



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI
"M. FANNO"

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA

PROVA FINALE

"Analisi di serie storica del tasso di crescita del PIL reale USA"

RELATORE:

CH.MO PROF. Nunzio Cappuccio

LAUREANDO/A: Riccardo Costella

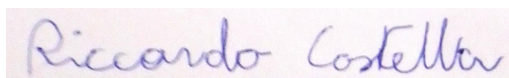
MATRICOLA N. 1190992

ANNO ACCADEMICO 2021 – 2022

Dichiaro di aver preso visione del “Regolamento antiplagio” approvato dal Consiglio del Dipartimento di Scienze Economiche e Aziendali e, consapevole delle conseguenze derivanti da dichiarazioni mendaci, dichiaro che il presente lavoro non è già stato sottoposto, in tutto o in parte, per il conseguimento di un titolo accademico in altre Università italiane o straniere. Dichiaro inoltre che tutte le fonti utilizzate per la realizzazione del presente lavoro, inclusi i materiali digitali, sono state correttamente citate nel corpo del testo e nella sezione ‘Riferimenti bibliografici’.

I hereby declare that I have read and understood the “Anti-plagiarism rules and regulations” approved by the Council of the Department of Economics and Management and I am aware of the consequences of making false statements. I declare that this piece of work has not been previously submitted – either fully or partially – for fulfilling the requirements of an academic degree, whether in Italy or abroad. Furthermore, I declare that the references used for this work – including the digital materials – have been appropriately cited and acknowledged in the text and in the section ‘References’.

Firma (signature)

A handwritten signature in blue ink that reads "Riccardo Costella". The signature is written in a cursive style and is placed on a light pink rectangular background.

Sommario

L'obiettivo di questa tesi è l'analisi della serie storica del PIL degli Stati Uniti d'America limitata al periodo 1980-2018 per la formulazione di un modello ARMA, avente come scopo ultimo la previsione del tasso di crescita del PIL reale americano per il periodo 2019-2021. Nello sviluppo dell'elaborato il processo di analisi e forecasting verrà inizialmente applicato su una finestra temporale più ristretta, la quale verrà a mano a mano ampliata con l'introduzione di alcuni rilevanti avvenimenti importanti per la storia economica americana. Sarà parte del lavoro esporre le ragioni sottostanti l'inclusione dei suddetti eventi. La relazione si suddivide in tre parti. Una prima introduzione introdurrà l'argomento delle serie storiche ed esplora il PIL come indicatore aggregato. Il secondo capitolo osserverà una prima elaborazione dei dati, in preparazione dei test di radice unitaria; seguirà lo sviluppo del modello ARMA fondamentale per il processo di forecasting. Il capitolo si concluderà con l'esposizione grafica dei risultati ottenuti. L'elaborato avrà fine con un capitolo riepilogativo dei risultati ottenuti.

Indice

1	INTRODUZIONE	1
1.1	IL PRODOTTO INTERNO LORDO	1
1.2	LE SERIE STORICHE	7
2	ANALISI DEI DATI	9
2.1	ELABORAZIONE DEI DATI	9
2.2	TEST DI RADICE UNITARIA	12
2.3	SVILUPPO DEI MODELLI ARMA	17
3	CONCLUSIONI	37
4	APPENDICE	39
5	BIBLIOGRAFIA	45

1 INTRODUZIONE

1.1 IL PRODOTTO INTERNO LORDO

L'oggetto di studio di questa tesi è il Prodotto Interno Lordo degli Stati Uniti d'America, un'economia tra le più importanti del globo e rappresentante il 20% dell'output mondiale (Focus Economics, 2022). Il PIL, chiamato anche Gross Domestic Product (abbreviato GDP), è una misura macroeconomica per indicare la produzione aggregata di beni e servizi finali a valore di mercato derivata dall'economia interna di una nazione in un arco di tempo. Nel corso della storia diversi studiosi svilupparono numerosi concetti per il calcolo della ricchezza nazionale ma il primo, esaustivo metodo di misurazione del reddito nazionale è riconosciuto a Simon Kuznets (Kuznets, 1934). Nel report "National Income 1929-1932" consegnato da "United States Bureau of Foreign and Domestic Commerce" al Congresso Americano, Simon Kuznets argomenta due diversi metodi di classificazione del reddito nazionale: "*Classification by types of payment*" "*Classification by Industrial sources*" (Kuznets, 1934, p. 2-4). Per quanto rivoluzionario, il report presentato non fu privo di critiche, esposte anche da Kuznets stesso. Il sistema contabile era semplice e puntato sull'individuo piuttosto che sulla nazione; inoltre non teneva conto di molteplici fattori presenti nell'economia, come la spesa pubblica. Secondo tale framework, la ricchezza di una nazione è data dal reddito disponibile dei privati mentre la spesa pubblica per il benessere sociale (infrastrutture, armamenti, educazione, etc.) doveva essere dedotta, in quanto considerata come bene intermedio e non godibile al consumatore finale. Tale teoria risultò contrastante con le inclinazioni del OPACS (Office of Prices Administration and Civilian Supply), il quale si preparava per l'imminente entrata in guerra degli Stati Uniti nel 1940 e cercava una giustificazione per incrementare la spesa in armamenti. Kuznets propose uno schema a partita doppia che prevedeva il bilancio tra il valore di mercato dei beni e servizi prodotti da una nazione con la somma dei redditi dei nuclei familiari e delle imprese. Tale assioma è soddisfatto solo per un'economia chiusa o qualora si restringa il raggio di ricerca al capitale e manodopera investito all'interno del territorio americano. L'OPACS argomentava che le stime così provviste non rispecchiassero le vere capacità del sistema produttivo americano. Passando ad un'economia di guerra, gli U.S.A. avrebbero mobilitato manodopera e capitale al di fuori dei confini territoriali; misure governative a sostegno della guerra avrebbero ultimamente danneggiato le stime ottenute. A partire dal 1940 il governo americano condusse estensive ricerche su un sistema di contabilità nazionale che potesse meglio integrare gli

investimenti e spese pubbliche; consultando anche l'economista Keynes, i quali studi argomentavano un beneficio della spesa pubblica al reddito nazionale. Nel 1941 Keynes fa visita agli Stati Uniti ed incontra Richard Gilbert, dirigente del OPACS al tempo, e membri dello staff, scambiando idee sulla struttura e contabilità del reddito nazionale. Secondo la corrente di pensiero keynesiana (Keynes, 1921), indichiamo con Y il valore complessivo del sistema produttivo nazionale, il quale coincide con il GDP; assumiamo inoltre che la domanda nazionale di beni (Z) coincida con la produzione complessiva (Y). La domanda nazionale di beni e servizi è composta dalla somma di quattro aggregati:

$$Z=C+G+I+(X-M)$$

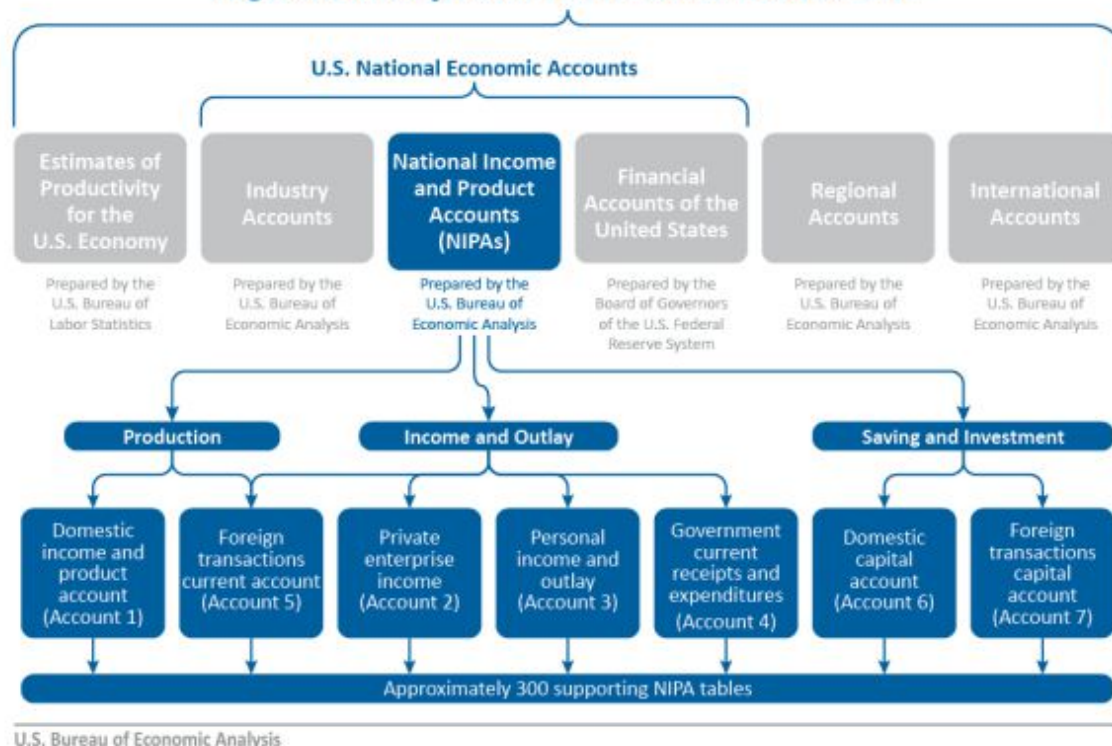
- C equivale all'aggregato dei consumi finali dei privati
- G equivale alla spesa pubblica per l'acquisto di beni e servizi e gli investimenti pubblici
- I equivale agli investimenti privati delle imprese
- $(X-M)$ viene chiamato anche esportazioni nette, ottenuto tramite la differenza tra il valore delle esportazioni ed importazioni.

Utilizzando l'equivalenza $Z=Y$ e sapendo che diversi fattori, come il consumo finale e l'investimento, dipendono dal livello di produzione complessiva; possiamo riscrivere l'equazione sopra posta come:

$$Y=C(Y)+G+I(Y)+(X(Y)-M(Y))$$

Aumenti della spesa pubblica avrebbero un effetto positivo sulla produzione complessiva ed indirettamente sui fattori legati alla produzione. Il modello keynesiano enfatizza la capacità del sistema produttivo nazionale ed il governo copre un ruolo di maggiore importanza, tramite politiche fiscali e monetarie. Nel 1942 viene rilasciata una stima definita "Gross National Expenditure", complementare alla stima del National Income; le prime verranno ampliate e ridefinite per comporre il "Gross National Product". Le prime statistiche del reddito nazionale e della produzione nazionale vengono presentate come parte ed output di un sistema di contabilità nazionale a partita doppia nel 1947. In tale formato, tutte le transizioni vengono classificate e separate in macrocategorie: *households*, *businesses*, *governement and international* (denominato come "resto del mondo). Questo framework prenderà poi il nome di NIPA ("National Income and Production Accounts"). Con il tempo, il sistema contabile economico nazionale americano verrà ampliato per poter presentare altri elementi di importante rilevanza per la comprensione della performance dell'economia americana.

Figure 1. The System of U.S. Economic Accounts



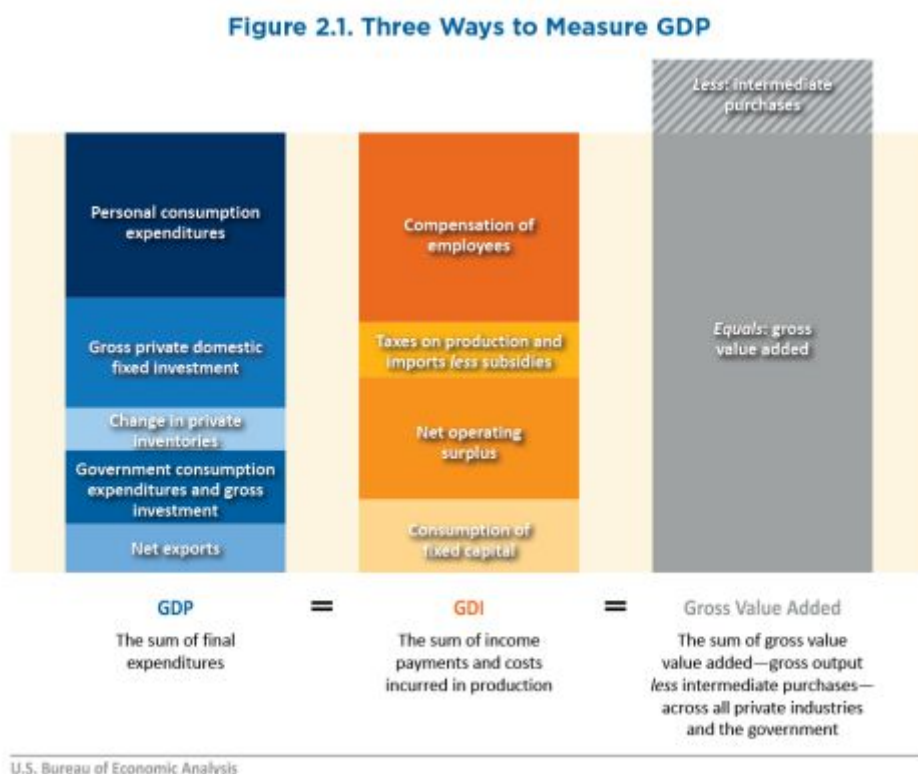
1-1 Schema rappresentativo del sistema di contabilità nazionale americano

Il manuale NIPA fornisce tre metodi differenti per il calcolo del GDP (BEA, 2021, p. 2-7 – 2-11), offrendo anche risposta a domande frequentemente poste: quali sono le dimensioni dell'output complessivo nazionale? Quali sono le sue fonti e come contribuiscono alla sua formazione? Quali sono le fonti dei risparmi nazionali, fondamentali per finanziare investimenti futuri

1. Somma dei beni e servizi venduti ai consumatori finali. Conosciuta anche come *expenditures approach*, la stima è ottenuta come somma di macrocategorie fondate sul valore di acquisto finale di beni e servizi.
 - *Personal consumption expenditures*: misura complessiva del valore di beni e servizi acquistati da privati (nuclei familiari, istituzioni no-profit al servizio di famiglie di cittadini, etc.)
 - *Gross Private fixed investment*: misura di acquisti e sostituzioni di asset immobili privati al lordo di ammortamento e/o rivalutazioni; comprende anche acquisti di proprietà intellettuali ed investimenti immobiliari.
 - *Change in private inventories*: misura complessiva del valore di variazioni nel volume materiale di scorte detenute in magazzino da imprese private in un determinato arco temporale.

