

**Università degli Studi di Padova**

---

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"

Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

**Equazione di Gross-Pitaevskii modificata:  
onde sonore e solitoni**

Laureando  
**Erica Scantamburlo**  
Matricola 1049765

Relatore  
**Prof. Luca Salasnich**

---

Anno Accademico 2015-2016



# Introduzione

La realizzazione in laboratorio del condensato di Bose-Einstein per gas diluiti fu una delle più importanti imprese del secolo scorso. Eppure, per poter verificare la validità della teoria di Bose-Einstein nata nella prima metà del '900, ci vollero circa 70 anni. Causa di questo ritardo fu, non soltanto l'incomprensione di tale teoria, che ha come massima espressione il fenomeno della *condensazione di Bose-Einstein*, ma soprattutto l'effettiva difficoltà nel verificare tali fenomeni. Infatti, per realizzare un condensato bisogna agire a temperature del nK. Capiamo pertanto che senza l'aiuto di tecniche sperimentali avanzate, risulta molto difficile capire il significato profondo che racchiude in sé il fenomeno della condensazione. Per questo motivo, dal 1995 in poi (anno in cui si riuscì a realizzare il primo condensato), lo studio di questo ramo della Fisica divenne fecondo: emerse in questi anni l'importanza dell'equazione di Gross-Pitaevskii, che si propone di descrivere tali condensati nel caso in cui questi siano diluiti. In questa tesi, ci occuperemo di “andare oltre” all'equazione di Gross-Pitaevskii (GPE) per poter descrivere un gas di Bose poco diluito: l'equazione che descrive quest'ultimo sistema prenderà il nome di *equazione di Gross-Pitaevskii modificata* (MGPE). Dopo la discussione di alcuni risultati circa la validità della MGPE, determineremo alcune caratteristiche fisico-matematiche che discendono da questa: in particolare analizzeremo il caso delle equazioni di Eulero e delle soluzioni solitoniche.



# Indice

<b>1</b>	<b>Equazione di Gross-Pitaevskii modificata</b>	<b>7</b>
1.1	Breve introduzione storica . . . . .	7
1.1.1	Condensati di Bose-Einstein . . . . .	7
1.1.2	Alcuni esperimenti . . . . .	10
1.1.3	Condensati di Bose-Einstein nei gas diluiti e cenni alla teoria dello scattering . . . . .	11
1.2	Derivazione dell'equazione di Gross-Pitaevskii modificata . . . . .	14
1.2.1	Derivazione dell'equazione di Gross-Pitaevskii . . . . .	14
1.2.2	Derivazione dell'equazione di Gross-Pitaevskii modificata . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Onde sonore e solitoni</b>	<b>21</b>
2.1	Onde sonore . . . . .	21
2.1.1	Equazioni dell'idrodinamica . . . . .	21
2.1.2	Eccitazioni elementari . . . . .	22
2.1.3	Lo spettro di Bogoliubov . . . . .	24
2.2	Solitoni . . . . .	26
2.2.1	Introduzione . . . . .	26
2.2.2	Riduzione dimensionale . . . . .	27
2.2.3	Solitoni neri . . . . .	32
2.2.4	Solitoni chiari . . . . .	34
2.2.5	Solitoni grigi . . . . .	35



# Capitolo 1

## Equazione di Gross-Pitaevskii modificata

In questo capitolo introdurremo l'equazione di Gross-Pitaevskii soffermandoci inizialmente sulla differenza che vi è tra sistemi classici e quantistici. In particolare enuncieremo i due assiomi cardinali della Meccanica Quantistica, senza i quali non è possibile comprendere la condensazione di Bose-Einstein e la teoria dello scattering. Proprio grazie a quest'ultima saremo in grado di determinare lo pseudo-potenziale che descrive l'interazione tra particelle di un sistema diluito. Tuttavia, sembra riduttivo accontentarsi di un risultato valido per sistemi diluiti: è normale voler “andare oltre” all'equazione di Gross-Pitaevskii. A tale scopo risponde l'equazione di Gross-Pitaevskii modificata. Nell'esposizione degli argomenti sopra scritti abbiamo scelto un criterio storico che ci permette fin da subito di chiarire quel che teoricamente può essere ritenuto valido (GPE) e quel che invece deve ancora essere verificato (MGPE). Questo fatto si ripercuote sulla profonda indeterminazione del potenziale di campo medio  $U_{mf}$  e pertanto sui parametri in gioco nella equazione di Gross-Pitaevskii modificata.

### 1.1 Breve introduzione storica

#### 1.1.1 Condensati di Bose-Einstein

##### La Meccanica Quantistica e i suoi assiomi

Ormai è noto che la Meccanica Classica concepisca le particelle come oggetti puntiformi univocamente individuate da funzioni  $f(q_t, p_t)$  delle coordinate generalizzate  $q_t$  e dai momenti coniugati  $p_t$  che soddisfano all'equazione differenziale del secondo ordine di Newton. In linea di principio, se si conoscono le condizioni iniziali  $(q_0, p_0)$  si conoscono pure i valori della posizione ed impulso  $(q_t, p_t)$  per  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . In altre parole, i sistemi fisici classici sono deterministici. Le cose, però, si complicarono all'inizio del 1900 quando si osservarono comportamenti duali corpuscolo-onda degli enti fisici<sup>1</sup>: il dualismo onda-corpuscolo mise in crisi la fisica classica, perchè vi è un'intrinseca contraddizione tra i con-

---

<sup>1</sup>Esperimenti importantissimi furono quello dell'effetto fotoelettrico (1900), effetto Compton (1924), Davisson e Germer (1927).

cetti classici di particella e di onda. In particolare, siccome gli oggetti di studio della Fisica Classica non possono essere per costruzione sia corpuscolo che onda, risulta necessario introdurre una nuova classe di oggetti di studio, detti appunto *oggetti quantistici*; per questi ultimi nasce l'esigenza di costruire una nuova fisica e matematica. Questa nuova scienza sarà privata del determinismo che caratterizzava la Meccanica Classica, poichè il principio di indeterminazione di Heisenberg non permette di misurare contemporaneamente posizione e momento con precisione maggiore di  $\frac{\hbar}{2}$ . Questo non significa che dobbiamo abbandonare l'idea di fare previsioni, ma che ci dobbiamo accontentare di previsioni probabilistiche.

Si crea, pertanto, la necessità di creare una nuova descrizione matematica che ci permetta di riprodurre le proprietà corpuscolari del sistema fisico in oggetto, di riprodurre le proprietà ondulatorie dello stesso e di incorporare il principio di indeterminazione. A questa esigenza risponde il seguente

**Assioma 1 (Primo della Meccanica Quantistica)** *Al tempo fissato  $t_0$ , lo stato di un sistema fisico è definito da  $|\Psi(t_0)\rangle$  appartenente allo spazio  $\mathcal{E}$ , sottospazio di Hilbert.*

Risulta essenziale ricorrere anche al

**Assioma 2 (Secondo della Meccanica Quantistica)** *Ogni quantità fisica misurabile è descritta da un operatore che agisce in  $\mathcal{E}$ ; questo operatore è un osservabile.*

In particolare, se tra l'istante  $t = 0$  e  $t > 0$  non si effettuano misure sul sistema, allora  $|\Psi(t)\rangle$  è determinata dalla equazione di Schroedinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \mathcal{H} |\Psi(t)\rangle, \quad (1.1)$$

in cui abbiamo introdotto l'operatore hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) = E \quad (1.2)$$

e promosso, per il secondo assioma della Meccanica Quantistica, le grandezze posizione e momento a operatori:

$$q \rightarrow \hat{q} = q \mathbb{I} \quad (1.3)$$

$$p \rightarrow \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \quad (1.4)$$

( $\mathbb{I}$  è l'operatore identità).

Notiamo che se poniamo  $\Psi(t) = \Phi(\hat{q}) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$  otteniamo l'equazione di Schroedinger stazionaria

$$\mathcal{H} |\Phi(\hat{q})\rangle = E |\Phi(\hat{q})\rangle. \quad (1.5)$$

Il tutto può essere generalizzato anche a sistemi di  $N$  particelle, a patto di concepire la funzione d'onda del sistema come una funzione fattorizzata nelle singole variabili delle particelle quantistiche, ossia

$$\Psi(q_1, \dots, q_N) = \prod_{i=1}^N \Psi(q_i). \quad (1.6)$$

### Particelle identiche e bosoni

Un sistema a  $N$  corpi di particelle identiche è caratterizzato da un operatore hamiltoniano  $\mathcal{H}$  invariante sotto lo scambio di tutte le coordinate di una qualunque coppia di particelle. Supponiamo che  $\mathcal{P}$  sia un operatore che scambia le posizioni, ossia

$$\mathcal{P}\Psi(q_1, \dots, q_N) = \Psi(q_N, \dots, q_1). \quad (1.7)$$

Supponiamo anche che  $\mathcal{P}\Psi(q_1, \dots, q_N)$  sia proporzionale a  $\Psi(q_1, \dots, q_N)$ : per costruzione si ha  $\mathcal{P}^2\Psi(q_1, \dots, q_N) = \Psi(q_1, \dots, q_N)$  e quindi la costante di proporzionalità  $\alpha$  assume i valori  $+1$  o  $-1$ . Quello che si trova è, dunque, che le particelle identiche in natura sono divise in due categorie: quelle per cui la funzione d'onda è simmetrica e quelle in cui è antisimmetrica. Alle particelle che soddisfano alla condizione di simmetria, daremo il nome di *bosoni*. Più precisamente, i bosoni rispondono alla statistica di Bose-Einstein, per la quale il numero medio di occupazione è

$$\langle n_{\vec{p}} \rangle = \frac{g_j}{z e^{\beta \varepsilon_j} - 1} \quad (1.8)$$

con  $g_j$  degenerazione dello stato  $j$ -esimo,  $\varepsilon_j$  energia dello stato  $j$ -esimo,  $z$  fugacità e  $\beta = \frac{1}{kT}$ .

La presenza al denominatore del segno negativo ha l'importante conseguenza che in un sistema libero di bosoni può avvenire una transizione di fase detta *condensazione di Bose-Einstein*.

### Condensato di Bose-Einstein

Un risultato fondamentale della formulazione della statistica di Bose-Einstein è la *condensazione di Bose-Einstein*, ossia quel fenomeno per cui una frazione finita di particelle popola lo stato fondamentale  $n_0$  di singola particella. Per capire questa affermazione seguiamo il procedimento esposto in [10] per un gas di Bose non interagente (detto anche gas di Bose ideale). Consideriamo le equazioni fondamentali per bosoni nel contesto grancanonico<sup>2</sup>:

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\Lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{1}{V} \ln(1 - z) \quad (1.9)$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{\Lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{1}{V} \frac{z}{1 - z}, \quad (1.10)$$

ove  $P$  indica la pressione,  $v$  il volume molare occupato dal gas,  $z$  la fugacità e

$$g_y = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^y} \quad y \in \mathbb{Q}, \quad (1.11)$$

e  $\Lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}}$  con  $h$  costante di Planck e  $T$  temperatura. Ricordiamo che per un sistema di bosoni deve valere  $z \in [0, 1)$ : è immediato verificare che per  $z = 1$

<sup>2</sup>In Meccanica Statistica un ensemble si dice grancanonico se il sistema scambia energia e particelle con un altro sistema (tipicamente un serbatoio) con cui è in equilibrio termodinamico.

la serie  $g_y$  converge, ma non la derivata  $\frac{dg_y}{dz}$ . Consideriamo la grandezza

$$\frac{\Lambda^3}{v} = g_{3/2}(z) + \frac{\Lambda^3}{V} \left( \frac{z}{1-z} \right) \quad (1.12)$$

la quale implica che  $\frac{\langle n_0 \rangle}{V} > 0$  quando la temperatura e il volume specifico sono tali da soddisfare la relazione

$$\frac{\Lambda^3}{v} > g_{3/2}(1). \quad (1.13)$$

Questo risultato ha il seguente significato: una frazione finita di particelle occupa il livello  $\vec{p} = 0$ , ossia del ground state o stato fondamentale. Risulta utile definire il volume critico e la temperatura critica, rispettivamente

$$v_c = \frac{\Lambda^3}{g_{3/2}(1)}, \quad T_c = \frac{1}{k} \frac{2\pi \frac{\hbar^2}{m}}{[vg_{3/2}(1)]^{3/2}}. \quad (1.14)$$

La regione di condensazione è la regione in cui  $T < T_c$  o  $v < v_c$ . Si può facilmente trovare la relazione

$$\frac{\langle n_0 \rangle}{\langle N \rangle} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2}, \quad (1.15)$$

dalla quale è immediato notare che la condensazione diventa completa quando  $T = 0$ .

