



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

---

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA  
DELL'INFORMAZIONE

Tesi di Laurea

*MODELLISTICA E CONTROLLO DEL  
SISTEMA BALL AND BEAM*

---

Relatore  
Prof. Maria Elena Valcher

Laureando  
Matteo Zamuner  
n° matr.609543 / INF

Anno Accademico 2011 / 2012

# Inidce

<b>1</b>	<b>Analisi del sistema</b>	<b>3</b>
1.1	Descrizione del sistema	3
1.2	Dati	4
1.3	Derivazione del modello	5
	1.3.1 Modello ingresso uscita	5
	1.3.2 Modello di stato	6
1.4	Studio numerico del modello ingresso-uscita a catena aperta	6
1.5	Parametri del sistema	8
<b>2</b>	<b>Controllo del sistema in retroazione unitaria</b>	<b>9</b>
2.1	Calcolo e analisi della funzione di trasferimento ad anello chiuso	9
2.2	Studio con Nyquist	10
2.3	Studio della risposta al gradino unitario	10
<b>3</b>	<b>Controllo PID</b>	<b>13</b>
3.1	Controllore P	13
	3.1.1 Controllore P con $K_p > 0$	13
	3.1.2 Controllore P con $K_p < 0$	15
3.2	Controllore PD	16
	3.2.1 Analisi della stabilità al variare dei parametri	16
	3.2.2 Studio del sistema al variare di $\tau$ per K fissato	16
	3.2.3 Studio del sistema al variare di K per $\tau$ fissato	20
<b>4</b>	<b>Sensibilità ai disturbi</b>	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>Sintesi per tentativi</b>	<b>25</b>

# Capitolo 1

## Analisi del Sistema

### 1.1 Descrizione del sistema

Obiettivo di questa tesi è lo studio del problema di controllo di una pallina che scorre su di un'asta inclinata. Il sistema è composto da: un'asta sulla quale scorre la pallina, un ingranaggio e un'asticella. L'asta è collegata ad un estremo ad un perno, e all'altro all'asticella, a sua volta collegata all'ingranaggio, che girando di un certo angolo  $\theta$ , modifica l'inclinazione dell'asta di un angolo  $\alpha$ . Questo problema presenta un solo grado di libertà (la pallina può muoversi solo lungo l'asta) e le forze in gioco sono: la forza di gravità, la coppia esercitata dall'ingranaggio tramite l'asticella e l'attrito. Nelle condizioni iniziali il sistema si trova in equilibrio, con la pallina ferma all'estrema destra dell'asta,  $r = 0$ , e l'asta perfettamente orizzontale,  $\alpha = 0$ . Si può inoltre assumere che la posizione angolare dell'asticella in tale posizione sia per definizione  $\theta = 0$ . Per effetto della variazione iniziale dell'angolo  $\theta$ , abbiamo una conseguente variazione dell'inclinazione dell'asta e quindi dell'angolo  $\alpha$ : le forze ora non sono più bilanciate, ed il sistema non si trova più in condizioni di equilibrio meccanico. Il nostro obiettivo è quello di controllare la posizione della pallina sull'asta, mediante la variazione dell'angolo  $\theta$  dell'ingranaggio, per evitarne la caduta e portare il sistema in una condizione di equilibrio. Nello studio del sistema fisico tralascieremo l'attrito tra la pallina e l'asta, e assumeremo che la pallina rotoli senza slittare.

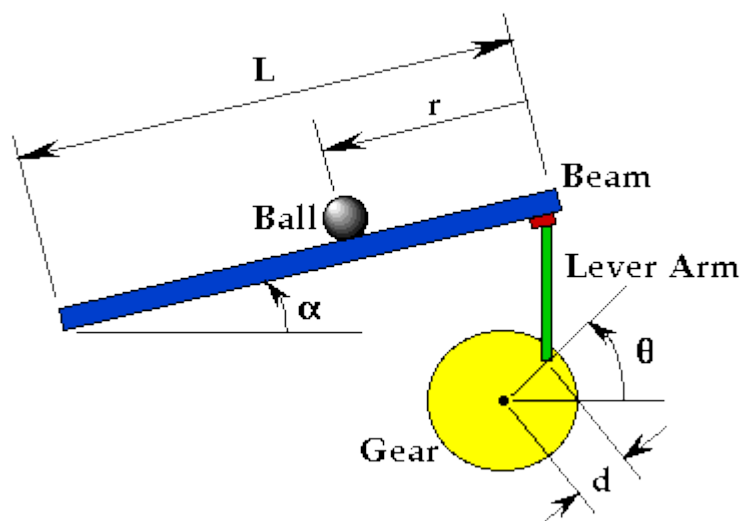


Figura 1.1: Rappresentazione grafica del sistema fisico.

## 1.2 Dati

m	massa della pallina	0.40kg
R	raggio della pallina	0.025m
d	distanza dell'asticella dal centro dell'ingranaggio	0.04m
g	accelerazione di gravità	-9.8m/s <sup>2</sup>
L	lunghezza dell'asta	1m
J	momento di inerzia della pallina	10 <sup>-4</sup> kgm <sup>2</sup>
r	posizione della palla pallina	
alpha	angolo dell'asta	
theta	angolo dell'ingranaggio	

## 1.3 Derivazione del modello

### 1.3.1 Modello ingresso uscita

L'equazione Lagrangiana del moto della pallina risulta

$$0 = \left( \frac{J}{R^2} + m \right) \ddot{r} + mg \sin \alpha - m r (\dot{\alpha})^2$$

La linearizzazione di questa equazione rispetto all'angolo dell'asta,  $\alpha$ , assunto prossimo a 0, ci da la seguente equazione lineare che approssima il sistema

$$\left( \frac{J}{R^2} + m \right) \ddot{r} = -mg\alpha$$

L'equazione che lega l'inclinazione dell'asta,  $\alpha$ , all'angolo dell'ingranaggio  $\theta$  si può approssimare a

$$\alpha = \frac{d}{L} \theta$$

E sostituendo nell'equazione precedente si ottiene

$$\left( \frac{J}{R^2} + m \right) \ddot{r} = -mg \frac{d}{L} \theta$$

Dove  $\theta$  è l'ingresso del sistema, ovvero indica di quanto viene alzata l'asticella rispetto alle condizioni iniziali  $\theta = 0$ , mentre  $r$  indica la distanza della pallina dall'estremità destra dell'asta e corrisponde all'uscita del sistema.

Usando la trasformata di Laplace sull'equazione precedente si ottiene

$$\left( \frac{J}{R^2} + m \right) R(s) s^2 = -mg \frac{d}{L} \Theta(s)$$

Da cui ricaviamo la **funzione di trasferimento**

$$G(s) = \frac{R(s)}{\Theta(s)} = - \frac{mgd}{L \left( \frac{J}{R^2} + m \right)} \frac{1}{s^2}$$

Notiamo immediatamente che il sistema non ha stabilità BIBO a causa di un polo doppio nell'origine, e quindi nemmeno stabilità asintotica.