- *Net exports of goods and services*: misura complessiva delle esportazioni di beni e servizi al netto delle importazioni. Vengono considerate come esportazioni qualsiasi movimento di beni e servizi da parte di residenti americani verso residenti al di fuori degli Stati Uniti. Viceversa, per le importazioni.
 - *Government consumption expenditures and gross investment*: valore separato in due componenti. Il primo è il valore complessivo delle spese pubbliche del governo americano per l'acquisto di beni e servizi a favore della pubblica popolazione. Il secondo componente (*Gross Investment*) consiste nella spesa da parte del governo americano ed aziende governative per l'acquisto di immobilizzazioni che apportino un beneficio per la popolazione americana od assistano le agenzie governative nelle loro core activities.
2. *Income approach*: somma degli stipendi lavorativi ed altri costi sostenuti per la produzione di beni e servizi, valore rappresentativo del potere di acquisto delle famiglie e dello stato finanziario delle imprese. Il valore economico ottenuto è anche chiamato GDI (Gross Domestic Income) e si compone di
- *Compensation of employees*: rappresenta la misura complessiva delle remunerazioni destinate ai dipendenti; è costituito da salari e stipendi (rappresentanti la voce più rilevante) ed altri bonus (contributi pagati dal datore di lavoro per fondi pensione ed assicurazioni ai lavoratori e contributi governativi pagati dal datore di lavoro)
 - *Taxes on production and imports*: somma delle imposte ed accise pagate sui beni e servizi prodotti/spediti/venduti/trasferiti/smaltiti dai loro produttori ed ulteriori tasse sulla produzione. Non sono comprese al loro interno le imposte sul reddito imponibile.
 - *Subsidies*: valore complessivo dei sussidi pagati da agenzie governative nei confronti di imprese private ed imprese governative, da sottrarsi in fase di calcolo del GDI.
 - *Net operating surplus*: aggregato ottenuto dalla somma dei risultati operativi della gestione caratteristica di imprese private e governative, ottenuto come il margine operativo lordo al netto di ammortamenti e svalutazioni.
 - *Consumption of fixed capital*: rappresenta le stime NIPA per il deprezzamento economico degli asset – qualsiasi perdita di valore attribuibile ad un deterioramento fisico, obsolescenza e danni accidentali ad eccezione di danni causati da eventi catastrofici.

3. *Production approach*: valore ottenuto dalla somma del valore aggiunto del complesso industriale, misura della performance del sistema produttivo americano. All'interno del *U.S. National Economic Accounts* troviamo l'*Industry Accounts*, un sistema di contabilità conosciuto anche come I.O. (Input-Output) account che definisce come valore aggiunto la differenza tra il valore dell'output lordo industriale (ricavi netti di vendita, altri ricavi operativi e variazioni di magazzino e scorte) e gli input intermediari (costo di beni e servizi usati in produzione).



1-2 Rappresentazione grafica dei tre metodi di calcolo del PIL

Questi tre metodi di calcolo per il GDP risultano concettualmente simili tra di loro e porterebbero al medesimo risultato. Per la presenza di fattori esterni, come le stime usate per i calcoli, la tempistica nel rilevare i dati o l'uso di dati provenienti da fonti diverse tra loro, queste tre misure tendono a differire nelle loro stime.

Il dataset usato in questa tesi come analisi non sarà il GDP, tuttavia, ma il tasso percentuale di variazione nel Real GDP. Il PIL è un valore suscettibile non solo a variazioni nel settore produttivo ma anche nell'inflazione, in quanto somma del valore monetario di beni e servizi prodotti in un determinato periodo; il BEA (Bureau of Economic Analysis) si preoccupa di fornire anche dataset relativi al Real GDP, o PIL reale, ovvero valori del GDP corretti per l'inflazione. Per il calcolo della stima di valori aggregati ed aggiustati per l'inflazione, il BEA si avvale di un indice aggregato. Il Bureau argomenta come l'inflazione non è data da

un unico valore ma dipende da un ampio spettro di prezzi legati a svariati beni e servizi, valori non costanti nel tempo e suscettibili a variazioni di prezzo di altri beni. Convertendo la variazione dei prezzi in un valore indice, è possibile combinare i singoli indici per ciascun bene e servizio in un unico indice aggregato tramite metodi di calcolo statistici. Secondo il metodo descritto nel NIPA (BEA, 2021, p.4-18 – 4-19), le variazioni annuali di unità prodotte e dei prezzi sono calcolate tramite una formula sviluppata da Fisher, incorporando i valori di due periodi adiacenti.

$$Q_t^F = \sqrt{\frac{\sum p_{t-1} q_t}{\sum p_{t-1} q_{t-1}} \times \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_{t-1}}}$$

La formula è composta da due componenti:

1. L'indice dei volumi di Laspeyres $Q_t^L = \frac{\sum p_{t-1} q_t}{\sum p_{t-1} q_{t-1}}$
2. L'indice dei volumi di Paasche $Q_t^P = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_{t-1}}$

La variazione percentuale nel PIL reale nel periodo t dal periodo t-1 è ottenuta come:

$$100(Q_t^F - 1.0)$$

Questa tecnica è chiamata *chained-type index* e permette di creare indici ottenuti allo scopo di creare una serie storica. L'uso di questa tecnica presenta diversi vantaggi rispetto all'uso di *fixed-weighted indexes*

- Le variazioni percentuali ottenute non sono affette dalla scelta del periodo di riferimento
- Elimina il bias di sostituzione presenti nei tassi di crescita del PIL reale derivati da *fixed-weights indexes*; possibile causa di sottostime di tassi di crescita per periodi precedenti all'anno di riferimento e di sovrastima per periodi successivi all'anno di riferimento
- Elimina le anomalie che risulterebbero dall'uso di un periodo di riferimento recente per la stima di tassi di crescita di periodi antecedenti ove fossero presenti prezzi ben differenti.
- Elimina la necessità di aggiornare i prezzi e pesi usati nel calcolo degli indici, evitando la confusione di dover ricalcolare gli indici ottenuti in precedenza.

1.2 LE SERIE STORICHE

Per serie storica si intende un insieme di osservazioni quantitative ordinate secondo un principio cronologico; un argomento già di fondamentale importanza nelle scienze naturali a partire dall'antichità. L'analisi di una serie storica permette di osservare regolarità nelle osservazioni di una variabile e di dedurre delle leggi, con lo scopo finale di migliorare la previsione di sviluppi futuri. L'assioma sottostante lo studio di questa disciplina è la decomposizione di una serie in un numero finito di componenti indipendenti e non direttamente osservabili, la loro sovrapposizione permette di renderli visibili sottoforma di osservazioni di una serie. La teoria classica, sviluppata da Persons (1919), identifica quattro componenti: una tendenza a lungo termine, un componente ciclico a periodi annuali (business cycle), il ciclo stagionale ed infine i residui, detti anche *white noise*, i quali incorporano tutti gli effetti non reputabili ai precedenti fattori. Ad eccezione dei residui, i quali sono considerati come una componente stocastica $NID(0;\sigma^2)$, gli altri componenti venivano assunti come rappresentabili da una funzione deterministica rispetto al tempo, ovvero risultava possibile prevederne l'output se si fosse a conoscenza del valore iniziale. A partire dagli anni '70 venne impiegato un approccio diverso, secondo il quale tutte le componenti di una serie storica seguivano una funzione stocastica, trasformando una serie storica in un processo stocastico. La differenza tra le correnti di pensiero si denota principalmente nelle loro proprietà statistiche ed in ambito economico.

- Supponendo un modello deterministico $x_t = x_0 + \mu_t$, dove x_0 rappresenta una costante non stocastica e μ_t è una tendenza deterministica, $x_0 + E[\mu_t]$ rappresenta una linea centrale intorno alla quale x_t tenderà ad oscillare; in presenza di uno shock esterno al tempo t , un processo deterministico reagirà in maniera temporanea. Per un modello stocastico $x_t = x_0 + \sum \varepsilon_t$ con $v_t \equiv \sum \varepsilon_t$, dove ε rappresenta un processo stocastico non stazionario con $E(v^2) = t\sigma_\varepsilon^2$, non esiste alcuna linea centrale intorno alla quale oscillare. Uno shock esterno al tempo t ha un effetto permanente sul processo stocastico.
- Qualora cercassimo di prevedere le osservazioni future $x(t+\tau)$, $\tau=1, \dots, \infty$ l'errore di previsione per un processo deterministico è nullo per valori osservati di x_0 e μ_t . Per un modello stocastico l'errore di previsione per $x(t+\tau)$ è dato da

$$\sum_{\tau=1}^{\infty} \varepsilon_{t+\tau}$$

Per la letteratura economica contemporanea è ormai generalmente accettato che diverse variabili economiche, come il PIL e l'inflazione, seguano un processo stocastico.

Al centro dell'analisi di una serie storica vi è la stazionarietà, proprietà di un processo stocastico di mantenere costanti nel tempo i parametri della propria distribuzione. Questa proprietà è fondamentale per ottenere stime più accurate dei parametri. La stazionarietà è assunta per le seguenti caratteristiche dei momenti di un processo stocastico $\{x_t\}$:

- i. Stazionarietà nella media: un processo è detto stazionario nella media se $E[x_t] = \mu_t = \mu$ per $t=1, \dots, T$
- ii. Stazionarietà nella varianza: un processo è detto stazionario nella varianza se $\text{Var}(x_t) = E[(x_t - \mu_t)^2] = \sigma_t^2 = \sigma^2$ per $t=1, \dots, T$
- iii. Stazionarietà nella covarianza: un processo è detto stazionario nella covarianza se $\text{Cov}(x_t, x_s) = E[(x_t - \mu_t)(x_s - \mu_s)] = \gamma(|s-t|)$ è una funzione della distanza nel tempo tra le due osservazioni e non dipende dalla loro osservazione nel momento t .

Definendo come stazionarietà in senso stretto la presenza di tali caratteristiche nei momenti di un processo stocastico, definiamo come stazionarietà debole la presenza di stazionarietà nella media e nella covarianza per $s \neq t$. L'assunzione di stazionarietà in senso stretto è troppo stringente per essere applicata in pratica, ci limitiamo quindi alla stazionarietà debole.

2 ANALISI DEI DATI

2.1 ELABORAZIONE DEI DATI

Il primo passaggio da attuare per l'analisi di serie è ottenere il dataset per il PIL reale americano, compito per il quale ci affidiamo a F.R.E.D., acronimo di Federal Reserve Economic Data. FRED è una banca dati online liberamente accessibile, contenente svariati dataset macroeconomici e microeconomici. Una semplice ricerca per "Real GDP" ci consente di ottenere in tempi brevi i dati a noi necessari. Il dataset su cui verrà condotta l'analisi è la serie trimestrale del GDP reale calcolato in miliardi di dollari con anno base 2012, i dati sono inoltre già aggiustati per la componente stagionale. Come menzionato nel capitolo precedente, il ciclo stagionale riflette fluttuazioni ricorrenti e prevedibili nel periodo infrannale ed è necessario un processo di data-smoothing per eliminarne l'effetto. Il dataset completo comprende i valori del PIL reale americano a partire da 1947Q1, ovvero il primo trimestre dell'anno 1947, fino a 2022Q2; tuttavia, il periodo di analisi verrà ristretto dal 1980Q1 al 2018Q4. Le analisi di serie storica su grandezze macroeconomiche vengono effettuate su il tasso di variazione della variabile osservata. Prendendo una variabile X_t con $t=1, \dots, T$ definiamo il tasso di variazione della variabile come

$$\Delta X = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}$$
$$\Delta X = \frac{X_t}{X_{t-1}} - 1$$

Per evitare asimmetrie di valutazione tra valori positivi e negativi per il tasso di variazione, applichiamo il logaritmo naturale:

$$\ln(1 + \Delta X) = \ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right)$$
$$\ln(1 + \Delta X) = (\ln X_t - \ln X_{t-1})$$

Assumendo valori contenuti di ΔX , possiamo fare uso della serie di Taylor per approssimare il risultato:

$$\ln(1 + \Delta X) \cong \Delta X$$

ed ottenere il tasso di crescita percentuale:

$$\% \Delta X = (\ln X_t - \ln X_{t-1}) * 100$$

L'applicazione del logaritmo naturale è fondamentale per una corretta valutazione del tasso di crescita. Prendiamo tre osservazioni fittizie per il PIL: $X_t=120$, $X_{t-1}=100$ e $X_{t-2}=120$. Non applicando il logaritmo naturale, il tasso di crescita al tempo t-1 corrisponderebbe a -0,166 mentre al tempo t corrisponderebbe a 0,2. Applicando il logaritmo naturale, il tasso di crescita al tempo t-1 corrisponderebbe a -0,1823 mentre al tempo t corrisponderebbe a 0,1823. Valutando il tasso di variazione a cui non è stato applicato il logaritmo, si potrebbe affermare che l'economia qua riportata è in una fase di espansione, con un tasso di crescita ben superiore a quello osservato nella fase di contrazione; nonostante il valore monetario della produzione non sia aumentato rispetto a due periodi fa. Applicando il logaritmo siamo in grado di eliminare questa inconvenienza.

La storia economica degli Stati Uniti d'America è costellata di avvenimenti che hanno influenzato l'andamento del Prodotto Interno Lordo, persino in un periodo ristretto come il 1980-2018. La suddivisione del dataset è basata su alcuni criteri fondati sulla loro rilevanza storica ed il loro posizionamento nella linea temporale.