### 1.1.2 Alcuni esperimenti

La previsione teorica della condensazione di Bose-Einstein avvenne nel 1925: solo nel 1995 Cornell e Wieman<sup>3</sup> riuscirono ad ottenere in laboratorio un condensato di gas di  $^{87}\text{Rb}$  alla temperatura di circa 20 miliardesimi di Kelvin<sup>4</sup>. Per raggiungere tale temperatura il gas in esame fu messo in una trappola magnetica in modo che la configurazione del gradiente del campo magnetico si accoppiasse con il momento magnetico degli atomi del gas in maniera tale da localizzare il sistema. Così il gas in questione fu portato ad una temperatura dell'ordine di  $10^{-5}$  K (valore ancora troppo alto per avere condensazione); questa temperatura fu abbassata grazie all'utilizzo della tecnica del raffreddamento laser<sup>5</sup>. Per ridurre ulteriormente la temperatura fu applicato il *principio dell'evaporative cooling*: abbassando la barriera di potenziale della trappola, una frazione di atomi (in genere quelli con maggiore energia), fuggono dalla trappola. Gli atomi restanti hanno minore energia cinetica e quindi minore temperatura. Sotto riportiamo i grafici delle distribuzioni delle velocità del condensato di Bose-Einstein esaminato da Cornell e Wieman al Colorado University per tre valori della temperatura. Il picco che si presenta segna l'inizio della condensa-

<sup>3</sup>Premio Nobel 2001.

<sup>4</sup>Per approfondimenti vedi [12].

<sup>5</sup>Il *laser cooling* è una tecnica sperimentale in cui si fa incidere della luce monocromatica su atomi in modo che questi trasmettono più energia cinetica ai fotoni rispetto a quella che assorbono.

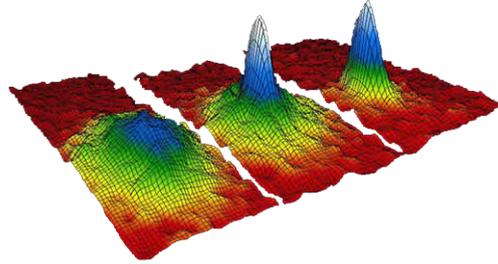


Figura 1.1: Distribuzione delle velocità di una nube atomica alle temperature (a partire da sinistra) di 400 nK, 200 nK e 50 nK.

zione: infatti nell'immagine di sinistra siamo ad una temperatura  $T > T_c$ , nelle restanti immagini a  $T < T_c$ .

Lo studio dei condensati di Bose-Einstein diventò fecondo verso la fine degli anni '90: nel 1998 MIT riprodusse un condensato di idrogeno, nel 1999 Jila con  $^{40}\text{K}$  e nel 2003 con  $^7\text{Li}$ . Attualmente più di ottanta gruppi di ricerca ha ottenuto in laboratorio dei condensati di Bose-Einstein con atomi alcalini<sup>6</sup>.

### 1.1.3 Condensati di Bose-Einstein nei gas diluiti e cenni alla teoria dello scattering

Abbiamo visto che a livello sperimentale risulta più facile trattare gas diluiti costituiti da atomi che esercitano tra di loro una debole interazione. Questa facilità viene mantenuta anche a livello teorico. Infatti i sistemi di gas diluiti sono caratterizzati da

$$\rho a_s \ll 1,$$

in cui  $\rho$  indica la densità del gas in esame, e  $a_s$  la lunghezza di scattering: in particolare se  $a_s > 0$  si ha interazione repulsiva, se  $a_s < 0$  si ha interazione attrattiva. Mostriamo a titolo di esempio alcuni stime di tale parametro per differenti atomi bosonici:

Atomo	$a_s(\text{Å})$
$^{87}\text{Rb}$	50
$^{23}\text{Na}$	30
$^7\text{Li}$	-14
$^1\text{H}$	0,65

Nel caso di suddetti sistemi, la sezione d'urto  $\sigma(k)$ , funzione del momento incidente  $k$ , soddisfa alla condizione

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma(k) = 4\pi a_s^2. \quad (1.16)$$

Per capire questo risultato bisogna rifarsi alla teoria dello scattering ([17]) che in questa sede accenneremo: forniremo alcuni risultati utili e importanti senza soffermarci sulle dimostrazioni.

<sup>6</sup>I metalli alcalini costituiscono il primo gruppo della tavola periodica e si trovano nel blocco  $s$ .

La teoria della scattering si propone di studiare la deflessione di onde o particelle causata da collisioni con altre particelle o onde. In questo studio si fanno le seguenti semplificazioni:

- Le particelle non hanno spin;
- La struttura interna delle particelle non viene considerata;
- L'interazione tra le particelle è descritta da un potenziale  $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = V(\vec{r})$  che dipende solo dalla posizione relativa delle particelle.

Se vogliamo descrivere in termini quantistici lo scattering di una data particella soggetta al potenziale  $V(\vec{r})$ , è necessario studiare l'evoluzione temporale del pacchetto d'onde che rappresenta lo stato della particella. Supponiamo di conoscere questo pacchetto d'onde per valori grandi e negativi di  $t$ , ossia quando la particella incidente è libera: questo pacchetto d'onde è rappresentato da onde piane e dunque la funzione d'onda dovrà contenere un termine del tipo  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{z}}$ , con  $\vec{k}$  vettore d'onda associata a tale particella. Quando, invece, il pacchetto d'onde è sotto l'influenza del potenziale  $V(\vec{r})$ , la sua struttura cambia e si complica. Per valori grandi e positivi di  $t$ , il pacchetto d'onde ritorna ad avere una forma semplice. Di conseguenza, la funzione d'onda  $v_k^{(diff)}(\vec{r})$  che rappresenta lo stato di scattering stazionario associato ad un'energia  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$  con  $\mu$  massa ridotta del sistema, può essere ottenuta dalla sovrapposizione di onde piane e da un'onda diffusa. La struttura dell'onda diffusa dipende ovviamente da  $V(\vec{r})$ . L'onda diffusa deve presentare le seguenti caratteristiche per valori di  $\vec{r}$  grandi:

- In una data direzione  $(\theta, \phi)$ , la sua dipendenza radiale è del tipo

$$\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r}; \quad (1.17)$$

- L'ampiezza dell'onda uscente dipende dalla direzione, in quanto la diffusione non è in genere isotropica;
- La funzione d'onda  $v_k^{(diff)}(\vec{r})$  associata allo stato di scattering stazionario ha un comportamento asintotico della forma

$$v_k^{(diff)}(\vec{r}) \sim_{r \rightarrow \infty} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f(\vec{k}, \vec{k}') \frac{e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}}}{r}. \quad (1.18)$$

In questa espressione solo la funzione  $f(\vec{k}, \vec{k}')$  dipende dal potenziale  $V(\vec{r})$ : essa è chiamata *ampiezza di scattering*. Nel caso in cui  $k = |\vec{k}| = |\vec{k}'|$  si parla di scattering elastico.

In particolare, un risultato importante della teoria dello scattering è il seguente:

$$\begin{cases} f(\vec{k}, \vec{k}') &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(k) P_l(\cos \theta) \\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \end{cases} \quad (1.19)$$

con  $P_l(\cos \theta)$  polinomi di Legendre,  $j_l(kr)$  funzioni di Bessel e  $f_l(k)$  sono le onde parziali dell'ampiezza di scattering  $f(\vec{k}, \vec{k}')$ . Lo *sfasamento*  $\delta_l(k)$  è definito a partire da  $f_l(k)$  come

$$f_l(k) = \frac{1}{k \cot(\delta_l(k)) - ik}, \quad (1.20)$$

mentre la *lunghezza di scattering*  $(a_s)_l$  dell'onda  $l$  ed la *distanza effettiva*  $r_e$  sono definiti a partire da

$$k \cot(\delta_l(k)) = -\frac{1}{(a_s)_l} + \frac{1}{2}r_e k^2 + \mathcal{O}(k^4). \quad (1.21)$$

In aggiunta, si richiede che l'ampiezza di scattering sia tale da soddisfare

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = \langle \vec{k}' | \mathcal{T} | \vec{k} \rangle, \quad (1.22)$$

con  $\mathcal{T}$  matrice che soddisfa all'equazione di Lippmann-Schwinger

$$\mathcal{T} = \mathcal{V} + \mathcal{V} \frac{1}{E - \mathcal{H}_0} \mathcal{T}, \quad (1.23)$$

ove  $\mathcal{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2$ ,  $\mathcal{V} = V(\vec{r})$  e  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{m}$ .

Nell'approssimazione di Born, in cui si considera solo il campo incidente, anzichè quello totale, si ha  $\mathcal{T} \approx \mathcal{V}$ .

Notando che per piccoli valori di  $k$  possiamo scrivere

$$f_l(k) = \frac{1}{-\frac{1}{(a_s)_l} + \frac{1}{2}r_e k^2 + \mathcal{O}(k^4) - ik} \sim \quad (1.24)$$

$$- (a_s)_l + i(a_s)_l^2 k + \left( (a_s)_l^3 - \frac{1}{2}(a_s)_l^2 r_e \right) k^2, \quad (1.25)$$

possiamo fermarci al primo termine e assumere che

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = f_0(k) = -\frac{m}{4\pi\hbar^2} T_0(k), \quad (1.26)$$

ove  $T_0(k) = \tilde{V}(k)$  con  $\tilde{V}(k)$  trasformata di Fourier di  $V(\vec{r})$ .

In particolare la sezione d'urto è definita come

$$\sigma(k) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2(\delta_l(k)) \quad (1.27)$$

che nel limite in cui  $k \rightarrow 0$  diventa  $4\pi a_s^2$ , che era quello che avevamo già annunciato.

Sappiamo che deve essere

$$\mathcal{T}_0 = \frac{1}{\frac{1}{\tilde{V}(k)} + ik \left( \frac{m}{4\pi\hbar^2} \right)}. \quad (1.28)$$

A questo punto, supponiamo che  $\tilde{V}(k) = g_0$ : sostituendo tale espressione nella relazione precedente e ricordandosi della forma di  $f_0(k)$  si ottiene

$$g_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s. \quad (1.29)$$

Alla luce di questi risultati, non è così strano pensare che l'interazione tra particelle sia descritta dallo pseudo-potenziale

$$V(\vec{r}) = g_0 \delta(\vec{r}) \quad (1.30)$$

detto *pseudo-potenziale di Fermi*.

## 1.2 Derivazione dell'equazione di Gross-Pitaevskii modificata

### 1.2.1 Derivazione dell'equazione di Gross-Pitaevskii

Alla luce di questi risultati, siamo pronti a dedurre l'equazione di Gross-Pitaevskii: essa descrive un gas di Bose diluito composto da atomi debolmente interagenti. Per farlo seguiremo il procedimento esposto in [1].

L'hamiltoniana di un sistema di  $N$  particelle ha la forma

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \hat{h}(\vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N V(\vec{r}_i, \vec{r}_j), \quad (1.31)$$

ove

$$\hat{h}(\vec{r}_i) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + U(\vec{r}_i) \right) \quad (1.32)$$

Usiamo l'approssimazione di Hartree per i bosoni:

$$\Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \prod_{i=1}^N \phi(\vec{r}_i) \quad (1.33)$$

con  $\phi(\vec{r})$  funzione d'onda di singola particella incognita: tale funzione è determinata minimizzando la quantità  $\langle \Psi | \mathcal{H} | \Psi \rangle^7$  che risulta valere

$$\langle \Psi | \mathcal{H} | \Psi \rangle = \int d^3 \vec{r}_1 \dots d^3 \vec{r}_N \Psi^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \mathcal{H} \Psi(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} &= N \int d^3 \vec{r} \phi^*(\vec{r}) \hat{h}(\vec{r}) \phi(\vec{r}) \\ &\quad + \frac{1}{2} N(N-1) \int d^3 \vec{r} d^3 \vec{r}' V(\vec{r}, \vec{r}') |\phi(\vec{r})|^2 |\phi(\vec{r}')|^2 \end{aligned} \quad (1.35)$$

Minimizziamo questo funzionale con il vincolo di normalizzazione valido per singola particella

$$\int d^3 \vec{r} |\phi(\vec{r})|^2 = 1 : \quad (1.36)$$

usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange otteniamo il funzionale

$$X[\phi, \phi^*] = N \left( \int d^3 \vec{r} \phi^*(\vec{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi(\vec{r}) \right] + \phi^*(\vec{r}) U(\vec{r}) \phi(\vec{r}) + \right. \quad (1.37)$$

$$\left. \frac{1}{2} (N-1) \int d^3 \vec{r}' \phi^*(\vec{r}') \phi(\vec{r}') \phi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) V(\vec{r}, \vec{r}') - \mu \phi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) \right). \quad (1.38)$$

<sup>7</sup>Questa procedura è suggerita dal *principio variazionale*: per ogni stato normalizzato di un sistema a molti corpi descritto dalla hamiltoniana  $\mathcal{H}$  si ha

$$\langle \Psi | \mathcal{H} | \Psi \rangle \geq \mathcal{E}_{gs},$$

con  $\mathcal{E}_{gs}$  l'energia del ground state. Si ha l'uguaglianza se si inserisce nella relazione precedente lo stato di ground state del sistema  $\Psi_{gs}$ .