### 1.3.2 Modello di stato

Dalla equazione linearizzata del sistema possiamo ricavare il modello di stato ponendo come variabili di stato la posizione della pallina ( $r$ ) e la sua velocità ( $\dot{r}$ ) e come ingresso l'angolo ( $\theta$ ) dell'ingranaggio. La rappresentazione risulta

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{mgd}{L\left(\frac{J}{R^2} + m\right)} \end{bmatrix} \theta$$

Sceglendo come uscita la posizione della pallina, avremo

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \end{bmatrix}$$

### 1.4 Studio numerico del modello ingresso-uscita a catena aperta

Attribuiamo, ora, dei valori numerici ai parametri del modello a catena aperta e per semplificare raccogliamo i parametri in un'unica costante che rappresenta la costante di Bode

$$K_b = -\frac{mgd}{L\left(\frac{J}{R^2} + m\right)} = 0.28$$

Quindi la funzione di trasferimento vale

$$G(s) = \frac{R(s)}{\Theta(s)} = K_b \frac{1}{s^2} = \frac{0.28}{s^2}$$

E il corrispettivo diagramma di Bode risulta

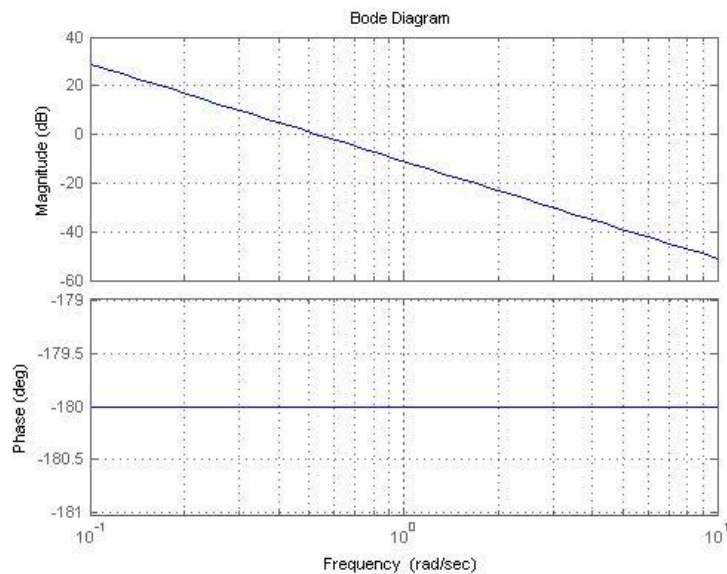


Figura 1.2: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento  $G(s)$ .

Mentre il diagramma di Nyquist

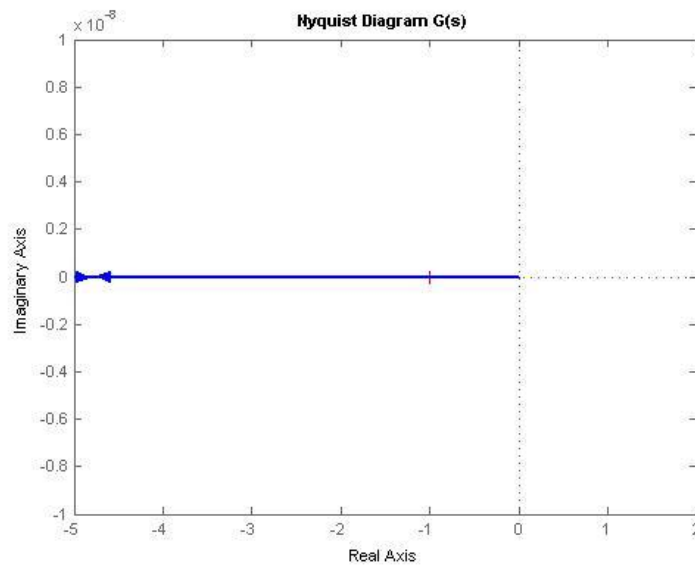


Figura 1.3: Diagramma di Nyquist di  $G(s)$ .

La risposta all'ingresso costante  $\theta = 0.15m$  ha grafico

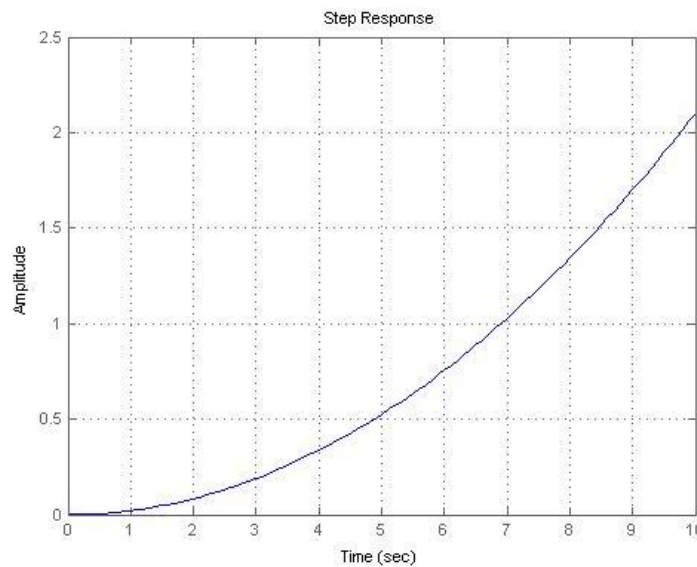


Figura 1.4: Risposta all'ingresso costante.

Dal quale si ha la conferma che il sistema è instabile. Più precisamente si ha che al tempo  $t$ ,  $r$  si trova alla posizione  $r = 0.021t^2$  e quindi, se inizialmente la pallina si trova all'estrema destra dell'asta,  $r = 0$ , cadrà per  $t > 6.9s$ , ovvero  $r > L = 1m$ .

## 1.5 Parametri del sistema

I parametri della risposta in frequenza e quelli della risposta al gradino non hanno senso nel nostro caso; essi infatti servirebbero ad evidenziare la “bontà” del sistema, cioè metterebbero in luce quanto velocemente e in che modo il sistema sarebbe in grado di portare e stabilizzare la pallina in un determinato punto  $0 \leq r \leq L$ , ma essendo il sistema instabile non siamo capaci di eseguire questo compito e non avrebbe alcun senso definire questi parametri.

Non è sensato nemmeno definire il tipo del sistema. Innanzitutto perché a noi non interessa che l’uscita a regime permanente coincida con il segnale di ingresso, infatti vogliamo che l’uscita sia il più possibile prossima ad un  $r$  costante di nostra decisione. Inoltre perché comunque il sistema è instabile e ciò equivale a dire che a regime permanente l’uscita ha un valore infinito e quindi non può garantire nessun legame proporzionale con l’ingresso.



## Capitolo 2

# Controllo del sistema in retroazione unitaria

### 2.1 Calcolo e analisi della funzione di trasferimento ad anello chiuso

Proviamo ora a rendere il sistema BIBO stabile con un controllo in retroazione unitaria negativa. La funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto è

$$G(s) = K_b \frac{1}{s^2}$$

Da cui ricaviamo quella del sistema ad anello chiuso che vale

$$W(s) = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{K_b}}$$

E il cui diagramma di Bode è

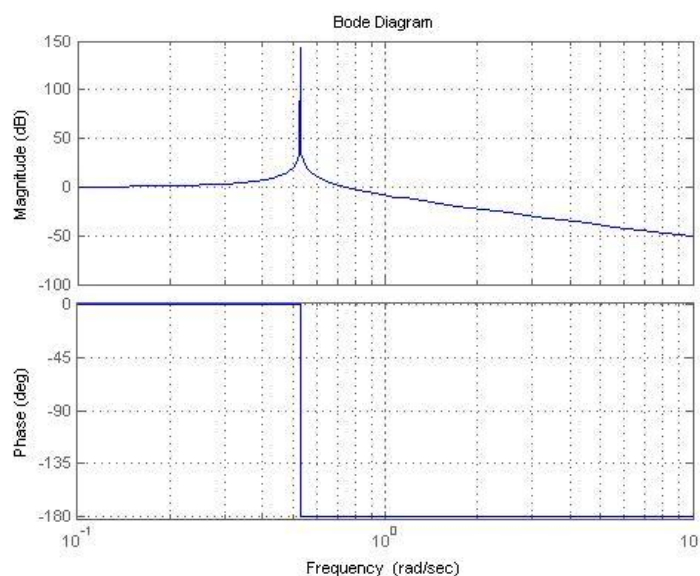


Figura 2.1: Diagramma di Bode di  $W(s)$ .