- Ciascun sottoperiodo deve concludersi nel trimestre precedente all'accadimento dell'evento scelto, così da meglio evidenziare il confronto tra la previsione futura dei tassi di crescita ottenuti con il modello sviluppato ed i dati reali osservati.
- Ciascun evento scelto come cardine per il sottoperiodo analizzato deve aver avuto causato un riconosciuto impatto sull'economia degli Stati Uniti

Seguendo tali criteri, gli eventi scelti per definire i sottoperiodi in cui verrà diviso il dataset sono:

1. **L'entrata in vigore del NAFTA:** nel 01/01/1994 entra in vigore il North American Free Trade Agreement, un accordo commerciale stipulato dalle nazioni del Canada, Messico e Stati Uniti. Lo scopo principale fu l'abolizione dei dazi doganali posti sul trasporto di merci tra le nazioni del Nord America, di maggior interesse per i commerci tra il paese del Messico e gli Stati Uniti. Il NAFTA non solo garantisce un commercio con zero dazi ma svolge anche un servizio di tutela nei confronti di esportatori di beni, servizi contrattuali e proprietà intellettuali. Considerato un accordo controverso per i possibili danni al settore agricolo messicano, incapace di far fronte all'ingresso nel mercato del ben meno caro grano e mais statunitense, e la possibile minaccia per il mercato della manovalanza americana di essere oscurati da imprese di lavorazioni messicane con un costo della manodopera inferiore. Tali paure si rivelarono infondate,

il mercato del lavoro americano ha beneficiato dall'ampliamento del commercio ed il Messico è stato il paese a beneficiare maggiormente per l'aumento delle esportazioni negli Stati Uniti (Burfisher, Robinson, Thierfelder, 2001).

2. **L'abolizione dell'atto legislativo Glass-Steagall:** approvato nel 1933 in seguito alla Grande Depressione ed il fallimento delle banche commerciali, l'atto Glass-Steagall (Federal bank of New York, 1933) riformò il sistema bancario statunitense; separando l'attività commerciale bancaria (concessione prestiti e stipulazione di depositi) dal brokeraggio, nessuna banca commerciale appartenente alla Federal Reserve poteva avere affiliazioni di alcun genere con imprese dedite all'investimento di titoli quotati in borsa e bond. Nel 1999 il Congresso ha passato il Gramm-Leach-Bliley Act, conosciuto anche come Financial Services Moderation Act, una serie di riforme atte a smantellare diverse regolazioni sulle azioni delle società di brokeraggio, includendo anche l'atto Steagall-Glass al suo interno. Le imprese finanziarie affiliate alle banche commerciali iniziarono così aggressive attività di speculazione con nuovi fondi.
3. **Attentati terroristici del 11 settembre:** considerato uno dei giorni più bui della storia americana, gli attacchi terroristici avvenuti il 11/09/2001 hanno dato inizio alla GWOT (Global War On Terrorism), una serie di interventi militari avviati dal governo degli Stati Uniti aventi obiettivo gruppi radicali di matrice islamica. Le conseguenze economiche degli attentati non si sono visti solamente nei giorni successivi, l'attacco al World Trade Center ha bloccato la Borsa di New York ed ha scatenato perdite in rimborsi assicurativi stimati per \$40 miliardi. Secondo il Watson Institute International & Public Affairs (2021), la stima della spesa pubblica intrapresa dal governo americano per le operazioni militari post-9/11 ammonta ad un totale di \$5843 miliardi.
4. **Crisi finanziaria del 2008:** conosciuta anche come Grande Recessione, questa crisi devastò il sistema bancario statunitense e coinvolse anche banche internazionali, per poi riversare gli effetti della Recessione sul commercio globale. Secondo una testimonianza rilasciata da Ben S. Bernanke (2010) di fronte alla Financial Crisis Inquiry Commission, vi sono stati diversi trigger (eventi e/o fattori particolari scatenanti) e vulnerabilità (debolezze strutturali nel sistema finanziario e regolatorio) che hanno causato una reazione a catena.

2.2 TEST DI RADICE UNITARIA

Una caratteristica fondamentale per il corretto forecasting di un processo stocastico è la stazionarietà del processo stesso. Viene solitamente assunto che variabili macroeconomiche a partire dal secondo post-guerra non siano stazionarie ma *difference stationary*; il processo viene reso stazionario sottraendo l'osservazione del periodo precedente. Definiamo con $I(\cdot)$ il livello di integrazione della variabile, il quale segnala anche quanti operatori di differenza siano necessari per ottenere la condizione di stazionarietà. Per $I(0)$, la serie storica è già stazionaria; mentre per $I(a)$ con $a \geq 1$, si rendono necessari diversi operatori di differenza per rendere il processo stazionario.

$$I(1) \rightarrow \Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (1-L)X$$

$$I(2) \rightarrow \Delta^2 X = \Delta X_t - \Delta X_{t-1} = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} = (1-L)^2 X$$

$$I(a) \rightarrow \Delta^a X_t = (1-L)^a X$$

L'ipotesi più affermata per la maggior parte delle serie storiche di variabili macroeconomiche è che tali processi siano di ordine $I(1)$, ad eccezione di variabili come l'inflazione ed i valori dei titoli azionari, i quali possano essere anche di ordine $I(2)$ (Hatanaka, 1996). La non stazionarietà di un processo stocastico è spesso data dalla presenza di una radice unitaria all'interno del processo; ovvero una radice dell'equazione caratteristica con valore uno. Definiamo un processo stocastico autoregressivo del primo ordine (AR(1)):

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

dove α_1 rappresenta un coefficiente ed ε_t è un processo stocastico stazionario con $E[\varepsilon_t] = 0$, $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$. Assumendo che $\alpha_1 = 1$ ed X_0 è conosciuto, possiamo ottenere per processo ricorsivo che

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^T \varepsilon_i$$

e di conseguenza

$$E[X_t] = E \left[X_0 + \sum_{i=1}^T \varepsilon_i \right] = X_0$$

$$\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_0) + \text{Var} \left(\sum_{i=1}^T \varepsilon_i \right) = t\sigma^2$$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t-1}) = E[(X_t - \mu_t)(X_{t-1} - \mu_{t-1})] = E\left[\left(\sum_{i=1}^T \varepsilon_i\right)\left(\sum_{j=1}^{T-1} \varepsilon_j\right)\right] = t(t-1)\sigma^2$$

Diventa così dimostrabile che la presenza di una radice unitaria all'interno di un processo stocastico lo renda non stazionario; introducendo un operatore di differenza siamo in grado di rendere la serie stazionaria eliminando la radice unitaria

$$X_t = \alpha * X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{con } \alpha = 1$$

$$X_t - X_{t-1} = (X_{t-1} - X_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$\Delta X_t = \varepsilon_t$$

La serie storica per il logaritmo del PIL reale ed il tasso di crescita verranno sottoposti a quattro diversi test per confermare o negare la presenza di radice unitaria:

- Test ADF: il test Dickey-Fuller (Dickey e Fuller, 1979) verifica la presenza di radice unitaria stimando il coefficiente di regressione in un processo AR(1), ponendo come ipotesi nulla la presenza di radice unitaria; l'ipotesi alternativa può essere definita come la condizione di stazionarietà o di esplosività. Questa versione permette di estendere il modello ad un ordine p-esimo di lag, includendo anche un termine costante od una tendenza deterministica. Definiamo il modello di regressione utilizzato come:

$$X_t = \alpha + \beta T + \gamma X_{t-1} + \sum_{p=2}^T \theta_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$(X_t - X_{t-1}) = \alpha + \beta T + (\gamma - 1)X_{t-1} + \sum_{p=2}^T \theta_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\Delta X_t = \alpha + \beta T + \gamma X_{t-1} + \sum_{p=2}^T \theta_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

dove α rappresenta il drift, T rappresenta la tendenza e β il suo coefficiente. Testando il modello per l'ipotesi di stazionarietà abbiamo:

$$\begin{cases} H_0: \gamma = 0 \\ H_1: \gamma < 0 \end{cases}$$

La decisione dell'ordine di lag da includere può essere condotta sulla base dei valori dei criteri informativi di Akaike e Bayes o sul p-value risultato per i coefficienti stimati.

- Test ADF-GL (Elliot, Rothenberg, Stock, 1996): il test riprende l'intuizione osservata da Dickey e Fuller ma aggiunge una componente deterministica al modello, sottoforma di costante o di trend lineare, ottenendo risultati ben migliori rispetto alla sua controparte originale. Nel momento della regressione il modello viene de-trendizzato, così da

meglio stimare la componente deterministica; il nuovo modello viene poi sottoposto ad un normale Dickey-Fuller test.

- KPSS test: a differenza dei test precedenti, il KPSS test (Kwiatkowski, Phillips, Schmidt, Shin, 1992) verifica l'ipotesi nulla di stazionarietà intorno ad una tendenza deterministica (i.e. trend-stationary) rispetto all'ipotesi alternativa della presenza di una radice unitaria. Assumiamo un modello:

$$X_t = \xi_t + r_t + \varepsilon_t$$

dove r_t corrisponde ad un random walk $r_t = r_{t-1} + u_t$ dove u_t sono i.i.d. $(0, \sigma_u^2)$. L'ipotesi nulla è data per $H_0: \sigma_u^2 = 0$, assumendo che ε_t è un processo stazionario, X_t è trend-stazionario.

- Zivot-Andrews test: prendendo ispirazione da un test sviluppato da Perron (1988, 1989), Eric Zivot e Donald W.K. Andrews (1992) sviluppano un test per l'individuazione di radice unitaria in presenza di break strutturale endogeno in un momento t non specificato. Il modello è sviluppato sull'assunzione di un break strutturale in un momento t nel drift, il trend lineare od entrambi. L'ipotesi nulla è considerata la presenza di radice unitaria in un processo includente un drift; l'ipotesi alternativa è data da un modello trend-stazionario che permette un singolo break nella serie. Viene poi stimato l'osservazione t in cui è presente la rottura strutturale tramite un algoritmo data-dipendente.

Nella tabella 2.1 vengono riportati i risultati dei test calcolati sul logaritmo del PIL reale in ciascun sottoperiodo. Il test ADF non presenta alcuna differenza per i due diversi metodi di selezione dei ritardi, indicando che entrambi i criteri hanno portato ad un modello comune. Possiamo notare come la maggior parte dei risultati ottenuti ci porti ad accettare l'ipotesi nulla di non stazionarietà. Il test DF-GLS, una versione rafforzata del ADF test, riporta risultati migliori della sua versione base ma pur sempre non soddisfacenti, escludendo il valore anomalo nel quarto sottoperiodo. Ricordiamo che il test KPSS testa l'ipotesi nulla di stazionarietà, la quale viene rifiutata per un limite di confidenza del 5% ed 1%; il quarto sottoperiodo continua a presentare dei risultati anomali. Si può notare una tendenza dei test ad offrire risultati migliori, pur sempre non soddisfacenti, con l'incrementare del numero di osservazioni; nonostante vi sia un forte calo nel quinto sottoperiodo. Osservando la tabella possiamo concludere che la serie storica per il logaritmo del PIL reale è non stazionaria.

Tipologia test	1980Q1: 1993Q4	1980Q1: 1999Q4	1980Q1: 2001Q3	1980Q1: 2007Q4	1980Q1: 2018Q4
Augmented Dickery Fuller (AIC)	-1.7667	-1.8058	-2.1052	-2.3388	-1.1915
Augmented Dickery Fuller (BIC)	-1.7667	-1.8058	-2.1052	-2.3388	-1.1915
DF-GLS	-2.2686	-2.24	-2.5555	-2.7988*	-1.2915
KPSS	0.1913**	0.152**	0.1568***	0.0921	0.6402***
ZIvot-Andrews	-3.4271	-4.088	-4.5887	-3.7084	-3.3715

Il simbolo * indica che il valore del test rifiuta l'ipotesi nulla per il limite di confidenza al 10%

Il simbolo ** indica che il valore del test rifiuta l'ipotesi nulla per il limite di confidenza al 5%

Il simbolo * indica che il valore del test rifiuta l'ipotesi nulla per il limite di confidenza al 1%**

La dicitura (AIC) e (BIC) indica che il numero di lag è stato selezionato automaticamente dal software tramite il criterio di Aikake od il criterio di Bayes.

Le date per ciascun periodo includono anche un numero cardinale ad evidenza del trimestre di inizio/fine periodo

Sottoponiamo la serie storica per il tasso di crescita del PIL reale ad i test di radice unitaria. Il test ADF ed il Zivot-Andrews test rifiutano l'ipotesi nulla di non stazionarietà con un ampio margine; mentre il test KPSS accetta indubbiamente l'ipotesi nulla di stazionarietà. Il test DF-GLS presenta dei risultati anomali in tutti e cinque i sottoperiodi ai quali abbiamo sottoposto il test. Tuttavia, il test Zivot-Andrews, il quale tiene conto di possibili break strutturali endogeni, ci conferma la stazionarietà del processo. Si può notare come il test ADF presenti risultati identici per entrambi i metodi di selezione dei ritardi, lasciando intendere che entrambi i modelli presentino lo stesso numero di lag.

Tabella 2.2: Test di radice unitaria per tasso di crescita del PIL reale					
Tipologia test	1980Q2 : 1993Q4	1980Q2 : 1999Q4	1980Q2 : 2001Q3	1980Q2 : 2007Q4	1980Q2 : 2018Q4
Augmented Dickery Fuller (AIC)	-4.0689***	-4.8615***	-4.937***	-5.6841***	-6.4871***
Augmented Dickery Fuller (BIC)	-4.0689***	-4.8615***	-4.937***	-5.6841***	-6.4871***
DF-GLS	-2.0687	-2.0645	-1.9699	-1.892	-1.9677
KPSS	0.1245*	0.0942	0.0746	0.0671	0.0821
ZIvot-Andrews	-6.8513***	-7.3427***	-8.0094***	-9.0237***	-9.6919***

Il simbolo * indica che il valore del test rifiuta l'ipotesi nulla per il limite di confidenza al 10%

Il simbolo ** indica che il valore del test rifiuta l'ipotesi nulla per il limite di confidenza al 5%

Il simbolo * indica che il valore del test rifiuta l'ipotesi nulla per il limite di confidenza al 1%**

La dicitura (AIC) e (BIC) indica che il numero di lag è stato selezionato automaticamente dal software tramite il criterio di Aikake od il criterio di Bayes.