## 1.2. DERIVAZIONE DELL'EQUAZIONE DI GROSS-PITAEVSKII MODIFICATA 15

con  $\mu$  moltiplicatore di Lagrange.  
Questo funzionale appare nella forma

$$X[\rho] = \int x(\vec{r}, \rho, \nabla\rho, \nabla^2\rho, \dots) d^3\vec{r} \quad (1.39)$$

la cui derivata funzionale è

$$\frac{\delta X[\rho]}{\delta\rho} = \frac{\partial x}{\partial\rho} - \nabla \cdot \frac{\partial x}{\partial(\nabla\rho)} + \nabla^2 \frac{\partial x}{\partial(\nabla^2\rho)}. \quad (1.40)$$

Se minimizziamo questo funzionale rispetto all'incognita  $\phi^*(\vec{r})$  otteniamo

$$\frac{\delta X}{\delta(\phi^*)} = N \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi(\vec{r}) + U(\vec{r})\phi(\vec{r}) + \int d^3\vec{r}' (N-1) |\phi(\vec{r}')|^2 V(\vec{r}, \vec{r}') - \mu\phi(\vec{r}) \right] \quad (1.41)$$

e dunque la relazione

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + (N-1) \int |\phi(\vec{r}')|^2 V(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' \right] \phi(\vec{r}) = \mu\phi(\vec{r}) \quad (1.42)$$

Questa relazione è conosciuta come *equazione di Hartree per bosoni*.  
Nel caso in cui il potenziale di contatto inter-atomico abbia la forma

$$V(\vec{r}, \vec{r}') = g_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.43)$$

la relazione precedente diventa (ponendo la ragionevole approssimazione  $N-1 \sim N$ )

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U + Ng_0 |\phi(\vec{r})|^2 \right] \phi(\vec{r}) = \mu\phi(\vec{r}). \quad (1.44)$$

Quest'ultima espressione è conosciuta con il nome di *equazione di Gross-Pitaevskii stazionaria*. Questa equazione descrive molto bene i condensati di Bose diluiti, per i quali il vero potenziale di interazione può essere approssimato al potenziale di contatto. La costante  $g_0$  ha il significato espresso dalla (1.29).

Poniamo ora l'attenzione sul moltiplicatore di Lagrange  $\mu$ : esso individua il potenziale chimico del sistema descritto dall'equazione. Infatti, consideriamo l'energia di  $N$  bosoni interagenti con pseudo potenziale di Fermi:

$$E = N \int d^3\vec{r} \left\{ \phi^*(\vec{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \phi(\vec{r}) + \frac{1}{2} Ng |\phi(\vec{r})|^4 \right\}. \quad (1.45)$$

La definizione di potenziale chimico porge  $\mu = \frac{\partial E}{\partial N}$  e dunque

$$\mu = \int d^3\vec{r} \left\{ \phi^*(\vec{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \phi(\vec{r}) + Ng |\phi(\vec{r})|^4 \right\}. \quad (1.46)$$

Se noi moltiplichiamo l'equazione di Gross-Pitaevskii per  $\phi^*(\vec{r})$  e integriamo nella variabile  $\vec{r}$  otteniamo la medesima espressione del moltiplicatore di Lagrange: questo perchè vale la condizione di normalizzazione (1.36).

Non è difficile, ma omettiamo i calcoli, provare che *l'equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo* ha la seguente forma

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r}) + Ng_0 |\phi(\vec{r}, t)|^2 \right] \phi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t). \quad (1.47)$$

Facciamo un'ulteriore precisazione sulla condizione di normalizzazione: sembra infatti normale usare la (1.36), ma per un sistema a molti corpi risulta altrettanto normale usare la seguente condizione di normalizzazione

$$\psi(\vec{r}) = \sqrt{N} \phi(\vec{r}) \implies \int d\vec{r} |\psi(\vec{r})|^2 = N \quad (1.48)$$

per cui la densità delle particelle è data dalla

$$n(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})|^2 \quad (1.49)$$

in questa maniera le due espressioni (1.44) e (1.47) possono essere scritte come

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r}) + g_0 |\psi(\vec{r})|^2 \right] \psi(\vec{r}) = \mu\psi(\vec{r}). \quad (1.50)$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r}) + g_0 |\psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t). \quad (1.51)$$

In questa tesi useremo maggiormente le espressioni (1.50) e (1.51).

### 1.2.2 Derivazione dell'equazione di Gross-Pitaevskii modificata

L'equazione di Gross-Pitaevskii modificata nasce dal desiderio di trovare un'equazione che descriva gas di bosoni non diluiti composta da atomi interagenti. Vedremo che questa nuova equazione avrà la forma

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r}) + g_0 |\psi(\vec{r})|^2 - g_2 \nabla^2 |\psi(\vec{r})|^2 \right] \psi(\vec{r}) = \mu\psi(\vec{r}) \quad (1.52)$$

Mentre la comunità scientifica è convinta sul valore di  $g_0$ , pari al valore trovato dalla (1.29), essa mostra una sostanziale indecisione nella definizione di  $g_2$ ; infatti, in letteratura vi sono tre risultati differenti:

(i)

$$g_2 = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s^2 \left( a_s - \frac{1}{2} r_e \right) \quad (\text{Fu, Wang, Gao}) \quad (1.53)$$

la cui esposizione è mostrata nell'articolo [4];

(ii)

$$g_2 = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s^2 \left( \frac{a_s}{3} - \frac{r_e}{2} \right) \quad (\text{Collin, Massignan, Pethick}) \quad (1.54)$$

la cui esposizione è mostrata nell'articolo [6];

(iii)

$$g_2 = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s^2 \left( \frac{r_e}{2} \right) \quad (\text{HY}). \quad (1.55)$$

Soffermiamoci maggiormente sui risultati discussi nell'articolo [4].

**La costante  $g_2$  secondo Fu, Wang e Gao**

Consideriamo la relazione

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r}) + (N-1) \int d^3\vec{r}' V(\vec{r}-\vec{r}') |\phi(\vec{r}')|^2 \right] \phi(\vec{r}) = \mu\phi(\vec{r}) \quad (1.56)$$

Per semplicità possiamo definire il potenziale di campo medio

$$U_{mf}(\vec{r}) = (N-1) \int d^3\vec{r}' V(\vec{r}-\vec{r}') |\phi(\vec{r}')|^2. \quad (1.57)$$

La presenza del termine  $V(\vec{r}-\vec{r}') |\phi(\vec{r}')|^2$  ci suggerisce di sfruttare l'operazione di trasformata di Fourier, dunque il teorema della convoluzione<sup>8</sup> e infine di antitrasformare. Procedendo in tal senso otteniamo

$$\mathcal{F}[U_{mf}(\vec{r})](\vec{q}) = (N-1)\mathcal{F}[V(\vec{r})](\vec{q}) \cdot \mathcal{F}[|\phi(\vec{r})|^2](\vec{q}). \quad (1.58)$$

Nell'ipotesi in cui il potenziale  $V(\vec{q})$  ha simmetria pari e nelle circostanze in cui il vettore d'onda  $\vec{q}$  si possa considerare tendente a zero possiamo scrivere lo sviluppo di McLaurin

$$\mathcal{F}[V(\vec{r})](\vec{q}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathcal{F}[V(\vec{r})]^{(2j)}(0)}{(2j)!} q^{2j}. \quad (1.59)$$

Definiamo i coefficienti della sommatoria

$$\iota_{2j} = \frac{\mathcal{F}[V(\vec{r})]^{(2j)}(0)}{(2j)!}. \quad (1.60)$$

Possiamo ora antitrasformare: ricordandoci della proprietà secondo cui  $q \rightarrow -i\nabla$ , la (1.57) può essere scritta come

$$U_{mf}(\vec{r}) = (N-1) \sum_{j=0}^{\infty} \iota_{2j} \nabla^{2j} |\phi(\vec{r})|^2. \quad (1.61)$$

Se ci fermiamo ai primi due termini dello sviluppo otteniamo

$$U_{mf}(\vec{r}) = (N-1) \left\{ \iota_0 - \iota_2 \nabla^2 |\phi(\vec{r})|^2 \right\}. \quad (1.62)$$

Siamo interessati ora a determinare i coefficienti  $\iota_{2j}$ : per questo sfruttiamo la teoria dello scattering.

Usando l'approssimazione di Born

$$f(\vec{q}) = -\frac{m}{4\pi\hbar^2} \int d^3\vec{r}' e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'} V(\vec{r}') = -\frac{m}{4\pi\hbar^2} \mathcal{F}[V(\vec{r})](\vec{q}) \quad (1.63)$$

ossia

$$f(\vec{q}) = -\frac{m}{4\pi\hbar^2} \left\{ \iota_0 - \iota_2 q^2 + \dots \right\}. \quad (1.64)$$

Possiamo tuttavia scrivere

$$f(\vec{q}) = \frac{1}{q} \frac{1}{\cot \delta(\vec{q})} = -\frac{1}{a_s} + \frac{r_e}{2} q^2 \approx -a_s + \left( a_s^3 - a_s^2 \frac{r_e}{2} \right) q^2 + \dots \quad (1.65)$$

---

<sup>8</sup> $\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\}$ .

Eguagliando le due espressioni troviamo che i coefficienti dello sviluppo (1.65) valgono

$$\iota_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s \quad \iota_2 = -\frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s^3 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_e}{a_s}\right). \quad (1.66)$$

A questo punto, solo per semplicità di lettura, possiamo definire i due nuovi valori

$$g_0 = \iota_0 \quad g_2 = \iota_2 \quad (1.67)$$

di modo che risulti (ponendo la ragionevole approssimazione  $N - 1 \sim N$ )

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + N g_0 |\psi(\vec{r})|^2 - N g_2 \nabla^2 |\phi(\vec{r})|^2 \right] \phi(\vec{r}) = \mu \phi(\vec{r}) \quad (1.68)$$

che è proprio la (1.52).

Non ci soffermiamo sugli altri due risultati, ma quel che ci basta sapere che il valore di  $g_2$  appena trovato ha dei limiti, in quanto il metodo usato per trovarlo fa uso dell'approssimazione di Born. Per fortuna, questa ambiguità nel valore di  $g_2$  non si ripercuote nel lavoro di questa tesi: quando dovremmo esplicitare il valore di tale costante scriveremo

$$g_2 = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_s^2 \left( \frac{1}{2} r_e - \chi a_s \right) \quad \text{ove } \chi = \begin{cases} 1 & \text{(Gao)} \\ \frac{1}{3} & \text{(Pethick)} \\ 0 & \text{(HY)} \end{cases} \quad (1.69)$$

Concludiamo questo capitolo, chiarendo che una definizione generale di  $g_2$  esiste: seguendo il procedimento spiegato nell'articolo [13], possiamo scrivere il potenziale di campo medio (1.57) come

$$U_{mf}(\vec{r}) = \int d^3 \vec{r}' |\psi(\vec{r}')|^2 V(|\vec{r} - \vec{r}'|). \quad (1.70)$$

Supponendo che le particelle siano poco distanti, possiamo sostituire  $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{s}$  con  $\vec{s} \ll \vec{r}$ ,  $\vec{r}'$  nella precedente equazione: facendo ciò otteniamo

$$U_{mf}(\vec{r}) = \int d^3 \vec{s} |\psi(\vec{r} + \vec{s})|^2 V(|\vec{s}|). \quad (1.71)$$

Sviluppando in potenze di  $\vec{s}$  ricaviamo

$$U_{mf}(\vec{r}) = \int d^3 \vec{s} V(|\vec{s}|) \left\{ |\psi(\vec{r})|^2 + \nabla |\psi(\vec{r})|^2 \cdot \vec{s} + \frac{1}{2} \nabla^2 |\psi(\vec{r})|^2 \cdot \vec{s}^2 \right\}. \quad (1.72)$$

Supponendo che la funzione d'onda sia pari, possiamo ricavare l'espressione

$$U_{mf}(\vec{r}) = \int d^3 \vec{s} V(|\vec{s}|) \left\{ |\psi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2} \nabla^2 |\psi(\vec{r})|^2 \cdot \vec{s}^2 \right\} \quad (1.73)$$

$$= |\psi(\vec{r})|^2 \cdot \left( \int d^3 \vec{s} V(|\vec{s}|) \right) + \frac{1}{2} \nabla^2 (|\psi(\vec{r})|^2) \cdot \left( \int d^3 \vec{s} \vec{s}^2 V(|\vec{s}|) \right). \quad (1.74)$$

## 1.2. DERIVAZIONE DELL'EQUAZIONE DI GROSS-PITAEVSKII MODIFICATA 19

Se rinominiamo gli integrali

$$g_0 = \int d^3 \vec{s} V(|\vec{s}|), \quad g_2 = - \int d^3 \vec{s} V(|\vec{s}|) s^2 \quad (1.75)$$

otteniamo la relazione

$$U_{mf}(\vec{r}) = g_0 |\psi(\vec{r})|^2 - \frac{1}{2} g_2 \nabla^2 |\psi(\vec{r})|^2 . \quad (1.76)$$

Le (1.75) sono le definizioni più generali di  $g_0$  e  $g_2$ .

