

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Scienze Statistiche
Corso di Laurea Triennale in
Statistica per l'Economia e l'Impresa



**L'affidabilità dei modelli di Value at Risk nel settore della
Difesa: un'analisi empirica comparativa su Leonardo,
Rheinmetall e BAE Systems**

Relatore: prof. Simone Mazzonetto
Dipartimento di Scienze Statistiche

Laureando: Davide Biscaro
Matricola n. 2107359

Anno Accademico 2025/2026

INDICE

INDICE DELLE FIGURE E DELLE TABELLE	4
ELENCO DELLE FORMULE	4
RINGRAZIAMENTI	6
INTRODUZIONE	7

CAPITOLO 1 – IL RISCHIO FINANZIARIO E LE MISURE STATISTICHE DI RISCHIO8

1.1 Rischio e incertezza nei mercati finanziari	8
1.1.1 Tipologie di rischio finanziario	11
1.1.2 Incertezza aleatoria e incertezza epistemica.....	17
1.2 Misure statistiche del rischio.....	17
1.2.1 La varianza come misura di dispersione	19
1.2.2 La deviazione standard e la volatilità	20
1.2.3 Misure downside: semidevianza e downside deviation	21
1.3 Dalla statistica descrittiva al rischio di portafoglio.....	22
1.3.1 Asimmetria e curtosi delle distribuzioni dei rendimenti	23
1.3.2 Covarianza e correlazione tra attività finanziarie.....	25
1.3.3 Diversificazione e riduzione del rischio di portafoglio	27

CAPITOLO 2 – IL VALUE AT RISK.....30

2.1 Nascita e diffusione del Value at Risk	30
2.1.1 Formulazione	31
2.1.2 Indicatori prima del VaR.....	33
2.1.3 Il ruolo del VaR nella normativa di vigilanza.....	36
2.2 Approcci di calcolo	37
2.2.1 Metodo parametrico	37
2.2.2 Simulazione storica	39
2.2.3 Simulazione Monte Carlo	41
2.3 Limiti	43

2.3.1 Strumenti a supporto del VaR	46
2.3.2 Misure alternative di rischio	49
CAPITOLO 3 – ANALISI EMPIRICA	50
3.1 Obiettivi dell'analisi empirica.....	50
3.2 Dati e costruzione del dataset.....	51
3.2.1 Le società oggetto dell'indagine	51
3.2.2 Scelta, importazione e sistemazione dei dati	53
3.3 Metodologia e strumenti d'analisi.....	57
3.4 Procedura d'implementazione: fasi operative e struttura del codice in R-studio	59
3.5 Risultati dell'esperimento	60
3.5.1 Cause probabili delle violazioni individuate	66
CONCLUSIONE	68
BIBLIOGRAFIA	70

INDICE DELLE FIGURE E DELLE TABELLE

1.1 Skewness.....	24
1.2 Curtosi	25
3.1 Normalità dei rendimenti	55
3.2 Q-Q plot	56
3.3 Jarque Bera Test	57
3.4 Tabella delle violazioni	60
3.5 Rendimenti e soglia del VaR	61
3.6 Tabella del test Conditional Coverage	62
3.7 Rappresentazione del Conditional Coverage	64
3.8 Tabella del Kupiec test.....	64
3.9 Rappresentazione del Test di Kupiec.....	65
3.10 Tabella del Christoffersen test	65
3.11 Rappresentazione del Test di Christoffersen	66

ELENCO DELLE FORMULE

1.1 Valore atteso	17
1.2 Rendimento atteso	18
1.3 La varianza	19
1.4 La deviazione standard	20
1.5 La semivarianza	21
1.6 Skewness.....	23
1.7 Kurtosis	24
1.8 Covarianza	26
1.9 Correlazione	26
1.10 Rischio complessivo di portafoglio	27

2.1 Formula del VaR con livello di confidenza α	31
2.2 Probabilità di una violazione del VaR con livello di confidenza α	32
2.3 Formula del VaR con livello di confidenza $1 - \alpha$	32
2.4 Probabilità di una violazione del VaR con livello di confidenza $1 - \alpha$	32
2.5 Esposizione al rischio sistematico	34
2.6 Modify duration	35
2.7 Variabile casuale perdita	37
2.8 VaR come quantile della distribuzione delle perdite	38
2.9 Assunzione di normalità della distribuzione delle perdite	38
2.10 Formula del VaR con metodo parametrico	38
2.11 VaR parametrico e matrice di varianze e covarianze	38
2.12 VaR parametrico e indipendenza temporale tra gli asset	39
2.13 VaR come quantile della distribuzione effettiva delle perdite	40
2.14 Distribuzione empirica	40
2.15 Legge dei Grandi Numeri per la distribuzione empirica dei dati	40
2.16 Formula VaR con simulazione storica	41
2.17 Perdite nel VaR con simulazione Monte Carlo	42
2.18 Formula VaR con simulazione Monte Carlo	42
2.19 Subadattività	44
2.20 Dimostrazione della subadattività	44
2.21 Expected Shortfall	49
3.1 Calcolo rendimenti logaritmici	53
3.2 Formula del Conditional Coverage	62
3.3 Statistica test del Conditional Coverage	63

RINGRAZIAMENTI

Al termine di questo percorso, desidero dedicare alcune righe a tutte le persone che, in modi diversi, mi hanno accompagnato durante questi anni universitari.

Un ringraziamento speciale va all'esperienza Erasmus svolta a Madrid, che ha rappresentato uno dei momenti più significativi di questo percorso. Partito da solo, senza conoscere nessuno, mi sono trovato nel tempo a costruire un gruppo di persone che è diventato una vera e propria piccola famiglia. Con loro ho condiviso esperienze, momenti e situazioni che porterò con me anche in futuro. In questa occasione, voglio ringraziare anche tutti gli amici che sono riusciti a venirmi a trovare, dedicandomi il loro tempo e rendendo quella distanza molto più leggera.

Un ringraziamento va anche ai ragazzi conosciuti qui a Padova che, pur nelle dinamiche spesso veloci del percorso universitario, sono stati un punto di riferimento e un supporto durante gli studi.

Infine, il grazie più grande è per la mia famiglia che mi è sempre stata accanto lungo tutto questo percorso. Il loro sostegno costante, la pazienza e la fiducia che mi hanno dimostrato sono stati fondamentali per permettermi di arrivare fino a qui.

INTRODUZIONE

Nel contesto finanziario moderno, la gestione del rischio rappresenta un aspetto fondamentale sia per gli operatori di mercato sia per le istituzioni che ne regolano il funzionamento. La crescente complessità dei mercati e la velocità con cui le informazioni si riflettono sui prezzi rendono infatti sempre più necessario disporre di strumenti in grado di quantificare in modo sintetico e comprensibile le possibili perdite associate agli investimenti.

Tra le diverse misure sviluppate nel tempo, il Value at Risk (VaR) è diventato uno degli indicatori più utilizzati per la valutazione del rischio di mercato. La sua diffusione è legata soprattutto alla capacità di fornire una stima immediata della perdita massima attesa, dato un certo livello di probabilità e un orizzonte temporale definito. Proprio per questa semplicità interpretativa, il VaR è stato adottato non solo dagli operatori finanziari, ma anche nell'ambito della regolamentazione assumendo un ruolo centrale nei modelli di gestione del rischio.

Nonostante ciò, nel corso degli anni sono emerse diverse criticità legate al suo utilizzo. In particolare, alcuni eventi di forte instabilità dei mercati hanno evidenziato come il VaR possa risultare meno efficace proprio nei momenti in cui sarebbe più necessario, ovvero in presenza di shock improvvisi o di condizioni di elevata volatilità. Questo ha portato a un crescente interesse verso l'analisi dei suoi limiti e alla ricerca di strumenti alternativi o complementari.

Partendo da queste considerazioni, il presente lavoro si propone di verificare, in maniera empirica, l'affidabilità del VaR attraverso l'analisi di tre società appartenenti al settore della difesa. La scelta di concentrarsi su questo comparto è motivata dal fatto che esso risulta particolarmente sensibile a dinamiche geopolitiche e macroeconomiche che possono generare variazioni rilevanti nei prezzi e quindi nei livelli di rischio.

Il lavoro è strutturato in tre capitoli. Nel primo vengono introdotti i concetti teorici di base relativi al rischio finanziario, nel secondo si approfondiscono la nascita, le principali metodologie di calcolo e i limiti dello strumento e nel terzo, infine, viene presentata l'analisi empirica, con particolare attenzione ai risultati ottenuti e alla loro interpretazione.

CAPITOLO 1

IL RISCHIO FINANZIARIO E LE MISURE STATISTICHE DI RISCHIO

1.1 Rischio e incertezza nei mercati finanziari

È fondamentale spendere del tempo per comprendere una differenza essenziale all'interno della teoria economica, ovvero quella che sussiste tra “rischio” ed “incertezza”, due concetti spesso considerati simili o addirittura uguali, ma che in realtà sono assai diversi in particolare nell'analisi statistica e finanziaria.

A formalizzare l'idea fu l'economista statunitense Frank Hyneman Knight nel suo libro *Risk, Uncertainty, and Profit*¹ (1921) nel quale egli diede una prima spiegazione della discordanza tra i due termini. Infatti, mentre il primo fa riferimento ad una situazione nella quale esiti di eventi futuri sono associati a probabilità note o stimabili, il secondo, invece, si può ricondurre all'impossibilità di assegnare probabilità affidabili agli stessi avvenimenti.

Dunque, la discrepanza esistente tra i due vocaboli si consolida in alcuni punti fondamentali:

- La rappresentatività dei dati storici per la quantificazione del rischio che non vale per l'incertezza;
- La stabilità delle distribuzioni di probabilità di eventi (note o stimabili come anticipato) che caratterizza il rischio e che garantisce una certa prevedibilità e misurazione dello stesso in contrapposizione con episodi esogeni imprevedibili (crisi finanziarie, pandemie, guerre) che sono tipiche dell'incertezza;
- La presenza ridotta nel rischio di discontinuità tra le correlazioni fra variabili, contrariamente agli importanti cambiamenti (ad esempio nelle politiche monetarie e fiscali) legati all'incertezza².

In realtà, il rischio si potrebbe considerare come quella parte del secondo oramai ben noto concetto di “incertezza” che può essere stimata mediante tecniche e strumenti statistici che usufruiscono di informazioni passate (dalle quali si è convinti di poter ottenere dati utili) per trarre conclusioni sul futuro³.

¹ F. H. Knight, “*Risk, Uncertainty and Profit*”, Houghton Mifflin, 1921.

² Taleb, N. N. (2007), “*The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable*”.

³ F. H. Knight, “*Risk, Uncertainty and Profit*”, Houghton Mifflin, 1921.

In primo luogo, un elemento indispensabile per riuscire nell'intento è l'individuazione di distribuzioni di probabilità stabili da attribuire agli eventi (nel caso dei mercati finanziari s'intendono distribuzioni dei rendimenti) e comunque analizzabili, anche se non Normali, data la loro moderata volatilità⁴.

In secondo luogo, la condizione che permette la quantificabilità del rischio è la graduale modificazione delle relazioni (correlazione) tra le variabili oggetto d'analisi (ad esempio gli *asset*) che deve essere esente da shock che complicherebbero la gestione e manipolazione delle informazioni (*breakdown of correlations*)⁵.

A prova di quanto detto vi sono gli indici azionari liquidi giornalieri (o settimanali), ossia indici cui titoli possiedono alti volumi di scambio che tuttavia non causano significativi movimenti del prezzo come S&P 500, DJIA, e FTSE MIB (Italia). Tali indici mostrano, infatti, dinamiche solide e descrivibili chiaramente da distribuzioni statistiche note. Inoltre, l'elevata liquidità garantita dal numero cospicuo di scambi e dalla mole di dati che generano consente di calcolare stime robuste ed aggiornate⁶.

Al contrario del *measurable risk*, l'incertezza non misurabile (*unmeasurable uncertainty*) è tale, come già accennato, per l'assenza o l'incapacità di collegare a determinate evenienze probabilità affidabili a causa di una non informatività dei dati. In aggiunta, il concetto è definito da cambiamenti repentini ed improvvisi nelle dinamiche economiche e da imprevedibili episodi di natura estrema come guerre, pandemie e crisi. Tali motivazioni complicano lo studio delle nozioni a disposizione e fanno decadere la rappresentatività dei modelli (che in situazioni più stabili avrebbero avuto riscontri certamente migliori) perché i *jumps* (salti discontinui) dei prezzi incidono sulla continuità dei rendimenti, la normalità delle distribuzioni e la stabilità delle correlazioni⁷. È così che catastrofi come la crisi dei mutui *subprime* del 2008⁸ fanno percepire l'entità dell'incertezza a cui si sottopone il mercato e dei danni che essa può infliggere all'economia non solo nazionale, ma mondiale insieme alla fallacia degli strumenti d'analisi incapaci di diagnosticare eventi di magnitudine eccezionale.

Infine, al di là di avvenimenti inattesi, a rendere difficile la misurabilità dell'incertezza vi sono azioni umane che incidono pesantemente sulle strutture di mercato. Ne è l'esempio il mutamento di regimi

⁴ Mandelbrot, B. (1963), "*The Variation of Certain Speculative Prices*", The Journal of Business.

⁵ Longin, F., & Solnik, B. (2001), "*Extreme Correlation of International Equity Markets*", The Journal of Finance.

⁶ Hasbrouck, J., "*Empirical Market Microstructure*", Oxford University Press, 2007.

⁷ Merton, R. C. (1976), "*Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*", Journal of Financial Economics.

⁸ G. Gorton, "*The Panic of 2007*" in Maintaining Stability in a Changing Financial System, Federal Reserve Bank of Kansas City, 2008.

politico-monetari e fiscali (*regime shift*)⁹ attraverso riallineamenti dei tassi d'interesse, operazioni straordinarie di acquisto titoli come il *Quantitative Easing*¹⁰, politiche di austerità fiscale, comportamento degli operatori del mercato e riorganizzazioni normative che rendono inutilizzabili (alterandone le dinamiche stocastiche) la maggior parte delle informazioni storiche. A titolo d'esempio vi è l'introduzione di Basilea III in risposta alla crisi del 2008 da parte del Comitato di Basilea per la vigilanza bancaria (BCBS). Con questo insieme di regole, infatti, si volle rafforzare il sistema bancario globale mediante nuovi requisiti di capitale, *leverage ratio* ed altri meccanismi che modificarono la struttura bancaria rendendo inadoperabili serie storiche per la valutazione del rischio creditizio¹¹.

Il contributo di Knight è quindi doppiamente rilevante: non solo distingue tra ciò che è misurabile e ciò che non lo è, ma mette anche in evidenza come l'intero processo decisionale cambi radicalmente a seconda che gli agenti economici considerino le probabilità come oggettive o soggettive¹². Ciò significa che l'esistenza di una quantità sufficiente di dati permette di calcolare probabilità oggettivamente valide, mentre in assenza di questi entrano in gioco variabili come intuizione ed esperienza che, nel tentativo di raggiungere lo stesso fine, trasportano la finanza in una dimensione psicologica e comportamentale. Nella finanza moderna, questa distinzione è cruciale perché determina quali strumenti siano appropriati per analizzare un rischio "statisticamente quantificabile" e quali, invece, richiedano approcci qualitativi o euristici come scenari, stress test (simulazioni che applicano shock estremi, ma plausibili a una o più parti del sistema per osservare la propagazione) e analisi della vulnerabilità sistemica (studio della struttura del sistema che rende catastrofiche le conseguenze di un evento anche a bassa probabilità).

Tuttavia, l'opera di Knight, che racchiude delle delucidazioni indispensabili per la comprensione della realtà economico-finanziaria, non nasce come mero saggio riflessivo sulle nozioni di rischio e incertezza, ma piuttosto intende ricondurle ad un tema ben preciso, cioè l'origine del profitto economico. Infatti, a partire dalla tesi che il guadagno dell'imprenditore si dovesse non tanto al rischio (valutabile, remunerabile ed assicurabile), quanto alla capacità di compiere delle scelte in condizioni di vera incertezza, proviene la separazione tra profitto e salario. Mentre il primo sarebbe il compenso di colui che si interfaccia con l'incertezza non quantificabile, l'imprenditore, l'altro sarebbe la

⁹ J. D. Hamilton, "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle", *Econometrica*, 1989.

¹⁰ Federal Reserve Bank of St. Louis - Review Series, "Quantitative Easing: How Well Does This Tool Work?".

¹¹ Basel Committee on Banking Supervision, *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks*, 2011.

¹² F. H. Knight, "Risk, Uncertainty and Profit", Houghton Mifflin, 1921.

remunerazione del manager, ovvero di colui che gestisce il rischio (più facilmente prevedibile e misurabile)¹³.

Tuttavia, questo non è il solo campo nel quale la *knightian uncertainty* è applicata. Difatti, altre discipline come la Finanza Comportamentale abbracciano il concetto per fornire spiegazioni ad episodi occasionali e disastrosi come crisi e crash finanziari che, di norma, strumenti statistico-matematici non sono in grado di prevedere¹⁴.

1.1.1 Tipologie di rischio finanziario

È altrettanto importante venire a conoscenza delle diverse sfaccettature che rischio e incertezza possono assumere.

Anzitutto, il rischio si riparte in sistematico e specifico. Questa prima suddivisione proviene dalle moderne teorie del portafoglio come, ad esempio, il CAMP (*Capital Asset Pricing Model*)¹⁵ che mirano a comprendere quali rischi siano remunerati dai mercati e come mitigare il loro impatto sui portafogli attraverso l'impiego di strategie operative e di allocazione. Dunque, mentre il rischio sistematico è quella parte di rischio non eliminabile nemmeno con la diversificazione e che dipende da eventi di carattere macroeconomico (variazione dell'inflazione, crisi, fluttuazioni del ciclo economico) che contraddistinguono i mercati, il rischio specifico è strettamente connesso all'andamento e alle peculiarità dell'impresa a cui fa riferimento. Contrariamente a quanto affermato per la componente sistematica, quella specifica è riducibile mediante la diversificazione che consente di limitare l'effetto di problematiche come inefficienze operative e di governance, controversie legali e molte altre¹⁶.

Un'altra dicotomia è quella tra rischio oggettivo e soggettivo. Il primo, come si potrebbe dedurre dal termine stesso, si manifesta quando le probabilità possono essere dedotte dai dati, ovvero quando dall'analisi statistica studi differenti giungono alle medesime conclusioni. Un esempio pratico si ha dall'osservazione dei mercati liquidi o degli strumenti standardizzati che offrono grandi quantità di dati con moderate variazioni le quali garantiscono uno studio lineare. All'opposto, un rischio soggettivo si origina dai giudizi costruiti da esperti che, per quanto siano tali, non formulano stime

¹³ F. H. Knight, "*Risk, Uncertainty and Profit*", Houghton Mifflin, 1921.

¹⁴ Fox, C. R., & Tversky, A. (1995), "*Ambiguity Aversion and Comparative Ignorance*", The Quarterly Journal of Economics.

¹⁵ W. F. Sharpe, "*Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*", Journal of Finance, 1964.

¹⁶ H. Markowitz, "*Portfolio Selection*", New York: Wiley, 1959.

che sono una funzione diretta dei dati, ma ipotesi frutto di conoscenza ed esperienza sovente influenzate dall'errore umano. Casi come investimenti in paesi emergenti, innovazioni finanziarie o asset illiquidi ne sono la dimostrazione. Purtroppo, la maggior parte delle previsioni realizzate sui mercati incorpora quest'ultima tipologia di rischio generando così un'incertezza difficilmente modellabile¹⁷.

Infine, se si volesse distinguere dal lato operativo il rischio si potrebbero individuare:

- Rischio di mercato, cioè la variazione dei prezzi delle attività finanziarie;
- Rischio di credito, ovvero la possibilità che la controparte di un'obbligazione finanziaria (nata da un contratto o un accordo) risulti inadempiente;
- Rischio di liquidità, ossia l'impossibilità di poter convertire un investimento in liquidità senza subire uno svantaggio legato al prezzo;
- Rischio operativo, cioè quel pericolo che nasce dall'errore umano, dalle truffe e dai processi;
- Rischio sistemico, ovvero il rischio di contagiare l'intero sistema finanziario¹⁸.

