

---

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”  
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

---

# SVILUPPO E ANALISI DI FORMULE DI QUADRATURA BASATE SU NODI MAPPATI

*Relatore:*

Wolfgang Erb

*Correlatori:*

Francesco Marchetti

Davide Poggiali

*Candidato:*

Giacomo Cappellazzo

Matricola 1163590

---

ANNO ACCADEMICO 2020/2021

# Abstract

Lo scopo di questa tesi è quello di approssimare l'integrale di funzioni analitiche su un intervallo compatto a partire da valori su una griglia arbitraria.

Nel primo capitolo proponiamo un metodo di interpolazione per polinomi univariati basato sulle basi mappate (Approccio Fake Nodes). Costruire la funzione di interpolazione attraverso la base mappata è equivalente a mappare i nodi e a costruire l'approssimante polinomiale classica senza bisogno di ricampionare la funzione. Abbiamo inoltre studiato l'approccio dei fake nodes nel contesto della quadratura numerica.

Nel secondo capitolo studiamo la mappa di Kosloff e Tal-Ezer applicata alla teoria dei Fake Nodes. Una attenta selezione dei parametri della mappa assicurerà da una parte grande accuratezza dell'approssimazione e dall'altra un rapporto asintoticamente ottimo tra il grado del polinomio e la spaziatura della griglia. Lo scopo di questo capitolo è quello di introdurre un metodo ai minimi quadrati pesato per approssimare funzioni analitiche a partire da valori su nodi arbitrari che combina le buone proprietà dell'approssimazione polinomiale algebrica e trigonometrica.

Nel terzo capitolo descriviamo una serie di esperimenti numerici per confrontare i vari metodi. Evidenze numeriche mostrano che il metodo KTL (Kosloff Tal-Ezer Least-squares) è pratico, semplice e può essere implementato in modo efficiente.

# Introduzione

Björck e Dahlquist scrivono [1]: “*Interpolation on Chebyshev points gives an excellent result, and should be used if one has the possibility of freely choosing the points where the function values are to be used*”.

I nodi di Chebyshev, cioè le radici dei polinomi di Chebyshev del primo tipo, sono spesso usati nel contesto dell’interpolazione polinomiale perchè hanno l’ottima proprietà di minimizzare il fenomeno di Runge. Inoltre la costante di Lebesgue, che descrive quanto è accurata la funzione interpolante rispetto al polinomio di migliore approssimazione, per questo tipo di nodi risulta [2]

$$\Lambda_n = \frac{2}{\pi} \left( \log(n) + \gamma + \log\left(\frac{8}{\pi}\right) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

dove  $n$  rappresenta il numero di nodi di interpolazione e  $\gamma = 0.57721\dots$  è la costante di Eulero-Mascheroni.

Tuttavia, questo non è abbastanza efficiente per le applicazioni, infatti scegliere una griglia di nodi *ad hoc* porta a ricampionare la funzione (sconosciuta). Ricampionare la funzione non è sempre possibile e solitamente si dispone di un determinato insieme di nodi e i corrispondenti valori. Inoltre se i nodi disponibili sono quelli equispaziati allora la costante di Lebesgue ha il seguente andamento asintotico

$$\Lambda_n \sim \frac{2^n}{en \log(n)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Confrontando le precedenti stime si può notare che la costante di Lebesgue per i nodi di Chebyshev risulta asintoticamente più piccola rispetto a quella per i nodi equispaziati. Questo conferma il “cattivo” *status* dei nodi equispaziati per l’interpolazione polinomiale di Lagrange, un fatto conosciuto anche per la divergenza esponenziale dell’errore per la funzione di Runge  $f = \frac{1}{1+25x^2}$  in  $[-1, 1]$ .

Osserviamo che l’interpolazione polinomiale è strettamente legata al problema di determinare formule di quadratura in intervalli compatti: se la formula di quadratura su  $n$  nodi integra in modo esatto tutti i polinomi di grado  $n - 1$  allora la formula risulta di tipo interpolatorio, cioè i pesi di quadratura sono gli integrali dei polinomi di Lagrange e il risultato della quadratura è l’integrale della funzione interpolante.

Lo scopo di questa tesi è quello di approssimare l'integrale di funzioni analitiche su un intervallo compatto a partire da valori su una griglia arbitraria.

Nel primo capitolo proponiamo un metodo di interpolazione per polinomi univariati basato sulle basi mappate. Vedremo che costruire la funzione di interpolazione attraverso la base mappata è equivalente a mappare i nodi e a costruire l'approssimante polinomiale classica senza bisogno di ricampionare la funzione. Per questo gli autori di [3, 4, 5] si riferiscono a questi nodi mappati come *fake nodes*. Mostreremo inoltre le varie relazioni tra le costanti di Lebesgue.

Il metodo proposto in questo capitolo si traduce nel costruire (sotto opportune restrizioni) un insieme arbitrario di nodi di interpolazione con le proprietà cercate (approssimazione di funzioni discontinue oppure bassa crescita della costante di Lebesgue).

Estenderemo l'approccio dei *fake nodes* a qualsiasi base in ogni dimensione (in questa tesi negli esperimenti numerici è utilizzato solo l'approccio univariato).

Abbiamo inoltre studiato l'approccio dei *fake nodes* nel contesto della quadratura numerica. Una proprietà sorprendente dell'utilizzo dei *fake nodes* in tale contesto è quella di ritrovare formule di quadratura note mappando nodi equispaziati nei nodi di Chebyshev e Chebyshev-Lobatto. Estendendo un risultato di [5] abbiamo determinato una espressione esplicita per i *fake-Chebyshev nodes* ritrovando la formula composta del punto medio e la formula di Cavalieri-Simpson.

Nel secondo capitolo studiamo una particolare funzione da applicare alla teoria discussa nel primo capitolo. Una attenta selezione dei parametri della mappa [6] assicurerà da una parte grande accuratezza dell'approssimazione e dall'altra un rapporto asintoticamente ottimo tra il grado del polinomio e la spaziatura della griglia.

Lo scopo di questo capitolo è quello di introdurre un metodo ai minimi quadrati pesato per approssimare funzioni analitiche a partire da valori su nodi arbitrari che combina le buone proprietà dell'approssimazione polinomiale algebrica e trigonometrica.

Per scelte appropriate dei parametri il metodo introdotto garantirà che il grado del polinomio di approssimazione sia una funzione lineare del numero dei nodi (oppure della spaziatura della griglia).

Lo spazio di approssimazione introdotto non è nuovo. I metodi di approssimazione attraverso nodi mappati sono stati usati in modo estensivo nel contesto della quadratura numerica e dei metodi spettrali per le PDEs (Partial Differential Equations). Nel nostro contesto utilizzeremo una mappa dovuta a Kosloff e Tal-Ezer. Tuttavia, altre mappe sono state utilizzate come nel lavoro di Hale e Trefethen [7].

Dopo avere introdotto il metodo, ci concentreremo sul problema di come scegliere il parametro  $N$  (la dimensione dello spazio di approssimazione) in relazione a  $M$  (il numero dei nodi) per differenti scelte di  $\alpha$  (il parametro della mappa). Nel caso in cui il parametro della mappa dipenda dal numero di nodi la convergenza classica viene tralasciata per garantire stabilità e grande accuratezza attraverso la scelta appropriata di  $\varepsilon$ .

$\alpha$	Convergenza in $N$	Vincoli $N$	Convergenza in $M$
0	geometrica	$\mathcal{O}(M^{\frac{1}{2}})$	root exponential
$0 < \alpha < \text{fissato}$	geometrica	$\mathcal{O}(M^{\frac{1}{2}})$	root exponential
1	algebraica, indice 1	$\mathcal{O}(M)$	algebraica, indice 1
$\alpha_N = 1 + \frac{\log(\varepsilon)}{N\pi}$	non convergente	$\mathcal{O}(M)$	non convergente, err. ordine $\varepsilon$

I contributi originali in questa sezione comprendono: studio della simmetria dei pesi di quadratura e corrispondenti limiti per  $\alpha$  convergente a  $0^+$  e  $1^-$ , analisi delle difficoltà della computazione del vettore dei momenti nella base monomiale standard e divergenza dell'errore, calcolo del vettore dei momenti attraverso la base polinomiale di Chebyshev e la trasformata del coseno.

Nel terzo capitolo proponiamo un metodo di quadratura basato sulle idee del secondo capitolo e mostriamo una serie di esperimenti numerici per confrontare i vari metodi. Evidenze numeriche mostrano che il metodo KTL (Kosloff Tal-Ezer Least-squares) è pratico, semplice e può essere implementato in modo efficiente.

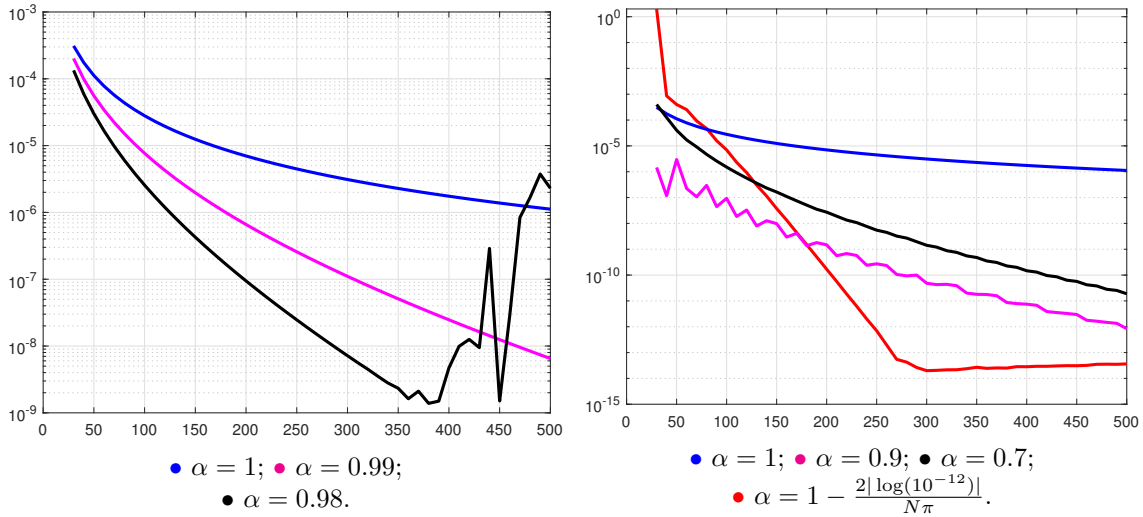


Figura 1: La figura a sinistra mostra l'errore relativo per la quadratura con la mappa di Kosloff e Tal-Ezer (Fake nodes) mentre quella a destra per la quadratura con il metodo KTL. In entrambe le figure si approssima l'integrale della funzione  $f = \log(1 + 50x^2)$ . L'asse della ascisse corrisponde al numero di nodi.

# Indice

<b>1 Fake Nodes</b>	<b>2</b>
1.1 Dall'interpolazione polinomiale alle basi mappate . . . . .	2
1.2 Approccio della basi mappate . . . . .	4
1.3 Approccio Fake Nodes . . . . .	9
1.4 Interpolazione Multivariata . . . . .	11
1.5 FNA Multivariato . . . . .	13
1.6 Quadratura nei fake nodes . . . . .	16
1.6.1 Formule di quadratura note . . . . .	18
1.7 Problemi ai minimi quadrati . . . . .	21
<b>2 Approssimazione e Integrazione su griglie arbitrarie</b>	<b>23</b>
2.1 La mappa di Kosloff e Tal-Ezer . . . . .	24
2.2 Fake Nodes con KT . . . . .	25
2.3 Stabilità e Convergenza . . . . .	28
2.3.1 Comportamento dell'errore di migliore approssimazione . . . . .	30
2.3.2 Una disuguaglianza di Markov per $P_N^\alpha$ . . . . .	32
2.3.3 Il numero di condizionamento del sistema ai minimi quadrati pesato . . . . .	35
2.4 Computazione dei pesi di KT con la base di Chebyshev . . . . .	38
2.4.1 Convergenza pesi KT . . . . .	43
2.5 Formule di quadratura da mappe conformi . . . . .	47
<b>3 Test Numerici</b>	<b>50</b>
3.1 Esperimenti Numerici . . . . .	50
3.1.1 Esperimenti Fake Nodes . . . . .	50
3.1.2 Esperimenti KTL . . . . .	52
3.1.3 Esperimenti KTL con nodi perturbati . . . . .	55
3.1.4 Confronto KTL e Formule Transplanted . . . . .	56
3.2 Codice Matlab . . . . .	58
3.2.1 Fake Nodes con KT . . . . .	58
3.2.2 Interpolazione e Quadratura con KT . . . . .	59
3.2.3 Formule di quadratura Transplanted . . . . .	60
3.2.4 Formula dei Trapezi . . . . .	61
3.3 Conclusioni . . . . .	62
<b>Bibliografia</b>	<b>64</b>

# Capitolo 1

## Fake Nodes

Seguendo quanto fatto in [3, 4, 5] presentiamo l'*approccio fake nodes* (FNA), prima in un contesto polinomiale univariato e poi in un ambiente multivariato con diverse *funzioni di base*.

### 1.1 Dall'interpolazione polinomiale alle basi mappate

In questa sezione introduciamo l'interpolazione polinomiale univariata [8]. Sia  $\Omega = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo e sia  $\mathcal{X}_{n+1} = \{x_i : i = 0, \dots, n\} \subseteq \Omega$  un insieme di punti distinti (anche chiamati nodi). L'obiettivo dell'interpolazione è quello di ricostruire la funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dati dei campionamenti  $\mathcal{F}_{n+1} = \{f_i = f(x_i) : i = 0, \dots, n\}$  nei nodi.

Sia  $\mathbb{P}_n$  l'insieme dei polinomi di grado al più  $n$ , cerchiamo il polinomio  $P_{n,f} \in \mathbb{P}_n$  tale che:

$$P_{n,f}(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (1.1)$$

$P_{n,f}$  si può esprimere come combinazione lineare dei monomi  $\langle 1, x, \dots, x^n \rangle = \mathbb{P}_n$  come

$$P_{n,f}(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i.$$

Il problema dell'interpolazione polinomiale (1.1) si traduce nella risoluzione del sistema lineare

$$V\mathbf{c} = \mathbf{f} \quad (1.2)$$

dove  $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_n)^\top$  è il vettore dei coefficienti,  $V = V(x_0, \dots, x_n) \in M_{n+1}(\mathbb{R})$  è la *matrice di Vandermonde* e  $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_n)^\top$ .

$$V = V(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

L'interpolante polinomiale si può esprimere anche attraverso la *base di Lagrange*  $\mathcal{L} = \langle \ell_0, \dots, \ell_n \rangle$  in modo tale che

$$P_{n,f}(x) = \sum_{i=0}^n f_i \ell_i(x) \quad \forall x \in \Omega$$

con

$$\ell_i(x) = \frac{\det(V_i(x))}{\det(V)} = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (1.3)$$

$\ell_i$  è l' $i$ -esimo polinomio di Lagrange e  $V_i(x) = V(x_0, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$ .

Nell'interpolazione polinomiale assume particolare rilevanza la *funzione di Lebesgue* e il relativo estremo superiore al variare dei nodi di interpolazione.

In questo contesto consideriamo  $\mathcal{L}_n : (C(\Omega), \|\cdot\|_\Omega) \rightarrow (\mathbb{P}_n, \|\cdot\|_\Omega)$  l'operatore lineare continuo che associa  $f \in C(\Omega)$  alla sua interpolante polinomiale  $P_{n,f} \in \mathbb{P}_n$ . Definiamo come *costante di Lebesgue* dei punti  $x_0, \dots, x_n$  relativa alla norma  $\|\cdot\|_\Omega$

$$\Lambda_n(\Omega) = \sup_{\substack{f \in C(\Omega) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\Omega}{\|f\|_\Omega} \quad (1.4)$$

la norma operatoriale di  $\mathcal{L}_n$ .

**Osservazione 1.1** Se  $\|\cdot\|_\Omega = \|\cdot\|_\infty$  (norma della convergenza uniforme) allora

$$\Lambda_n(\Omega) = \max_{x \in \Omega} \sum_{i=0}^n |\ell_i(x)|.$$

**Teorema 1.1** Se  $f \in C(\Omega)$  e  $P_{n,f}$  è il suo polinomio di interpolazione relativo ai nodi  $x_0, \dots, x_n$  si ha

$$\|f - P_{n,f}\|_\Omega \leq (1 + \Lambda_n(\Omega)) E_n^*(f)$$

dove

$$E_n^*(f) = \inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\Omega$$

è l'errore compiuto dal polinomio di migliore approssimazione in  $\mathbb{P}_n$  [9].

### Dimostrazione

Osserviamo che per ogni  $p \in \mathbb{P}_n$  si ha che  $\mathcal{L}_n(p) = p$ , in quanto l'unico polinomio che interpola in  $n + 1$  punti distinti un polinomio di grado al più  $n$  è il polinomio stesso.

Se  $f \in \mathbb{P}_n$  allora  $f = \mathcal{L}_n(f) = P_{n,f}$  e quindi l'asserto è ovvio.

Supponiamo  $f \notin \mathbb{P}_n$  allora  $f - p \neq 0 \quad \forall p \in \mathbb{P}_n$

$$\Lambda_n(\Omega) = \sup_{\substack{f \in C(\Omega) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\Omega}{\|f\|_\Omega} \geq \frac{\|\mathcal{L}_n(f - p)\|_\Omega}{\|f - p\|_\Omega} \stackrel{\text{linearità}}{=} \frac{\|P_{n,f} - p\|_\Omega}{\|f - p\|_\Omega}$$



e di conseguenza

$$\|P_{n,f} - p\|_{\Omega} \leq \Lambda_n(\Omega) \cdot \|f - p\|_{\Omega}.$$

Dalla disuguaglianza triangolare otteniamo

$$\begin{aligned} \|f - P_{n,f}\|_{\Omega} &= \|f - p + p - P_{n,f}\|_{\Omega} \\ &\leq \|f - p\|_{\Omega} + \|p - P_{n,f}\|_{\Omega} \\ &\leq \|f - p\|_{\Omega} + \Lambda_n(\Omega) \cdot \|f - p\|_{\Omega} \\ &= (1 + \Lambda_n(\Omega))\|f - p\|_{\Omega} \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\|f - P_{n,f}\|_{\Omega}}{1 + \Lambda_n(\Omega)} \leq \|f - p\|_{\Omega} \quad \forall p \in \mathbb{P}_n.$$

Dalla definizione di estremo inferiore segue la tesi.

□

Basandosi su quanto fatto precedentemente, introduciamo un metodo che modifica il vecchio problema di interpolazione polinomiale senza campionare la funzione ignota  $f$  in altri nodi di interpolazione.

## 1.2 Approccio della basi mappate

**Definizione 1.1** Sia  $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione, diremo che  $S$  è ammissibile se  $V^S = V^S(x_0, \dots, x_n) = V(S(x_0), \dots, S(x_n))$  è non singolare.

**Teorema 1.2** La funzione  $S$  è ammissibile se e solo se per ogni  $0 \leq i, j \leq n, i \neq j$  si ha che

$$S(x_i) \neq S(x_j).$$

In altre parole,  $S$  è iniettiva in  $\mathcal{X}_{n+1} = \{x_i : i = 0, \dots, n\} \subseteq \Omega$

### Dimostrazione

La funzione  $S$  è ammissibile se e sole se  $V^S = V(S(x_0), \dots, S(x_n))$  è non singolare, che equivale a dire

$$\det(V^S) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} S(x_j) - S(x_i) \neq 0 \Leftrightarrow S(x_i) \neq S(x_j) \quad \forall i \neq j.$$

□

### Osservazione 1.2

$$\det(V^S) = \sigma(S, \mathcal{X}) \det(V)$$

dove  $V$  è la matrice di Vandermonde (1.2) e

$$\sigma(S, \mathcal{X}) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} \frac{S(x_j) - S(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Sia  $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione ammissibile e  $\mathcal{S}_n$  lo spazio vettoriale generato da  $\{S^i : i = 0, \dots, n\}$ , cerchiamo la funzione  $R_{n,f}^S \in \mathcal{S}_n$  tale che:

$$R_{n,f}^S(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (1.5)$$

$R_{n,f}^S$  si può esprimere come combinazione lineare di  $\langle 1, S, \dots, S^n \rangle = \mathcal{S}_n$  come

$$R_{n,f}^S(x) = \sum_{i=0}^n c_i S(x)^i.$$

Il problema dell'interpolazione (1.5) si traduce nella risoluzione del sistema lineare

$$V^S \mathbf{c} = \mathbf{f} \quad (1.6)$$

dove  $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_n)^\top$  è il vettore dei coefficienti,  $V^S = V(S(x_0), \dots, S(x_n)) \in M_{n+1}(\mathbb{R})$  è la matrice di Vandermonde e  $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_n)^\top$ .

**Osservazione 1.3** *Dato che  $S$  è ammissibile il problema di interpolazione (1.5) in  $\mathcal{S}_n$  è ben posto. La soluzione esiste ed è unica.*

Sia  $(\Upsilon, \|\cdot\|_\Omega)$  uno spazio funzionale normato, che contiene solo funzioni reali su  $\Omega = [a, b]$ , supponiamo che  $f \in \Upsilon$  e che

$$\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{S}_n \subseteq \dots \subseteq \Upsilon.$$

In questo caso si possono enunciare le proposizioni seguenti [10].

**Teorema 1.3** *Se  $\Upsilon$  è uno spazio vettoriale normato e  $\mathcal{S}_n$  è un sottospazio vettoriale di dimensione finita di  $\Upsilon$  allora data  $f \in \Upsilon$  esiste  $r_n^* \in \mathcal{S}_n$  tale che*

$$E_n^*(f) = \min_{r_n \in \mathcal{S}_n} \|f - r_n\|_\Omega = \|f - r_n^*\|_\Omega.$$

### Dimostrazione

L'elemento 0 dello spazio normato  $\Upsilon$  appartiene certamente in ogni suo sottospazio, e quindi pure in  $\mathcal{S}_n$ . Così sicuramente

$$E_n^*(f) = \inf_{r_n \in \mathcal{S}_n} \|f - r_n\|_\Omega \leq \|f - 0\|_\Omega = \|f\|_\Omega.$$

Essendo lo spazio  $\mathcal{S}_n$  di dimensione finita, la palla  $B_{\mathcal{S}_n}(f, \|f\|_\Omega) = \{r_n \in \mathcal{S}_n : \|f - r_n\|_\Omega \leq \|f\|_\Omega\}$  centrata in  $f$  e avente raggio  $\|f\|_\Omega$  è chiusa per la topologia indotta e limitata, quindi compatta. Per il teorema di Weierstrass la funzione  $\|f - \cdot\|_\Omega \in C(B_{\mathcal{S}_n}(f, \|f\|_\Omega))$  ha minimo  $r_n^* \in B_{\mathcal{S}_n}(f, \|f\|_\Omega)$ . Con tale scelta di  $r_n^*$  si può concludere.

□

**Teorema 1.4** Sia  $(\Upsilon, \|\cdot\|_\Omega)$  uno spazio funzionale normato e

$$\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{S}_n \subseteq \cdots \subseteq \Upsilon$$

una successione crescente di sottoinsiemi di  $\Upsilon$ . Allora

$$E_n^*(f) = \inf_{r_n \in \mathcal{S}_n} \|f - r_n\|_\Omega \xrightarrow{n} 0 \quad \forall f \in \Upsilon \text{ se e solo se } \bigcup_n \mathcal{S}_n \text{ è denso in } \Upsilon.$$

**Dimostrazione**

( $\Rightarrow$ ) Supponiamo  $E_n^*(f) = \inf_{r_n \in \mathcal{S}_n} \|f - r_n\|_\Omega \xrightarrow{n} 0$  per ogni  $f \in \Upsilon$ . Sia  $f \in \Upsilon$  e sia fissato un arbitrario  $\varepsilon > 0$ . Dalla definizione di limite si deduce che  $\exists n \in \mathbb{N}$  tale che  $E_n^*(f) < \varepsilon$ , e quindi dalle proprietà dell'estremo inferiore esiste  $r_n \in \mathcal{S}_n$  tale che  $\|f - r_n\|_\Omega < \varepsilon$ . Questo prova la densità di  $\bigcup_n \mathcal{S}_n$ .

( $\Leftarrow$ ) Sia  $\bigcup_n \mathcal{S}_n$  denso in  $\Upsilon$  e  $f \in \Upsilon$ . Poichè

$$\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{S}_n \subseteq \cdots \subseteq \Upsilon$$

la successione  $\{E_n^*(f)\}_n$  è decrescente e quindi ammette limite. Dalla densità di  $\bigcup_n \mathcal{S}_n$  si ha che  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $r_\varepsilon \in \bigcup_n \mathcal{S}_n$  tale che  $\|f - r_\varepsilon\|_\Omega < \varepsilon$ . Se  $r_\varepsilon \in \mathcal{S}_{n^*}$  allora per  $n \geq n^*$  si ha  $E_n^*(f) \leq \varepsilon$ .

