

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE  
TESI DI LAUREA

# Controllo del moto di immersione ed emersione di un sommergibile

RELATORE: Ch.mo Prof. Mauro Bisiacco

LAUREANDO: *Marta Pasquetti*

A.A. 2013-2014



*“Noi non dovremmo nemmeno essere qui, ma ci siamo. È come nelle grandi storie, padron Frodo. Quelle che contano davvero. Erano piene di oscurità e pericoli, e a volte non volevi sapere il finale. Perché come poteva esserci un finale allegro? Come poteva il mondo tornare com’era dopo che erano successe tante cose brutte? Ma alla fine è solo una cosa passeggera quest’ombra. Anche l’oscurità deve passare. Arriverà un nuovo giorno. E quando il sole splenderà, sarà ancora più luminoso.”*

*Il Signore degli Anelli - Le due Torri*



# Indice

<b>Sommario</b>	<b>1</b>
<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Modello del sommergibile</b>	<b>5</b>
<b>2 Studio della stabilità del sistema linearizzato</b>	<b>11</b>
<b>3 Progetto del controllore per il sistema linearizzato</b>	<b>15</b>
3.1 Sintesi del controllore . . . . .	15
3.2 Controllo del sistema linearizzato . . . . .	19
<b>4 Controllo del sistema non lineare</b>	<b>23</b>
4.1 Studio della risposta al gradino . . . . .	23
4.2 Analisi di spostamenti elevati . . . . .	28
<b>5 Conclusioni</b>	<b>33</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>35</b>



## **Sommario**

Lo scopo di questo elaborato è progettare un sistema di controllo del moto verticale di un sommergibile. Il controllore verrà progettato sulla base del modello linearizzato del sistema fisico in analisi. Infine verranno condotte delle prove con l'ausilio di Simulink per analizzare l'effetto che il controllore ha sul sistema reale. Si riconosceranno così gli accorgimenti da impiegare per far funzionare correttamente il controllore anche su quest'ultimo.





# Introduzione

Il problema che si vuole affrontare in questa tesi è il controllo del moto di immersione ed emersione di un sommergibile. L'obiettivo principale è fare in modo che fornito un livello di profondità desiderato il sommergibile sia in grado di portarsi a tale profondità a partire dalla posizione occupata inizialmente. Per ottenere tutto ciò si farà ricorso al controllo in retroazione, strumento base nell'ambito dei Controlli Automatici.

Dato che sarebbe troppo oneroso considerare la realtà del sistema fisico si operano delle semplificazioni. Il modello del sommergibile è costituito da un cilindro cavo di volume  $V$  con pareti pesanti di ferro e contenente aria e/o acqua. Per rendere possibile il moto verticale esso è dotato di serbatoio che si riempie e si svuota d'acqua attraverso una valvola. Il flusso di acqua entrante/uscente è regolabile mediante una variabile di controllo  $u(t)$  la quale per valori positivi fa entrare acqua e per valori negativi la fa uscire. Il flusso d'acqua e la variabile di controllo sono legati mediante una costante di proporzionalità  $K$ .

Per praticità nella Tabella 1 sono raccolti i valori dei parametri che ricorrono in tutto il corso dell'elaborato.

Parametro	Simbolo	Valore	Unità di misura
Accelerazione di gravità	$g$	9.81	$\frac{m}{s^2}$
Densità dell'acqua	$\rho_a$	1000	$\frac{Kg}{m^3}$
Coefficiente di attrito viscoso	$b$	0.25	$\frac{Kg}{s}$
Volume del sommergibile	$V$	9270	$m^3$
Costante di immissione/emersione	$K$	0.5	$\frac{Kg}{s}$

Tabella 1: Valori dei parametri

## INTRODUZIONE

---

Si suppone che le uniche forze agenti sul sommergibile siano la forza peso e la forza di Archimede alle quali si aggiunge la forza di attrito viscoso quando esso è in movimento. Inoltre si assume che il sistema in esame non sia soggetto ad eventuali disturbi provenienti dall'ambiente esterno.

Si vuole progettare un controllore che sia capace di portare e mantenere il sommergibile ad una profondità desiderata con tempi di salita da decidere e possibilmente senza sovraelongazioni e con errore a regime al gradino nullo. Per ottenere tutto ciò verrà analizzato il sistema fisico di partenza, successivamente verrà progettato un controllore opportuno sul modello linearizzato ed infine verrà considerato come esso agisce anche sul sistema non lineare di partenza.

# Capitolo 1

## Modello del sommergibile

La legge fisica che permette l'immersione/emersione del sommergibile è il principio di Archimede, secondo il quale un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verticale dal basso verso l'alto pari al peso del fluido spostato. Opposta alla forza di Archimede agisce la forza peso. Modificando la quantità di acqua contenuta nel serbatoio è possibile far prevalere una forza sull'altra, in questo modo, se domina la forza peso si avrà un movimento discendente, viceversa se domina la forza di Archimede si avrà un movimento ascendente. Inoltre sul sommergibile in movimento bisogna considerare la forza di attrito viscoso dovuta all'interazione col fluido esterno (acqua), la quale si oppone al moto.

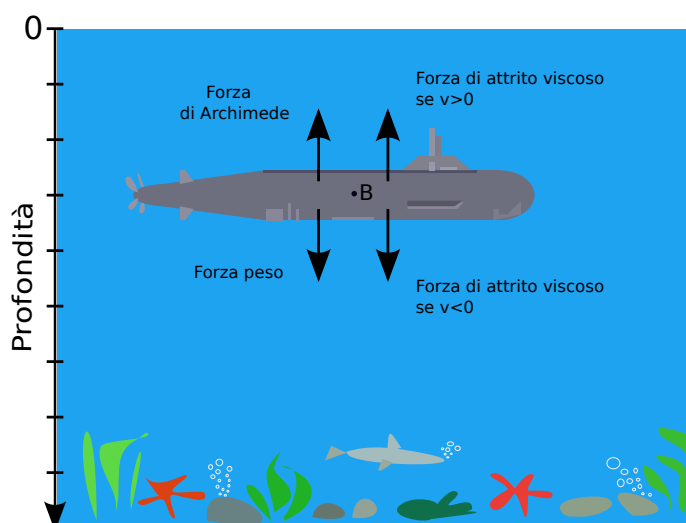


Figura 1.1: Sistema di riferimento

## 1. MODELLO DEL SOMMERGIBILE

---

Si considera come sistema di riferimento (Figura 1.1) un singolo asse orientato verso il basso che va da zero (livello del mare) al fondo del mare.

Le forze <sup>1</sup> agenti sul sommergibile immerso in acqua sono:

- $F_g$  (forza peso), la quale dipende da  $M$  (massa del sommergibile nella condizione di serbatoio vuoto),  $m(t)$  (massa contenuta nel serbatoio all'istante  $t$ ) e dall'accelerazione di gravità  $g$ , secondo la relazione  $F_g = (M + m(t))g$ . Il verso è sempre rivolto verso il basso, concorde all'accelerazione di gravità ed al verso positivo dell'asse  $z$ .
- $F_{arc}$  (forza di Archimede) legata a  $g$ , a  $V$  (volume del sommergibile) e alla densità dell'acqua  $\rho_a$  secondo la formula  $F_{arc} = -\rho_a g V$ . Il segno negativo davanti a tutti termini positivi indica che il verso è sempre opposto al verso positivo dell'asse  $z$ .
- $F_{att}$  (forza di attrito viscoso), la quale dipende dalla velocità del sommergibile  $\dot{z}(t)$  e dalla costante di attrito viscoso  $b$  tramite  $F_{att} = -b\dot{z}(t)$ . In questo caso la forza risulta sempre opposta al vettore velocità del sommergibile.<sup>2</sup>

La somma di tutte queste componenti fornisce un contributo totale:

$$F_{tot} = F_g + F_{arc} + F_{att} \quad (1.1)$$

Applicando a  $F_{tot}$  la seconda legge di Newton, che definisce la forza come derivata nel tempo della quantità di moto[4], si ottiene la seguente relazione:

$$F_{tot} = \frac{d}{dt}[(M + m(t))\dot{z}(t)] = [M + m(t)]\ddot{z}(t) + \dot{m}(t)\dot{z}(t) \quad (1.2)$$

Mettendo insieme l'equazione (1.1) e (1.2) si ha :

$$[M + m(t)]\ddot{z}(t) + \dot{m}(t)\dot{z}(t) = -\rho_a g V + [M + m(t)]g - b\dot{z}(t) \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup>In Figura 1.1 i vettori rappresentanti le forze sono da considerarsi applicati al baricentro del sommergibile rappresentato con il simbolo B.

<sup>2</sup>La funzione  $z(t)$  identifica la posizione del sommergibile rispetto al sistema di riferimento scelto, la derivata prima,  $\dot{z}(t)$ , rappresenta la velocità di salita e discesa del sommergibile, mentre la derivata seconda  $\ddot{z}(t)$  indica l'accelerazione.