Rischio di mercato

Il rischio di mercato è strettamente legato alla volatilità dei prezzi, ovvero alla possibilità che l'oscillazione degli stessi possa causare variazioni negative in una posizione finanziaria o all'interno di un intero portafoglio. A differenza di altre tipologie di rischio, esso è direttamente osservabile data l'immediatezza con la quale eventuali cambiamenti economico-finanziari si riflettono nei mercati e verso i quali può essere esercitata in ogni momento una misurazione.

Per di più, tale rischio deriva dall'influenza che alcuni fattori di carattere economico possiedono nei confronti dei rendimenti degli asset e dei meccanismi che li generano. Infatti, su questa base si individuano quattro categorie principali:

- Rischio azionario, ovvero il pericolo che il valore di alcune posizioni si riduca a causa di fluttuazioni nei prezzi di mercato;
- Rischio di cambio (o *foreign exchange risk*), ossia nei mercati globali ed in particolare nel commercio estero la possibilità che i tassi di cambio tra distinte valute possano subire variazioni;

¹⁷ Tetlock, P. E., & Gardner, D. (2015), "*Superforecasting: The Art and Science of Prediction*", Crown Publishers.

¹⁸ Basel Committee on Banking Supervision, *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks*, 2011.

- Rischio di tasso d'interesse, in altri termini l'oscillazione dei tassi d'interesse che sono essenziali per la determinazione del valore dell'attività finanziaria come, ad esempio, obbligazioni, prestiti e derivati su tassi. Comunemente misurato mediante indicatori come la *duration*¹⁹, questo rischio si potrebbe manifestare sotto due forme diverse: il rischio di prezzo, cioè la variazione del prezzo di strumenti finanziari a reddito fisso, oppure il rischio di reinvestimento, ossia la pericolosità secondo la quale eventuali flussi di cassa futuri potrebbero essere reinvestiti ad un certo tasso. Detto ciò, oggi giorno l'oscillazione dei tassi è governata dalle scelte delle banche centrali;
- Rischio di materie prime (o *commodity risk*), ovvero il cambiamento di valore di posizioni che coinvolgono materie prime come oro, petrolio, energia e molte altre dovuto a variazioni dei loro prezzi provenienti soprattutto da dinamiche di domanda e offerta, condizioni climatiche, tensioni geopolitiche e vincoli di tipo logistico²⁰.

Pertanto, il vantaggio che nasce da una tale scomposizione del rischio è quello di poter comprendere quale sia realmente la vera fonte di incertezza del rischio stesso in modo tale da saperlo gestire al meglio applicando modelli e misure appropriati ad ogni singola situazione.

Infine, è utile sottolineare come il rischio di mercato non sia una costante invariabile nel tempo, ma al contrario sia fortemente condizionato da fasi di stress dell'economia come le crisi finanziarie in cui l'instabilità aumenta e conseguentemente il rischio si amplifica.

Rischio di credito

A differenza del rischio di mercato, il rischio di credito fa riferimento all'eventualità in cui la controparte di un rapporto risulti inadempiente in merito alle obbligazioni contrattuali assunte generando, così, una perdita economica per il creditore. Questa, infatti, è una delle fonti di rischio principali per banche, intermediari finanziari ed investitori istituzionali che fanno del credito la loro attività fondamentale²¹.

Proprio per l'importanza che in generale il credito possiede, è stato creato un metodo per quantificare il rischio di credito che assume il nome di *expected loss*, ossia la perdita attesa associata a tale rischio.

¹⁹ La *duration* (o *durata finanziaria*) è un indice che misura la vita media ponderata di un investimento e ne stima la sensibilità ai tassi d'interesse. Più alta è e più il prezzo del titolo è volatile al variare dei tassi.

²⁰ Angelo Corelli, "Understanding Financial Risk Management", Bingley: Emerald Publishing Limited, 2019.

²¹ Saunders, A., Allen, L. (2010), "Credit Risk Management", Wiley.

Essa è costituita da tre elementi essenziali:

- *Probability of Default*: la probabilità che il debitore diventi insolvente (incapace di soddisfare le proprie obbligazioni) entro un certo lasso temporale;
- *Loss Given Default*: la parte di credito che non viene recuperata in caso di default (incapacità patrimoniale del debitore);
- *Exposure at Default*: totale esposizione creditizia al momento dell'insolvenza²².

Il prodotto tra queste tre grandezze è, perciò, la perdita attesa che rappresenta la quantificazione del rischio di credito, ma non è il solo modo per dare concretezza a quest'ultimo. Infatti, un altro criterio adottato per la valutazione di solvibilità di un emittente/debitore è il *rating*, un giudizio che agenzie specializzate esprimono riguardo alla capacità di un soggetto di far fronte ai propri impegni finanziari. Tuttavia, durante periodi di forti tensioni, il *rating* perde di significatività, tempestività ed isolarlo dal ciclo economico risulta molto più complicato di quanto già sia nei momenti di maggiore stabilità²³.

Rischio di liquidità

Per capire a pieno a cosa questa tipologia di rischio faccia riferimento è opportuno fornire una spiegazione del concetto di "liquidità". Questo termine, difatti, è solito identificare in finanza beni come il denaro contante (che è per antonomasia il bene più liquido che esista), i Titoli di Stato e tutta quella serie di metodi che permettono di accantonare il denaro stesso (conto corrente, ad esempio) che possono essere rapidamente convertiti in potere d'acquisto e per i quali ciò possa avvenire senza subire perdite di valore.

Ciò nonostante, s'incontra non poca difficoltà nella sua misurazione non essendoci una formulazione esclusiva ed universale che permetta il calcolo di un valore rilevante come espressione dello stato di liquidità di un determinato bene finanziario. Eppure, nel tentativo di estrapolare qualche informazione s'impiegano stress test, scenari ipotetici e si monitorano volumi di scambio, transazioni, *spread* ed altri indici che possano condurre ad una quanto più precisa valutazione²⁴.

Da notare sono i passi da gigante che la normativa ha fatto in questo ambito dopo la grave crisi del 2007-2008. Anche se le cause furono molteplici e la principale venne considerata la tensione del mercato dei mutui *subprime* statunitensi, si riscontrò pure la presenza di una forte crisi di liquidità

²² Basel Committee on Banking Supervision (2006), "*International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*".

²³ Amato, J. D., Furfine, C. H. (2004), "*Are credit ratings procyclical?*", Journal of Banking & Finance.

²⁴ Amihud, Y. (2002), "*Illiquidity and stock returns*", Journal of Financial Markets.

che culminò con il crollo di una delle più grandi e potenti banche americane, la Lehman Brothers. Da quel momento in poi il Comitato di Basilea, organo istituito per garantire vigilanza e cooperazione bancaria a livello mondiale, intensificò ed irrigidì la regolamentazione in tema di liquidità con Basilea III, quadro normativo con l'obiettivo di scongiurare tragedie come quella appena successa o quanto meno di ridurne l'entità²⁵.

Rischio operativo

Il rischio operativo è connesso al (mal)funzionamento di un'organizzazione economica e la sua presenza è correlata a quattro fattori: persone, processi, sistemi ed eventi esterni.

Innanzitutto, per persone s'intende tutto quell'insieme di comportamenti ed atteggiamenti che esse possono adottare durante il loro lavoro congiuntamente con il loro modo di essere, il loro livello d'istruzione e la naturale componente d'errore che caratterizza l'essere umano. Pertanto, esse potrebbero essere negligenti, mantenere comportamenti fraudolenti, mostrare scarso impegno, insufficienti conoscenze e commettere errori aumentando notevolmente le probabilità di problemi operativi.

I processi, invece, sono sequenze di attività in essere per espletare l'attività economica che, però, potrebbero affrontare delle difficoltà come, ad esempio, arretratezza, carenza di controlli, inadeguatezza all'attività ed errori di varia natura.

Alla parola sistemi si riconducono, piuttosto, i malfunzionamenti informatici, i *cyber risk*, le interruzioni di servizi tecnologici o ancora la perdita di dati sensibili. Ed infine, vi sono gli eventi esterni come catastrofi naturali, pandemie, guerre e cambiamenti normativi che possono mettere a dura prova l'organizzazione e la sua produzione²⁶.

Da quanto appena affermato si capisce come il rischio operativo possieda una certa multidimensionalità dalla quale, però, deriva anche la difficoltà riscontrata nella sua stima. Il fatto che quantificare questa tipologia di rischio non sia semplice è, tuttavia, un problema rilevante dato che una sua sottovalutazione potrebbe essere fonte di gravi problematiche. A sostegno di tale affermazione si riporta un caso emblematico di insuccesso nella previsione del rischio operativo, ovvero il fallimento della Barings Bank, storica banca d'investimento britannica. Al suo interno un operatore, il signor Nick Leeson, sfruttò a suo favore la scarsa organizzazione e regolamentazione

²⁵ Basel Committee on Banking Supervision (2011), "*Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems*".

²⁶ Power, M. (2005), "*The invention of operational risk*", Review of International Political Economy.

della società per accumulare posizioni speculative non autorizzate sui derivati che arrivarono a superare addirittura il capitale della banca. In aggiunta, il fatto che potesse ricoprire contemporaneamente due posizioni, ovvero quella del *front office* e del *back office* gli permise di occultare le perdite che generava mediante un conto fittizio che passò alla storia come “conto 88888”. Il tutto, però, si aggravò nel 1995 quando un terremoto in Giappone fece crollare l'indice Nikkei e le perdite che Leeson procurò ammontarono a circa 1,3 miliardi di sterline facendo fallire la banca²⁷. Questo caso è la chiara dimostrazione di una sottovalutazione del rischio che, in mancanza di controlli e regolamenti interni, si rivelò fatale per l'organizzazione.

Rischio sistemico

Il rischio sistemico è il pericolo che il fallimento o le gravi difficoltà di uno o più intermediari finanziari, mercati o infrastrutture possano contagiare l'intero sistema finanziario. Quindi, il concetto alla base di questo rischio è quello di “propagazione” delle perdite attraverso canali come:

- Legami finanziari diretti: prestiti, derivati, cartolarizzazioni ed altri costituiscono connessioni tra operatori economici e l'insolvenza di uno produce perdite immediate anche per le controparti;
- Canale della liquidità: in periodi di stress come le crisi la mancanza di fiducia e la paura possono indurre le persone a chiedere liquidità trasformando crisi localizzate in crisi di liquidità globali;
- Dinamiche di prezzo: la vendita di attività finanziarie da parte di istituzioni ed investitori provoca una caduta dei prezzi;
- Canale informativo: ancora una volta panico e paura sfociano in comportamenti imitativi che amplificano le problematiche esistenti.

In un mondo sempre più interconnesso tale rischio non può essere dimenticato e affinché ciò avvenga vi deve essere sensibilizzazione al pericolo del contagio. In passato, all'opposto, gli intermediari sfidavano il “*too big to fail*”, ovvero assumevano rischi rilevanti nei confronti di grandi istituzioni con la consapevolezza che non avrebbero fallito perché l'intervento pubblico non l'avrebbe permesso. Fortunatamente, dopo la crisi del 2008 le cose cambiarono e questo tipo di comportamenti furono ridimensionati²⁸.

²⁷ Rawnsley, A. (1995), “*Total Risk: Nick Leeson and the Fall of Barings Bank*”, HarperCollins.

²⁸ European Systemic Risk Board. (2014). “*The concept of systemic risk*”. Frankfurt am Main: ESRB.

1.1.2 Incertezza aleatoria e incertezza epistemica

Anche l'incertezza possiede una bipartizione fondamentale che gioca un ruolo cruciale all'interno del *risk management*²⁹, ossia il processo di identificazione, valutazione, mitigazione e controllo del rischio. Infatti, si distingue tra incertezza aleatoria, in altre parole legata alla natura casuale dei fenomeni, ma misurabile statisticamente mediante volatilità, distribuzioni e correlazioni, ed incertezza epistemica, ovvero derivante dalla mancanza di conoscenza o dall'incompletezza ed erroneità dei modelli adottati³⁰. È tanto essenziale questa distinzione perché è sempre più frequente trattare la seconda tipologia di incertezza come fosse la prima invece di comprendere anzitutto quale sia la vera fonte di insicurezza.

1.2 Misure statistiche del rischio

Dopo aver compreso la proprietà che distingue il rischio dall'incertezza, ovvero la sua misurabilità, si passa finalmente ad esaminare quali siano gli strumenti adottati dagli esperti per compiere con questa sua caratteristica.

Tuttavia, un concetto che bisogna introdurre per una migliore cognizione degli argomenti a seguire è quello di *expected value* (valore atteso), ossia il valore medio (o semplicemente media) che ci si aspetta di ottenere se un esperimento venisse ripetuto un numero sufficientemente grande di volte. Statisticamente parlando, la formula per calcolarlo si struttura in forme diverse a seconda che la variabile casuale (funzione che associa ad ogni possibile esito di un esperimento casuale un numero reale) per la quale si vuole determinare sia discreta (l'insieme dei valori che può assumere è finito o un infinito numerabile) o continua (l'insieme dei valori che può assumere è non numerabile).

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot p(x_i) \quad \text{nel caso discreto}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad \text{nel caso continuo}$$

1.1

²⁹ A. McNeil, R. Frey, P. Embrechts, "*Quantitative Risk Management*", Princeton University Press, 2005.

³⁰ Der Kiureghian, A., & Ditlevsen, O. (2009), "*Aleatory or epistemic? Does it matter?*", Structural Safety.

Quella appena sopra è la formulazione statistica della media dove $p(x_i)$ è la probabilità del valore x_i e $f(x)$ è la funzione di densità di probabilità della variabile casuale X .

L'applicazione di tale strumento al mondo della finanza serve, quindi, a misurare l'*expected return* (rendimento atteso) di un investimento o di un portafoglio.

$$E[R] = \sum_{i=1}^n R_i \cdot P_i \quad \text{rendimento atteso dell'asset } R$$

1.2

Dove:

- R_i è il rendimento potenziale in un determinato scenario i ;
- P_i è la probabilità che si verifichi lo scenario i ;
- n è il numero totale di scenari.

Un esempio pratico per dare dimostrazione del funzionamento dello strumento è il seguente:

Se esistessero due scenari, lo Scenario X che rappresentasse un periodo di recessione con un rendimento $R_x = -10\%$ e una probabilità ad esso connessa del $P_x = 30\%$, e lo Scenario Z che fosse, invece, un periodo di crescita con rendimento $R_z = 15\%$ e probabilità associata $P_z = 70\%$, il valore atteso dell'investimento sarebbe:

$$E[R] = (R_x \cdot P_x) + (R_z \cdot P_z) = (-0.10 \cdot 0.30) + (0.15 \cdot 0.70) = 0.075 = 7.5\%$$

Dunque, il rendimento atteso di un'attività finanziaria come un'obbligazione o un'azione si considera come il guadagno che l'investitore si aspetta di ricevere in futuro sulla base di una distribuzione di probabilità dei possibili scenari economici. Dunque, è proprio attorno a questo valore che le performance di un titolo solitamente si disperdono.

Quindi, l'essenzialità di questo elemento deriva proprio dalla sua centralità nell'analisi statistica, finanziaria e all'implicazione che ha ricevuto in numerose teorie economico-finanziarie come la

Teoria del Portafoglio di Markowitz nella quale il rischio percepito dall'investitore cresce all'aumentare della sua variabilità rispetto alla media³¹.

1.2.1 La varianza come misura di dispersione

Nel mondo economico-finanziario gli strumenti che per primi hanno tentato di quantificare il rischio inteso come scostamento dei dati da un valore centrale sono la varianza e la deviazione standard. Per la loro importanza, essi sono stati inseriti alla base di modelli economici come il CAPM³² e la già precedentemente nominata *Portfolio Selection*³³ di Markowitz.

Riprendendo il concetto di valore atteso, si definisce varianza (e si indica con la lettera greca *sigma* elevata al quadrato) la dispersione dei rendimenti attorno alla loro media e algebricamente tale affermazione si traduce in:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2$$

1.3

dove r_t è il rendimento di un titolo al tempo t , mentre $\bar{r}$ è il rendimento medio dello stesso.

Un'interpretazione molto semplice ed intuitiva di tale formula è che un'elevata varianza conduce ad un rischio maggiore e, conseguentemente, ad una situazione di forte incertezza. Al contrario, una dispersione più bassa dei dati intorno alla loro media indica stabilità e minore volatilità.

Nella sua teoria, Markowitz dimostrò che sotto l'ipotesi di razionalità degli investitori e assumendo sufficientemente Normale la distribuzione dei rendimenti degli asset presi in considerazione, tale strumento risulta essere efficiente per lo scopo in cui è impiegato. Difatti, per l'investitore si genera un *trade-off*, ovvero la scelta tra rendimento atteso e varianza che confluisce nel tentativo di ottimizzare la relazione tra queste due dimensioni.

Ciò nonostante, questo metodo non è privo di limiti fra i quali si evidenziano la non realistica indifferenza dell'uomo a perdite e guadagni e l'incorretta ipotesi di normalità dei mercati. Infatti,

³¹ H. Markowitz, "*Portfolio Selection*", Journal of Finance, 1952.

³² Sharpe, W. F. (1964), "*Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk*", The Journal of Finance,

³³ H. Markowitz, "*Portfolio Selection*", Journal of Finance, 1952.

secondo la formula, deviazioni positive e negative dei rendimenti verrebbero pesate ugualmente anche se numerosi studi di finanza comportamentale hanno dimostrato come le perdite posseggano un peso perfino doppio di quello dei guadagni³⁴. Invece, in merito alla regolarità dei mercati, è risaputo che in particolare dati di carattere finanziario non seguano distribuzioni normali, ma siano invece ricchi di asimmetrie e comportamenti anomali che conducono a stime errate del rischio³⁵.

Detto ciò, la varianza utilizzata singolarmente fatica ad essere una buona tecnica di quantificazione del rischio ed è per questo che è da considerarsi il primo elemento di un insieme di strumenti più sofisticati che se strutturati opportunamente possono dare origine a previsioni con un alto grado di fiducia.

1.2.2 La deviazione standard e la volatilità

Dal concetto di varianza proviene quello di *standard deviation*. Matematicamente calcolata come la radice quadrata della varianza

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

1.4

esprime lo scostamento dei rendimenti dal loro valore medio, ma differentemente dallo strumento precedente lo fa mantenendo la stessa unità di misura del rendimento. Ciò facilita notevolmente la sua interpretazione.

Anche se può apparire un gioco di parole, la deviazione standard calcola quanto, in media, i dati si allontanano dal loro valore medio misurando, in altre parole, l'ampiezza media delle fluttuazioni intorno al valore atteso³⁶.

In ambito finanziario questo strumento rappresenta la volatilità, ossia il grado complessivo di instabilità di un'attività finanziaria che sovente si impiega come indicatore sintetico di rischio e

³⁴ Kahneman, D., Tversky, A. (1979), "Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk", *Econometrica*.

³⁵ Mandelbrot, B. (1963), "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*.

³⁶ Elton, E. J., Gruber, M. J. (1995), "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis", Wiley.

tramite il quale si costruiscono intervalli di confidenza³⁷ e stime di perdite potenziali di breve periodo³⁸.

Tuttavia, anche la *standard deviation* presenta le stesse limitazioni della varianza che ne compromettono la piena efficacia.

1.2.3 Misure downside: semidevianza e downside deviation

Per oltrepassare i limiti che varianza e deviazione standard portano con sé, sono state create delle misure di rischio cosiddette asimmetriche, ovvero che focalizzano la loro attenzione esclusivamente sugli scostamenti negativi.

Nasce così la semivarianza come quantificatore del rendimento vincolato ad un livello di riferimento chiamato *target return*. Tale soglia, che a seconda dell'oggetto d'analisi e delle finalità della stessa, può essere un rendimento medio, un tasso *risk free* (privo di rischio) o ancora un livello minimo accettabile (*Minimum Acceptable Return*, MAR), permette finalmente di concentrarsi sulle deviazioni negative tralasciando quelle positive e ovviando in questa maniera al problema dell'uguaglianza apparente tra fluttuazioni di segno opposto.³⁹

La formula

$$SemVar = \frac{1}{n} \sum_{i:r_i < t} (r_i - t)^2$$

1.5

dove r_i è il rendimento dell' i -esimo periodo, t è il rendimento *target* ed n è il numero totale delle osservazioni, esprime dal punto di vista economico più un rischio di perdita che d'instabilità complessiva dei rendimenti ed è particolarmente utile, per esempio, quando si trattano fondi pensione o attività di gestione patrimoniale nelle quali l'obiettivo centrale è il raggiungimento di una soglia minima di rendimento⁴⁰.