Questo stesso risultato è stato raggiunto, seppure con ipotesi diverse che riguardano la natura isotropica delle interazioni, da Malomed, Garcia-Ripoll, Konotop, Perez-Garcia in [7].



## Capitolo 2

# Onde sonore e solitoni

In questo capitolo entreremo finalmente nel cuore della tesi. Infatti, l'equazione di Gross-Pitaevskii modificata dipendente dal tempo fornisce importanti informazioni riguardo la dinamica di un condensato di Bose-Einstein alla temperatura dello zero assoluto. Lo scopo di questa tesi è quello di focalizzarsi su alcuni fenomeni non lineari che emergono dall'equazione di Gross-Pitaevskii modificata, quali i solitoni.

Nella prima sezione vedremo che l'equazione di Gross-Pitaevskii soddisfa le equazioni fondamentali della idrodinamica e ricaveremo la velocità del suono nel condensato attraverso lo studio delle eccitazioni elementari.

Nella seconda sezione, invece, ci occuperemo di studiare i solitoni neri, chiari e grigi. Per fare ciò useremo una riduzione dimensionale che ci permetterà di scrivere l'equazione di Gross-Pitaevskii modificata unidimensionale, le cui costanti saranno adimensionali. Tutto questo semplificherà il calcolo delle soluzioni che vedremo essere solitoni. In particolare, evidenzieremo come al variare dei parametri adimensionali  $\tilde{g}_0^{(1D)}$  e  $\tilde{g}_2^{(1D)}$  si hanno soluzioni solitoniche differenti.

### 2.1 Onde sonore

#### 2.1.1 Equazioni dell'idrodinamica

Vediamo ora come si ottengono naturalmente le equazioni fondamentali della fluidodinamica dall'equazione

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + g_0 |\psi(\vec{r}, t)|^2 - g_2 \nabla^2 |\psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t). \quad (2.1)$$

Imponiamo che la funzione d'onda abbia la forma

$$\psi = \sqrt{n(\vec{r}, t)} e^{iS(\vec{r}, t)} \quad (2.2)$$

in cui  $n(\vec{r}, t)$  descrive la densità e  $S(\vec{r}, t)$  la fase del condensato: tale grandezza è legata alla velocità del condensato tramite la relazione

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla S(\vec{r}, t). \quad (2.3)$$

D'ora in poi per semplicità di scrittura non scriveremo la dipendenza esplicita da  $\vec{r}$  e  $t$ . Calcoliamo ora i singoli termini della (2.1):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\psi &= \frac{\partial}{\partial t}[\sqrt{n}e^{iS}] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)\frac{\psi}{n} + i\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)\psi.\end{aligned}\quad (2.4)$$

$$\nabla^2\psi = (\nabla^2\sqrt{n})\frac{\psi}{\sqrt{n}} + 2i(\nabla\sqrt{n})\cdot(\nabla S)\cdot\frac{\psi}{\sqrt{n}} + i(\nabla^2 S)\psi - (\nabla S)^2\psi \quad (2.5)$$

$$|\psi|^2 = n. \quad (2.6)$$

Sostituendo il tutto nella (2.1) e uguagliando parti reali e immaginarie rispettivamente, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot (n\vec{v}) \\ -m\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nabla \left[ \frac{1}{2}mv^2 + U + g_0n - g_2\nabla^2 n \right] \end{cases} \quad (2.7)$$

Notiamo che nella seconda equazione abbiamo trascurato il termine di pressione  $-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla^2\sqrt{n})\frac{1}{\sqrt{n}}$ . La (2.7) rappresenta un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali dette *equazioni di Eulero*: queste descrivono il comportamento di un fluido in un potenziale esterno  $U(\vec{r})$ . In particolare, tale risultato assicura che la dinamica di un condensato di Bose-Einstein possa essere descritta in termini di densità locale e velocità locale.

### 2.1.2 Eccitazioni elementari

Possiamo studiare le proprietà delle eccitazioni elementari considerando piccole deviazioni dello stato del condensato dall'equilibrio. Ad esempio, supponiamo di prendere  $U(\vec{r}) = 0$ : perturbiamo il sistema, in modo che

$$\begin{cases} n(\vec{r}, t) = n_{eq} + \delta n(\vec{r}, t) \\ \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_{eq} + \delta \vec{v}(\vec{r}, t) \end{cases} \quad \text{in particolare } n_{eq} \in \mathbb{R} \text{ e } \vec{v}_{eq} = 0. \quad (2.8)$$

Risulta immediato verificare che (non esplicitiamo la dipendenza delle varie grandezze da  $\vec{r}$  e  $t$ )

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\delta n = -n_{eq}\nabla \cdot (\delta \vec{v}) \\ m\frac{\partial}{\partial t}\delta \vec{v} = -\nabla \cdot [g_0\delta n - g_2\nabla^2\delta n]. \end{cases} \quad (2.9)$$

Applichiamo alla prima una derivata temporale, alla seconda una divergenza: risolvendo il sistema ricaviamo

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta n = \frac{n_{eq}}{m}\left(g_0\nabla^2\delta n - g_2\nabla^4\delta n\right). \quad (2.10)$$

Supponiamo che  $\delta n$  abbia la forma seguente

$$\delta n = A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t)} + A^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t)} \quad (2.11)$$

con  $A, A^*$  costanti; se sostituiamo questa espressione nella (2.10) otteniamo

$$\omega^2 = \frac{n_{eq}}{m} k^2 (g_0 + g_2 k^2) \implies \omega = k \sqrt{\frac{n_{eq}}{m} (g_0 + g_2 k^2)}, \quad (2.12)$$

e grazie alla relazione di dispersione possiamo trovare la velocità del suono nel condensato

$$s = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{n_{eq}}{m} (g_0 + g_2 k^2)}. \quad (2.13)$$

Affinché questa espressione abbia senso deve valere la condizione  $(g_0 + g_2 k^2) \geq 0$ . Mostriamo due grafici a titolo di esempio:

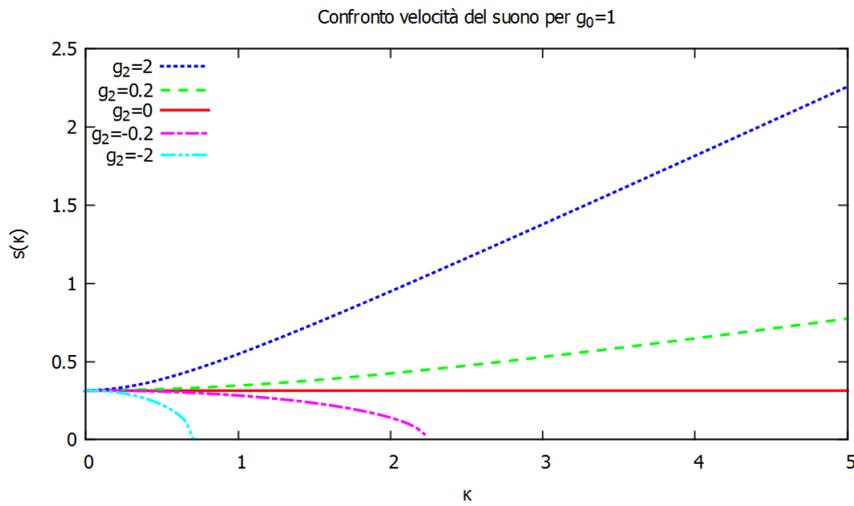


Figura 2.1: Confronto delle velocità del suono per differenti valori di  $g_2$  a  $g_0$  positivo fissato. Si vede chiaramente che per  $g_2 > 0$   $k \in \mathbb{R}^+$ , mentre per  $g_2 < 0$  si ha che  $k \in [0, \sqrt{\frac{g_0}{|g_2|}}]$ .

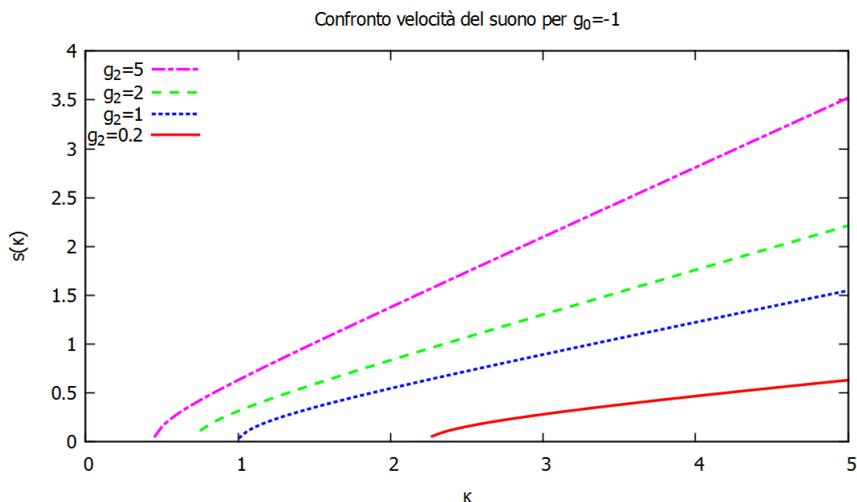


Figura 2.2: Confronto delle velocità del suono per differenti valori positivi di  $g_2$  a  $g_0$  negativo fissato. In particolare si vede che  $k \in [\sqrt{\frac{g_0}{|g_2|}}, +\infty[$ .

### 2.1.3 Lo spettro di Bogoliubov

Un altro modo per determinare la velocità del suono nel condensato è quello di partire dalla (2.1) e di supporre di poter scrivere  $\psi \rightarrow \psi_0 + \delta\psi$ , ove con  $\delta\psi$  intendiamo una piccola fluttuazione quantica rispetto a  $\psi_0$ . Se sostituiamo questa particolare funzione d'onda nelle equazione di Gross-Pitaevskii modificata, linearizziamo secondo  $\delta\psi$  e imponiamo

$$\psi_0 = \sqrt{n} e^{-i\frac{\mu}{\hbar}t} \quad (2.14)$$

$$\delta\psi = e^{-i\frac{\mu}{\hbar}t} \left[ u(\vec{r}) e^{-i\omega t} - v^*(\vec{r}) e^{i\omega t} \right] \quad (2.15)$$

(dove  $\mu$  è il potenziale chimico dello stato imperturbato,  $n$  la densità del sistema all'equilibrio,  $u(\vec{r})$  e  $v(\vec{r})$  funzioni da determinare), otteniamo lo *spettro di Bogoliubov*

$$\hbar\omega = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2ms^2 \right)}, \quad (2.16)$$

con  $s$  dato dalla (2.13). Lo stesso risultato è esposto in [22].

In realtà, lo scopo primario dello spettro di Bogoliubov è quello di descrivere l'energia di piccole perturbazioni di stati macroscopicamente popolati aventi momento  $\hbar k$ : dunque, tale spettro descrive l'instabilità o meno del sistema. In particolare il sistema è energeticamente instabile se esiste un qualche  $\omega < 0$  e dinamicamente instabile se  $\Im\{\omega\} \neq 0$ .

Distinguiamo ora alcuni casi di interesse per cui si hanno valori reali di  $\omega$ :

- $g_0 > 0$ 
  - (i)  $g_2 > 0$ .  
La (2.16) ha senso per qualsiasi valore di  $k$ ;
  - (ii)  $g_2 < 0$ .  
Se  $|g_2| < \frac{1}{4n_{eq}}$ . In questo caso,  $k$  è definito su tutta la retta reale.  
Se  $|g_2| > \frac{1}{4n_{eq}}$  allora  $|k| < \sqrt{\frac{2n_{eq}g_0}{\frac{\hbar^2}{2m} + 2n_{eq}g_2}}$ .
- $g_0 < 0$ .
  - (i)  $g_2 > 0$ .  
In questo caso  $k$  è inferiormente limitato.
  - (ii)  $g_2 < 0$ .  
Se  $|g_2| < \frac{1}{4n_{eq}}$  allora  $|k| > \sqrt{-\frac{2n_{eq}g_0}{\frac{\hbar^2}{2m} + 2n_{eq}g_2}}$ .  
Se  $|g_2| > \frac{1}{4n_{eq}}$  allora nessun valore reale di  $k$  è permesso.