Le date per ciascun periodo includono anche un numero cardinale ad evidenza del trimestre di inizio/fine periodo

2.3 SVILUPPO DEI MODELLI ARMA

Avendo confermato la stazionarietà per il tasso di crescita del PIL reale, possiamo arrivare allo sviluppo di un modello ARMA per la corretta rappresentazione della serie storica, in quanto caratteristica fondamentale per la tipologia di modello. Un modello ARMA(p,q) è un processo lineare formato da due componenti: AR(p) e MA(q). Un processo autoregressivo di ordine uno (AR(1)) è definito dall'equazione lineare

$$X_t = \beta + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

dove ϕ_1 rappresenta il coefficiente per la componente autoregressiva X_{t-1} , ovvero l'osservazione al tempo t-1 della variabile X. Un modello AR(p) è dato da

$$X_t = \beta + \sum_{p=1}^T \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

Un processo a media mobile di ordine uno (MA(1)) è definito dall'equazione lineare

$$X_t = \beta + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

dove θ_1 rappresenta il coefficiente per la componente a media mobile ε_{t-1} , ovvero il valore al tempo t-1 del residuo. Un modello MA(q) è dato da

$$X_t = \beta + \varepsilon_t + \sum_{p=1}^T \theta_p \varepsilon_{t-p}$$

Possiamo quindi definire un modello ARMA(p, q) come

$$X_t = \beta + \sum_{p=1}^T \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \sum_{p=1}^T \theta_p \varepsilon_{t-p}$$

$$X_t - \sum_{p=1}^T \phi_p X_{t-p} = \beta + \varepsilon_t + \sum_{p=1}^T \theta_p \varepsilon_{t-p}$$

$$\phi(B)X_t = \beta + \theta(B)\varepsilon_t$$

Dove $\phi(\cdot)$ rappresenta il polinomiale $(1 - \phi_1 \Delta X - \phi_2 \Delta^2 X - \dots - \phi_p \Delta^p X)$ e B indica il lag operator presente nel polinomiale. Ne consegue che $\theta(\cdot)$ rappresenta il polinomiale

$$(1+\theta_1 \Delta\varepsilon+\theta_2 \Delta^2\varepsilon+\dots+\theta_q \Delta^q\varepsilon).$$

A differenza di un normale modello di regressione lineare, nel software qui utilizzato la stima dei coefficienti in un modello ARMA (p, q) non viene effettuata con il metodo OLS ma secondo il metodo MLE (Maximum Likelihood Estimation). Consideriamo una variabile binomiale come il lancio di una moneta, con probabilità p di ottenere croce e (1-p) di ottenere testa. In seguito a n=100 lanci si ha conseguito k=10 risultati “croce”; vogliamo quindi stimare la probabilità p_{10} di ottenere 10 volte croce. Per $0 \leq p \leq 1$, la funzione di verosomiglianza per y=10 è definita come

$$\begin{aligned} L(p_{10}) &= \frac{n!}{k!*(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{100!}{10!*90!} p^{10}(1-p)^{90} \end{aligned}$$

La migliore stima di p è data dal valore che massimizza la funzione di verosomiglianza $L(p_{10})$. Possiamo notare che la funzione di verosomiglianza è massimizzata solo per p=0,1; il quale rappresenta solo la miglior stima del parametro sconosciuto. Il metodo di calcolo sopra descritto risulta inadatto per variabili continue, in quanto possono esistere infiniti possibili risultati, ciascuno con una probabilità prossima a zero di accadere. Per variabili aleatorie continue, la funzione di verosomiglianza è definita come la distribuzione di probabilità della variabile in oggetto espressa in funzione del parametro incognito da stimare; concetto che può essere esteso anche alle variabili discrete. Assumiamo che il processo stocastico usato per ottenere l’osservazione X_i di una variabile aleatoria X possa essere specificato da una funzione di distribuzione $f(X_i ; \theta_0)$, dove θ_0 rappresenta il valore ipotizzato per il parametro incognito, espresso come un vettore in R. L’insieme di tutti i possibili valori per il parametro è uno spazio Θ , sottoinsieme di uno spazio reale di s-dimensioni, ove s rappresenta il numero di parametri da essere stimati. Per delle n osservazioni i.i.d. di una variabile aleatoria X, la funzione di distribuzione di probabilità congiunta per un campione di dati $\mathbf{x}=X_1, \dots, X_n$ è il prodotto delle distribuzioni marginali $f(X_i ; \theta)$; la funzione di verosomiglianza coincide con la funzione di probabilità congiunta.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x};\theta) &= f(X_1, \dots, X_n ; \theta) = \prod_{n=1}^N f(X_n ; \theta) \\ L(\theta|\mathbf{x}) &= L(\theta|X_1, \dots, X_n) = \prod_{n=1}^N f(X_n ; \theta) \end{aligned}$$

La funzione di verosomiglianza applicando il logaritmo naturale sarà invece

$$\ln L(\theta|x) = \sum_{n=1}^N \ln f(X_n ; \theta)$$

In una serie storica l'assunzione di osservazioni i.i.d (independent and identically distributed) non permette l'uso della funzione di verosomiglianza sopra descritta. La ragione sottostante ad un'analisi di serie storica è verificare la presenza di un determinato grado di correlazione tra osservazioni consecutive tra loro; un'ipotesi di i.i.d. nelle osservazioni porterebbe ad un modello ARMA con parametri pari a zero. Assumiamo una serie storica con $t=1, \dots, T$ osservazioni per una variabile X ; la funzione di verosomiglianza può essere espressa come la fattorizzazione di una serie di funzioni marginali condizionate per la funzione marginale iniziale. Prendiamo due osservazioni consecutive, X_1 e X_2 , la funzione di densità congiunta $f(X_2, X_1 ; \theta)$ può essere espressa come la funzione marginale di X_2 dato X_1 per la funzione marginale di X_1 .

$$f(X_2, X_1 ; \theta) = f(X_2 | X_1 ; \theta) f(X_1 ; \theta)$$

Per un insieme di tre osservazioni consecutive la funzione di densità congiunta può essere espressa come

$$\begin{aligned} f(X_3, X_2, X_1 ; \theta) &= f(X_3 | X_2, X_1 ; \theta) f(X_2 | X_1 ; \theta) f(X_1 ; \theta) \\ &= f(X_3 | X_2 ; \theta) f(X_2 | X_1 ; \theta) f(X_2 ; \theta) f(X_1 ; \theta) \end{aligned}$$

Possiamo generalizzare la funzione di densità condizionale nel modello

$$\begin{aligned} f(X_T, \dots, X_1 ; \theta) &= \left(\prod_{t=p+1}^T f(X_t | I_{t-1}) \right) * f(X_{T-1}, \dots, X_1 ; \theta) \\ \ln f(x; \theta) &= \sum_{t=p+1}^T \ln f(X_t | I_{t-1}) + \ln f(X_{T-1}, \dots, X_1 ; \theta) \end{aligned}$$

dove $I_t = \{X_t, \dots, X_1\}$ rappresenta le informazioni in possesso al tempo t . Le stime dei parametri vengono ottenute per la massimizzazione della funzione logaritmica esatta di verosomiglianza. Assumiamo una variabile x_t con $t=1, \dots, T$ osservazioni, siamo interessati a

stimare i valori futuri $t+\tau$ con $\tau=1, \dots, \infty$ tramite una funzione di previsione lineare partendo da un processo stazionario AR(1):

$$x_t = \alpha + \theta x_{t-1} + \varepsilon_t$$

con $|\theta| < 1$. Il BLUP (Best Linear Unbiased Predictions), ovvero la previsione per il valore futuro $x_{t+\tau}$, è dato dalla media condizionata di $x_{t+\tau}$

$$E_t[x_{t+\tau}] = E_t[\alpha + \theta x_{t+\tau-1} + \varepsilon_{t+\tau}] = \alpha + \theta E_t[x_{t+\tau-1}]$$

Definendo $E_t[x_{t+\tau}] = \hat{x}(\tau)$ abbiamo $\hat{x}(\tau) = \alpha + \theta \hat{x}(\tau-1)$, tale equazione può essere risolta procedendo in modo ricorsivo

$$\tau=1 \quad \hat{x}(1) = \alpha + \theta \hat{x}(0) = \alpha + \theta x_t$$

$$\tau=2 \quad \hat{x}(2) = \alpha + \theta \hat{x}(1) = \alpha + \theta \alpha + \theta^2 x_t$$

.....

$$\hat{x}(\tau) = \alpha(1 + \theta + \dots + \theta^{\tau-1}) + \theta^\tau x_t$$

$$\hat{x}(\tau) = \frac{1-\theta^\tau}{1-\theta} \alpha + \theta^\tau x_t = \frac{\alpha}{1-\theta} + \theta^\tau \left(x_t - \frac{\alpha}{1-\theta} \right)$$

dove $\mu = \frac{\alpha}{1-\theta}$ rappresenta la media di un processo stazionario AR(1), $\hat{x}(\tau) = \mu + \theta^\tau (x_t - \mu)$ con $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{x}(\tau) = \mu$. La varianza dell'errore di previsione per un processo AR(1) è ottenibile da una proprietà dei processi AR(1) con $|\theta| < 1$. Assumendo un processo AR(1) con condizioni iniziali stocastiche (x_0 non è una costante reale), possiamo riscrivere il modello come

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{\alpha}{1-\theta} + \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j \varepsilon_{(t-j)} \\ &= \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j \varepsilon_{(t-j)} \end{aligned}$$

con $E[x_t] = \frac{\alpha}{1-\theta} = \mu$ e $V(x_t) = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}$. Il processo AR(1) è ora diventato un processo MA(∞).

L'equazione di proiezione lineare per il nuovo processo diventa

$$\widehat{x}(\tau) = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j \varepsilon_{(t+\tau-j)}$$

e la varianza dell'errore di previsione per la τ -esima proiezione è data come

$$\text{Var}(F(\tau)) = \text{Var}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \theta^j \varepsilon_{(t+\tau-j)}\right) = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2} = V(x_t)$$

Prendiamo ora un modello MA(1),

$$x_t = \alpha + \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1}$$

con $|\phi| < 1$. La media condizionata $E_t[x_{t+\tau}] = \alpha + E_t[\varepsilon_{t+\tau}] + \phi E_t[\varepsilon_{t+\tau-1}]$ per $\tau=1$ è pari a $E_t[x_{t+1}] = \alpha + \phi \varepsilon_t$; per $\tau=2, \dots, \infty$ abbiamo $E_t[x_{t+\tau}] = \alpha$; ne consegue che per $\tau \geq 2$, il BLUP è dato al valore costante α . L'errore di previsione per $\tau=1$, è dato da $F_t(1) = \varepsilon_{t+1}$ con $\text{Var}(F_t(1)) = \sigma^2$; per i τ -esimi valori di proiezione, $\tau \geq 2$, l'errore di previsione è dato da

$$F_t(\tau) = \varepsilon_{t+\tau} + \phi \varepsilon_{t+\tau-1}$$

$$\text{Var}(F_t(\tau)) = \sigma^2(1 + \phi^2).$$

Per un processo ARMA(p,q), l'equazione di proiezione lineare è il risultato della combinazione degli approcci precedentemente osservati per dei processi AR e MA. Osserviamo un processo ARMA(1,1) con $|\theta| < 1$ e $|\phi| < 1$, la proiezione futura per $\tau=1$ al tempo t è definita come

$$\hat{x}_t(1) = \alpha + \theta x_t - \phi \varepsilon_t$$

Ad il tempo $t=t_0$, $\hat{x}_0(1) = \alpha + \theta x_0 - \phi \varepsilon_0$ dove x_0 e ε_0 siano assunti come valori costanti. Per $t=1$ otteniamo

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(1) &= \alpha + \theta x_1 - \phi \varepsilon_1 = \alpha + \theta x_1 - \phi(x_1 - \hat{x}_0(1)) \\ &= \alpha(1 + \phi) + (\theta - \phi)x_1 + \phi \theta x_0 - \phi^2 \varepsilon_0 \end{aligned}$$

ed al tempo t arriviamo ad ottenere

$$\hat{x}_t(1) = \alpha(1 + \phi + \dots + \phi^t) + (\theta - \phi)x_t + \phi(\theta - \phi)x_{t-1} + \dots + \phi^{t-1}(\theta - \phi)x_1 + \phi^t \theta x_0 - \phi^{t+1} \varepsilon_0$$

Per la condizione $|\phi| < 1$, la previsione $\tau=1$ al tempo $t \rightarrow \infty$ non dipenderà da x_0 e ε_0 . Le proiezioni future $\hat{x}_t(\tau)$, $\tau \geq 2$, possono essere trovate tramite metodo ricorsivo per:

$$\hat{x}_t(2) = \alpha + \hat{x}_t(1)$$

$$\hat{x}_t(3) = \alpha + \hat{x}_t(2)$$

.....

Per la scelta del numero di parametri da inserire nel modello ARMA verrà utilizzato un metodo numerico, facendo uso di criteri informativi fondati sul valore della funzione di verosomiglianza del modello stimato. Assumiamo un vettore di dati osservati y , il quale ha una

funzione di verosomiglianza pari a $p_0(y)$; mentre $\hat{p}(y)$ rappresenta una generica PDF. Definiamo come funzione di discrepanza, o anche la regola di KL, $D(p_0; \hat{p}) = E_0[\ln(p_0(y))] - E_0[\ln(\hat{p}(y))]$.