³⁷ In statistica, l'intervallo di confidenza (IC) è un intervallo di valori entro il quale si ritiene, con un certo livello di probabilità (detto livello di confidenza), che si trovi il vero valore di un parametro ignoto di una popolazione (come la media).

³⁸ Hull, J. C. (2021). "Options, Futures, and Other Derivatives", Pearson.

³⁹ Fishburn, P. C. (1977), "Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns", American Economic Review.

⁴⁰ Sortino, F. A., Van der Meer, R. (1991), "Downside Risk", Journal of Portfolio Management.

Allo stesso modo in cui la *standard deviation* è la radice quadrata della varianza, la *downside deviation* si calcola come la radice quadrata della semivarianza e si esprime nella stessa unità del rendimento. Essa tratta solamente la parte di volatilità negativa e viene sovente impiegata per la costruzione di indicatori di performance come l'indice di Sortino che rapporta deviazione standard e *downside deviation*⁴¹.

Anche se formulate nel tentativo di supplire ad alcune problematiche di varia natura, quest'ultime due misure di rischio presentano ancora diverse difficoltà, prima fra tutte la soggettività della scelta del *target return*. Tale decisione può influenzare decisamente il valore da trovare e, perciò, il loro utilizzo è ridotto all'interno di modelli regolamentari, mentre sicuramente più presente nella gestione attiva e, come già sostenuto, nella misurazione di performance.

1.3 Dalla statistica descrittiva al rischio di portafoglio

Quanto analizzato fino ad ora sono stati dei metodi che mostrerebbero ciò che accadrebbe nella realtà se un investitore decidesse di investire in una singola attività finanziaria e laddove l'assunzione di Normalità della distribuzione dei rendimenti fosse vera. In questo caso gli strumenti descritti giocherebbero un ruolo fondamentale nella misurabilità del rischio e dipenderebbero esclusivamente dall'asset oggetto di studio.

Contrariamente a ciò, la pratica operativa è ben diversa e secondo le moderne teorie finanziarie la costruzione di un portafoglio di titoli sta alla base di qualsiasi scelta razionale e segue un principio cardine all'interno del mondo finanziario: il principio della diversificazione.

Da tali fattori scaturisce, perciò, il fatto che il rischio non proviene e non è più valutato sul singolo prodotto finanziario, ma sull'interazione tra più asset che, combinati correttamente, contribuiscono alla sua riduzione. Dunque, il passaggio da una strategia univariata ad una multivariata permette una gestione migliore del problema trasformando il rischio in qualcosa di sistemico e non più influenzato solamente dalla volatilità del titolo, ma pure dalle dipendenze tra esso e le altre attività che compongono il portafoglio dell'investitore⁴².

⁴¹ Sortino, F. A., Price, L. N. (1994), "Performance Measurement in a Downside Risk Framework", Journal of Investing.

⁴² Elton, E. J., Gruber, M. J., Brown, S. J., Goetzmann, W. N. (2014), "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis", Wiley.

1.3.1 Asimmetria e curtosi delle distribuzioni dei rendimenti

Una delle più grandi difficoltà che gli analisti incontrano all'ora di studiare i mercati e le serie storiche di dati che ne contengono gli andamenti, è la natura del dato finanziario. Infatti, i rendimenti degli asset si caratterizzano per possedere distribuzioni di probabilità fortemente asimmetriche che complicano l'inferenza statistica e la capacità di previsione. Questa peculiarità del dato rende inefficienti strumenti come varianza e deviazione standard che non realizzano buone stime e tendono ad essere fuorvianti.

A tale scopo sono stati creati due misuratori in grado di quantificare in qualche modo la consistenza del problema ed essi sono la *skewness* (asimmetria) e la curtosi. La prima si occupa di valutare il livello di asimmetria di una distribuzione dei dati rispetto alla loro media ed è calcolata nel modo seguente:

$$Skewness = \frac{E[(r - \mu)^3]}{\sigma^3}$$

1.6

La sua formula, in cui compaiono r come rendimento del titolo, μ come valore medio dello stesso e al denominatore la deviazione standard al cubo, indica se i rendimenti si concentrano più da un lato o dall'altro del valore centrale. Questo si deduce dalla positività o negatività del risultato: se esso è positivo, infatti, la coda destra della distribuzione si presenta come più lunga ed è il segnale della presenza di eventi rari e con rendimenti molto elevati. Al contrario, un esito negativo configura una lunga coda sinistra sintomo di un rischio elevato di perdite estreme⁴³.

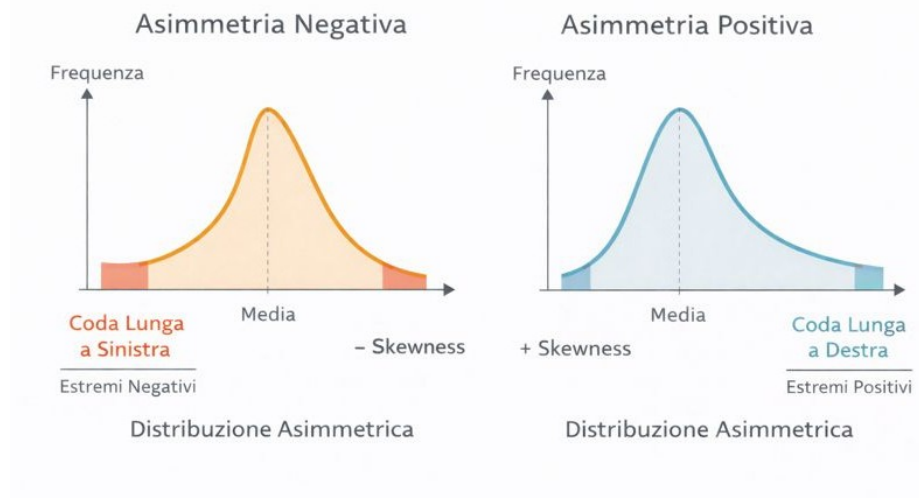
È di facile intuizione il fatto che gli investitori preferiscano un'asimmetria positiva rispetto ad una negativa perché questa implica una maggiore probabilità di guadagno rispetto a ingenti perdite⁴⁴.

L'immagine che segue è chiarificatrice rispetto al concetto di asimmetria e mostra la posizione delle curve come sopra descritto.

⁴³ Stuart, A., & Ord, K. (1994), "Kendall's Advanced Theory of Statistics, Vol. 1: Distribution Theory", Edward Arnold.

⁴⁴ Brooks, C. (2019), "Introductory Econometrics for Finance", Cambridge University Press.

Skewness in Finanza



1.1 Skewness (Immagine generata con l'AI)

Per ciò che concerne, invece, la curtosi (dal greco “*kurtosis*” che significa curva, gobba) essa è uno strumento di misura della pesantezza delle code della distribuzione e del grado di concentrazione dei dati attorno alla loro media. Quando si parla di “pesantezza” della coda s’intende identificare un indicatore di frequenza di eventi estremi, ossia quelli che graficamente si troverebbero in una posizione ben distante dal valore centrale⁴⁵.

$$Kurtosis = \frac{E[(r - \mu)^4]}{\sigma^4}$$

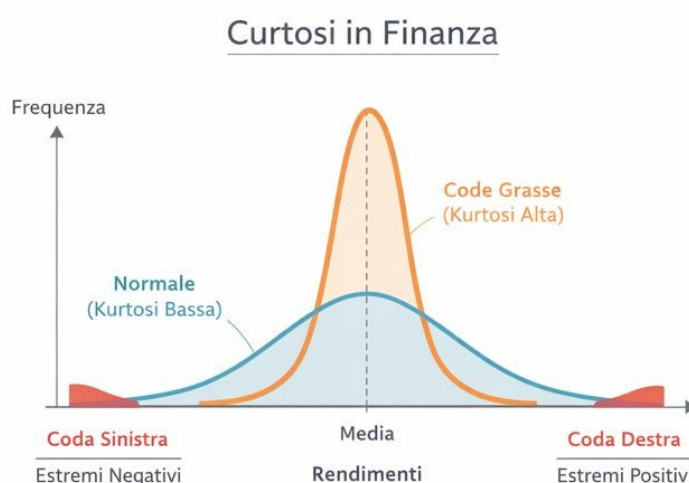
1.7

Gli elementi che compongono la formula rimangono gli stessi della *skewness* con una particolare attenzione all’esponente che passa dall’essere un 3 ad un 4. Tale scelta trova la sua spiegazione nella volontà della curtosi di far risaltare gli eventi eccezionali che, elevati alla quarta potenza, danno origine a valori enormi difficilmente trascurabili. Inoltre, un’altra motivazione è costituita dall’indifferenza rispetto al segno (all’opposto dell’asimmetria per cui il segno è fondamentale e che motiva l’adozione di un’esponente dispari) che viene tralasciato in cambio della piena conoscenza dell’entità del medesimo.

⁴⁵ Westfall, P. H. (2014). "Kurtosis as Peakedness, 1905–2014. R.I.P.". The American Statistician.

Quindi, l'esito di questa formula può ricevere tre interpretazioni principali:

- $\text{Curtosi} > 3$: La distribuzione si definisce “leptocurtica”, ovvero possiede code più pesanti (*fat tails*) e punte più alte rispetto ad una distribuzione Normale;
- $\text{Curtosi} < 3$: La distribuzione si definisce “platicurtica”, ossia presenta code più leggere ed una forma piatta;
- $\text{Curtosi} = 3$: La distribuzione si definisce “mesocurtica” e corrisponde a quella di una Normale Standard⁴⁶.



1.2 Curtosi (Immagine generata con l'AI)

Nella realtà finanziaria la distribuzione leptocurtica è ricorrente a dimostrazione che assunzioni sulla normalità dei mercati non siano da considerarsi vere.

Varianza e curtosi sono, dunque, l'esempio pratico dell'esistenza di distribuzioni che non seguono la normalità e lo sforzo per cercare di comprenderne l'entità così da risaltarne i limiti applicativi.

1.3.2 Covarianza e correlazione tra attività finanziarie

Una volta compresi i limiti d'analisi del dato finanziario si continua con la spiegazione del concetto di “portafoglio d'investimento”. Partendo da quanto affermato, ovvero che una ragionevole *asset*

⁴⁶ Pearson, Kb. (1905), "Skew variation, a rejoinder", Biometrika.

allocation preveda di raggruppare prodotti finanziari distinti in cui investire per ridurre il rischio complessivo dell'investimento, è normale chiedersi secondo quali criteri sia compiuta tale scelta.

Il primo strumento adoperato per questa valutazione è la covarianza che coglie come due variabili aleatorie (come i rendimenti) si co-muovano, in altre parole se i loro movimenti siano rivolti nella stessa direzione (covarianza positiva), in direzioni opposte (covarianza negativa) oppure siano tra loro indipendenti (covarianza nulla)⁴⁷.

$$Cov(r_i, r_j) = E[(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)]$$

1.8

La formula si presenta come il calcolo del valore atteso del prodotto tra i rendimenti di due titoli meno il loro rendimento medio μ e mostra il contributo che i due asset danno alla volatilità per il fatto di essere parte del medesimo gruppo.

Tuttavia, il principale limite della covarianza è la sua dipendenza dall'unità di misura dei rendimenti che può risultare una complicanza qualora le due attività finanziarie possiedano volatilità molto diverse. Quindi, per ovviare a tale ostacolo si è delineata una versione standardizzata di questo strumento che permetta confronti più immediati e non condizionabili dall'unità di misura in questione, ovvero la correlazione⁴⁸.

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(r_i, r_j)}{\sigma_i \sigma_j}$$

1.9

Indicata con la lettera greca “rho” (ρ_{ij}) la correlazione tra il rendimento dell'i-esimo ed il j-esimo prodotto finanziario è data dal rapporto tra la covarianza di questi due rendimenti ed il prodotto delle loro deviazioni standard. Essa può assumere valori nell'intervallo (-1, +1):

- $\rho_{ij} = +1$ è detta correlazione perfetta positiva e indica che il rendimento dei due asset si sposta nella stessa direzione;

⁴⁷ L. Pace, A. Salvan, “Introduzione alla statistica: II Inferenza, verosimiglianza, modelli, CEDAM.

⁴⁸ Gujarati, D. N., & Porter, D. C. (2009), “*Basic Econometrics*”, McGraw-Hill.

- $\rho_{ij} = -1$ è detta correlazione perfetta negativa e indica che il rendimento dei due asset si sposta nel verso opposto (ad un aumento dell'uno segue una diminuzione dell'altro);
- $-1 < \rho_{ij} < +1$ è una correlazione parziale⁴⁹.

L'idea che vuole trasmettere questo indicatore è che se correttamente assemblati i portafogli degli investitori possono raggiungere soglie di rischio veramente basse grazie al bilanciamento tra risultati positivi e negativi.

1.3.3 Diversificazione e riduzione del rischio di portafoglio

A questo punto, assimilati i concetti di covarianza e correlazione che fungono da guide per la creazione di combinazioni di successo all'interno di un portafoglio e mantenendo a mente i limiti strutturali delle informazioni economiche, è interessante esplorare perché il concetto di *portfolio* abbia avuto successo e su che base teorica esso sia stato sviluppato.

Il merito si deve a Harry Markowitz che nel 1952 formalizzò il principio della diversificazione, uno dei caposaldi della finanza moderna che sostiene che una adeguata combinazione di asset, con determinate caratteristiche ed opportunamente selezionati, consenta la riduzione del rischio complessivo di portafoglio a parità di rendimento atteso. L'economista statunitense, infatti, fu in grado di dimostrare che la varianza complessiva dei titoli inseriti nel *portfolio* non era la somma delle varianze dei medesimi prese singolarmente, ma minore in quanto influenzata pure dalla covarianza tra essi⁵⁰.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1; j \neq i}^n \omega_i \omega_j \text{Cov}(r_i, r_j)$$

1.10

In un portafoglio costituito da n attività, il rischio complessivo (σ_p^2) è calcolato come sommatoria dei quadrati dei pesi dei singoli asset (ω_i^2), che possono incidere in maniera differente nell'*asset allocation*, e delle loro varianze (σ_i^2). In aggiunta, vi si deve sommare la doppia sommatoria del prodotto tra i pesi per la covarianza dei rendimenti r_i e r_j dell' i -esimo e j -esimo titolo. Attraverso questa tecnica avviene, dunque, la mitigazione del rischio specifico che al crescere del numero di attività finanziarie, diventa pressoché trascurabile sotto opportune condizioni di scelta. Infatti, ciò

⁴⁹ Markowitz, H. (1959), "*Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*", Yale University Press.

⁵⁰ Markowitz, H. (1952), "*Portfolio Selection*", Journal of Finance.

avviene perché combinare prodotti con correlazioni negative porta alla compensazione delle fluttuazioni, ovvero permette di avere contemporaneamente delle attività che performano positivamente e che rimediano ad eventuali rendimenti negativi di altri titoli. Per di più, tanto più questa correlazione è perfetta negativamente e tanto più ci si avvicinerà ad un rischio quasi nullo⁵¹.

Tuttavia, per l'altra componente di rischio conosciuta come rischio sistematico non si possiede il privilegio di ridurla attraverso lo stesso processo. Difatti, dipendendo essa da eventi macroeconomici comuni a tutti i componenti del portafoglio (come ciclo economico, politica monetaria, inflazione, crisi) non può essere eliminata.

Infine, anche se cardine di un sistema che funziona da più di un secolo, il principio di diversificazione presenta dei limiti. In primo luogo, il suo impiego può avvenire esclusivamente in contesti nei quali il rischio che si tenta di debellare è “misurabile”, ossia realtà nelle quali mediante l'osservazione e lo studio dei dati è possibile trarre delle conclusioni in merito a distribuzioni e correlazioni tra variabili. Nel caso opposto, laddove ci si trovasse in quella situazione di “incertezza” come quella definita all'inizio di questo capitolo (in cui si susseguono crisi sistemiche o, ad esempio, cambiamenti di regime) i benefici di un'eterogeneità di *portfolio* verrebbero a mancare a causa di forti stress che alterano le relazioni tra asset (*correlation breakdown*) dirigendoli simultaneamente nella stessa direzione⁵².

In secondo luogo, non si può sperare che il comportamento di un prodotto finanziario rispetto ad un altro rimanga lo stesso in eterno, ma si deve assumere che esso prima o poi cambierà e ciò è insito nell'instabilità delle correlazioni nel tempo.

Poi, a seguire vi sono il pericolo di affiancare attività che non si sapeva fossero esposte agli stessi fattori di rischio, i costi di transazione ed i vincoli operativi, la “diversificazione ingenua”⁵³, ossia la credenza che sia sufficiente aumentare il numero di titoli in portafoglio per proteggersi, e “l'illusione di sicurezza”, cioè la tendenza a sottostimare il rischio rimanente, ovvero quello sistemico.

Un caso documentato dal Fondo Monetario Internazionale è ciò che accadde durante la pandemia di COVID-19 nell'aprile del 2020. Infatti, in questo periodo si verificò una “*dash for cash*”, cioè una vera e propria corsa alla liquidità nella quale gli investitori decisero di vendere azioni, oro, titoli di stato e altri asset per ottenere contanti. Così facendo perfino mercati molto liquidi come quello americano dei *Treasury USA* entrarono in difficoltà dimostrando come nei momenti di forte stress la

⁵¹ Markowitz, H. (1959), “*Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*”, Yale University Press.

⁵² Longin, F., Solnik, B. (2001), “*Extreme Correlation of International Equity Markets*”, Journal of Finance.

⁵³ Banca d'Italia (2024). *La diversificazione ingenua*. In: L'economia per tutti - Portale di educazione finanziaria della Banca d'Italia.

correlazione tra i vari prodotti finanziari viene compromessa ed assume valore pari ad +1: tutto viene venduto contemporaneamente⁵⁴.

Detto ciò, si è compreso che è possibile intervenire nella soglia di rischio degli investimenti sfruttando i vantaggi della diversificazione anche se consapevoli che quest'ultimi non si mantengano tali in eterno e, in alcuni casi, potrebbero venire meno. Da questo, quindi, l'esigenza di rendersi conto dell'entità effettiva del rischio ed il bisogno di strumenti di misura adeguati alla sua valutazione che permettano al *risk manager* di ponderare le sue scelte e di prendere le dovute precauzioni nell'esercizio della sua attività.

⁵⁴ International Monetary Fund (2020) “*Global Financial Stability Report: Markets in the Time of COVID-19*”, Washington, DC, April. spiega

CAPITOLO 2

IL VALUE AT RISK

2.1 Nascita e diffusione del Value at Risk

L'origine del Value at Risk (VaR) può essere ricondotta alla teoria moderna del portafoglio di Harry Markowitz che negli anni '50 del secolo scorso fornì un primo tentativo di formalizzazione sistematica del rischio finanziario mediante la rilevazione della variabilità statistica dei rendimenti. Infatti, mediante il suo modello media-varianza l'economista riconobbe nella dispersione degli stessi attorno alla loro media un indicatore di rischio che, però, non si prestava ad una complessità dei mercati sempre maggiore⁵⁵.

Proprio la più frequente integrazione tra i mercati, la loro espansione e l'intensificazione di attività di trading su scala globale a partire dagli anni '80 del Novecento fecero insorgere l'esigenza di strumenti capaci di sintetizzare l'esposizione al rischio di mercato in modo coerente, comparabile e facilmente comunicabile ai vertici aziendali e alle autorità di vigilanza. Per di più, la crescita di prodotti finanziari complessi come i derivati e l'aumento della leva finanziaria resero indispensabile trovare delle soluzioni più efficaci alla quantificabilità del rischio. Nello specifico si tratta di metodologie che non si limitassero a misurare degli scostamenti dei rendimenti da un valore centrale, come stabiliva Markowitz, ma di tecniche che dessero un'indicazione diretta ed immediata della perdita massima potenziale di un'attività o di un insieme di esse connessa ad un determinato livello di probabilità.