Si nota immediatamente che questa funzione di trasferimento ha due poli sull'asse immaginario, il che evidenzia il fatto che il sistema ad anello chiuso non è né BIBO né asintoticamente stabile.

## 2.2 Studio con Nyquist

Si può giungere alla stessa conclusione anche analizzando il diagramma di Nyquist di  $G(s)$ .

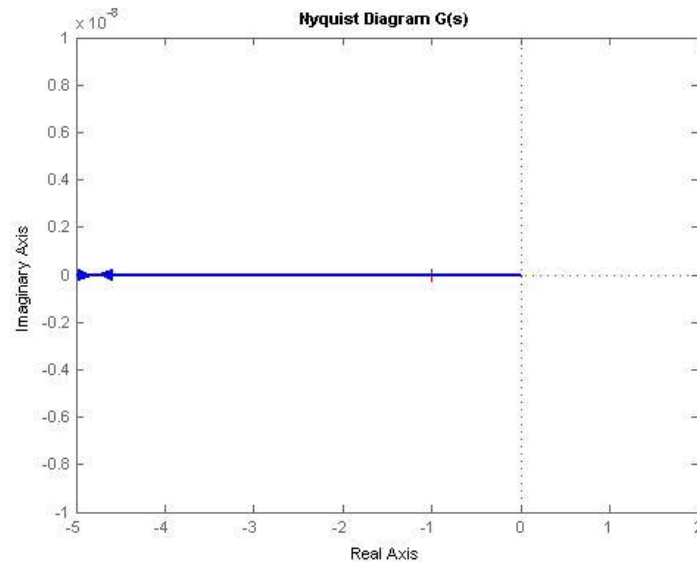


Figura 2.2: Diagramma di Nyquist

Notiamo che la curva passa sopra il punto -1 due volte (sia per  $\omega$  positivi che per  $\omega$  negativi), quindi ci troviamo in una situazione limite del Criterio di Nyquist, ove non è possibile applicarlo, ma sappiamo che questo caso corrisponde al fatto che  $W(s)$  ha due poli nell'asse immaginario, e quindi il sistema a retroazione unitaria è instabile.

## 2.3 Studio della risposta al gradino unitario

La risposta al gradino unitario si ottiene ricorrendo alle trasformate di Laplace. La trasformata della risposta al gradino vale:

$$R(s) = \Theta(s)W(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + \frac{s^2}{K_b}} = \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{K_b + s^2} \right)$$

e antritrasformando si ottiene

$$r(t) = (1 - \cos(\sqrt{K_b}t))\delta_{-1}(t)$$

Il cui grafico è

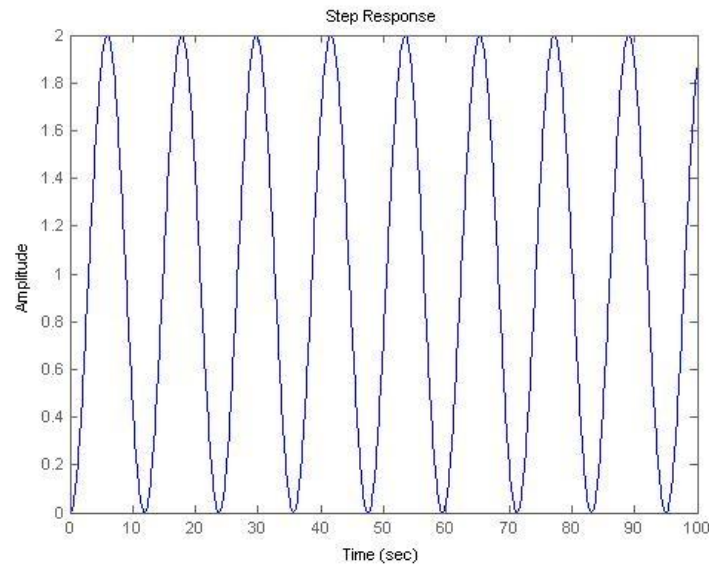


Figura 2.3: Grafico della risposta al gradino unitario.

Dal grafico appare ancora più chiaro che dato un ingresso costante questo sistema è in grado di mantenere la pallina sull'asta, facendola però oscillare di continuo ad una frequenza che dipende dalla costante di Bode. Inoltre l'ingresso costante massimo che si può avere per non far cadere la pallina corrisponde a

$$\theta \leq \frac{L}{2} = 0.5m$$

Dovendo essere

$$r(t) = \theta(1 - \cos(\sqrt{K_b}t))\delta_{-1}(t) < L$$

Nel caso peggiore si ha  $2\theta < L$  da cui appunto si ricava  $\theta < 0.5m$ .

La semplice retroazione unitaria negativa quindi non basta per rendere il sistema BIBO stabile; siamo quindi costretti a tentare altri metodi.



# Capitolo 3

## Controllo PID

Proviamo ora ad inserire un controllo PID

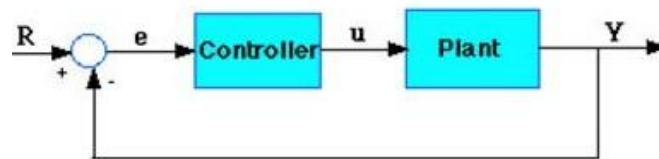


Figura 3.1: Schema di controllo in retroazione.

Dove il controllore ha funzione di trasferimento del tipo:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_i}{s} (1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)$$

(assumendo di attribuire al controllore due zeri reali stabili).

### 3.1 Controllore P

Proviamo inizialmente a risolvere il problema semplicemente con un controllore proporzionale, cioè che si limita ad amplificare il segnale che riceve in ingresso. Ponendo quindi  $K_i = 0$  e  $K_d = 0$  il controllore ha la forma

$$C(s) = K_p$$

e quindi

$$C(s)G(s) = K_p K_b \frac{1}{s^2}$$

#### 3.1.1 Controllore P con $K_p > 0$

Dal diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto  $C(s)G(s)$  è evidente che moltiplicare  $G(s)$  per una costante, non risolve il problema, infatti la curva passa ancora sopra il punto -1, evidenziando l'instabilità di  $W(s)$  che ha 2 poli sull'asse immaginario.

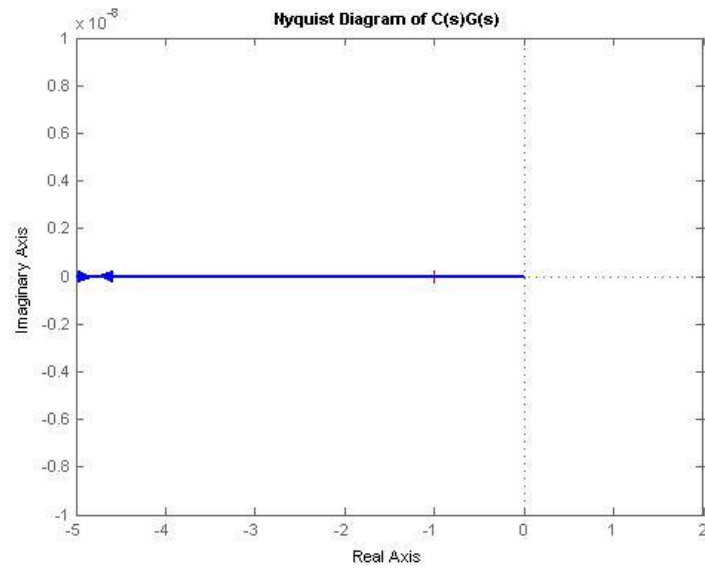


Figura 3.2: Diagramma di Nyquist di  $C(s)G(s)$ .