Mostriamo di seguito alcuni grafici di confronto per differenti valori dei parametri. Quando  $k$  non assume i valori sopra indicati, allora  $\omega$  diventa immaginario:

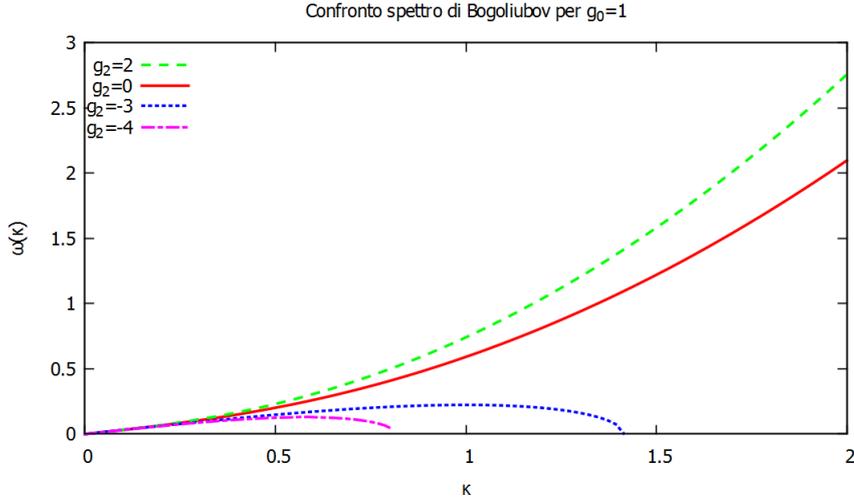


Figura 2.3: Confronto dello spettro di Bogoliubov per  $g_0$  positivo fissato,  $n_{eq} = 0.1$  e differenti valori di  $g_2$ . Si noti che per valori di  $g_2$  negativi  $k$  non può assumere tutti i valori della retta reale.

in questo caso si ha una crescita esponenziale delle piccole perturbazioni dell'onda. Quando si è di fronte a situazioni in cui  $\omega$  diventa complesso, si ha a che fare con una situazione instabile: in questo caso si parla di *modulational instability*.

Notiamo che per valori di  $k$  grandi rispetto a  $s$  otteniamo una relazione di dispersione quadratica, mentre per valori di  $k$  piccoli rispetto a  $s$  ricaviamo la relazione lineare

$$\hbar\omega \sim \hbar ks, \quad (2.17)$$

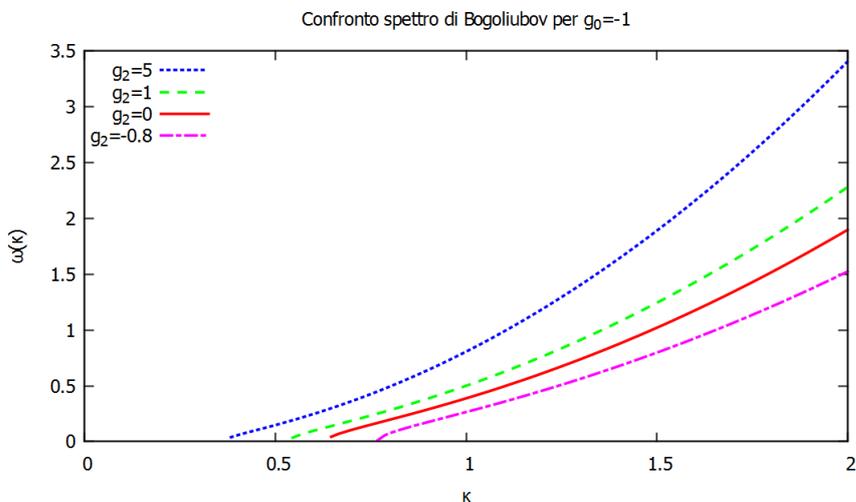


Figura 2.4: Confronto dello spettro di Bogoliubov per  $g_0$  negativo fissato,  $n_{eq} = 0.1$  e differenti valori di  $g_2$ . Si noti che nessuna delle curve tracciate parte dall'origine.

Grazie al criterio di Landau sulla superfluidità ([18]) possiamo determinare la velocità critica di rottura del superfluido

$$v_c = \min_{\vec{p}} \frac{\epsilon(\vec{p})}{p}. \quad (2.18)$$

Distinguendo il caso in cui  $g_0 > 0$  dal caso in cui  $g_0 < 0$  otteniamo rispettivamente le  $v_{c_{g_0 > 0}} = \sqrt{\frac{n g_0}{m}}$  e  $v_{c_{g_0 < 0}} = 0$ .

## 2.2 Solitoni

### 2.2.1 Introduzione

I solitoni, o onde solitarie, si presentarono al mondo scientifico per la prima volta grazie a J.S. Russell, ingegnere scozzese dell'Ottocento, che scrisse

*Stavo osservando il moto di un battello che veniva trainato rapidamente lungo uno stretto canale da un paio di cavalli, quando il battello improvvisamente si fermò: non altrettanto fece la massa d'acqua del canale che esso aveva messo in moto; essa si accumulò attorno alla prua del battello in uno stato di violenta agitazione, dopo di che mosse in avanti con grande velocità, assumendo la forma di una grande solitaria elevazione, un cumulo d'acqua arrotondato e ben definito che continuò la sua corsa lungo il canale, apparentemente senza mutamento di forma o riduzione di velocità. La seguii a cavallo lungo la sponda del canale e la superai mentre stava ancora procedendo ad una velocità di otto o nove miglia all'ora [14 km/h], ancora conservando il suo aspetto originario di circa trenta piedi di lunghezza [9 m] e un piede e mezzo (300-450 mm) in altezza. La sua altezza diminuì gradualmente e dopo un inseguimento di un miglio o due (2-3 km) la persi nei meandri del canale. Questo, nel mese di agosto del*

1834, fu il mio primo casuale incontro con quel fenomeno bello e singolare che ho chiamato *Onda di Traslazione*.<sup>1</sup>

Successivamente anche Rayleigh, Korteweg e de Vries si soffermarono su questo nuovo e insolito fenomeno. Le caratteristiche peculiari che emersero dallo studio di queste *onde di traslazione* furono le seguenti:

- La percorrenza da parte dei solitoni di lunghe distanze senza deformarsi;
- La velocità del solitone dipende dalle sue dimensioni;
- La larghezza del solitone dipende dalla profondità del mezzo in cui si propaga;
- Se due solitoni si scontrano, essi proseguono dopo lo scontro in maniera solitaria, ossia le due onde non si uniscono (da qui il nome di onde solitarie).

Esistono tre tipologie di solitone:

- *Solitone nero*, ossia solitone depressivo: più precisamente soluzioni di equazioni differenziali la cui dipendenza da  $z$  sia del tipo  $\eta(z, t) = \eta(z - vt)$  soddisfacente il comportamento asintotico

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \eta(z, t) = \eta_{\max} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \eta(z, t) = 0 \quad \text{con } \eta_{\max} > 0. \quad (2.19)$$

- *Solitone chiaro*, ossia solitone che si eleva: più precisamente soluzioni di equazioni differenziali la cui dipendenza da  $z$  sia del tipo  $\eta(z, t) = \eta(z - vt)$  soddisfacente il comportamento asintotico

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \eta(z, t) = 0 \quad \lim_{z \rightarrow 0} \eta(z, t) = \eta_{\max} \quad \text{con } \eta_{\max} > 0. \quad (2.20)$$

- *Solitone grigio*, ossia solitone non completamente depressivo: più precisamente soluzioni di equazioni differenziali la cui dipendenza da  $z$  sia del tipo  $\eta(z, t) = \eta(z - vt)$  soddisfacente il comportamento asintotico

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \eta(z, t) = \eta_{\max} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \eta(z, t) = \eta_{\min} \quad \text{con } 0 < \eta_{\min} < \eta_{\max}. \quad (2.21)$$

### 2.2.2 Riduzione dimensionale

Un'equazione differenziale di dimensione  $J$  può essere riscritta come un'equazione differenziale di dimensione  $j < J$ . Questo procedimento è una tecnica molto usata in Fisica Teorica che di fatto semplifica la ricerca delle soluzioni. In particolare useremo questo metodo per poter riscrivere l'equazione unidimensionale e adimensionale dell'equazione di Gross-Pitaevskii modificata. Vediamo ora come poter procedere per raggiungere tale scopo.

---

<sup>1</sup>La precedente citazione è stata estrapolata da [9].

Consideriamo il funzionale dell'energia associata all'equazione di Gross-Pitaevskii modificata

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\psi(\vec{r}), \psi^*(\vec{r})) = \int d^3 \vec{r} \psi(\vec{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) + \\ \frac{1}{2} \int d^3 \vec{r} g_0 |\psi(\vec{r})|^4 - \frac{1}{4} \int d^3 \vec{r} g_2 |\psi(\vec{r})|^2 \nabla^2 (|\psi(\vec{r})|^2). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Poniamo il seguente cambio di variabili

$$\vec{r} = l \tilde{\vec{r}}, \quad (2.23)$$

in cui  $l$  rappresenta la *lunghezza caratteristica*<sup>2</sup>

$$l = n_0^{1/3}. \quad (2.24)$$

Notiamo che il cambio di variabili equivale al sistema

$$\begin{cases} x &= l \tilde{x} \\ y &= l \tilde{y} \\ z &= l \tilde{z} \end{cases} \quad (2.25)$$

e pertanto

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} = \frac{1}{l^2} \tilde{\nabla}^2. \quad (2.26)$$

Notiamo anche che con questa sostituzione otteniamo

$$N = \int d^3 \vec{r} |\psi(\vec{r})|^2 = \int d^3 \tilde{\vec{r}} l^3 |\psi(\tilde{\vec{r}})|^2 = \int d^3 \tilde{\vec{r}} |\tilde{\psi}(\tilde{\vec{r}})|^2 \quad (2.27)$$

in cui abbiamo posto

$$l^3 |\tilde{\psi}(\tilde{\vec{r}})|^2 = |\psi(\tilde{\vec{r}})|^2. \quad (2.28)$$

Per semplicità scriviamo

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{k.pot} + \mathcal{H}_{int 1} + \mathcal{H}_{int 2}, \quad (2.29)$$

ove

$$\mathcal{H}_{k.pot}(\psi(\vec{r}), \psi^*(\vec{r})) = \int d^3 \vec{r} \psi(\vec{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) \quad (2.30)$$

$$\mathcal{H}_{int 1}(\psi(\vec{r}), \psi^*(\vec{r})) = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{r} g_0 |\psi(\vec{r})|^4 \quad (2.31)$$

$$\mathcal{H}_{int 2}(\psi(\vec{r}), \psi^*(\vec{r})) = -\frac{1}{4} \int d^3 \vec{r} g_2 |\psi(\vec{r})|^2 \nabla^2 (|\psi(\vec{r})|^2). \quad (2.32)$$

Consideriamo nelle seguenti sottosezioni due casi particolari: quello del sistema uniforme, in cui  $U = 0$  e quello in cui il potenziale di confinamento esterno è armonico nel piano  $x, y$  e generico lungo l'asse  $z$ , ossia  $U = \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + V(z)$  (quest'ultimo caso è affrontato in [3]).

<sup>2</sup>La scelta di porre la costante moltiplicativa pari a  $l$  non è casuale: infatti, così facendo, otteniamo delle variabili adimensionali. Non è nemmeno casuale la scelta della (2.24): per un condensato di Bose-Einstein uniforme è naturale porre  $n_0 = \frac{1}{V} = \frac{1}{l^3}$  con  $V$  volume e  $l$  distanza inter-atomica.

**Caso  $U = 0$** 

In questo caso

$$\mathcal{H}_k(\psi(\vec{r}), \psi^*(\vec{r})) = \int d^3 \vec{r} \psi(\vec{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right] \psi(\vec{r}) \quad (2.33)$$

$$= \frac{\hbar^2}{ml^2} \int d^3 \tilde{r} \tilde{\psi}(\tilde{r}) \left[ -\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^2 \right] \tilde{\psi}(\tilde{r}) \quad (2.34)$$

Se definiamo  $\mathcal{E}_l = \frac{\hbar^2}{ml^2}$ , otteniamo

$$\mathcal{H}_k(\tilde{\psi}(\tilde{r}), \tilde{\psi}^*(\tilde{r})) = \mathcal{E}_l \int d^3 \tilde{r} \tilde{\psi}(\tilde{r}) \left[ -\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^2 \right] \tilde{\psi}(\tilde{r}) \quad (2.35)$$

e anche

$$\mathcal{H}_{int1}(\psi(\vec{r}), \psi^*(\vec{r})) = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{r} g_0 |\psi(\vec{r})|^4 \quad (2.36)$$

$$\mathcal{H}_{int1}(\tilde{\psi}(\tilde{r}), \tilde{\psi}^*(\tilde{r})) = \mathcal{E}_l \frac{1}{2} \int \frac{1}{l^3} \frac{1}{\mathcal{E}_l} d^3 \tilde{r} g_0 |\tilde{\psi}(\tilde{r})|^4 \quad (2.37)$$

e se definiamo la nuova quantità adimensionale

$$\tilde{g}_0 \equiv \frac{g_0}{l^3 \mathcal{E}_l} = 4\pi \frac{a_s}{l} \quad (2.38)$$

possiamo scrivere

$$\mathcal{H}_{int1}(\tilde{\psi}(\tilde{r}), \tilde{\psi}^*(\tilde{r})) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_l \tilde{g}_0 \int d^3 \tilde{r} |\tilde{\psi}(\tilde{r})|^4. \quad (2.39)$$