Detto ciò, il VaR fece la sua comparsa nei primi anni Novanta all'interno di una delle più potenti banche d'investimento americane, la J.P. Morgan che, stufa e insoddisfatta dei precedenti sistemi di misurazione del rischio, decise di crearne uno proprio che avrebbe stabilito le perdite potenziali massime giornaliere dei portafogli di trading. Qualche anno dopo il suo impiego (1994), tale strumento venne reso pubblico attraverso il documento *RiskMetrics*, ossia il documento nel quale la banca riassumeva la situazione di rischio e la pericolosità delle attività finanziarie in essere e che si dimostrò fondamentale per l'affermazione di questo indicatore. Tale atto basava il suo contenuto sull'ipotesi di normalità dei rendimenti e utilizzava matrici di varianza-covarianza (che venivano aggiornate mediante un meccanismo di media mobile esponenziale) per quantificare il rischio dei portafogli. Proprio l'*Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) era lo strumento che garantiva al *RiskMetrics* di essere così reattivo com'era ai cambiamenti di mercato, ovvero

⁵⁵ Markowitz, H. (1952), "*Portfolio Selection*", Journal of Finance.

permetteva di pesare maggiormente i dati recenti piuttosto che quelli remoti risolvendo il cosiddetto *ghosting effect*. Questo effetto, infatti, consisteva nella sparizione di eventi forti dal calcolo della media (come crolli di notevoli entità) dal momento in cui essa fosse stata calcolata in un periodo che non prendeva più in considerazione il momento temporale in cui essi si erano verificati. Al contrario, con l'EWMA questo non accadeva perché l'evento eccezionale restava presente nel calcolo per lungo tempo diminuendo continuamente il suo peso e di conseguenza la sua rilevanza.⁵⁶

2.1.1 Formulazione

Per comprendere pienamente cosa sia il VaR e cosa questo indice vada a quantificare, se ne osservi ora la metodologia di calcolo. Infatti, definita L come la variabile casuale che rappresenta la perdita, T come l'orizzonte temporale e α come il livello di confidenza prefissato, il *Value at Risk* è il quantile⁵⁷ di ordine α della distribuzione delle perdite (L)⁵⁸.

$$VaR_{\alpha}(L) = \inf\{l \in R : F_L(l) \geq \alpha\}$$

2.1

Anche se apparentemente complessa, la definizione precedente e la sua scrittura in forma matematica non sono poi così impossibili da capire. Difatti, se si scomponesse la formula si avrebbe che:

- α è, come anticipato, il livello di confidenza, ovvero il grado di copertura o di fiducia della stima;
- $\{l \in R : \dots\}$ sta ad indicare che i valori della perdita (l) vanno ricercati all'interno dell'insieme dei numeri reali;
- $F_L(l)$ è la funzione di distribuzione cumulata e ponendola $\geq \alpha$ si cercano tutte quelle perdite la cui probabilità cumulata, appunto, raggiunge o supera il livello di fiducia stabilito;
- $\inf$ indica che fra tutte le perdite che soddisfano quanto appena detto bisogna prendere quella minore (estremo inferiore).

Grazie a queste delucidazioni si può giungere più agilmente all'interpretazione del calcolo del VaR la quale afferma che il suo valore è il punto nel quale ci si ferma dal momento in cui, scorrendo i

⁵⁶ J.P. Morgan (1994), "RiskMetrics — Technical Document", New York.

⁵⁷ I quantili di una distribuzione di dati ordinati sono quei valori che suddividono tale distribuzione in intervalli uguali. Sono considerati, quindi, degli indici di posizione.

⁵⁸ Jorion, P. (2007), "Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk", McGraw-Hill.

possibili scenari di perdita dal più basso al più alto, la probabilità di osservare una perdita maggiore o uguale a quel valore raggiunge l' α prestabilito (normalmente 1-5%). Dunque, in questa formulazione il VaR rappresenta il minimo valore di perdita con un livello di fiducia α , anche se nessuno impedisce che essa sia maggiore.

$$P(L > VaR_\alpha) = \alpha$$

2.2

Quanto detto pare contraddire la iniziale spiegazione data in merito allo strumento che si sta analizzando (ovvero il VaR inteso come perdita massima potenziale), ma in realtà è semplicemente una versione analoga ed un po' meno intuitiva di quella a seguire.

$$VaR_{1-\alpha}(L) = \inf\{l \in R : F_L(l) \geq 1 - \alpha\}$$

2.3

Infatti, qualora si considerasse $1 - \alpha$ come livello di confidenza, invece di α , il VaR diventerebbe il valore in cui, scorrendo i possibili scenari di perdita dal più basso al più alto, ci si ferma dal momento in cui la probabilità di osservare una perdita minore o uguale a quel valore raggiunge l' $1 - \alpha$ prestabilito (normalmente 95-99%).

$$P(L \leq VaR_\alpha) = 1 - \alpha$$

2.4

Ad esempio, un VaR giornaliero al 99% pari a 1 milione di euro implica che, in condizioni di mercato normali, solo nell'1% dei casi la perdita giornaliera dovrebbe superare tale valore.

Dunque, questo indicatore dipende essenzialmente da tre fattori, primo fra tutti l'orizzonte temporale che abbraccia e che può essere giornaliero, settimanale oppure mensile. In secondo luogo, vi è il livello di confidenza del quale si può affermare che minore è l' α e minore sarà la soglia di perdita stimata e, infine, la distribuzione delle perdite (o dei rendimenti) che, se non Normale (asimmetrica e con code pesanti), può causare risultati significativamente diversi dal caso in cui lo sia.

Inoltre, il VaR soddisfa tre delle quattro proprietà che una misura coerente di rischio⁵⁹ dovrebbe rispettare per essere considerata tale e che le garantiscono razionalità, stabilità e compatibilità con la logica economica. Esse sono la monotonicità, ossia la costanza del VaR ad essere minore, tra due portafogli, se uno dei due presenta perdite sempre inferiori rispetto all'altro, l'omogeneità positiva, ovvero il raddoppiamento della perdita potenziale massima al raddoppiare dell'esposizione finanziaria (intesa come il numero di quantità detenute di una determinata attività finanziaria oppure il valore nominale investito) e l'invarianza per traslazione, cioè la tendenza dello strumento a riflettere correttamente l'effetto di un cambiamento certo del valore del portafoglio⁶⁰.

Ciò detto, è fondamentale non confondere il VaR considerandolo una mera perdita massima assoluta, ma essere consapevoli che si tratti di un rischio potenziale massimo, tollerabile e, per tale ragione, in grado di delimitare l'operato dei trader, valutare il possibile impatto di shock di mercato ed essere di supporto nelle scelte di allocazione del capitale economico.

2.1.2 Indicatori prima del VaR

Oltre alle tradizionali misure statistiche di rischio evidenziate nel primo capitolo come varianza, deviazione standard e connesse, sono molte altre le tecniche di quantificazione del rischio e gli strumenti che sono stati impiegati per rispondere al bisogno di previsione del pericolo.

Capital Asset Pricing Model

Il CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) degli economisti statunitensi William Sharpe e John Lintner suddivide il rischio in specifico (o idiosincratico), ovvero legato al funzionamento dell'azienda, e sistematico (o di mercato) legato a fattori macroeconomici. Il secondo, a differenza del primo, non è diversificabile e, di conseguenza, non eliminabile, ma, sempre secondo il CAPM, solo facendosi carico di esso si può essere ricompensati dal mercato. È per questo motivo che la pericolosità di un investimento, in questo modello, viene valutata in termini di esposizione al rischio sistematico ed è matematicamente rappresentata dal coefficiente β così calcolato:

⁵⁹ Le misure di rischio coerenti sono funzioni matematiche che vengono impiegate in finanza per la determinazione del rischio di portafoglio e che rispettano quattro proprietà fondamentali: subadattività, omogeneità positiva, invarianza per traslazione e monotonicità.

⁶⁰ Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999), "Coherent Measures of Risk", Mathematical Finance.

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)}$$

2.5

Dove R_m è il rendimento di mercato e R_i è il rendimento del titolo.

Come si può osservare, il rischio non è più dato dalla volatilità totale, ma dalla sensibilità ai movimenti del mercato. Infatti, esso indica come varia il rendimento di un titolo rispetto a quello del luogo di negoziazione in cui viene scambiato e le principali interpretazioni che se ne ottengono sono che:

- $\beta = 1$: il titolo si muove esattamente come il mercato;
- $\beta = 0$: non c'è correlazione con il mercato;
- $\beta > 1$: il titolo è più volatile del mercato (ciò significa che, ad esempio, aumenti del mercato portano il titolo ad aumentare più che proporzionalmente);
- $\beta < 1$: il titolo è meno volatile del mercato (ciò significa che, ad esempio, diminuzioni del mercato portano il titolo a diminuire meno che proporzionalmente).

In termini economici, avere un β basso consiste nell'adottare strategie difensive perché eventuali cadute brusche dei mercati sarebbero percepite meno da questi titoli (generi alimentari, utility, ecc.), mentre avere tale indicatore alto significherebbe optare per strategie più aggressive ed essere consapevoli che le oscillazioni potrebbero essere maggiori (aziende tecnologiche)⁶¹.

Per ciò che riguarda, invece, i limiti di questo modello, essi sono sicuramente la quantificazione del rischio in termini relativi e non assoluti, il fatto che quest'ultimo non sia esprimibile in valori monetari e la sua non adattabilità alla gestione del rischio di trading. Tuttavia, il legame esistente tra VaR e CAPM è il fatto che possedere un valore del β prossimo a 1 oppure a 0 incide sulla sensibilità dell'indicatore di rischio a crisi sistematiche di mercato: nel primo caso esso ne risentirà molto di più rispetto al secondo.

⁶¹ Sharpe, W. (1964), "Capital Asset Prices", Journal of Finance; Lintner, J. (1965), "The Valuation of Risk Assets", Review of Economics and Statistics.

Duration

Nel mercato obbligazionario al fine di misurare, fra gli altri, il rischio di tasso nacque la *duration* (o durata media finanziaria), un indicatore che mostra come varia il prezzo di un *bond* (obbligazione) al variare del tasso d'interesse.

Considerata come la media ponderata della vita residua del titolo dove i pesi sono dati dal valore attuale dei flussi di cassa (cedole e rimborso del capitale), la *duration* è influenzata da tre variabili: scadenza (*maturity*), cedola (*coupon*) e tasso di mercato. Di conseguenza, essa sarà tanto maggiore quanto maggiore sarà la scadenza e minori saranno cedole e tasso (e viceversa). Ovviamente, possedere una *duration* elevata è conveniente qualora i tassi dovessero scendere, ma estremamente sconveniente se dovessero salire, mentre una *duration* bassa è ottima in periodi di forte incertezza e tassi in crescita.

Per giunta, la durata media finanziaria si distingue tra tradizionale, ovvero la *duration* di Macaulay (1938), e modificata. Infatti, nella sua forma originale essa si esprime in anni e corrisponde alla scadenza se il titolo in questione non presenta cedole, oppure è inferiore alla scadenza dal momento in cui, invece, esso presenti delle cedole⁶². Al contrario, la sua versione modificata rispecchia maggiormente la definizione data in precedenza, cioè riassume la sensibilità del prezzo al tasso e si calcola come:

$$\text{modified duration} = \frac{\text{Duration}}{1 + \text{rendimento a scadenza}}$$

2.6

Tuttavia, anche questo strumento presenta delle difficoltà che si devono al suo calcolo il quale considera il rapporto tra prezzi e tasso lineare. Difatti, sovente questa relazione è curvilinea e per ovviare a tale problema gli esperti utilizzano la convessità invece della *duration*, ossia una misura della curvatura della relazione tra prezzo dell'obbligazione e tasso d'interesse.

Scenario analysis e stress testing

L'analisi di scenario riproduce una dimensione ipotetica, simulandola, per valutarne l'impatto e saperne gestire le conseguenze nel caso si verificasse realmente. In questo caso si parla di scenari

⁶² Macaulay, F. (1938), "Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rates".

ipotetici, ovvero mai verificatesi, mentre qualora ci si concentrasse nella riproduzione di eventi già accaduti si parlerebbe di scenari storici.

Lo stress test, invece, mira a porre sotto “stress”, ovvero pressare una variabile (analisi di sensibilità) o più (stress multivariato) allo scopo di vedere come si comporta la variabile stessa, il contesto e le variabili restanti.

Detto ciò, questi strumenti paiono essere poco probabilistici e non comparabili tra istituzioni differenti e per questo non sufficienti, almeno se utilizzati singolarmente.

2.1.3 Il ruolo del VaR nella normativa di vigilanza

Solo due anni più tardi dalla sua pubblicazione da parte di J.P. Morgan, il VaR ricevette un impulso notevole grazie al *Bank for International Settlements*, ovvero la Banca dei Regolamenti Internazionali (BIR) che tramite il Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (*Basel Committee on Banking Supervision*, BCBS)⁶³ approvò un emendamento (*Market Risk Amendment*) all’Accordo di Basilea 1 (1988) che permetteva alle banche di calcolare i propri requisiti patrimoniali utilizzando modelli interni basati sul VaR. L’introduzione del *Value at Risk* nella regolamentazione prudenziale rappresenta, quindi, uno dei passaggi più significativi nel processo di integrazione tra teoria quantitativa del rischio e supervisione bancaria.

Con il *Market Risk Amendment* (1996), dunque, per la prima volta nella storia fu concesso alle banche di adottare modelli che si edificavano sul VaR, con livelli di confidenza del 99%, orizzonte temporale di 10 giorni ed un andamento tipicamente giornaliero⁶⁴. Per giunta, nel 2004 con l’accordo internazionale Basilea II, il ruolo del VaR venne consolidato e la gestione del rischio divenne più rigorosa attraverso tre pilastri: requisiti patrimoniali, controllo prudenziale e disciplina di mercato⁶⁵.

Già negli anni 2000, questo indicatore di rischio è diventato un punto di riferimento anche per fondi d’investimento, compagnie assicurative ed imprese grazie alla sua capacità di sintetizzare il rischio stesso (date le innumerevoli fonti da cui esso può originarsi) e alla possibilità di essere impiegato per

⁶³ Il Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria è il principale organismo mondiale che definisce le regole per la sicurezza e la stabilità delle banche. Ne fanno parte la Banca dei Regolamenti Internazionali, i rappresentanti delle Banche Centrali e le autorità di vigilanza dei principali paesi del mondo che decidono in merito a requisiti patrimoniali minimi, controllo prudenziale e disciplina di mercato delle banche.

⁶⁴ Basel Committee on Banking Supervision (1996), “*Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*”, Bank for International Settlements”, Basilea.

⁶⁵ Basel Committee on Banking Supervision (2004), “*International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework*”.

effettuare comparazioni. Il tutto con un grado di complessità nell'implementazione relativamente basso.

2.2 Approcci di calcolo

Una volta aver compreso cosa sia il VaR, scoperte le sue origini e conosciuti i suoi predecessori, è ora di dedicarsi a quelli che sono stati definiti i tre metodi per calcolarlo. La scelta di uno rispetto ad un altro è legata al tipo di portafoglio che si vuole analizzare dato che ognuno di essi presenta punti di forza e debolezza.

2.2.1 Metodo parametrico

Il metodo parametrico, noto anche come “metodo varianza-covarianza” (o *delta-normal approach*), è la metodologia di calcolo più diffusa, ma che si fonda su assunzioni molto forti, in particolare nel mondo economico-finanziario. Infatti, alla base di questo approccio vi sono le ipotesi di Normalità dei rendimenti (che come si è già discusso è cosa assai rara), della linearità della posizione finanziaria (ovvero la diminuzione o l'aumento del suo valore in maniera direttamente proporzionale alla variazione del prezzo del sottostante), della stabilità della matrice di covarianza (che consiste nella costanza delle relazioni tra asset diversi nel tempo) e dell'assenza di code pesanti⁶⁶.

Se con la lettera R si considerasse il rendimento di un'attività finanziaria su un orizzonte temporale T con distribuzione, come anticipato, Normale di parametri μ (rendimento atteso) e σ^2 (varianza del rendimento) e V_0 fosse l'investimento realizzato, la variabile casuale perdita L si otterrebbe come:

$$L = -V_0 R$$

2.7

Da questa formulazione si ottiene il VaR come quantile di ordine $1 - \alpha$ della distribuzione delle perdite:

⁶⁶ Hull, J. (2018), “*Risk Management and Financial Institutions*”, Wiley.

$$VaR_{1-\alpha}(L) = \inf\{l \in R : P(L \leq l) \geq 1 - \alpha\}$$

2.8

Nel caso di Normalità, come da assunzione fondamentale della metodologia di calcolo, tale quantile può essere espresso tramite l'indice di posizione della normale standard $z_{1-\alpha}$:

$$\text{Variabile Normale standard } Z \sim N(0,1)$$

$$P(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$$

2.9

Detto ciò, il VaR parametrico si determina come $VaR_{1-\alpha} = V_0(-\mu + z_{1-\alpha}\sigma)$, ma dato che per T relativamente brevi μ può essere trascurata, il VaR diventa il prodotto tra entità dell'investimento, quantile della Normale standard di livello $1 - \alpha$ e deviazione standard.

$$VaR_{1-\alpha} = V_0 z_{1-\alpha} \sigma$$

2.10

Se, ad esempio, si stabilisse un $\alpha = 0.01$, si avrebbe che, con probabilità del 99% ($1 - \alpha$), la perdita non supererebbe $2.33\sigma V_0$ (giacché $2.33 = z_{0.99}$).

Ovviamente, se quest'idea venisse estesa al concetto di portafoglio finanziario, la semplice varianza si tramuterebbe in una matrice di varianze e covarianze Σ con vettore dei pesi $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ ed il VaR aggiornerebbe la sua formula sostituendovi solamente questo elemento. Conseguentemente, il rischio non dipenderebbe più solo dalla volatilità individuale, ma anche dalle correlazioni tra attività.

$$\sigma_p^2 = \omega' \Sigma \omega \quad \sigma_p = \sqrt{\omega' \Sigma \omega}$$

$$VaR_{1-\alpha} = V_0 z_{1-\alpha} \sigma_p$$

2.11

Infine, per completare l'espressione matematica, si sostiene vi sia indipendenza tra i rendimenti degli asset nel tempo che, dopo un'opportuna dimostrazione, dimostra come il VaR_T (quello dopo

quest'ultima considerazione) sia il prodotto tra il precedente valore calcolato e la radice dell'orizzonte temporale⁶⁷.

$$\text{Sapendo che } R_T \text{ (rendimento dell'intero periodo } T) = \sum_{t=1}^T r_t$$

$$\text{E data la proprietà } \text{Var}\left(\sum_{t=1}^T r_t\right) = \sum_{t=1}^T \text{Var}(r_t)$$

$$\text{Si ottiene che la } \text{Var}(R_T) = T\sigma^2 \qquad \sigma_T = \sqrt{T}\sigma \qquad \sigma_T = \sigma\sqrt{T}$$

$$\text{VaR}_T = V_0 z_{1-\alpha} \sigma_p \sqrt{T} = \text{VaR}_{1-\alpha} \sqrt{T}$$

2.12

Una volta aver delineato il processo di computazione parametrica del VaR è importante non trascurarne i limiti. Infatti, nonostante questo metodo sia stato ampiamente adoperato negli anni Novanta per la sua facilità e rapidità di calcolo e semplicità di implementazione in software statistici come R, è noto come l'assioma della Normalità delle distribuzioni dei rendimenti si adatti difficilmente alla realtà, molto spesso sottostimando perdite estreme. Altrettanto risaputo è il fatto che portafogli aventi titoli come le opzioni, per esempio, non si riconducano a posizioni lineari come quelle necessarie per il VaR, e che la stabilità della matrice di var-cov non sia costante e venga meno soprattutto in periodi di forte agitazione dei mercati. Ecco che queste considerazioni fanno ragionare sull'adeguatezza di tale modello e sulla sua non applicabilità a qualsiasi situazione finanziaria, ma al contrario solamente sotto opportune condizioni.

2.2.2 Simulazione storica

La prima distinzione che emerge tra il metodo della *historical simulation* e quello parametrico è che, rispetto alla precedente, quest'ultima tecnica non fa nessuna ipotesi sulla distribuzione dei rendimenti, ma opera direttamente con quella empirica dei dati storici che considera essere buoni premonitori del futuro.

⁶⁷ Jorion, P. (2007), "Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk", McGraw-Hill.

Se si definiscono:

- r_t come la serie storica dei rendimenti osservati con $t = 1, \dots, T$;
- $L_t = -V_0 r_t$ come tante variabili casuali della perdita;
- $\{L_1, \dots, L_T\}$ come distribuzione empirica della perdita.