Quindi per  $\varepsilon > 0$  arbitrario, essendo la successione  $\{E_n^*(f)\}_n$  decrescente, si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n^*(f) \leq \varepsilon$ . Cioè

$$E_n^*(f) = \inf_{r_n \in \mathcal{S}_n} \|f - r_n\|_\Omega \xrightarrow{n} 0 \quad \forall f \in \Upsilon.$$

□

Analogamente a quanto fatto per l'interpolazione polinomiale (1.3) possiamo associare a  $R_{n,f}^S \in \mathcal{S}_n$  la sua forma Lagrangiana

$$R_{n,f}^S = \sum_{i=0}^n f_i \ell_i^S(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

dove

$$\ell_i^S(x) = \frac{\det(V_i^S(x))}{\det(V^S)} = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{S(x) - S(x_j)}{S(x_i) - S(x_j)} \quad (1.7)$$

$$V_i^S(x) = V(S(x_0), \dots, S(x_{i-1}), S(x), S(x_{i+1}), \dots, S(x_n)).$$

Anche in questo contesto risulta utile considerare la costante di Lebesgue  $\Lambda_n^S(\Omega)$  associata alla base di Lagrange  $\mathcal{L}^S = \langle \ell_0^S, \dots, \ell_n^S \rangle$  e all'operatore di interpolazione  $\mathcal{L}_n^S : (\Upsilon, \|\cdot\|_\Omega) \rightarrow (\mathcal{S}_n, \|\cdot\|_\Omega)$ .  $\Lambda_n^S(\Omega)$  è la norma operatoriale di  $\mathcal{L}_n^S$

$$\Lambda_n^S(\Omega) = \sup_{\substack{v \in \Upsilon \\ v \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n^S(v)\|_\Omega}{\|v\|_\Omega}.$$

Possiamo ottenere per l'approccio della basi mappate un risultato analogo al Teorema 1.1

**Teorema 1.5** Se  $f \in \Upsilon$  e  $\mathcal{L}_n^S(f) = R_{n,f}^S$  si ha

$$\|f - R_{n,f}^S\|_\Omega \leq (1 + \Lambda_n^S(\Omega)) E_n^{S,*}(f)$$

dove

$$E_n^{S,*}(f) = \inf_{p \in \mathcal{S}_n} \|f - p\|_\Omega$$

è l'errore di migliore approssimazione in  $\mathcal{S}_n$ .

Enunciamo ora un teorema per determinare un *upper bound* per  $\Lambda_n^S(\Omega)$  in termini di  $\Lambda_n(\Omega)$ , la costante di Lebesgue relativa all'interpolazione polinomiale.

**Teorema 1.6** Sia  $\ell_i$  l' $i$ -esimo polinomio di Lagrange relativo ai nodi  $\{x_i : i = 0, \dots, n\}$  e sia  $\ell_i^S$  definito come in (1.7). Per ogni  $x \in \Omega$ ,  $x \neq x_j$  con  $j \neq i$  si ha che

$$\ell_i^S(x) = \gamma_i(x) \ell_i(x)$$

dove

$$\gamma_i(x) = \frac{\det(V_i^S(x))}{\sigma(S, \mathcal{X}) \det(V_i(x))}$$

con  $\sigma(S, \mathcal{X})$  come nell'osservazione (1.2). Inoltre

$$\gamma_i(x) = \frac{\beta_i(x)}{\alpha_i}$$

con

$$\alpha_i = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{S(x_i) - S(x_j)}{x_i - x_j}, \quad \beta_i(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{S(x) - S(x_j)}{x - x_j}.$$

### Dimostrazione

Per  $x = x_j$ , con  $j \neq i$ ,  $\ell_i^S(x_j) = \ell_i(x_j) = 0$ . Sia  $x \neq x_j$ , da (1.3) e (1.7) si ha

$$\frac{\ell_i^S(x)}{\ell_i(x)} = \frac{\det(V_i^S(x)) \det(V)}{\det(V_i(x)) \det(V^S)} = \frac{\det(V_i^S(x))}{\sigma(S, \mathcal{X}) \det(V_i(x))} = \gamma_i(x).$$

Sia  $x \neq x_j$

$$\begin{aligned} \ell_i^S(x) &= \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{S(x) - S(x_j)}{S(x_i) - S(x_j)} \\ &= \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \cdot \frac{x_i - x_j}{x - x_j} \cdot \frac{S(x) - S(x_j)}{S(x_i) - S(x_j)} \\ &= \underbrace{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}_{\ell_i(x)} \underbrace{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{S(x) - S(x_j)}{x - x_j}}_{\beta_i(x)} \underbrace{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x_i - x_j}{S(x_i) - S(x_j)}}_{\alpha_i^{-1}}. \end{aligned}$$

**Teorema 1.7** Con le notazioni precedenti,  $\|\cdot\|_\Omega = \|\cdot\|_\infty$

$$\Lambda_n^S(\Omega) \leq \left(\frac{L}{D}\right)^n \Lambda_n(\Omega)$$

dove

$$L = \max_j \max_{x \in \Omega} \left| \frac{S(x) - S(x_j)}{x - x_j} \right|,$$

$$D = \min_i \min_{j \neq i} \left| \frac{S(x_i) - S(x_j)}{x_i - x_j} \right|,$$

e  $\Lambda_n(\Omega)$  è la costante di Lebesgue in (1.1).

**Dimostrazione**

Grazie al Teorema 1.6, possiamo scrivere passando ai valori assoluti

$$|\ell_i^S(x)| = \frac{|\beta_i(x)|}{|\alpha_i|} |\ell_i(x)|.$$

Procediamo cercando di maggiorare  $|\beta_i|$ :

$$|\beta_i(x)| = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \left| \frac{S(x) - S(x_j)}{x - x_j} \right| \leq \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} L_i^j,$$

dove

$$L_i^j = \max_{x \in \Omega} \left| \frac{S(x) - S(x_j)}{x - x_j} \right|.$$

Quindi

$$|\beta_i(x)| \leq L_i^n, \quad \text{con } L_i = \max_{j \neq i} L_i^j.$$

Cerchiamo di minorare  $|\alpha_i|$ :

$$|\alpha_i| = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \left| \frac{S(x_i) - S(x_j)}{x_i - x_j} \right| \geq \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} D_i = D_i^n,$$

dove

$$D_i = \min_{j \neq i} \left| \frac{S(x_i) - S(x_j)}{x_i - x_j} \right|.$$

Si ha che

$$|\ell_i^S(x)| \leq \left(\frac{L_i}{D_i}\right)^n |\ell_i(x)|.$$

Definendo  $L = \max_i L_i$ ,  $D = \min_i D_i$  e considerando la somma dei polinomi di Lagrange, otteniamo

$$\Lambda_n^S(\Omega) \leq \left(\frac{L}{D}\right)^n \Lambda_n(\Omega).$$

Osserviamo che

$$L = \max_i L_i = \max_i \max_{j \neq i} L_i^j = \max_i \max_{j \neq i} \max_{x \in \Omega} \left| \frac{S(x) - S(x_j)}{x - x_j} \right| = \max_j \max_{x \in \Omega} \left| \frac{S(x) - S(x_j)}{x - x_j} \right|.$$

□

### 1.3 Approccio Fake Nodes

Sia  $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione ammissibile come nella Definizione 1.1. Per  $\tilde{x} \in S(\Omega)$ , possiamo considerare il polinomio  $P_{n,g} : S(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  interpolante  $\mathcal{F}_{n+1} = \{f_i = f(x_i) : i = 0, \dots, n\}$  nei *fake nodes*  $S(\mathcal{X}_{n+1}) = \{S(x_i) = \tilde{x}_i : i = 0, \dots, n\} \subseteq S(\Omega)$  definito da

$$P_{n,g}(\tilde{x}) = \sum_{i=0}^n c_i \tilde{x}^i,$$

per qualche funzione  $g : S(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  che appartiene a  $C^k$ ,  $k \geq 0$  e

$$g|_{S(\mathcal{X}_{n+1})} = f|_{\mathcal{X}_{n+1}}.$$

Per  $x \in \Omega$  siamo interessati a studiare la funzione

$$R_{n,f}^S(x) = P_{n,g}(S(x)) = \sum_{i=0}^n c_i S(x)^i. \quad (1.8)$$

$R_{n,f}^S$  è una funzione interpolante l'insieme originale dei nodi  $\mathcal{X}_{n+1}$  nei valori  $\mathcal{F}_{n+1}$  ed è combinazione lineare delle funzioni di base  $\mathcal{S}_n = \langle 1, S, \dots, S^n \rangle$ .

Se  $\ell_i$  è l' $i$ -esimo polinomio di Lagrange relativo ai nodi  $S(\mathcal{X}_{n+1})$ , allora per  $\tilde{x} \in S(\Omega)$  abbiamo

$$\ell_i(\tilde{x}) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{\tilde{x} - S(x_j)}{S(x_i) - S(x_j)}.$$

Prima di proseguire con l'analisi della costante di Lebesgue introduciamo delle notazioni.

$\tilde{\Upsilon} = \{g \in \mathbb{R}^{S(\Omega)} : g \circ S \in \Upsilon\}$ , se  $g \in \tilde{\Upsilon}$  allora  $\|g\|_{S(\Omega)} = \|g \circ S\|_{\Omega}$ . Osserviamo che  $(\tilde{\Upsilon}, \|\cdot\|_{S(\Omega)})$  è uno spazio vettoriale normato.

$$\Lambda_n(S(\Omega)) = \sup_{\substack{g \in \tilde{\Upsilon} \\ g \neq 0}} \frac{\|P_{n,g}\|_{S(\Omega)}}{\|g\|_{S(\Omega)}} = \sup_{\substack{g \in \tilde{\Upsilon} \\ g \neq 0}} \frac{\|P_{n,g} \circ S\|_{\Omega}}{\|g \circ S\|_{\Omega}} \stackrel{\text{iniettività } S}{=} \sup_{\substack{v \in \Upsilon \\ v \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n^S(v)\|_{\Omega}}{\|v\|_{\Omega}} = \Lambda_n^S(\Omega) \quad (1.9)$$

Utilizzando quanto appena visto e il Teorema 1.1 otteniamo

$$\|f - R_{n,f}^S\|_{\Omega} = \|g - P_{n,g}\|_{S(\Omega)} \leq (1 + \Lambda_n(S(\Omega))) E_n^*(g).$$

Se supponiamo che  $g$  sia una funzione regolare, questa disuguaglianza mostra che con una appropriata scelta della mappa  $S$ , e quindi dei nodi  $S(\mathcal{X}_{n+1})$ , possiamo migliorare il risultato rispetto alla classica interpolazione polinomiale in  $\Omega$ . La difficoltà principale di questo approccio è trovare una *buona* mappa  $S$ .

Supponiamo  $\|\cdot\|_{\Omega} = \|\cdot\|_{\infty}$  (norma della convergenza uniforme) e che  $C(\Omega) \subseteq \Upsilon$ . Con

questa scelta osserviamo che, se  $g \in \tilde{\Upsilon}$ ,  $\|g\|_{S(\Omega)} = \|g \circ S\|_\infty = \|g\|_\infty$ .  
 Consideriamo l'operatore di interpolazione:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n : \tilde{\Upsilon} &\longrightarrow \langle 1, x, \dots, x^n \rangle \\ g &\longmapsto \sum_{i=0}^n g(\tilde{x}_i) \ell_i(\tilde{x})\end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare che

$$\Lambda_n(S(\Omega)) = \|\mathcal{L}_n\| = \sup_{\tilde{x} \in S(\Omega)} \sum_{i=0}^n |\ell_i(\tilde{x})|.$$

( $\leq$ )

$$\left| \sum_{i=0}^n g(S(x_i)) \ell_i(S(x)) \right| \leq \sum_{i=0}^n |g(S(x_i))| |\ell_i(S(x))| \leq \underbrace{\|g \circ S\|_\infty}_{\|g\|_\infty} \left( \sum_{i=0}^n |\ell_i(S(x))| \right).$$

Passando all'estremo superiore con  $x \in \Omega$  otteniamo

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{i=0}^n g(\tilde{x}_i) \ell_i(\tilde{x}) \right\|_\infty &= \left\| \sum_{i=0}^n g(S(x_i)) \ell_i(S(x)) \right\|_\infty \leq \\ &\leq \|g\|_\infty \sup_{x \in \Omega} \left( \sum_{i=0}^n |\ell_i(S(x))| \right) = \|g\|_\infty \sup_{\tilde{x} \in S(\Omega)} \left( \sum_{i=0}^n |\ell_i(\tilde{x})| \right)\end{aligned}$$

quindi

$$\Lambda_n(S(\Omega)) \leq \sup_{\tilde{x} \in S(\Omega)} \sum_{i=0}^n |\ell_i(\tilde{x})|.$$

( $\geq$ ) Supponiamo che  $\sup_{\tilde{x} \in S(\Omega)} \sum_{i=0}^n |\ell_i(\tilde{x})| < +\infty$ . Fissiamo  $\varepsilon > 0$ , quindi per le proprietà dell'estremo superiore esiste  $\tilde{y} \in S(\Omega)$  tale che

$$\sup_{\tilde{x} \in S(\Omega)} \sum_{i=0}^n |\ell_i(\tilde{x})| - \varepsilon < \sum_{i=0}^n |\ell_i(\tilde{y})|.$$

$\exists f \in C(\Omega) \subseteq \Upsilon$  tale che  $\|f\|_\infty = 1$  e  $f(x_i) = \text{sgn}(\ell_i(\tilde{y}))$ , inoltre per l'iniettività di  $S$  esiste  $g \in \tilde{\Upsilon}$  tale che  $f = g \circ S$ .

$$\begin{aligned}\sup_{\tilde{x} \in S(\Omega)} \sum_{i=0}^n |\ell_i(\tilde{x})| - \varepsilon &< \sum_{i=0}^n |\ell_i(\tilde{y})| = \left| \sum_{i=0}^n g(S(x_i)) \ell_i(\tilde{y}) \right| \leq \\ &\leq \|\mathcal{L}_n(g)\|_\infty \leq \|\mathcal{L}_n\| \|g\|_\infty = \|\mathcal{L}_n\| \underbrace{\|g \circ S\|_\infty}_f = \|\mathcal{L}_n\|.\end{aligned}$$

Facendo tendere  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ricava

$$\Lambda_n(S(\Omega)) \geq \sup_{\tilde{x} \in S(\Omega)} \sum_{i=0}^n |\ell_i(\tilde{x})|.$$

Supponiamo che  $\sup_{\tilde{x} \in S(\Omega)} \sum_{i=0}^n |\ell_i(\tilde{x})| = +\infty$ . Fissiamo  $M > 0$ , quindi per le proprietà dell'estremo superiore esiste  $\tilde{y} \in S(\Omega)$  tale che

$$M \leq \sum_{i=0}^n |\ell_i(\tilde{y})|.$$

$\exists f \in C(\Omega) \subseteq \Upsilon$  tale che  $\|f\|_\infty = 1$  e  $f(x_i) = \text{sgn}(\ell_i(\tilde{y}))$ , inoltre per l'inniettività di  $S$  esiste  $g \in \tilde{\Upsilon}$  tale che  $f = g \circ S$ .

$$\begin{aligned} M &\leq \sum_{i=0}^n |\ell_i(\tilde{y})| = \left| \sum_{i=0}^n g(S(x_i)) \ell_i(\tilde{y}) \right| \leq \\ &\leq \|\mathcal{L}_n(g)\|_\infty \leq \|\mathcal{L}_n\| \|g\|_\infty = \|\mathcal{L}_n\| \underbrace{\|g \circ S\|_\infty}_f = \|\mathcal{L}_n\|. \end{aligned}$$

Facendo tendere  $M \rightarrow +\infty$  si ricava

$$\Lambda_n(S(\Omega)) = +\infty.$$

□

Per  $x \in \Omega$ , osserviamo che

$$\ell_i(\tilde{x}) = \ell_i(S(x)) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{S(x) - S(x_j)}{S(x_i) - S(x_j)} = \ell_i^S(x)$$

e come conseguenza otteniamo l'uguaglianza delle funzioni di Lebesgue

$$\Lambda_n(S(\Omega)) = \sup_{\tilde{x} \in S(\Omega)} \sum_{i=0}^n |\ell_i(\tilde{x})| = \sup_{x \in \Omega} \sum_{i=0}^n |\ell_i^S(x)| = \Lambda_n^S(\Omega).$$

## 1.4 Interpolazione Multivariata

Fino ad ora abbiamo considerato il problema dell'interpolazione e l'approccio fake nodes (FNA) solo in un contesto univariato e solo con basi polinomiali. È possibile generalizzare tale approccio [4].

Consideriamo un insieme di punti distinti  $\mathcal{X}_N = \{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, N\} \subseteq \Omega$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ . Siano  $\mathcal{F}_N = \{f(\mathbf{x}_i), i = 1, \dots, N\}$  i valori campionati da una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nei nodi  $\mathcal{X}_N$ .



Il problema dell'interpolazione consiste nel individuare una funzione  $P_f \in \mathcal{B}_N$ , con  $\mathcal{B}_N$  un fissato spazio funzionale di dimensione finita, tale che

$$P_f(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.10)$$

Possiamo assumere che

$$P_f \in \mathcal{B}_N = \langle B_1, \dots, B_N \rangle,$$

dove  $B_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , sono le *funzioni di base*. Possiamo considerare le funzioni *cardinali*, cioè le funzioni  $u_i \in \mathcal{B}_N$  che si ottengono risolvendo il sistema lineare

$$A\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad (1.11)$$

dove  $A_{ij} = B_i(\mathbf{x}_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_N(\mathbf{x}))^\top$  e  $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = (B_1(\mathbf{x}), \dots, B_N(\mathbf{x}))^\top$ . Osserviamo che  $u_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ .

Con queste nuove notazioni se  $d = 1$ , e  $\mathcal{B}_N = \mathbb{P}_{N-1}$  si ottiene:

$$A^\top = V(x_1, \dots, x_N), \quad \text{e} \quad \mathbf{u}(x) = (\ell_1(x), \dots, \ell_N(x))^\top$$

dove  $\ell_i$  è l' $i$ -esimo polinomio di Lagrange (1.3).

Per  $\mathbf{x} \in \Omega$ , dato il vettore delle funzioni cardinali  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  e il vettore dei campionamenti  $\mathbf{f} = (f(\mathbf{x}_1), \dots, f(\mathbf{x}_N))^\top$ , possiamo scrivere l'interpolante in forma cardinale

$$P_f(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^\top \mathbf{u}(\mathbf{x}).$$

La forma cardinale permette di introdurre la *costante di Lebesgue*  $\Lambda_N(\Omega)$ , che dipende dai nodi di interpolazione e dalle funzioni di base [11, 12].

$$\Lambda_N(\Omega) = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sum_{i=1}^N |u_i(\mathbf{x})|$$

La costante di Lebesgue è di fondamentale importanza per saggiare la stabilità del processo di interpolazione. Inoltre se  $d = 1$ , e  $\mathcal{B}_N = \mathbb{P}_{N-1}$  la costante di Lebesgue così definita coincide con quella definita precedentemente attraverso la norma operatoriale dell'operatore di interpolazione (1.4).

**Definizione 1.2** Diremo che il problema di interpolazione definito in (1.10) è ben posto se e solo se la matrice  $A = (B_i(\mathbf{x}_j))_{i,j=1,\dots,N}$  è non singolare.

Se il problema è ben posto il sistema lineare

$$A^\top \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f} \quad (1.12)$$

ammette una ed una sola soluzione, dove  $A$  e  $\mathbf{f}$  sono definiti sopra mente  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^\top$  è il vettore dei coefficienti incogniti. Risolvendo il sistema lineare precedente ritroviamo la forma classica dell'interpolante

$$P_f(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{b}(\mathbf{x}).$$

## 1.5 FNA Multivariato

Sia  $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  una mappa iniettiva. L'idea principale di FNA è di costruire un'interpolante  $R_f^S \in \mathcal{B}_N^S = \langle B_1^S, \dots, B_N^S \rangle = \langle B_1 \circ S, \dots, B_N \circ S \rangle$  di  $f$ , tale che

$$R_f^S(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n \alpha_i^S B_i^S(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n \alpha_i^S B_i(S(\mathbf{x})) = P_g(S(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Come nel caso univariato  $g$  deve rispettare il vincolo  $g|_{S(\mathcal{X}_N)} = f|_{\mathcal{X}_N}$ , cf. [13, 3]. La costruzione dell'interpolante  $R_f^S \in \mathcal{B}_N^S$  nei nodi  $\mathcal{X}_N$  è equivalente a costruire l'interpolante  $P_g \in \mathcal{B}_N$  nei *fake nodes*  $S(\mathcal{X}_N)$ .

Supponendo che  $\det(A^S) \neq 0$ ,  $R_f^S$  si può determinare risolvendo il sistema lineare

$$(A^S)^\top \boldsymbol{\alpha}^S = \mathbf{f}, \quad (1.13)$$

dove  $\boldsymbol{\alpha}^S = (\alpha_1^S, \dots, \alpha_N^S)^\top$ ,  $\mathbf{f}$  è il vettore dei campionamenti, e

$$A^S = \begin{pmatrix} B_1^S(\mathbf{x}_1) & \cdots & B_1^S(\mathbf{x}_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_N^S(\mathbf{x}_1) & \cdots & B_N^S(\mathbf{x}_N) \end{pmatrix}.$$

Riguardo alla forma cardinale dell'interpolante FNA enunciamo il seguente teorema.

**Teorema 1.8** *Sia  $\mathcal{X}_N = \{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, N\} \subseteq \Omega$  un insieme di punti distinti e sia  $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  una mappa iniettiva. Le funzioni  $\{u_1, \dots, u_N\}$  sono cardinali su  $S(\Omega)$  per i fake nodes  $S(\mathcal{X}_N)$  e la base  $\mathcal{B}_N$  se e solo se  $\{u_1 \circ S, \dots, u_N \circ S\} = \{u_1^S, \dots, u_N^S\}$  sono cardinali in  $\Omega$  per i nodi  $\mathcal{X}_N$  e la base  $\mathcal{B}_N^S$ .*

### Dimostrazione

Basta imporre le condizioni di cardilità (1.11) alle funzioni  $u_i^S$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

□

Grazie al teorema precedente possiamo scrivere facilmente la forma cardinale dell'interpolante come:

$$R_f^S(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^\top \mathbf{u}^S(\mathbf{x}) \quad (1.14)$$

dove  $\mathbf{u}^S(\mathbf{x}) = (u_1^S(\mathbf{x}), \dots, u_N^S(\mathbf{x}))^\top$ .

Un modo pratico per determinare la forma cardinale dell'interpolante basata sui fake nodes segue facilmente dalla sua *determinant form* (cf. [14, 15, 16]).

**Teorema 1.9** *Dato un insieme finito  $\mathcal{X}_N \subseteq \Omega$  unisolvente per lo spazio  $\mathcal{B}_N$ , sia  $\mathbf{f}$  il vettore dei campionamenti di  $f$  e  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  il vettore delle funzioni di base. Per  $\mathbf{x} \in \Omega$ , l'interpolante  $P_f$  è data da*

$$P_f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\det(A)} \det \left( \begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{b}(\mathbf{x})^\top \\ \hline \mathbf{f} & A^\top \end{array} \right)$$

dove la matrice  $A$  è tale che  $A_{ij} = B_i(\mathbf{x}_j)$ .

**Dimostrazione**

Consideriamo la funzione

$$q(\mathbf{x}) = \det \left( \begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{b}(\mathbf{x})^\top \\ \mathbf{f} & A^\top \end{array} \right) \in \mathcal{B}_N.$$

tale che

$$q(\mathbf{x}_i) = \det \left( \begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{b}(\mathbf{x}_i)^\top \\ \mathbf{f} & A^\top \end{array} \right) = \det \left( \begin{array}{c|c} -f(\mathbf{x}_i) & 0 \\ \mathbf{f} & A^\top \end{array} \right) = -f(\mathbf{x}_i) \det(A), \quad i = 1, \dots, N.$$

Da questo segue che la funzione

$$Q(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\det(A)} q(\mathbf{x}) \in \mathcal{B}_N$$

soddisfa  $Q(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

□

Utilizzando il risultato precedente si ottiene il seguente teorema.

**Teorema 1.10** *Sia  $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  una mappa iniettiva. Sia  $\mathcal{X}_N = \{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, N\} \subseteq \Omega$  un insieme di punti distinti e  $\mathcal{B}_N = \langle B_1, \dots, B_N \rangle$  delle funzioni di base tali che  $\det(A^S) \neq 0$  (1.13) e siano  $u_i^S$ ,  $i = 1, \dots, N$  le funzioni cardinali relative a  $\mathcal{B}_N^S$ . Allora l'interpolante  $R_f^S$  diventa*

$$R_f^S(\mathbf{x}) = -\det U_N^S, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

con

$$U_N^S = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{u}^S(\mathbf{x})^\top \\ \mathbf{f} & \mathbf{1}_N \end{array} \right)$$

dove  $\mathbf{1}_N$  è la matrice identità  $N \times N$ .

**Dimostrazione**

La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 1.9 sostituendo  $A$  con  $\mathbf{1}_N$ .

□

Enunciamo per il caso multivariato la proprietà (1.9).