Studiando la risposta all'ingresso costante  $\theta$  abbiamo

$$R(s) = \Theta(s)W(s) = \frac{\theta}{s} * \frac{1}{1 + \frac{s^2}{K_b K_p}} = \theta \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{K_b K_p + s^2} \right)$$

Antri trasformando

$$r(t) = \theta \left( 1 - \cos\left(\sqrt{|K_b K_p|}t\right) \right) \delta_{-1}(t)$$

E per  $K_p = 100$  e  $\theta = 1$  la risposta al gradino unitario ha il seguente grafico

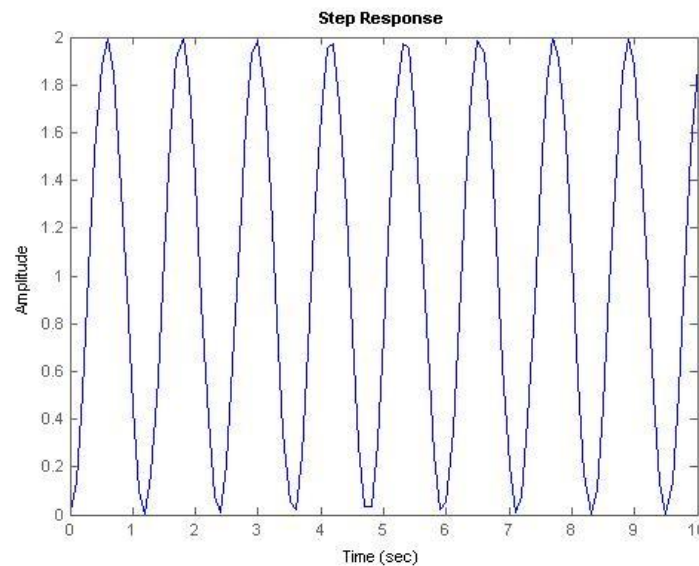


Figura 3.3: Grafico della risposta al gradino unitario per  $K_p = 100$ .

Notiamo che questo tentativo di risoluzione del problema è molto simile a quello tentato in precedenza con retroazione unitaria, l'unica differenza è che all'aumentare della costante  $K_p$  si ha un aumento della frequenza di oscillazione della pallina sull'asta.

### 3.1.2 Controllore P con $K_p < 0$

Per  $K_p < 0$  studiamo la stabilità con il metodo del luogo delle radici

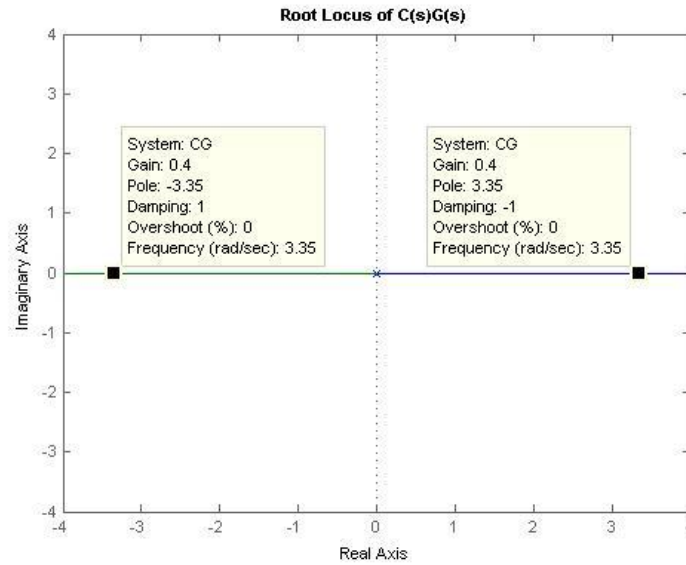


Figura 3.4: Luogo delle radici per  $C(s)G(s) = K_p K_b \frac{1}{s^2}$  con  $K_p < 0$ .

Dal diagramma del luogo delle radici si nota che per qualsiasi  $K_p < 0$  scelto, si ha contemporaneamente un polo nell'asse reale positivo e uno in quello negativo, di valore uguale in modulo. Infatti l'equazione che permette di trovare le radici è  $d(s) = K_p K_b + s^2$  che ha come soluzioni  $s = \pm\sqrt{-K_p K_b}$ , con  $s$  che assume valori reali essendo  $-K_p K_b > 0$ .

Dal grafico della risposta al gradino unitario, si vede che il sistema diverge esponenzialmente, in accordo con il fatto che abbiamo una radice a parte reale positiva.

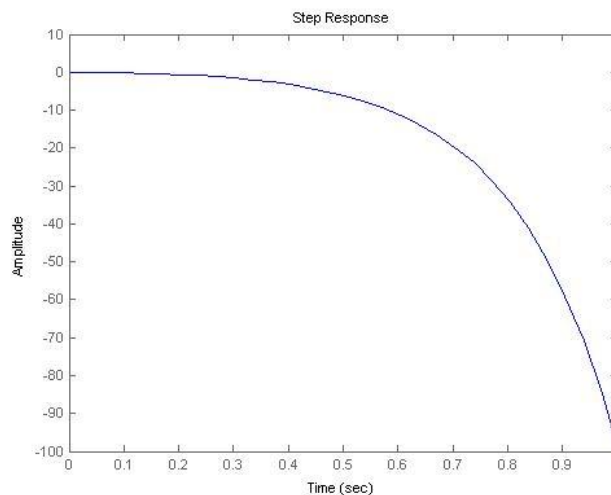


Figura 3.5: Risposta al gradino unitario per  $K_p < 0$

## 3.2 Controllore PD

Riprendiamo in considerazione il controllore di forma  $C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$  ponendo però ora solo  $K_i = 0$ .

Otteniamo, in tal modo, il controllore

$$C(s) = K(1 + s\tau)$$

E quindi

$$C(s)G(s) = \frac{K_b K(1 + s\tau)}{s^2}$$

### 3.2.1 Analisi della stabilità al variare dei parametri

Per capire quando il sistema diventa stabile applichiamo la regola dei segni di Cartesio al denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso  $W(s)$

$$d(s) = K_b K(1 + s\tau) + s^2 = 1 + s\tau + \frac{s^2}{K_b K}$$

Notiamo subito che  $d(s)$  non ha variazioni di segno dei coefficienti di  $s$  se e solo se sia  $K$  che  $\tau$  sono maggiori di 0. In questo caso il sistema è stabile. Dall'equazione di secondo grado ricaviamo la pulsazione naturale  $w_n = \sqrt{K_b K}$  e il coefficiente di smorzamento  $\xi = \frac{\tau w_n}{2}$ , dal quale è possibile capire se i modi sono oscillatori e smorzati o semplici esponenziali decrescenti, rispettivamente se  $0 < \xi < 1$  oppure  $\xi \geq 1$ .

La decisione relativamente ai parametri non è però unica, infatti agendo su  $K$  e  $\tau$  si possono migliorare i tempi di risposta del sistema, eliminare le componenti sinusoidali e anche annullare la sovra elongazione. All'aumentare di  $K$  si ha un miglioramento progressivo dei parametri di interesse del sistema, come la diminuzione del tempo di salita e la diminuzione della sovraelongazione, fino alla sua scomparsa, ma  $K$  non può assumere un valore troppo elevato nei controllori reali, perché ciò potrebbe danneggiare il sistema  $G(s)$  che avendo come ingressi l'uscita di  $C(s)$  avrebbe a che fare con un segnale troppo elevato per essere elaborato. Se ad esempio i segnali fossero delle tensioni, e i blocchi degli amplificatori, una tensione troppo elevata in ingresso ne comprometterebbe il funzionamento.