Attraverso una valvola è possibile regolare l'immissione e l'espulsione di acqua dal serbatoio. Il flusso d'acqua dipende da una variabile elettrica di controllo  $u(t)$  che assume valori compresi tra  $-1$  e  $1$  in modo che a valori positivi corrisponda un flusso entrante mentre a valori negativi corrisponda un flusso uscente. Si ipotizza che il flusso dipenda dalla variabile di controllo semplicemente tramite una costante  $K$ :

$$\dot{m}(t) = Ku(t) \quad (1.4)$$

Le equazioni (1.3) e (1.4) vanno a costituire il sistema complessivo:

$$\begin{cases} [M + m(t)]\ddot{z}(t) + \dot{m}(t)\dot{z}(t) = -\rho_a gV + [M + m(t)]g - b\dot{z}(t) \\ \dot{m}(t) = Ku(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

Introducendo le variabili di stato  $x_1(t) = z(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{z}(t)$ ,  $x_3(t) = m(t)$  e considerando l'ingresso  $u(t)$  e l'uscita  $y(t) = z(t)$  si ottiene il modello di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t), u(t)) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t), u(t)) = -\frac{\rho_a gV}{M+x_3(t)} + g - \frac{[b+Ku(t)]x_2(t)}{M+x_3(t)} \\ \dot{x}_3(t) = f_3(x_1(t), x_2(t), x_3(t), u(t)) = Ku(t) \\ y(t) = g(x_1(t), x_2(t), x_3(t), u(t)) = x_1(t) \end{cases} \quad (1.6)$$

Il sistema a tempo continuo (1.6) non è lineare. Per ottenere un sistema lineare che approssimi quello di partenza si deve procedere alla linearizzazione di quest'ultimo attorno ad un punto di equilibrio.

I punti di equilibrio sono tutti e soli quelli che soddisfano le relazioni:

$$\begin{cases} u(t) = 0 \\ 0 = f_i(x_{1eq}, x_{2eq}, x_{3eq}, 0) \quad \forall i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (1.7)$$

Svolgendo opportuni calcoli si giunge al risultato per il quale nel punto di equilibrio le variabili di ingresso, l'uscita e l'ingresso assumono i seguenti valori:

$$(x_{1eq}, x_{2eq}, x_{3eq}, u_{eq}, y_{eq}) = (\bar{h}, 0, \bar{m}, 0, \bar{h}) \quad \forall \bar{h} \in \mathbb{R}$$

## 1. MODELLO DEL SOMMERSIBILE

---

Va precisato che  $\bar{h}$  può assumere valori diversi determinando così diversi punti di equilibrio possibili, mentre  $\bar{m}$  è un valore costante qualsiasi sia il punto di equilibrio considerato. È possibile determinare un'espressione per il valore di  $\bar{m}$  direttamente dal sistema (1.7), ma si può ricavare più intuitivamente tramite un bilancio di forze. Nella posizione di equilibrio vale  $x_2(t) = \dot{z}(t) = 0$ , ovvero  $F_{att}$  risulta nulla, perciò il bilancio delle forze impone che la forza peso  $F_g$  e la forza di Archimede  $F_{arc}$  si equivalgano, cioè:

$$\begin{aligned} F_g &= F_{arc} \\ [M + \bar{m}]g &= \rho_a g V \end{aligned}$$

e quindi la massa di equilibrio è  $\bar{m} = \rho_a V - M$ .

Il sistema linearizzato è della forma:

$$\begin{cases} \dot{\delta \mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \delta u(t) \\ \delta y(t) = \mathbf{C} \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \delta u(t) \end{cases} \quad (1.8)$$

con  $\delta \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) - x_{1eq} \\ x_2(t) - x_{2eq} \\ x_3(t) - x_{3eq} \end{bmatrix}$ ,  $\delta u(t) = u(t) - u_{eq}$ ,  $\delta y(t) = y(t) - y_{eq}$  e:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_{eq} \\ u(t)=u_{eq}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-b}{M+\bar{m}} & \frac{\rho_a g V}{[M+\bar{m}]^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_{eq} \\ u(t)=u_{eq}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_{eq} \\ u(t)=u_{eq}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_{eq} \\ u(t)=u_{eq}}} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix};$$

Dato che i valori contenuti nelle matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  non dipendono da  $\bar{h}$  cercando di linearizzare il sistema attorno a punti di equilibrio diversi si otterrà sempre il medesimo sistema linearizzato, che risulta:

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_1(t) = \delta x_2(t) \\ \delta \dot{x}_2(t) = -\frac{b}{M+\bar{m}} \delta x_2(t) + \frac{\rho_a g V}{[M+\bar{m}]^2} \delta x_3(t) \\ \delta \dot{x}_3(t) = K \delta u(t) \\ \delta y(t) = \delta x_1(t) \end{cases} \quad (1.9)$$

da cui sostituendo i valori di  $\delta x_1(t)$ ,  $\delta x_2(t)$ ,  $\delta x_3(t)$ ,  $\delta u(t)$ ,  $\delta y(t)$  si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{b}{M+\bar{m}} x_2(t) + \frac{\rho_a g V}{[M+\bar{m}]^2} x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = K u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (1.10)$$

in cui per semplicità le variabili sono rappresentate dagli stessi simboli usati per il sistema non lineare  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), u(t), y(t))$ , ma non hanno il loro stesso significato in quanto ora indicano casi di scostamento dall'equilibrio. Ciò che interessa ai fini dell'analisi è la relazione che sussiste tra ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$ .

Per determinare tale relazione è conveniente applicare la trasformata di Laplace alla (1.10):

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0^-) = X_2(s) \\ sX_2(s) - x_2(0^-) = -\frac{b}{M+\bar{m}} X_2(s) + \frac{\rho_a g V}{[M+\bar{m}]^2} X_3(s) \\ sX_3(s) - x_3(0^-) = KU(s) \\ Y(s) = X_1(s) \end{cases} \quad (1.11)$$

con  $x_1(0^-)$ ,  $x_2(0^-)$  e  $x_3(0^-)$  condizioni iniziali del sistema.

Dopo alcuni conti, si ottiene la seguente relazione:

$$Y(s) = \frac{Kg}{s^2 [s\rho_a V + b]} U(s) + \frac{g}{s^2 [s\rho_a V + b]} X_3(0^-) + \frac{\rho_a V}{s [s\rho_a V + b]} X_2(0^-) + \frac{1}{s} X_1(0^-) \quad (1.12)$$

Si può notare come l'uscita del sistema sia data dalla somma di due termini:

## 1. MODELLO DEL SOMMERGIBILE

---

risposta forzata,  $Y_f(s)$ , e risposta libera  $Y_l(s)$ .

$$Y(s) = Y_f(s) + Y_l(s) \quad (1.13)$$

$$Y_f(s) = \frac{Kg}{s^2 [s\rho_a V + b]} U(s) = G(s)U(s) \quad (1.14)$$

$$Y_l(s) = \frac{g}{s^2 [s\rho_a V + b]} X_3(0^-) + \frac{\rho_a V}{s [s\rho_a V + b]} X_2(0^-) + \frac{1}{s} X_1(0^-) \quad (1.15)$$

dove  $G(s)$  è la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Kg}{s^2 [s\rho_a V + b]} \quad (1.16)$$



## Capitolo 2

# Studio della stabilità del sistema linearizzato

Il sistema linearizzato è di tipo SISO (single input single output), causale, tempo invariante e a tempo continuo. Sostituendo i valori numerici dei parametri nell'equazione (1.16) si ottiene:

$$G(s) = \frac{Kg}{s^2 [s\rho_a V + b]} = \frac{0.5 \cdot 9.81}{s^2 [s \cdot 1000 \cdot 9270 + 0.25]} \quad (2.1)$$

La funzione di trasferimento presenta un polo doppio nell'origine e un polo singolo reale negativo:

- $p_1 = 0$  con  $\mu_1 = 2$
- $p_2 = -\frac{b}{\rho_a V} = -\frac{0.25}{1000 \cdot 9270} \approx -2.70 \cdot 10^{-8}$  con  $\mu_2 = 1$

In generale un sistema soddisfa i requisiti di BIBO<sup>1</sup> stabilità se e solo se la funzione di trasferimento  $G(s)$  ha tutti i poli nel semipiano sinistro aperto  $Re < 0$ . In questo caso il polo situato nell'origine  $p_1$  non rispetta tale condizione perciò il sistema in analisi risulta instabile. Successivamente, in fase di sintesi del controllore, si dovrà fare in modo che il sistema complessivo retroazionato risulti invece stabile.

---

<sup>1</sup>Nell'ambito dei controlli risulta molto importante determinare la stabilità dei sistemi. Un sistema lineare a tempo continuo viene detto BIBO (bounded input/bounded output) stabile se, a partire da condizioni iniziali nulle, esso risponde ad ogni ingresso causale e limitato con un'uscita limitata. Questo tipo di stabilità fa riferimento all'evoluzione forzata del sistema, dunque dipende esclusivamente dalle proprietà della funzione di trasferimento del sistema.[1]

## 2. STUDIO DELLA STABILITÀ DEL SISTEMA LINEARIZZATO

---

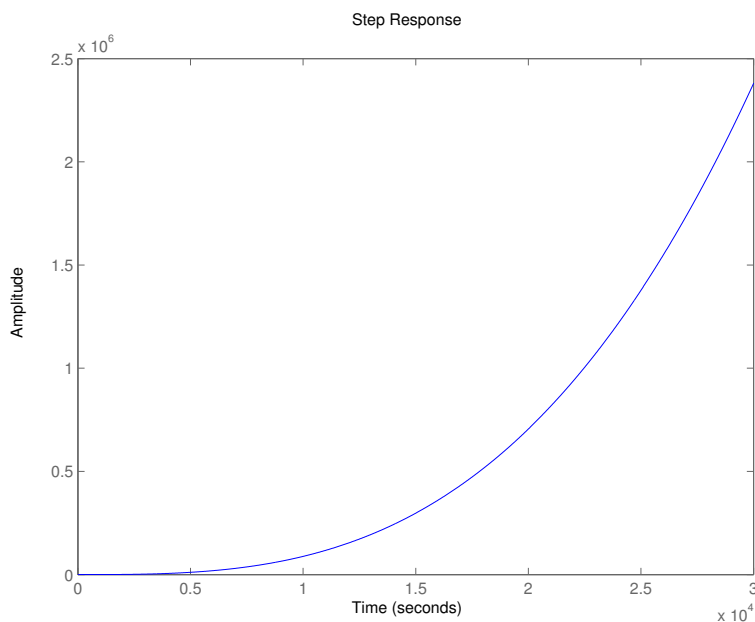


Figura 2.1: Risposta al gradino

Osservando l'andamento della risposta al gradino 2.1 graficata con Matlab risulta ben visibile l'assenza di stabilità in quanto a fronte di un ingresso causale e limitato si ha in uscita una risposta forzata non limitata.