Si ottiene il VaR come il quantile della distribuzione empirica appena definita:

$$\widehat{VaR}_{1-\alpha} = \text{quantile}_{1-\alpha}\{L_1, \dots, L_T\}$$

2.13

In questo metodo, dunque, riceve molta importanza la distribuzione empirica dei dati che, in statistica, si trova comunemente scritta come:

$$\widehat{F}_L(l) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T 1_{\{L_t \leq l\}}$$

2.14

In questa formula, l'1 rappresenta la funzione indicatrice, ossia una funzione che assume due valori, 1 nel caso in cui $L_t \leq l$ oppure 0 nell'altro caso. Questo rappresenta un conteggio delle perdite effettivamente inferiori o uguali ad l rispetto al totale, ovvero la frequenza relativa di quest'ultime. Quindi, quella che si ottiene dai dati storici ($\widehat{F}_L(l)$) è una stima della vera distribuzione sconosciuta $F_L(l)$ che corrisponde alla $P(L \leq l)$ e che è proprio uguale a $F_L(l)$, per la Legge dei Grandi Numeri, se T tende all'infinito.

È per questa ragione che nella definizione teorica della VaR secondo il metodo della simulazione storica, la vera funzione di ripartizione empirica $F_L(l)$ può essere sostituita con la sua stima $\widehat{F}_L(l)$:

$$\widehat{VaR}_{1-\alpha} = F_L^{-1}(1 - \alpha) \quad \text{diventa} \quad \widehat{VaR}_{1-\alpha} = \widehat{F}_L^{-1}(1 - \alpha)$$

2.15

In questo modo, l'inversa generalizzata della stima della funzione empirica corrisponde al quantile di tale distribuzione cumulativa. Questo lo si fa perché di norma una $F_L(l)$ prende come input una perdita l e restituisce una probabilità cumulata. Ad esempio, se $l = 10$, $F_L(10) = 0.95$ indicherebbe che la probabilità di una perdita minore o uguale a 10 è del 95%. Tuttavia, quello a cui si prefigge di arrivare

il VaR storico è di trovare a quanto ammonta la perdita dato un certo livello di probabilità e, quindi, inverte il ragionamento.

$$\widehat{VaR}_{1-\alpha} = \widehat{F}_L^{-1}(1 - \alpha) = \inf\{l \in R : F_L(l) \geq 1 - \alpha\}$$

2.16

In questi termini, si vuole capire quale sia la perdita l tale per cui $F_L^{-1}(1 - \alpha) = l$. Se $1 - \alpha = 0.95$ allora ci si chiederebbe qual è la perdita tale che il 95% delle altre perdite sia inferiore o uguale ad essa. Operativamente parlando, questo procedimento prevede di raccogliere i dati di una certa finestra temporale, calcolarne i rendimenti e ottenere da questi il valore delle perdite. Poi, ordinare tali perdite in ordine crescente e di individuare quella che si trova in posizione $(1 - \alpha)T^{68}$.

Il vantaggio di questo metodo è che non richiede distribuzioni specifiche, stime di parametri ed include automaticamente eventuali code pesanti, asimmetrie ed eventi estremi dato che lavora con dati reali. Sebbene questo possa apparire utile, non sono da dimenticare gli svantaggi di questa tecnica, ovvero il fatto che eventi anomali del passato o del futuro possano distorcere le stime, campioni piccoli spesso generino instabilità nei risultati e che la non tempestiva reazione dell'indicatore a cambiamenti di volatilità possa causare sottostime o sovrastime di rischio.

2.2.3 Simulazione Monte Carlo

Il terzo ed ultimo metodo di calcolo del VaR è conosciuto come simulazione Monte Carlo. Il suo nome, coniato negli anni '40, si deve ai matematici Stanislaw Ulam e John von Neumann che all'epoca stavano lavorando al Progetto Manhattan (progetto per la creazione della bomba atomica) a Los Alamos. I loro esperimenti statistici, che consistevano nella simulazione del comportamento dei neutroni (particelle subatomiche con carica elettrica nulla), necessitavano di un nome in codice per preservare la riservatezza dello studio. L'ispirazione venne a Ulam che mentre giocava a solitario si chiese quale fosse la probabilità di vincere, ma data la complessità del calcolo pensò che era più semplice giocare molte partite e segnare i risultati ottenuti così da calcolarne, poi, una stima statistica. Proprio lo stesso Ulam aveva uno zio che adorava andare al casinò di Monte Carlo e dato il nesso tra roulette, lancio di dati e ripetizione casuale di eventi tipica di alcuni esperimenti ed analisi, nacque l'ormai noto termine "simulazione Monte Carlo".

⁶⁸ Jorion, P. (2007), "Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk", McGraw-Hill.

Tralasciando l'aneddoto curioso, quindi, il processo alla base di questa tecnica è proprio la simulazione di un numero importante di scenari dei diversi fattori di rischio che caratterizzano un'attività finanziaria (o più) nei quali, in seguito, calcolarne le perdite ed osservarne la distribuzione simulata⁶⁹. È chiaro fin da subito come questo metodo, a differenza dei precedenti, non assuma una distribuzione Normale dei dati, non si limiti a stimarne media e varianza e non usi direttamente i dati passati come distribuzioni, ma diventi, invece, un calcolo stocastico⁷⁰ completo dei fattori di rischio.

Da un punto di vista statistico-matematico, le perdite di ogni scenario vengono calcolate come:

$$L^{(i)} = V_0 - V_1^{(i)}$$

2.17

dove V_0 è il valore corrente del portafoglio (o dell'asset), mentre, dato $X^{(i)} = (X_1^{(i)}, \dots, X_k^{(i)})$ come vettore dei fattori di rischio di un certo panorama i , $V_1^{(i)}$ è funzione di detto vettore nonché valore futuro delle attività finanziarie nell' i -esimo scenario. Da qui proviene la definizione di VaR conosciuta come quantile campionario $1 - \alpha$ della distribuzione simulata delle perdite:

$$VaR_{1-\alpha} = F_L^{-1}(1 - \alpha)$$

2.18

A questo punto, come anticipato, la distribuzione F_L non è osservata, ma “simulata”, ovvero approssimata perché individuata all'interno di una simulazione casuale. Ciò nonostante, l'efficacia di questo modello è ricondotta alla Legge dei Grandi Numeri la quale sostiene che all'aumentare del campione, la distribuzione empirica di L converga alla distribuzione teorica che è implicita nel modello stesso e l'errore si riduca cedendo il passo a maggiore precisione e stabilità.

La metodologia Monte Carlo è stata, quindi, impiegata notevolmente dagli intermediari finanziari per la sua flessibilità, ossia per il fatto di poter utilizzare non solo distribuzioni Normali, ma anche altre distribuzioni come quella della t-Student, modelli con volatilità condizionata (come i GARCH⁷¹) e

⁶⁹ McNeil, A. J., Frey, R., Embrechts, P. (2015), “*Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*”, Princeton University Press.

⁷⁰ Il termine “stocastico” fa riferimento a modelli governati da aleatorietà in cui i risultati non sono sempre uguali e dipendono da probabilità e variabili distinte. L'opposto di questo vocabolo è “deterministico” e si riferisce a modelli che, data l'assenza di incertezza, producono costantemente lo stesso output dati gli stessi input.

⁷¹ I GARCH, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, sono strumenti econometrici volti a modellare e prevedere la volatilità. Nel mondo finanziario sono applicati alla varianza dei rendimenti dei titoli.

copule⁷² per la gestione delle dipendenze non lineari. Per giunta, la capacità di funzionare anche con prodotti finanziari complessi come i derivati e la possibilità di controllare la correlazione tra i fattori rappresentano ulteriori vantaggi che hanno dato rilevanza a questo schema.

Tuttavia, a considerevoli vantaggi si contrappongono alcune difficoltà che nascono principalmente dalla validità delle ipotesi sulla distribuzione e sulle relazioni che intercorrono tra i fattori di rischio. Infatti, fare delle assunzioni su un modello che si rivela poi errato porta conseguentemente ad un VaR sbagliato e anche qualora il modello fosse corretto, non sempre un risultato sofisticato è garanzia di correttezza, specialmente in realtà complesse dove vi è pure un elevato costo elaborazione dei calcoli in termini di risorse, memoria e tempo⁷³.

2.3 Limiti

Quanto visto finora è uno strumento che è stato ed è attualmente usato per riassumere il rischio di mercato, ma sebbene aiuti a dare concretezza al concetto di pericolo finanziario, presenta comunque notevoli limiti teorici ed operativi.

Primo fra tutti si trova il fatto che il VaR comunichi esclusivamente quale sia la perdita massima non superata data una certa probabilità, senza aggiungere nessun'altra informazione in merito alle altre perdite situate nelle code della distribuzione ed è così che portafogli diversi possono presentare valori estremi di perdita molto eterogenei. Questo la definisce come una misura di rischio incompleta perché la differenza tra le perdite di titoli oltre quella massima svolgono un ruolo fondamentale all'interno del processo decisionale. Un chiaro esempio, dunque, lo sono due portafogli, entrambi con $VaR_{99\%} = 10$ milioni, ma uno con perdite oltre il VaR che arrivano fino a 12 milioni, mentre l'altro con perdite fino a 50 milioni. Qui l'informazione omessa è decisamente fondamentale.

Il secondo limite che si è riscontrato è l'incapacità del VaR di soddisfare sempre la proprietà della subadattività, in particolare quando si è di fronte a distribuzioni con curve molto pesanti. Secondo questo concetto economico-matematico una funzione o una misura si definisce subadattiva se applicandola ad una somma (o unione) di elementi si ottiene un risultato inferiore o uguale alla somma dei risultati dei singoli elementi a cui si applicherebbe la stessa funzione.

⁷² La copula in statistica è una funzione matematica che viene impiegata per descrivere la struttura di dipendenza tra variabili aleatorie unendo le loro distribuzioni marginali in una distribuzione congiunta multivariata.

⁷³ McNeil, A. J., Frey, R., Embrechts, P. (2015), "Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", Princeton University Press.

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

2.19

In alcuni casi, infatti, il VaR della somma di x e y risulta maggiore della somma del VaR di x più il VaR di y violando il principio di subadattività e andando contro il principio di diversificazione finanziaria secondo il quale, come precedentemente affermato, una combinazione coerente di titoli dovrebbe ridurre e non aumentare il rischio di portafoglio⁷⁴. A titolo d'esempio, ipotizziamo che esistano due posizioni finanziarie indipendenti X e Y che perdono 100 ciascuna con probabilità dell'1% e 0 con probabilità del 99%. Secondo questa formulazione, il $VaR_{99\%}$ sarebbe uguale a 0, ma la probabilità che almeno una delle due posizioni perda 100 è circa del 2% dato che:

$$P(X = 100 \text{ oppure } Y = 100) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{Dato che } P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(\text{almeno una perdita}) = 0.01 + 0.01 - 0.01 \times 0.01 = 0.02 - 0.0001 = 0.0199 = 1.99\%$$

Da ciò deriva, quindi, che:

$$VaR_{99\%}(X + Y) = 100$$

$$VaR_{99\%}(X) + VaR_{99\%}(Y) = 0$$

2.20

Ed ecco violata la subadattività.

In terzo luogo, invece, c'è da dire che il valore del VaR è strettamente correlato alla scelta dell' α di riferimento. Difatti, passare da un livello $1 - \alpha$ del 95% ad uno del 99% può, in alcuni casi, cambiare considerevolmente la stima amplificando, in questa maniera, instabilità ed errore di stima. Se, per esempio, si considerassero 250 osservazioni e se ne volesse calcolare il VaR al 99%, l'1% di quest'ultime corrisponderebbe a circa 2-3 osservazioni e, di conseguenza, l'indicatore dipenderebbe solamente da queste 2-3 informazioni. Quindi, sarebbe una misura molto precaria dato il numero ridotto di dati su cui fonda il suo calcolo. Per di più, per sua natura un quantile estremo come il VaR presenta spesso varianza di stima elevata e forte sensibilità agli outliers, fattori che lo rendono una misura fragile⁷⁵.

⁷⁴ Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999), "Coherent Measures of Risk", Mathematical Finance.

⁷⁵ McNeil, A. J., Frey, R., Embrechts, P. (2015), "Quantitative Risk Management", Princeton University Press.

Nello specifico, invece, VaR parametrico e Monte Carlo presentano un enorme rischio, ovvero quello di errare nell'individuazione e formulazione del modello e pertanto in distribuzioni di rendimenti e perdite. Qualora ciò accadesse, la stima del VaR non sarebbe corretta e, se pur convinti di aver raggiunto buoni risultati ed aver individuato il giusto valore del VaR, si sarebbe portati a compiere delle scelte ed adottare certi requisiti sovente insufficienti o non adatti al contesto perché eretti su presupposti non veritieri.

Uno degli eventi che mostrò al mondo i limiti precedentemente descritti di questo strumento fu la crisi finanziaria iniziata nel 2007 e culminata con il crollo della banca Lehman Brother nel settembre del 2008. In questo periodo banche ed altri intermediari finanziari erano soliti adottare modelli come il VaR per la loro valutazione del rischio finanziario così da stimare quali fossero i requisiti patrimoniali da possedere per fare fronte ad eventuali eventi economici improvvisi. Tuttavia, come ben si è visto dopo l'accaduto, tali metodi si sono rivelati inadatti a tale scopo in quanto incapaci di definire precisamente le perdite effettivamente registrate. Una delle prime cause di tale inadeguatezza è sicuramente il fatto che il VaR venisse spesso calcolato su periodi di volatilità ridotta che permettevano l'adozione di requisiti patrimoniali più bassi a discapito di un'adeguata valutazione del rischio sistemico. Infatti, ciò avvenne nei primi anni 2000 quando i mercati registrarono dei rendimenti per lo più stabili e con varianza abbastanza ridotta nascondendo, invece, un pericolo imminente, ovvero quello dei mutui *subprime* negli Stati Uniti. Proprio per i motivi appena spiegati, il VaR non predisse perdite di un'entità tale a quella che si osservò poi negli anni a venire dando vita ad un fenomeno noto come *VaR breach* (o *VaR violation*), cioè la violazione del rischio stimato⁷⁶.

Un altro importante limite evidenziato con la crisi del 2008 riguarda la pro-ciclicità del VaR, cioè la sua tendenza ad amplificare le fasi dei cicli economici invece di smorzarle. Infatti, lo strumento assume valori bassi in fasi economiche tranquille (ridotta volatilità) con conseguente riduzione dei requisiti patrimoniali minimi richiesti (la banca può detenere un numero maggiore di asset rischiosi con poco capitale), mentre raggiunge valori elevati e non tempestivi durante periodi di stress e forti oscillazioni di mercato⁷⁷. Infatti, in un periodo di crisi finanziaria la banca, per non fallire legalmente e mantenersi all'interno dei suoi parametri patrimoniali, si trova di fronte ad un bivio: trovare nuovo capitale (cosa assai difficile in un momento del genere) oppure ridurre la sua esposizione al rischio mediante la vendita di titoli liquidi, la chiusura di alcune posizioni più complesse ed il taglio del credito a privati e imprese. Tuttavia, tali operazioni vengono messe in atto proprio in un contesto in

⁷⁶ Jorion, P. (2007), "Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk", McGraw-Hill.

⁷⁷ Danielsson, J., "Financial Risk Forecasting", Wiley.

cui non dovrebbero accadere, generando panico e alimentando un circolo vizioso in cui i prezzi cadono e la volatilità cresce⁷⁸.

2.3.1 Strumenti a supporto del VaR

Dopo aver descritto quali siano le limitazioni che coinvolgono il VaR pare giusto presentare pure quali siano stati i tentavi di ovviare a dette problematiche per dare maggiore completezza e validità allo strumento. Nello specifico, le misure che gli sono state affiancate e che sono un elemento indispensabile per il *risk management* sono il *backtesting*, gli stress test e l'analisi di scenario.

Backtesting

Il *backtesting* è uno strumento nato dall'esigenza di confrontare le perdite realmente osservate con quelle previste dal VaR per comprovare la validità dell'indicatore di rischio. Dunque, se il VaR fosse corretto, il numero di volte in cui le perdite reali superano la massima calcolata dal VaR (le cosiddette violazioni) dovrebbe essere coerente con il livello di probabilità associato alla misura. Se questo non avvenisse, la misura di rischio sottostimerebbe (se le perdite effettive fossero maggiori) o sovrastimerebbe (se le perdite effettive fossero minori) il pericolo finanziario.

Fondamentalmente esistono diverse tipologie di *backtesting* come il *Kupiec test* (o *Proportion of Overfailures*) e il *Christoffersen test*. Mentre il primo si focalizza sulla frequenza osservata delle violazioni rispetto a quella prevista dal VaR, il secondo persegue lo stesso scopo, ma monitorando anche l'indipendenza tra violazioni. Difatti, il controllo di correlazione è indispensabile per non tralasciare un aspetto temporale cruciale tra le violazioni, ovvero il rischio di clusterizzazione o *volatility clustering*. Con esso s'intende il pericolo di avere una serie di perdite tutte localizzate nello stesso periodo piuttosto che distribuite nel tempo aumentando notevolmente la difficoltà d'adattamento ai requisiti patrimoniali di cui si è parlato in precedenza e, di conseguenza, il rischio di fallimento della banca o dell'intermediario finanziario. Infatti, per il test di Kupiec, una banca che abbia avuto 5 violazioni ben ripartite nel corso dell'intero anno ed una che le abbia avute in una sola settimana hanno lo stesso risultato, mentre per il test di Christoffersen le situazioni sono completamente e diverse.

⁷⁸ Danielsson, J., "Financial Risk Forecasting", Wiley.

L'adozione formale del *backtesting* nella regolamentazione bancaria risale agli anni Novanta grazie all'intervento del Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria che ha deciso di introdurre un sistema di valutazione dell'affidabilità del VaR conosciuto come *traffic light approach*. Secondo quest'ultimo, in numero di violazioni osservate determinerebbe la classificazione dello strumento all'interno di 3 aree di colore distinto (i colori del semaforo per l'appunto):

- Zona verde da 0 a 4 violazioni: modello adeguato e nessuna correzione prevista per i requisiti patrimoniali;
- Zona gialla da 5 a 9 violazioni: modello impreciso da cui deriva un adeguamento dei requisiti patrimoniali;
- Zona rossa con più di 10 violazioni: modello inaffidabile con obbligatoria modificazione o sostituzione⁷⁹.

Stress test

Questa tecnica ha lo scopo di monitorare il comportamento di un portafoglio titoli e di quantificarne le perdite sotto determinate condizioni di mercato normalmente avverse come forti variazioni dei tassi d'interesse, crolli di mercato, crisi di liquidità o ancora shock macroeconomici. Dunque, esso è incentrato sulla comprensione dell'entità della perdita che si potrebbe generare e che spesso non viene adeguatamente stimata dal VaR fornendo, così, una valutazione sulla vulnerabilità dello strumento.

Pure gli stress test si suddividono in più categorie fra le quali si trovano lo stress test storico, ipotetico e macroeconomico. Lo stress test storico agisce sui rendimenti attuali dei titoli applicandovi variazioni simili a quelle registrate in corrispondenza di eventi turbolenti del passato osservando così l'impatto che quest'ultimi potrebbero avere se si dovessero verificare nuovamente. Lo stress test ipotetico, invece, agisce in maniera molto simile alla precedente solo che gli shock a cui sottopone i rendimenti degli asset non devono per forza provenire da fenomeni già accaduti, ma possono essere totalmente creati artificialmente. Infine, lo stress test macroeconomico riproduce nei mercati condizioni particolarmente ostiche e complesse che non mettono in crisi solo alcune attività finanziarie, ma l'intero sistema economico oppure un certo intermediario finanziario. Dinamiche come aumenti inflazionistici e dei tassi d'interesse o riduzioni del PIL e del tasso d'occupazione

⁷⁹ Basel Committee on Banking Supervision, “*Supervisory Framework for the Use of Backtesting in Conjunction with the Internal Models Approach*”, BIS.

mettono spesso a dura prova chi opera in questo mercato e per questa ragione permettono di esaminarne la capacità di resilienza di fronte a tragici scenari.

Dal punto di vista della normativa, chi si occupa della gestione di queste pratiche è l'autorità di vigilanza bancaria europea (*European Banking Authority*, EBA) in Europa, mentre negli Stati Uniti, ad esempio, ad occuparsene è la Federal Reserve.

Per quanto concerne l'efficacia di tali test, invece, vi è da dire che se gli shock simulati non riflettono correttamente i rischi futuri, le stime di perdita possono risultare poco realistiche. Inoltre, gli stress test spesso non forniscono una probabilità associata agli eventi analizzati rendendo difficile confrontare diversi scenari tra loro⁸⁰.