### 3.2.2 Studio del sistema al variare di $\tau$ per $K$ fissato

Iniziamo il nostro studio ponendo  $K = 10$ , un valore accettabile, e agendo sul parametro  $\tau$  analizziamo le variazioni che comporta. In questo caso, avendo fissato  $K$ , siamo in grado di capire per quali  $\tau$  i modi risultano sinusoidali, e questo accade per

$$\xi = \frac{\tau w_n}{2} < 1$$

E quindi



$$\tau < \frac{2}{\omega_n} = 1.2 = \tau_0$$

Aumentando  $\tau$  si ha l'effetto di aumentare la fase di attraversamento e quindi il margine di fase  $m_\psi$  (riducendo o eliminando la sovra elongazione) e di incrementare la pulsazione di attraversamento  $\omega_a$  (diminuendo il tempo di salita e di assestamento).

Ponendo  $\tau = 3.5$ , il diagramma di Bode di  $C(s)G(s)$  diventa

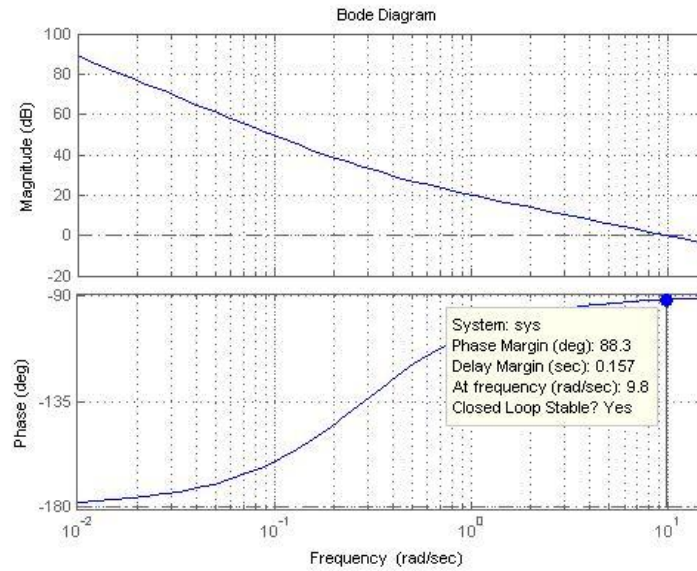


Figura 3.6: Diagramma di Bode di  $C(s)G(s)$  per  $\tau = 3.5$  e  $K = 10$

Da cui si vede che la pulsazione di attraversamento  $\omega_a \cong 10$  rad/s è buona, infatti ci aspettiamo un tempo di salita  $t_r = \frac{\ln 10}{\omega_a} \cong 0.23$  s .

Il diagramma della risposta al gradino unitario è

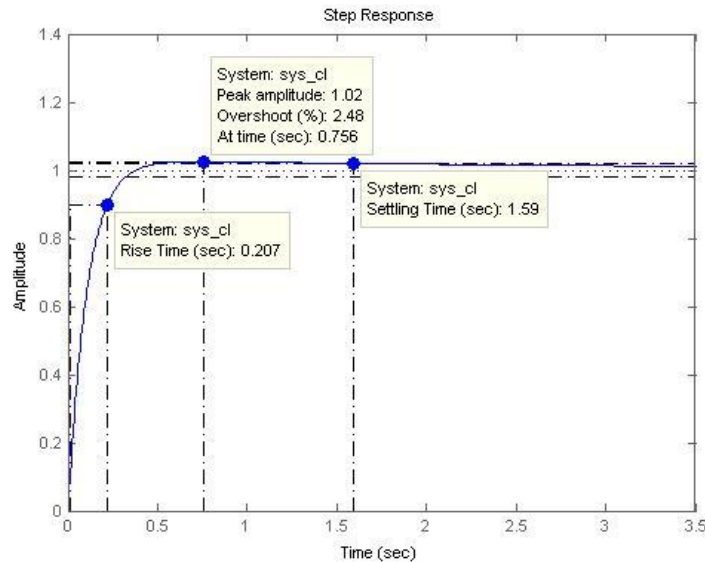


Figura 3.7: Risposta al gradino unitario per  $\tau = 3.5$  e  $K = 10$

Dal grafico della risposta al gradino unitario si nota che :  $t_r \cong 0.2s$  come previsto precedentemente; è però presente una sovra elongazione che vale il 2.48% , che è comunque un buon valore; il tempo di assestamento  $t_s \cong 1.59s$  .

Dal diagramma di Bode notiamo che se aumentiamo anche di poco il valore di  $\tau$  , lo zero si sposta più a sinistra, provocando l'aumento sia del margine di fase che della pulsazione di attraversamento  $w_a$ . Per  $\tau = 6$  dal diagramma ricaviamo  $w_a \cong 16.8$  rad/s che quindi comporta un tempo di salita  $t_r = \frac{\ln 10}{w_a} \cong 0.137s$

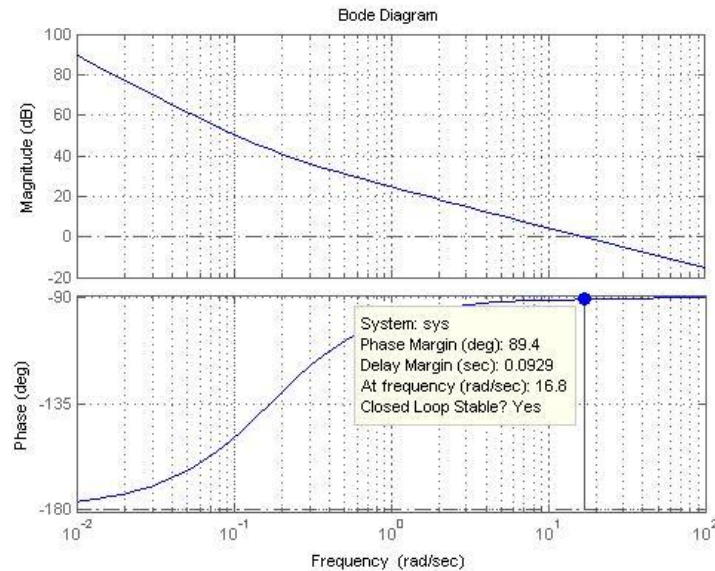


Figura 3.8: Diagramma di Bode di  $C(s)G(s)$  per  $\tau = 6$  e  $K = 10$

E dal grafico della risposta al gradino unitario vediamo che per  $\tau = 6$  la sovraelongazione sparisce e risulta evidente il miglioramento dei parametri, con la diminuzione del tempo di salita,  $t_r \cong 0.13s$  e del tempo di assestamento,  $t_s \cong 0.2s$  .

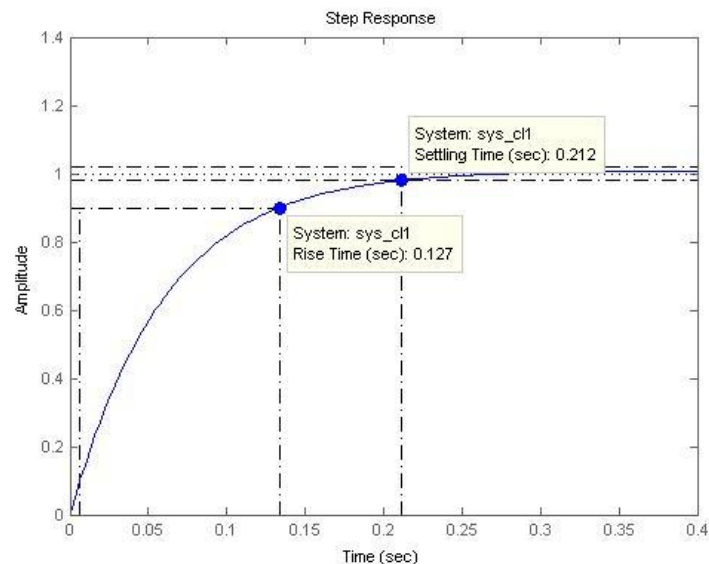


Figura 3.9: Risposta al gradino unitario per  $\tau = 6$  e  $K = 10$

Se invece prendiamo, per esempio,  $\tau = 0.1$  dal diagramma di Bode notiamo un peggioramento sia della pulsazione di attraversamento  $\omega_a \cong 2.96$  sia del margine di fase che ha un valore molto basso  $m_\psi \cong 9.57$ .