Tale funzione possiede le seguenti proprietà:

$$D(p_0; \hat{p}) > 0$$

$$D(p_0; \hat{p}) = 0 \quad \text{se e solo se } p_0(y) = \hat{p}(y)$$

La funzione di discrepanza è stata sviluppata da Solomone Kullback e Richard Leibler (1951), può essere applicata per esprimere la “perdita di informazione” qualora venga utilizzato un modello ARMA(p,q) per la rappresentazione di un dataset y . Possiamo definire $\hat{p}(y)$ come $\hat{p}(y) = p_n(y; \hat{\theta}^n)$, ovvero la funzione di verosomiglianza del corretto modello ARMA(p,q) che rappresenti il dataset y . Non essendo possibile, possiamo sostituire $\hat{p}(y)$ con $p(y, \hat{\theta})$. Riscriviamo la funzione di discrepanza come

$$D(p_0; p_n) = E_0 [\ln(p_0(y))] - E_0 [\ln(p(y, \hat{\theta}))]$$

La funzione dipendente dal modello ARMA è

$$-E_0 [\ln(p(y, \hat{\theta}))];$$

date le proprietà precedentemente descritte, la funzione di discrepanza può essere risolta massimizzando

$$I(p_0; p) = E_0 [\ln(p(y, \hat{\theta}))]$$

Dato che la distribuzione di probabilità per $p_0(y)$ è sconosciuta, non siamo in grado di ottenere l’aspettativa di $I(p_0; p_n)$ per $E_0[\cdot]$; potremmo fare uso dello stimatore

$$\hat{I}(p_0; p) = E [\ln(p(y, \hat{\theta}))] = \ln p(y, \hat{\theta})$$

Tuttavia, questo stimatore possiede una proprietà non soddisfacente: la funzione rappresentata è monotona e crescente per n , assicurando di sovrastimare il numero di parametri da inserire nel modello. Approssimiamo $\ln p_n(y, \theta^n)$ con una serie di Taylor del secondo ordine intorno a $\hat{\theta}^n$, la quale verrà definita come $\ln \hat{p}(y)$

$$\ln p_n(y, \theta^n) \approx \ln p_n(y; \hat{\theta}^n) + (\theta^n - \hat{\theta}^n)^T \left[\left. \frac{\partial \ln p_n(y; \theta^n)}{\partial \theta^n} \right|_{\theta^n = \hat{\theta}^n} \right]$$

$$+\frac{1}{2}(\theta^n - \hat{\theta}^n)^T \left[\left. \frac{\partial^2 \ln p_n(y; \theta^n)}{\partial \theta^n \partial \theta^{nT}} \right|_{\theta^n = \hat{\theta}^n} \right] x(\theta^n - \hat{\theta}^n) \triangleq \ln \hat{p}_n(y)$$

Riscriviamo la funzione $I(p_0; p)$ come

$$I = E_0 \left[\ln p_n(y; \hat{\theta}^n) - \frac{n}{2} \right];$$

utilizzando un'aspettativa non condizionale della funzione sopra riportata otteniamo:

$$I = E \left[\ln p_n(y; \hat{\theta}^n) - \frac{n}{2} \right] = \ln p_n(y; \hat{\theta}^n) - \frac{n}{2}$$

Rielaborando la funzione otteniamo la *No Name rule*

$$NN(n) = -2 \ln p_n(y; \hat{\theta}^n) + n$$

la quale viene risolta minimizzando $NN(n)$ rispetto all'ordine n del modello ARMA selezionato.

Un'ulteriore applicazione di tale approccio la ritroviamo nel criterio informativo di Aikake, al quale viene aggiunta una particolarità nello stimatore utilizzato in sostituzione di $p_n(y; \theta^n)$. Definiamo x un vettore di dati fittizio con lo stesso numero di osservazioni N di y e la medesima PDF; $\hat{\theta}_x$ è definito come la MLE del vettore di parametri ottenibili dal dataset x se fosse osservabile. Definiamo $\ln \hat{p}(y) = E_x[\ln p(y; \hat{\theta}_x)]$, la quale inserita nella funzione $I(p_0; \hat{p})$ otteniamo

$$I = E_y \left[E_x[\ln p(y; \hat{\theta}_x)] \right].$$

Replicando l'approssimazione di $\ln p(y; \hat{\theta}_x)$ con una serie di Taylor del secondo ordine intorno a $\hat{\theta}_y$

$$\begin{aligned} \ln p(y; \hat{\theta}_x) &\approx \ln p(y; \hat{\theta}_y) + (\hat{\theta}_x - \hat{\theta}_y)^T \left[\left. \frac{\partial \ln p(y; \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}_y} \right] \\ &+ \frac{1}{2} (\hat{\theta}_x - \hat{\theta}_y)^T \left[\left. \frac{\partial^2 \ln p(y; \theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right|_{\theta = \hat{\theta}_y} \right] x(\hat{\theta}_x - \hat{\theta}_y) \\ &\approx \ln p(y; \hat{\theta}_y) - \frac{1}{2} (\hat{\theta}_x - \hat{\theta}_y)^T J_y (\hat{\theta}_x - \hat{\theta}_y) \end{aligned}$$

Possiamo anche dimostrare che $\ln p(y; \hat{\theta}_y) - \frac{1}{2}(\hat{\theta}_x - \hat{\theta}_y)^T J_y(\hat{\theta}_x - \hat{\theta}_y)$ può essere riscritto come $\ln p(y; \hat{\theta}_y) - n$. Inoltre, seguendo l'approssimazione svolta per la NN rule, $\ln p(y; \hat{\theta}_y) \approx \ln p_n(y; \hat{\theta}^n)$. Riscriviamo la funzione $I(p_y; p_x)$ come

$$I = E_y \left[E_x \left[\ln p_n(y; \hat{\theta}^n) - n \right] \right];$$

tramite l'operatore $E_x[\cdot]$, la dipendenza dal dataset x viene eliminata

$$I = E_y \left[\ln p_n(y; \hat{\theta}^n) - n \right]$$

$$I = \ln p_n(y; \hat{\theta}^n) - n$$

Moltiplicando I per (-2) otteniamo il criterio di informazione di Aikake

$$AIC = -2 \ln p_n(y; \hat{\theta}^n) + 2n$$

La differenza maggiore rispetto alla NN rule è data dalla maggiore punizione posta per la sovrastima del numero di parametri inseriti. Nonostante ciò, il criterio di Aikake presenta ancora delle proprietà non soddisfacenti per misurare la performance di un modello. È dimostrabile che sotto condizioni molto generiche, il AIC presenta una probabilità maggiore di 0 di portare ad una sovrastima dell'ordine di parametrizzazione per $N \rightarrow \infty$. Dal suddetto criterio è possibile ottenerne una seconda versione, comunemente definita come criterio di Aikake modificato:

$$AIC_c = -2 \ln p_n(y; \hat{\theta}^n) + \frac{2N}{N-n-1} n$$

In questo criterio, viene introdotto anche il numero di osservazioni N come contrappeso per la scelta dei n parametri da dover inserire. Per $N \rightarrow \infty$, $AIC = AIC_c$, tuttavia per valori finiti di N , il criterio di Aikake modificato ha un minore rischio di sovrastimare il numero di parametri n .

Un ulteriore approccio al KL framework è dato dal criterio informativo di Bayes. Riprendiamo la funzione $I(p_0; \hat{p}) = E_0 \left[\ln p_n(y; \theta^n) \right]$; sapendo che $\ln p_n(y; \theta^n)$ è un valore sconosciuto, assumiamo di aver utilizzato un campione x per stimare θ . La seguente PDF di $\hat{\theta}_x$ può essere definita a priori come una funzione di θ . La PDF $p(\theta)$ ottenuta dal campione fittizio presenta tali caratteristiche

- $p(\theta)$ è piatta intorno a $\hat{\theta}$
- Il numero di osservazioni del campione x è costante ed indipendente da N

Tali supposizioni ci portano allo stimatore di $\ln p_n(y; \theta^n)$

$$\ln \hat{p}(y) = E_{\theta} [p(y; \theta)] = \int p(y, \theta) p(\theta) d\theta$$

Riprendiamo l'approssimazione con la serie di Taylor di secondo ordine per $p(y; \theta)$ per un intorno di $\hat{\theta}$.

$$p(y; \theta) \approx p(y; \hat{\theta}) e^{\frac{1}{2}(\hat{\theta} - \theta)^T J(\hat{\theta} - \theta)}$$

Inserita l'approssimazione nello stimatore $\ln \hat{p}(y)$ e considerando che $p(y; \theta)$ è asintoticamente più grande a $\theta = \hat{\theta}$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \hat{p}(y) &\approx p(y; \hat{\theta}) p(\hat{\theta}) \int e^{\frac{1}{2}(\hat{\theta} - \theta)^T J(\hat{\theta} - \theta)} d\theta \\ &= \frac{p(y; \hat{\theta}) p(\hat{\theta}) (2\pi)^{\frac{n}{2}}}{|J|^{\frac{1}{2}}} \times \int \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |J^{-1}|^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{2}(\hat{\theta} - \theta)^T J(\hat{\theta} - \theta)} d\theta \\ &= \frac{p(y; \hat{\theta}) p(\hat{\theta}) (2\pi)^{\frac{n}{2}}}{|J|^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Inserendo l'approssimazione appena vista in \hat{I} , ne consegue che

$$\hat{I} = \ln p(y; \hat{\theta}) + \ln p(\hat{\theta}) + \frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln |J|$$

$$\hat{I} \approx \ln p_n(y; \hat{\theta}^n) - \frac{n}{2} \ln N$$

$$\text{BIC} = -2 \ln p_n(y; \hat{\theta}) + n \ln N$$

I tre criteri appena osservati presentano una forma comune, con la sola differenza nel termine di penalità. Possiamo rappresentarli con una funzione generica

$$-2 \ln p_n(y; \hat{\theta}^n) + \eta(n; N)n$$

dove $\ln p_n(y; \hat{\theta}^n)$ rappresenta il logaritmo della funzione di verosomiglianza per un modello ARMA (p, q) con n parametri stimati tramite MLE, mentre $\eta(n; N)$ rappresenta il termine di penalità come una funzione del numero di parametri stimati e della grandezza del campione osservato.

Vi è da considerare che i criteri informativi appena studiati non rappresentano un giudizio assoluto sulla qualità del modello stimato ma forniscono un confronto relativo tra possibili diversi modelli.

Un aspetto da osservare per una corretta diagnostica del modello sviluppato è la distribuzione dei residui ottenuti con il processo di autoregressione. Un'assunzione fondamentale per i diversi modelli presentati è la presenza di un termine *white noise*, un processo stocastico con distribuzione $Z \sim N(0; \sigma^2)$. Prendiamo una variabile X con dataset $x = X_1, \dots, X_T$, quest'ultimo generato da un processo stocastico nel quale è incluso un termine *white noise*, $Z \sim WN(0; \sigma^2)$.

Stimiamo un modello ARMA(p,q) per il dataset,

$$X_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \theta_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^q \phi_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

il quale ci fa ottenere un insieme di valori stimati $\hat{x}(\hat{\theta}; \hat{\phi}; \hat{\sigma}^2)$.

Definiamo i residui del modello di regressione come $\hat{u} = x - \hat{x}(\hat{\theta}; \hat{\phi}; \hat{\sigma}^2)$. Essendo ottenuti tramite parametri stimati via ML dei reali parametri $(\theta; \phi; \sigma^2)$; i residui non possono seguire la stessa distribuzione del *white noise* $WN(0; \sigma^2)$. Tuttavia, la sequenza avrà caratteristiche simili al processo *white noise*, risultando in un buon stimatore di quest'ultimo. Tale relazione può essere definita come $E[\hat{u}_t(\hat{\theta}; \hat{\phi}; \hat{\sigma}^2) - Z_t]^2 \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$. Assumendo che il dataset \hat{u} possieda caratteristiche simili ad una sequenza *white noise*, siamo intenzionati a verificare che non vi sia alcun grado di autocorrelazione.

Per un dataset di residui stimati $\hat{u} = \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_T$, definiamo il grado di autocorrelazione come

$$\hat{r} = \frac{\sum_{t=k+1}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-k}}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2}$$

Generalmente, una rappresentazione visiva di tale funzione è sufficiente per verificare la presenza o meno di autocorrelazione all'interno della sequenza dei residui. Svilupperemo invece un test per fornire un criterio di adeguatezza del modello.

Box e Pierce (1970) hanno definito una misura per misurare l'adeguatezza di un modello con parametri noti e finiti, assumendo come ipotesi nulla l'assenza di correlazione $H_0: \hat{r} = 0$, contro l'ipotesi alternativa di presenza di autocorrelazione. Il test inizialmente sviluppato da Box e Pierce prende la forma di

$$Q(r) = n(n+2) \sum_{k=1}^m (n-k)^{-1} r_k^2$$

Dove n corrisponde al numero di osservazioni del campione, m è il numero di lag per il quale il test viene performato e r_k^2 corrisponde al grado di autocorrelazione al lag $k=1, \dots, m$. Considerando che $\text{var}(r_k) = \frac{1}{n}$, Box & Pierce suggeriscono che la distribuzione del test

$$Q(r) = n \sum_{k=1}^m r_k^2$$

possa essere approssimata a χ_m^2 per valori di n sufficientemente grandi. Inoltre, per un modello ARMA(p, q) correttamente stimato e con il numero di parametri $p+q$ conosciuto, il test $Q(r)$ può essere svolto con il grado di autocorrelazione dei residui stimati

$$\tilde{Q}(\hat{r}) = n \sum_{k=1}^m \hat{r}_k^2$$

seguito da una distribuzione χ_{m-p-q}^2 . Box e Ljung (1978) dimostrarono come la versione iniziale del test ottenga risultati migliori se approssimata in una distribuzione χ_{m-p-q}^2

La selezione del modello per tale dataset ha portato a scegliere un modello AR(1), presentando delle prove numeriche inconfutabili a suo favore. Il criterio di Bayes ha svolto per noi un eccellente lavoro, a differenza del criterio di Aikake, il quale ha spesso portato alla sovrastima del numero di parametri da inserire nel nostro modello. Rimando in appendice per ulteriori approfondimenti.