Analisi di scenario

In maniera simile agli stress test, la *scenario analysis* osserva come muta il valore di una o più attività finanziarie al variare delle condizioni economico-finanziarie dei mercati, ma in forma sicuramente meno estrema di quella di uno stress test. Infatti, l'obiettivo di questa tecnica non è “stressare” l'asset e vedere come esso risponde a pesanti stimoli negativi, ma semplicemente seguirne il comportamento in scenari alternativi che non per forza devono essere costituiti da shock economici.

L'analisi di scenario individua anzitutto le variabili di rischio dello scenario che vuole proporre e ne modifica i valori a suo piacimento così da ricreare un'eterogeneità di realtà. Poi, come per gli stress test, gli scenari possono essere di diversa natura: macroeconomici, finanziari o storici e sono anch'essi regolati in Europa dall'autorità di vigilanza bancaria europea.

Il vantaggio di questa pratica risiede nella flessibilità delle variabili e nei loro movimenti contemporanei che, se opportunamente realizzati, possono far emergere rischi prima ignorati o non percepiti. Tuttavia, come principali svantaggi questo sistema incontra la più volte nominata dipendenza da ipotesi che sono realizzate da chi compie l'analisi e che possono non rivelarsi corrette o esaustive, il numero finito di realtà che si possono ricreare dato che sarebbe impossibile analizzare qualsiasi combinazione possibile e l'assenza di probabilità associata agli eventi che non agevola il confronto tra scenari distinti⁸¹.

⁸⁰ Basel Committee on Banking Supervision, “*Principles for Stress Testing*”, BIS.

⁸¹ Jorion, P. (2007), “*Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*”, McGraw-Hill.

2.3.2 Misure alternative di rischio

Le criticità emerse durante le crisi finanziarie hanno portato le autorità di vigilanza a riconsiderare l'utilizzo del VaR nella regolamentazione bancaria introducendo progressivamente nuove misure di rischio per integrarlo o sostituirlo. Con l'introduzione della normativa Basilea III e delle successive riforme sul rischio di mercato, l'attenzione si è spostata verso misure più robuste come *l'Expected Shortfall*, che considera non solo la soglia di perdita, ma anche la media delle perdite oltre tale soglia.

$$Expected\ Shortfall_{1-\alpha} = E[L|L > VaR_{1-\alpha}]$$

2.21

Dalla formula, costituita da un valore atteso condizionato, si comprende come l'interesse non sia più solo quello di capire quale sia la perdita massima data una certa probabilità, ma anche quello di quantificare quanto mediamente si perderebbe se ciò avvenisse. Con questo metodo, infatti, si tiene conto anche della coda della distribuzione delle perdite e si è capaci di estrapolare un'informazione significativa da essa. Per di più, *l'Expected Shortfall* soddisfa tutte e quattro le proprietà delle misure di rischio coerenti compresa quella che il VaR non rispetta, ossia la subadattività e, quindi, supera un altro dei problemi che tale strumento presenta⁸².

Date queste condizioni, il *Basel Committee on Banking Supervision* ha deciso di sostituire il VaR con *l'Expected Shortfall* come metodo di calcolo per i requisiti patrimoniali essenziali per il rischio di mercato di banche ed altri intermediari finanziari. Ciò è avvenuto mediante una riforma nota come *Fundamental Review of the Trading Book* all'interno del pacchetto *Basel III Endgame*, ovvero il completamento del documento Basilea III (soprannominato anche Basilea 4) che ha definito il nuovo strumento più adatto del precedente a raggiungere il fine prefissato ed ha individuato in un livello di confidenza del 97,5% dello stesso risultati migliori di un VaR al 99%⁸³.

Nonostante si presenti come misura migliore del VaR, anche *l'Expected Shortfall* non è privo di criticità, fra cui la necessità di maggiori informazioni per la stima accurata delle code, la complessità superiore dei calcoli e la persistente dipendenza dalle ipotesi che vengono formulate sul modello, ma indipendentemente da questi elementi resta una misura di rischio preferibile al VaR.

⁸² C. Acerbi, D. Tasche, "On the Coherence of Expected Shortfall", *Journal of Banking & Finance*, 2002.

⁸³ Basel Committee on Banking Supervision, "Minimum Capital Requirements for Market Risk", Bank for International Settlements, Basel, 2019.

CAPITOLO 3

ANALISI EMPIRICA

3.1 Obiettivi dell'analisi empirica

L'obiettivo principale dell'analisi empirica è quello di valutare l'affidabilità del Value at Risk come misura di rischio applicata a tre differenti titoli azionari, verificando in particolare se tale indicatore sia in grado di rappresentare in modo coerente il comportamento delle perdite osservate nei mercati finanziari. Secondo quanto affermato dalla letteratura sul *risk management*, il VaR costituisce uno degli strumenti più diffusi per la misurazione del rischio di mercato, ma presenta alcune criticità che rendono necessaria una verifica empirica della sua capacità predittiva.

In questo contesto, l'analisi si propone di verificare la validità del VaR, ossia se le perdite effettive osservate superano la soglia stimata con una frequenza congruente rispetto al livello di confidenza prescelto. Come evidenziato da numerosi studi, un modello di VaR può essere considerato adeguato solo se il numero di violazioni osservate è statisticamente compatibile con quello teoricamente atteso.

L'analisi si articola, quindi, in più obiettivi specifici. In primo luogo, si intende calcolare il VaR per ciascun titolo selezionato utilizzando metodologie quantitative implementate in ambiente statistico, al fine di ottenere una misura comparabile del rischio associato ai diversi strumenti finanziari.

In secondo luogo, si procederà con l'applicazione di test statistici, quali il Kupiec Test e il Christoffersen Test, con l'obiettivo di valutare rispettivamente la correttezza della frequenza delle violazioni e l'indipendenza temporale delle stesse.⁸⁴

Nel complesso, il fine dell'analisi empirica è dunque duplice: da un lato verificare la validità del VaR come misura di rischio, dall'altro evidenziarne i limiti operativi, contribuendo così alla discussione, ampiamente sviluppata nella letteratura, sulla necessità di affiancare o sostituire tale indicatore con misure alternative più robuste.

⁸⁴ P. Kupiec, "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models", Journal of Derivatives, 1995.

3.2 Dati e costruzione del dataset

La qualità dell'analisi empirica dipende in modo cruciale dalla selezione e dalla costruzione del dataset utilizzato. Nel contesto della misurazione del rischio finanziario, è fondamentale disporre di dati affidabili e adeguatamente trattati, al fine di garantire la validità delle stime ottenute. Difatti, errori nei dati o una loro gestione non corretta possono compromettere significativamente i risultati dell'analisi del rischio.

3.2.1 Le società oggetto dell'indagine

Le tre società selezionate per l'analisi empirica appartengono al medesimo settore economico, ovvero quello della difesa e dell'aerospazio, ma si distinguono per il contesto geografico e istituzionale in cui operano. La scelta di imprese operanti nello stesso settore consente di mantenere una certa omogeneità nelle determinanti economiche del rischio, mentre la differenziazione geografica permette di cogliere eventuali variazioni legate a fattori macroeconomici, normativi e di mercato.

Leonardo S.p.A.

Fino al 2017 conosciuta come Finmeccanica S.p.A., Leonardo S.p.A. è una società per azioni italiana a controllo pubblico, con sede a Roma. Il principale azionista è il Ministero dell'Economia e delle Finanze, che detiene circa il 30% del capitale, configurando l'azienda come uno dei principali attori industriali strategici del Paese.

La società opera nei settori della difesa, dell'aerospazio e della sicurezza, producendo elicotteri, velivoli, sistemi satellitari, elettronica per la difesa e soluzioni per la *cyber security*. Dal punto di vista finanziario, Leonardo rappresenta una delle principali *blue chip*⁸⁵ italiane ed è inclusa negli indici FTSE MIB e FTSE Italia All-Share della Borsa Italiana.

La sua capitalizzazione di mercato, variabile nel tempo, la colloca tra le principali società industriali italiane, con una forte esposizione ai mercati internazionali e una significativa dipendenza dai contratti governativi, fattori che incidono sulla volatilità dei rendimenti⁸⁶.

⁸⁵ In borsa, definire un'azienda "Blue Chip" significa considerarla una delle "più preziose" e sicure su cui investire a lungo termine. Per diventare una Blue Chip, un'azienda deve solitamente possedere determinati requisiti come una capitalizzazione di mercato elevata, una buona affidabilità, dividendi costanti, deve essere leader di settore e possedere una bassa volatilità.

⁸⁶ Space Glossary. "Leonardo S.p.A."

Rheinmetall AG

Rheinmetall AG è una delle principali aziende tedesche operanti nei settori della difesa e dell'automotive, con sede a Düsseldorf. L'azienda è specializzata nella produzione di veicoli blindati, sistemi d'arma, munizioni, sistemi di difesa aerea ed elettronica militare, oltre a sviluppare soluzioni per la digitalizzazione delle forze armate.

Negli ultimi anni Rheinmetall ha registrato un'importante crescita, anche in relazione all'aumento della spesa militare europea, diventando un attore centrale nel panorama industriale tedesco. Tale evoluzione è stata riflessa anche nella sua inclusione nell'indice DAX, principale indice azionario tedesco, che raccoglie le società a maggiore capitalizzazione e liquidità.

Dal punto di vista del rischio finanziario, la società presenta una forte sensibilità agli sviluppi geopolitici e alle politiche di difesa europee, elementi che possono generare variazioni rilevanti nei rendimenti azionari⁸⁷.

BAE Systems plc

BAE Systems plc è una delle principali aziende globali nel settore della difesa, con sede a Londra. Si tratta della più grande società europea nel comparto e una delle più rilevanti a livello mondiale, con una presenza significativa negli Stati Uniti, che rappresentano uno dei suoi principali mercati di riferimento.

L'azienda opera in numerosi ambiti, tra cui sistemi aeronautici, navali, elettronici e cyber, e vanta una forte diversificazione geografica, con attività in Europa, Medio Oriente, Asia e Oceania. Questa ampia presenza internazionale contribuisce a ridurre il rischio specifico legato a singoli mercati, ma espone la società a rischi di natura globale.

Dal punto di vista borsistico, BAE Systems è quotata alla Borsa di Londra ed è inclusa nell'indice FTSE 100, che comprende le principali società britanniche per capitalizzazione⁸⁸.

⁸⁷ Rheinmetall AG. (s.d.), *"About Rheinmetall"*.

⁸⁸ Encyclopedia Britannica. *"BAE Systems"*.

3.2.2 Scelta, importazione e sistemazione dei dati

Le fonti

La costruzione del dataset richiede l'utilizzo di fonti informative affidabili e coerenti, in grado di fornire dati finanziari accurati e aggiornati. Nel presente lavoro, i dati relativi ai prezzi dei titoli azionari sono stati raccolti tramite la piattaforma *Yahoo Finance*, una delle fonti più utilizzate nella letteratura empirica per l'analisi dei mercati finanziari che, grazie alla sua accessibilità e completezza delle serie storiche, permette la replicabilità dell'analisi in qualsiasi momento.

In primo luogo, sono stati raccolti i dati relativi ai prezzi di chiusura giornalieri dei titoli selezionati che rappresentano la base informativa per il calcolo dei rendimenti. Infatti, il VaR si basa su serie temporali pulite e allineate e l'uso dei prezzi di chiusura si deve al fatto che essi incorporano tutte le informazioni della giornata e riflettono il prezzo di equilibrio di mercato. Quindi rappresentano il valore di sintesi dell'attività di trading giornaliera e costituiscono lo standard nella letteratura empirica.

La scelta, invece, di prendere i prezzi *Close* piuttosto che gli *Adjusted Close* disponibili su *Yahoo Finance* riguarda il fatto che il *Close* è il prezzo che realmente si è osservato sul mercato che, però, non tiene conto di dividendi, aumenti di capitale e split azionari. Al contrario, l'*Adjusted Close* è il prezzo corretto per i dividendi distribuiti, *stock split* e *corporate actions* (una serie di eventi societari), ma è una ricostruzione teorica del prezzo effettivo, quindi non adatta all'indagine oggetto della tesi (ma utile in altri contesti).

Successivamente, tali prezzi sono stati trasformati in rendimenti logaritmici, comunemente utilizzati nella letteratura finanziaria per la loro proprietà di additività nel tempo e per una migliore approssimazione delle variazioni percentuali ed in statistica per la loro più agile trattabilità e maggiore compatibilità con modelli probabilistici. La formula impiegata per il calcolo dei rendimenti è la seguente:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

3.1

dove P_t rappresenta il prezzo di chiusura al tempo t , mentre P_{t-1} il prezzo di chiusura al tempo t precedente.

Il periodo temporale considerato

L'analisi è stata condotta su un intervallo temporale sufficientemente ampio (6 anni) da garantire una rappresentazione significativa del comportamento dei rendimenti e del rischio associato ai titoli considerati. In generale, la letteratura suggerisce l'utilizzo di almeno 250 osservazioni giornaliere (equivalenti a circa un anno di contrattazioni) per ottenere stime statisticamente robuste del VaR. Inoltre, un orizzonte temporale più esteso consente di includere diverse fasi di mercato caratterizzate da variazioni nei livelli di volatilità, permettendo così una valutazione più completa dell'affidabilità del modello di rischio.

Invece, per ciò che concerne l'orizzonte temporale di 10 giorni sul quale viene calcolato l'indicatore di rischio, questa non è una scelta casuale, ma si è seguito quanto presente nella normativa di riferimento e si è cercato di essere fedeli al comportamento reale dei mercati. Infatti, è lo stesso Comitato di Basilea a stabilire tale lasso temporale in quanto considerato adeguato per valutare le capacità, ad esempio, delle banche di sopravvivere a crisi della durata di almeno due settimane (tempo medio stimato essere sufficiente per gestire delle crisi di liquidità)⁸⁹.

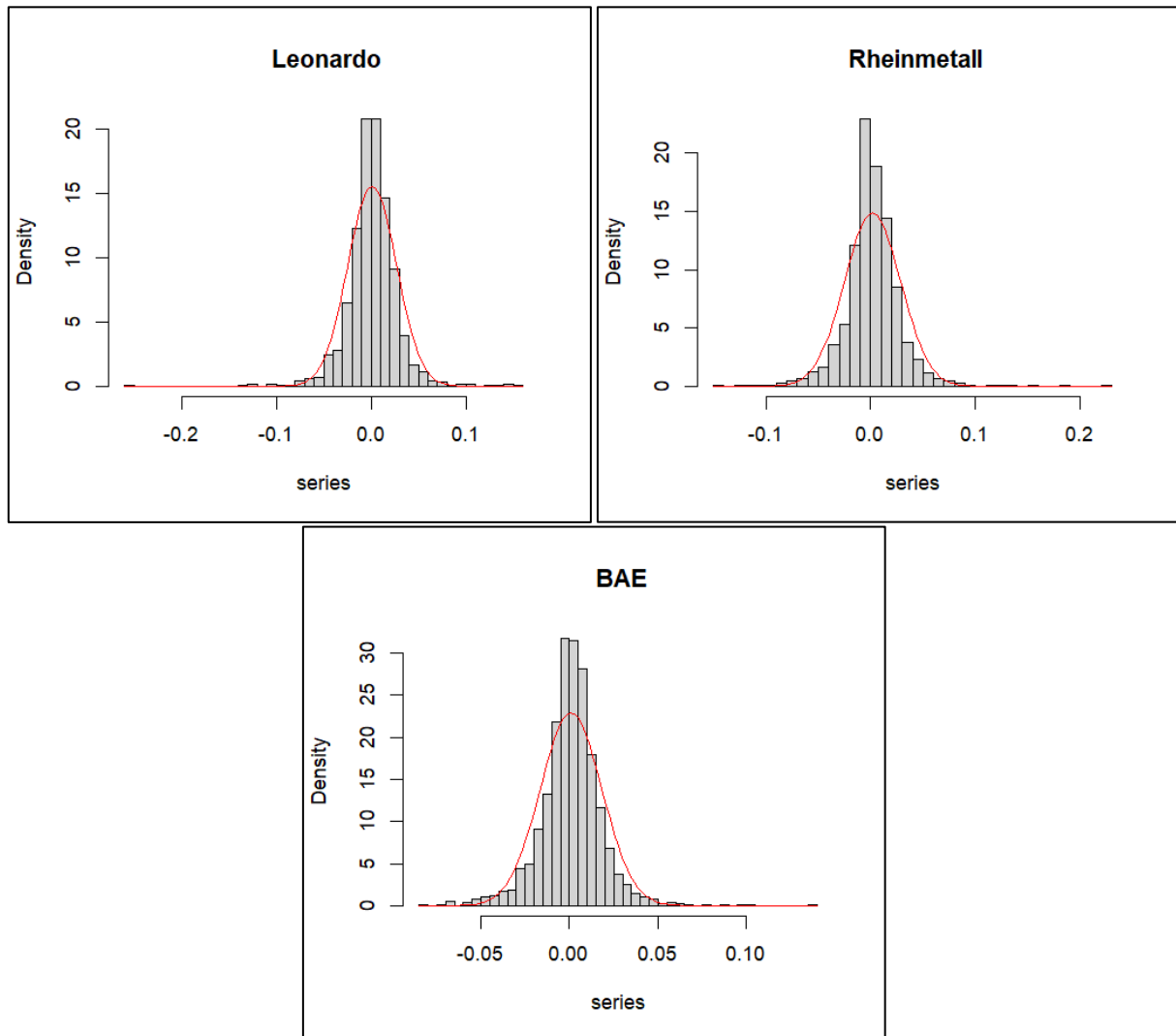
L'ipotesi di normalità

In ambito finanziario più che altri ambienti di lavoro l'analisi statistica deve prendere in considerazione un aspetto fondamentale dei dati, ossia la loro non normalità. Infatti, debito alle forti oscillazioni ed alla dinamicità dei mercati, le informazioni che provengono da variabili finanziarie non possiedono quasi mai (salvo qualche raro caso) una distribuzione Normale. Nella situazione in esame si verifica proprio questa condizione e per tale ragione è indispensabile un'ipotesi semplificatrice che mediante una forte assunzione di normalità permetta di proseguire lo studio ridimensionando notevolmente la complessità dei calcoli. Nonostante ciò, è corretto dimostrare come i rendimenti dei titoli non possiedano il requisito della normalità mediante l'impiego di grafici e test statistici così da prendere coscienza di quanto affermato precedentemente.

I primi tre grafici che si osservano sono istogrammi che illustrano la distribuzione dei rendimenti dei tre titoli appartenenti al settore della difesa. L'asse delle ascisse contiene i valori delle serie storiche, ovvero i rendimenti giornalieri dell'asset, mentre quello delle ordinate la densità di probabilità, ossia la probabilità che un valore cada in un determinato intervallo. Inoltre, al grafico viene aggiunta una

⁸⁹ Comitato di Basilea per la vigilanza bancaria, “*Minimum Capital Requirements for Market Risk*”.

curva di densità normale rossa che indica la distribuzione di una Gaussiana (dalla tipica forma a campana) la quale dovrebbe essere ben seguita da quella dei rendimenti per accertarne la normalità.