Possiamo scrivere anche

$$\mathcal{H}_{int2}(\psi(\vec{r}), \psi^*(\vec{r})) = -\frac{1}{4} \int d^3 \vec{r} g_2 |\psi(\vec{r})|^2 \nabla^2 (|\psi(\vec{r})|^2) \quad (2.40)$$

$$\mathcal{H}_{int2}(\tilde{\psi}(\tilde{r}), \tilde{\psi}^*(\tilde{r})) = -\frac{1}{4} g_2 \frac{1}{l^5} \mathcal{E}_l \int d^3 \tilde{r} |\tilde{\psi}(\tilde{r})|^2 \tilde{\nabla}^2 (|\tilde{\psi}(\tilde{r})|^2) \quad (2.41)$$

in cui definiamo

$$\tilde{g}_2 \equiv \frac{g_2}{\mathcal{E}_l l^5} = \frac{g_2}{\hbar^2 l^3} = 4\pi \left( \frac{a_s}{l} \right)^3 \left\{ \chi \left( \frac{r_e}{a_s} - 1 \right) \right\} \quad (2.42)$$

**Caso  $U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 (\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2) + V(z)$** 

In questo caso possiamo prendere la lunghezza caratteristica

$$a_{\perp} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{m \omega_{\perp}}}. \quad (2.43)$$

Se prendiamo  $\tilde{r}$  tale che  $\vec{r} = a_{\perp} \tilde{r}$  otteniamo

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + V(z) \quad (2.44)$$

$$= \mathcal{E}_{\perp} \frac{1}{2} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) V(\tilde{z}) \quad (\text{abbiamo posto } \mathcal{E}_{\perp} = \hbar \omega_{\perp}) \quad (2.45)$$

$$= \mathcal{E}_l \left\{ \frac{1}{2} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) + \tilde{V}(\tilde{z}) \right\} \quad (\text{abbiamo posto } \tilde{V}(\tilde{z}) = \frac{\tilde{V}(\tilde{z})}{\mathcal{E}_l}) \quad (2.46)$$

Per lo stesso motivo visto nella sottosezione precedente, è naturale prendere

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{a_{\perp}^{3/2}} \tilde{\psi}(\tilde{r}). \quad (2.47)$$

Calcoliamo i singoli termini del funzionale  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H}_k(\psi(\vec{r}), \psi^*(\vec{r})) = \int d^3 \vec{r} \psi(\vec{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right] \psi(\vec{r}) \quad (2.48)$$

$$= \mathcal{E}_l \int d^3 \tilde{r} \tilde{\psi}^*(\tilde{r}) \left[ -\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^2 \right] \tilde{\psi}(\tilde{r}) \quad (2.49)$$

$$\mathcal{H}_{int1}(\psi(\vec{r}), \psi^*(\vec{r})) = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{r} g_0 |\psi(\vec{r})|^4 \quad (2.50)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{g_0}{a_{\perp}^3 \mathcal{E}_l} \mathcal{E}_l \int d^3 \tilde{r} |\tilde{\psi}(\tilde{r})|^4 \quad (2.51)$$

da cui possiamo definire la quantità adimensionale

$$\tilde{g}_0 \equiv \frac{g_0}{a_{\perp}^3 \mathcal{E}_l} = 4\pi \left( \frac{a_s}{a_{\perp}} \right). \quad (2.52)$$

L'ultima quantità da calcolare è la seguente:

$$\mathcal{H}_{int2}(\psi(\vec{r}), \psi^*(\vec{r})) = -\frac{1}{4} \int d^3 \vec{r} g_2 |\psi(\vec{r})|^2 \nabla^2 (|\psi(\vec{r})|^2) \quad (2.53)$$

$$= -\frac{1}{4} \frac{g_2}{a_{\perp}^5 \mathcal{E}_l} \mathcal{E}_l \int d^3 \tilde{r} |\psi(\tilde{r})|^2 \tilde{\nabla}^2 (|\psi(\tilde{r})|^2) \quad (2.54)$$

$$(2.55)$$

in cui possiamo definire la quantità adimensionale

$$\tilde{g}_2 \equiv \frac{g_2}{a_{\perp}^5 \mathcal{E}_l} = 4\pi \left( \frac{a_s}{a_{\perp}} \right)^3 \left\{ 1 - \chi \left( \frac{r_e}{a_s} \right) \right\}. \quad (2.56)$$

Il funzionale può ora essere scritto come

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\tilde{\psi}(\tilde{r}), \tilde{\psi}^*(\tilde{r})) &= \mathcal{E}_l \int d^3 \tilde{r} \tilde{\psi}^*(\tilde{r}) \left[ -\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^2 \right] \tilde{\psi}(\tilde{r}) \\ &+ \mathcal{E}_l \left( \frac{1}{2} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) + \tilde{V}(\tilde{z}) \right) \int d^3 \tilde{r} |\tilde{\psi}(\tilde{r})|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \tilde{g}_0 \mathcal{E}_l \int d^3 \tilde{r} |\tilde{\psi}(\tilde{r})|^4 \\ &- \frac{1}{4} \tilde{g}_2 \mathcal{E}_l \int d^3 \tilde{r} |\tilde{\psi}(\tilde{r})|^2 \tilde{\nabla}^2 (|\tilde{\psi}(\tilde{r})|^2) \end{aligned} \quad (2.57)$$

che su unità di  $\mathcal{E}_l$  diventa

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}(\tilde{\psi}(\tilde{r}), \tilde{\psi}^*(\tilde{r}))}{\mathcal{E}_l} &= \int d^3 \tilde{r} \tilde{\psi}^*(\tilde{r}) \left[ -\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^2 \right] \tilde{\psi}(\tilde{r}) \\ &+ \left( \frac{1}{2} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) + \tilde{V}(\tilde{z}) \right) \int d^3 \tilde{r} |\tilde{\psi}(\tilde{r})|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \tilde{g}_0 \int d^3 \tilde{r} |\tilde{\psi}(\tilde{r})|^4 \\ &- \frac{1}{4} \tilde{g}_2 \int d^3 \tilde{r} |\tilde{\psi}(\tilde{r})|^2 \tilde{\nabla}^2 (|\tilde{\psi}(\tilde{r})|^2). \end{aligned} \quad (2.58)$$

### Funzione d'onda particolare

Supponiamo ora di poter scrivere

$$\psi(\vec{r}) = f(z) \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2a_\perp^2}}}{a_\perp \sqrt{\pi}} \quad (2.59)$$

e quindi

$$\tilde{\psi}(\tilde{r}) = \tilde{f}(\tilde{z}) \frac{e^{-\frac{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}. \quad (2.60)$$

Sostituendo nella relazione trovata nella precedente sottosezione otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}(\tilde{\psi}(\tilde{r}), \tilde{\psi}^*(\tilde{r}))}{\mathcal{E}_l} &= -\frac{1}{2} \int \tilde{f}^*(\tilde{z}) \left( -\tilde{f}(\tilde{z}) + \tilde{f}''(\tilde{z}) \right) \\ &+ \left( \frac{1}{2} (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) + \tilde{V}(\tilde{z}) \right) \int d^3 \tilde{r} |\tilde{f}(\tilde{z})|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\tilde{g}_0}{2\pi} \int |\tilde{f}(\tilde{z})|^4 d\tilde{z} \\ &- \frac{1}{4} \frac{\tilde{g}_2}{\pi} \left\{ -\int |\tilde{f}(\tilde{z})|^4 d\tilde{z} + \frac{1}{2} \int |\tilde{f}(\tilde{z})|^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} |\tilde{f}(\tilde{z})|^2 d\tilde{z} \right\} \end{aligned} \quad (2.61)$$

A questo punto, confrontando con la prima equazione di questa sezione, possiamo definire

$$\tilde{g}_0^{(1D)} \equiv \frac{\tilde{g}_0}{2\pi} + \frac{\tilde{g}_2}{2\pi} \quad (2.62)$$

$$\tilde{g}_2^{(1D)} \equiv -\frac{\tilde{g}_2}{2\pi} \quad (2.63)$$

per ottenere

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}(\tilde{\psi}(\tilde{r}), \tilde{\psi}^*(\tilde{r}))}{\mathcal{E}_l} &= -\frac{1}{2} \int \tilde{f}^*(\tilde{z}) \left( -\tilde{f}(\tilde{z}) + \tilde{f}''(\tilde{z}) \right) \\ &+ \left( \frac{1}{2}(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) + \tilde{V}(\tilde{z}) \right) \int d^3\tilde{r} |\tilde{f}(\tilde{z})|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \tilde{g}_0^{(1D)} \int |\tilde{f}(\tilde{z})|^4 d\tilde{z} \\ &+ \frac{1}{4} \tilde{g}_2^{(1D)} \int |\tilde{f}(\tilde{z})|^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} |\tilde{f}(\tilde{z})|^2 d\tilde{z} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Per semplicità di scrittura, denotiamo il funzionale (2.64)  $\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{E}_l}$  e non esplicitiamo la dipendenza delle  $\tilde{f}$  da  $\tilde{z}$ . Omettiamo i calcoli, ma grazie alla derivata funzionale e all'utilizzo del metodo dei moltiplicatori di Lagrange, possiamo scrivere

$$-\frac{1}{2}(\tilde{f})'' + \tilde{g}_0^{(1D)} |\tilde{f}|^2 \tilde{f} + \frac{1}{2} \tilde{g}_2^{(1D)} \tilde{f} \frac{d^2}{d\tilde{z}^2} |\tilde{f}|^2 = \tilde{\mu}^{(1D)} \tilde{f} \quad (2.65)$$

che è l'analogo dell'equazione di Gross-Pitaevskii modificata (e riscalata) nel caso unidimensionale. La medesima espressione è presente in [3].

### 2.2.3 Solitoni neri

Consideriamo il caso in cui  $\tilde{g}_0^{(1D)} > 0$ .

Facciamo ora l'ipotesi che  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, \tilde{f}_\infty]$ , con  $\tilde{f}_\infty > 0$ . In particolare, supponiamo che per  $\tilde{z} \rightarrow +\infty$  si abbia  $f \rightarrow \tilde{f}_\infty$  e  $f' = 0$ . In questo modo l'equazione di Gross-Pitaevskii modificata ridotta fornisce  $\tilde{\mu}^{(1D)} = \tilde{g}_0^{(1D)} \tilde{f}_\infty^2$ .

Risolviamo ora l'equazione differenziale inserendo queste ipotesi su  $f$ :

$$-\frac{1}{2}(\tilde{f})'' + \tilde{g}_0^{(1D)} \tilde{f}^3 + \frac{1}{2} \tilde{g}_2^{(1D)} \tilde{f}(\tilde{f}^2)'' = \tilde{\mu}^{(1D)} \tilde{f} \quad (2.66)$$

$$\tilde{f}'' = -\left( 2\tilde{\mu}^{(1D)} \tilde{f} - 2\tilde{g}_0^{(1D)} \tilde{f}^3 + \tilde{g}_2^{(1D)} \tilde{f}(\tilde{f}^2)'' \right) = -\left( \frac{\partial \tilde{V}(\tilde{f})}{\partial \tilde{f}} \right) \quad (2.67)$$

$$\implies \tilde{V}(\tilde{f}) = \tilde{\mu}^{(1D)} \tilde{f}^2 - \frac{1}{2} \tilde{g}_0^{(1D)} \tilde{f}^4 - 2\tilde{g}_2^{(1D)} (\tilde{f})^2 (\tilde{f}')^2 \quad (2.68)$$

e dunque la costante del moto è

$$\tilde{K} = \frac{1}{2} (\tilde{f}')^2 + \tilde{\mu}^{(1D)} \tilde{f}^2 - \frac{1}{2} \tilde{g}_0^{(1D)} \tilde{f}^4 - 2\tilde{g}_2^{(1D)} (\tilde{f})^2 (\tilde{f}')^2 \quad (2.69)$$

$$\implies (\tilde{f}')^2 = \frac{\tilde{K} - \tilde{\mu}^{(1D)} \tilde{f}^2 + \frac{1}{2} \tilde{g}_0^{(1D)} \tilde{f}^4}{\frac{1}{2} + 2\tilde{g}_2^{(1D)} (\tilde{f})^2}. \quad (2.70)$$

Se facciamo tendere  $\tilde{z}$  a  $+\infty$  ricaviamo  $\tilde{K} \rightarrow \frac{1}{2} \tilde{\mu}^{(1D)} \tilde{f}_\infty^2$  e la relazione precedente assume la forma

$$\tilde{f}' = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \tilde{g}_0^{(1D)} (\tilde{f}^2 - \tilde{f}_\infty^2)^2}{1 - 4\tilde{g}_2^{(1D)} \tilde{f}^2}} \quad (2.71)$$

$$\implies \int_0^{\tilde{z}} \sqrt{\tilde{g}_0^{(1D)}} d\tilde{x} = \int_{\tilde{f}_0}^{\tilde{f}(\tilde{z})} \sqrt{\frac{1 - 4\tilde{g}_2^{(1D)} \tilde{f}^2}{\frac{1}{2}\tilde{g}_0^{(1D)} (\tilde{f}_\infty^2 - \tilde{f}^2)^2}} d\tilde{f}. \quad (2.72)$$