Invece dal diagramma di Bode 2.2 della risposta in frequenza  $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$  è possibile osservare il polo  $p_1$  e il suo effetto sull'andamento del modulo e della fase di  $G(j\omega)$ .

Conviene considerare  $G(s)$  nella sua forma di Bode:

$$G(s) = K_B \frac{1}{s^2(1 + sT)} \quad (2.2)$$

con  $K_B = \frac{0.5 \cdot 9.81}{0.25} = 19.62$  guadagno di Bode e  $T = \frac{1000 \cdot 9270}{0.25}$  costante di tempo relativa a  $p_2$ . Per valori di  $\omega \ll \frac{1}{|T|} \approx 2.70 \cdot 10^{-8}$  il grafico di  $|G(j\omega)|$  ha una pendenza di  $-40dB$  e una fase di  $-180^\circ$ . Per valori di  $\omega \gg \frac{1}{|T|}$  invece  $|G(j\omega)|$  ha una pendenza di  $-60dB$  e una fase di  $-270^\circ$ .

Dal diagramma di Bode sono ricavabili ulteriori specifiche del sistema in esame che saranno utili in fase di sintesi. La pulsazione di attraversamento  $\omega_A$  è quella pulsazione per cui il diagramma di Bode delle ampiezze di  $G(j\omega)$  attraversa l'asse delle ascisse, cioè assume valore nullo in  $dB$ . Il margine di fase  $m_\varphi$  è definito dalla relazione  $m_\varphi := 180^\circ + \varphi_A$ , ove  $\varphi_A$  è la fase di attraversamento e corrisponde al

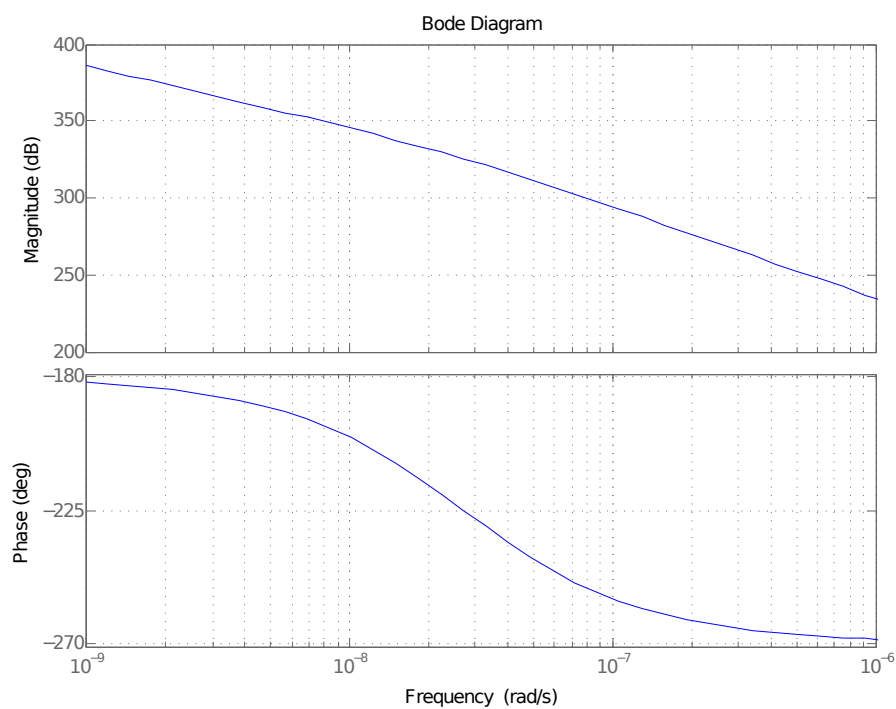


Figura 2.2: Diagramma di Bode di  $G(s)$

valore che il diagramma di Bode della fase di  $G(j\omega)$  assume in corrispondenza della pulsazione  $\omega_A$  ( $\varphi_A := \arg(G(j\omega_A))$ ).[1]

I valori numerici di  $\omega_A$  e di  $m_\varphi$  sono:

- $\omega_A = 0.0081 \frac{rad}{s}$
- $m_\varphi = -90^\circ$

## 2. STUDIO DELLA STABILITÀ DEL SISTEMA LINEARIZZATO

---

## Capitolo 3

# Progetto del controllore per il sistema linearizzato

### 3.1 Sintesi del controllore

Si ricorda che lo scopo di questa tesi è progettare un sistema di controllo in grado di portare il sommergibile da una posizione di partenza ad una profondità data.

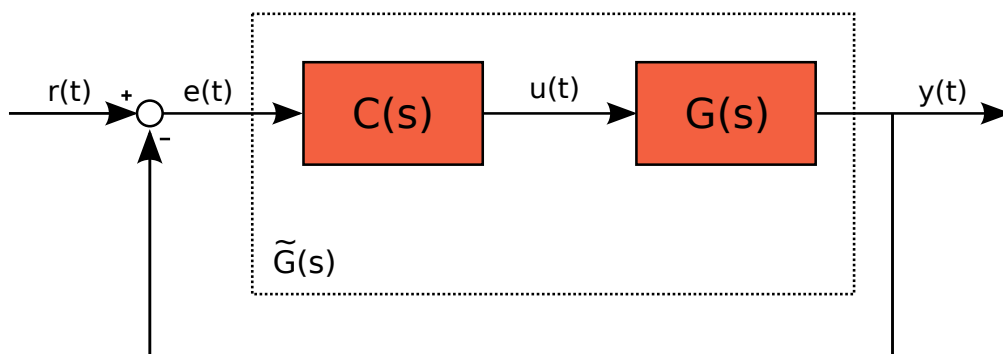


Figura 3.1: Schema di controllo in retroazione

La Figura 3.1 mostra lo schema generale a cui si farà riferimento in fase di sintesi del controllore. Si tratta di risolvere un problema di regolazione, il quale consiste nel far sì che l'uscita  $y(t)$  si mantenga, a regime, ad un valore costante desiderato impostato dall'ingresso  $r(t)$  a sua volta costante. Nel caso specifico  $r(t)$  rappre-

### 3. PROGETTO DEL CONTROLLORE PER IL SISTEMA LINEARIZZATO

senta la profondità a cui si vuole portare il sommergibile e  $y(t)$  rappresenta invece la posizione effettiva in cui esso si trova istante per istante.

Tenendo conto di eventuali specifiche da soddisfare occorre progettare un controllore  $C(s)$  apposito che agisca sul sistema  $G(s)$  di partenza. L'effetto della retroazione unitaria negativa è quello di correggere l'andamento dell'uscita mediante l'errore  $e(t)$ , che si trova in ingresso al blocco  $C(s)$  e rappresenta la differenza che sussiste tra la profondità di riferimento e quella effettiva ( $e(t) = r(t) - y(t)$ ). Grazie alla retroazione il controllore agisce sul blocco  $G(s)$  in maniera tale che questo errore si riduca fino ad annullarsi in corrispondenza del raggiungimento della profondità voluta.

In seguito si farà riferimento alla funzione di trasferimento in catena aperta con il simbolo  $\tilde{G}(s)$ , che appare anche in Figura (3.1) ed ha espressione:

$$\tilde{G}(s) = C(s)G(s) \quad (3.1)$$

mentre per la funzione di trasferimento del sistema retroazionato si utilizzerà la scrittura  $W(s)$ , in formule:

$$W(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1 + \tilde{G}(s)} \quad (3.2)$$

Il controllore viene progettato con l'obiettivo di rendere il sistema retroazionato stabile e ottenere delle buone prestazioni a regime e nel transitorio. Risulta utile distinguere queste specifiche in fase di progetto e considerare il controllore  $C(s)$  come unione di due azioni correttive:

$$C(s) = C_1(s)C_2(s) \quad (3.3)$$

dove  $C_1(s)$  definisce il tipo e l'errore a regime della risposta al gradino ( $e_{rp}^{(1)}$ ), mentre da  $C_2(s)$  dipendono la stabilità, il margine di fase e la pulsazione di attraversamento. Mediante la progettazione di  $C_1(s)$  si vuole far in modo che il sistema finale (3.2) presenti un errore a regime nullo. Nel caso specifico dato che  $G(s)$  presenta già un polo nell'origine di molteplicità 2 il sistema è di tipo

2: l'errore a regime è nullo<sup>1</sup> pertanto non è necessaria alcuna azione correttiva e  $C_1(s) = 1$ . La funzione di trasferimento ad anello aperto diventa dunque  $\tilde{G}(s) = C_2(s)G(s)$ .