Confermata la scelta dei modelli sui quali svolgere la previsione per ciascun sottoperiodo, introduciamo l'ultimo componente per la nostra analisi di serie storica: le variabili dummy. Una variabile binaria permette di inserire all'interno di un modello di regressione un aspetto qualitativo, ovvero una variabile che assume osservazioni non numeriche. Una variabile dummy può assumere due valori: 1 e 0, da cui il termine binario; definendo il primo valore come la realizzazione di una caratteristica qualitativa particolare e zero come la sua non realizzazione. La variabile binaria può essere inserita sia come variabile dipendente che come regressore. Definiamo un modello di regressione lineare $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 D_i$, dove $i = \{0, 1\}$; il coefficiente β_2 ha un effetto moltiplicativo per la variabile binaria D_i , non ne rappresenta quindi l'aumento incrementale. Nel caso di analisi per una serie storica, possiamo considerare l'utilizzo di una dummy tarata su un determinato intervallo temporale, in riferimento

all'avvenire di uno specifico evento o meno. Verranno sviluppate quattro diverse variabili binarie, una per ciascun evento analizzato; ai quali sarà associato valore $D_i=1$ per tutte le osservazioni posteriori all'accadimento dell'evento osservato e valore $D_i=0$ per tutte le osservazioni antecedenti ad esso. Vogliamo così osservare se determinati intervalli temporali possano assumere rilevanza per l'andamento del tasso di crescita del PIL reale statunitense, in quanto l'evento scatenante possa aver influenzato significativamente l'economia. Le seguenti dummy assumeranno perciò tali valori:

- Dummy.NAFTA=1 per $T \geq 1994Q1$
- Dummy.Glass=1 per $T \geq 2000Q1$
- Dummy.9-11=1 per $T \geq 2001Q4$
- Dummy.2008=1 per $T \geq 2008Q1$.

La formula di autoregressione assumerà forma

$$RGDP_t = Costante + \theta RGDP_{t-1} + \varepsilon_t$$

per il primo sottoperiodo,

$$RGDP_t = Costante + \theta RGDP_{t-1} + \beta_1 D_{NAFTA_i} + \varepsilon_t$$

per il secondo sottoperiodo,

$$RGDP_t = Costante + \theta RGDP_{t-1} + \beta_1 D_{NAFTA_i} + \beta_2 D_{GLASS_i} + \varepsilon_t$$

per il terzo sottoperiodo,

$$RGDP_t = Costante + \theta RGDP_{t-1} + \beta_1 D_{NAFTA_i} + \beta_2 D_{GLASS_i} + \beta_3 D_{911_i} + \varepsilon_t$$

per il quarto sottoperiodo ed

$$RGDP_t = Costante + \theta RGDP_{t-1} + \beta_1 D_{NAFTA_i} + \beta_2 D_{GLASS_i} + \beta_3 D_{911_i} + \beta_4 D_{2008_i} + \varepsilon_t$$

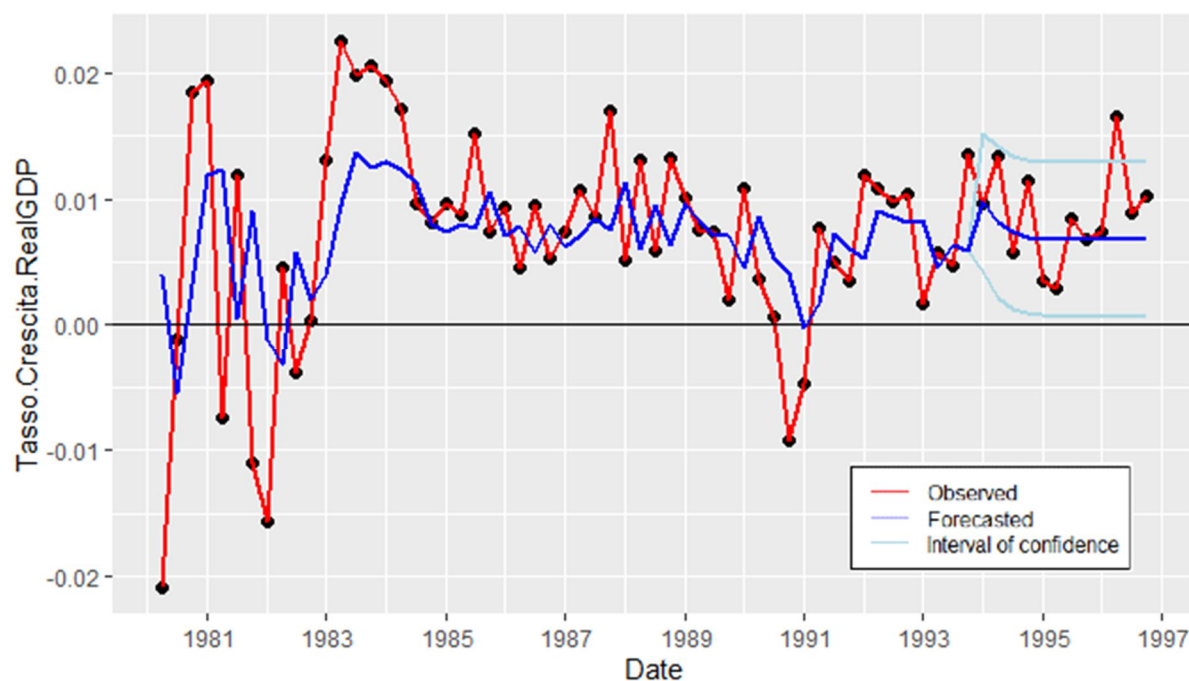
per l'ultimo sottoperiodo, comprendente l'intero dataset

Tabella 2.8: Valori numerici parametri stimati					
	1980Q2 : 1993Q4	1980Q2 : 1999Q4	1980Q2 : 2001Q3	1980Q2 : 2007Q3	1980Q2 : 2018Q4
Costante	0,00677 ^{***} (0,00191)	0.00687 ^{***} (0.00158)	0.0069 ^{***} (0.00147)	0.0069 ^{***} (0.00133)	0.0069 ^{***} (0.00132)
theta_1	0,44363 ^{***} (0,1351)	0.4114 ^{***} (0.1138)	0.3588 ^{***} (0.1114)	0.3455 ^{***} (0.0976)	0.3697 ^{***} (0.0796)
Dummy.NAFT A		0.00313 (0.00278)	0.00325 (0.0026)	0.00328 (0.00236)	0.0033 (0.00234)
Dummy.Glass			-0.0057 (0.0045)	-0.00457 (0.004)	-0.00451 (0.0039)
Dummy.9-11				0.00058 (0.004)	0.00072 (0.0039)
Dummy.2008					-0.00269 (0.00236)
AIC	-369.07	-551.17	-590.01	-782.22	-1117.45
AICc	-368.6	-550.63	-589.25	-781.4	-1116.69
BIC	-363.05	-541.69	-577.8	-766.02	-1096.15
Ljung-Box (4)	0.8259	0.815	0.7229	0.635	0.6125
<p>Il simbolo * indica che il valore del test rifiuta l'ipotesi nulla per il limite di confidenza al 10%</p> <p>Il simbolo ** indica che il valore del test rifiuta l'ipotesi nulla per il limite di confidenza al 5%</p> <p>Il simbolo *** indica che il valore del test rifiuta l'ipotesi nulla per il limite di confidenza al 1%</p> <p>L'acronimo AIC significa "Aikake Information Criterion" o criterio di Aikake</p> <p>L'acronimo AICc significa "Modified Aikake Information Criterion" o criterio di Aikake modificato</p> <p>L'acronimo BIC significa "Bayes Information Criterion" o criterio di Bayes</p> <p>La voce "Ljung-Box (4)" riferisce per il test di Ljung-Box performato a $m = 4$</p> <p>La dicitura "phi_1" corrisponde al termine AR(1)</p>					

La tabella riassuntiva 2.8 non riporta risultati molto incoraggianti. Le dummy ad intervallo temporale non sono risultate rilevanti per il modello sviluppato, scoraggiandone così l'inserimento nel nostro modello AR(1). Possiamo notare come il *Z score* delle variabili binarie, ottenuto come

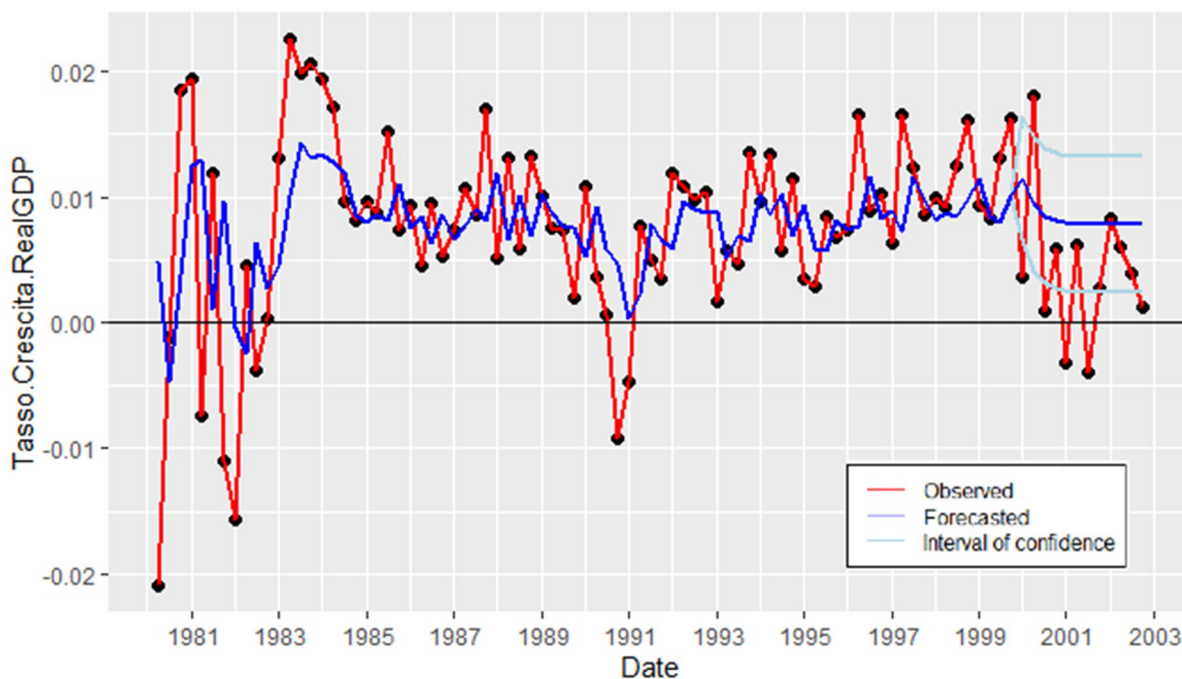
$$Z = \frac{\text{coeff} - \text{coeff}_0}{\text{SE}(\text{coeff})}, \text{coeff}_0 = 0$$

incrementi con il numero di osservazioni per cui la variabile assume valore 1. Un ulteriore risultato scoraggiante è dato dai criteri informativi, l'aggiunta delle variabili dummy ha definitivamente peggiorato i valori ottenuti, facendo perdere dei punti decimali per il criterio di Aikake mentre per i criteri più punitivi, come il criterio di Bayes, la differenza supera ben le tre unità. Nonostante il test di Ljung-Box riporti risultati positivi, si può notare come il p-value associato decresce con l'inserimento delle variabili binarie. Stabilito il modello AR(1) $RGDP_t = \text{costante} + \theta_1 RGDP_{t-1} + \varepsilon_t$ come forma comune, possiamo ora procedere alla comparazione del risultato della previsione del tasso di crescita del PIL reale ad un intervallo temporale di dodici osservazioni con un intervallo di confidenza del 50%.



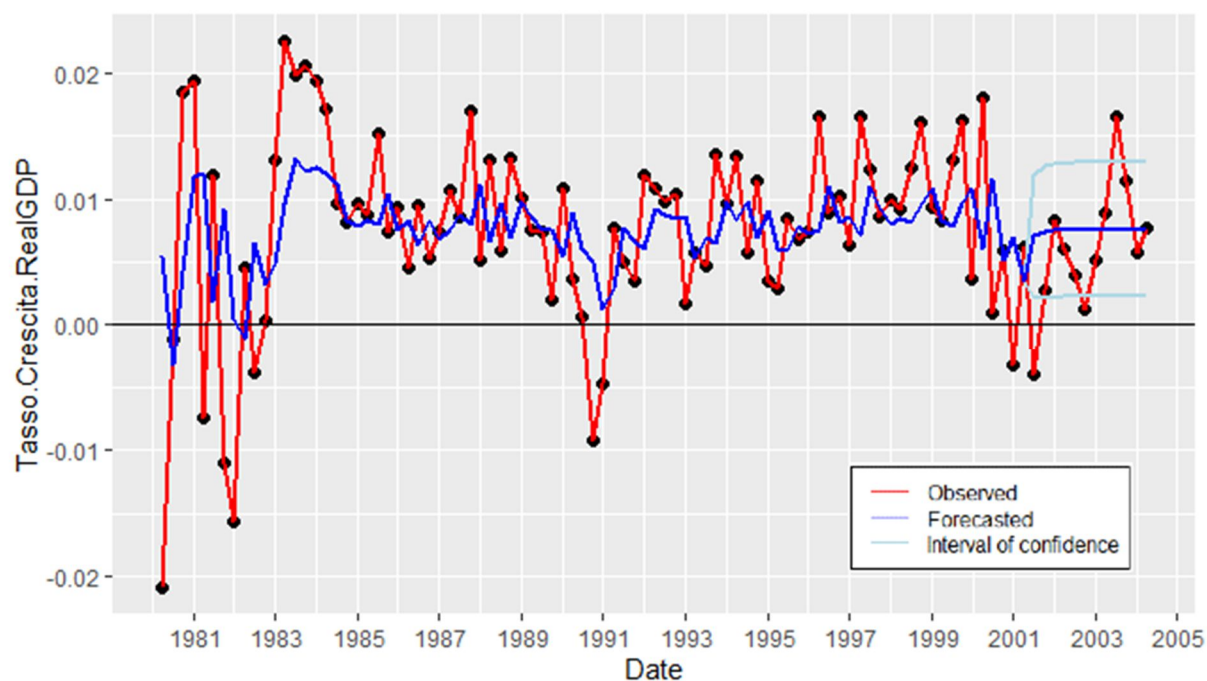
2-1 Rappresentazione grafica del tasso di crescita del PIL reale e del processo di forecasting per il periodo 1980Q2:1996Q4

I valori ottenuti dal modello ARMA risultano molto più contenuti rispetto ad i valori osservati, tuttavia seguono la stessa tendenza. Di maggior interesse risulta essere la previsione calcolata dal software, la quale presenta una tendenza negativa per i primi quattro passaggi, seguita da un plateau per i rimanenti valori predetti ed assestandosi intorno al 0.006; da notare come l'intervallo di previsione al 50% comprenda al suo interno i valori osservati. Nel dicembre 1994 è avvenuta la crisi del peso, ove la valuta messicana ha subito in grave crollo in valuta, affliggendo principalmente l'export statunitense. Tale evento ha causato degli immediati ma temporari crolli, il tasso di crescita è subito ritornato in fase di crescita. Diversi oppositori del NAFTA contestavano la responsabilità dell'accordo commerciale nell'aver destabilizzato l'economia messicana ed averne ultimamente causato il crollo della valuta, rimane opinione condivisa di molti economisti (Burfisher, Robinson, Thierfelder, 2001. p. 133) come la crisi del peso fosse ormai imminente, in quanto moneta sopravvalutata.