**Teorema 1.11 (Equivalenza della costante di Lebesgue)** *Sia  $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  una mappa iniettiva. Sia  $\mathcal{X}_N = \{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, N\} \subseteq \Omega$  un insieme di punti distinti e  $\mathcal{B}_N = \langle B_1, \dots, B_N \rangle$  delle funzioni di base tali che  $\det(A^S) \neq 0$  (1.13) e siano  $u_i^S$ ,  $i = 1, \dots, N$  le funzioni cardinali relative a  $\mathcal{B}_N^S$ . Allora, la costante di Lebesgue  $\Lambda_N^S(\Omega)$  associata ai nodi  $\mathcal{X}_N$  è*

$$\Lambda_N^S(\Omega) = \Lambda_N(S(\Omega)).$$

**Dimostrazione**

$$\Lambda_N^S(\Omega) = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sum_{i=1}^N |u_i^S(\mathbf{x})| \stackrel{\text{Th. 1.8}}{=} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sum_{i=1}^N |u_i(S(\mathbf{x}))| = \sup_{\mathbf{y} \in S(\Omega)} \sum_{i=1}^N |u_i(\mathbf{y})| = \Lambda_N(S(\Omega)).$$

□

La costante di Lebesgue fornisce informazioni sulla stabilità del processo di interpolazione. Per analizzare la stabilità, studiamo la funzione che interpola nei nodi  $\mathcal{X}_N$  dei valori perturbati di  $f$ ,  $\tilde{f}(\mathbf{x}_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

**Teorema 1.12 (Stabilità)** *Sia  $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  una mappa iniettiva. Sia  $\mathcal{X}_N = \{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, N\} \subseteq \Omega$  un insieme di punti distinti e  $\mathcal{B}_N = \langle B_1, \dots, B_N \rangle$  delle funzioni di base tali che  $\det(A^S) \neq 0$  (1.13). Sia  $\mathbf{f}$  il vettore dei campionamenti di  $f$  e  $\tilde{\mathbf{f}}$  il vettore dei campionamenti perturbati di  $f$ . Siano  $R_f^S$  e  $R_{\tilde{f}}^S$  le interpolanti di  $\mathbf{f}$  e  $\tilde{\mathbf{f}}$  rispettivamente. Allora,*

$$\|R_f^S - R_{\tilde{f}}^S\|_{\infty, \Omega} \leq \Lambda_N^S(\Omega) \|\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\|_{\infty, \mathcal{X}_N}.$$

**Dimostrazione**

Supponendo che  $g|_{S(\mathcal{X}_N)} = f|_{\mathcal{X}_N}$  e che  $\tilde{g}|_{S(\mathcal{X}_N)} = \tilde{f}|_{\mathcal{X}_N}$ , deduciamo

$$\begin{aligned} \|R_f^S - R_{\tilde{f}}^S\|_{\infty, \Omega} &= \|P_g \circ S - P_{\tilde{g}} \circ S\|_{\infty, \Omega} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \left| \sum_{i=1}^N (g(S(\mathbf{x}_i)) - \tilde{g}(S(\mathbf{x}_i))) \cdot u_i(S(\mathbf{x})) \right| \leq \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sum_{i=1}^N |(g(S(\mathbf{x}_i)) - \tilde{g}(S(\mathbf{x}_i)))| \cdot |u_i(S(\mathbf{x}))| \leq \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sum_{i=1}^N |u_i(S(\mathbf{x}))| \max_{i=1, \dots, N} |g(S(\mathbf{x}_i)) - \tilde{g}(S(\mathbf{x}_i))| = \\ &= \Lambda_N(S(\Omega)) \max_{i=1, \dots, N} |f(\mathbf{x}_i) - \tilde{f}(\mathbf{x}_i)| = \\ &= \Lambda_N^S(\Omega) \|\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\|_{\infty, \mathcal{X}_N}. \end{aligned}$$

□

Il metodo FNA oltre a ereditare la costante di Lebesgue (Teorema 1.11) eredita anche l'errore di interpolazione.

**Teorema 1.13 (Ereditarietà dell'errore di interpolazione)** *Siano  $S$ ,  $\mathcal{X}_N$ ,  $f$  e  $R_f^S$  come sopra. Allora, per ogni norma, si ha*

$$\|R_f^S - f\|_{\Omega} = \|P_g - g\|_{S(\Omega)},$$

dove  $g \circ S = f$ .

**Dimostrazione**

Dall'iniettività di  $S$  segue che esiste  $g$  tale che  $g \circ S = f$ . Da questa unica scelta di  $g$  si ha

$$\|R_f^S - f\|_{\Omega} = \|P_g \circ S - g \circ S\|_{\Omega} = \|P_g - g\|_{S(\Omega)}.$$

□

Concludiamo mostrando un algoritmo in pseudo-codice per FNA, compatibile per ogni scelta della mappa  $S$  e delle funzioni di base.

---

**Algorithm 1:** Interpolazione FNA

---

**Input:**

$\mathcal{X}_N = \{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, N\} \subseteq \mathbb{R}^d$  : nodi di interpolazione;  
 $\mathbf{f} = (f(\mathbf{x}_1), \dots, f(\mathbf{x}_N))^\top$  : vettore dei campionamenti di  $f$  in  $\mathcal{X}_N$ ;  
 $\mathcal{B}_N = \{B_i, i = 1, \dots, N\}$ : funzioni di base;  
 $\mathcal{X}_M^e = \{\mathbf{x}_i^e, i = 1, \dots, M\} \subseteq \mathbb{R}^d$  : nodi di valutazione;  
 $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ : mappa iniettiva.

**1 begin**

- 2** | Costruire la matrice di interpolazione  $A_{ij}^S = B_i(S(\mathbf{x}_j))$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ ;  
**3** | Costruire la matrice di valutazione  $E_{ij}^S = B_j(S(\mathbf{x}_i^e))$ ,  $j = 1, \dots, N$ ,  $i = 1, \dots, M$ ;  
**4** | Determinare il vettore dei coefficienti  $\boldsymbol{\alpha}^S$  risolvendo  $(A^S)^\top \boldsymbol{\alpha}^S = \mathbf{f}$ ;  
**5** | Determinare l'interpolante in  $\mathcal{X}_M^e$ :  $\mathbf{R}_f^S = E^S \boldsymbol{\alpha}^S$ ;

**6 end**

**Output:**  $\mathbf{R}_f^S = (R_f^S(\mathbf{x}_1^e), \dots, R_f^S(\mathbf{x}_M^e))^\top$ .

---

**Osservazione 1.4** Il costo computazionale dell'algoritmo 1 è  $\mathcal{O}(N^3)$  operazioni floating point, che è lo stesso costo computazionale della classica interpolazione ottenuta dall'algoritmo 1 usando  $S$  come la funzione identità. Infatti, il costo addizionale è lineare e proviene dalla valutazione della funzione  $S$ , aggiungendo un costo di  $\mathcal{O}(N + M)$  operazioni floating point.

## 1.6 Quadratura nei fake nodes

Data una funzione  $f : \Omega = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , siamo interessati a calcolare

$$\mathcal{I}(f, \Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx,$$

con formule di quadratura di tipo interpolatorio. Siano  $\mathcal{X}_n = \{x_i, i = 0, \dots, n\} \subseteq \Omega$  nodi distinti, allora la classica formula di quadratura che si ottiene con  $P_n, f$  (1.3) assume la seguente forma:

$$\int_{\Omega} f(x) dx \approx \int_{\Omega} P_{n,f}(x) dx = \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \underbrace{\int_{\Omega} \ell_i(x) dx}_{w_i} = \sum_{i=0}^n f(x_i) w_i = \mathbf{w}^\top \mathbf{f}$$

dove  $\mathbf{f} = (f(x_0), \dots, f(x_n))^\top$  e i pesi  $\mathbf{w} = (w_0, \dots, w_n)^\top$  si possono calcolare risolvendo  $V^\top \mathbf{w} = \mathbf{m}$ .  $V = V(x_0, \dots, x_n)$  è la matrice di Vandermonde e  $\mathbf{m} = (m_0, \dots, m_n)^\top$  è il vettore

dei momenti della base polinomiale,  $m_i = \mathcal{I}(x^i, \Omega)$ .

Supponendo che  $f \in C^{n+1}(\Omega)$ , l'errore di quadratura assume la forma [17]

$$E_n(f) = \int_{\Omega} f(x) - P_{n,f}(x) dx = \frac{1}{(n+1)!} \mathcal{I} \left( (f^{(n+1)} \circ \xi) \omega_{n+1}, \Omega \right),$$

dove  $\xi = \xi(x)$  deriva dall'errore di interpolazione puntuale e  $\omega_{n+1}$  è il polinomio nodale

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

**Osservazione 1.5** *Si vede facilmente che*

$$|E_n(f)| \leq \max_{\eta \in \Omega} \frac{|f^{(n+1)}(\eta)|}{(n+1)!} \mathcal{I}(|\omega_{n+1}|, \Omega).$$

La costruzione precedente si può ripetere sostituendo  $P_{n,f}$  con  $R_{n,f}^S$  (1.7).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) dx &\approx \int_{\Omega} R_{n,f}^S(x) dx = \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i^S(x) dx = \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \underbrace{\int_{\Omega} \ell_i^S(x) dx}_{w_i^S} = \sum_{i=0}^n f(x_i) w_i^S = (\mathbf{w}^S)^\top \mathbf{f} \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{f} = (f(x_0), \dots, f(x_n))^\top$  e i pesi  $\mathbf{w}^S = (w_0^S, \dots, w_n^S)^\top$  si possono calcolare risolvendo  $(V^S)^\top \mathbf{w}^S = \mathbf{m}^S$ .  $V^S = V(S(x_0), \dots, S(x_n))$  è la matrice di Vandermonde e  $\mathbf{m}^S = (m_0^S, \dots, m_n^S)^\top$  è il vettore dei momenti della base,  $m_i^S = \mathcal{I}(S(x)^i, \Omega)$ .

Come visto in (1.8) l'interpolante  $R_{n,f}^S$  può essere vista come un'interpolante polinomiale  $P_{n,g}$  nei nodi  $S(\mathcal{X}_n)$ .

Se  $S$  è almeno  $C^1(\Omega)$  e  $t = S(x)$  per  $x \in \Omega$  si ha

$$\tilde{S}(t) = \frac{dS^{-1}(t)}{dt} = \frac{1}{S'(S^{-1}(t))}$$

che, considerando la forma lagrangiana dell'interpolante, porta a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} R_{n,f}^S(x) dx &= \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i^S(x) dx = \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n f(x_i) (\ell_i \circ S)(x) dx = \\ &= \int_{S(\Omega)} \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i(t) \tilde{S}(t) dt = \int_{S(\Omega)} P_{n,g}(t) \tilde{S}(t) dt. \end{aligned}$$

I pesi di quadratura diventano

$$w_i^S = \int_{\Omega} \ell_i^S(x) dx = \int_{S(\Omega)} \ell_i(t) \tilde{S}(t) dt. \quad (1.15)$$

**Teorema 1.14** Sia  $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una mappa iniettiva e  $C^1(\Omega)$ . Sia  $g$  una funzione almeno  $C^{n+1}$  tal che  $f \circ S = g$ , allora

$$E_n^S(f) = \int_{\Omega} f(x) - R_{n,f}^S(x) dx = \frac{1}{(n+1)!} \mathcal{I} \left( (g^{(n+1)} \circ \xi \circ S)(\omega_{n+1}^S \circ S), \Omega \right),$$

dove  $\xi = \xi(x)$  deriva dall'errore di interpolazione puntuale e  $\omega_{n+1}^S$  è il polinomio nodale

$$\omega_{n+1}^S(x) = \prod_{i=0}^n (x - S(x_i)).$$

Inoltre si ha

$$|E_n^S(f)| \leq \max_{\eta \in S(\Omega)} \frac{|g^{(n+1)}(\eta)|}{(n+1)!} \mathcal{I}(|\omega_{n+1}^S \tilde{S}|, S(\Omega)).$$

**Dimostrazione**

$$E_n^S(f) = \int_{\Omega} f(x) - R_{n,f}^S(x) dx = \int_{\Omega} g \circ S(x) - P_{n,g} \circ S(x) dx = \int_{S(\Omega)} (g - P_{n,g})(t) \tilde{S}(t) dt.$$

Usando l'errore di interpolazione puntuale otteniamo, [17]

$$E_n^S(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_{S(\Omega)} (g^{n+1} \circ \xi)(t) \omega_{n+1}^S(t) \tilde{S}(t) dt = \frac{1}{(n+1)!} \int_{\Omega} (g^{n+1} \circ \xi \circ S)(x) (\omega_{n+1}^S \circ S)(x) dx$$

che implica

$$|E_n^S(f)| \leq \max_{\eta \in S(\Omega)} \frac{|g^{(n+1)}(\eta)|}{(n+1)!} \mathcal{I}(|\omega_{n+1}^S \tilde{S}|, S(\Omega)).$$

□

**Osservazione 1.6** Se  $g$  è un polinomio di grado al più  $n$  allora  $E_n^S(f) = 0$ .

### 1.6.1 Formule di quadratura note

**Teorema 1.15 (Formula dei Trapezi)** Sia  $\mathcal{X}_n = \{x_k = a + kh, h = (b-a)/n, k = 0, \dots, n\}$  e

$$S : [a, b] \rightarrow [-1, 1], x \mapsto -\cos\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right)$$

allora i pesi di quadratura sono dati da

$$w_k^S = \begin{cases} \frac{h}{2}, & \text{per } k \in \{0, n\} \\ h, & \text{per } k \in \{1, \dots, n-1\} \end{cases}$$

### Dimostrazione

Siano  $\nu : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione peso di Chebyshev

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

e

$$CL_n = \left\{ c_i = -\cos\left(\frac{i\pi}{n}\right), i = 0, \dots, n \right\}$$

l'insieme dei nodi di *Chebyshev-Lobatto* in  $[-1, 1]$ . Inoltre  $S(x_k) = c_k$ .

$$S^{-1}(t) = \arccos(-t) \frac{b-a}{\pi} + a$$

$$\tilde{S}(t) = \frac{1}{S'(S^{-1}(t))} = \frac{1}{\sin\left(\frac{S^{-1}(t)-a}{b-a}\pi\right) \frac{\pi}{b-a}} = \frac{b-a}{\pi} \frac{1}{\sin(\arccos(-t))} = \frac{b-a}{\pi} \nu(t).$$

Da (1.15) si ottiene

$$w_i^S = \frac{b-a}{\pi} \int_{-1}^1 \ell_i(t) \nu(t) dt.$$

dove  $\ell_i, i = 0, \dots, n$  sono i polinomi di Lagrange calcolati in  $CL_n$ .

Dato che la formula di quadratura nei nodi di Chebyshev-Lobatto

$$\int_{-1}^1 f(x) \nu(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f(c_i) \frac{\pi}{z_i n}, \quad z_i = 2 \text{ se } i \in \{0, n\} \text{ e } 1 \text{ altrimenti}$$

ha grado di precisione almeno  $n$ , otteniamo

$$w_i^S = \frac{b-a}{\pi} \int_{-1}^1 \ell_i(t) \nu(t) dt = \frac{b-a}{\pi} \sum_{j=0}^n \ell_i(c_j) \frac{\pi}{z_j n} = \frac{b-a}{\pi} \sum_{j=0}^n \delta_{i,j} \frac{\pi}{z_j n} = \frac{b-a}{z_i n}.$$

□

**Teorema 1.16 (Formula del Punto Medio)** Sia  $\mathcal{X}_{n-1} = \{x_k = a + (2k-1)h/2, h = (b-a)/n, k = 1, \dots, n\}$  e

$$S : [a, b] \rightarrow [-1, 1], x \mapsto -\cos\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right)$$

allora i pesi di quadratura sono dati da

$$w_k^S = \frac{b-a}{n}$$



### Dimostrazione

Siano  $\nu : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione peso di Chebyshev

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

e

$$C_n = \left\{ c_i = -\cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right), i = 1, \dots, n \right\}$$

l'insieme dei nodi di *Chebyshev* in  $[-1, 1]$ . Inoltre  $S(x_k) = c_k$ .

$$\tilde{S}(t) = \frac{b-a}{\pi} \nu(t).$$

Da (1.15) si ottiene

$$w_i^S = \frac{b-a}{\pi} \int_{-1}^1 \ell_i(t) \nu(t) dt.$$

dove  $\ell_i, i = 1, \dots, n$  sono i polinomi di Lagrange calcolati in  $C_n$ .

Dato che la formula di quadratura nei nodi di Chebyshev

$$\int_{-1}^1 f(x) \nu(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(c_i) \frac{\pi}{n}$$

ha grado di precisione almeno  $n-1$ , otteniamo

$$w_i^S = \frac{b-a}{\pi} \int_{-1}^1 \ell_i(t) \nu(t) dt = \frac{b-a}{\pi} \sum_{j=1}^n \ell_i(c_j) \frac{\pi}{n} = \frac{b-a}{\pi} \sum_{j=1}^n \delta_{i,j} \frac{\pi}{n} = \frac{b-a}{n}.$$

□

### Osservazione 1.7 (Formula di Cavalieri-Simpson)

Sia  $\mathcal{X}_{2n} = \{x_k = a + kh/2, h = (b-a)/n, k = 0, \dots, 2n\}$ , vogliamo calcolare

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{2}{3} \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{3} \int_a^b f(x) dx.$$

Per calcolare il primo integrale usiamo il Teorema 1.16 mentre per il secondo usiamo il Teorema 1.15, ottenendo

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{2}{3} \frac{b-a}{n} \left( \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) \right) + \frac{1}{3} \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + \frac{f(x_{2n})}{2} \right) = \\ &= \frac{b-a}{6n} \left( f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + f(x_{2n}) \right). \end{aligned}$$

## 1.7 Problemi ai minimi quadrati

Fino ad ora abbiamo considerato il problema dell'interpolazione e l'approccio fake nodes (FNA) supponendo che esistesse sempre un'interpolante (1.2) oppure che la cardinalità delle funzioni di base coincidesse con il numero di nodi di interpolazione. Nelle applicazioni non è sempre questo il caso, in seguito generalizziamo tale approccio.

Consideriamo un insieme di punti distinti  $\mathcal{X}_N = \{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, N\} \subseteq \Omega, \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ . Siano  $\mathcal{F}_N = \{f(\mathbf{x}_i), i = 1, \dots, N\}$  i valori campionati da una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nei nodi  $\mathcal{X}_N$ . Il problema dell'interpolazione consiste nel individuare una funzione  $P_f \in \mathcal{B}_M$ , con  $\mathcal{B}_M$  un fissato spazio funzionale di dimensione finita ( $M \leq N$ ), tale che

$$P_f(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.16)$$

Possiamo assumere che  $P_f \in \mathcal{B}_M = \langle B_1, \dots, B_M \rangle$ , dove  $B_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, M$ , sono le *funzioni di base*, quindi

$$P_f(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

con  $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = (B_1(\mathbf{x}), \dots, B_M(\mathbf{x}))^\top$ . Con queste notazioni il problema dell'interpolazione si traduce nella risoluzione del seguente sistema lineare

$$A\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f} \quad (1.17)$$

dove  $A_{ij} = B_j(\mathbf{x}_i), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$  e  $\mathbf{f} = (f(\mathbf{x}_1), \dots, f(\mathbf{x}_N))^\top$ .

Il sistema lineare (1.17) non ammette sempre soluzione, quindi il problema (1.16) si può riformulare come segue:

$$\min_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^M} \|A\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{f}\|_2^2 = \min_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^M} \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^M \alpha_j B_j(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_i) \right|^2. \quad (1.18)$$

La soluzione del problema precedente (1.18) è di fatto la soluzione del sistema lineare

$$A^\top A\boldsymbol{\alpha} = A^\top \mathbf{f}$$

detto sistema delle *equazioni normali* [18]. La matrice  $A^\top A$  è non singolare se  $A$  è a rango pieno (cioè  $\text{rank}(A) = \min(M, N)$ ).

Sia  $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  una mappa iniettiva. Costruiamo un'interpolante  $R_f^S \in \mathcal{B}_M^S = \langle B_1^S, \dots, B_M^S \rangle = \langle B_1 \circ S, \dots, B_M \circ S \rangle$  di  $f$ , tale che

$$R_f^S(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \alpha_i^S B_i^S(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \alpha_i^S B_i(S(\mathbf{x})) = P_g(S(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

$g$  deve rispettare il vincolo  $g|_{S(\mathcal{X}_N)} = f|_{\mathcal{X}_N}$ . La costruzione dell'interpolante, nel senso dei minimi quadrati,  $R_f^S \in \mathcal{B}_M^S$  nei nodi  $\mathcal{X}_N$  è equivalente a costruire l'interpolante  $P_g \in \mathcal{B}_M$

nei *fake nodes*  $S(\mathcal{X}_N)$ .

$R_f^S$  si può determinare risolvendo

$$\begin{aligned} \min_{\alpha^S \in \mathbb{R}^M} \|A^S \alpha^S - \mathbf{f}\|_2^2 &= \min_{\alpha^S \in \mathbb{R}^M} \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^M \alpha_j^S B_j^S(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_i) \right|^2 = \\ &= \min_{\alpha^S \in \mathbb{R}^M} \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^M \alpha_j^S B_j(S(\mathbf{x}_i)) - g(S(\mathbf{x}_i)) \right|^2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

dove  $\alpha^S = (\alpha_1^S, \dots, \alpha_N^S)^\top$ ,  $\mathbf{f}$  è il vettore dei campionamenti, e

$$A^S = \begin{pmatrix} B_1^S(\mathbf{x}_1) & \cdots & B_M^S(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1^S(\mathbf{x}_N) & \cdots & B_M^S(\mathbf{x}_N) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M.$$

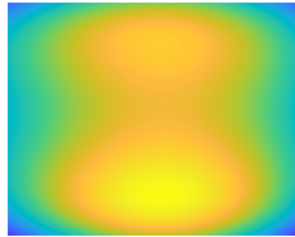
Osserviamo che

$$\begin{aligned} \min_{\alpha \in \mathbb{R}^M} \|A\alpha - \mathbf{f}\|_2^2 &= \min_{\alpha \in \mathbb{R}^M} \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^M \alpha_j B_j(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_i) \right|^2 \leq N \|P_f - f\|_{\Omega, \infty}^2, \\ \min_{\alpha^S \in \mathbb{R}^M} \|A^S \alpha^S - \mathbf{f}\|_2^2 &= \min_{\alpha^S \in \mathbb{R}^M} \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^M \alpha_j^S B_j(S(\mathbf{x}_i)) - g(S(\mathbf{x}_i)) \right|^2 \leq N \|P_g - g\|_{S(\Omega), \infty}^2. \end{aligned}$$

Questo mostra che con una appropriata scelta della mappa  $S$ , e quindi dei nodi  $S(\mathcal{X}_n)$ , è possibile migliorare il risultato rispetto alla classica interpolazione in  $\Omega$ . La difficoltà principale di questo approccio è trovare una *buona* mappa  $S$ .



Shepp-logan phantom  
Originale 384<sup>2</sup> pixel



Shepp-logan phantom  
polinomiale in 128<sup>2</sup> nodi



Shepp-logan phantom  
Fake Nodes in 128<sup>2</sup> nodi

Figura 1.1: Ricostruzione di Shepp-logan phantom a partire da 128<sup>2</sup> campionamenti. La base è costituita dai polinomi in due variabili di grado al più 4. L'interpolante polinomiale commette un errore relativo di 0.4636 mentre l'errore per l'interpolante nei fake nodes è di 0.0483.

## Capitolo 2

# Approssimazione e Integrazione su griglie arbitrarie

Il fenomeno di Runge mostra le difficoltà dell'interpolazione polinomiale nei nodi equispaziati. In questo caso l'interpolante diverge esponenzialmente con  $N \rightarrow \infty$  per ogni funzione con singolarità complesse sufficientemente vicine all'intervallo  $[-1, 1]$ . Inoltre il processo di approssimazione è mal condizionato, quindi si nota anche la divergenza dell'interpolante in precisione finita, anche per funzioni intere. Il fenomeno non è isolato ai nodi equispaziati. È noto che per evitare il fenomeno di Runge i nodi di campionamento dovrebbero raggrupparsi agli estremi dell'intervallo, come nei nodi di Chebyshev.

Se  $M + 1$  è il numero dei nodi di campionamento della funzione  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $N$  è il grado del polinomio di interpolazione, una possibile via per superare il fenomeno di Runge è quella di ridurre il grado del polinomio,  $N < M$ , e quindi risolvere un problema pesato ai minimi quadrati. Nel caso delle griglie equispaziate, supponendo  $N$  sufficientemente piccolo in confronto a  $M$ , questo porta ad una approssimazione stabile e convergente [19]. Un risultato di Coppersmith e Rivlin [20, 21] mostra che  $N$  può crescere non più velocemente di  $\sqrt{M}$ ,  $M \rightarrow \infty$  per mantenere stabilità e convergenza. Sebbene la migliore approssimazione per funzioni analitiche in  $\mathbb{P}_N$  è esponenzialmente accurata in  $N$  ( $\mathcal{O}(\rho^{-N})$  con  $\rho > 1$ ), la scelta di  $N$  si traduce nella convergenza  $\mathcal{O}(\rho^{-\sqrt{M}})$  nel numero dei nodi di campionamento. Nei prossimi paragrafi introdurremo un metodo di interpolazione basato sui *polinomi algebrici mappati*. Il corrispondente spazio di approssimazione è

$$P_N^\alpha = \{p \circ m_\alpha : p \in \mathbb{P}_N\}, \quad (2.1)$$

dove  $m_\alpha : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  è una famiglia di mappe indicizzate da un parametro  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Quando  $\alpha = 0$ ,  $P_N^\alpha$  coincide con lo spazio  $\mathbb{P}_N$  dei polinomi algebrici di grado  $N$ , e quando  $\alpha = 1$  consiste di funzioni collegate ai polinomi trigonometrici. Nella costruzione di [6] si considera una fissa, ma arbitraria, griglia di punti che vengono mappati da  $m_\alpha$  in una griglia più vicina alla distribuzione di Chebyshev. La motivazione per fare questo è quella di sopprimere la massima derivata polinomiale, e parallelamente migliorare la scelta di  $N$  in rapporto a  $M$  necessaria alla stabilità.

La scelta dell'intervallo  $[-1, 1]$  non impone alcuna limitazione perchè le costanti di Lebesgue sono invarianti per trasformazioni affini.

Siano  $\{x_i : i = 0, \dots, n\} \subseteq [a, b]$  e  $S(x) = cx + d$  una trasformazione affine allora utilizzando (1.9) si ha

$$\Lambda_n(S([a, b])) = \sup_{\tilde{x} \in S([a, b])} \sum_{i=0}^n |\ell_i(\tilde{x})| = \sup_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |\ell_i^S(x)| = \Lambda_n^S([a, b])$$

con

$$\ell_i(\tilde{x}) = \ell_i(S(x)) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{S(x) - S(x_j)}{S(x_i) - S(x_j)} = \ell_i^S(x).$$

Osserviamo che

$$\ell_i^S(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{S(x) - S(x_j)}{S(x_i) - S(x_j)} = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{(cx + d) - (cx_j + d)}{(cx_i + d) - (cx_j + d)} = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

quindi

$$\Lambda_n(S([a, b])) = \Lambda_n^S([a, b]) = \Lambda_n([a, b]).$$

## 2.1 La mappa di Kosloff e Tal-Ezer

Denotiamo lo spazio delle funzioni che sono quadrato integrabili rispetto alla funzione peso  $w(x)$  con  $L_w^2(-1, 1)$ . Il corrispondente prodotto interno è denotato da  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$  e la norma da  $\| \cdot \|_w$ . Lo spazio  $L^\infty(-1, 1)$  consiste delle funzioni limitate quasi ovunque in  $[-1, 1]$  dotato della norma della convergenza uniforme  $\| \cdot \|_\infty$ .