Per poter attuare la sintesi per tentativi sul controllore  $C_2(s)$  bisogna prima definire le specifiche che la risposta al gradino del sistema in catena chiusa deve soddisfare. Per quanto riguarda il tempo di salita si assume il valore  $t_r = 60s$ . Tale specifica del sistema retroazionato nel dominio del tempo va convertita in una condizione che il sistema in catena aperta  $\tilde{G}(s)$  deve soddisfare nel dominio della frequenza. Tra la banda passante  $B_p$  di  $W(s)$  e il tempo di salita  $t_r$  vale la relazione approssimata :

$$t_r \simeq \frac{2.3}{B_p} \quad (3.4)$$

Inoltre se il margine di fase di  $\tilde{G}(s)$  è prossimo  $90^\circ$  e il grafico di  $|\tilde{G}(j\omega)|$  presenta una pendenza pari a  $-20 \frac{dB}{dec}$  in corrispondenza della pulsazione di attraversamento si può ritenere attendibile la relazione:

$$B_p \simeq \omega_A^* \quad (3.5)$$

Mettendo insieme la (3.4) e la (3.5) si ottiene la relazione  $t_r \simeq \frac{2.3}{\omega_A^*}$ . Riassumendo, il sistema  $\tilde{G}(s)$  deve soddisfare:

- $\omega_A^* = \frac{2.3}{t_r} = 0.04 \frac{rad}{s}$
- $m_\varphi^* \simeq 90^\circ$

Per maturare il margine di fase desiderato si deve collocare almeno due decadi prima di  $\omega_A^*$  uno zero negativo doppio capace di modificare la pendenza da  $-60 \frac{dB}{dec}$

---

<sup>1</sup>Il sistema retroazionato  $W(s)$  è di tipo  $k \geq 1$  se e solo se  $\tilde{G}(s)$  ha un polo di molteplicità  $k$  nell'origine. Supponendo che  $\tilde{G}(s)$  abbia un polo nell'origine di molteplicità  $\nu \in \mathbb{N}$  si ha:

$$e_{rp}^{(k+1)} = \begin{cases} 0 & \text{per } \nu > k \\ \frac{1}{K_B(\tilde{G}(s))} & \text{per } \nu = k \\ \infty & \text{per } \nu < k \end{cases}$$

Dunque nel caso in cui  $\nu = 2$  si ha che l'errore a regime è nullo per segnali  $\delta_{-(k+1)}$  per  $k = 0, 1$ . Per  $k = 0$  il segnale è il gradino unitario  $\delta_{-1}$  quindi  $e_{rp}^{(1)} = 0$ .

### 3. PROGETTO DEL CONTROLLORE PER IL SISTEMA LINEARIZZATO

a  $-20 \frac{dB}{dec}$  proprio in corrispondenza di  $\omega_A^*$ . Come zero si è deciso di utilizzare  $z = -8 \cdot 10^{-5}$ , inoltre viene aggiunto un polo negativo doppio in alta frequenza,  $p = 8 \cdot 10^2$ , che ha lo scopo di rendere propria la funzione razionale  $C_2(s)$ . Il controllore che ne risulta è :

$$C_2(s) = \frac{\left(1 + \frac{s}{0.00008}\right)^2}{\left(1 + \frac{s}{800}\right)^2} \quad (3.6)$$

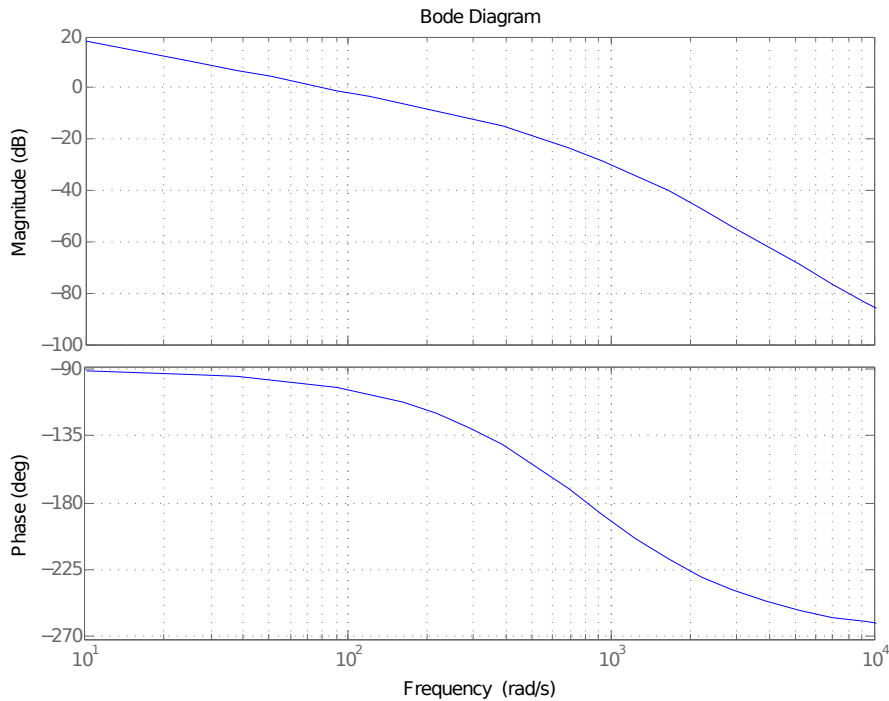


Figura 3.2: Diagramma di bode di  $\tilde{G}(s)$

Dal diagramma di Bode di  $\tilde{G}(s)$  in Figura 3.2 si può notare che la pulsazione di attraversamento risulta essere ben oltre quella voluta. Calcolando il valore che  $|\tilde{G}(j\omega)|$  assume in corrispondenza di  $\omega_A^*$  si ottiene il fattore  $\alpha$  per cui deve essere diviso  $C_2(s)$ . In questo modo il diagramma di Bode di  $\frac{C_2(s)}{\alpha}G(s)$  risulta abbassato rispetto a quello di  $C_2(s)G(s)$  proprio della quantità voluta affinché valga  $0dB$  per  $\omega = 0.04 \frac{rad}{s}$ . Il valore cercato è  $\alpha = 2066$ , dunque il controllore finale risulta:

$$C(s) = \frac{C_2(s)}{\alpha} = \frac{\left(1 + \frac{s}{0.00008}\right)^2}{(2066) \left(1 + \frac{s}{800}\right)^2} \quad (3.7)$$



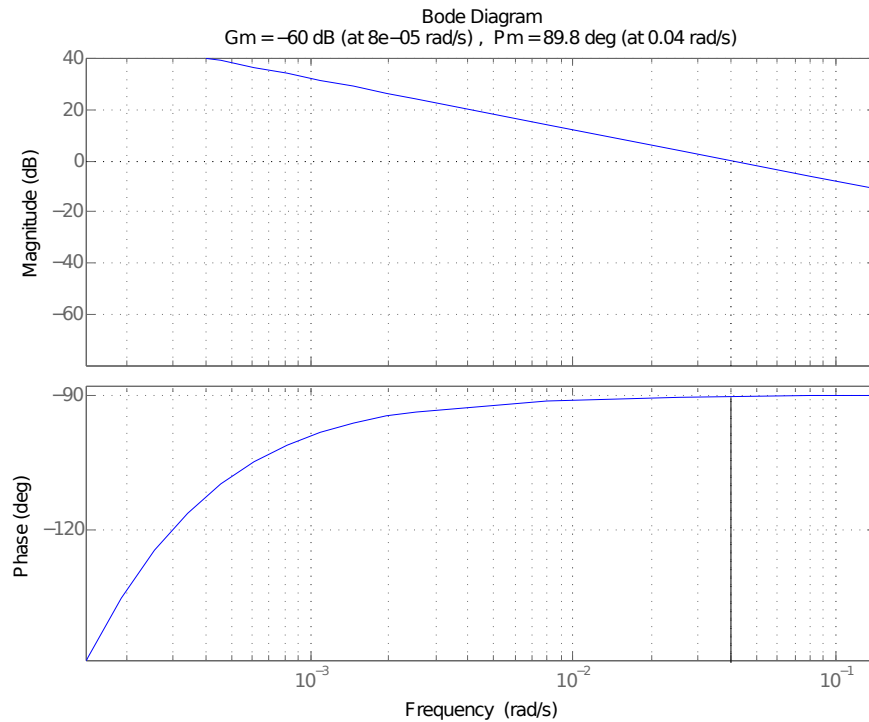


Figura 3.3: Diagramma di bode di  $\tilde{G}(s)$  definitiva

Dal diagramma di Bode in Figura 3.3 si può vedere che si sono soddisfatte le condizioni sul margine di fase e la pulsazione di attraversamento. Inoltre il sistema retroazionato  $W(s)$  risulta BIBO stabile poiché valgono le condizioni del Criterio di Bode: la funzione di trasferimento in catena aperta  $\tilde{G}(s)$  non presenta poli a parte reale positiva ed il suo guadagno di Bode  $K_B(\tilde{G})$  è positivo come anche il margine di fase  $m_\varphi = 89.8^\circ$ . [1]

## 3.2 Controllo del sistema linearizzato

In questo paragrafo verrà analizzato l'effetto che produce il controllore applicato al sistema linearizzato. Occorre innanzitutto modellare il sistema mediante interconnessione di opportuni blocchi disponibili nella libreria di Simulink.