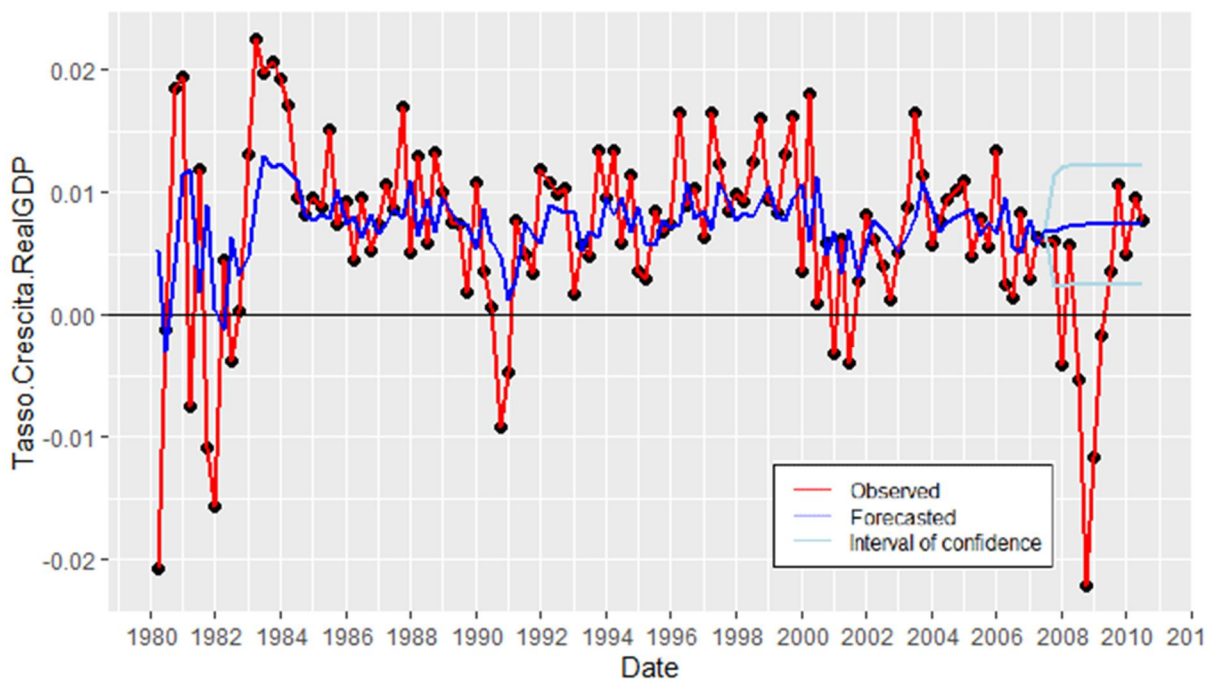
2-2 Rappresentazione grafica del tasso di crescita del PIL reale e del processo di forecasting per il periodo 1980Q2:2003Q4

I valori ottenuti dal modello ARMA seguono la tendenza dei valori osservati, seppur con variazioni ben più contenute. I valori ottenuti con il forecasting seguono sempre più una linea centrale, corrispondente alla media della variabile per il modello ARMA(1,0), come precedentemente dimostrato per il processo di forecasting di un modello AR(1). A partire dall'anno 2000 possiamo notare una serie di picchi, con seguente crollo fino al 2002 circa. Tale periodo coincide con lo scoppio della bolla dot-com, ovvero il crollo dei titoli azionari legati all'industria dell'informazione e del web. Il primo crollo nel primo trimestre del 2000 è dato da una politica monetaria fortemente restrittiva della Federal Reserve, decisa da Alan Greenspan; la quale non bloccò l'inflazione degli indici azionari, con il NASQAD Composite al massimo di 5,048.62 nel marzo 2000. Il Giappone entra in recessione, economia di importanza mondiale all'epoca, generando un selloff globale, per il quale le aziende IT ne risentono molto di più. Microsoft perde un'importante causa legale nel caso *United States vs. Microsoft*, diverse testate giornalistiche iniziano a mettere in dubbio la stabilità finanziaria delle aziende dot-com, insinuando una possibile carenza di liquidità nel breve termine. Il progressivo calo degli indici azionari e le liquidazioni di quote in favore di investimenti più sicuri, anche se a minor rendimento, e l'attentato al WTC, hanno portato ad una perdita di capitalizzazione di mercato stimata a \$5 trilioni alla fine del crollo del mercato azionario nel 2002.



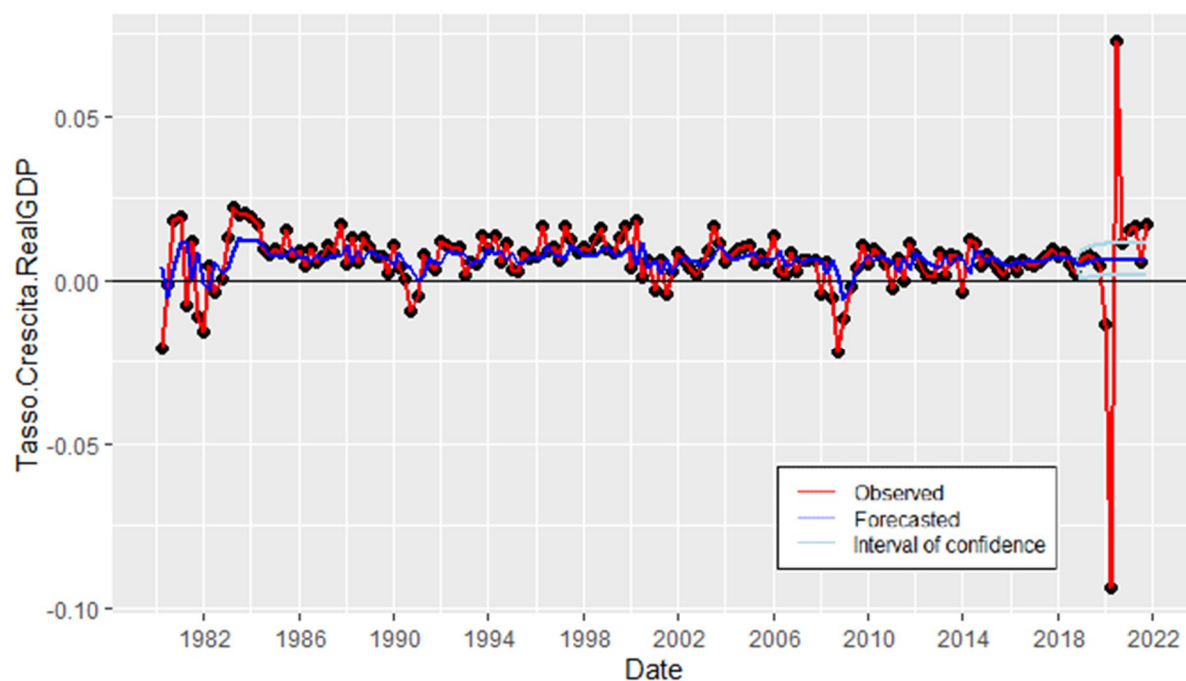
2-3 Rappresentazione grafica del tasso di crescita del PIL reale e del processo di forecasting per il periodo 1980Q2:2004Q2

Le osservazioni ottenute con il modello ARMA(1,0) continuano a seguire la tendenza osservata nei valori effettivi, mentre il processo di forecasting ottenuto continua a svilupparsi su una retta parallela, confermando l'approssimazione alla media del modello AR(1). L'incremento del valore della media è correlato all'aumentare del numero di osservazioni; suggerendo che ci stiamo avvicinando sempre di più alla corretta rappresentazione della serie storica. Avendo ampiamente discusso precedentemente dell'intervallo 2000-2002, non serve aggiungere molto sulle osservazioni realizzate, quanto più discutere dei valori scrutabili verso il quarto trimestre. L'attentato terroristico ha messo alla luce la rapidità della politica monetaria come contromisura economica, oltre ad una forte spesa pubblica per politiche di miglioramento della sicurezza di infrastrutture chiave e piani di aiuto internazionali nel sostegno alla lotta contro il terrorismo.



2-4 Rappresentazione grafica del tasso di crescita del PIL reale e del processo di forecasting per il periodo 1980Q2:2010Q3

L'intervallo di confidenza sviluppato non è in grado di contenere le osservazioni reali per il periodo 2007Q3 : 2009Q2, dovuto alla forte recessione per la crisi economica globale. La rapida ripresa è dovuta grazie ai forti interventi posti dalla Federal Reserve in termini di politica monetaria, ricoprendo il ruolo di Lender of Last Resort e garantendo il bailout per il sistema finanziario americano.



2-5 Rappresentazione grafica del tasso di crescita del PIL reale e del processo di forecasting per il periodo 1980Q2:2021Q4

La crisi pandemica ha portato a risultati fino ad ora mai osservati, stravolgendo l'analisi grafica. In corrispondenza del primo trimestre del 2020 si ha raggiunto un picco prossimo al -0.09 ; causato da estesi blocchi dell'attività produttiva ed una crescente e febbrile paura degli investitori per un blocco dell'attività produttiva globale, portando ad un forte sellout di titoli azionari. I primi mesi del 2020 furono dettati dal panico e l'incertezza globale, per i quali i governi internazionali presero degli immediati provvedimenti in forma di pacchetti di sostegno ad attività ed imprese. Per il terzo trimestre, il tasso di crescita ha raggiunto un picco di 0.07 , con un rebound di ben 16 punti percentuali dovuto alla fiducia delle imprese ed investitori in imminenti e garantiti sostegni dal governo. La scoperta di nuovi trattamenti per il ricovero da Covid-19 e la notizia di un possibile vaccino alimentano la fiducia degli investitori. Oramai nell'ultimo trimestre, il rimbalzo economico è concluso, le dichiarazioni aggressive del presidente americano Trump nei confronti della Cina non sono state guardate di buon occhio, specialmente per la minaccia di sanzioni in quel fragile periodo verso flussi di commercio con il paese asiatico e le imprese nazionali che operino all'estero. Lo spettro dell'aumento dei costi di materie prime frena la ripresa economica a partire dal 2021, al quale dovrà aggiungersi i primi segnali di spostamenti di truppe russe nei loro confini nazionali verso la fine del 2021.

3 CONCLUSIONI

L'analisi del tasso di crescita del PIL americano è iniziata con uno studio sulla condizione di stazionarietà della serie in oggetto. Sottoponendo la scala logaritmica ed il tasso di crescita agli stessi test per radici unitarie e mettendone a confronto i risultati, abbiamo constatato come la differenziazione sia sufficiente per ottenere la condizione di stazionarietà. I test di radice unitaria performati hanno restituito indicazioni a favore, ad esclusione del test DF-GLS, il quale ha riportato dei risultati deludenti, accettando l'ipotesi nulla di presenza di radice unitarie; un risultato in forte contrasto con gli altri test, specialmente con il Zivot-Andrew. Con l'introduzione del modello ARMA abbiamo introdotto anche i criteri informativi di Aikake e Bayes; fondamentali per la corretta selezione del numero di parametri da stimare per il modello univariato. Osservando le tabelle riassuntive, abbiamo individuato il modello ARMA(1,0) come la versione relativamente migliore per l'insieme di modelli ARMA ad un massimo di cinque parametri inclusi. Lo sviluppo di variabili binarie collegate ad intervalli temporali in relazioni all'accadimento degli eventi chiave non ha riportato i risultati sperati, con l'esclusione complessiva di tutte le dummy inserite in quanto non significativamente rilevanti. L'ultimo passaggio è la previsione di osservazioni future del tasso di crescita per $\tau=12$ step in tutti i sottoperiodi. I risultati ottenuti hanno confermato quanto descritto per il forecasting di un processo AR(1): i valori predetti tenderanno a convergere verso il valore atteso della variabile stimata dal modello per $\hat{x}(t+\tau)$, $\tau \rightarrow \infty$. Questo processo è risultato più spedito del dovuto per via dei bassi valori stimati della costante ed il coefficiente θ_1 . Gli eventi chiave osservati hanno riportato un forte contrasto rispetto ai dati ottenuti con il forecasting, specialmente per la crisi economica del 2008 e la crisi pandemica recentemente avvenuta; dove i valori osservati cadevano ben oltre i limiti di confidenza del 50% imposti per il processo di previsione.