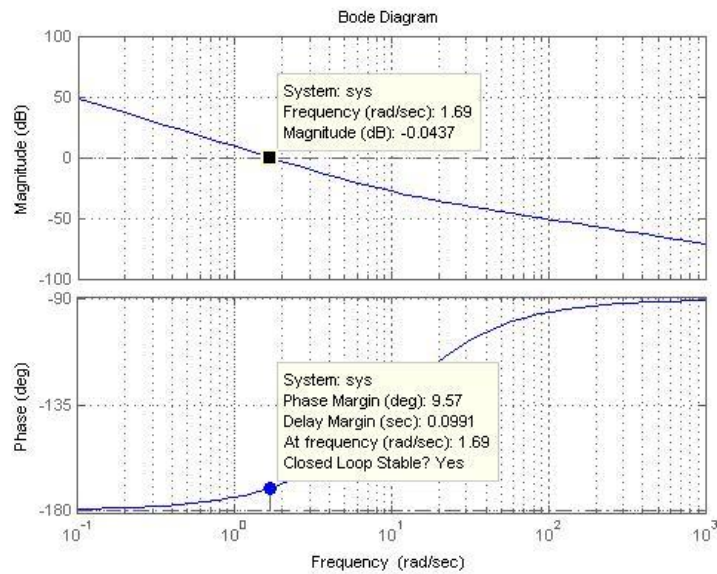


Figura 3.10: Diagramma di Bode di  $C(s)G(s)$  per  $\tau = 0.1$  e  $K = 10$

Essendo il margine di fase significativamente inferiore a  $90^\circ$  ci aspettiamo una considerevole sovra elongazione che infatti vale il 77%; inoltre abbiamo un peggioramento dei tempi di salita e di assestamento, come risulta evidente dalla figura 3.11. Inoltre essendo  $\tau = 0.1 < \tau_0 = 1.2$  avremo modi oscillatori smorzati, il che significa che la pallina oscillerà molto prima di stabilizzarsi nella posizione desiderata.

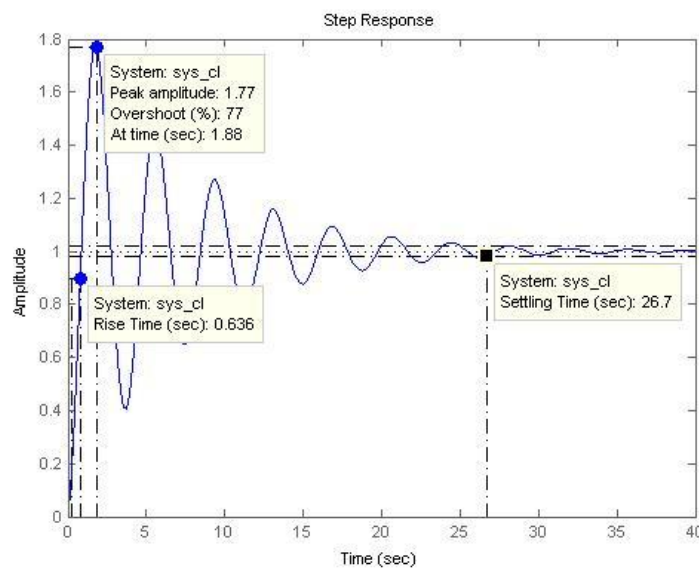


Figura 3.11: Risposta al gradino unitario per  $\tau = 0.1$  e  $K = 10$

### 3.2.3 Studio del sistema al variare di K per $\tau$ fissato

Proviamo ora a studiare come variano le prestazioni del sistema per un  $\tau$  fissato, ad esempio  $\tau = 1$ , al variare di  $K$ . Innanzitutto vediamo per quali valori di  $K$  si hanno modi oscillatori e questo accade per

$$K < \frac{4}{\tau^2 K_b} = 14.29$$

Il che si può ricavare anche dal luogo delle radici per valori di  $K \geq 0$

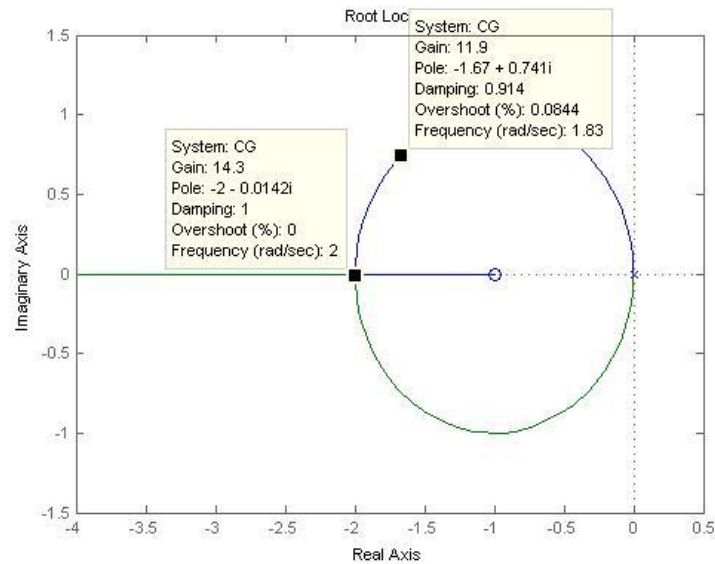


Figura 3.12: Luogo delle radici di  $C(s)G(s)$  per  $\tau = 1$  e  $K \geq 0$

Invece per  $K < 0$  il diagramma del luogo delle radici

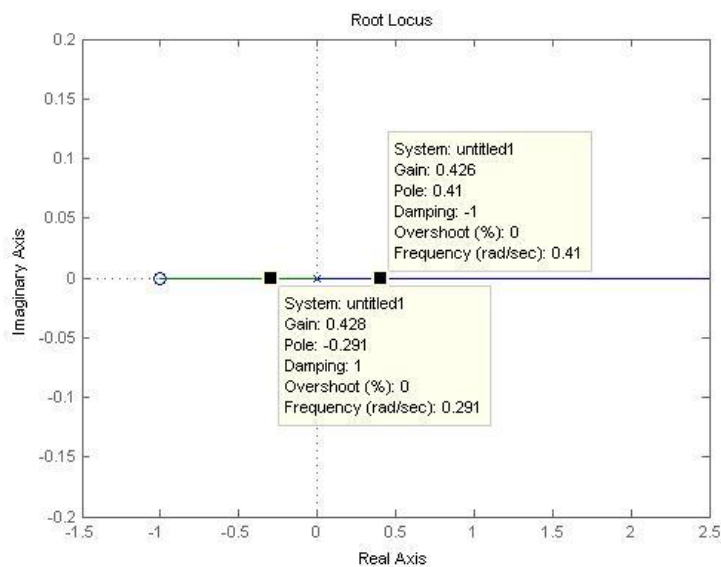


Figura 3.13: Luogo delle radici di  $C(s)G(s)$  per  $\tau = 1$  e  $K \leq 0$

Da cui ritroviamo che per qualsiasi  $K < 0$  non siamo mai in grado di rendere il sistema BIBO stabile, perché avremo sempre un polo a parte reale positiva che farà divergere l'uscita a regime permanente.