### 3. PROGETTO DEL CONTROLLORE PER IL SISTEMA LINEARIZZATO

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_1(t) = \delta x_2(t) \\ \delta \dot{x}_2(t) = -\frac{b}{M+m} \delta x_2(t) + \frac{\rho_a g V}{[M+m]^2} \delta x_3(t) \\ \delta \dot{x}_3(t) = K \delta u(t) \\ \delta y(t) = \delta x_1(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

Partendo dal sistema di equazioni (3.8), che rappresenta il modello di stato linearizzato come già visto nel primo capitolo, risulta intuitiva la costruzione dello schema a blocchi descritto in Figura 3.4.

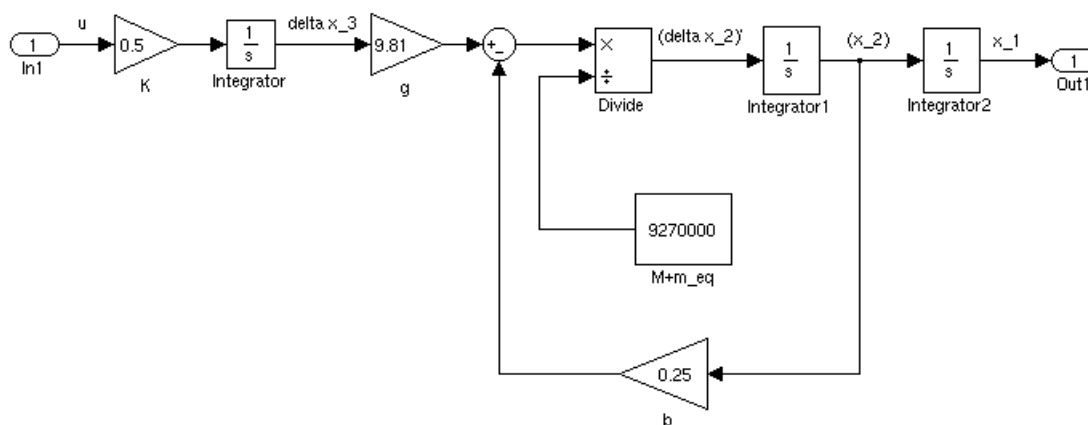


Figura 3.4: Schema del modello linearizzato

A questo punto è utile fare delle osservazioni per rendere più chiara la trattazione. Ricordando che  $\delta x_i(t) = x_i(t) - x_{i_{eq}} \forall i = 1, 2, 3$  e che qualsiasi sia il punto di equilibrio considerato la variabile di stato  $x_2(t)$  risulta nulla ( $x_{2_{eq}} = 0$ ), si possono ritenere coincidenti  $\delta x_2(t)$  e  $x_2(t)$ . Per questo nello schema Simulink integrando  $\delta \dot{x}_2(t)$  si ottiene  $x_2(t)$  e non  $\delta x_2(t)$ . Inoltre si è scelto di considerare  $x_{1_{eq}} = \bar{h} = 0$ , in questo modo si ha che  $\delta x_1(t) = x_1(t)$  dunque l'uscita del sistema  $\delta y = \delta x_1(t) = x_1(t)$  rappresenta proprio la profondità a cui si trova il sommergibile.

Il sistema completo di retroazione e controllore viene schematizzato in Simulink come in Figura 3.5, dove il sottosistema che indica il sistema linearizzato coincide con il modello in Figura 3.4 mentre il segnale d'ingresso è un gradino.

Per chiarire il significato del coefficiente che appare nello schema Simulink di  $C(s)$  si riporta la relazione che questa funzione ha con quella della formula (3.6) del

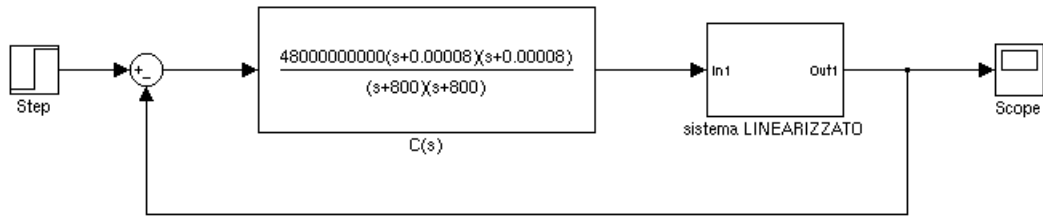


Figura 3.5: Schema della retroazione applicata al sistema lineare

precedente paragrafo:  $C(s) = \frac{(1 + \frac{s}{0.00008})^2}{(2066)(1 + \frac{s}{800})^2} = \beta \frac{(s+0.00008)^2}{(s+800)^2}$  con  $\beta = \frac{(800)^2}{(2066)(0.00008)^2}$ .  
 Simulando il comportamento del sistema in Figura 3.5 in corrispondenza del segnale gradino come ingresso e nel caso di condizioni iniziali nulle negli integratori presenti si ottiene la risposta al gradino.

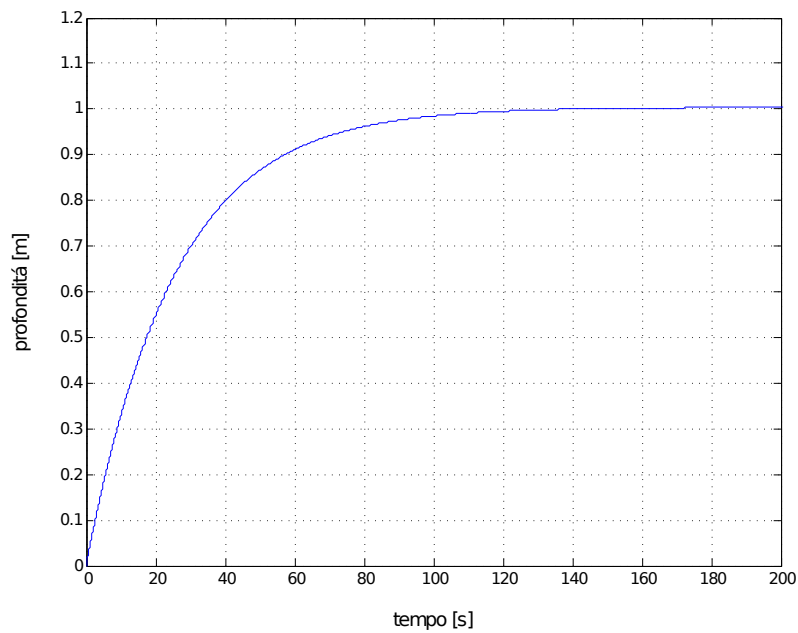


Figura 3.6: Risposta al gradino di  $W(s)$

Come si può osservare dall'andamento della risposta al gradino in Figura 3.6 non vi sono sovraelongazioni. Inoltre il tempo di salita ammonta a  $t_r \simeq 57.34s$  dunque le specifiche sulla risposta al gradino sono state soddisfatte.

### 3. PROGETTO DEL CONTROLLORE PER IL SISTEMA LINEARIZZATO

# Capitolo 4

## Controllo del sistema non lineare

### 4.1 Studio della risposta al gradino

Nel capitolo precedente è stato progettato un controllore capace di agire in modo opportuno sul sistema linearizzato. Bisogna ricordare però che, nonostante il controllore venga progettato sul sistema lineare, l'obbiettivo finale è che funzioni correttamente anche sul sistema non lineare di partenza in quanto è proprio con quest'ultimo che si ha a che fare nella realtà.

In questo capitolo innanzitutto si analizzerà l'effetto che producono  $C(s)$  e la retroazione unitaria sul sistema non lineare. Per una sua schematizzazione si è partiti dal modello in forma di stato ricavato nel primo capitolo in formula(1.6). Dato però che il controllore è stato progettato sul sistema linearizzato, il quale lavora sugli scostamenti dal punto di equilibrio, si deve applicare la seguente sostituzione:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_1(t) + x_{1eq} \\ \delta x_2(t) + x_{2eq} \\ \delta x_3(t) + x_{3eq} \\ \delta y(t) + y_{eq} \\ \delta u(t) + u_{eq} \end{bmatrix} \underset{\substack{x_{1eq}=\bar{h}=0 \\ x_{2eq}=0 \\ x_{3eq}=\rho_a V - M \\ y_{eq}=0 \\ u_{eq}=0}}{=} \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \\ \delta x_3(t) + \rho_a V - M \\ \delta y(t) \\ \delta u(t) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Mediante tale sostituzione si ottiene un nuovo sistema (4.2) che permette di

#### 4. CONTROLLO DEL SISTEMA NON LINEARE

ricavare facilmente il corrispondente schema Simulink visibile in Figura 4.1.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{g\delta x_3(t) - [b + Ku(t)]x_2(t)}{\rho_a V + \delta x_3(t)} \\ \dot{\delta x}_3(t) = Ku(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