La mappa di Kosloff e Tal-Ezer [22] è

$$m_\alpha(x) = \frac{\sin(\alpha\pi x/2)}{\sin(\alpha\pi/2)}, \quad x \in [-1, 1], \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (2.2)$$

Per completezza, definiamo

$$m_0(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\alpha\pi x/2)}{\sin(\alpha\pi/2)} = x, \quad x \in [-1, 1].$$

Osserviamo che  $m_\alpha(x)$  è una biiezione di  $[-1, 1]$  e, in particolare,

$$m_\alpha(x) \leq m_\alpha(x') \Leftrightarrow x \leq x'.$$

Notiamo che

$$m_\alpha^{-1}(y) = \frac{2}{\alpha\pi} \arcsin(\sin(\alpha\pi/2)y),$$

e che

$$m'_\alpha(x) = \frac{\alpha\pi \cos(\alpha\pi x/2)}{2 \sin(\alpha\pi/2)} = \frac{\alpha\pi}{2\beta} \sqrt{1 - \beta^2 m_\alpha(x)^2}$$

dove

$$\beta = \sin(\alpha\pi/2). \quad (2.3)$$

Per scopi computazionali è necessario avere una base per  $P_N^\alpha$  (2.1). Sia

$$\phi_n(x) = c_n T_n(m_\alpha(x)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

dove  $T_n(y) \in \mathbb{P}_n$  è l' $n$ -esimo polinomio di Chebyshev del primo tipo e il fattore di normalizzazione  $c_n$  è dato da  $\sqrt{1/\pi}$  se  $n = 0$  e  $\sqrt{2/\pi}$  altrimenti.

**Teorema 2.1** *Le funzioni  $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$  formano una base ortonormale per lo spazio pesato  $L_{w_\alpha}^2(-1, 1)$  con peso*

$$w_\alpha(x) = \frac{\alpha\pi}{2} \frac{\cos(\alpha\pi x/2)}{\sqrt{\sin^2(\alpha\pi/2) - \sin^2(\alpha\pi x/2)}}.$$

### Dimostrazione

Le funzioni  $c_n T_n(y)$  sono ortonormali rispetto alle funzione peso di Chebyshev  $1/\sqrt{1-y^2}$ . Usando la sostituzione  $y = m_\alpha(x)$ , otteniamo

$$\int_{-1}^1 \phi_n(x) \phi_m(x) w_\alpha(x) dx = c_n c_m \int_{-1}^1 T_n(y) T_m(y) \frac{2\beta w_\alpha(m_\alpha^{-1}(y))}{\alpha\pi \sqrt{1-\beta^2 y^2}} dy,$$

dove  $\beta$  è come in (2.3). Quindi, per l'ortonormalità, richiediamo che

$$\frac{2\beta w_\alpha(m_\alpha^{-1}(y))}{\alpha\pi \sqrt{1-\beta^2 y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

□

**Osservazione 2.1** *Notiamo che si può utilizzare una qualsiasi base ortonormale di  $\mathbb{P}_N$  per costruire una base di  $P_N^\alpha$ . Si utilizzano i polinomi di Chebyshev per la loro efficienza computazionale.*

## 2.2 Fake Nodes con KT

Siano

$$-1 \leq z_0 < z_1 < \dots < z_M \leq 1$$

un insieme ordinato di  $M+1$  punti, dove  $M \geq N$  e  $Z = \{z_m : m = 0, \dots, M\}$ . Definiamo la *spaziatura massima*  $h > 0$  come

$$h = \max_{n=-1, \dots, M} \{z_{n+1} - z_n\}$$

dove  $z_{-1} = -1$  e  $z_{M+1} = 1$ . Se i nodi  $\{z_m : m = 0, \dots, M\}$  sono equispaziati allora

$$z_m = -1 + \frac{2m}{M}, \quad m = 0, \dots, M$$

quindi  $h = 2/M$ .

Dati  $\{f(z_m) : m = 0, \dots, M\}$  e lo spazio di approssimazione  $P_N^\alpha$ , possiamo ricostruire  $f$  attraverso

$$F_{N,Z}^\alpha(f) = \min_{p^\alpha \in P_N^\alpha} \sum_{m=0}^M \mu_m |f(z_m) - p^\alpha(z_m)|^2. \quad (2.5)$$

I pesi  $\mu_n$  sono definiti da

$$\mu_n = \frac{1}{2} \int_{m_\alpha(z_{n-1})}^{m_\alpha(z_{n+1})} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{2} (\arcsin(m_\alpha(z_{n+1})) - \arcsin(m_\alpha(z_{n-1}))), \quad n = 0, \dots, M.$$

In [6] si è fatta tale scelta per evitare problemi di condizionamento se  $z_0$  o  $z_M$  sono vicini agli estremi dell'intervallo. Come in (1.8)

$$F_{N,Z}^\alpha(f)(x) = G_{N,Z}^\alpha(g)(m_\alpha(x)),$$

dove  $f = g \circ m_\alpha$  e

$$G_{N,Z}^\alpha(g) = \min_{p \in \mathbb{P}_N} \sum_{m=0}^M \mu_m |g(m_\alpha(z_m)) - p(m_\alpha(z_m))|^2.$$

A questo punto è conveniente introdurre il prodotto interno discreto

$$\langle f, g \rangle_Z = \sum_{m=0}^M \mu_m f(z_m) \overline{g(z_m)}, \quad f, g \in L^\infty(-1, 1).$$

e la corrispondente semi-norma discreta  $\|\cdot\|_Z$ . Definiamo inoltre la semi-norma discreta uniforme

$$\|f\|_{Z,\infty} = \max_{m=0,\dots,M} |f(z_m)|, \quad f \in L^\infty(-1, 1).$$

Scritto in forma variazionale,  $F_{N,Z}^\alpha(f)$  è la soluzione del seguente problema:

$$\text{trovare } \tilde{f} \in P_N^\alpha \text{ tale che } \langle \tilde{f}, p \rangle_Z = \langle f, p \rangle_Z \quad \forall p \in P_N^\alpha. \quad (2.6)$$

Sia  $\{\phi_n : n = 0, \dots, M\}$  la base definita precedentemente in (2.4). Se

$$F_{N,Z}^\alpha(f) = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n$$

con  $a_n \in \mathbb{R}$  coefficienti incogniti allora il problema (2.5) è equivalente a risolvere il seguente sistema lineare nel senso dei minimi quadrati

$$Aa = b \quad (2.7)$$

dove  $A \in \mathbb{R}^{M+1 \times N+1}$  ha l'entrata  $(m+1, n+1)$  uguale a  $\sqrt{\mu_m} \phi_n(z_m)$ ,  $a = (a_0, \dots, a_N)^\top$ ,  $b = (b_0, \dots, b_M)^\top$  e  $b_m = \sqrt{\mu_m} f(z_m)$ .

**Teorema 2.2 (Teorema Min-Max)**

Sia  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matrice hermitiana. Sia  $R_A : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  il quoziente di Rayleigh-Ritz

$$R_A(x) = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle},$$

dove  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota il prodotto scalare usuale in  $\mathbb{C}^n$ . Siano  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  gli autovalori di  $A$  allora

$$\lambda_k = \min_U \{ \max \{ R_A(x) : x \in U \text{ e } x \neq 0 \} : \dim(U) = k \}$$

e

$$\lambda_k = \max_U \{ \min \{ R_A(x) : x \in U \text{ e } x \neq 0 \} : \dim(U) = n - k + 1 \}.$$

**Dimostrazione**

Dato che la matrice  $A$  è hermitiana (e quindi normale) possiamo scegliere una base ortonormale  $\{u_1, \dots, u_n\}$  tale che  $u_i$  è autovettore per l'autovalore  $\lambda_i$ . Se  $U$  è un sottospazio di dimensione  $k$  allora la sua intersezione con  $\langle u_k, \dots, u_n \rangle$  è diversa dallo spazio nullo, quindi esiste un vettore  $v \neq 0$  nell'intersezione.

Il vettore  $v$  può essere scritto come

$$v = \sum_{i=k}^n \alpha_i u_i$$

e il suo quoziente di Rayleigh-Ritz è

$$R_A(v) = \frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_{i=k}^n \alpha_i^2} \geq \lambda_k.$$

Otteniamo che

$$\max \{ R_A(x) : x \in U \text{ e } x \neq 0 \} \geq \lambda_k.$$

La relazione precedente è vera per qualunque scelta di  $U$  quindi

$$\min_U \{ \max \{ R_A(x) : x \in U \text{ e } x \neq 0 \} : \dim(U) = k \} \geq \lambda_k.$$

Se  $V = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$  allora  $\max \{ R_A(x) : x \in V \text{ e } x \neq 0 \} \leq \lambda_k$ , quindi

$$\min_U \{ \max \{ R_A(x) : x \in U \text{ e } x \neq 0 \} : \dim(U) = k \} \leq \lambda_k.$$

L'altra uguaglianza si dimostra in modo analogo.

□

Siano  $\sigma_{\max}$  e  $\sigma_{\min}$  il massimo e il minimo valore singolare della matrice  $A$  (2.7) e sia  $\mathcal{K}(A) = \sigma_{\max}/\sigma_{\min}$  il suo numero di condizionamento.



**Teorema 2.3** Sia  $y_n = m_\alpha(z_n)$  per  $n = 0, \dots, M$ . Allora

$$(\sigma_{\max})^2 = \max \left\{ \sum_{n=0}^M \mu_n |p(y_n)|^2 : p \in \mathbb{P}_N, \|p\|_w = 1 \right\},$$

$$(\sigma_{\min})^2 = \min \left\{ \sum_{n=0}^M \mu_n |p(y_n)|^2 : p \in \mathbb{P}_N, \|p\|_w = 1 \right\},$$

dove  $w(y) = 1/\sqrt{1-y^2}$  è la funzione peso di Chebyshev.

### Dimostrazione

Dal Teorema 2.2 si ottiene

$$(\sigma_{\max})^2 = \max\{R_{A^\top A}(x) : x \neq 0\} \text{ e } (\sigma_{\min})^2 = \min\{R_{A^\top A}(x) : x \neq 0\}.$$

Combinando  $R_{A^\top A}(\frac{x}{\|x\|}) = R_{A^\top A}(x)$  e l'osservazione precedente si ha

$$(\sigma_{\max})^2 = \max\{R_{A^\top A}(x) : \|x\| = 1\} \text{ e } (\sigma_{\min})^2 = \min\{R_{A^\top A}(x) : \|x\| = 1\}.$$

Se  $\|x\| = 1$  allora  $R_{A^\top A}(x) = \langle A^\top A x, x \rangle = \langle A x, A x \rangle = \|A x\|^2$ , quindi

$$(\sigma_{\max})^2 = \max\{\|A x\|^2 : \|x\| = 1\} \text{ e } (\sigma_{\min})^2 = \min\{\|A x\|^2 : \|x\| = 1\}.$$

Siano  $a = (a_0, \dots, a_N)^\top$ ,  $f = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n \in P_N^\alpha$  e  $p = f \circ m_\alpha^{-1}$ . Dato che  $p$  è somma di polinomi ortonormali per  $w$  si ha

$$\sum_{n=0}^N |a_n|^2 = \|p\|_w^2$$

e

$$\|A a\|^2 = \sum_{n=0}^M \mu_n |f(z_n)|^2 = \sum_{n=0}^M \mu_n |p(y_n)|^2.$$

□

## 2.3 Stabilità e Convergenza

Definiamo il numero di condizionamento dell'approssimazione. Dato che  $F_{N,Z}^\alpha$  è lineare il suo numero di condizionamento è dato da

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{N,Z}^\alpha = \sup_{\substack{f \in L^\infty(-1,1) \\ \|f\|_{Z,\infty} \neq 0}} \left\{ \frac{\|F_{N,Z}^\alpha(f)\|_\infty}{\|f\|_{Z,\infty}} \right\}.$$

$\mathcal{K}$  sembra una quantità difficile da analizzare in pratica. Per questa ragione lavoriamo con una quantità minore

$$\tilde{\mathcal{K}} = \tilde{\mathcal{K}}_{N,Z}^\alpha = \sup_{\substack{p \in P_N^\alpha \\ \|p\|_{Z,\infty} \neq 0}} \left\{ \frac{\|p\|_\infty}{\|p\|_{Z,\infty}} \right\} = \sup_{\substack{p \in P_N^\alpha \\ p \neq 0}} \left\{ \frac{\|p\|_\infty}{\|p\|_{Z,\infty}} \right\}.$$

La seconda uguaglianza segue dal fatto che se  $p = g \circ m_\alpha$  con  $g \in \mathbb{P}_N$  e  $M \geq N$  allora  $\|g \circ m_\alpha\|_{Z,\infty} = 0 \Leftrightarrow g \circ m_\alpha(z_m) = 0, m = 0, \dots, M \Leftrightarrow g = 0 \Leftrightarrow p = 0$ .

**Teorema 2.4**  $\tilde{\mathcal{K}} \leq \mathcal{K} \leq \sigma \tilde{\mathcal{K}}$ , dove

$$\sigma = \sqrt{\pi} \left/ \sqrt{\min_{n=0,\dots,M} \{\mu_n\}} \right.$$

Gli scalari  $\{\mu_n : n = 0, \dots, M\}$  sono definiti in (2.5).

### Dimostrazione

Dato che  $M \geq N$  e i punti  $z_0, \dots, z_M$  sono distinti la matrice  $A$  (2.7) ha rango massimo.  $F_{N,Z}^\alpha(f)$  esiste unica per ogni  $f \in L^\infty(-1, 1)$ . Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \sup_{\substack{f \in L^\infty(-1,1) \\ \|f\|_{Z,\infty} \neq 0}} \left\{ \frac{\|F_{N,Z}^\alpha(f)\|_\infty}{\|f\|_{Z,\infty}} \right\} \\ &\geq \sup_{\substack{p \in P_N^\alpha \\ \|p\|_{Z,\infty} \neq 0}} \left\{ \frac{\|F_{N,Z}^\alpha(p)\|_\infty}{\|p\|_{Z,\infty}} \right\} \\ &= \sup_{\substack{p \in P_N^\alpha \\ \|p\|_{Z,\infty} \neq 0}} \left\{ \frac{\|p\|_\infty}{\|p\|_{Z,\infty}} \right\} = \tilde{\mathcal{K}}. \end{aligned}$$

Dalla definizione di  $\tilde{\mathcal{K}}$  segue

$$\|F_{N,Z}^\alpha(f)\|_\infty \leq \tilde{\mathcal{K}} \|F_{N,Z}^\alpha(f)\|_{Z,\infty}.$$

Usiamo ora la forma variazionale (2.6) con  $\tilde{f} = p = F_{N,Z}^\alpha(f)$  e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:  $\|\tilde{f}\|_Z^2 = |\langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle_Z| = |\langle f, \tilde{f} \rangle_Z| \leq \|\tilde{f}\|_Z \|f\|_Z$ . Si ottiene che

$$\|F_{N,Z}^\alpha(f)\|_Z \leq \|f\|_Z.$$

Proseguiamo con un catena di disuguaglianze

$$\|f\|_{Z,\infty} \geq \frac{\|f\|_Z}{\sqrt{\sum_{n=0}^M \mu_n}} \geq \frac{\|F_{N,Z}^\alpha(f)\|_Z}{\sqrt{\sum_{n=0}^M \mu_n}} \geq \frac{\sqrt{\min_{n=0,\dots,M} \{\mu_n\}}}{\sqrt{\sum_{n=0}^M \mu_n}} \|F_{N,Z}^\alpha(f)\|_{Z,\infty}.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=0}^M \mu_n &= \sum_{n=0}^M \int_{m_\alpha(z_{n-1})}^{m_\alpha(z_{n+1})} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \\ &= \sum_{n=0}^M \int_{m_\alpha(z_{n-1})}^{m_\alpha(z_n)} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy + \int_{m_\alpha(z_n)}^{m_\alpha(z_{n+1})} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy + \int_{m_\alpha(z_0)}^{m_\alpha(z_M)} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \leq 2\pi \end{aligned}$$

quindi

$$\sum_{n=0}^M \mu_n \leq \pi$$

e si ottiene la tesi. □

### Teorema 2.5

$$\|f - F_{N,Z}^\alpha(f)\|_\infty \leq (1 + \sigma\tilde{\mathcal{K}})E_N^\alpha(f), \quad E_N^\alpha(f) = \inf_{p \in P_N^\alpha} \|f - p\|_\infty.$$

#### Dimostrazione

Per ogni  $p \in P_N^\alpha$  si ha

$$\|f - F_{N,Z}^\alpha(f)\|_\infty \leq \|f - p\|_\infty + \|p - F_{N,Z}^\alpha(f)\|_\infty = \|f - p\|_\infty + \|F_{N,Z}^\alpha(p - f)\|_\infty \leq (1 + \mathcal{K})\|f - p\|_\infty.$$

Si conclude utilizzando il Teorema 2.4. □

**Osservazione 2.2** *Il nostro obiettivo è quello di scegliere  $\alpha$  e  $N$  in modo tale da rendere  $E_N^\alpha(f)$  il più piccolo possibile. Questo deve essere bilanciato con il fatto che la migliore scelta per minimizzare  $E_N^\alpha(f)$  può portare ad un grande numero di condizionamento  $\tilde{\mathcal{K}}$ .*

### 2.3.1 Comportamento dell'errore di migliore approssimazione

Per analizzare  $E_N^\alpha(f)$  ci concentriamo sulle funzioni analitiche. Sia

$$B(\rho) = \left\{ \frac{1}{2}(\rho^{-1}e^{i\theta} + \rho e^{-i\theta}) : -\pi \leq \theta < \pi \right\} \subseteq \mathbb{C}$$

l'ellisse di Bernstein nel piano complesso di indice  $\rho \geq 1$  e scriviamo  $D_\alpha(\rho)$  per l'immagine di  $B(\rho)$  attraverso la mappa  $m_\alpha^{-1}(y)$ .

**Teorema 2.6** [23, 6] *Siano  $N \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq \alpha < 1$ , supponiamo che  $f$  sia analitica in  $D_\alpha(\rho')$  per qualche  $\rho' > 1$  e continua sulla sua frontiera. Allora*

$$E_N^\alpha(f) \leq \frac{2c^\alpha(f)}{\rho - 1} \rho^{-N}, \quad c^\alpha(f) = \max_{z \in D_\alpha(\rho)} |f(z)|,$$

dove

$$\rho = \min \left\{ \cot \left( \frac{\alpha\pi}{4} \right), \rho' \right\}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \rho = \rho', \quad \alpha = 0.$$

**Osservazione 2.3** *Quando  $\alpha = 0$ , cioè quando  $P_N^\alpha = \mathbb{P}_N$ , allora  $\rho = \rho'$  e si ritrova il risultato usuale per l'approssimazione polinomiale. Per gli altri valori di  $\alpha$ , il tasso di convergenza geometrico di  $E_N^\alpha(f)$  è limitato da  $\cot(\frac{\alpha\pi}{4})$  a causa delle singolarità introdotte dalla mappa  $m_\alpha^{-1}$ . Tuttavia, se  $0 \leq \alpha < 1$  il tasso di convergenza rimane geometrico.*

**Teorema 2.7** *Sia  $N$  pari, lo spazio  $P_N^\alpha$  ammette la seguente espressione equivalente*

$$P_N^\alpha = \left\{ \sum_{n=0}^{N/2} a_n \cos(\alpha n \pi x) + \sum_{n=1}^{N/2} b_n \sin(\alpha(n-1/2)\pi x) : a_n, b_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

*L'insieme  $\{\cos(\alpha n \pi x)\}_0^\infty \cup \{\sin(\alpha(n-1/2)\pi x)\}_0^\infty$  è la base ortogonale delle autofunzioni dell'operatore di Laplace su  $[-1/\alpha, 1/\alpha]$ .*

**Dimostrazione**

Grazie a [24], si ha

$$\cos(\alpha n \pi x) = (-1)^n T_{2n}(\sin(\frac{\alpha\pi}{2}x)) = (-1)^n T_{2n}(\sin(\frac{\alpha\pi}{2})m_\alpha(x))$$

e

$$\sin(\alpha(n-1/2)\pi x) = (-1)^{n-1} T_{2n-1}(\sin(\frac{\alpha\pi}{2}x)) = (-1)^{n-1} T_{2n-1}(\sin(\frac{\alpha\pi}{2})m_\alpha(x)).$$

Le funzioni  $\{T_{2n}(\sin(\frac{\alpha\pi}{2})m_\alpha(x))\}_{n=0}^{N/2} \cup \{T_{2n-1}(\sin(\frac{\alpha\pi}{2})m_\alpha(x))\}_{n=1}^{N/2}$  formano una base per  $P_N^\alpha$ .

□

Questa proposizione mostra che lo spazio  $P_N^1$  è legato allora spazio dei polinomi trigonometrici (il caso con  $N$  dispari è analogo). Infatti, se il fattore  $(n-1/2)$  venisse sostituito con  $n$ , allora lo spazio  $P_N^1$  sarebbe precisamente lo spazio dei polinomi trigonometrici in  $[-1, 1]$ . In [25] viene mostrato che il tasso di convergenza è limitato a  $\mathcal{O}(N^{-1})$  a meno che la funzione  $f$  non rispetti specifiche condizioni, analoghe alle condizioni di periodicità per l'approssimazione con le funzioni trigonometriche. In generale la scelta  $\alpha = 1$  risulta in ordini di convergenza minore (algebrico con indice 1), anche per funzioni analitiche.

Oltre a variare  $\alpha$  è possibile fare tendere  $\alpha = \alpha_N \rightarrow 1^-$  per  $N \rightarrow \infty$ .

La seguente scelta di  $\alpha$  è motivata dal Teorema 2.6 . Sia  $\varepsilon > 0$ , la tolleranza fissata dall'utente. Dato che l'errore di migliore approssimazione è proporzionale a  $(\cot(\alpha\pi/4))^{-N}$ , la scelta

$$\alpha_N = \frac{4}{\pi} \arctan(\varepsilon^{1/N})$$

fornisce

$$(\cot(\alpha_N\pi/4))^{-N} = \varepsilon.$$

Se  $\varepsilon$  è sufficientemente piccolo (cioè dell'ordine della precisione di macchina), ci aspettiamo un piccolo errore di approssimazione, anche se la classica convergenza di  $E_N^\alpha(f)$  a zero non è più garantita. Osserviamo che

$$\alpha_N = 1 - \frac{2|\log(\varepsilon)|}{N\pi} + \mathcal{O}(N^{-2}), \quad N \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

### 2.3.2 Una disuguaglianza di Markov per $P_N^\alpha$

Prima di proseguire con l'analisi del metodo introduciamo alcuni risultati [26].

**Teorema 2.8 (Disuguaglianza di Bernstein)**

$$\|t^{(m)}\|_\infty \leq n^m \|t\|_\infty$$

per ogni  $t \in \left\{ t : t(z) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kz) + b_k \sin(kz)), a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}$ .

**Teorema 2.9 (Disuguaglianza di Bernstein)** La disuguaglianza

$$|p'(x)| \leq \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \|p\|_{\infty, [-1,1]}, \quad -1 < x < 1$$

vale per ogni  $p \in \mathbb{P}_n$ .

**Teorema 2.10 (Disuguaglianza di Markov)** La disuguaglianza

$$\|p'\|_{\infty, [-1,1]} \leq n^2 \|p\|_{\infty, [-1,1]}$$

vale per ogni  $p \in \mathbb{P}_n$ .

Grazie ai precedenti risultati possiamo mostrare

**Teorema 2.11**

$$\|(p^\alpha)'\|_\infty \leq C_N^\alpha \|p^\alpha\|_\infty \quad \forall p^\alpha \in P_N^\alpha$$

dove

$$C_N^\alpha \leq \frac{\alpha\pi}{2} N \sqrt{1 + \cot^2(\alpha\pi/2) N^2}.$$

**Dimostrazione**

Ricordiamo che  $p^\alpha(x) = p \circ m_\alpha(x)$ , dove  $p \in \mathbb{P}_N$ . Si ha che  $\|p^\alpha\|_\infty = \|p\|_\infty$  e

$$(p^\alpha)'(x) = p'(m_\alpha(x)) m_\alpha'(x) = \frac{\alpha\pi}{2\beta} p'(m_\alpha(x)) \sqrt{1 - \beta^2 m_\alpha^2(x)}$$

con  $\beta = \sin(\alpha\pi/2)$ . Quindi

$$\|(p^\alpha)'\|_\infty = \frac{\alpha\pi}{2\beta} \max_{-1 \leq y \leq 1} |p'(y) \sqrt{1 - \beta^2 y^2}|.$$

Dalla disuguaglianza di Bernstein si ricava

$$|p'(y) \sqrt{1 - y^2}| \leq N \|p\|_\infty, \quad p \in \mathbb{P}_N, -1 \leq y \leq 1.$$

Ora consideriamo  $|p'(y) \sqrt{1 - \beta^2 y^2}|$ . Sia  $0 < \tau < 1$  e supponiamo  $|y| \leq \sqrt{1 - \tau}$ . Allora

$$|p'(y) \sqrt{1 - \beta^2 y^2}| = \sqrt{\frac{1 - \beta^2 y^2}{1 - y^2}} |p'(y) \sqrt{1 - y^2}| = \sqrt{\beta^2 + \frac{1 - \beta^2}{1 - y^2}} |p'(y) \sqrt{1 - y^2}|.$$

Dalle ipotesi su  $y$  si ha

$$|p'(y)\sqrt{1-\beta^2y^2}| \leq \sqrt{\beta^2 + \frac{1-\beta^2}{\tau}}N\|p\|_\infty, \quad |y| < \sqrt{1-\tau}.$$

Supponiamo che  $\sqrt{1-\tau} \leq |y| \leq 1$ . Allora, con la disuguaglianza di Markov otteniamo

$$|p'(y)\sqrt{1-\beta^2y^2}| \leq \sqrt{1-\beta^2(1-\tau)}N^2\|p\|_\infty, \quad \sqrt{1-\tau} \leq |y| \leq 1.$$

Combiniamo le stime precedenti:

$$|p'(y)\sqrt{1-\beta^2y^2}| \leq \max \left\{ \sqrt{\beta^2 + \frac{1-\beta^2}{\tau}}N, \sqrt{\beta^2\tau + (1-\beta^2)N^2} \right\} \|p\|_\infty.$$

Se  $\tau = 1/N^2$  abbiamo

$$\begin{aligned} \|(p^\alpha)'\|_\infty &= \frac{\alpha\pi}{2\beta} \max_{-1 \leq y \leq 1} |p'(y)\sqrt{1-\beta^2y^2}| \\ &\leq \frac{\alpha\pi}{2\beta} \max \left\{ \sqrt{\beta^2 + (1-\beta^2)N^2}N, \sqrt{\frac{\beta^2}{N^2} + (1-\beta^2)N^2} \right\} \|p\|_\infty \\ &= \frac{\alpha\pi}{2\beta} N \max \left\{ \sqrt{\beta^2 + (1-\beta^2)N^2}, \sqrt{\beta^2 + (1-\beta^2)N^2} \right\} \|p\|_\infty \\ &= \frac{\alpha\pi}{2} N \sqrt{1 + \cot^2(\alpha\pi/2)N^2} \|p\|_\infty. \end{aligned}$$

□

**Osservazione 2.4** Se  $\alpha = 1$  lo spazio  $P_N^1$  non è lo spazio dei polinomi trigonometrici ma soddisfa la disuguaglianza di Bernstein (Teorema 2.8). Se  $\alpha = 0$  la disuguaglianza trovata si riduce alla disuguaglianza di Markov (Teorema 2.10).