Per  $K > 0$  abbiamo un progressivo miglioramento delle prestazioni al crescere di  $K$ . Per provarlo vediamo il grafico della risposta al gradino unitario per diversi valori di  $K$ :

Per  $K = 1$ .

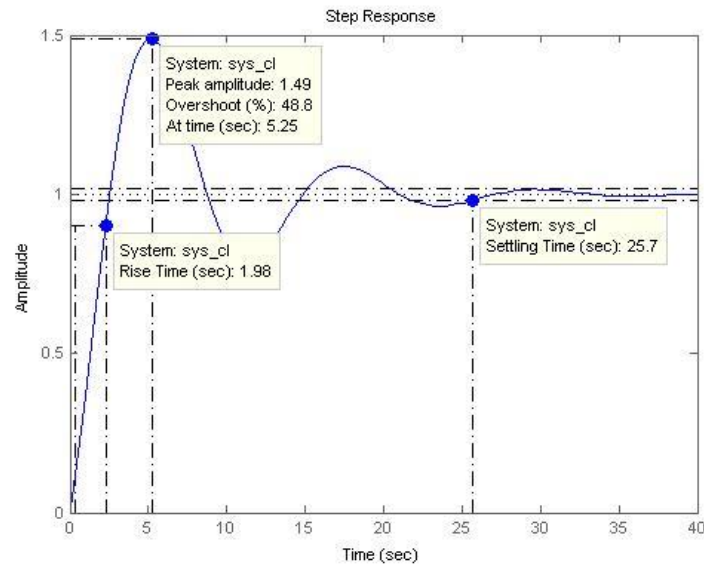


Figura 3.14: Risposta al gradino unitario per  $K = 1$  e  $\tau = 1$

Per  $K = 30$

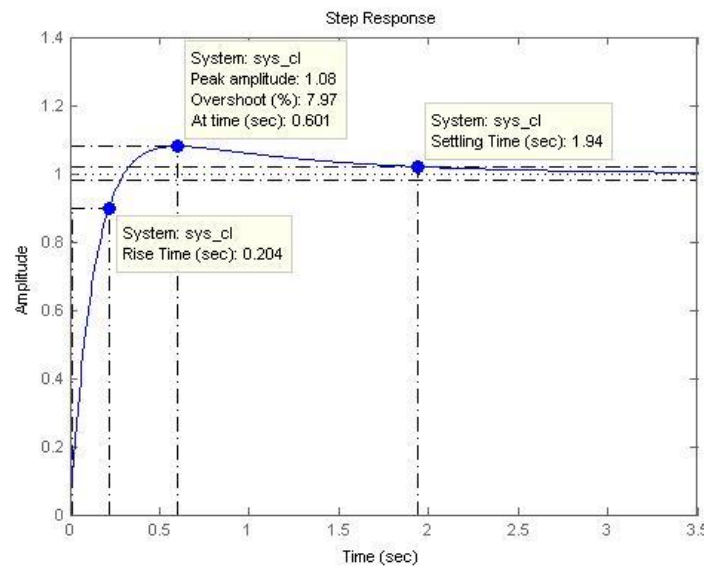


Figura 3.16: Risposta al gradino unitario per  $K = 30$  e  $\tau = 1$

Per  $K = 100$

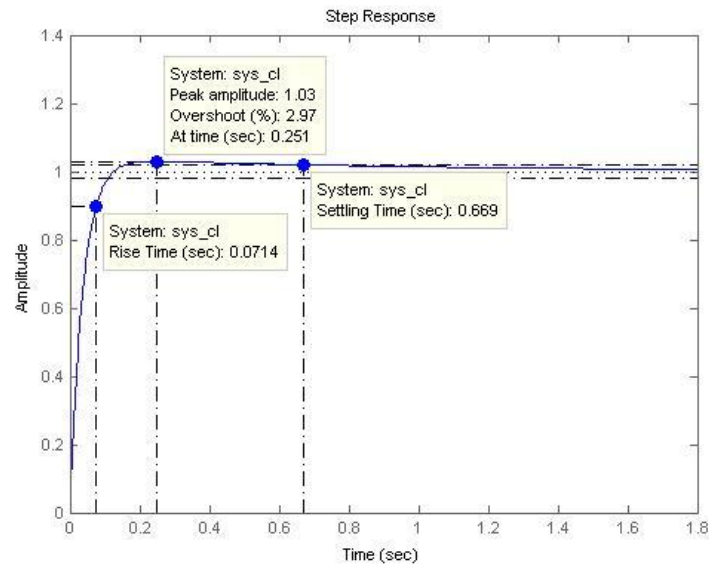


Figura 3.16: Risposta al gradino unitario per  $K = 100$  e  $\tau = 1$

Visti i vari casi trattati modificando  $K$  e  $\tau$  ritengo utile riportare i parametri della risposta al gradino in una tabella riassuntiva

$\tau$	$K$	$t_r$	$t_s$	$s$ %
1	1	1.98	25.7	48.8
1	30	0.204	1.94	7.97
1	100	0.0714	0.669	2.97
0.1	10	0.636	26.75	77
3.5	10	0.207	1.59	2.48
6	10	0.127	0.212	0

Notiamo che per  $K = 30$  e  $\tau = 1$  i tempi sono molto simili al caso  $K = 10$  e  $\tau = 3.5$  ma la sovralongazione è decisamente peggiore nel primo caso. Questo ci può far capire come il valore di  $K$  abbia minor influenza su questo parametro, e che, per poter agire significativamente sulla sovralongazione, risulta più efficace modificare  $\tau$ .

## Capitolo 4

### Sensibilità ai disturbi

In un sistema reale al segnale di ingresso si sovrappone sempre anche qualche segnale di disturbo, completamente sconosciuto  $n(t)$ . Lo schema a cui si fa tipicamente riferimento per la descrizione dei disturbi sul sistema complessivo retroazionato assume che i disturbi agiscano in modo additivo direttamente all'ingresso del processo da controllare  $G(s)$ , quindi subito dopo il controllore  $C(s)$ .

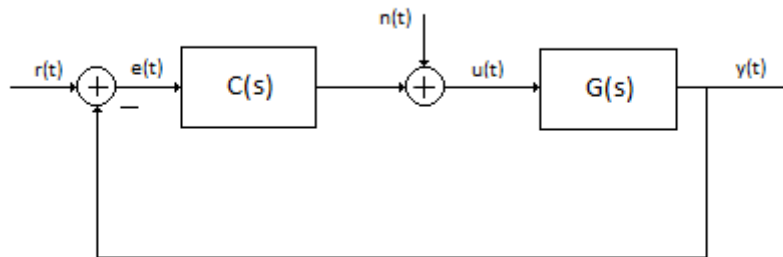


Figura 4.1: Schema a blocchi del sistema con segnale di disturbo

Poiché il sistema è lineare, per il teorema della sovrapposizione degli effetti, si può scomporre l'uscita come la sovrapposizione delle risposte ai due ingressi  $r(t)$  e  $n(t)$ . In corrispondenza a  $r(t)$  la risposta del sistema è

$$Y_r(s) = W(s)R(s)$$

Mentre la risposta a  $n(t)$  è

$$Y_n(s) = W(s) \left( \frac{1}{C(s)} N(s) \right) =: W(s)\bar{N}(s)$$

Pertanto l'uscita complessiva è data da

$$Y(s) = W(s)[R(s) + \bar{N}(s)]$$

Da questo risulta evidente che l'influenza del disturbo risulta minore, maggiore è il valore di  $C(s)$  alla frequenza considerata. Se  $n(t)$  è un disturbo costante, vogliamo che  $\frac{1}{C(0)} = 0$  e per fare questo basta che  $C(s)$  abbia un polo nell'origine.