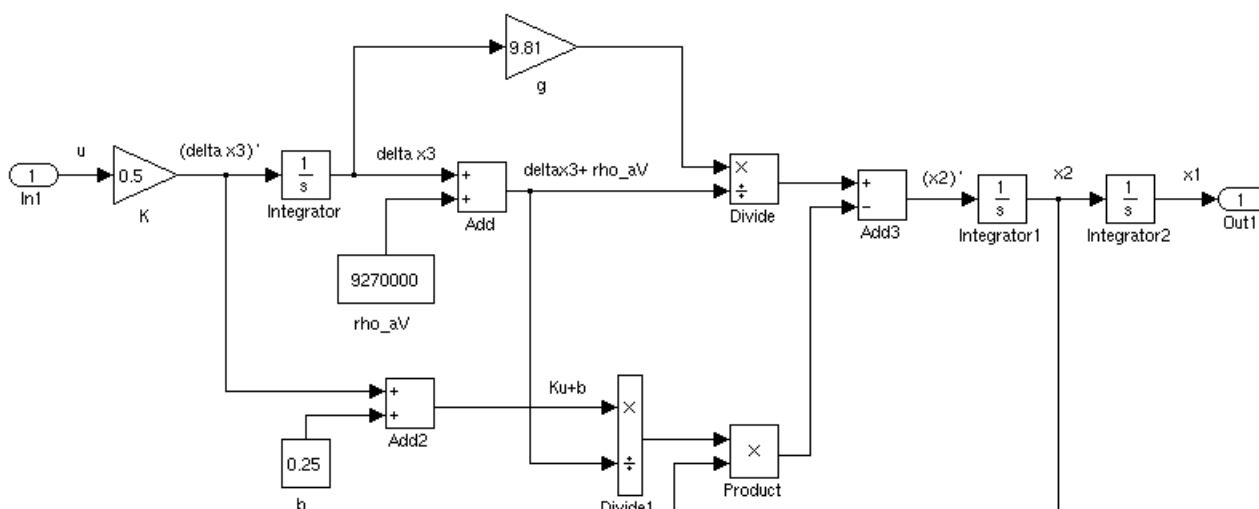


Figura 4.1: Modello del sistema non lineare

In Figura 4.2 si riporta lo schema Simulink del sistema completo di retroazione e controllore dove l'ingresso e l'uscita del blocco che indica il sistema non lineare sono da ritenersi coincidenti con quelli del modello riportato in Figura 4.1.

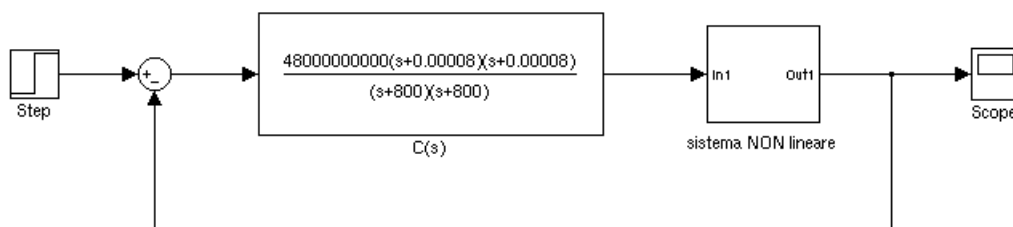


Figura 4.2: Schema della retroazione applicata al sistema non lineare

A questo punto avendo a disposizione il modello del sistema non lineare si può

procedere all'analisi della risposta al gradino, la quale a prima vista non risulta molto soddisfacente.

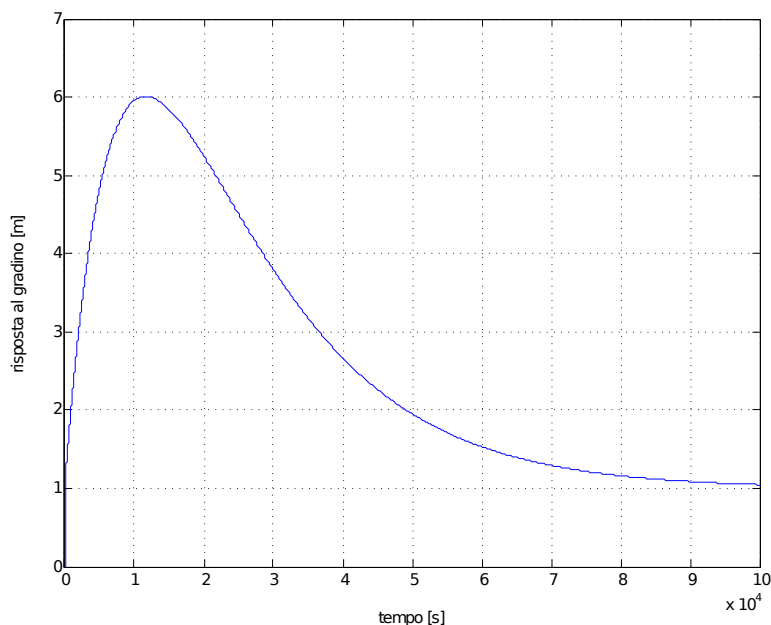


Figura 4.3: Risposta del sistema non lineare al gradino di modulo unitario

Dalla Figura 4.3 si nota che non solo per stabilizzarsi al valore unitario il sistema retroazionato impiega circa 27 ore, ma l'andamento della risposta al gradino presenta anche una sovraelongazione. Anche se è normale che la funzionalità del controllore peggiori una volta applicato al sistema non lineare, il comportamento che si osserva in questo caso è inaccettabile. Sembra infatti che il controllore, progettato ad hoc sul sistema linearizzato, perda del tutto la sua utilità quando si trova a lavorare sul sistema reale.

Si osserva che riducendo l'ampiezza del gradino d'ingresso la risposta migliora, per esempio in Figura 4.4 è riportata l'uscita del sistema avente come ingresso un gradino di ampiezza pari a 0.001 metri.

Per spiegare quanto accade bisogna innanzitutto ricordare che la linearizzazione è valida solo in un intorno del punto di equilibrio. Applicando in ingresso il gradino unitario lo scostamento dall'origine è di eccessiva entità ed il sistema linearizzato non risulta più una buona approssimazione della realtà. Per questo motivo il controllore, trovandosi ad agire su un sistema che si discosta troppo da quello per cui era stato creato, si trova a fallire il suo scopo. Invece utilizzando un gradino di ampiezza molto più ridotta lo scostamento dal punto di equilibrio è minore e

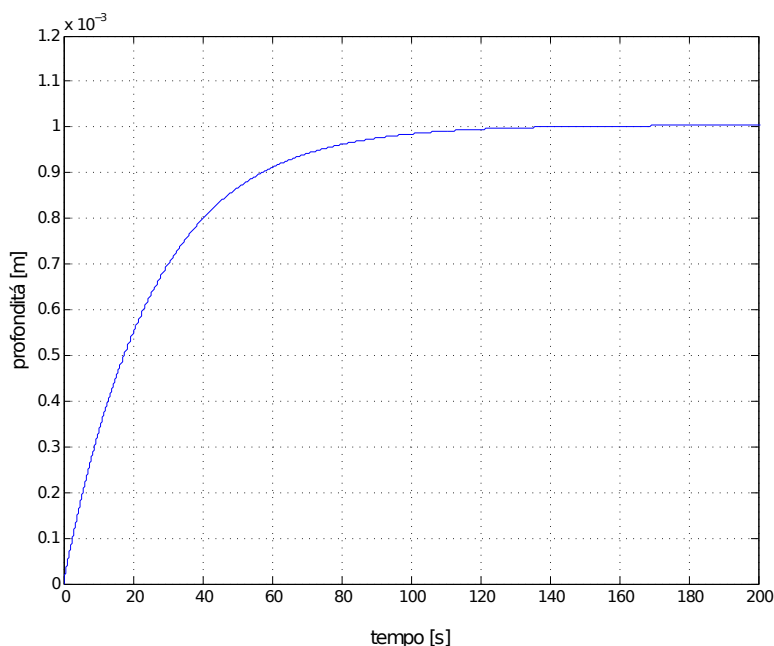


Figura 4.4: Risposta al gradino di ampiezza  $0.001m$

non si esce dall'intorno in cui la linearizzazione è una buona rappresentazione del sistema reale. Ecco perché in questo caso  $C(s)$  porta a termine il suo compito facendo in modo che la risposta al gradino si porti al valore nominale in poco tempo e senza sovraelongazioni.

Le considerazioni fatte inducono a pensare che il controllore progettato sia effettivamente corretto, ma che occorra trovare degli accorgimenti per farlo agire adeguatamente sul sistema non lineare. Il problema in realtà non risiede nella correttezza del controllore ma piuttosto nell'andamento del riferimento  $r(t)$ . Infatti prendendo in considerazione una funzione d'ingresso che si porta al valore 1 più dolcemente rispetto al gradino si vede un netto miglioramento delle prestazioni. Il riferimento  $r(t)$  che si è scelto di utilizzare è costituito da una rampa che parte dall'origine con una data pendenza e quando giunge al valore unitario, si assesta a tale valore. Una scrittura generica di tale andamento può essere per esempio:

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}t & \text{per } t \in [0, T] \\ 1 & \text{per } t \in ]T, \infty[ \end{cases} \quad \text{con } T \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \quad (4.3)$$

In Figura 4.5 viene riportato lo schema Simulink che si è usato per rappresentare tale funzione.