Il Teorema 2.11 permette di stimare la costante di Lebesgue.

**Teorema 2.12**

$$\tilde{\mathcal{K}}_{N,Z}^\alpha \leq \frac{1}{1 - hC_N^\alpha/2}.$$

Sia  $c \geq 1$ , allora

$$\tilde{\mathcal{K}}_{N,Z}^\alpha \leq c$$

se  $N$  e  $\alpha$  soddisfano

$$N \sqrt{1 + \cot^2(\alpha\pi/2)N^2} \leq \frac{4(1-1/c)}{\alpha\pi h}.$$

**Dimostrazione**

Sia  $x \in [-1, 1]$ . Allora esiste  $m \in \{-1, \dots, M+1\}$  tale che  $|x - z_m| \leq h/2$ . Dal teorema del valore medio si ha

$$|p^\alpha(x)| \leq |p^\alpha(z_m)| + |x - z_m| \|(p^\alpha)'\|_\infty \leq \|p^\alpha\|_{Z,\infty} + hC_N^\alpha/2 \|p^\alpha\|_\infty.$$

Passando all'estremo superiore si ottiene

$$\|p^\alpha\|_\infty \leq \frac{1}{1 - hC_N^\alpha/2} \|p^\alpha\|_{Z,\infty}.$$

Questo dimostra la prima parte della proposizione.

Se  $N\sqrt{1 + \cot^2(\alpha\pi/2)N^2} \leq \frac{4(1-1/c)}{\alpha\pi h}$  allora

$$C_N^\alpha \leq \frac{\alpha\pi}{2} N\sqrt{1 + \cot^2(\alpha\pi/2)N^2} \leq \frac{2(1-1/c)}{h} \Rightarrow \frac{1}{1 - hC_N^\alpha/2} \leq c.$$

□

**( $\alpha = 0$ )**  $P_0^N$  è lo spazio  $\mathbb{P}_N$  dei polinomi di grado al più  $N$ . Una condizione sufficiente per garantire la limitatezza della costante di Lebesgue è

$$N \leq 2\sqrt{\frac{1-1/c}{\pi h}},$$

cioè  $N = \mathcal{O}(1/\sqrt{h})$  con  $h \rightarrow 0$ . Anche se i polinomi algebrici hanno buone proprietà di approssimazione intrinseche, la limitazione di  $N$  in rapporto a  $M$  produce un poco desiderabile tasso di convergenza in termini di  $h$ . La severità di questa limitazione è dovuta al comportamento delle derivate dei polinomi, in particolare al fatto che  $\|p'\|_\infty$  cresce come  $N^2\|p\|_\infty$  (Teorema 2.10).

**( $\alpha = 1$ )** Una condizione sufficiente per garantire la limitatezza della costante di Lebesgue è

$$N \leq \frac{4(1-1/c)}{\pi h},$$

cioè  $N = \mathcal{O}(1/h)$  con  $h \rightarrow 0$ . Come discusso precedentemente la migliore approssimazione  $E_N^1(f)$  decade lentamente. La scelta  $\alpha = 1$  supera il problema  $N = \mathcal{O}(1/\sqrt{h})$  ma perde le buone proprietà dell'approssimazione polinomiale algebrica.

**( $0 < \alpha < 1$ )** In questo caso la condizione per la limitatezza della costante di Lebesgue si traduce in  $N = \mathcal{O}(1/\sqrt{h})$  con  $h \rightarrow 0$ . È la stessa condizione che si trova con  $\alpha = 0$ . Un risultato di [27] mostra che nessun algoritmo stabile per approssimare funzioni su nodi equispaziati può convergere meglio di  $\mathcal{O}(\rho^{-\sqrt{M}})$  con  $\rho > 1$  in funzione del numero dei punti  $M$ . Questo risultato mostra che la condizione sufficiente  $N = \mathcal{O}(1/\sqrt{h}) = \mathcal{O}(\sqrt{M})$  per i nodi equispaziati è anche necessaria. In caso contrario l'approssimazione sarebbe sicuramente mal condizionata.

**( $\alpha = 4/\pi \arctan(\varepsilon^{1/N})$ )** Una stima asintotica produce il risultato  $N = \mathcal{O}(1/h)$  con  $h \rightarrow 0$ . La condizione è analoga al caso  $\alpha = 1$ , ma ci aspettiamo risultati migliori per questo approccio se  $\varepsilon$  è sufficientemente piccolo. Questa affermazione non contraddice il risultato di [27] perchè non è più garantita la convergenza a zero in senso usuale.

### 2.3.3 Il numero di condizionamento del sistema ai minimi quadrati pesato

**Teorema 2.13** [6] *Supponiamo che la spaziatura massima della griglia  $h \leq 1/2$ . Allora il numero di condizionamento della matrice  $A$  (2.7) soddisfa*

$$\mathcal{K}(A) \leq \sqrt{\frac{1 + \Theta(\alpha, N, h)}{1 - \Theta(\alpha, N, h)}},$$

dove, per ogni  $0 < \delta < N$ ,

$$\begin{aligned} \Theta(\alpha, N, h) \leq c \left( Nh + N\sqrt{h}\sqrt{1-\alpha} + \delta^2 \left( \frac{h^2 N^2}{\delta^2} + \frac{hN}{\delta} + \frac{hN^2(1-\alpha)}{\delta^2} \right)^2 \right. \\ \left. + \sqrt{\delta^2 + h^2 N^2 + hN^2 \sqrt{1 - \beta^2(1 - \delta^2/N^2)^2}} \right) \end{aligned}$$

per qualche costante  $c > 0$  indipendente da  $\delta, \alpha, N$  e  $h$ , dove  $\beta = \sin(\alpha\pi/2)$ .

**Teorema 2.14** *Consideriamo i seguenti casi:*

1.  $0 \leq \alpha < 1$ ,
2.  $\alpha = 1$ .

Per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $c_0(\varepsilon) > 0$  tale che

$$\mathcal{K}(A) \leq \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}}$$

se  $N \leq c_0(\varepsilon)h^{-\gamma}$ , dove  $\gamma$  soddisfa

1.  $\gamma = 1/2$ ,
2.  $\gamma = 1$ .

#### Dimostrazione

Usando il Teorema 2.13 basta trovare sotto quali condizioni  $\Theta(\alpha, N, h) \leq \varepsilon$ . Supponiamo  $\alpha = 1$ , allora

$$\begin{aligned} \Theta(\alpha, N, h) &\leq c \left( Nh + \delta^2 \left( \frac{h^2 N^2}{\delta^2} + \frac{hN}{\delta} \right)^2 + \sqrt{\delta^2 + h^2 N^2 + hN^2 \sqrt{1 - (1 - \delta^2/N^2)^2}} \right) \\ &= c \left( Nh + \delta^2 \left( \frac{h^2 N^2}{\delta^2} + \frac{hN}{\delta} \right)^2 + \sqrt{\delta^2 + h^2 N^2 + hN^2 \sqrt{2(\delta^2/N^2) - (\delta^2/N^2)^2}} \right) \\ &\leq c \left( Nh + \delta^2 \left( \frac{h^2 N^2}{\delta^2} + \frac{hN}{\delta} \right)^2 + \sqrt{\delta^2 + h^2 N^2 + hN^2 \sqrt{2(\delta^2/N^2)}} \right). \end{aligned}$$



Se  $\delta = Nh$  allora

$$\Theta(\alpha, N, h) \leq c \left( Nh + (Nh)^2 \left( 1 + 1 \right)^2 + \sqrt{(Nh)^2 + h^2 N^2 + (hN)^2 \sqrt{2}} \right).$$

Si conclude supponendo  $Nh$  sufficientemente piccolo.

Supponiamo  $0 \leq \alpha < 1$ ,  $h \leq 1/2$  allora

$$\begin{aligned} \Theta(\alpha, N, h) &\leq c \left( Nh + N\sqrt{h} + \delta^2 \left( \frac{h^2 N^2}{\delta^2} + \frac{hN}{\delta} + \frac{hN^2}{\delta^2} \right)^2 + \sqrt{\delta^2 + h^2 N^2 + hN^2} \right) \\ &\leq c \left( Nh + N\sqrt{h} + \left( \frac{h^2 N^2}{\delta} + hN + \frac{hN^2}{\delta} \right)^2 + \sqrt{\delta^2 + hN^2 + hN^2} \right) \\ &\leq c \left( \sqrt{h}N + N\sqrt{h} + \left( \frac{hN^2}{\delta} + hN + \frac{hN^2}{\delta} \right)^2 + \sqrt{\delta^2 + hN^2 + hN^2} \right). \end{aligned}$$

Se  $\delta = \sqrt{h}N$  allora

$$\begin{aligned} \Theta(\alpha, N, h) &\leq c \left( \sqrt{h}N + N\sqrt{h} + \left( \sqrt{h}N + hN + \sqrt{h}N \right)^2 + \sqrt{(\sqrt{h}N)^2 + hN^2 + hN^2} \right) \\ &\leq c \left( \sqrt{h}N + N\sqrt{h} + \left( \sqrt{h}N + \sqrt{h}N + \sqrt{h}N \right)^2 + \sqrt{(\sqrt{h}N)^2 + hN^2 + hN^2} \right). \end{aligned}$$

Si conclude supponendo  $\sqrt{h}N$  sufficientemente piccolo.

□

**Osservazione 2.5** *I vincoli di  $N$  rispetto a  $h$  che garantiscono un buon condizionamento del sistema lineare coincidono con i vincoli che garantiscono stabilità e accuratezza dell'approssimazione.*

La Figura 2.1 mostra il numero di condizionamento  $\mathcal{K}(A)$  della matrice  $A$  (2.7) calcolata nei nodi equispaziati per quattro scelte del rapporto  $N/M$ . Come ci si aspetta quando  $N/M = 1$ ,  $\mathcal{K}(A)$  risulta troppo elevato per scopi pratici. Notiamo che il numero di condizionamento migliora significativamente quando il rapporto  $N/M$  diminuisce. La linea nera delle figure rappresenta la curva  $\alpha = 1 + \frac{2 \log(\varepsilon)}{N\pi}$  con  $\varepsilon = 10^{-12}$ .

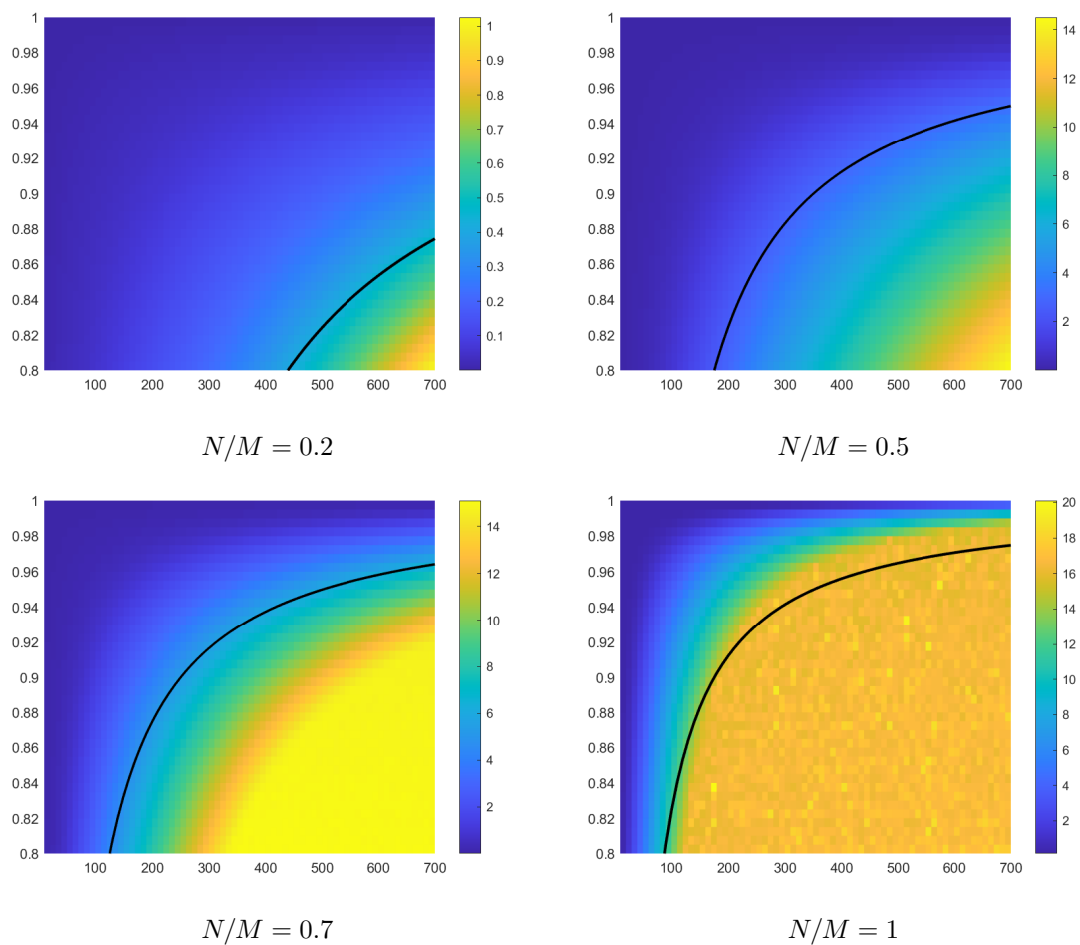


Figura 2.1: Numero di condizionamento della matrice  $A$  (2.7) per diversi valori di  $M$  e  $\alpha$ . L'asse delle ascisse rappresenta il numero di punti utilizzato per il processo di approssimazione, le ordinate descrivono il parametro  $\alpha$  del metodo. I colori del grafico mostrano  $\log_{10}(\mathcal{K}(A))$ .

La Figura 2.2 mostra che la scelta  $\alpha = 1 + \frac{2\log(\epsilon)}{N\pi}$  con  $\epsilon = 10^{-12}$  porta a computazioni stabili quando il problema di approssimazione si risolve usando i polinomi di Chebyshev mappati come base di approssimazione. Notiamo che  $\mathcal{K}(A)$  rimane limitato da  $10^3$  per valori pratici di  $M$ .

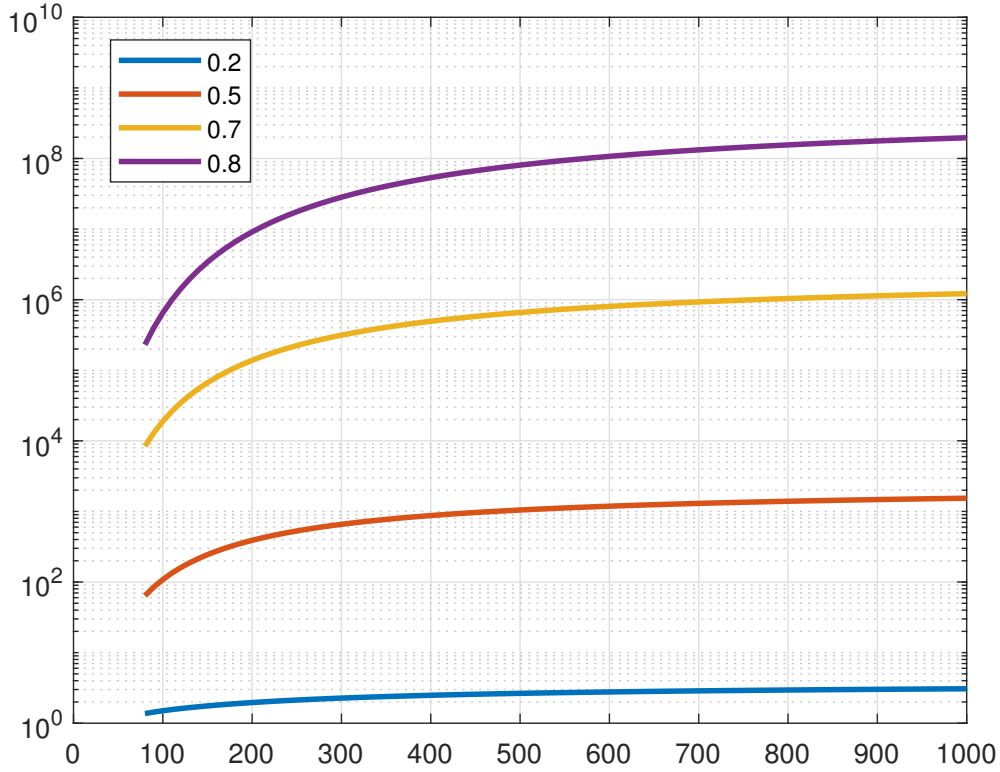


Figura 2.2: Numero di condizionamento della matrice  $A$  (2.7) per diversi valori di  $M$  (numero di punti equispaziati) e quattro rapporti  $N/M$ . Il parametro del metodo è scelto in modo tale che  $\alpha = 1 + \frac{2 \log(\epsilon)}{N\pi}$  con  $\epsilon = 10^{-12}$ . L'asse delle ordinate descrive il numero di condizionamento  $\mathcal{K}(A)$ .

## 2.4 Computazione dei pesi di KT con la base di Chebyshev

Nella sezione 1.6 per calcolare i pesi di quadratura si utilizza la base polinomiale  $\{x^i : i = 0, \dots, N\}$ , in questo caso decidiamo di utilizzare come base i polinomi di Chebyshev  $\{T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), n = 0, \dots, N\}$ .

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx (\mathbf{w}^\alpha)^\top \mathbf{f}$$

dove  $\mathbf{f} = (f(x_0), \dots, f(x_N))^\top$  e i pesi  $\mathbf{w}^\alpha = (w_0^\alpha, \dots, w_N^\alpha)^\top$  si possono calcolare risolvendo

$$A^\alpha \mathbf{w}^\alpha = \mathbf{m}^\alpha.$$

In questo sistema  $\mathbf{m}^\alpha = (m_0^\alpha, \dots, m_N^\alpha)^\top$  è il vettore dei momenti della base con

$$m_i^\alpha = \int_{-1}^1 T_i(m_\alpha(x)) dx,$$

mentre  $A_{i,j}^\alpha = T_i(m_\alpha(x_j))$ .

**Teorema 2.15** *La quantità*

$$m_i^\alpha = \int_{-1}^1 T_i(m_\alpha(x)) dx$$

*corrisponde al coefficiente  $i$ -esimo della trasformata del coseno della funzione*

$$g_\alpha(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2(\alpha\pi/2)} - \cos^2(t)}} \frac{1}{\alpha}, \quad t \in [0, \pi].$$

**Dimostrazione**

Per calcolare il vettore dei momenti della base utilizziamo come cambio di variabile

$$t(x) = \arccos\left(\frac{\sin(\alpha\pi x/2)}{\sin(\alpha\pi/2)}\right)$$

e osservando che

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx}(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(t(x))}} \frac{\alpha\pi \cos(\alpha\pi x/2)}{2 \sin(\alpha\pi/2)} \\ &= -\frac{1}{\sin(t(x))} \frac{\alpha\pi \sqrt{1 - \sin^2(\alpha\pi x/2)}}{2 \sin(\alpha\pi/2)} \\ &= -\frac{1}{\sin(t(x))} \frac{\alpha\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{\sin^2(\alpha\pi/2)} - \cos^2(t(x))} \end{aligned}$$

otteniamo

$$\int_{-1}^1 T_n(m_\alpha(x)) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt) \underbrace{\frac{\sin(t)}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2(\alpha\pi/2)} - \cos^2(t)}} \frac{1}{\alpha}}_{g_\alpha(t)} dt.$$

Sia  $\tilde{g}_\alpha$  l'estensione pari di  $g_\alpha$  in  $[-\pi, \pi]$  allora il suo sviluppo in serie di Fourier è

$$\tilde{g}_\alpha(t) = \frac{\mathcal{F}_{\cos}(g_\alpha)(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\cos}(g_\alpha)(n) \cos(nt).$$

Con questi calcoli abbiamo mostrato che

$$\int_{-1}^1 T_n(m_\alpha(x)) dx = \mathcal{F}_{\cos}(g_\alpha)(n).$$

□

Concludiamo mostrando un algoritmo in pseudo-codice per l'interpolazione e la quadratura con la mappa di Kosloff e Tal-Ezer.

---

**Algorithm 2:** Interpolazione e Quadratura con KT

---

**Input:**

$\mathcal{X}_M = \{\mathbf{x}_i, i = 0, \dots, M\} \subseteq \mathbb{R}$  : nodi di interpolazione;  
 $N \leq M$  : grado del polinomio di interpolazione;  
 $\boldsymbol{\mu} = (\sqrt{\mu_0}, \dots, \sqrt{\mu_M})^\top$  : pesi per il problema ai minimi quadrati (Sezione 2.2);  
 $\mathbf{f} = (f(\mathbf{x}_0), \dots, f(\mathbf{x}_M))^\top$  : vettore dei campionamenti di  $f$  in  $\mathcal{X}_M$ ;  
 $m_\alpha : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ : mappa di Kosloff e Tal-Ezer di parametro  $\alpha$ .

**1 begin**

- 2** | Calcolo del vettore dei momenti  $\mathbf{m}^\alpha \in \mathbb{R}^{N+1}$  attraverso la trasformata discreta del coseno di  $g_\alpha$  (Teorema 2.15);
- 3** | Costruzione della matrice di normalizzazione della base di Chebyshev :  
 $C = \text{diag}(\sqrt{1/\pi}, \sqrt{2/\pi}, \dots, \sqrt{2/\pi}) \in \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^{N+1}$ ;
- 4** | Costruzione della matrice dei pesi per il problema ai minimi quadrati :  
 $W = \text{diag}(\sqrt{\mu_0}, \dots, \sqrt{\mu_M}) \in \mathbb{R}^{M+1} \times \mathbb{R}^{M+1}$ ;
- 5** | Costruzione della matrice di interpolazione con la base di Chebyshev :  
 $F \in \mathbb{R}^{M+1} \times \mathbb{R}^{N+1}$ ,  $F_{i,j} = T_{j-1}(m_\alpha(x_{i-1}))$ ,  $i = 1, \dots, M+1$ ,  $j = 1, \dots, N+1$ ;
- 6** | Costruzione della matrice del problema ai minimi quadrati pesato:  
 $A = WFC \in \mathbb{R}^{M+1} \times \mathbb{R}^{N+1}$ ;
- 7** | Determinare il vettore dei coefficienti  $\boldsymbol{\gamma}$  risolvendo  $A\boldsymbol{\gamma} = W\mathbf{f}$  nel senso dei minimi quadrati;
- 8** | Determinare l'approssimazione dell'integrale in  $[-1, 1]$  :  $\mathbf{I} = \boldsymbol{\gamma}^\top C\mathbf{m}^\alpha$ .

**9 end**

**Output:** Vettore dei pesi di interpolazione  $\boldsymbol{\gamma}$  e approssimazione dell'intergrale  $\mathbf{I}$ .

---

### Vettore dei momenti e base monomiale standard

Proseguiamo il paragrafo discutendo il caso della base monomiale standard. Se utilizziamo la base polinomiale  $\{x^i : i = 0, \dots, N\}$  è possibile esprimere esplicitamente il vettore dei momenti.

$$\int_{-1}^1 \left( \frac{\sin(\alpha \frac{\pi}{2} x)}{\sin(\alpha \frac{\pi}{2})} \right)^n dx = \frac{1}{\sin(\alpha \frac{\pi}{2})^n} \int_{-1}^1 \sin(\alpha \frac{\pi}{2} x)^n dx$$

Concentriamoci sull'integrale  $\int_{-1}^1 \sin(\alpha \frac{\pi}{2} x)^n dx$ .