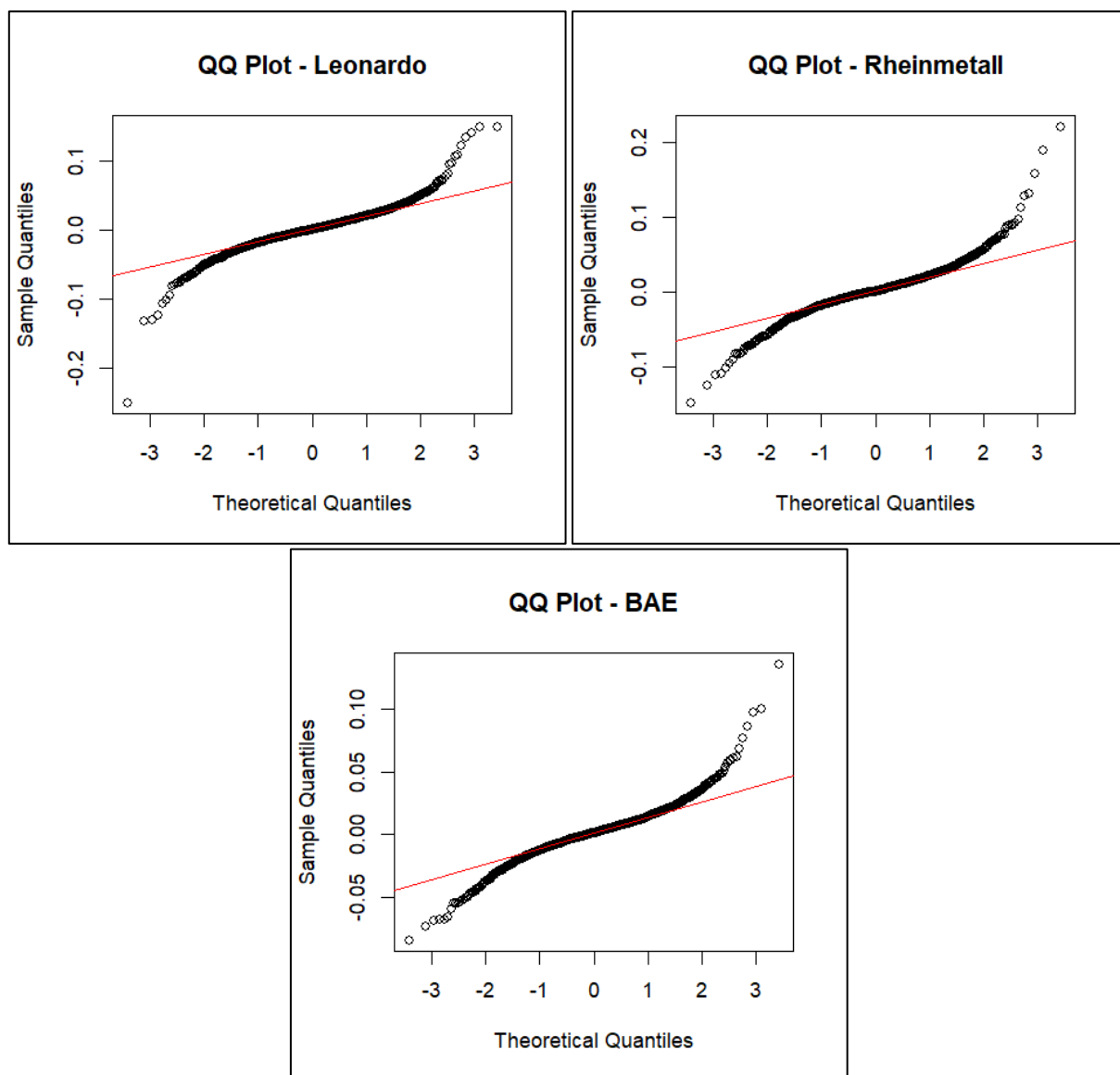


3.1 Normalità dei rendimenti

La fuoriuscita delle barre centrali dell'istogramma mostra come l'ipotesi di normalità venga violata, anche se le restanti colonne sembrano apparentemente seguire l'andamento della curva rossa facendo dubitare sulla conclusione appena presa.

Per questa ragione, si adoperano altre forme di rappresentazione che permettano una comprensione più chiara del problema come i *Q-Q plot*, cioè dei grafici statistici che mettono a confronto i quantili dei dati empirici (posizionati nell'asse delle ordinate) con i quantili di una distribuzione di riferimento (posizionati nell'asse delle ascisse). Se i dati seguono davvero quella distribuzione, i punti nel grafico

si dispongono lungo una retta, ma da quello che si può notare osservando i *Q-Q plot* dei tre titoli, i puntini alle estremità delle rette incominciano ad allontanarsi indicando la presenza di codi pesanti.



3.2 *Q-Q plot*

Tuttavia, neanche questo metodo appare immediatamente comprensibile per i meno esperti nel verificare la normalità dei rendimenti ed è per questo motivo che, al di là dei grafici, si implementano test statistici che diano risposte certe e non lascino spazio ad un'eccessiva interpretabilità. È il caso dello “Jarque Bera test” che fra le altre dà indicazioni su asimmetria e curtosi delle distribuzioni e permette attraverso il calcolo del pvalue di valutare se c'è o meno evidenza statistica per rifiutare l'ipotesi nulla di normalità.

<pre>===== ANALISI: Leonardo ===== Skewness: -0.4266386 Kurtosis: 13.54756 Jarque Bera Test data: series X-squared = 7222.6, df = 2, p-value < 2.2e-16</pre>	<pre>===== ANALISI: Rheinmetall ===== Skewness: 0.5364431 Kurtosis: 10.71688 Jarque Bera Test data: series X-squared = 3915.2, df = 2, p-value < 2.2e-16</pre>
<pre>===== ANALISI: BAE ===== Skewness: 0.2970959 Kurtosis: 8.735337 Jarque Bera Test data: series X-squared = 2144.4, df = 2, p-value < 2.2e-16</pre>	

3.3 Jarque Bera Test

L'output di R presenta una *skewness* (asimmetria) diversa da 0 per tutte e tre le attività finanziarie, segno della presenza della stessa per tutte e tre le distribuzioni, una *kurtosis* superiore a 3 che simboleggia l'esistenza di *fat tails* (code pesanti) ed un pvalue molto piccolo che suggerisce evidenza statistica per rifiutare l'ipotesi nulla alla base del test.

Pertanto, ora si può concludere con certezza che la distribuzione dei rendimenti dei tre titoli non è Normale e proseguire, ad ogni modo, con la misurazione del VaR.

3.3 Metodologia e strumenti d'analisi

Il caso studio è stato sviluppato mediante l'impiego di strumenti statistici in grado di rispondere alle necessità del *risk management*. Nello specifico, è stato adottato il software R-studio come base per l'elaborazione dei dati e l'implementazione dei modelli statistici, mentre per il calcolo del VaR è stato scelto il metodo Monte Carlo coerentemente con le finalità dell'indagine.

Il software: R

L'uso del software R-studio si deve al fatto che esso è un linguaggio di programmazione e ambiente di calcolo statistico ampiamente diffuso in ambito accademico e professionale. In primo luogo, esso consente di gestire in modo efficiente grandi quantità di dati finanziari e di applicare una vasta gamma

di tecniche statistiche e modelli econometrici. Inoltre, R offre numerose librerie dedicate all'analisi finanziaria (come *quantmod*, *PerformanceAnalytics*), che permettono di implementare facilmente modelli di rischio e di effettuare simulazioni complesse.

Un ulteriore punto di forza di R è rappresentato dalla sua flessibilità, che consente all'utente di personalizzare completamente le procedure di analisi, adattandole alle specifiche esigenze del lavoro empirico.

Infine, R è uno strumento *open source*, caratteristica che lo rende accessibile e trasparente, favorendo la replicabilità dei risultati e l'affidabilità delle analisi svolte. Per tali motivi, esso rappresenta una delle soluzioni più utilizzate nella ricerca quantitativa in ambito finanziario ed è lo strumento di cui ci si serve per lo sviluppo di questa tesi.

Il metodo di calcolo

Per la stima del Value at Risk è stato adottato il metodo di simulazione Monte Carlo, in alternativa ai metodi parametrico e storico. Tale scelta è motivata non tanto dalla maggiore flessibilità e capacità del metodo di adattarsi a distribuzioni dei rendimenti non necessariamente normali, condizione che non è stata presa in considerazione in questa tesi (data la forte ipotesi di Normalità assunta) a favore di un sistema d'indagine semplice e di una serie di calcoli non eccessivamente elaborati. Ma piuttosto dalla possibilità di generare scenari ipotetici anche al di fuori delle osservazioni storiche, catturando meglio il rischio di eventi estremi ed ottenendo una stima più robusta del VaR rispetto a quella che si avrebbe con metodi alternativi. Questo aspetto è particolarmente rilevante in contesti caratterizzati da elevata incertezza o da cambiamenti strutturali.

Per giunta, la scelta di un livello di confidenza del 99% è in linea con la prassi accademica e regolamentare. Questo approccio è più rigoroso rispetto a quello con una confidenza del 95% perché si cala più in profondità nella coda della distribuzione delle perdite catturando, di conseguenza, eventi più rari, ma anche più pericolosi ed impattanti. Inoltre, in ambito prettamente patrimoniale, il 99% di fiducia garantisce maggiore solidità patrimoniale rispetto al 95% che potrebbe condurre a conclusioni errate. Infatti, soprattutto in periodi di crisi e ragionando in termini monetari la differenza sussistente tra i due livelli di fiducia può tramutarsi in decine di migliaia di euro che rischiano di svanire nel nulla.

3.4 Procedura d'implementazione: fasi operative e struttura del codice in R-studio

Si passa ora a descrivere la procedura implementata in R-studio per il conseguimento del fine preposto cosicché si possano interpretare, poi, i risultati raggiunti senza avere dubbi su come essi siano stati ottenuti. Si inizia, dunque, dalla funzione costruita per la realizzazione della simulazione Monte Carlo, ossia alcune righe di codice che permettono per ciascuna finestra temporale di rendimenti di stimarne la media e la deviazione standard affinché sia possibile la costruzione di 10.000 scenari ipotetici di rendimenti futuri che si basano su un'ipotesi di Normalità caratterizzata proprio da questi parametri. Tutto ciò, che ha orizzonte temporale giornaliero, viene in seguito aggregato sul lasso temporale di 10 giorni attraverso la somma dei rendimenti simulati.

Detto ciò, il VaR si origina dall'individuazione del quantile delle perdite simulate con $\alpha = 1\%$ e conseguentemente livello di confidenza $1 - \alpha$.

È fondamentale sottolineare operativamente com'è stato determinato l'indicatore di rischio, ovvero in maniera dinamica considerando per ogni giorno t i 250 rendimenti precedenti. Ciò significa che al posto di determinare staticamente il VaR come risultato di una serie di rendimenti di un certo periodo (che non vengono più presi in considerazione per il calcolo del VaR successivo perdendo così l'influenza di eventi accaduti proprio in quel momento, ma che potrebbero aver influenzato anche rendimenti futuri), si è optato per una computazione dinamica. In questo modo, l'orizzonte temporale mobile si sposta progressivamente nel tempo fornendo valori aggiornati i quali catturano la mutabilità del rischio e l'impatto che avvenimenti passati hanno avuto e continuano ad avere nei rendimenti proporzionalmente alla distanza che separa attimo in cui si sta compiendo la misurazione e istante in cui l'episodio straordinario si è manifestato.

Si porta un esempio per chiarire il concetto di VaR dinamico: se si volesse determinare l'indicatore di rischio il 251esimo giorno si userebbero i 250 rendimenti precedenti ad esso, ossia quelli che vanno dal primo al 250esimo giorno. Analogamente, se lo si calcolasse per il 252esimo giorno si utilizzerebbero sempre i 250 rendimenti precedenti ad esso, ma in questo caso quelli dal secondo al 251esimo giorno e così via.

Una volta fatto ciò, si è proceduto con la trasformazione logaritmica e l'aggregazione dei rendimenti su base 10 giorni affinché ci fosse concordanza tra l'orizzonte di tempo con cui era espresso il VaR e quello delle perdite osservate. Da qui si è continuato con il cuore del lavoro, ovvero l'osservazione delle violazioni date da quei valori dei rendimenti (in questo caso si parla di perdite) che vanno al di sotto della perdita massima stimata dal VaR.

Infine, le ultime righe di codice sono state dedicate alla rappresentazione grafica di tali violazioni e alla costruzione di test in grado di giudicare l'adeguatezza della misurazione della soglia determinata dal VaR e che appartengono alla già precedentemente descritta procedura di *backtesting*.

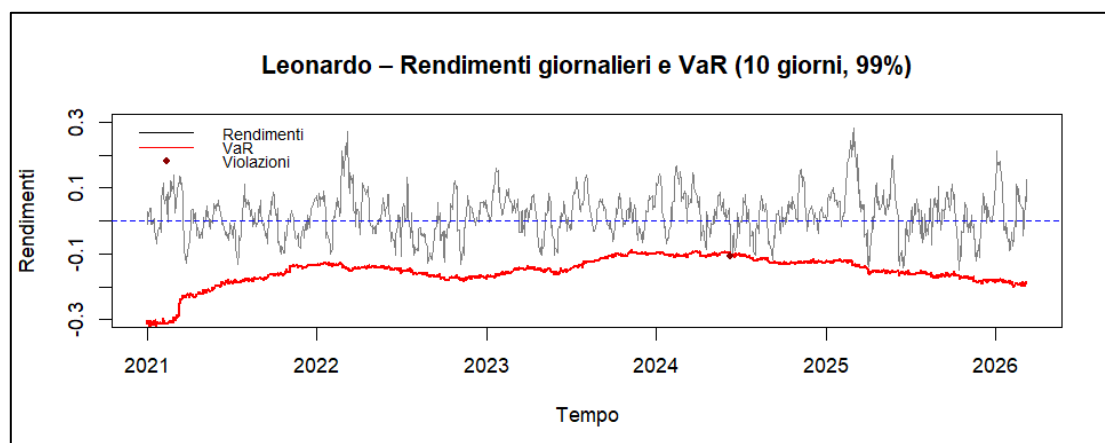
3.5 Risultati dell'esperimento

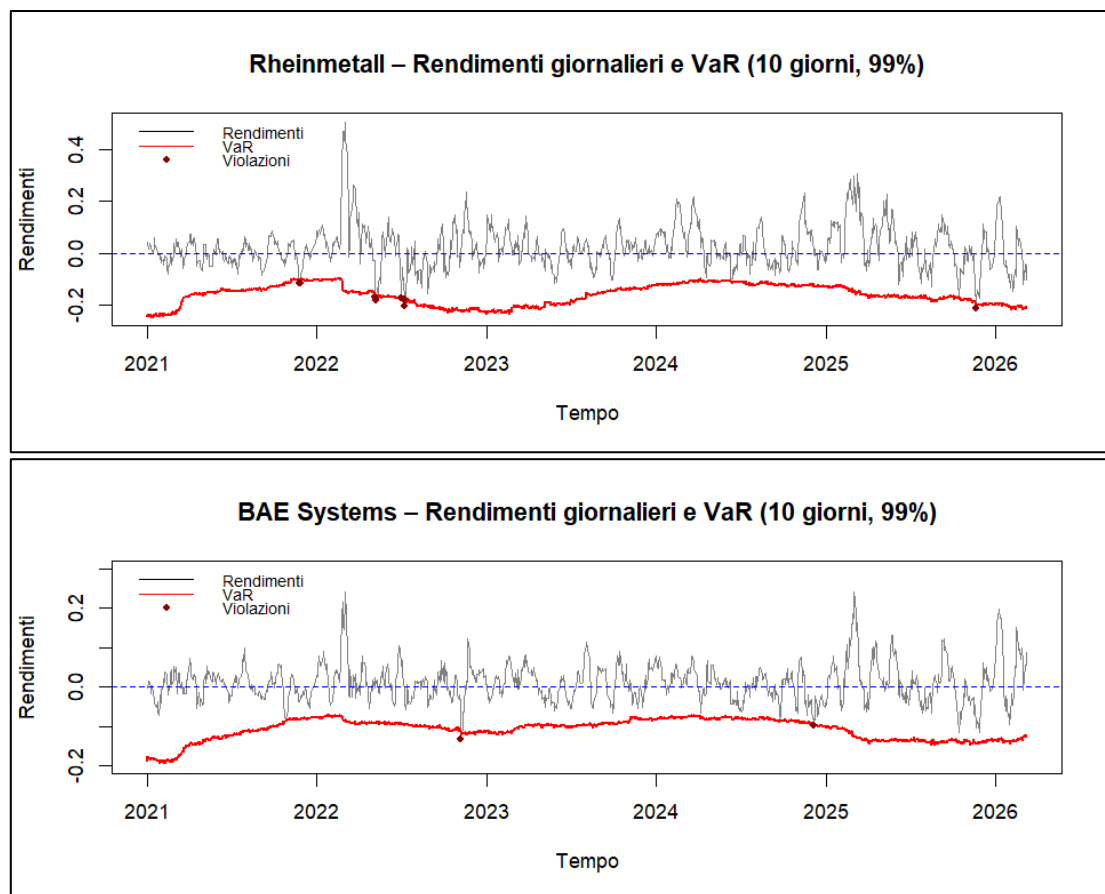
Ciò che ci si era preposti all'inizio dello studio era di verificare se per i titoli in esame il VaR venisse violato o meno e, quindi, se esso potesse essere definito una buona misura di rischio oppure no. Da quello che si osserva nella tabella sottostante che funge da riepilogo dei risultati dei test condotti si può affermare che le violazioni sussistano effettivamente e che siano precisamente una sola per Leonardo S.p.A, 9 per Rheinmetall AG e 2 per BAE Systems plc. Perciò durante il periodo di riferimento queste tre società hanno subito (nelle quantità calcolate) perdite maggiori rispetto a quelle stimate infrangendo così la soglia del VaR.

	Asset	Osservazioni	Violazioni	Tasso_di_violazione
1	Leonardo	1298	2	0.0015
2	Rheinmetall	1298	9	0.0069
3	BAE	1298	2	0.0015

3.4

A testimonianza del fatto viene fornita anche una serie di grafici che mostrano palesemente tali violazioni.





3.5 Rendimenti e soglia del VaR

Come chiaramente definito dalla legenda, la linea nera che si vede oscillare all'interno del grafico rappresenta i rendimenti dell'asset, la tratteggiata blu il rendimento nullo intorno al quale si notano fluttuare gli stessi rendimenti, mentre la rossa è la soglia definita dal VaR sotto la quale qualsiasi perdita viene marcata con un puntino rosso ad indicare l'avvenuta violazione. Ecco che la prima parte del lavoro è raggiunta, ma una volta aver dimostrato l'esistenza di tali violazioni per il VaR è opportuno svolgere il processo di *backtesting* necessario per capire se il modello realizzato funzioni correttamente.

A dire il vero, qualche riflessione è già possibile ora visto la tipologia di dati a trattare e la forte ipotesi di normalità assunta. Con queste due premesse, dunque, ci si aspetta che i seguenti test falliscano dato che il sistema implementato non coglie pienamente la natura dell'oggetto di studio, ma a fini contenutistici si inserisce per la completezza dell'analisi.

Approfondendo quanto detto nel secondo capitolo della tesi, il test di Kupiec e il test di Christoffersen insieme costituiscono un test conosciuto come *Conditional Coverage*, ossia un test congiunto che

fornisce un giudizio complessivo sul modello e che è calcolato come la somma delle statistiche degli altri due test.

$$\text{Conditional Coverage (LR}_{cc}) = \text{Unconditional Coverage (LR}_{uc}) + \text{Independence Test (LR}_{ind})$$

3.2

Unconditional Coverage e *Independence Test* sono, dunque, gli altri due nomi con i quali si conoscono rispettivamente il test di Kupiec e quello di Christoffersen. Infatti, il primo fa riferimento al disinteresse per il momento nel quale avvengono le violazioni (*unconditional*, “incondizionato”) e all’interesse esclusivo per il numero totale di violazioni e la loro coerenza con la probabilità stabilita. Al contrario il secondo, vuole valutare proprio la distribuzione temporale di queste violazioni e l’esistenza o meno di qualche cluster (*independence*, “indipendenza”).

Pertanto, calcolando il *Conditional Coverage* si ottengono i seguenti valori:

Asset	Conditional_coverage_stat	Conditional_coverage_pvalue
Leonardo	25.3637	0.000003107
Rheinmetall	42.2396	0.000000001
BAE	14.5787	0.000682778

3.6

A questo punto l’incorrettezza è duplicemente evidenziabile mediante l’interpretazione del pvalue del test oppure della sua statistica test LR_{cc} . Per l’appunto, tale statistica si distribuisce come una Chi-quadro con 2 gradi di libertà che identifica il suo valore critico in 9,210. Dato che $LR_{cc} > \chi^2_{0.01,2}$ l’ipotesi nulla di correttezza del modello è rifiutata e, perciò, esso non funziona come dovrebbe. L’intuizione sarebbe stata ancora più veloce se si fossero osservati i pvalue che essendo così bassi avrebbero indicato immediatamente una forte evidenza statistica per rifiutare H_0 (H_0 sta ad indicare l’ipotesi nulla).

Una precisazione da fare è quella in merito alla distribuzione χ^2 . Infatti, tutti questi test sfruttano la teoria della verosimiglianza per trarre le loro conclusioni. Nello specifico, quella che viene calcolata è la statistica test del log-rapporto di verosimiglianza, ovvero il rapporto tra il logaritmo di due verosimiglianze premoltiplicato per -2 che, per definizione, si distribuisce come una Chi-quadro.

$$LR_{cc} = -2 \ln\left(\frac{L_1}{L_2}\right) \sim \chi^2$$

3.3

Dove L_1 è la verosimiglianza del modello teorico, mentre L_2 è la verosimiglianza del modello osservato.