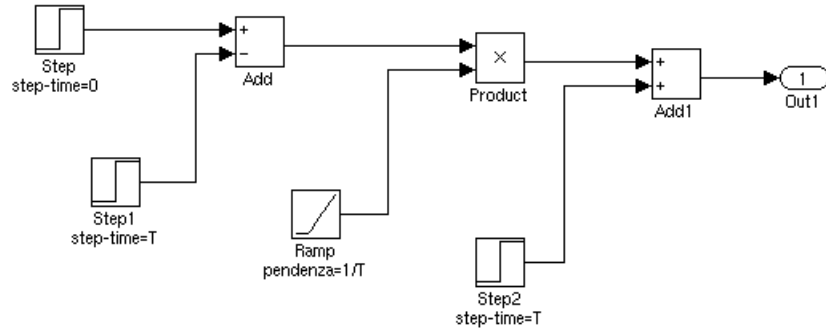


Figura 4.5: Schema a blocchi del segnale generico di ingresso

La rampa iniziale può essere vista come una successione di gradini di ampiezza infinitesima, in questo modo il riferimento cresce di una piccola quantità ad ogni passo e la linearizzazione non perde la sua validità, di conseguenza il controllore funziona correttamente. Bisogna però prestare attenzione alla pendenza che la funzione presenta prima di assestarsi al valore unitario, in quanto una pendenza troppo elevata si avvicinerebbe pericolosamente all'andamento della funzione gradino generando sovralongazioni, mentre una pendenza troppo piccola allungherebbe il tempo di salita. Cercando di trovare il giusto compromesso nel seguito si prenderanno in considerazione tre esempi di ingressi con pendenza diversa e si analizzeranno le uscite a loro corrispondenti.

In Figura 4.6 è riportato l'esempio di una rampa troppo lenta: una pendenza pari a  $0.01 \frac{m}{s}$  porta ad avere un tempo di salita superiore al minuto (tra i 100 e 150 secondi), che sale ulteriormente per pendenze minori.

In Figura 4.7 si ha in ingresso una funzione che si avvicina al gradino, infatti l'uscita presenta un andamento molto simile a quello della Figura 4.3. Ovviamente per pendenze superiori la situazione peggiora poiché la funzione d'ingresso approssima sempre di più la crescita brusca del gradino.

Infine in Figura 4.8 è presa in analisi la situazione di una rampa di pendenza  $10 \frac{m}{s}$ , che risulta essere la migliore tra le tre funzioni di ingresso considerate. Il tempo di salita è circa 57 secondi, molto vicino a quello che presentava la risposta al gradino del sistema linearizzato controllato, inoltre non vi sono sovralongazioni.

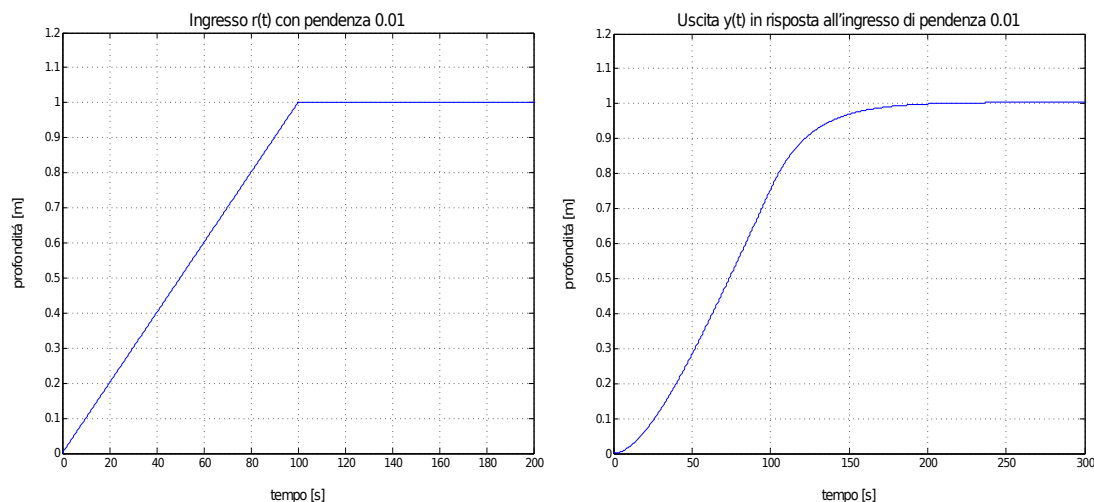


Figura 4.6: Funzione di ingresso con pendenza  $0.01 \frac{m}{s}$  e corrispondente uscita

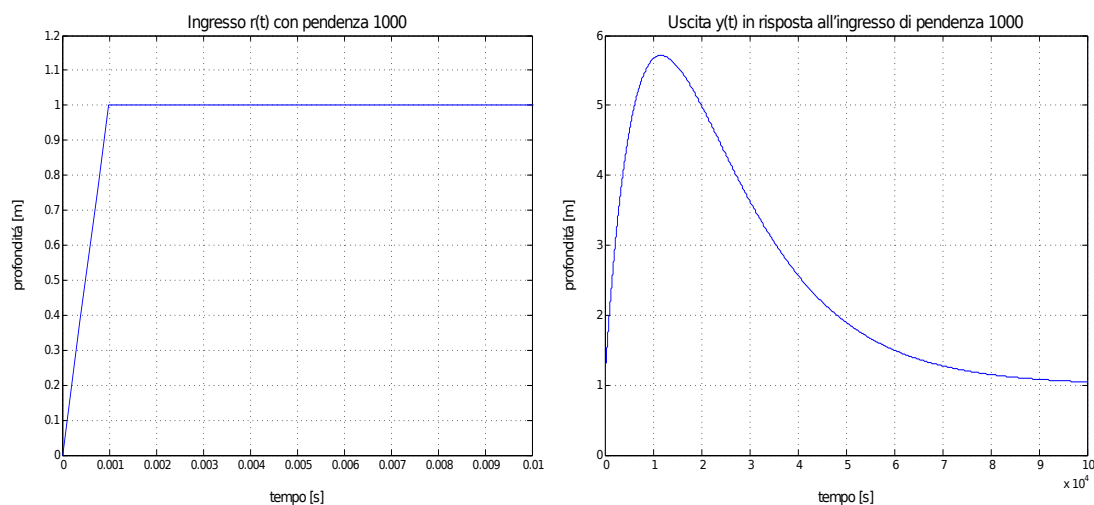


Figura 4.7: Funzione di ingresso con pendenza  $1000 \frac{m}{s}$  e corrispondente uscita

## 4.2 Analisi di spostamenti elevati

A questo punto, dopo aver analizzato a fondo il comportamento della risposta al gradino unitario nel Paragrafo 4.1, è interessante ed anche più realistico vedere cosa succede nel caso in cui il sommergibile si debba spostare di una distanza più elevata rispetto al singolo metro.

Vengono presi come esempi degli spostamenti di entità pari a  $100m$  ed  $1Km$  considerando per semplicità in entrambi i casi che il sommergibile parta da quota

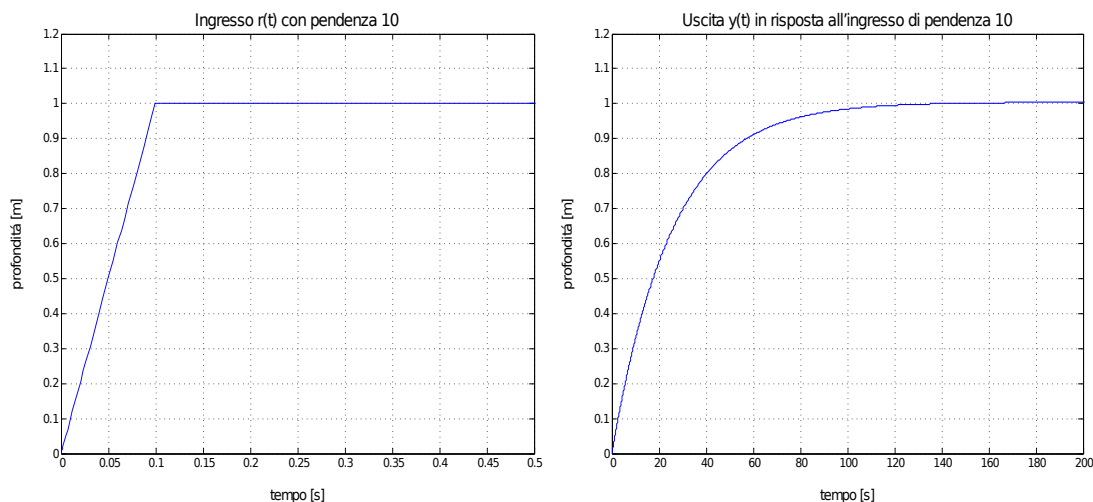


Figura 4.8: Funzione di ingresso con pendenza  $10 \frac{m}{s}$  e corrispondente uscita

zero con velocità nulla e quantità d'acqua contenuta nel serbatoio pari a  $\bar{m}$ . Il riferimento  $r(t)$  è sempre costituito da una rampa iniziale che però in questo caso non si assesta al valore  $1m$  bensì, a seconda del caso considerato, ai valori  $100m$  e  $1000m$ . Sorge il problema di ricercare per questi casi quali siano i valori più opportuni della rampa iniziale della funzione d'ingresso, in quanto non è detto che essi coincidano con quello trovato nel paragrafo precedente. L'analisi viene condotta con l'ausilio delle simulazioni Simulink ma senza ricercare rigorosamente la pendenza migliore facendo uso di metodi matematici.