**Teorema 2.16** *Sia  $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , allora vale la seguente formula ricorsiva*

$$\int_{-1}^1 \sin(Cx)^n dx = -\frac{1}{n} \left[ \sin(Cx)^{n-1} \frac{\cos(Cx)}{C} \right]_{-1}^1 + \frac{(n-1)}{n} \int_{-1}^1 \sin(Cx)^{n-2} dx.$$

### Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \sin(Cx)^n dx &= \int_{-1}^1 \sin(Cx)^{n-1} \sin(Cx) dx = \\
&= \left[ \sin(Cx)^{n-1} \frac{\cos(Cx)}{C} \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 (n-1) \sin(Cx)^{n-2} \cos(Cx)^2 dx = \\
&= \left[ \sin(Cx)^{n-1} \frac{\cos(Cx)}{C} \right]_{-1}^1 + (n-1) \int_{-1}^1 \sin(Cx)^{n-2} dx - (n-1) \int_{-1}^1 \sin(Cx)^n dx.
\end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\int_{-1}^1 \sin(Cx)^n dx = -\frac{1}{n} \left[ \sin(Cx)^{n-1} \frac{\cos(Cx)}{C} \right]_{-1}^1 + \frac{(n-1)}{n} \int_{-1}^1 \sin(Cx)^{n-2} dx.$$

□

Abbiamo ottenuto una formula ricorsiva per i momenti della base monomiale monica, inoltre se  $n$  è dispari  $\int_{-1}^1 \sin(Cx)^n dx = 0$ .

In seguito mostriamo perchè dal punto di vista computazionale ha poco senso calcolare i momenti nella base monomiale monica rispetto a quella di Chebyshev. Introduciamo alcune notazioni

$$\begin{aligned}
I_n &= -\frac{1}{n} \left[ \sin(Cx)^{n-1} \frac{\cos(Cx)}{C} \right]_{-1}^1 + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2} \\
\mathcal{E}_n &= I_n - \int_{-1}^1 \sin(Cx)^n dx.
\end{aligned}$$

Con le notazioni precedenti si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_n &= I_n - \int_{-1}^1 \sin(Cx)^n dx = \\
&= \frac{(n-1)}{n} I_{n-2} - \frac{(n-1)}{n} \int_{-1}^1 \sin(Cx)^{n-2} dx = \frac{(n-1)}{n} \mathcal{E}_{n-2}.
\end{aligned}$$

Se  $n$  è dispari l'errore è banale, quindi spostiamo la nostra attenzione nel caso  $n$  pari.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{2k} &= \frac{(2k-1)}{2k} \mathcal{E}_{2(k-1)} = \frac{(2k-1)}{2k} \frac{(2(k-1)-1)}{2(k-1)} \mathcal{E}_{2(k-2)} = \\
&= \frac{(2k-1)}{2k} \frac{(2(k-1)-1)}{2(k-1)} \dots \frac{(2(k-(k-1)+1)-1)}{2(k-(k-1)+1)} \mathcal{E}_{2(k-(k-1))} = \\
&= \frac{(2k-1)}{2k} \frac{(2(k-1)-1)}{2(k-1)} \dots \frac{3}{4} \mathcal{E}_2.
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\frac{(2(k+1)-1)}{2(k+1)} \geq \frac{(2k-1)}{2k} \Leftrightarrow 4k(k+1) - 2k \geq 2(k+1)(2k-1) \Leftrightarrow 4k^2 + 2k \geq 4k^2 + 2k - 2.$$

Mostriamo che per  $k \rightarrow \infty$  l'errore diverge. Fissiamo  $k^* < k$  allora

$$\frac{\mathcal{E}_{2k}}{\sin(\alpha\frac{\pi}{2})^{2k}} \geq \frac{1}{\sin(\alpha\frac{\pi}{2})^{2k}} \left[ \left( \frac{2k^*-1}{2k^*} \right)^{k-k^*+1} \left( \frac{3}{4} \right)^{k^*-1} \right] \mathcal{E}_2 = \frac{1}{\sin(\alpha\frac{\pi}{2})^{2k}} \left( \frac{2k^*-1}{2k^*} \right)^k \mathcal{E}_2 \tilde{G}$$

dove

$$\tilde{G} = \left( \frac{2k^*-1}{2k^*} \right)^{k^*-1} \left( \frac{3}{4} \right)^{k^*-1}.$$

Se  $\alpha \neq 1$  allora  $\sin(\alpha\frac{\pi}{2})^2 < 1$ , inoltre  $\frac{2k^*-1}{2k^*} \rightarrow 1$  per  $k^* \rightarrow \infty$  quindi esiste  $k^*$  tale che  $\frac{2k^*-1}{2k^*} > \sin(\alpha\frac{\pi}{2})^2$ . Dato che  $\tilde{G}$  non dipende da  $k$  si conclude

$$\frac{\mathcal{E}_{2k}}{\sin(\alpha\frac{\pi}{2})^{2k}} \rightarrow \infty \text{ per } k \rightarrow \infty. \quad (2.9)$$

### Simmetria pesi KT

Siano  $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$ ,  $i = 0, \dots, n$ , nodi equispaziati in  $[-1, 1]$ , allora

$$\begin{aligned} x_i + x_{n-i} &= -1 + \frac{2i}{n} - 1 + \frac{2(n-i)}{n} = -2 + 2 = 0, \\ \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\left(-1 + \frac{2i}{n}\right)\right) + \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\left(-1 + \frac{2(n-i)}{n}\right)\right) &= \\ = \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\left(-1 + \frac{2i}{n}\right)\right) + \sin\left(-\frac{\alpha\pi}{2}\left(-1 + \frac{2i}{n}\right)\right) &= 0. \end{aligned}$$

In un contesto più generale con  $\{z_i : i = 0, \dots, n\} \subseteq [a, b]$  tali che  $z_i + z_{n-i} = a + b$  si ha

$$\begin{aligned} \ell_i(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - (a + b - x_{n-j})}{(a + b - x_{n-i}) - (a + b - x_{n-j})} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(a + b - x) - x_{n-j}}{x_{n-i} - x_{n-j}} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-i}}^n \frac{(a + b - x) - x_j}{x_{n-i} - x_j} = \ell_{n-i}(a + b - x). \end{aligned}$$

Nel nostro caso abbiamo (1.15)

$$\begin{aligned} w_i^\alpha &= \int_{-1}^1 \ell_i \circ m_\alpha(x) dx = \int_{-1}^1 \ell_i(y) \frac{2\beta}{\alpha\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2 y^2}} dy \\ &= \int_{-1}^1 \ell_{n-i}(-y) \frac{2\beta}{\alpha\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2 y^2}} dy = - \int_1^{-1} \ell_{n-i}(y) \frac{2\beta}{\alpha\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2 y^2}} dy = w_{n-i}^\alpha, \end{aligned}$$

quindi i pesi di quadratura sono simmetrici.

La simmetria vale anche se i nodi di partenza sono  $x_k = -1 + \frac{(2k-1)}{n}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , perchè

$$\begin{aligned} x_k + x_{n+1-k} &= -1 + \frac{(2k-1)}{n} - 1 + \frac{(2(n+1-k)-1)}{n} = -2 + 2 = 0, \\ \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\left(-1 + \frac{2k-1}{n}\right)\right) + \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\left(-1 + \frac{2(n+1-k)-1}{n}\right)\right) &= \\ &= \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\left(-1 + \frac{2k-1}{n}\right)\right) + \sin\left(-\frac{\alpha\pi}{2}\left(-1 + \frac{2k-1}{n}\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

#### 2.4.1 Convergenza pesi KT

Riportiamo brevemente il famoso teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

**Teorema 2.17** [28] *Sia  $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ( $-\infty < a < b < \infty$ ) e supponiamo che  $f(\cdot, t)$  sia integrabile per ogni  $t \in [a, b]$ . Sia  $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$ .*

*Supponiamo che esista  $g \in L^1(\mu)$  tale che  $|f(x, t)| \leq g(x)$  per ogni  $x, t$ .*

*Se  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$  per ogni  $x$  allora  $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$ ; in particolare, se  $f(x, \cdot)$  è continua per ogni  $x$ , allora  $F$  è continua.*

Siano  $\{x_i : i = 0, \dots, N\} \subseteq [-1, 1]$  in ordine crescente e  $\tilde{h} = \min_{i=0, \dots, N-1} |x_{i+1} - x_i| \neq 0$ . Inoltre

$$w_i^\alpha = \int_{-1}^1 \ell_i^\alpha \circ m_\alpha(x) dx = \int_{-1}^1 \ell_i^\alpha(y) \frac{2\beta}{\alpha\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2 y^2}} dy = \frac{2\beta}{\alpha\pi} \int_{-1}^1 \ell_i^\alpha(y) \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2 y^2}} dy,$$

con

$$\ell_i^\alpha(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{x - m_\alpha(x_j)}{m_\alpha(x_i) - m_\alpha(x_j)}$$

l' $i$ -esimo polinomio di Lagrange dei nodi  $\{m_\alpha(x_i) : i = 0, \dots, N\}$ .

**Teorema 2.18** *Con le notazioni appena introdotte si ottiene*

$$w_i^\alpha = \frac{2\beta}{\alpha\pi} \int_{-1}^1 \ell_i^\alpha(y) \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2 y^2}} dy \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \ell_i^0(y) dy$$

e

$$w_i^\alpha = \frac{2\beta}{\alpha\pi} \int_{-1}^1 \ell_i^\alpha(y) \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2 y^2}} dy \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \ell_i^1(y) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy.$$

#### Dimostrazione

Osserviamo che

$$|x - m_\alpha(x_j)| \leq 2, \quad x \in [-1, 1]$$

e

$$\beta^2 x^2 \leq x^2 \Leftrightarrow 1 - \beta^2 x^2 \geq 1 - x^2 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \beta^2 x^2} \geq \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2 x^2}}.$$



Cerchiamo di maggiorare  $|\ell_i^\alpha|$  per  $\alpha \rightarrow 1^-$ .

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}x_{j+1}\right) - \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}x_j\right) &= 2\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\frac{(x_{j+1}-x_j)}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\frac{(x_{j+1}+x_j)}{2}\right) \geq \\ &\geq 2\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\frac{\tilde{h}}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{(x_{j+1}+x_j)}{2}\right) \geq 2\sin\left(\frac{\bar{\alpha}\pi}{2}\frac{\tilde{h}}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{(x_{j+1}+x_j)}{2}\right) \geq \varepsilon, \text{ con } \alpha \geq \bar{\alpha} \end{aligned}$$

La prima uguaglianza deriva dalle formule di prostaferesi. Osservando che

$$\frac{x_{j+1}+x_j}{2} = 1 \Leftrightarrow x_{j+1}+x_j = 2 \Leftrightarrow x_{j+1} = -x_j = 1,$$

possiamo concludere

$$|\ell_i^\alpha(x)| = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{|x - m_\alpha(x_j)|}{|m_\alpha(x_i) - m_\alpha(x_j)|} \leq \frac{2^N}{\varepsilon^N}, \quad \alpha \geq \bar{\alpha}$$

e quindi

$$|\ell_i^\alpha(x)| \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2x^2}} \leq \frac{2^N}{\varepsilon^N} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \in L^1(-1,1), \quad \alpha \geq \bar{\alpha}.$$

Cerchiamo di maggiorare  $|\ell_i^\alpha|$  per  $\alpha \rightarrow 0^+$ . Con il teorema del valore medio otteniamo

$$|m_\alpha(x_{j+1}) - m_\alpha(x_j)| = \left| \frac{\sin(\frac{\alpha\pi}{2}x_{j+1}) - \sin(\frac{\alpha\pi}{2}x_j)}{\sin(\frac{\alpha\pi}{2})} \right| = \frac{|\cos(\zeta)|\frac{\alpha\pi}{2}(x_{j+1}-x_j)}{\sin(\frac{\alpha\pi}{2})}$$

con  $-\alpha\pi/2 \leq \zeta \leq \alpha\pi/2$ .

Proseguendo la maggiorazione si ha

$$\geq \frac{|\cos(\alpha\pi/2)|\frac{\alpha\pi}{2}(x_{j+1}-x_j)}{\sin(\frac{\alpha\pi}{2})} \geq |\cos(\alpha\pi/2)|(x_{j+1}-x_j) \geq |\cos(\bar{\alpha}\pi/2)|(x_{j+1}-x_j) \geq \varepsilon$$

per  $\alpha \leq \bar{\alpha}$ .

La seconda disuguaglianza deriva da  $|\sin(x)| \leq |x| \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$|\ell_i^\alpha(x)| \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2x^2}} \leq \frac{2^N}{\varepsilon^N} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \in L^1(-1,1), \quad \alpha \leq \bar{\alpha}.$$

Per quanto mostrato precedentemente possiamo passare al limite sotto il segno di integrale (Teorema 2.17) per  $\alpha \rightarrow 1^-$  e  $\alpha \rightarrow 0^+$  ottenendo la tesi.

□

Grazie al teorema precedente per determinati nodi possiamo ottenere risultati più precisi.

$$w_i^\alpha = \frac{2\beta}{\alpha\pi} \int_{-1}^1 \ell_i^\alpha(y) \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2y^2}} dy \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \ell_i^0(y) dy$$

Se i nodi sono equispaziati si ritrovano i pesi di quadratura delle formule di Newton-Cotes.

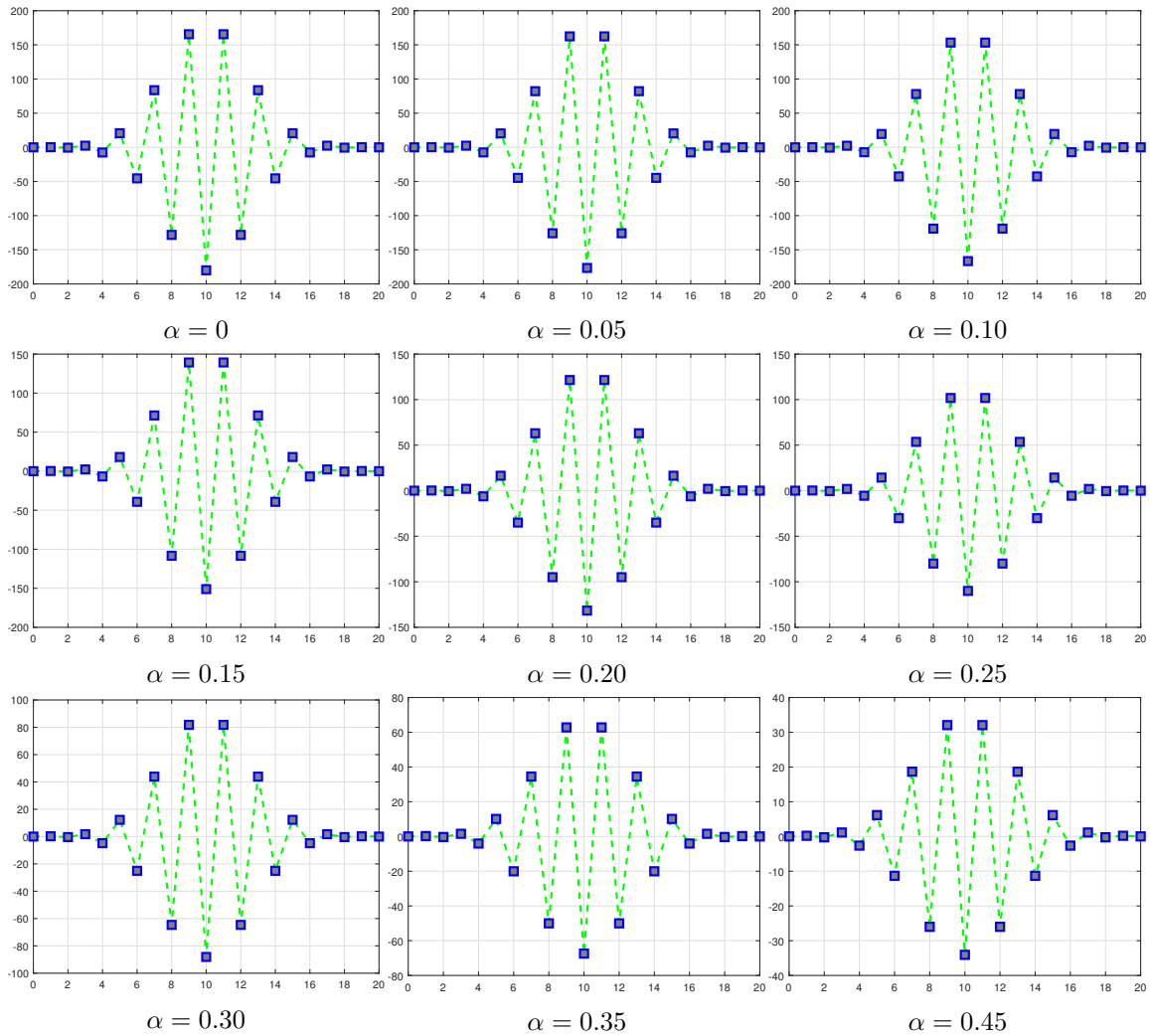
$$w_i^\alpha = \frac{2\beta}{\alpha\pi} \int_{-1}^1 \ell_i^\alpha(y) \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2 y^2}} dy \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \ell_i^1(y) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

Notiamo che  $m_1(x) = \sin(\pi/2x)$  e che

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(-1 + \frac{2i}{n}\right)\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi i}{n}\right) = -\cos\left(\frac{\pi i}{n}\right), \quad i = 0, \dots, N$$

sono i nodi di Chebyshev-Lobatto, quindi per i nodi equispaziati i pesi  $w_i^\alpha$  per  $\alpha \rightarrow 1^-$  hanno come limite i pesi della formula composta dei trapezi in  $[-1, 1]$  (Teorema 1.15).

Se i nodi di partenza sono invece  $\{x_k = -1 + (2k-1)h/2, h = 2/n, k = 1, \dots, n\}$  allora i pesi  $w_i^\alpha$  per  $\alpha \rightarrow 1^-$  hanno come limite i pesi della formula composta del punto medio in  $[-1, 1]$  (Teorema 1.16).



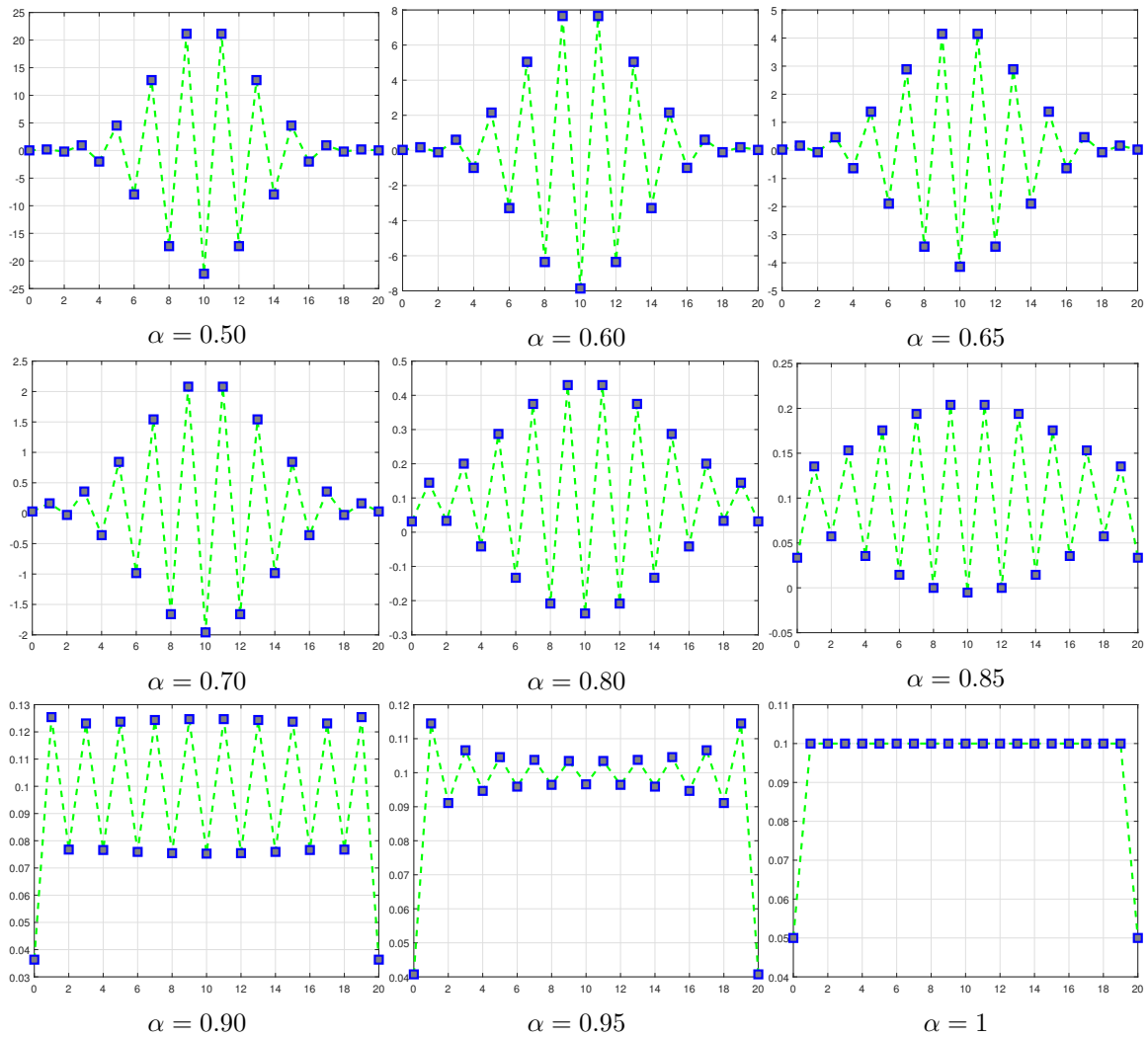


Figura 2.4: Convergenza dei pesi di quadratura  $\{w_i^\alpha : i = 0, \dots, 20\}$  per 21 nodi equispaziati nell' intervallo  $[-1, 1]$ .

La figura con  $\alpha = 0$  mostra i pesi di quadratura della formula di Newton-Cotes, mentre con  $\alpha = 1$  otteniamo i pesi della formula composta dei trapezi. Per avere formule stabili di quadratura numerica è necessario disporre di pesi positivi, quindi dal punto di vista computazionale saremo portati a scegliere il parametro del metodo  $\alpha \rightarrow 1^-$ . Nella Figura 2.5 si nota che aumentando il numero di nodi se  $\alpha \nearrow 1^-$  allora alcuni pesi sono negativi, portando inevitabilmente alla instabilità numerica.

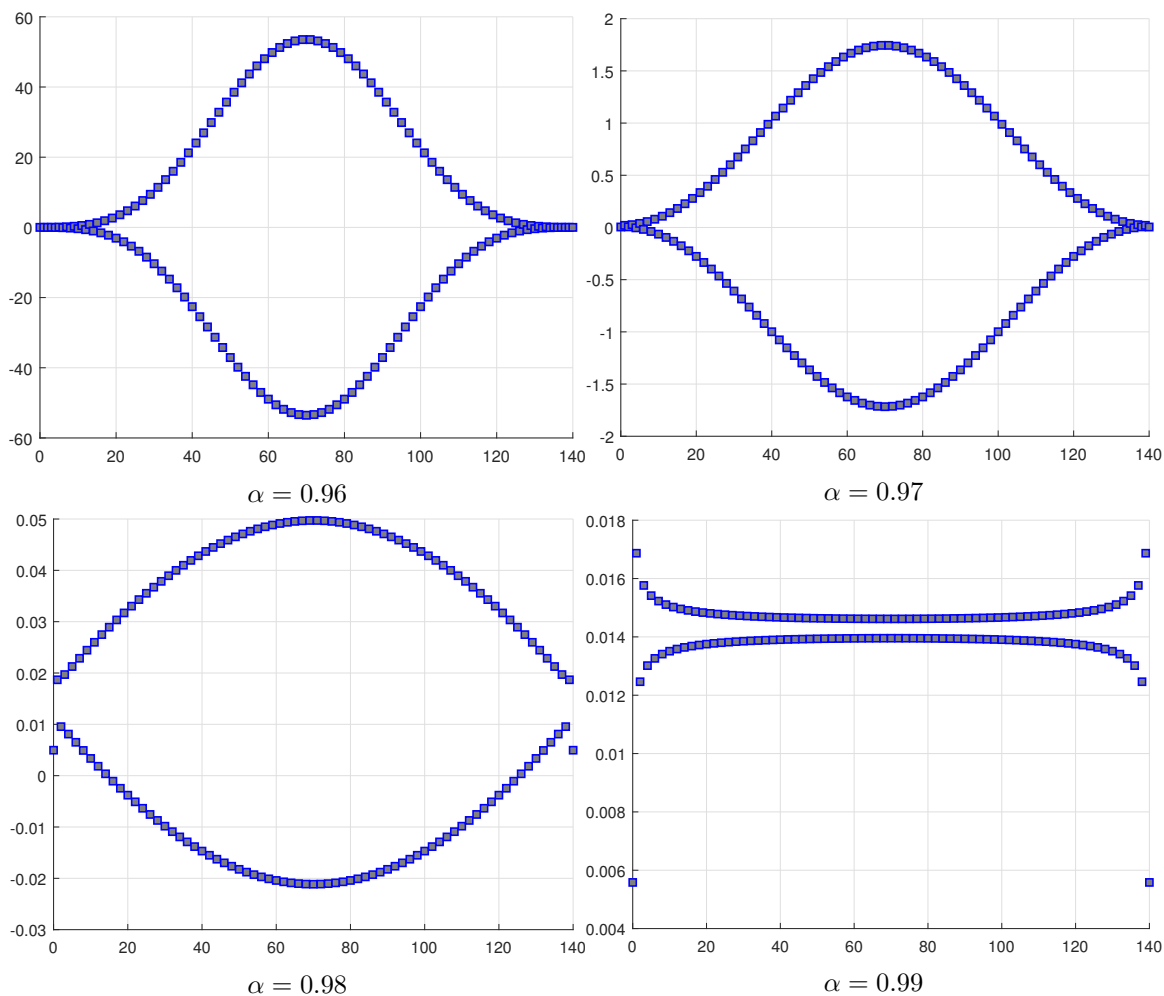


Figura 2.5: Convergenza dei pesi di quadratura  $\{w_i^\alpha : i = 0, \dots, 136\}$  per 137 nodi equispaziati nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

## 2.5 Formule di quadratura da mappe conformi

In [7] si discute un utile applicazione dell'inversa della mappa di Kosloff e Tal-Ezer per calcolare integrali di funzioni analitiche in  $[-1, 1]$ .