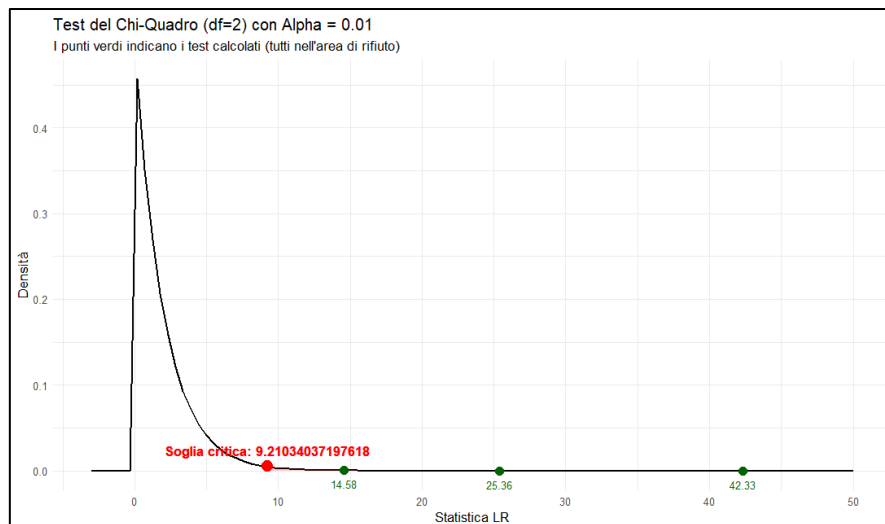
La scelta di utilizzare proprio la teoria della verosimiglianza si deve a distinti motivi. In primo luogo, una distribuzione Chi-quadro si origina dalla somma dei quadrati di variabili normali standard che, in questo caso, sono date dagli errori che provengono dalla differenza tra violazioni che ci si aspetta e quelle realmente osservate. La trasformazione logaritmica garantisce l'elevamento al quadrato di questi errori e permette la loro sommatoria riconducendo il tutto a questa distribuzione.

In secondo luogo, esiste un teorema, il Teorema di Wilks, il quale sostiene che fare il rapporto tra due verosimiglianze e moltiplicarlo per -2 conduca il risultato finale ad avere la distribuzione Chi-quadro che permette la formulazione di deduzioni dato che è una delle distribuzioni note conosciute.

Infine, il *backtesting* trasforma i rendimenti in una serie di 0 ed 1 rispettivamente al caso in cui non ci si trovi davanti ad una violazione oppure sì. In statistica, tale operazione si tramuta in una successione di variabili di Bernoulli alla quale vi si deve calcolare, poi, la funzione di verosimiglianza e determinare il rapporto $\frac{L_1}{L_2}$. Da qui, poi, il logaritmo che per argomenti vicini all'1 restituisce valori prossimi a 0, mentre per valori vicini a 0 restituisce numeri negativi molto grandi i quali, grazie ad un -2 diventano positivi e si adattano alla curva della distribuzione Chi-quadro.

I gradi di libertà considerati, invece, sono 2 nel test appena realizzato perché esso è la somma di due errori quadrati, quello sul numero delle violazioni rispetto alla probabilità stabilita e quello legato all'indipendenza tra loro delle stesse violazioni, mentre è uno solo nei due test svolti singolarmente.

Detto ciò, quanto più piccolo e meno distante dallo 0 è LR_{cc} , tanto più piccolo è lo scarto tra modello osservato e teorico e quindi aumenta la sua bontà. Viceversa, tanto maggiore è LR_{cc} e tanto più grande sarà lo scarto indicando un fallimento del modello stesso. Ecco che questa è una riconferma di quanto affermato sopra.



3.7 Rappresentazione del Conditional Coverage

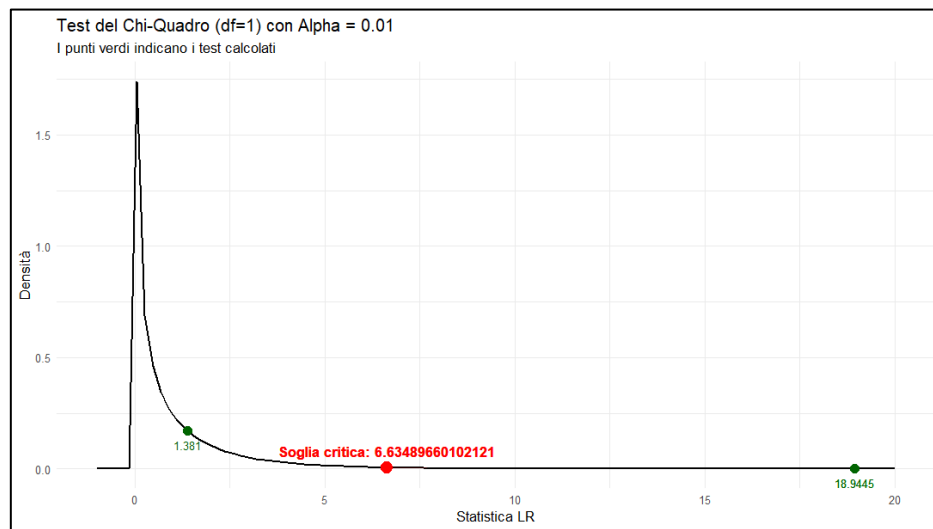
Tuttavia, anche se il *Conditional Coverage* non indica un'adeguatezza del modello impiegato, è curioso osservare i risultati prodotti dai due sotto test per ogni titolo così da capire se vi è un problema di stima del rischio totale oppure una reazione non tempestiva del VaR ai cambiamenti di mercato.

Asset	Osservazioni	Violazioni	Tasso_di_violazione	Kupiec_stat	Kupiec_pvalue
Leonardo	1298	1	0.0008	18.9445	0.00001
Rheinmetall	1298	9	0.0069	1.3810	0.23993
BAE	1298	1	0.0008	18.9445	0.00001

3.8

Il primo che si analizza è il test di Kupiec che si erge sull'ipotesi nulla di avere un numero di violazioni pari all'1% delle osservazioni totali. In base ai pvalue ottenuti, però, solo nel caso di Rheinmetall AG non sussiste evidenza statistica per rifiutare tale ipotesi ($pvalue > 0.05$), mentre per le altre due società H_0 essa viene rifiutata. Questo significa che il numero di violazioni realmente avvenute (lo 0.08% delle osservazioni) è diverso da quelle attese (l'1% delle osservazioni) e precisamente molto inferiore (1 al posto di 13) portando il VaR ad essere definito troppo "conservativo", ovvero generatore di una previsione che sovrastima il rischio. Anche se non completamente fedele alle aspettative, Rheinmetall AG, con tasso di violazione dello 0.69% si avvicina maggiormente all'1% stabilito, segno di un modello più calibrato.

Graficamente, l'area critica si trova a destra del pallino rosso e, coerentemente con quello che si è detto, la statistica 18.9445 si trova dentro di essa. All'opposto, il valore 1.381 posto a sinistra conferma il miglior funzionamento per il modello di Rheinmetall AG.



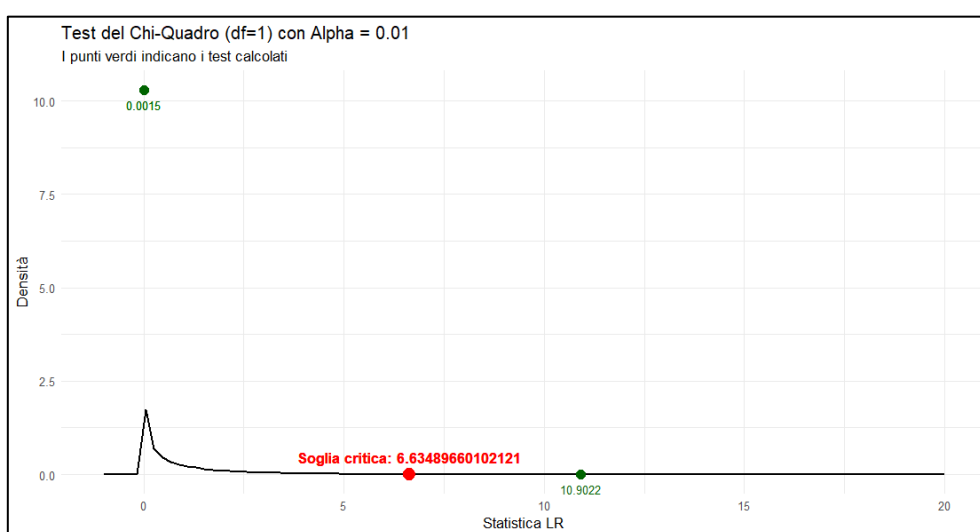
3.9 Rappresentazione del Test di Kupiec

Quello che si sarebbe portati a pensare è che un numero inferiore di violazioni sia migliore in qualsiasi caso, ma dal momento in cui l'obiettivo diventa quello di voler comprendere la validità e l'affidabilità di uno strumento di misurazione del rischio questa considerazione perde notevolmente di valore. Difatti, possedere un VaR conservativo, ossia troppo prudente, conduce ad una sovrastima del pericolo che si traduce, in ottica patrimoniale, in accantonamenti eccessivi di capitale per un istituto di credito che potrebbe impiegarlo diversamente.

Il test di Christoffersen, invece, si struttura sull'ipotesi nulla di indipendenza temporale tra le violazioni, ossia sul fatto che esse si distribuiscano casualmente.

Asset	Christoffersen_stat	Christoffersen_pvalue
Leonardo	0.0015	0.9687
Rheinmetall	10.9022	0.0010
BAE	0.0015	0.9687

Contrariamente a ciò che è accaduto prima, ora è solo Rheinmetall AG ad avere sufficiente evidenza statistica per rifiutare l'ipotesi d'indipendenza date la statistica test elevata ed il pvalue basso, mentre valori di quest'ultimo nettamente superiori a 0.05 come quelli di Leonardo S.p.A e BAE Systems plc insieme a statistiche test così basse non portano evidenza statistica per affermare di poter rifiutare l'ipotesi nulla di partenza. Dunque, mentre per la società inglese ed italiana non sono presenti violazioni consecutive, per quella tedesca si riconoscono dei cluster, ovvero dei gruppi di violazioni che si concentrano, in particolare, nel periodo centrale dell'anno 2022 (osservabili dai grafici dei rendimenti inseriti precedentemente).



3.11 Rappresentazione del Test di Christoffersen

Se si posizionano le statistiche test calcolate all'interno della loro distribuzione di riferimento, ovvero un Chi-quadro con un grado di libertà, si può notare come il valore 10.9022 si trovi nella zona di rifiuto, mentre i valori 0.0015 nell'area di non rifiuto e posti molto in alto perché per tale valore la funzione di densità assume valore 10.32 che nel grafico si posiziona proprio a quell'altezza.

3.5.1 Cause probabili delle violazioni individuate

Un ulteriore elemento di analisi riguarda la collocazione temporale delle violazioni del VaR, che consente di collegare i risultati quantitativi al contesto economico-finanziario reale. In particolare, le violazioni osservate per Rheinmetall AG e BAE Systems plc nel corso del 2022 risultano coerenti con il periodo di forte instabilità generato dall'invasione russa dell'Ucraina, evento che ha determinato

un significativo aumento della volatilità nei mercati e, in modo ancora più marcato, nel settore della difesa. In questo contesto, il titolo Rheinmetall ha mostrato un numero elevato di violazioni concentrate nello stesso intervallo temporale, evidenziando una dinamica di clustering riconducibile a shock improvvisi e persistenti che il modello non è riuscito a catturare tempestivamente.

Diversamente, nel caso di BAE Systems, la violazione si presenta come un episodio isolato, suggerendo che il modello, pur in presenza di turbolenze di mercato, abbia mantenuto un comportamento complessivamente prudente.

Per quanto riguarda Leonardo S.p.A., la violazione individuata a metà del 2024 appare invece riconducibile a fattori più specifici, legati all'evoluzione delle aspettative di mercato e alle dinamiche del settore, anch'esse influenzate dal contesto geopolitico internazionale. In questo caso, l'assenza di ulteriori violazioni nello stesso periodo suggerisce la natura episodica dello shock, piuttosto che la presenza di una criticità strutturale del modello.

Nel complesso, tali evidenze confermano come le violazioni del VaR non siano distribuite casualmente nel tempo, ma tendano a manifestarsi in corrispondenza di eventi rilevanti, mettendo in luce i limiti dello strumento nel cogliere variazioni improvvise della volatilità.

CONCLUSIONI

L'obiettivo del presente lavoro è stato quello di valutare l'affidabilità del Value at Risk come misura di rischio finanziario, attraverso un'analisi empirica applicata a tre società operanti nel medesimo settore, ma appartenenti a contesti geografici differenti: Leonardo S.p.A., Rheinmetall AG e BAE Systems plc.

Il percorso di analisi è partito dalla raccolta dei dati di mercato e dalla costruzione dei rendimenti logaritmici, per poi passare alla verifica delle loro principali proprietà statistiche. In particolare, è emersa una chiara deviazione dall'ipotesi di normalità, con evidenze di asimmetria e code pesanti. Nonostante ciò, per ragioni di semplicità operativa e per evitare di introdurre un livello eccessivo di complessità nell'elaborazione empirica, si è scelto di adottare il metodo di simulazione Monte Carlo assumendo una distribuzione normale dei rendimenti. Tale scelta rappresenta quindi un compromesso tra rigore teorico e applicabilità pratica, consentendo comunque di implementare un modello coerente con gli obiettivi dell'analisi, pur nella consapevolezza dei suoi limiti. Successivamente, il rischio è stato stimato in forma dinamica mediante una finestra mobile, al fine di coglierne l'evoluzione nel tempo.

Una volta ottenute le serie di VaR, l'analisi si è concentrata sulla fase di *backtesting*, con l'obiettivo di verificare la coerenza tra le perdite osservate e quelle stimate dal modello. I risultati hanno mostrato differenze rilevanti tra i titoli considerati. In particolare, per Leonardo e BAE Systems il numero di violazioni è risultato significativamente inferiore a quello atteso, suggerendo un comportamento eccessivamente prudente del modello. Al contrario, nel caso di Rheinmetall il VaR è apparso più coerente con la frequenza teorica delle violazioni, pur mostrando criticità nella loro distribuzione temporale.

L'applicazione congiunta del test di Kupiec e del test di Christoffersen ha consentito di approfondire ulteriormente tali aspetti. Se da un lato il primo ha evidenziato problemi di calibrazione per alcuni titoli, dall'altro il secondo ha messo in luce la presenza di fenomeni di clustering delle violazioni, segnalando una difficoltà del modello nel cogliere tempestivamente le variazioni della volatilità. In particolare, anche nei casi in cui il VaR risulta corretto in media, esso può rivelarsi meno efficace nei periodi di maggiore turbolenza, quando le violazioni tendono a concentrarsi.

L'analisi delle date in cui si sono verificate le violazioni ha inoltre permesso di collegare i risultati a specifici eventi economici e geopolitici, evidenziando come tali episodi siano spesso associati a fasi di forte instabilità dei mercati. Questo conferma che il VaR, pur essendo uno strumento ampiamente

utilizzato, presenta limiti rilevanti nella capacità di prevedere eventi estremi o cambiamenti improvvisi del contesto.

Alla luce di quanto emerso, si può concludere che il Value at Risk rappresenta una misura utile per la gestione del rischio in condizioni ordinarie, ma non sempre adeguata a descrivere in modo completo la dinamica delle perdite in presenza di shock rilevanti. Per questo motivo, il suo utilizzo dovrebbe essere affiancato da strumenti complementari, come misure di rischio basate sulla coda della distribuzione o modelli in grado di catturare meglio la variabilità nel tempo.

In definitiva, il lavoro svolto evidenzia come la valutazione del rischio finanziario richieda un approccio articolato, in cui l'utilizzo di un singolo indicatore non risulta sufficiente a cogliere tutte le dimensioni del fenomeno.

BIBLIOGRAFIA

- Amato, J. D., Furfine, C. H. (2004), Are credit ratings procyclical?, Journal of Banking & Finance.
- Amihud, Y. (2002), Illiquidity and stock returns, Journal of Financial Markets.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999), Coherent Measures of Risk, Mathematical Finance.
- Acerbi, C., Tasche, D. (2002), On the Coherence of Expected Shortfall, Journal of Banking & Finance.
- Basel Committee on Banking Supervision (1996), Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks, BIS.
- Basel Committee on Banking Supervision (2004), International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework.
- Basel Committee on Banking Supervision (2006), International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards.
- Basel Committee on Banking Supervision (2011), Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems.
- Basel Committee on Banking Supervision (2019), Minimum Capital Requirements for Market Risk, BIS.
- Basel Committee on Banking Supervision, Supervisory Framework for the Use of Backtesting in Conjunction with the Internal Models Approach, BIS.
- Basel Committee on Banking Supervision, Principles for Stress Testing, BIS.
- Banca d'Italia (2024), La diversificazione ingenua, L'economia per tutti.
- Brooks, C. (2019), Introductory Econometrics for Finance, Cambridge University Press.
- Der Kiureghian, A., Ditlevsen, O. (2009), Aleatory or epistemic? Does it matter?, Structural Safety.
- Danielsson, J., Financial Risk Forecasting, Wiley.
- Elton, E. J., Gruber, M. J., Brown, S. J., Goetzmann, W. N. (2014), Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, Wiley.

- Fishburn, P. C. (1977), Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns, *American Economic Review*.
- Fox, C. R., Tversky, A. (1995), Ambiguity Aversion and Comparative Ignorance, *The Quarterly Journal of Economics*.
- Gorton, G. (2008), *The Panic of 2007*, Federal Reserve Bank of Kansas City.
- Gujarati, D. N., Porter, D. C. (2009), *Basic Econometrics*, McGraw-Hill.
- Hamilton, J. D. (1989), A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle, *Econometrica*.
- Hasbrouck, J. (2007), *Empirical Market Microstructure*, Oxford University Press.
- Hull, J. C. (2021), *Options, Futures, and Other Derivatives*, Pearson.
- International Monetary Fund (2020), *Global Financial Stability Report: Markets in the Time of COVID-19*, Washington, DC.
- J.P. Morgan (1994), *RiskMetrics — Technical Document*, New York.
- Jorion, P. (2007), *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw-Hill.
- Kahneman, D., Tversky, A. (1979), Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, *Econometrica*.
- Knight, F. H. (1921), *Risk, Uncertainty and Profit*, Houghton Mifflin.
- Kupiec, P. (1995), Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models, *Journal of Derivatives*.
- Longin, F., Solnik, B. (2001), Extreme Correlation of International Equity Markets, *Journal of Finance*.
- Macaulay, F. (1938), Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rates.
- Mandelbrot, B. (1963), The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business*.
- Markowitz, H. (1952), Portfolio Selection, *Journal of Finance*.
- Markowitz, H. (1959), *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Yale University Press.

McNeil, A. J., Frey, R., Embrechts, P. (2005), Quantitative Risk Management, Princeton University Press.

Merton, R. C. (1976), Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous, Journal of Financial Economics.

Pace, L., Salvan, A., Introduzione alla statistica: II Inferenza, verosimiglianza, modelli, CEDAM.

Pearson, K. (1905), Skew variation: a rejoinder, Biometrika.

Power, M. (2005), The Invention of Operational Risk, Review of International Political Economy.

Rawnsley, A. (1995), Total Risk: Nick Leeson and the Fall of Barings Bank, HarperCollins.

Saunders, A., Allen, L. (2010), Credit Risk Management, Wiley.

Sharpe, W. F. (1964), Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, Journal of Finance.

Sortino, F. A., Van der Meer, R. (1991), Downside Risk, Journal of Portfolio Management.

Sortino, F. A., Price, L. N. (1994), Performance Measurement in a Downside Risk Framework, Journal of Investing.

Stuart, A., Ord, K. (1994), Kendall's Advanced Theory of Statistics, Edward Arnold.

Taleb, N. N. (2007), The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable.

Tetlock, P. E., Gardner, D. (2015), Superforecasting: The Art and Science of Prediction.

European Systemic Risk Board (2014), The Concept of Systemic Risk.