Al denominatore raccogliamo  $\tilde{f}_\infty^2$  e poniamo il cambio di variabili  $\theta = \frac{\tilde{f}}{\tilde{f}_\infty}$

$$\int_0^{\frac{\tilde{f}(\tilde{z})}{\tilde{f}_\infty}} \frac{1}{\tilde{f}_\infty} \frac{\sqrt{1 - 4\tilde{g}_2^{(1D)} \tilde{f}_\infty^2 \theta^2}}{1 - \theta^2} d\theta. \quad (2.73)$$

Questo è un integrale con parametro  $\tilde{g}_2^{(1D)}$  ed in quanto tale bisogna distinguere i seguenti casi:

- $\tilde{g}_2^{(1D)} = |\tilde{g}_2^{(1D)}|$ , ossia  $\tilde{g}_2^{(1D)}$  positivo.  
In questo caso l'integrale da risolvere è

$$\int_0^{\frac{\tilde{f}(\tilde{z})}{\tilde{f}_\infty}} \frac{1}{\tilde{f}_\infty} \frac{\sqrt{1 - 4|\tilde{g}_2^{(1D)}| \tilde{f}_\infty^2 \theta^2}}{1 - \theta^2} d\theta. \quad (2.74)$$

Se definiamo

$$a = |\tilde{g}_2^{(1D)}| \tilde{f}_\infty^2 \quad (2.75)$$

allora possiamo scrivere

$$\int_0^{\frac{\tilde{f}(\tilde{z})}{\tilde{f}_\infty}} \frac{1}{\tilde{f}_\infty} \frac{\sqrt{1 - 4a\theta^2}}{1 - \theta^2} d\theta = \frac{1}{\tilde{f}_\infty} \left\{ 2\sqrt{a} \arcsin(2\sqrt{a}\theta) + \sqrt{1 - 4a} \left( \operatorname{arctanh}\theta + \frac{1}{2} \ln \frac{\xi_-}{\xi_+} \right) \right\}_0^{\frac{\tilde{f}(\tilde{z})}{\tilde{f}_\infty}} \quad (2.76)$$

con

$$\xi_- = 1 - 4a\theta + \sqrt{1 - 4a} \sqrt{1 - 4a\theta^2} \quad (2.77)$$

$$\xi_+ = 1 + 4a\theta + \sqrt{1 - 4a} \sqrt{1 - 4a\theta^2}. \quad (2.78)$$

Dunque

$$\sqrt{|\tilde{g}_0^{(1D)}|} \tilde{z} = \frac{1}{\tilde{f}_\infty} \left\{ 2\sqrt{a} \arcsin(2\sqrt{a}\theta) + \sqrt{1 - 4a} \left( \operatorname{arctanh}\theta + \frac{1}{2} \ln \frac{\xi_-}{\xi_+} \right) \right\}_0^{\frac{\tilde{f}(\tilde{z})}{\tilde{f}_\infty}}. \quad (2.79)$$

Notiamo che questo integrale ha senso se  $\tilde{g}_2^{(1D)} \in [0, \frac{1}{4\tilde{f}_\infty^2}]$ .

- $\tilde{g}_2^{(1D)} = -|\tilde{g}_2^{(1D)}|$ , ossia  $\tilde{g}_2^{(1D)}$  negativo.  
In questo caso, l'integrale assume la forma

$$\int_0^{\frac{\tilde{f}(\tilde{z})}{\tilde{f}_\infty}} \frac{1}{\tilde{f}_\infty} \frac{\sqrt{1 + 4a\theta^2}}{1 - \theta^2} d\theta = \frac{1}{\tilde{f}_\infty} \left\{ -2\sqrt{a} \operatorname{arcsinh}(2\sqrt{a}\theta) + \sqrt{1 - 4a} \left( \operatorname{arctanh}\theta - \frac{1}{2} \ln \frac{\xi_-}{\xi_+} \right) \right\}_0^{\frac{\tilde{f}(\tilde{z})}{\tilde{f}_\infty}}. \quad (2.80)$$

Si noti che  $\tilde{g}_2^{(1D)}$  può assumere qualsiasi valore.

Mostriamo di seguito un grafico con differenti valori di  $\tilde{g}_2^{(1D)}$  per  $\tilde{g}_0^{(1D)}$  fissato: da quest'ultima figura è facile intuire come, a parità di  $\tilde{g}_0^{(1D)}$ , il solitone ha un

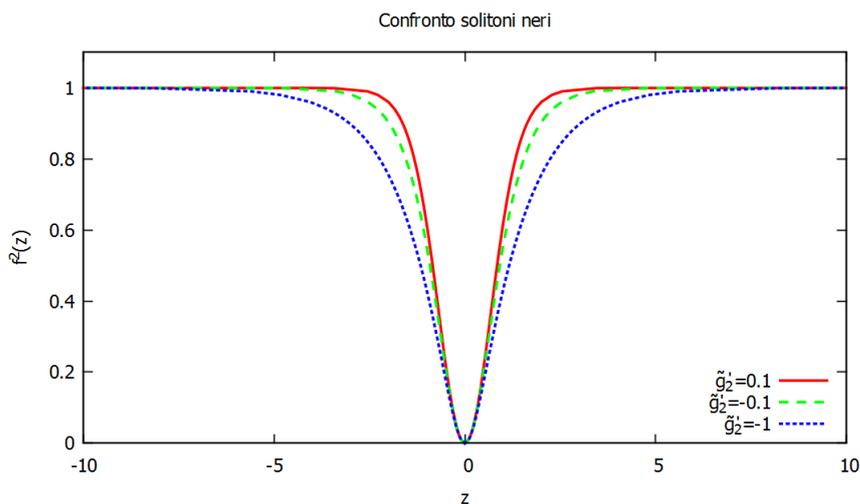


Figura 2.5: Grafico di confronto di solitoni neri per valori di  $\tilde{g}_0^{(1D)} = 1$  e  $\tilde{g}_2^{(1D)}$  differenti. Si noti la figura “depressiva” attorno all’origine. Nel grafico si è scritto  $\tilde{g}'_2$  al posto di  $\tilde{g}_2^{(1D)}$  per semplicità di scrittura.

profilo più largo per valori di  $\tilde{g}_2^{(1D)}$  bassi, un profilo stretto per valori di  $\tilde{g}_2^{(1D)}$  tendenti a  $\frac{1}{4}$ .

### 2.2.4 Solitoni chiari

Consideriamo ora  $\tilde{g}_0^{(1D)} < 0$  e quindi  $\tilde{g}_0^{(1D)} = -|\tilde{g}_0^{(1D)}|$ . L’equazione di Gross-Pitaevskii modificata e ridotta diventa (sempre nell’ipotesi che  $\tilde{f}$  sia positiva)

$$-\frac{1}{2}(\tilde{f})'' - |\tilde{g}_0^{(1D)}| \tilde{f}^3 + \frac{1}{2}\tilde{g}_2^{(1D)} \tilde{f}^2(\tilde{f}^2)'' - \tilde{\mu}^{(1D)} \tilde{f} = 0 : \quad (2.81)$$

La costante del moto ora è

$$\tilde{K} = \frac{1}{2}(\tilde{f}')^2 + \tilde{\mu}^{(1D)} \tilde{f}^2 + \frac{1}{2} |\tilde{g}_0^{(1D)}| \tilde{f}^4 - 2\tilde{g}_2^{(1D)} (\tilde{f})^2 (\tilde{f}')^2. \quad (2.82)$$

Le ipotesi che facciamo su  $\tilde{f}$  è che  $\tilde{f}(0) = \tilde{f}_0$ ,  $\tilde{f}'(0) = 0$  e  $\tilde{f}(+\infty) = 0$ . Sia  $\tilde{K}$  che  $\tilde{\mu}^{(1D)}$  sono delle costanti del moto che sono determinate dalle condizioni su  $\tilde{f}$ . Per  $\tilde{z} \rightarrow +\infty$  si ottiene  $\tilde{K} \rightarrow 0$ , e dunque

$$0 = \frac{1}{2}(\tilde{f}')^2 + \tilde{\mu}^{(1D)} \tilde{f}^2 + \frac{1}{2} |\tilde{g}_0^{(1D)}| \tilde{f}^4 - 2\tilde{g}_2^{(1D)} (\tilde{f})^2 (\tilde{f}')^2 \quad (2.83)$$

da cui, nel limite  $\tilde{z} \rightarrow 0$  si ricava  $\tilde{\mu}^{(1D)} = -\frac{1}{2} |\tilde{g}_0^{(1D)}| \tilde{f}_0^2$ . A questo punto sostituiamo nell’equazione di  $\tilde{K}$  una funzione  $\phi(\tilde{z})$  tale che  $\phi^{1/2} = \tilde{f}$ . Così

facendo arriviamo all'espressione

$$(\phi')^2 = \frac{4 |\tilde{g}_0^{(1D)}| \phi^2 (\tilde{f}_0 - \phi)}{1 - 4\tilde{g}_2^{(1D)} \phi} \quad (2.84)$$

e quindi

$$\sqrt{\frac{1 - 4\tilde{g}_2^{(1D)} \phi}{\phi^2 (\tilde{f}_0 - \phi)}} d\phi = -2\sqrt{|\tilde{g}_0^{(1D)}|} d\tilde{z}. \quad (2.85)$$

Attraverso metodi numerici è possibile trovare l'integrale di quest'ultima espressione e graficare le soluzioni. Anche in questo caso, a parità di  $\tilde{g}_0^{(1D)}$  il solitone ha

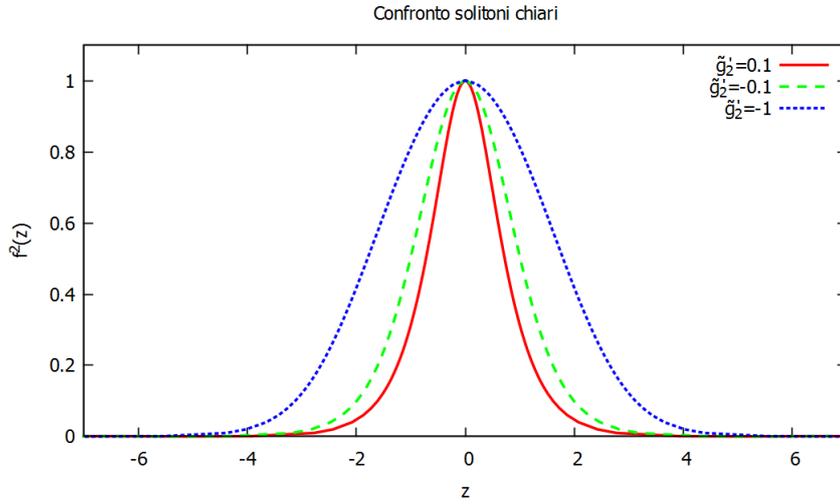


Figura 2.6: Grafico di confronto di solitoni chiari per  $\tilde{g}_0^{(1D)} = 1$  e differenti valori  $\tilde{g}_2^{(1D)}$ . Emerge chiaramente il picco attorno a  $z = 0$ .

un profilo stretto per valori di  $\tilde{g}_2^{(1D)}$  tendenti a  $\frac{1}{4}$  ed un profilo largo per  $\tilde{g}_2^{(1D)}$  piccoli.

### 2.2.5 Solitoni grigi

Cerchiamo ora di studiare i solitoni grigi: essi, insieme ai solitoni neri, rientrano nella categoria dei *solitoni scuri* per la loro forma “depressiva”; a differenza dei solitoni neri, però, i solitoni grigi sono caratterizzati da una densità non nulla al centro e descrivono onde solitarie in movimento. Per studiare questa nuova classe di oggetti fisici partiamo dalla (2.65) e, seguendo l'approccio usato in [11], imponiamo

$$\tilde{f}(\tilde{z}) = \Psi(\tilde{z}) \cdot e^{i\theta(\tilde{z})}, \quad (2.86)$$

in cui sia  $\Psi$  che  $\theta$  sono funzioni reali della sola  $\tilde{z}$ . Il significato di queste due funzioni è il seguente:  $\Psi$  determina la densità del condensato imperturbato e  $\theta$  la fase. Sostituendo questa espressione nella (2.65) ed uguagliando parti reali e immaginarie rispettivamente, otteniamo il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} A = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{A^2}{\Psi^3} - \frac{1}{2} \Psi'' + \tilde{g}_0^{(1D)} \Psi^3 + \frac{1}{2} \tilde{g}_2^{(1D)} \Psi (\Psi^2)'' = \tilde{\mu}^{(1D)} \Psi \end{cases} \quad (2.87)$$

in cui abbiamo definito la velocità  $v = \theta'$  di propagazione del solitone (che è funzione anch'essa della  $\tilde{z}$ ) e la costante  $A = \Psi^2 v$ .