Le formule di quadratura di Gauss e Clenshaw-Curtis raggruppano i nodi di integrazione vicino ai bordi dell'intervallo. Infatti per ogni metodo numerico convergente, derivato dall'interpolazione polinomiale su  $[-1, 1]$ ,  $n$  nodi sono distribuiti con una densità  $\sim n/\pi\sqrt{1-x^2}$  con  $n \rightarrow \infty$  [29]. È noto che questo raggruppamento può causare problemi. Può rendere le matrici coinvolte nella risoluzione del problema mal condizionate e la bassa densità di punti al centro del dominio può forzare l'uso di più punti. In confronto ai nodi equispaziati  $n$  deve essere circa  $\pi/2$  volte più grande di quanto ci si aspetta.

I teoremi standard, circa la convergenza dei metodi polinomiali per funzioni analitiche, assumono che l'integranda sia analitica in una regione ellittica. Per  $\rho > 1$ , definiamo  $B(\rho)$  l'insieme aperto del piano complesso delimitato dall'ellisse con fuochi in  $-1$  e  $1$  e la somma dei suoi assi sia  $\rho$ .

**Teorema 2.19** [30] *Se  $f$  è analitica in  $B(\rho)$  con  $|f(z)| \leq M$  per qualche  $\rho > 1$ , allora la formula di quadratura di Gauss-Legendre converge geometricamente*

$$|\mathcal{E}_n| \leq \frac{64M}{15(1 - \rho^{-2})\rho^{2n}}.$$

Dal punto di vista delle applicazioni, l'assunzione dell'analiticità di  $f$  in  $B(\rho)$  sembra poco bilanciata perchè permette a  $f$  di essere “meno analitica” vicino agli estremi dell'intervallo, dove l'ellisse è più stretto, rispetto al centro, dove è più largo. Questa condizione di analiticità non uniforme conduce a risultati come il teorema precedente, ma non ha una giustificazione intrinseca.

L'obiettivo degli autori in [7] è quello di derivare nuove formule di quadratura mappando conformemente  $B(\rho)$  in una regione  $\Omega(\rho)$  più favorevole. Sia  $\Omega(\rho)$  un insieme aperto di  $\mathbb{C}$  contenente  $[-1, 1]$  e sia  $g$  una funzione analitica in  $B(\rho)$  tale che

$$g(B(\rho)) \subseteq \Omega(\rho), \quad g(-1) = -1, \quad g(1) = 1.$$

Dato che  $g([-1, 1])$  è una curva regolare in  $\Omega(\rho)$  e dal teorema di Cauchy per funzioni analitiche si ha che l'integrale di  $f$  su questa curva è uguale all'integrale di  $f$  in  $[-1, 1]$ .

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 g'(s)f(g(s))ds$$

Applichiamo direttamente la formula di quadratura alla funzione  $g' \cdot (f \circ g)$  ottenendo

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n w_k g'(x_k) f(g(x_k)),$$

che si può scrivere come

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n \tilde{w}_k f(\tilde{x}_k), \quad \tilde{w}_k = w_k g'(x_k), \quad \tilde{x}_k = g(x_k).$$

Una formula di questo tipo è chiamata *Transplanted quadrature formula*. Se  $g$  è scelta in modo opportuno, osserviamo che i nuovi nodi  $\tilde{x}_k$  sono distribuiti in modo più uniforme rispetto ai nodi di partenza. Per quanto appena esposto  $g$  non deve essere conforme, cioè analitica con derivata mai nulla, e mappare  $[-1, 1]$  in  $[-1, 1]$ , cioè può assumere valori complessi. Per le formule di interesse pratico queste condizioni sono soddisfatte, infatti cerchiamo formule con nodi  $\tilde{x}_k$  reali e pesi  $\tilde{w}_k$  reali e positivi.

**Teorema 2.20** *Sia  $f$  una funzione analitica in una regione  $\Omega(\rho)$  contenente  $[-1, 1]$  con  $|f(z)| \leq M$  per qualche  $\rho > 1$ , allora l'errore commesso da una transplanted quadrature formula a partire dai nodi di Gauss-Legendre è*

$$|\mathcal{E}_n| \leq \frac{64M\gamma}{15(1 - \rho^{-2})\rho^{2n}}.$$

dove  $\gamma = \sup_{s \in B(\rho)} |g'(s)| \leq \infty$ .

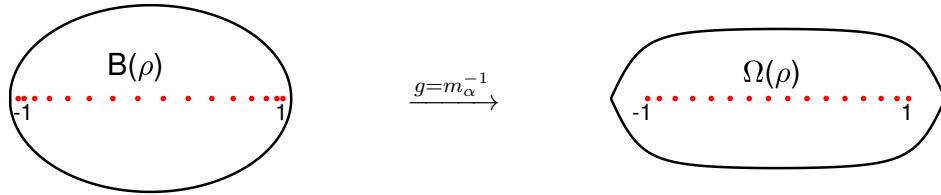


Figura 2.6:  $\alpha = 0.8$ ,  $\rho = \cot(\alpha\pi/4)$  e  $\Omega(\rho)$  è l'immagine di  $B(\rho)$  tramite  $m_\alpha^{-1}$ . I nodi in  $B(\rho)$  sono quelli di Gauss-Legendre.

Come già anticipato una possibile mappa  $g$  è l'inversa della mappa di Kosloff e Tal-Ezer:

$$g(s) = m_\alpha^{-1}(s) = \frac{2}{\alpha\pi} \arcsin(\sin(\alpha\pi/2)s).$$

# Capitolo 3

## Test Numerici

### 3.1 Esperimenti Numerici

In questi paragrafi mostriamo i risultati numerici ottenuti per le formule di quadratura in  $[-1, 1]$  che abbiamo discusso. Nei grafici successivi mostriamo gli errori relativi che si ricavano confrontando le formule di quadratura e il valore dell'integrale. Dal punto di vista computazione per calcolare l'errore relativo abbiamo utilizzato il comando Matlab `integral(f, -1, 1)`.

$$\mathcal{E}_{rel} = \left| \frac{I(f) - \mathcal{I}(f)}{\mathcal{I}(f)} \right| \approx \left| \frac{I(f) - \text{integral}(f, -1, 1)}{\text{integral}(f, -1, 1)} \right|$$

dove  $I(f)$  rappresenta l'approssimazione dell'integrale fornita dalla formula di quadratura e  $\mathcal{I}(f)$  è il valore dell'integrale. Le funzioni utilizzate sono analitiche in un intorno aperto di  $[-1, 1]$ . Le funzioni  $f_1, f_4, f_5, f_6$  hanno poli o *branch points* vicino all'intervallo  $[-1, 1]$  nel piano complesso,  $f_2, f_7, f_8$  sono funzioni intere e le prime due sono altamente oscillatorie e  $f_3$  ha una singolarità vicino a  $x = 1$ . L'ultima funzione  $f_9 = \exp(-x^{-2})$  è  $C^\infty$  ma non è analitica.

#### 3.1.1 Esperimenti Fake Nodes

Nei grafici successivi mostriamo i risultati ottenuti implementando la quadratura tramite nodi mappati con la mappa di Kosloff e Tal-Ezer ( $M = N$ , cioè consideriamo la funzione interpolante). Dal punto di vista computazione abbiamo utilizzato come base di  $\mathbb{P}_N$  i polinomi di Chebyshev. Da quanto discusso nella sezione 2.4.1 sappiamo che se il parametro del metodo  $\alpha = 1$  i pesi di quadratura corrispondono a quelli della formula dei trapezi composta, quindi per trovare i corrispondenti pesi abbiamo utilizzato la routine `trapezi_composta` nella sezione 3.2.4.

Nei grafici la curva blu corrisponde al parametro  $\alpha = 1$ , la curva magenta al parametro  $\alpha = 0.99$  e quella nera a  $\alpha = 0.98$ .

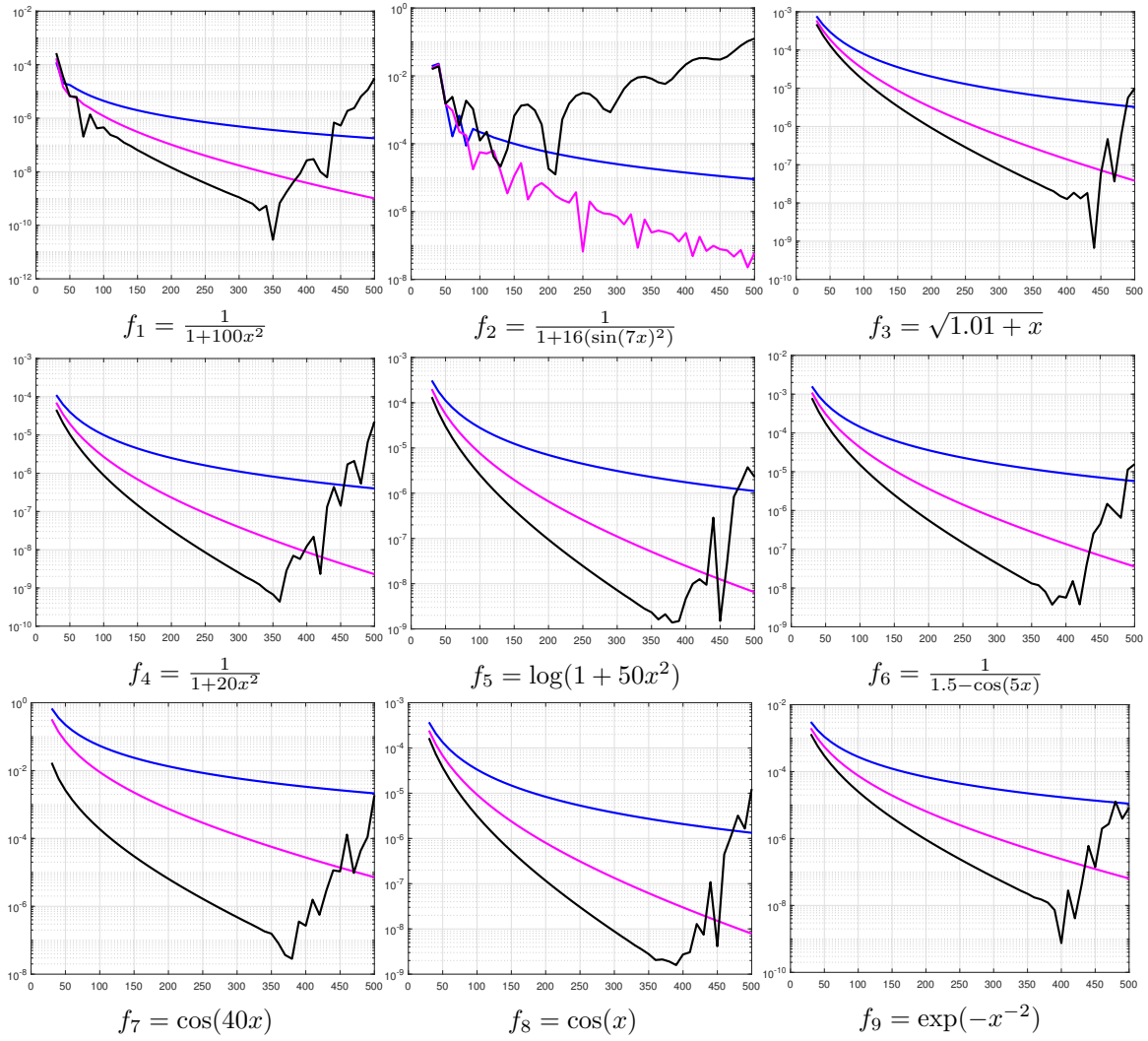


Figura 3.1: ●  $\alpha = 1$ , ●  $\alpha = 0.99$ , ●  $\alpha = 0.98$ .

Quadratura tramite nodi mappati con la mappa di Kosloff e Tal-Ezer.

Dal punto di vista teorico per  $\alpha = 1$  dobbiamo aspettarci un tasso di convergenza algebrico di indice 1 ( $\mathcal{O}(N^{-1})$ ), mentre per  $\alpha \neq 1$  il tasso di convergenza è geometrico ( $\mathcal{O}(\rho^{-N})$ ) ed è limitato dalla mappa  $m_\alpha$  (Teorema 2.6).

Dai test numerici si ricava che alterando  $\alpha$  la quadratura interpolatoria migliora ma diventa instabile se  $\alpha$  non è vicino a 1 (Sezione 2.4.1).

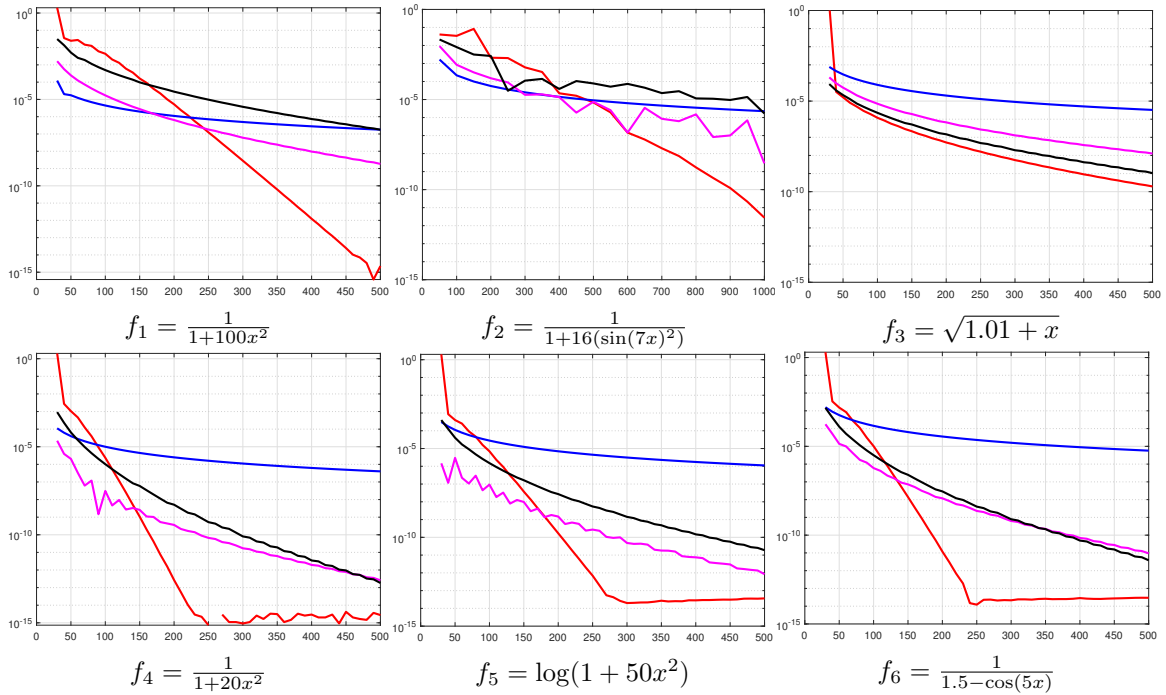


### 3.1.2 Esperimenti KTL

Negli esperimenti numerici precedenti abbiamo visto che se il rapporto tra il numero di nodi e il grado del polinomio di interpolazione è 1 si presentano fenomeni di instabilità numerica. Per evitarli cerchiamo di approssimare l'integrale come discusso nella sezione 2.2: se  $a = (a_0, \dots, a_N)^\top$  è la soluzione del problema ai minimi quadrati pesato allora possiamo approssimare l'integrale della funzione  $f$  con

$$I(f) = \sum_{n=0}^N a_n \int_{-1}^1 \frac{T_n(m_\alpha(x))}{\|T_n\|_2} dx.$$

Nei grafici seguenti l'asse delle ascisse corrisponde al numero di nodi utilizzato per determinare l'approssimazione dell'integrale. La curva blu descrive l'errore relativo commesso dalla formula dei trapezi composta in  $M$  sottointervalli, la curva magenta e la curva nera invece corrispondono agli errori che si ottengono se il parametro del metodo è rispettivamente  $\alpha = 0.9$  e  $\alpha = 0.7$ . Per garantire la limitazione della costante di Lebesgue e del numero di condizionamento della matrice  $A$  (2.7) per quanto mostrato nel Teorema 2.14 è sufficiente che  $N = \mathcal{O}(\sqrt{M})$ . Nei test numerici che abbiamo condotto abbiamo scelto  $N = 4\sqrt{M}$ .



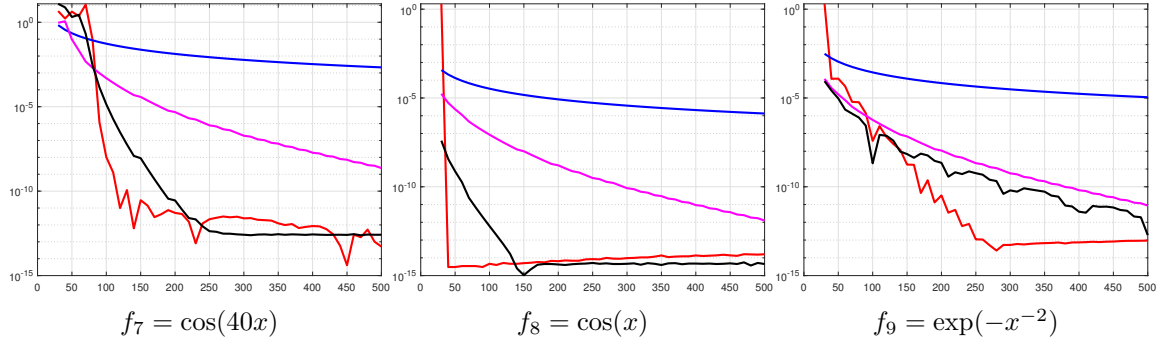


Figura 3.3: ●  $\alpha = 1, N = M$ ; ●  $\alpha = 0.9, N = 4\sqrt{M}$ ; ●  $\alpha = 0.7, N = 4\sqrt{M}$ ;  
●  $\alpha = 1 - \frac{2|\log(10^{-12})|}{N\pi}, N = \frac{1}{2}M$ .  
Quadratura con il metodo KTL.

Dal punto di vista teorico (Osservazioni Teorema 2.12) per  $\alpha = 1$  dobbiamo aspettarci un tasso di convergenza algebrico di indice 1 ( $\mathcal{O}(M^{-1})$ ), mentre per  $\alpha \neq 1$  il tasso di convergenza in  $M$  è *root exponential* ( $\mathcal{O}(\rho^{-\sqrt{M}})$ ).

Dai test numerici si ricava che alterando  $\alpha$  la quadratura migliora e rimane stabile anche se  $\alpha$  non è vicino a 1. Dai grafici non si nota una relazione evidente tra le funzioni e il parametro  $\alpha$ , quindi deduciamo che sia necessaria una scelta *smart* del parametro  $\alpha$  in funzione del numero di nodi.

Per quanto visto in (2.8) scegliamo

$$\alpha_N = 1 - \frac{2|\log(\varepsilon)|}{N\pi}.$$

Nel nostro caso  $\varepsilon = 10^{-12}$  e  $M = 2N$  (Teorema 2.12). Questa scelta di  $\alpha$  corrisponde alla curva rossa nei grafici: i risultati della quadratura vengono notevolmente migliorati rispetto all'utilizzo di un parametro fisso raggiungendo la precisione di macchina.

Osserviamo inoltre che il metodo rimane stabile per diversi valori del parametro  $\alpha$  anche se i nodi vengono aumentati: l'approssimazione dell'integrale della funzione  $f_2$  non raggiunge la precisione di macchina in 500 nodi, ma se aumentiamo  $M$  l'approssimazione migliora e il metodo KTL non mostra segni di instabilità.

### Scelta rapporto $N/M$

Con le tabelle seguenti giustifichiamo numericamente la scelta del rapporto  $N/M = \frac{1}{2}$  nei test precedenti.

$f = \frac{1}{1+100x^2}$ Err.Rel = $10^{-10}$		
$N/M$	$M$	$N$
0.10	1110	111
0.15	810	122
0.20	640	128
0.25	550	138
0.30	480	145
0.35	430	151
0.40	390	156
0.45	370	167
0.50	350	175
0.55	330	182
0.60	320	192
0.65	310	202
0.70	310	218
0.75	300	225
0.80	310	248

$f = \frac{1}{1+16(\sin(7x)^2)}$ Err.Rel = $10^{-8}$		
$N/M$	$M$	$N$
0.10	1620	162
0.15	1200	181
0.20	900	180
0.25	790	198
0.30	780	235
0.35	720	252
0.40	720	288
0.45	760	343
0.50	660	330
0.55	690	380
0.60	700	420
0.65	660	429
0.70	690	484
0.75	710	533
0.80	720	576

$f = \sqrt{1.01+x}$ Err.Rel = $10^{-10}$		
$N/M$	$M$	$N$
0.10	1040	104
0.15	840	127
0.20	710	142
0.25	630	158
0.30	580	175
0.35	550	193
0.40	510	204
0.45	490	221
0.50	480	240
0.55	460	254
0.60	450	270
0.65	450	293
0.70	440	309
0.75	440	330
0.80	430	344

$f = \frac{1}{1+20x^2}$ Err.Rel = $10^{-10}$		
$N/M$	$M$	$N$
0.10	560	56
0.15	410	62
0.20	320	64
0.25	270	68
0.30	240	73
0.35	210	74
0.40	190	76
0.45	180	82
0.50	170	85
0.55	160	88
0.60	150	90
0.65	150	98
0.70	140	99
0.75	140	105
0.80	140	112

$f = \log(1+50x^2)$ Err.Rel = $10^{-9}$		
$N/M$	$M$	$N$
0.10	510	51
0.15	410	62
0.20	330	66
0.25	280	70
0.30	250	76
0.35	230	81
0.40	210	84
0.45	200	91
0.50	190	95
0.55	180	100
0.60	180	108
0.65	170	111
0.70	170	120
0.75	170	128
0.80	180	144

$f = \frac{1}{1.5-\cos(5x)}$ Err.Rel = $10^{-9}$		
$N/M$	$M$	$N$
0.10	530	53
0.15	400	61
0.20	320	64
0.25	270	68
0.30	240	73
0.35	210	74
0.40	200	80
0.45	180	82
0.50	170	85
0.55	170	94
0.60	160	96
0.65	160	104
0.70	150	106
0.75	150	113
0.80	150	120

$f = \exp(-40x^2)$ Err.Rel = $10^{-10}$			$f = \cos(40x)$ Err.Rel = $10^{-8}$			$f = \cos(x)$ Err.Rel = $10^{-10}$		
$N/M$	$M$	$N$	$N/M$	$M$	$N$	$N/M$	$M$	$N$
0.10	430	43	0.10	440	44	0.10	180	18
0.15	300	46	0.15	300	46	0.15	120	19
0.20	230	46	0.20	230	46	0.20	90	18
0.25	190	48	0.25	190	48	0.25	70	18
0.30	160	49	0.30	160	49	0.30	60	19
0.35	140	49	0.35	140	49	0.35	50	18
0.40	130	52	0.40	120	48	0.40	50	20
0.45	120	55	0.45	110	50	0.45	40	19
0.50	110	55	0.50	100	50	0.50	40	20
0.55	100	56	0.55	100	56	0.55	40	22
0.60	90	54	0.60	90	54	0.60	30	18
0.65	90	59	0.65	90	59	0.65	30	20
0.70	80	57	0.70	90	64	0.70	30	22
0.75	80	60	0.75	80	60	0.75	30	23
0.80	80	64	0.80	80	64	0.80	30	24

Tabella 3.1: Minimo numero di nodi  $M$  per raggiungere un fissato errore relativo nell'approssimazione dell'integrale al variare del rapporto  $N/M$ .

Dalla lettura delle tabelle si nota che per ottenere un fissato errore relativo se il rapporto  $N/M$  aumenta il numero di nodi utilizzato per l'approssimazione diminuisce e il grado del polinomio di approssimazione aumenta. Dal punto di vista pratico bisogna mediare tra utilizzare un numero non troppo elevato di nodi e un grado del polinomio computazionalmente utile (il grado del polinomio corrisponde alla grandezza del sistema lineare da risolvere). Per queste osservazioni e per quanto mostrato nella Figura 2.2 la scelta  $N/M = 0.5$  sembra ragionevole in pratica.

### 3.1.3 Esperimenti KTL con nodi perturbati

Nei test numerici presentati fino ad ora sono stati sempre utilizzati i nodi equispaziati, ma per lo sviluppo dei vari metodi si è sempre considerata una scelta arbitraria della distribuzione dei nodi.

Nel prossimo esperimento numerico i nodi di quadratura sono definiti nel modo seguente:

$$x_m = \delta_m + \left( -1 + \frac{2m}{M} \right), \quad m = 0, \dots, M$$

dove  $\delta_m$  è una variabile aleatoria uniforme in  $] -1/M, 1/M[$  per  $m = 1, \dots, M - 1$ ,  $\delta_0$  è una variabile aleatoria uniforme in  $]0, 1/M[$  e  $\delta_M$  è una variabile aleatoria uniforme in  $] -1/M, 0[$ .

