studio sarebbe un compito estremamente arduo e faticoso, per tale motivo rivolgo un GRAZIE anche a tutti coloro i quali non ho menzionato.

Desidero infine ringraziare tutte quelle persone con cui ho iniziato e trascorso i miei studi, con cui ho scambiato qualche pensiero, qualche idea, qualche risata all'interno della facoltà. In diversi modi hanno contribuito nel mio percorso formativo, aiutandomi a credere in me stesso, suscitando in me nuovi interessi e soprattutto mi hanno suggerito, direttamente o indirettamente, le modalità per poterli raggiungere.