Nel caso affrontato nel capitolo 3.2, cioè per il compensatore PD, conviene avere un  $K$  il più elevato possibile così da garantire un alto valore di  $C(s)$  ad ogni frequenza.





# Capitolo 5

## Sintesi per tentativi

Proviamo ora ad inserire un controllore  $C(s)$  che possa contemporaneamente:

- Rendere il sistema BIBO stabile;
- Far si che i parametri della risposta al gradino siano "buoni";
- Far fronte ai problemi relativi ad un sistema reale e non solo a quelli di uno ideale.

Per fare questo definiamo  $C_1(s)$  e  $C_2(s)$  come

$$C(s) =: C_1(s)C_2(s)$$

Come visto dal capitolo 4 per rendere minimo il contributo dei disturbi  $n(t)$  all'uscita è bene che  $C(s)$  abbia un valore elevato e un polo nell'origine, quindi inanzi tutto poniamo

$$C_1(s) = \frac{100}{s}$$

Tracciamo ora il diagramma di Bode di  $G(s)C_1(s)$  così da poter decidere quali valori dare a  $C_2(s)$

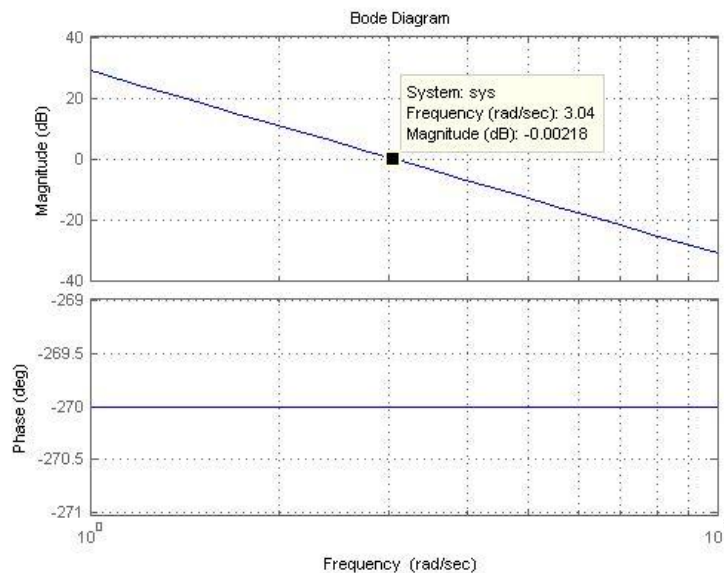


Figura 5.1: Diagramma di Bode di  $G(s)C_1(s)$

Dal diagramma vediamo che affinché il margine di fase  $m_\psi \cong 90^\circ$  abbiamo bisogno di due zeri posizionati poco prima della pulsazione di attraversamento che in questo caso vale  $\omega_a \cong 3$  rad/s. Inoltre per mantenere  $C(s)$  propria occorre inserire un polo in alta frequenza.

Vediamo che ponendo

$$C_2(s) = \frac{(s + 1)^2}{\frac{s}{1000} + 1}$$

Otteniamo un diagramma di Bode

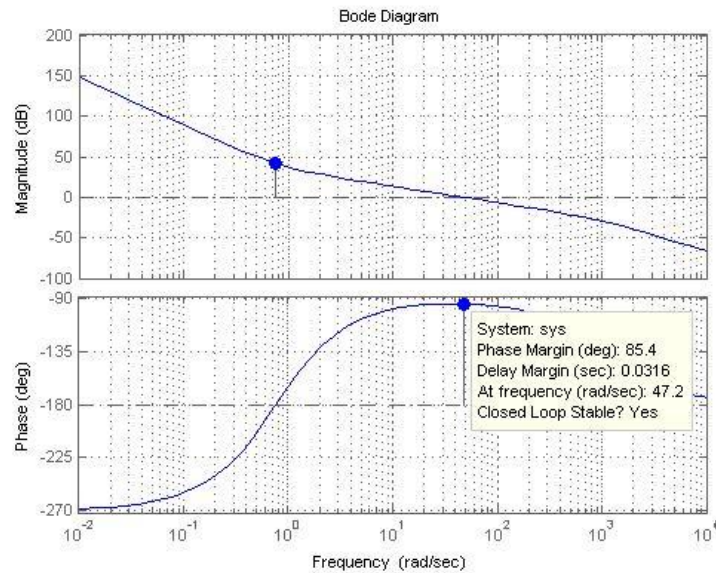


Figura 5.2: Diagramma di Bode di  $G(s)C(s)$

Da cui notiamo che la pulsazione di attraversamento vale  $\omega_a = 47.2$  rad/s, che presagisce un tempo di salita  $t_s$  basso, mentre  $m_\psi = 85.4^\circ$ , dal quale intuivamo che non ci sarà una sovraelongazione problematica. Il tutto viene confermato dal seguente grafico

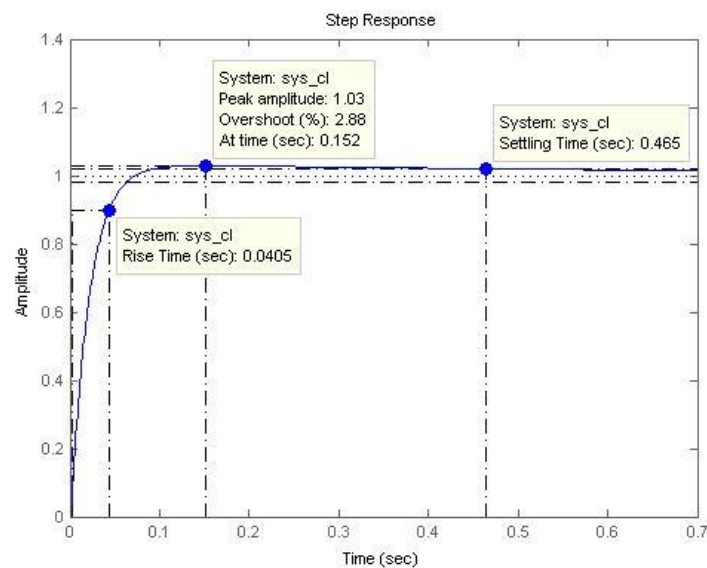


Figura 5.3: Risposta al gradino di  $G(s)C(s)$

## Bibliografia

1. Mauro Bisiacco e Maria Elena Valcher, "Controlli automatici", libreria Progetto, Padova – 2008.
2. "Control tutorials for matlab and simulink" reperibile al sito:  
<http://www.engin.umich.edu/class/ctms/index.htm>
3. Peter Wellstead, "Control systems principles.co.uk. Ball and Beam 1: Basics" reperibile al sito: [https://mail-attachment.googleusercontent.com/attachment/?ui=2&ik=034ce67994&view=att&th=1368d245771739e0&attid=0.1&disp=inline&safe=1&zw&saduie=AG9B\\_P\\_s1nrrMtBdApbw2k0CSU4k&sadet=1341764442788&sads=njxttyLpOC7TunFvaFbT1PaW5pU](https://mail-attachment.googleusercontent.com/attachment/?ui=2&ik=034ce67994&view=att&th=1368d245771739e0&attid=0.1&disp=inline&safe=1&zw&saduie=AG9B_P_s1nrrMtBdApbw2k0CSU4k&sadet=1341764442788&sads=njxttyLpOC7TunFvaFbT1PaW5pU)