In Figura 4.9 sono plottate nello stesso grafico le uscite del sistema corrispondenti a rampe di ingresso che si assestano tutte a 100 metri, ma con pendenze diverse. Le pendenze pari a  $1 \frac{m}{s}$  e  $1000 \frac{m}{s}$  corrispondono ai casi per i quali l'uscita è rispettivamente troppo lenta o presenta sovraelongazioni. Si osserva che, a differenza di quanto visto nel Paragrafo 4.1, una pendenza pari a  $10 \frac{m}{s}$  non corrisponde alla funzione d'uscita che sale più rapidamente. L'andamento migliore per  $y(t)$  si rivela invece essere quello associato all'ingresso che presenta coefficiente angolare iniziale pari a  $50 \frac{m}{s}$ , valore che nel caso della risposta al gradino unitario avrebbe comportato sicuramente sovraelongazione. Non stupisce che uno stesso valore di pendenza si riveli utile in un caso e disastroso in un altro. Partendo infatti da due rampe di pendenza pari a  $50 \frac{m}{s}$  di cui però una si ferma al valore  $1m$  e l'altra invece al valore  $100m$ , si ha che la prima approssima sicuramente meglio un gradino di ampiezza  $1m$  di quanto invece non faccia la seconda con un gradino

#### 4. CONTROLLO DEL SISTEMA NON LINEARE

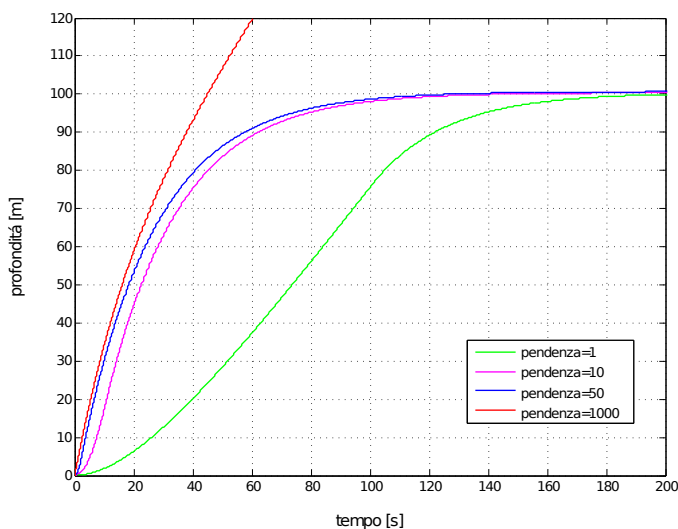


Figura 4.9: Uscite  $y(t)$  graficate per varie pendenze della rampa d'ingresso e profondità di arrivo pari a 100m

di ampiezza 100m. Per questa ragione è più probabile avere problemi di sovralongazione nel primo caso rispetto al secondo, nel quale invece una pendenza più ripida addirittura migliora il tempo di salita complessivo. A sostegno di quanto appena affermato si riportano i grafici degli andamenti delle due rampe aventi la stessa pendenza ma valori finali diversi in Figura 4.10.

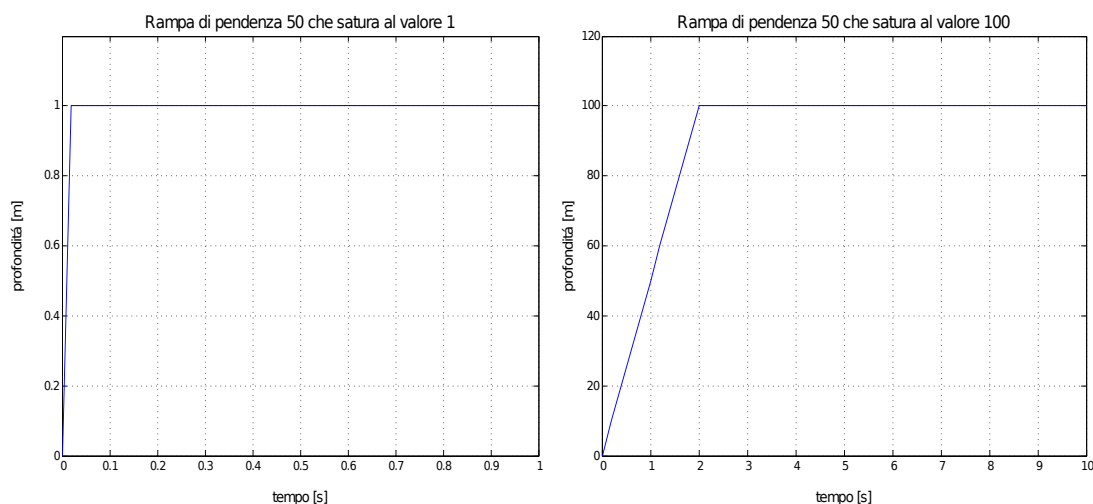


Figura 4.10: Rampe con pendenza  $50 \frac{m}{s}$  e valore finale rispettivamente 1m e 100m

In Figura 4.11 vengono riportati i grafici delle possibili uscite per le quali il som-

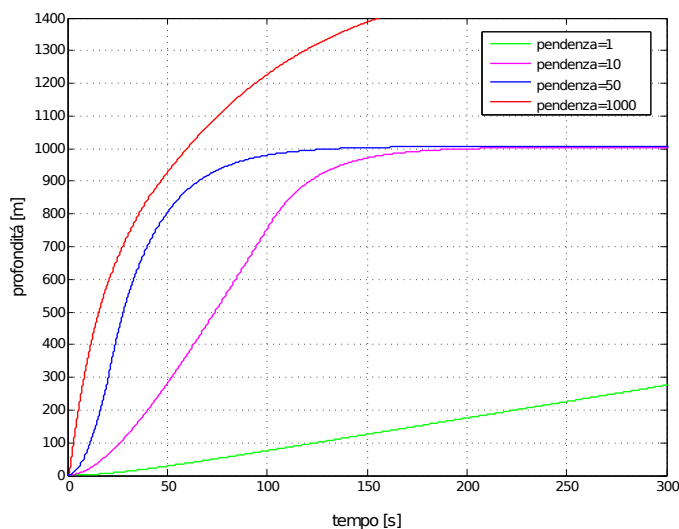


Figura 4.11: Uscite  $y(t)$  graficate per varie pendenze della rampa d'ingresso e profondità di arrivo pari a 1000m

mergibile si porta invece da 0 a 1000 metri di profondità. Si può notare che rispetto al caso precedente i valori di pendenze pari a  $1 \frac{m}{s}$  e  $1000 \frac{m}{s}$  rispettivamente peggiorano e migliorano le loro corrispondenti uscite. Infatti con una pendenza bassa della rampa, passando ad un valore finale maggiore la situazione non può far altro che peggiorare in quanto la rampa stessa impiega più tempo per raggiungere tale valore, mentre utilizzando una rampa di pendenza elevata ma allo stesso tempo prendendo in considerazione un valore finale maggiore essa approssima meno l'andamento brusco del gradino e si ha meno sovraelongazione. Dalle simulazioni anche in questo caso il valore di pendenza che assicura l'andamento migliore della funzione  $y(t)$  risulta essere pari a  $50 \frac{m}{s}$ .

#### 4. CONTROLLO DEL SISTEMA NON LINEARE

---

# Capitolo 5

## Conclusioni

È stato progettato un controllore che agisce sul sistema reale e con l'aiuto della retroazione porta il sommergibile alla profondità desiderata fornita dal riferimento  $r(t)$ . Inoltre il sistema permette di impostare i valori di velocità, profondità e massa contenuta nel serbatoio corrispondenti all'istante iniziale. Per fare in modo che la retroazione funzioni in modo opportuno sul sistema non lineare però la funzione  $r(t)$  deve assumere un andamento graduale, ovvero essa deve raggiungere dolcemente il valore di profondità desiderato. Nel caso specifico è stata usata una funzione costituita da una rampa che da un certo istante di tempo in poi assume valore costante, ma sarebbe interessante studiare l'effetto che producono altri andamenti della funzione di ingresso. Un ulteriore approfondimento potrebbe essere condotto con lo scopo di verificare con opportuni strumenti rigorosi la pendenza ottimale della rampa. Queste considerazioni però, sebbene meritino attenzione, non trovano spazio in questa tesi, il cui scopo principale è il progetto del controllore mentre la ricerca del caso migliore è stata condotta volutamente per tentativi sulla base delle simulazioni.





*Un ringraziamento sentito al professor Bisiacco che mi ha seguita in questo  
lavoro e si è dimostrato in ogni occasione disponibile e paziente.  
Grazie ai miei genitori che mi sopportano da sempre, la zia Wanda che mi  
capisce al volo, Anna che mi dà sempre un parere sincero.  
Un pensiero rivolto a Francesco, Isabella e Caterina.  
Grazie agli amici che riescono a starmi vicino anche se spesso non è facile.  
Grazie ad Andrea che nonostante la lontananza trova il modo di aiutarmi e  
volermi bene.*

## BIBLIOGRAFIA

---

# Bibliografia

- [1] M. Bisiacco, M. E. Valcher, *Controlli Automatici* , Libreria Progetto Editore, Padova, 2008.
- [2] A. Ferrante, A. Lepschy e U. Viaro, *Introduzione ai Controlli Automatici* , UTET, Torino, 2000.
- [3] S. Zampieri, *dispensa di Controlli Automatici* , Libreria Progetto Editore, Padova.
- [4] P.Mazzoldi, M. Nigro, C.Voci, *Fisica, Vol.1* , Edises, Seconda edizione, Napoli.