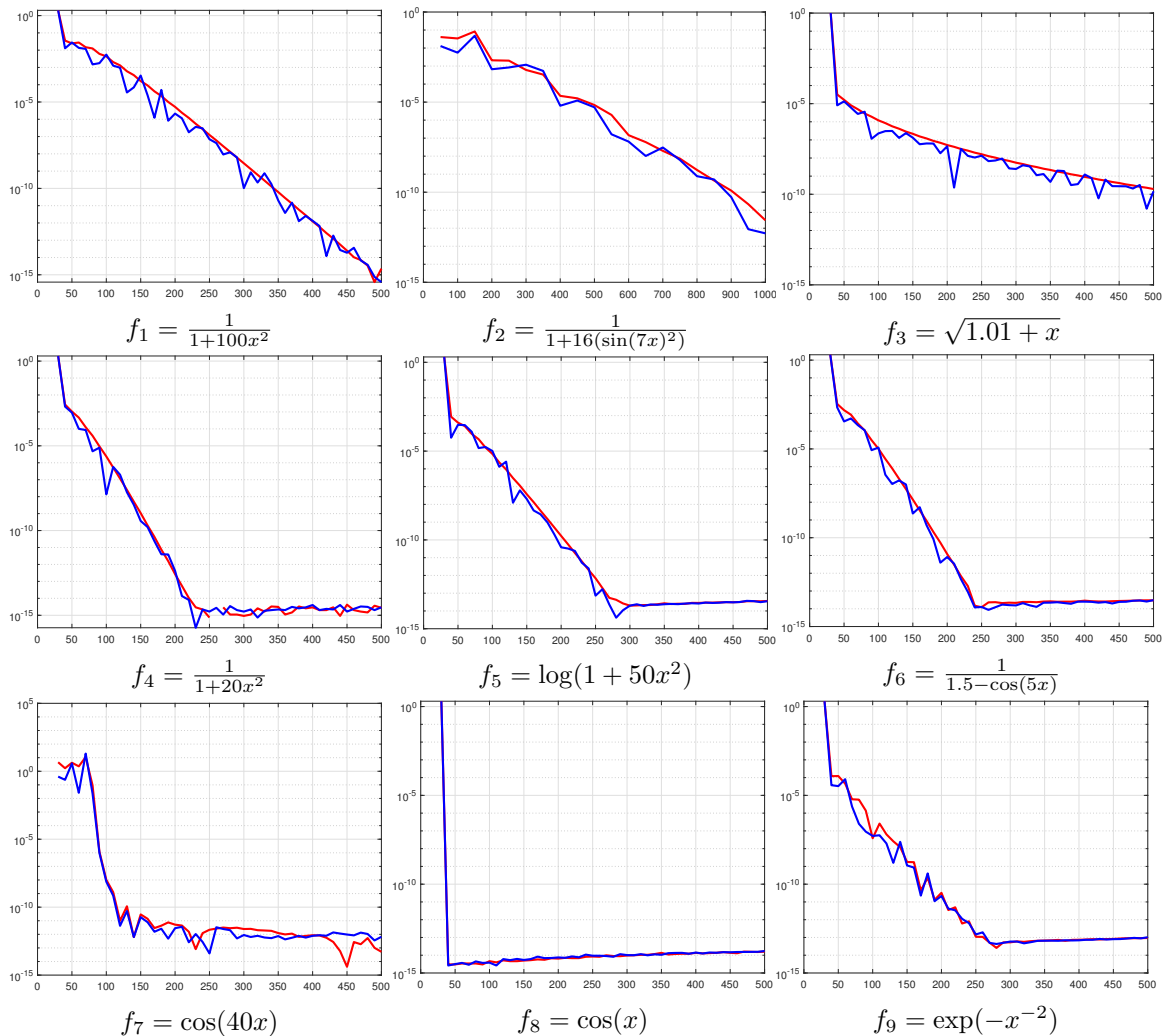


Figura 3.4: ●  $\alpha = 1 - \frac{2|\log(10^{-12})|}{N\pi}$ ,  $N = \frac{1}{2}M$ , nodi equispaziati;  
 ●  $\alpha = 1 - \frac{2|\log(10^{-12})|}{N\pi}$ ,  $N = \frac{1}{2}M$ , nodi perturbati.  
 Quadratura con il metodo KTL perturbato.

La curva rossa nel grafico descrive l'andamento dell'errore per i nodi equispaziati mentre la curva blu rappresenta l'errore per i nodi perturbati. Il tasso di convergenza per i nodi perturbati corrisponde in buona approssimazione a quello dei nodi equispaziati.

### 3.1.4 Confronto KTL e Formule Transplanted

Per completezza confrontiamo il metodo KTL con le formula di quadratura di tipo Transplanted. Nei grafici le ascisse corrispondono al numero di nodi e le curve blu e magenta descrivono l'errore della formula di quadratura di Gauss-Legendre e della formula Transplanted con parametro  $\alpha = 0.7$  (Sezione 2.5).

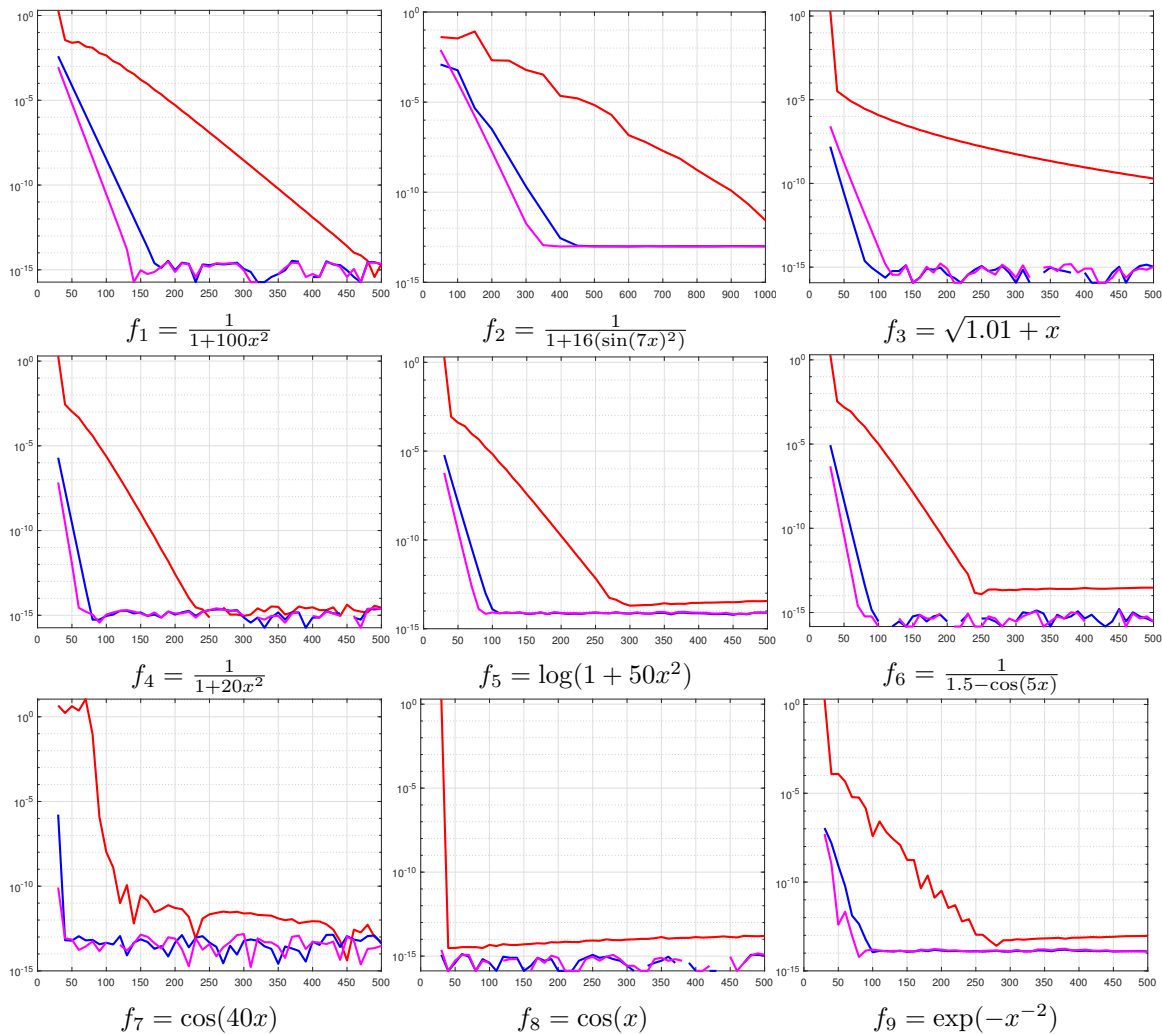


Figura 3.5: ● Gauss-Legendre; ●  $\alpha = 0.7$ , Formula Transplanted;

●  $\alpha = 1 - \frac{2|\log(10^{-12})|}{N\pi}$ ,  $N = \frac{1}{2}M$ , KTL.

Confronto metodo KTL con la formula di quadratura di Gauss-Legendre e le formule di tipo Transplanted.

In tutti gli esperimenti numerici proposti Gauss-Legendre e le formule Transplanted convergono più rapidamente rispetto a KTL, ma le prime due utilizzano particolari nodi di quadratura. Nella maggior parte dei casi KTL raggiunge lo stesso errore relativo delle altre formule di quadratura.

Nelle applicazioni spesso non è possibile campionare nuovamente la funzione, quindi KTL sembra un buon metodo per approssimare l'integrale di funzioni su nodi arbitrari.

## 3.2 Codice Matlab

Nei prossimi paragrafi proponiamo il codice Matlab utilizzato per produrre i grafici e i test numerici presentati precedentemente.

### 3.2.1 Fake Nodes con KT

```
1 f = @(x) 1./(1+100.*(x.^2));
2 alpha = 0.99;
3 M = 100;
4
5 beta = sin(alpha*(pi/2));
6 m_alpha = @(x) (sin((alpha*(pi/2)).*x))./(sin(alpha*(pi/2)));
7 g_alpha = @(t) (sin(t)./sqrt(1/beta^2 - cos(t).^2)/alpha);
```

Forniti come input la funzione  $f$ , il parametro del metodo  $\alpha \in [0,1]$  e  $M$  il grado del polinomio di interpolazione vengono calcolati

$$m_\alpha(x) = \frac{\sin(\alpha\pi x/2)}{\sin(\alpha\pi/2)}, \quad \beta = \sin(\alpha\pi/2) \text{ e } g_\alpha(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2(\alpha\pi/2)} - \cos^2(t)}} \frac{1}{\alpha}.$$

```
8 n = 1e07;
9 h = pi/n;
10 x = linspace(0,pi,n+1) + h/2;
11 x = x(1:n);
12 intcos = dct(g_alpha(x))*sqrt(2)/sqrt(n);
13 intcos(1) = intcos(1)*sqrt(2);
14 intcosw = intcos(1:M+1)';
```

Nel vettore `intcosw` viene memorizzato

$$\left( \int_{-1}^1 T_0(m_\alpha(x))dx, \dots, \int_{-1}^1 T_M(m_\alpha(x))dx \right)^\top$$

attraverso la trasformata discreta del coseno.

```
15 nodes = linspace(-1,1,M+1);
16 mnodes = m_alpha(nodes);
17
18 NDCT = zeros(M+1,M+1);
19 for i = 1:M+1
20     NDCT(i,:) = cos((i-1)*acos(mnodes));
21 end
22
23 w = NDCT\intcosw;
24
25 int_w = f(nodes)*w;
```

I pesi di quadratura vengono salvati nel vettore  $\mathbf{w}$  e sono calcolati come soluzione del sistema lineare  $\mathbf{w} = \text{NDCT} \backslash \text{intcosw}$ . La matrice NDCT corrisponde a

$$\begin{pmatrix} T_0(m_\alpha(x_0)) & T_0(m_\alpha(x_1)) & \cdots & T_0(m_\alpha(x_M)) \\ T_1(m_\alpha(x_0)) & T_1(m_\alpha(x_1)) & \cdots & T_1(m_\alpha(x_M)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_M(m_\alpha(x_0)) & T_M(m_\alpha(x_M)) & \cdots & T_M(m_\alpha(x_M)) \end{pmatrix}.$$

Una volta noti i pesi di quadratura si può calcolare l'integrale come  $\mathbf{f}(\text{nodes}) * \mathbf{w}$ .

### 3.2.2 Interpolazione e Quadratura con KT

```

1 f = @(x) 1./(1+100.*(x.^2));
2 M = 100;
3 N = ceil(4*sqrt(M));
4 alpha = 0.99;
5
6 beta = sin(alpha*(pi/2));
7 m_alpha = @(x) (sin((alpha*(pi/2)).*x))./(sin(alpha*(pi/2)));
8 g_alpha = @(t) (sin(t)./sqrt(1/beta^2 - cos(t).^2))/alpha;
```

Forniti come input la funzione  $f$ , il parametro del metodo  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $N$  il grado del polinomio di interpolazione e  $M + 1$  il numero di nodi vengono calcolati

$$m_\alpha(x) = \frac{\sin(\alpha\pi x/2)}{\sin(\alpha\pi/2)}, \quad \beta = \sin(\alpha\pi/2) \text{ e } g_\alpha(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2(\alpha\pi/2)} - \cos^2(t)}} \frac{1}{\alpha}.$$

Il vincolo che deve rispettare  $N$  dipende dalla scelta del parametro  $\alpha$  come discusso nella sezione 2.3.2.

```

9 n = 1e07;
10 h = pi/n;
11 x = linspace(0,pi,n+1) + h/2;
12 x = x(1:n);
13 intcos = dct(g_alpha(x))*sqrt(2)/sqrt(n);
14 intcos(1) = intcos(1)*sqrt(2);
15 intcosw = intcos(1:N+1);
```

Nel vettore `intcosw` viene memorizzato

$$\left( \int_{-1}^1 T_0(m_\alpha(x))dx, \dots, \int_{-1}^1 T_N(m_\alpha(x))dx \right)^\top$$

attraverso la trasformata discreta del coseno.



```

16 nodes = linspace(-1,1,M+1);
17 mnodes = m_alpha(nodes);
18
19 NDCT = zeros(M+1,N+1);
20 for i = 1:N+1
21     NDCT(:,i) = cos((i-1)*acos(mnodes'));
22 end
23
24 c = sqrt(2/pi).*ones(1,N+1);
25 c(1) = sqrt(1/pi);
26 C = diag(c);
27
28 mu = zeros(1,M+1);
29 mu(1) = (1/2)*(asin(mnodes(2))-asin(-1));
30 mu(M+1) = (1/2)*(asin(1)-asin(mnodes(M)));
31 for i = 2:M
32     mu(i) = (1/2)*(asin(mnodes(i+1))-asin(mnodes(i-1)));
33 end
34 mu = sqrt(mu);
35 W = diag(mu);
36
37 A = W*NDCT*C;
38
39 b = W*f(nodes');

```

La matrice  $A \in \mathbb{R}^{M+1} \times \mathbb{R}^{N+1}$  ha l'entrata  $(m+1, n+1)$  uguale a  $\sqrt{\mu_m} \phi_n(x_m)$ . Le funzioni  $\phi_n$  e i pesi  $\mu_m$  sono definiti rispettivamente nelle sezioni 2.1 e 2.2. Il vettore  $\mathbf{b}$  è uguale a  $(\sqrt{\mu_0}f(x_0), \dots, \sqrt{\mu_M}f(x_M))^\top$ .

```

40 coef = A\b;
41 intcosw = intcosw.*c;
42 int_w = intcosw*coef;

```

Nel vettore  $\mathbf{coef} = A \setminus \mathbf{b}$  sono memorizzati i combinatori lineari della funzione di approssimazione rispetto alla base  $\{T_n(m_\alpha(x))\}_{n=0, \dots, N}$ . Si può quindi calcolare l'integrale della funzione come  $\mathbf{intcosw} * \mathbf{coef}$ .

### 3.2.3 Formule di quadratura Transplanted

```

1 f = @(x) 1./(1+100.*(x.^2));
2 M = 100;
3 alpha_tra = 0.7;
4
5 m_alpha_inv = @(x) (2/(alpha_tra*pi)).*asin(sin(alpha_tra*(pi/2)).*x);
6 beta_tra = sin(alpha_tra*(pi/2));
7 m_alpha_inv_p = @(x) ...
    ((2*beta_tra)/(alpha_tra*pi)).*(1./sqrt(1-(beta_tra.*x).^2));

```

Forniti come input la funzione  $f$ , il parametro del metodo  $\alpha \in [0, 1]$  e  $M$  il grado del polinomio di interpolazione vengono calcolati

$$m_\alpha^{-1}(y) = \frac{2}{\alpha\pi} \arcsin(\sin(\alpha\pi/2)y), \quad (m_\alpha^{-1})'(y) = \frac{2\beta}{\alpha\pi\sqrt{1-\beta^2y^2}} \text{ e } \beta = \sin(\alpha\pi/2).$$

```

8     ab = r_jacobi(M+1,0,0);
9     xw = gauss(M+1,ab);
10    x = xw(:,1);w=xw(:,2);
11    [x,w] = scalatura(x,w,-1,1);

```

La funzione `r_jacobi(M+1,0,0)` calcola i coefficienti della ricorsione a 3 termini per i polinomi ortogonali di Legendre mentre la funzione `gauss(M+1,ab)` restituisce i nodi e i pesi della formula di quadratura di Gauss-Legendre.

```

12    x_tran = m_alpha_inv(x);
13    w_tran = w.*m_alpha_inv_p(x);
14    int_tran = (w_tran')*f(x_tran);

```

Seguendo quanto fatto nella sezione 2.5 vengono calcolati i nuovi nodi e i nuovi pesi di quadratura. Si può quindi calcolare l'integrale della funzione come `(w_tran')*f(x_tran)`.

### 3.2.4 Formula dei Trapezi

```

1     function [x,w] = trapezi_composta(N,a,b)
2     h = (b-a)/N;
3     x = a:h:b; x=x';
4     w = ones(N+1,1);
5     w(1) = 0.5; w(N+1) = 0.5;
6     w = w*h;

```

La funzione `trapezi_composta` riceve in input il numero di sottointervalli  $N$  e l'intervallo di integrazione  $[a, b]$  e restituisce in output i nodi e i pesi di integrazione della formula dei trapezi composta.

```

1     f = @(x) 1./(1+100.*(x.^2));
2     M=100;
3
4     [x_trap,w_trap]=trapezi_composta(M,-1,1);
5     int_trap = (w_trap')*f(x_trap);

```

Lo script precedente permette di integrare la funzione  $f$  nell'intervallo  $[-1, 1]$  perchè

$$\text{int\_trap} = (\mathbf{w\_trap}') * \mathbf{f}(\mathbf{x\_trap}) = \frac{2}{N} \left( \frac{f(-1) + f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f\left(-1 + k \frac{2}{N}\right) \right).$$

### 3.3 Conclusioni

Riassumiamo brevemente i risultati più importanti della nostra trattazione. L'analisi dell'approccio Fake Nodes (FNA) si è rivelato uno strumento utile e flessibile che può essere utilizzato come alternativa alla classica interpolazione polinomiale. La caratteristica principale è quella di ricostruire una funzione incognita tramite una base mappata senza il bisogno di ricampionare la funzione. Non bisogna dimenticare l'ereditarietà della costante di Lebesgue e dell'errore di interpolazione che assicura a questo metodo stabilità e accuratezza. Questi vantaggi sono bilanciati dall'attenzione da porre nella scelta dei *fake nodes* e della mappa  $S$ , che deve codificare le proprietà che cerchiamo nell'interpolazione (approssimazione di funzioni discontinue, bassa crescita della costante di Lebesgue). Dal punto di vista computazionale il metodo si è distinto per il vasto spettro di applicazioni sia teoriche che pratiche (riduzione del fenomeno di Runge e di Gibbs, interpolazione in un contesto multivariato).

Le buone proprietà dell'approccio Fake Nodes (in particolare la duttilità nella scelta della base) sono state analizzate con più dettaglio per la mappa di Kosloff e Tal-Ezer e sono state applicate anche al problema della quadratura numerica. Approfondimenti teorici e test numerici hanno portato alla considerazione che, per raggiungere allo stesso tempo accuratezza e stabilità, fosse necessario ridimensionare lo spazio di approssimazione rispetto al numero di nodi di campionamento della funzione. L'analisi del metodo si è quindi spostata sulla determinazione più solida e puntuale dei vari parametri in gioco. La chiave della stabilità e dell'accuratezza raggiunta dai metodi proposti è la scelta della dimensione dello spazio di approssimazione  $N$  in rapporto al numero di nodi  $M$  (o alla spaziatura massima  $h$ ) per differenti scelte di  $\alpha$  (il parametro della mappa di Kosloff e Tal-Ezer). Per una scelta fissa di  $\alpha$  non è possibile migliorare il rapporto asintotico ottimale  $N/M$  rispetto a quello che si ottiene per i polinomi algebrici ( $\alpha = 0$ ,  $N = \mathcal{O}(\sqrt{M})$ ). Tuttavia se  $\alpha = \alpha_N \rightarrow 1^-$  si mostra che la stabilità è garantita e che  $N$  è una funzione lineare di  $M$ . La classica convergenza è tralasciata ma si ottiene grande accuratezza con una scelta appropriata della tolleranza  $\varepsilon$ . Un aspetto da non sottovalutare è la corrispondenza tra i vincoli che si trovano studiando l'errore di migliore approssimazione, la limitatezza della costante di Lebesgue (norma operatoriale della proiezione sullo spazio di approssimazione) e del numero di condizionamento delle matrici coinvolte nello schema numerico.

Dal punto di vista pratico un risultato di convergenza dei pesi di quadratura (Teorema 2.18) ci permette di scegliere in modo più razionale i parametri del metodo e in seconda analisi ci porta a preferire il metodo KTL (Kosloff Tal-Ezer Least-squares) rispetto alla quadratura con i fake nodes. Evidenze numeriche sottolineano la robustezza del metodo: se viene aumentato il numero di nodi oppure se vengono perturbati, lo schema raggiunge comunque la precisione di macchina. Concludiamo la trattazione mettendo in rilievo che l'implementazione dei vari metodi è stata messa in pratica utilizzando la base di Chebyshev e la trasformata del coseno (un risultato di divergenza dell'errore nel caso della base monomiale ci permette di giustificare analiticamente questa scelta, cf. (2.9)). I test numerici condotti rispecchiano le osservazioni riportate in questo lavoro e confermano la bontà dei parametri studiati.

# Bibliografia

- [1] A. Bjorck and G. Dahlquist. *Numerical Methods*. Prentice–Hall, 1975.
- [2] S.J. Smith. Lebesgue constants in polynomial interpolation. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 33:109–123, 2006.
- [3] S. De Marchi, F. Marchetti, E. Perracchione, and D. Poggiali. Polynomial interpolation via mapped bases without resampling. *JCAM*, 2020.
- [4] S. De Marchi, F. Marchetti, E. Perracchione, and D. Poggiali. Multivariate approximation at fake nodes. *Applied Mathematics and Computation*, (391), 2021.
- [5] S. De Marchi, G. Elefante, E. Perracchione, and D. Poggiali. Quadrature at fake nodes. *preprint*.
- [6] B. Adcock and R.B. Platte. A mapped polynomial method for high accuracy approximations on arbitrary grids. *SIAM J. Numer. Anal.*, 54:2256–2281, 2016.
- [7] N. Hale and L.N. Trefethen. New quadrature formulas from conformal maps. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46:930–948, 2008.
- [8] P.J. Davis. *Interpolation and Approximation*. Dover Publications, 1975.
- [9] L. Brutman. Lebesgue functions for polynomial interpolation – a survey. *Ann. Numer. Math.*, (4):111–127, 1997.
- [10] T.J. Rivlin. *An Introduction to the Approximation of Functions*. Dover Publications, New York, 1969.
- [11] L. Bos, D. De Marchi, and K. Hormann. On the lebesgue constant of berrut’s rational interpolant at equidistant nodes. *J. Comput. Appl. Math.*, (236):504–510, 2011.
- [12] L. Brutman. On the lebesgue function for polynomial interpolation. *SIAM J. Numer. Anal.*, (15):694–704, 1978.
- [13] J.P. Berrut, S. De Marchi, G. Elefante, and F. Marchetti. Treating the gibbs phenomenon in barycentric rational interpolation via the s-gibbs algorithm. *Appl. Math. Letters*, (103), 2020.

- [14] D. Kalman. The generalized vandermonde matrix. *Mathematics Magazine*, 57(1):15–21, 1984.
- [15] C. Brezinski. *Biorthogonality and its Applications to Numerical Analysis*. Marcel Dekker Inc., New York, 1992.
- [16] E.W. Cheney. *Introduction to Approximation Theory*. AMS Chelsea Pub, New York, 2000.
- [17] E. Isaacson and H.B. Keller. *Analysis of Numerical Methods*. Dover Publications, 1994.
- [18] A. Quarteroni, F. Saleri, and P Gervasio. *Calcolo Scientifico*. Springer, 2017.
- [19] J. Boyd and F. Xu. Divergence (runge phenomenon) for least-squares polynomial approximation on an equispaced grid and mock-chebyshev subset interpolation. *Appl. Math. Comput.*, 210:158–168, 2009.
- [20] D. Coppersmith and T.J. Rivlin. The growth of polynomials bounded at equally spaced points. *SIAM J. Math. Anal.*, 23:970–983, 1992.
- [21] E.A. Rakhmanov. Bounds for polynomials with a unit discrete norm. *Ann. Math.*, 165:55–88, 2007.
- [22] D. Kosloff and H. Tal-Ezer. A modified chebyshev pseudospectral method with an  $\mathcal{O}(N^{-1})$  time step restriction. *J. Comput. Phys.*, 1014:457–469, 1993.
- [23] L.N. Trefethen. *Approximation Theory and Approximation Practice*. SIAM, Philadelphia, 2013.
- [24] H. Tal-Ezer. Nonperiodic trigonometric polynomial approximation. *J. Sci. Comput.*, 60:345–362, 2014.
- [25] B. Adcock. Univariate modified fourier methods for second order boundary value problems. *BIT*, 49:249–280, 2009.
- [26] P. Borwein and T. Erdelyi. *Polynomials and Polynomial Inequalities*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [27] R.B. Platte, L.N. Trefethen, and A.B.J. Kuijlaars. Impossibility of fast stable approximation of analytic functions from equispaced samples. *SIAM Rev.*, 53:308–318, 2011.
- [28] G.B. Folland. *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*. Wiley-Interscience, 1999.
- [29] V.I. Krylov. *Approximate Calculation of Integrals*. Dover, 2006.
- [30] P. Rabinowitz. Rough and ready error estimates in gaussian integration of analytic functions. *Comm. ACM*, 12:268–270, 1969.