Imponendo il comportamento asintotico

$$\lim_{\tilde{z} \rightarrow \pm\infty} \Psi(\tilde{z}) = 1, \quad \lim_{\tilde{z} \rightarrow \pm\infty} \Psi(\tilde{z}) = 0, \quad \lim_{\tilde{z} \rightarrow \pm\infty} v(\tilde{z}) = v_\infty \neq 0, \quad (2.88)$$

troviamo

$$A = v_\infty \quad (2.89)$$

$$\tilde{\mu} = \tilde{g}_0^{(1D)} + \frac{1}{2}v_\infty^2 \quad (2.90)$$

$$\tilde{K} = \frac{1}{2}\tilde{g}_0^{(1D)} + v_\infty^2 \quad (2.91)$$

con  $\tilde{K}$  costante del moto. Determiniamo la soluzione dell'equazione differenziale (2.87) risolvendo l'integrale

$$\tilde{z} = \int_{\Psi(0)}^{\Psi(\tilde{z})} \sqrt{\frac{1 - 4\tilde{g}_2^{(1D)}\overline{\Psi}^2}{\left(\tilde{g}_0^{(1D)} - 2\tilde{g}_0^{(1D)}\overline{\Psi}^2 + \tilde{g}_0^{(1D)}\overline{\Psi}^4\right) + \left(2v_\infty^2 - \frac{v_\infty^2}{\overline{\Psi}^2} - v_\infty^2\overline{\Psi}^4\right)} d\overline{\Psi}. \quad (2.92)$$

L'integrando ha senso per  $\tilde{g}_2^{(1D)} < \frac{1}{4}$ ,  $v_\infty \in \mathbb{R}$  e  $\tilde{g}_0^{(1D)} \in \mathbb{R}$ . La divergenza di tale integrando si ha per  $\Psi \rightarrow 1$  e per

$$\Psi \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{\tilde{g}_0^{(1D)} + v_\infty^2 - \sqrt{\tilde{g}_0^{(1D)2} - 2\tilde{g}_0^{(1D)}v_\infty^2 + 5v_\infty^4}}{\tilde{g}_0^{(1D)} - v_\infty^2}}}{\sqrt{2}}.$$

Quest'ultima espressione va a 0 per  $v_\infty = 0$  e  $\tilde{g}_0^{(1D)} > 0$  (la profondità della buca è pari all'unità), e va a 1 (profondità del solitone è nulla) per  $v_\infty = 0$  e  $\tilde{g}_0^{(1D)} < 0$ .

Questo risultato è particolare, in quanto per valori di  $\tilde{g}_0^{(1D)}$  positivi e di  $v_\infty$  tendenti a zero, la soluzione si approssima a quella di un solitone nero, mentre per valori di  $\tilde{g}_0^{(1D)}$  negativi e di  $v_\infty$  tendenti a zero si ottiene una soluzione "piatta". Di seguito mostriamo due grafici di confronto tra differenti valori dei parametri  $\tilde{g}_0^{(1D)}$ ,  $\tilde{g}_2^{(1D)}$  e  $v_\infty$ .

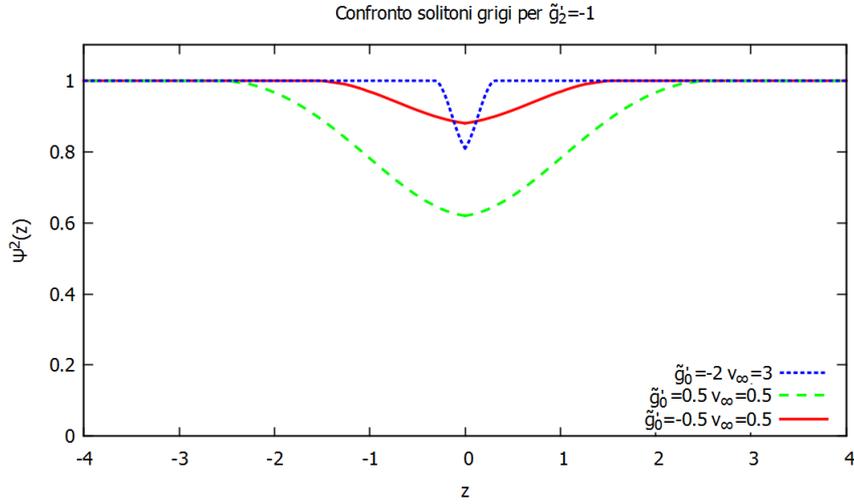


Figura 2.7: Confronto tra solitoni con lo stesso valore di  $\tilde{g}_2^{(1D)}$ , ma differenti valori di  $\tilde{g}_0^{(1D)}$  e  $v_\infty$ . Emerge chiaramente che per  $\tilde{g}_0^{(1D)} < 0$  e  $v_\infty \rightarrow 0$  la curva tende a diventare una “linea piatta”.

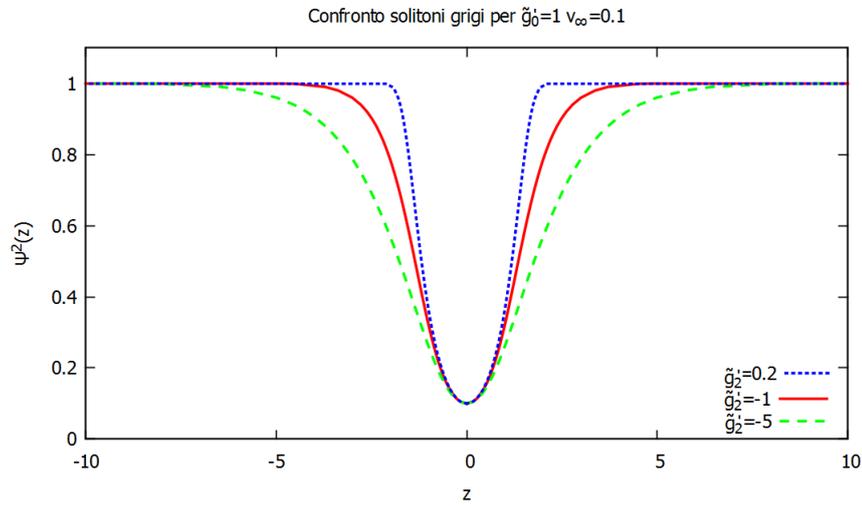


Figura 2.8: Confronto tra solitoni con  $\tilde{g}_0^{(1D)} = 1$  e  $v_\infty = 0.1$  e differenti valori di  $\tilde{g}_2^{(1D)}$ . Si noti che il punto di intersezione con l’asse delle  $\Psi^2$  non dipende dal valore di  $\tilde{g}_2^{(1D)}$ .



# Conclusioni

La descrizione della dinamica dei condensati di Bose-Einstein è un problema ancora aperto: uno dei sintomi che ci porta ad affermare ciò è la profonda indeterminazione del parametro  $g_2$  (Cap. 1, sez. 1.2.2). Tuttavia, al di là della determinazione univoca o meno dei parametri in gioco, possiamo trovare alcune peculiarità dei condensati di Bose-Einstein che discendono naturalmente dall'equazione di Gross-Pitaevskii modificata: abbiamo visto come la MGPE soddisfi il sistema di equazioni differenziali di Eulero, conosciute maggiormente sotto il nome di equazioni fondamentali della fluidodinamica (Cap. 2 sez. 1.1) e come sia possibile la ricerca di sue soluzioni attraverso il metodo della riduzione dimensionale: noi ci siamo soffermati sui solitoni (Cap. 2, sez. 2.2). In particolare, grazie alle condizioni al contorno, è stato possibile individuare due tipi di solitoni: quelli scuri e quelli chiari. Abbiamo poi concluso il capitolo con i solitoni grigi, che sono particolari solitoni scuri per cui la densità non è mai nulla.

Tuttavia, gli effetti di range finito discussi in questa tesi non hanno avuto, almeno per ora, riscontro sperimentale. Infatti, se dal 1995 fino ai giorni nostri ci sono stati numerosi esperimenti sui condensati di Bose-Einstein di atomi ultrafreddi e diluiti che hanno confermato l'utilità della equazione di Gross-Pitaevskii<sup>3</sup>, è anche vero che gli effetti di range finito previsti dalla equazione di Gross-Pitaevskii modificata non sono stati ancora osservati: infatti, per osservarli bisogna aumentare la densità del sistema, ovvero renderlo meno diluito, situazione difficile da ottenere con le tecniche sperimentali fino ad oggi create.

Ad ogni modo, dal 1995 ad oggi sono state introdotte nel mondo della Fisica Sperimentale moltissime innovazioni e apparati<sup>4</sup> che potrebbero aiutare a verificare la validità delle equazioni qui proposte. I risultati qui discussi circa i solitoni, non si presentano solo nell'ambito dei condensati di Bose-Einstein, ma pure in quello dell'Ottica non lineare (in particolare nei modelli fenomenologici riguardanti l'effetto Kerr): in [16] si ottengono le medesime espressioni a patto di reinterpretare le costanti  $\gamma$  e  $\rho_0$ . Sembra quindi che questi due ambiti della Fisica apparentemente differenti possano convivere e collaborare per la verifica o meno della validità della MGPE.

---

<sup>3</sup>Vedi Cap. 1 sez. 1.1.2.

<sup>4</sup>Non ci riferiamo solo al *laser cooling*, ma anche tecniche sperimentali vere e proprie, come la *Fano-Feshbach resonance*, il *phase engineering technique*, il *density engineering technique* e il *quantum state engineering*; ad esempio la tecnica di risonanza di Fano-Feshbach ha mostrato come sia possibile modificare l'ampiezza della lunghezza di scattering usufruendo di un campo magnetico esterno.



# Bibliografia

- [1] L. Salasnich (2014), *Quantum Physics of Light and Matter*, Springer International.
- [2] C.J. Pethick, H. Smith (2002), *Bose-Einstein Condensation in dilute gases*, Cambridge University Press.
- [3] F. Sgarlata, G. Mazzarella, L. Salasnich (2015), *Effective-range signatures in quasi 1D matter waves: sound velocity and solitons*, Journal Physics B: Atomic Molecular and Optical Physics **48** 115301.
- [4] H. Fu, Y. Wang, B. Gao (2003), *Beyond the Fermi pseudopotential: A modified Gross-Pitaevskii equation*, Physical Review A **67** 053612.
- [5] H. Veksler, S. Fishman, W. Ketterle (2014), *Simple model for interactions and corrections to the Gross-Pitaevskii equation*, Physical Review A **90** 023620.
- [6] A. Collin, P. Massignan, C. J. Pethick (2007), *Energy-dependent effective interactions for dilute many-body systems*, Physical Review A **75** 013615.
- [7] J. Garcia-Ripoll, V. Konotop, B. Malomed, V. M. Perez-Garcia (2003), *A quasi-local Gross-Pitaevskii equation for attractive Bose-Einstein condensates*, Mathematics and Computers in Simulation **72** 21-30.
- [8] P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, R. Carretero-Gonzales (2008), *Emergent nonlinear phenomena in Bose-Einstein condensates*, Springer.
- [9] J. S. Russell, (1844), *Report on waves*, Fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science.
- [10] K. Huang, (1997), *Meccanica Statistica*, Zanichelli.
- [11] L. Salasnich, A. Parola, L. Reatto, (2006) *Dimensional Effects on Solitonic Matter and Optical Waves with Normal and Anomalous Dispersion*, Journal Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, **39**, 28392847.
- [12] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, (1995), *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*, Science Vol. 296.
- [13] A. Parola, L. Salasnich, L. Reatto, (1998), *Structure and stability of bosonic clouds: Alkali-metal atoms with negative scattering length*, Physical Review A, Vol. 57, n. 5.

- [14] W. Krolikowski, O. Bang, (2000), *Solitons in nonlocal nonlinear media: Exact solutions*, Physical Review E, Vol. 63, 016610.
- [15] X. Ruan, Y. Cai, W. Bao, (2015), *Mean-field regime and Thomas-Fermi approximations of trapped Bose-Einstein condensates with higher order interaction in one and two dimensions*, arXiv:1511.00141.
- [16] T. Tsuzuki, (1971), *Non linear waves in Pitaevskii-Gross equation*, Journal of low temperature physics. Vol. 4, N. 4.
- [17] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, (1997), *Quantum Mechanics: Vol. 1, 2*, Hermann.
- [18] L. Pitaevskii, S. Stringari, (2003), *Bose-Einstein Condensation*, Oxford science publication.
- [19] L. Salasnich, A. Parola, L. Reatto, (2003), *Modulational instability and complex dynamics of confined matter-wave solitons*, Physical Review Letters, Vol. 91, 080405.
- [20] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G. V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein, (1999), *Dark solitons in Bose-Einstein condensate*, Physical Review **83** 5198.
- [21] M. R. Andrews, D. M. Kurn, H. J. Meisner, D. Durfee, C. G. Townsend, S. Inouye, (1997), *Propagation of sound in a Bose-Einstein condensate*, Physical Review Letters, Vol. 79, N. 4.
- [22] L. Salasnich, F. Toigo, (2015), *Dilute and ultracold atomic bosons: effective range effects at zero and finite temperature*.