4 APPENDICE

Vengono di seguito riportate le tabelle riepilogative dei valori dei criteri informativi ed il risultato del test Ljung-Box per ciascun sottoperiodo

Tabella 2.3: Risultati modello ARMA per sottoperiodo 1980Q2 : 1993Q4				
MODELLO ARMA	AIC	AICc	BIC	Ljung-Box (4)
ARMA(0,0)	-361,338	-361,107	-357,323	0,0383
ARMA(0,1)	-367,335	-366,865	-361,313	0,6604
ARMA(0,2)	-366,393	-365,593	-358,364	0,5158
ARMA(1,0)	-369,067*	-368,597*	-363,045*	0,8259
ARMA(1,1)	-367,117	-366,317	-359,088	0,6874
ARMA(1,2)	-365,136	-363,912	-355,100	0,3462
ARMA(2,0)	-367,121	-366,321	-359,091	0,6818
ARMA(2,1)	-365,068	-363,843	-355,031	0,3371
ARMA(2,2)	-367,117	-365,367	-355,073	0,8265
ARMA(3,0)	-365,121	-363,897	-355,085	0,3686
ARMA(3,1)	-365,212	-363,462	-353,168	0,8701
ARMA(3,2)	-367,264	-364,881	-353,213	0,7424

Il simbolo * indica il valore minore tra tutti per ciascun criterio
L'acronimo AIC significa "Aikake Information Criterion" o criterio di Aikake
L'acronimo AICc significa "Modified Aikake Information Criterion" o criterio di Aikake modificato
L'acronimo BIC significa "Bayes Information Criterion" o criterio di Bayes
La voce "Ljung-Box (4)" riferisce il p-value per il test di Ljung-Box performato a $m = 4$

Risulta facile notare come il modello ARMA (1,0) abbia ottenuto un risultato netto e decisivo sui criteri informativi. Il risultato del test di Ljung-Box presenta un valore del p-value ben superiore al 0,1, accettando così l'ipotesi nulla di non correlazione nei residui.

Tabella 2.4: Risultati modello ARMA per sottoperiodo 1980Q2 : 1999Q4

MODELLO ARMA	AIC	AICc	BIC	Ljung-Box (4)
ARMA(0,0)	-540,4212	-540,2633	-535,6823	0,006
ARMA(0,1)	-549,1457	-548,8257	-542,0373	0,446
ARMA(0,2)	-549,0404	-548,4999	-539,5626	0,401
ARMA(1,0)	-551,9721	-551,6521*	-544,8638*	0,751
ARMA(1,1)	-550,2069	-549,6664	-540,7291	0,683
ARMA(1,2)	-548,2466	-547,4247	-536,3994	0,320
ARMA(2,0)	-550,2199	-549,6794	-540,7421	0,654
ARMA(2,1)	-548,2202	-547,3983	-536,3730	0,364
ARMA(2,2)	-549,0589	-547,8922	-534,8422	0,613
ARMA(3,0)	-548,2216	-547,3997	-536,3744	0,380
ARMA(3,1)	-546,3375	-545,1708	-532,1208	0,850
ARMA(3,2)	-552,8777*	-551,3002	-536,2915	0,706

Il simbolo * indica il valore minore tra tutti per ciascun criterio
L'acronimo AIC significa "Aikake Information Criterion" o criterio di Aikake
L'acronimo AICc significa "Modified Aikake Information Criterion" o criterio di Aikake modificato
L'acronimo BIC significa "Bayes Information Criterion" o criterio di Bayes
La voce "Ljung-Box (4)" riferisce il p-value per il test di Ljung-Box performato a $m = 4$

Ci ritroviamo davanti una situazione complicata, dove i criteri AICc e BIC favoriscono il modello ARMA(1,0) rispetto al modello ARMA(3,2). Ricordiamo come il AICc abbia un minore rischio di sovrastimare il numero di parametri ed il criterio di Bayes presenta un termine di penalità maggiore per $\ln(N) > n$. Ad ulteriore prova della fallacità del modello ARMA(3,2), il calcolo delle radici dell'equazione caratteristica per tale regressione porta dei valori anormali, presentando due radici a valore uno tra i parametri MA. La loro esclusione porta ad un modello ARMA(3,0), il quale riporta risultati pessimi rispetto al modello ARMA(1,0).

Tabella 2.5: Risultati modello ARMA per sottoperiodo 1980Q2 : 2001Q3				
MODELLO ARMA	AIC	AICc	BIC	Ljung-Box (4)
ARMA(0,0)	-582,730	-582,583	-577,844	0,0099
ARMA(0,1)	-588,785	-588,489	-581,457	0,3307
ARMA(0,2)	-589,863	-589,363	-580,092	0,4675
ARMA(1,0)	-591,715	-591,419	-584,387*	0,6402
ARMA(1,1)	-590,583	-590,083	-580,813	0,7986
ARMA(1,2)	-589,230	-588,470	-577,016	0,3482
ARMA(2,0)	-590,911	-590,411	-581,140	0,8426
ARMA(2,1)	-588,965	-588,206	-576,752	0,4383
ARMA(2,2)	-592,871*	-591,794*	-578,215	0,7818
ARMA(3,0)	-589,014	-588,254	-576,800	0,3567
ARMA(3,1)	-587,382	-586,305	-572,726	0,8598
ARMA(3,2)	-592,261	-590,807	-575,163	0,8890

Il simbolo * indica il valore minore tra tutti per ciascun criterio
L'acronimo AIC significa "Aikake Information Criterion" o criterio di Aikake
L'acronimo AICc significa "Modified Aikake Information Criterion" o criterio di Aikake modificato
L'acronimo BIC significa "Bayes Information Criterion" o criterio di Bayes
La voce "Ljung-Box (4)" riferisce il p-value per il test di Ljung-Box performedo a $m = 4$

Possiamo osservare come i criteri sviluppati da Aikake favoriscano il modello ARMA(2,2) mentre il BIC favorisce il modello ARMA(1,0) fino ad ora osservato. Il test Ljung-Box accetta l'ipotesi nulla in entrambi i casi; tuttavia, è utile notare sempre il valore delle radici nell'equazione caratteristica del polinomiale. Notiamo come i parametri MA presentino delle radici $\lambda = 1$, la loro esclusione e successiva reiterazione del modello ARMA(2,0) ci porta ad eliminare il secondo termine AR per non significatività.

Tabella 2.6: Risultati modello ARMA per sottoperiodo 1980Q2 : 2007Q4

MODELLO ARMA	AIC	AICc	BIC	Ljung-Box (4)
ARMA(0,0)	-773,588	-773,476	-768,187	0,0383
ARMA(0,1)	-781,722	-781,495	-773,620	0,6604
ARMA(0,2)	-783,842	-783,461	-773,040	0,5158
ARMA(1,0)	-785,501	-785,275	-777,400*	0,8259
ARMA(1,1)	-784,744	-784,363	-773,942	0,6874
ARMA(1,2)	-783,395	-782,818	-769,892	0,3462
ARMA(2,0)	-785,142	-784,761	-774,340	0,6818
ARMA(2,1)	-783,210	-782,633	-769,707	0,3371
ARMA(2,2)	-784,799	-783,984	-768,596	0,8265
ARMA(3,0)	-783,235	-782,659	-769,733	0,3686
ARMA(3,1)	-786,191*	-785,375*	-769,988	0,8701
ARMA(3,2)	-786,154	-785,056	-767,251	0,7424

Il simbolo * indica il valore minore tra tutti per ciascun criterio

L'acronimo AIC significa "Aikake Information Criterion" o criterio di Aikake
 L'acronimo AICc significa "Modified Aikake Information Criterion" o criterio di Aikake modificato

L'acronimo BIC significa "Bayes Information Criterion" o criterio di Bayes

La voce "Ljung-Box (4)" riferisce il p-value per il test di Ljung-Box performato a $m = 4$

Possiamo osservare come i criteri di Aikake continuino a favorire modelli ARMA con un elevato numero di parametri rispetto al criterio di Bayes, presentando valori sempre più simili, a favore della proprietà per la quale $N \rightarrow \infty AICc = AIC$. Un rapido controllo ai valori del p-value associato ai parametri stimati porta all'occhio come i due ultimi parametri di autoregressione non risultino significativamente rilevanti per il modello. La loro eliminazione e la reiterazione del modello ARMA(1,1) ci porta ad ottenere un modello sub-performante e con un p-value per il termine a media mobile eccessivamente elevato, riconducendo la scelta ad il modello ARMA(1,0).

Tabella 2.7: Risultati modello ARMA per sottoperiodo 1980Q2 : 2018Q4				
MODELLO ARMA	AIC	AICc	BIC	Ljung-Box (4)
ARMA(0,0)	-1094,022	-1093,943	-1087,935	0,000
ARMA(0,1)	-1111,692	-1111,533	-1102,562	0,019
ARMA(0,2)	-1116,213	-1115,947	-1104,040	0,116
ARMA(1,0)	-1119,331	-1119,172	-1110,200*	0,355
ARMA(1,1)	-1119,399	-1119,132	-1107,225	0,783
ARMA(1,2)	-1118,103	-1117,700	-1102,886	0,347
ARMA(2,0)	-1119,779	-1119,513	-1107,606	0,770
ARMA(2,1)	-1117,781	-1117,378	-1102,564	0,445
ARMA(2,2)	-1117,208	-1116,640	-1098,947	0,783
ARMA(3,0)	-1117,783	-1117,381	-1102,566	0,431
ARMA(3,1)	-1115,963	-1115,396	-1097,703	0,893
ARMA(3,2)	-1124,722*	-1123,960*	-1103,418	0,594

Il simbolo * indica il valore minore tra tutti per ciascun criterio
L'acronimo AIC significa "Aikake Information Criterion" o criterio di Aikake
L'acronimo AICc significa "Modified Aikake Information Criterion" o criterio di Aikake modificato
L'acronimo BIC significa "Bayes Information Criterion" o criterio di Bayes
La voce "Ljung-Box (4)" riferisce il p-value per il test di Ljung-Box performato a $m = 4$

Il quinto ed ultimo periodo comprende l'intero dataset per il tasso di crescita del PIL reale, arrivando all'ultimo trimestre del 2018. Il criterio di Aikake e di Bayes presentano ancora due risultati molto contrastanti; con il primo a favore di un modello con un elevato numero di parametri. Controllando i valori delle radici per l'equazione caratteristica, i termini MA nel modello ARMA(3,2) presentano radici unitarie. Escludendole, il modello reiterato per ARMA(3,0) presenta dei p-value eccessivi per gli ultimi termini di autoregressione, riconducendo la scelta al modello AR(1).

5 BIBLIOGRAFIA

1. BERNANKE, B. S., 2010. Causes of the Recent Financial and Economic Crisis. *Board of Governors of the Federal Reserve System* [online]. Disponibile su: <<https://www.federalreserve.gov/newsevents/testimony/bernanke20100902a.htm>> [Data di accesso: 23/05/2022]
2. BOX, G. E. P.; PIERCE, D. A., 1970. Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models. *Journal of the American Statistical Association*. 65 (332). 1509-1526.
3. BUREAU OF ECONOMIC ANALYSIS, 2021. *Concepts and Methods of the U.S. National Income and Product Accounts*. (s.l.): Bureau of Economic Analysis [online]. Disponibile su <<https://www.bea.gov/resources/methodologies/nipa-handbook/pdf/all-chapters.pdf>> [Data di accesso: 27/05/2022]
4. BURFISHER, M. E.; ROBINSON, S.; THIERFELDER, K., 2001. The Impact of NAFTA on the United States. *Journal of Economic Perspectives*. 15 (1). 125-144
5. DICKEY, D. A.; FULLER, W. A., 1979. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American statistical association*. 74 (366). 427-431.
6. ELLIOT, G., ROTHENBERG, T.J., STOCK, J.H., 1996, Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root. *Econometrica*. 64 (4). 813-836.
7. Federal Reserve Bank of New York, 22 Giugno 1933, Circolare no. 1248 [online]. Disponibile su: <<https://fraser.stlouisfed.org/title/federal-reserve-bank-new-york-circulars-466/1248-banking-act-1933-15952>> [Data di accesso: 22/5/2022]
8. FOCUS ECONOMICS, 2022. U.S. Economic Outlook. *FocusEconomics* [online]. Disponibile su <<https://www.focus-economics.com/countries/united-states>> [Data di accesso: 15/06/2022]
9. HATANAKA, M., 1996. *Time-Series-Based Econometrics: Unit Roots and Co-Integrations*. 1°ed. (s.l.) = OUP Oxford
10. KEYNES, J. M., 1936. *The General Theory of Employment, Money and Interest*. 1° ed. (s.l.): Palgrave Macmillan
11. KULLBACK; S.; LEIBLER, R., 1951. On Information And Sufficiency. *The Annals of Mathematical Statics*. 22 (1). 79-86
12. KUZNETS, S., 1934. *National Income, 1929-1932*. 73rd US Congress, 2d session, Senate Document no. 124
13. KWIATKOWSKI, D.; PHILLIPS, C. B. P.; SCHMIDT, P; SHIN, Y., 1992. Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics*. 54. 159-178.
14. LJUNG, G. M.; BOX, G. E. P., 1978. On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models. *Biometrika*. 65 (2). 297-303

15. PERSONS, W. M., 1919. *Indices of General Business Conditions*. 1°ed. (s.l.): Harvard Univ. Committee on Economic research
16. PHILLIPS, P.C.B. and PERRON, P., 1988. Testing for Unit Roots in Time Series Regression. *Biometrika*. 75. 335-346.
17. WATSON INSTITUTE FOR INTERNATIONAL AND PUBLIC AFFAIRS, 2021. Estimate of U.S. Post-9/11 War Spending. *Watson Institute for International and Public Affairs* [online].
Disponibile su: <<https://watson.brown.edu/costsofwar/figures/2021/BudgetaryCosts>>
[Data di accesso: 12/05/2022]
18. ZIVOT, E.; ANDREWS, D. W. K.; 1992. Further evidence on the great crash, the oil-price shock, and the unit-root hypothesis. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20 (1), 25-44.

10.086 parole utilizzate